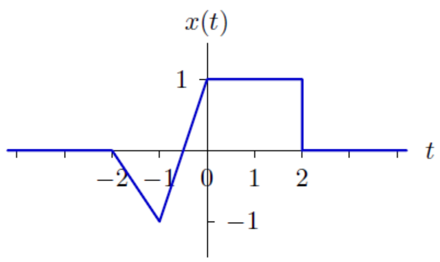
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, FACULDADE GAMA

Sinais e Sistemas - Lista 1

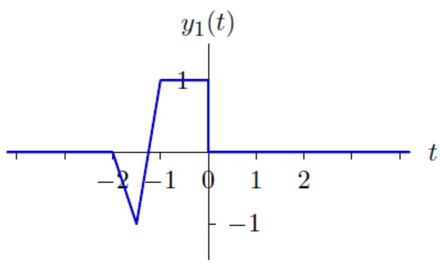
Gabarito

4 de outubro de 2015

1. Considere o sinal $x(t)$ mostrado na figura abaixo. O sinal é zero fora do intervalo $-2 < t < 2$.



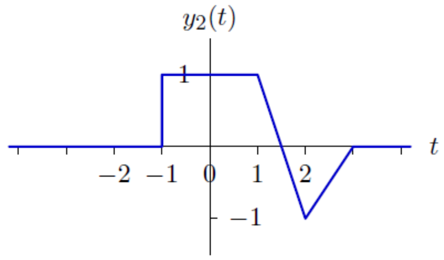
a) O gráfico a seguir representa o sinal $y_1(t)$. Determine uma expressão para $y_1(t)$ em função de $x(t)$.



Resposta:

$$y_1(t) = x(2t+2)$$

b) O gráfico a seguir representa o sinal $y_2(t)$. Determine uma expressão para $y_2(t)$ em função de x.



Resposta:

$$y_2(t) = x(1-t)$$

c) Considere $y_3(t) = x(2t+3)$. Determine todos os valores de t para os quais $y_3(t) = 1$.

Resposta:

$x(t) = 1$ no intervalo $0 \leq t < 2$. Portanto, $y_3(t) = 1$ se $0 \leq 2t+3 < 2$, logo:

$$-\frac{3}{2} \leq t < -\frac{1}{2}$$

d) Considere que $x(t)$ possa ser escrita como a soma de um sinal par, $x_p(t)$, e um sinal ímpar, $x_i(t)$. Encontre os valores de t para os quais $x_p(t) = 0$.

Resposta:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad \rightarrow \quad x(-t) = x_p(-t) + x_i(-t)$$

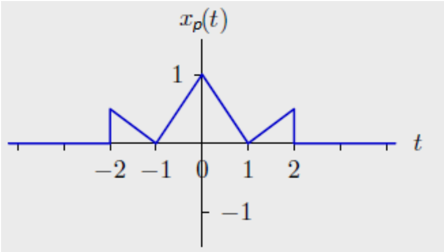
Pela definição de funções pares e ímpares:

$$x(-t) = x_p(-t) + x_i(-t) \quad \rightarrow \quad x(-t) = x_p(t) - x_i(t)$$

Isolando o termo $x_p(t)$ em ambas as equações:

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

Essa função pode ser plotada como:



Pelo gráfico é fácil ver que $x_p(t) = 0$ se $|t| > 2$ ou $|t| = 1$. Pela definição, $x(t) = 0$ para $t = \pm 2$. Logo, $|t| \geq 2$ ou $|t| = 1$.

2. Avalie os sistemas abaixo com relação a linearidade e causalidade:

   a) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

   Resposta:

   * Linearidade: é linear.

     $x_1(t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(2-t)$

     $x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_2(t) = x_2(t-2) + x_2(2-t)$

     $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_3(t) = x_3(t-2) + x_3(2-t)$

     $y_3(t) = \alpha x_1(t-2) + \beta x_2(t-2) + \alpha x_1(2-t) + \beta x_2(2-t)$

     $y_3(t) = \alpha(x_1(t-2) + x_1(2-t)) + \beta(x_2(t-2) + x_2(2-t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

   * Causalidade: não é causal.

     Para $t = 0$, $y(0) = x(-2) + x(2)$. Ou seja, ele utiliza amostras futuras. Portanto, não é causal.

   b) $y(t) = [\cos(3t)]x^2(t)$

   Resposta:

   * Linearidade: não é linear

     $x_1(t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = [\cos(3t)]x_1^2(t)$

     $x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_2(t) = [\cos(3t)]x_2^2(t)$

     $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_3(t) = [\cos(3t)]x_3^2(t)$

     $y_3(t) = [\cos(3t)](\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2)$

     $y_3(t) = [\cos(3t)][(\alpha x_1(t))^2 + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) + (\beta x_2(t))^2]$

     $y_3(t) = \alpha^2 y_1(t) + \beta^2 y_2(t) + 2[\cos(3t)]\alpha\beta x_1(t)x_2(t)$

   * Causalidade: é causal.

   c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

   Resposta:

* Linearidade:

  $x_1(t) \quad \to \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau$

  $x_2(t) \quad \to \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$

  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \to \quad y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)d\tau$

  $y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} \alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)d\tau$

  $y_3(t) = \alpha \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$

  $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

* Causalidade:

  Para $t = \frac{1}{2}$, $y(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{1} x(\tau)d\tau$. Ou seja, ele utiliza amostras futuras. Portanto, não é causal.

d) $y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ x(t) + x(t-2) & , t \geq 0 \end{cases}$

Resposta:

* Linearidade: é linear.

  Primeira parte: $y(t) = 0 \quad \to \quad$ é linear

  Segunda parte: $y(t) = x(t) + x(t-2)$

  $x_1(t) \quad \to \quad y_1(t) = x_1(t) + x_1(t-2)$

  $x_2(t) \quad \to \quad y_2(t) = x_2(t) + x_2(t-2)$

  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \to \quad y_3(t) = x_3(t) + x_3(t-2)$

  $y_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \alpha x_1(t-2) + \beta x_2(t-2)$

  $y_3(t) = \alpha(x_1(t) + x_1(t-2)) + \beta(x_2(t) + x_2(t-2)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

* Causalidade: é causal.

e) $y[n] = x[-n]$

Resposta:

* Linearidade:

  $x_1[n] \quad \to \quad y_1[n] = x_1[-n]$

  $x_2[n] \quad \to \quad y_2[n] = x_2[-n]$

  $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \to \quad y_3[n] = x_3[-n]$

  $y_3[n] = \alpha x_1[-n] + \beta x_2[-n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

* Causalidade: não é causal.

  Para $n = -1$, $y[-1] = x[1]$. Ou seja, ele utiliza amostras futuras. Portanto, não é causal.

f) $y[n] = x[n-2] - 2x[n-8]$

Resposta:

- Linearidade: é linear.

$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = x_1[n-2] - 2x_1[n-8]$

$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = x_2[n-2] - 2x_2[n-8]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_3[n] = x_3[n-2] - 2x_3[n-8]$

$y_3[n] = \alpha x_1[n-2] + \beta x_2[n-2] - 2\alpha x_1[n-8] - 2\beta x_2[n-8]$

$y_3[n] = \alpha(x_1[n-2] - 2x_1[n-8]) + \beta(x_2[n-2] - 2x_2[n-8]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

- Causalidade: é causal.

g) $y[n] = n^2 x[n]$

Resposta:

- Linearidade: é linear.

$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = n^2 x_1[n]$

$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = n^2 x_2[n]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_3[n] = n^2 x_3[n]$

$y_3[n] = n^2(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])$

$y_3[n] = \alpha n^2 x_1[n] + \beta n^2 x_2[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

- Causalidade:é causal.

h) $y[n] = \begin{cases} x[n] & , n \geq 1 \\ 0 & , n = 0 \\ x[n+1] & , n \leq -1 \end{cases}$

Resposta:

- Linearidade: é linear.

<u>Primeira parte:</u> $y[n] = x[n]$.

$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = x_1[n]$

$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = x_2[n]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_3[n] = x_3[n]$

$y_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

<u>Segunda parte:</u> $y[n] = 0 \quad \rightarrow$ é linear.

<u>Terceira parte:</u> $y[n] = x[n+1]$.

$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = x_1[n+1]$

$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = x_2[n+1]$

$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_3[n] = x_3[n+1]$

$y_3[n] = \alpha x_1[n+1] + \beta x_2[n+1] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

- Causalidade: não é causal.

Para $n = -1$, $y[-1] = x[0]$. Ou seja, ele utiliza amostras futuras. Portanto, não é causal.

i) $y(t) = x(t/3)$

Resposta:

* Linearidade: é linear.

  $x_1(t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = x_1(t/3)$

  $x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_2(t) = x_2(t/3)$

  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_3(t) = x_3(t/3)$

  $y_3(t) = \alpha x_1(t/3) + \beta x_2(t/3) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

* Causalidade:

  Para $t = -1$, $y(-1) = x(-\frac{1}{3})$. Ou seja, ele utiliza amostras futuras. Portanto, não é causal.

j) $y[n] = x[4n+1] + n$

Resposta:

* Linearidade: não é linear.

  $x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = x_1[4n+1] + n$

  $x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = x_2[4n+1] + n$

  $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_3[n] = x_3[4n+1] + n$

  $y_3[n] = \alpha x_1[4n+1] + \beta x_2[4n+1] + n = \alpha x_1[4n+1] + y_2[n]$

* Causalidade: não é causal.

3. Considere um sistema LIT cuja resposta ao sinal de entrada $x_1(t)$ seja o sinal $y_1(t)$, mostrados na figura. Determine e esboce a resposta do sistema às entradas:

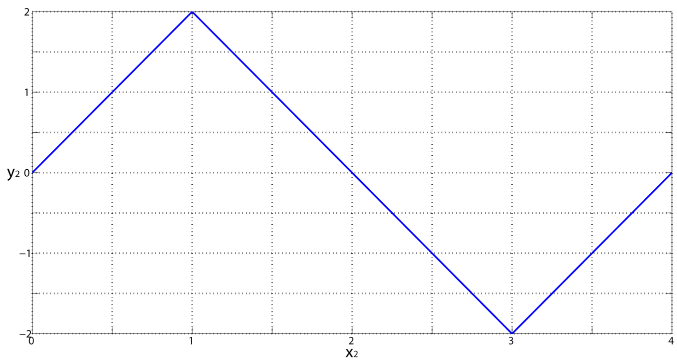
   a) $x_2(t)$

   Resposta:

   Escrever $x_2(t)$ em função de $x_1(t)$ e usar a propriedade de linearidade para encontrar a saída:

   $x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$

   Portanto, $y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$



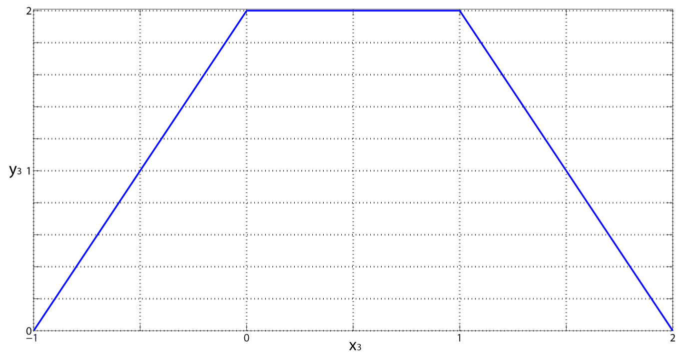
b) $x_3(t)$

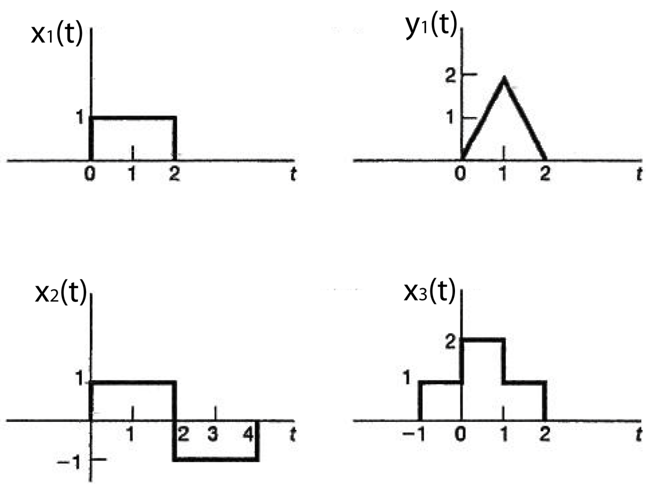
Resposta:

Escrever $x_3(t)$ em função de $x_1(t)$ e usar a propriedade de linearidade para encontrar a saída:

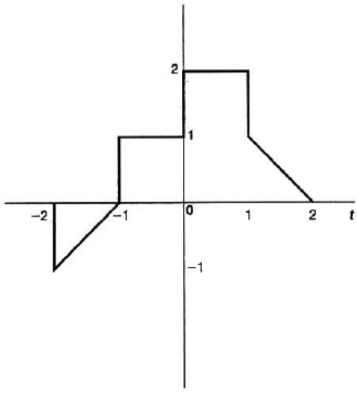
$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1)$

Portanto, $y_3(t) = y_1(t) + y_1(t+1)$





4. Um sinal de tempo contínuo x(t) é mostrado na figura abaixo. Esboce e coloque a escala para cada um dos seguintes sinais em função da resposta impulsional da figura dada.



a) $x(t-1)$

b) $x(2-t)$

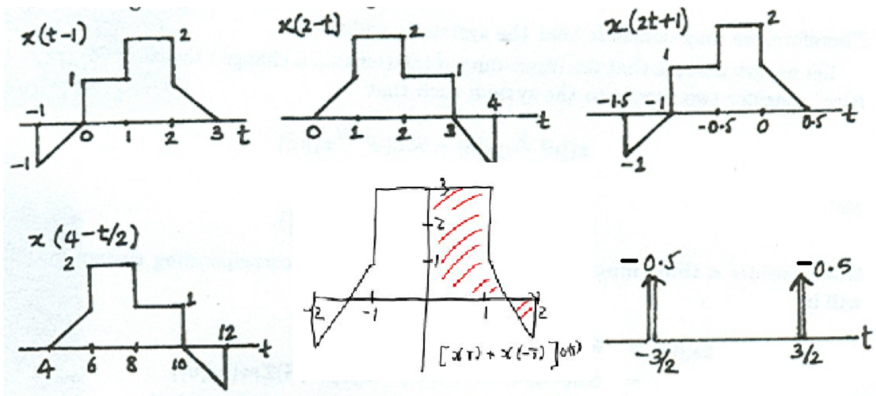
c) $x(2t+1)$

d) $x(4-t/2)$

e) $[x(t)+x(-t)]u(t)$

f) $x(t)[\delta(t+3/2)-\delta(t-3/2)]$

Resposta:



5. Um sistema linear de tempo contínuo S com entrada x(t) e saída y(t) possui os seguintes pares entrada-saída:

$$x(t)=e^{j2t} \rightarrow y(t)=e^{j3t}$$
$$x(t)=e^{-j2t} \rightarrow y(t)=e^{-j3t}$$

a) Se $x_1(t)=cos(2t)$, determine a saída correspondente a $y_1(t)$ para o sistema.

b) Se $x_2(t)=cos(2(t-\frac{1}{2}))$, determine a saída correspondente a $y_2(t)$ para o sistema.

Reposta:

a) Dado

$$x(t) = e^{j2t} \rightarrow y(t) = e^{j3t}$$
$$x(t) = e^{-j2t} \rightarrow y(t) = e^{-j3t}$$

E o sistema sendo linear,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{j2t} + e^{-j2t} \rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t})$$

e:

$$x_1(t) = cos(2t) \rightarrow y_1(t) = cos(3t)$$

b) Sabendo que $x_2(t)$ pode ser escrito como:

$$x_2(t) = cos(2(t - \frac{1}{2})) = \frac{e^{-j}e^{j2t} + e^{j}e^{-j2t}}{2}$$

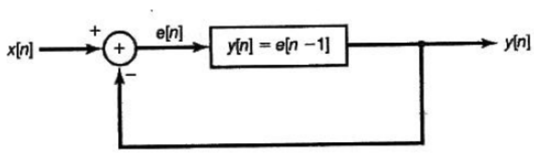
Usando a propriedade da linearidade, podemos reescrever:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-j}e^{j2t} + eje^{-j2t}) \rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-j}e^{j3t} + e^{j}e^{-j3t}) = cos(3t - 1)$$

então:

$$x_1(t) = cos(2(t - 1/2)) \rightarrow y_1(t) = cos(3t - 1)$$

6. Considere o sistema com realimentação:



a) Esboce a saída quando $x[n] = \delta[n]$ (Função impulso unitário)

b) Esboce a saída quando $x[n] = u[n]$ (Função Degrau unitário)

c) Esboce a saída quando $x[n] = \int u[n]$ (Função Rampa)

Resposta:

a) $e[n] = x[n] - y[n]$

$e[n] = x[n] - e[n-1]$

$y[n+1] = x[n] - y[n]$ para $n = 0$, $x[n] = 1$ e $n \neq 0$, $x[n] = 0$ tem-se:

$y[1] = x[0] - y[0] = 1 - 0 = 1$

$y[2] = x[1] - y[1] = 0 - 1 = -1$

$y[3] = x[2] - y[2] = 0 - (-1) = 1...$

b) $e[n] = x[n] - y[n]$

$e[n] = x[n] - e[n-1]$

$y[n+1] = x[n] - y[n]$ para $n > 0$, $x[n] = 1$ tem-se:

$y[1] = x[0] - y[0] = 1 - 0 = 1$

$y[2] = x[1] - y[1] = 1 - 1 = 0$

$y[3] = x[2] - y[2] = 1 - 0 = 1...$

c) $e[n] = x[n] - y[n]$

$e[n] = x[n] - e[n-1]$

$y[n+1] = x[n] - y[n]$ para $n > 0$, $x[n] = n$ tem-se:

$y[1] = x[0] - y[0] = 0 - 0 = 0$

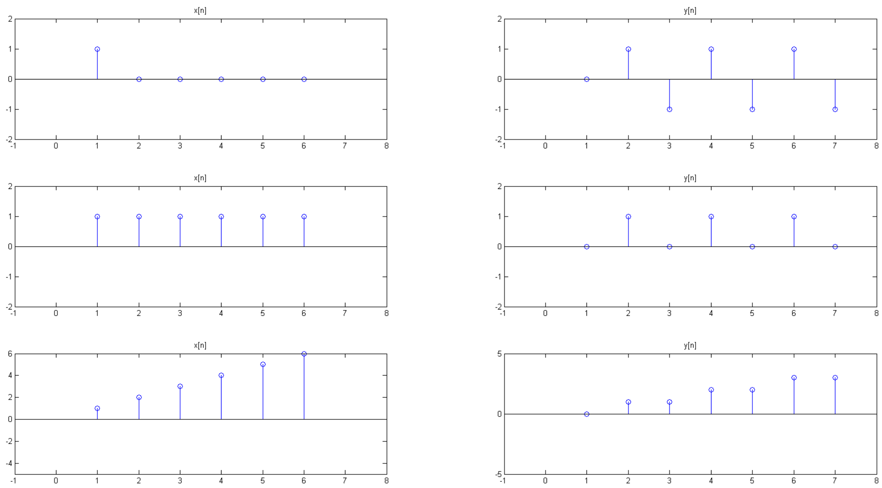
$y[2] = x[1] - y[1] = 1 - 0 = 1$

$y[3] = x[2] - y[2] = 2 - 1 = 1$

$y[4] = x[3] - y[3] = 3 - 1 = 2$

$y[5] = x[4] - y[4] = 4 - 2 = 2$

$y[6] = x[5] - y[5] = 5 - 3 = 3...$



7. Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] - y[n-2]$$

Considere que o sistema inicie em repouso, e que a entrada $x[n]$ é o sinal degrau unitário $u[n]$:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1 & , n \geq 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre $y[119]$.

Resposta:

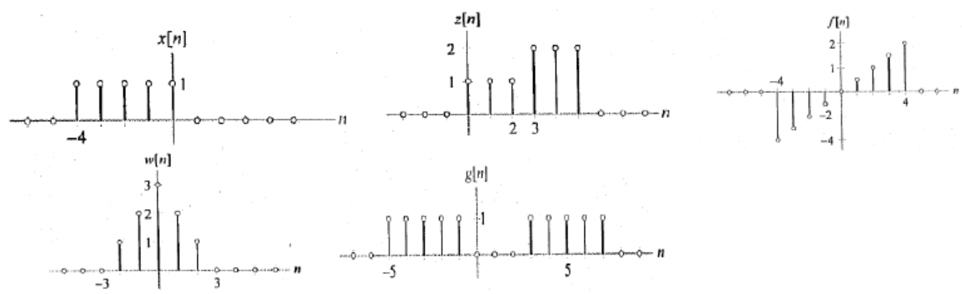
Realiza-se a iteração para resolver a equação de diferenças:

n	$\alpha x[n]+\beta x[n-1]$	$y[n]$
0	α	α
1	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$
2	$\alpha+\beta$	β
3	$\alpha+\beta$	0
4	α	α
5	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$
6	$\alpha+\beta$	β
7	$\alpha+\beta$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$4k$	α	α
$4k+1$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$
$4k+2$	$\alpha+\beta$	β
$4k+3$	$\alpha+\beta$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Portanto,

$$y[119] = y[4\cdot 29+3] = 0$$

8. Dada as funções de tempo discreto descritas a seguir (gráfico das funções) calcule as convoluções abaixo:



a) $y[n] = u[n] * u[n-3]$

b) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n+2] * u[n]$

c) $y[n] = \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) * 2^n u[-n+2]$

d) $y[n] = x[n] * z[n]$

e) $y[n] = x[n] * f[n]$

f) $y[n] = w[n] * g[n]$

g) $y[n] = z[n] * g[n]$

h) $y[n] = f[n] * g[n]$

Resposta:

a) $y[n] = u[n] * u[n-3]$

$u[n] = x_1[n]$ e $u[n-3] = x_2[n]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$

Para $n-3 < 0$ ou $n < 3 \rightarrow y[n] = 0$

$n = 3 \rightarrow y[3] = 1(1) = 1$

$n = 4 \rightarrow y[4] = 1(1) + 1(1) = 2$

$\vdots$

$n = p \rightarrow y[p] = (p-2)$

$\therefore y[n] = (n-2)u[n-2]$

b) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n+2] * u[n]$

Para $n < 2 \rightarrow y[n] = 0$

$n \geq 2 \rightarrow y[n] = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore y[n] = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]$

c) $y[n] = \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) * 2^n u[-n+2]$

$x_1[k] = \cos(\frac{\pi}{2}k)$

$x_2[k] = 2^{n-k}$

$y[n] = \sum_{k=n-2}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{2}k) \cdot 2^{n-k}$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}k) = \begin{cases} 1, \text{ se } k = ..., 0, 4, 8, ... \\ -1, \text{ se } k = ..., 2, 6, 10, ... \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Considerando os termos válidos, tem-se:

$y[n] = \sum_{k=n-2}^{\infty} (-1)^{\frac{k}{2}} 2^{n-k}$

Substituindo $e = \frac{k}{2}$

$y[n] = 2^n \sum_{e=\frac{n-2}{2}}^{\infty} (-1)^e \left(\frac{1}{2}\right)^{2e} = 2^n \sum_{e=\frac{n-2}{2}}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^e$

$y[n] = 2^n \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{1+\frac{1}{4}} = 2^n \left(\frac{4}{9}\right)(-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore y[n] = \frac{16}{9}(-1)^{n+1}$

d) $y[n] = x[n] * z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z[n-k]$

Para $n+4 < 0$ ou $n < -4 \rightarrow y[n] = 0$

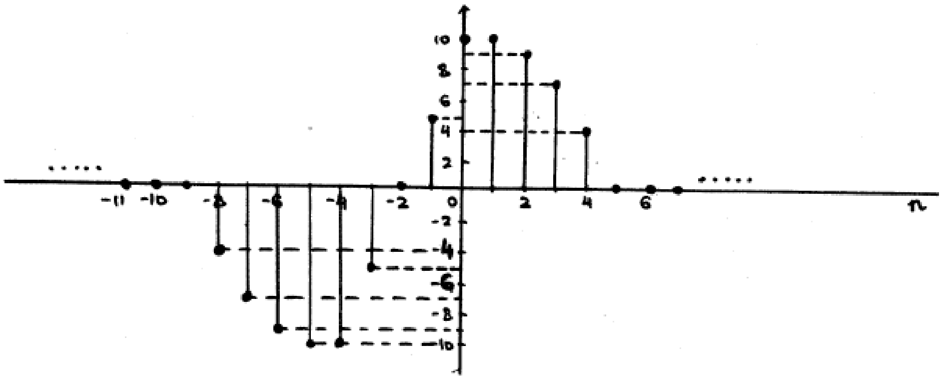
$0 \leq n+4 < 3$ ou $-4 \leq n < -1 \rightarrow y[n] = n+5$

$n \geq -1$ e $n < 1$ ou $-1 \leq n < 1 \rightarrow y[n] = 3 + 2(n+2) = 2n+7$

$n = 1 \rightarrow y[n] = 2(1) + 3(2) = 8$

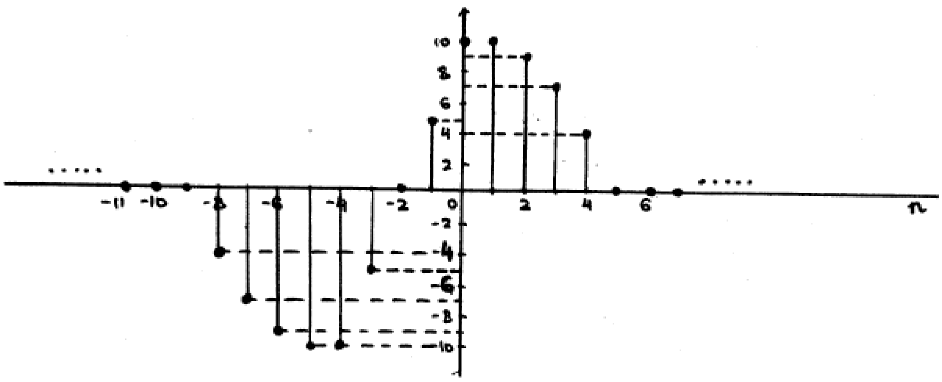
$n = 2 \rightarrow y[n] = 1(1) + 3(2) = 7$

$3 \leq n < 6 \rightarrow y[n] = 2(6-n)$
$n \geq 6 \rightarrow y[n] = 0$



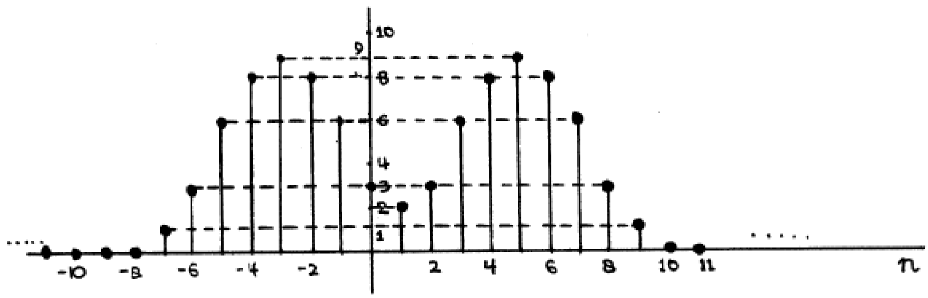
e) $y[n] = x[n] * f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot f[n-k]$

Para $n+4 < -4$ ou $n < -8 \rightarrow y[n] = 0$
$y[-8] = -4; y[-7] = -4-3 = -7; y[-6] = -7-2 = -9$
$y[-5] = -9-1 = -10; y[-4] = -10-0 = -10$
$y[-3] = -3-2-1-0+1 = -5; y[-2] = -2-1-0+1+2 = 0$
$y[-1] = -1-0+1+2+3 = 5; y[0] = 0+1+2+3+4 = 10$
$y[1] = 1+2+3+4+0 = 10; y[2] = 2+3+4 = 9$
$y[3] = 3+4 = 7; y[4] = 4$
Para $n-4 > 0$ ou $n > 4 \rightarrow y[n] = 0$

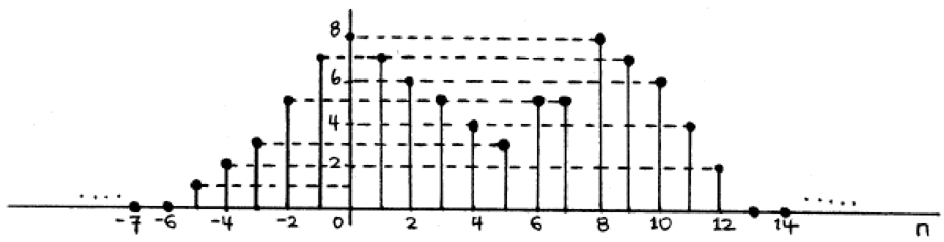


f) $y[n] = w[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \cdot g[n-k]$
Para $n+5 < -2$ ou $n < -7 \rightarrow y[n] = 0$ $y[-7] = 1; y[-6] = 1+2 = 3; y[-5] = 1+2+3 = 6$

$y[-4] = 6+2 = 8; y[-3] = 8+1 = 9; y[-2] = 1+2+3+2 = 8$
$y[-1] = 3+2+1 = 6; y[0] = 1+2 = 3; y[1] = 1+1 = 2$
$y[2] = 2+1 = 3; y[3] = 3+2+1 = 6; y[4] = 6+2 = 8$
$y[5] = 1+2+3+2+1 = 9; y[6] = 6+2 = 8$
$y[7] = 1+2+3 = 6; y[8] = 1+2 = 3; y[9] = 1$
$n > 9 \rightarrow y[n] = 0$

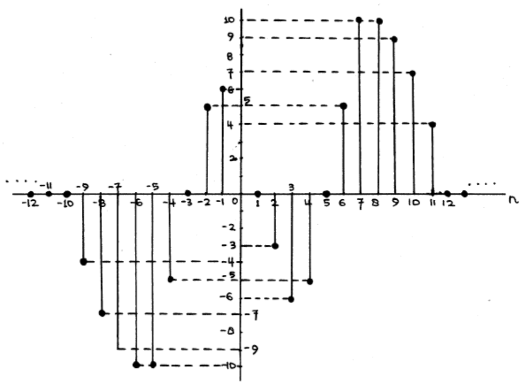


g) $y[n] = z[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z[k] \cdot g[n-k]$
Para $n+5 < 0$ ou $n < -5 \rightarrow y[n] = 0$
$y[-5] = 1; y[-4] = 2; y[-3] = 3; y[-2] = 3+2 = 5$
$y[-1] = 3+4 = 7; y[0] = 2+2(3) = 8; y[1] = 1+2(3) = 7$
$y[2] = 2(3) = 6; y[3] = 1+2(2) = 5; y[4] = 2+2(1) = 4$
$y[5] = 3(1) = 3; y[6] = 2+3(1) = 5; y[7] = 3(1)+2 = 5$
$y[8] = 3(2)+2 = 8; y[9] = 3(2)+1 = 7; y[10] = 3(2) = 6$
$y[11] = 2(2) = 4; y[12] = 2$

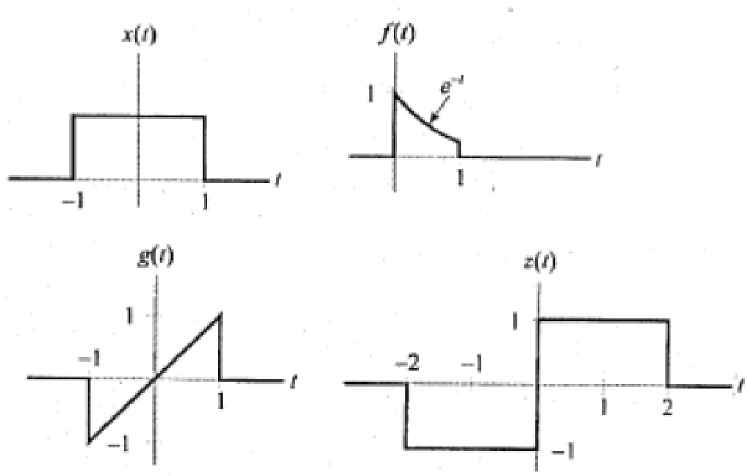


h) $y[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \cdot g[n-k]$
Para $n+5 < -4$ ou $n < -9 \rightarrow y[n] = 0$
$y[-9] = -4; y[-8] = -4-3 = -7; y[-7] = -7-2 = -9$
$y[-6] = -9-1 = -10; y[-5] = -10; y[-4] = -3-2-1+1 = -5$
$y[-3] = 0; y[-2] = -1+1+2+3 = 5$
$y[-1] = -4+1+2+3+4 = 6; y[0] = 1+2+3+4-3-4 = 3$
$y[1] = 0; y[2] = 3+4-1-2-3-4 = -3; y[3] = 4-1-2-3-4 = -6$

$y[4] = 1+0-1-2-3 = -5; y[5] = 2+1+0-1-2 = 0; y[6] = 3+2+1-1 = 5$
$y[7] = 4+3+2+1 = 10; y[8] = 4+3+2+1 = 10; y[9] = 4+3+2 = 9$
$y[10] = 4+3 = 7; y[11] = 4$



9. Dada as funções de tempo contínuo descritas a seguir (gráfico das funções) calcule as convoluções abaixo:



a) $y(t) = u(t+1) * u(t-2)$
b) $y(t) = e^{-2t}u(t) * u(t+2)$
c) $y(t) = \cos(\pi t)(u(t+1) - u(t-3)) * u(t)$
d) $y(t) = (t+2t^2)(u(t+1) - u(t-1)) * 2u(t+2)$
e) $y(t) = x(t) * z(t)$
f) $y(t) = z(t) * g(t)$
g) $y(t) = z(t) * f(t)$

h) $y(t) = f(t) * g(t)$

Resposta:

$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(t-k)dk$

a) $y(t) = u(t+1) * u(t-2)$

$x_1(t) = u(t+1)$ e $x_2(t) = u(t-2) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(t-k)dk$

Para $t-2 < -1$ ou $t < 1 \rightarrow y(t) = 0$

Para $t \geq 1 \rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t-2} (1)(1)dk = t-1$

$\therefore y(t) = (t-1)u(t-1)$

b) $y(t) = e^{-2t}u(t) * u(t+2)$

$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ e $x_2(t) = u(t+2)$

Para $t+2 \geq 0$ ou $t \geq -2 \rightarrow y(t) = \int_{0}^{t+2} (1)e^{-2k}dk = \frac{1}{2}(1-e^{-2(t+2)})$

Para $t < -2 \rightarrow y(t) = 0$

$\therefore y(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2(t+2)})u(t+2)$

c) $y(t) = \cos(\pi t)(u(t+1) - u(t-3)) * u(t)$

$x_1(t) = \cos(\pi t)(u(t+1) - u(t-3))$ e $x_2(t) = u(t)$

Para $t < -1 \rightarrow y(t) = 0$

Para $-1 \leq t < 3 \rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t} = \cos k\pi dk = \frac{1}{\pi}\sin \pi t$

$\therefore y(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) \cdot u(t)$

d) $y(t) = (t+2t^2)(u(t+1) - u(t-1)) * 2u(t+2)$

$x_1(t) = (t+2t^2)(u(t+1) - u(t-1))$ e $x_2(t) = 2u(t+2)$

Para $t+2 < -1$ ou $t < -3 \rightarrow y(t) = 0$

$-3 \leq t < -1 \rightarrow y(t) = 2\int_{-1}^{t+2} k + 2k^2 dk$

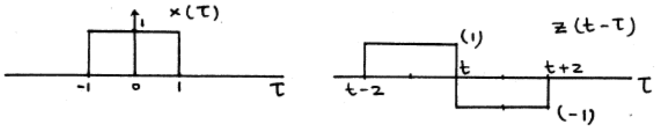
$$y(t) = (t+2)^2 - 1 + \frac{4}{3}((t+2)^3 + 1)$$
$$y(t) = \frac{4}{3}(t+2)^3 + (t+2)^2 + \frac{1}{3}$$

Para $t \geq -1 \rightarrow y(t) = 2\int_{-1}^{1} k + 2k^2 dk$

$$y(t) = \frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0, & t < -3 \\ \frac{4}{3}(t+2)^3 + (t+2)^2 + \frac{1}{3}, & -3 \leq t < -1 \\ \frac{8}{3}, & t \geq -1 \end{cases}$$

e) $y(t) = x(t) * z(t)$



Para $t+2<-1$ ou $t<-3 \rightarrow y(t)=0$

Para $-3 \le t < -1 \rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t+2} (-1)d\tau = -(t+3)$

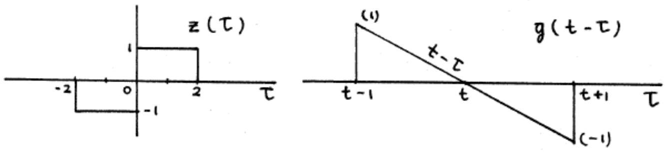
Para $-1 \le t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t} (1)d\tau + \int_{t}^{1} (-1)d\tau = 2t$

Para $1 \le t < 3 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{1} (1)d\tau = 3-t$

Para $t \ge 3 \rightarrow y(t) = 0$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0, \ t<-3 \\ -t-3, \ -3 \le t < -1 \\ 2t, \ -1 \le t < 1 \\ 3-t, \ 1 \le t < 3 \\ 0, \ t \ge 3 \end{cases}$$

f) $y(t) = z(t) * g(t)$



Para $t+1<-2$ ou $t<-3 \rightarrow y(t)=0$

Para $-3 \le t < -1 \rightarrow y(t) = \int_{-2}^{t+1} (\tau - t)d\tau = -\frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{3}{2}$

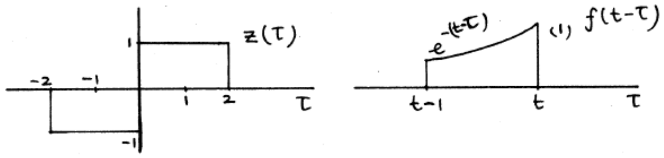
Para $-1 \le t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{0} (\tau - t)d\tau + \int_{0}^{t+1} (t-\tau)d\tau = t^2 - 1$

Para $1 \le t < 3 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{2} (t-\tau)d\tau = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}$

Para $t \ge 3 \rightarrow y(t) = 0$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0, \ t<-3 \\ -\frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{3}{2}, \ -3 \le t < -1 \\ t^2 - 1, \ -1 \le t < 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}, \ 1 \le t < 3 \\ 0, \ t \ge 3 \end{cases}$$

g) $y(t) = z(t) * f(t)$



Para $t+1 < -2 \rightarrow y(t) = 0$

Para $-2 \leq t < -1 \rightarrow y(t) = \int_{-2}^{t} -e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t+2)-1}$

Para $-1 \leq t < 0 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{t} -e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-1} - 1$

Para $0 \leq t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{0} -e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 + e^{-1} - 2e^{-t}$

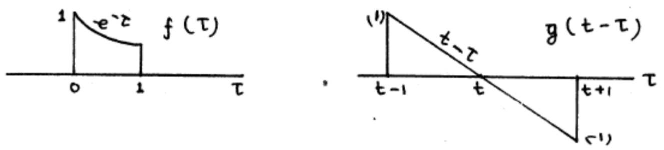
Para $1 \leq t < 2 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-1}$

Para $2 \leq t < 3 \rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{2} e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{(2-t)} - e^{-1}$

Para $t \geq 3 \rightarrow y(t) = 0$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0, \ t < -2 \\ e^{-(t+2)} - 1, \ -2 \leq t < -1 \\ e^{-1} - 1, \ -1 \leq t < 0 \\ 1 + e^{-1} - 2e^{-t}, \ 0 \leq t < 1 \\ 1 - e^{-1}, \ 1 \leq t < 2 \\ e^{(2-t)} - e^{-1}, \ 2 \leq t < 3 \\ 0, \ t \geq 3 \end{cases}$$

h) $y(t) = f(t) * g(t)$



Para $t+1 < 0$ ou $t < -1 \rightarrow y(t) = 0$

Para $-1 \leq t < 0 \rightarrow y(t) = \int_{0}^{t+1} e^{-\tau}(t-\tau) d\tau = 2e^{-(t+1)} + t - 1$

Para $0 \leq t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{0}^{1} e^{-\tau}(t-\tau) d\tau = t(1-e^{-1}) + 2e^{-1} - 1$

Para $1 \le t < 2 \to y(t) = \int_{t-1}^{1} e^{-\tau}(t-\tau)d\tau = e^{-1}(t+2) - 2te^{-(t-1)}$

Para $t \ge 2 \to y(t) = 0$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0, \ t < -1 \\ 2e^{-(t+1)} + t - 1, \ -1 \le t < 0 \\ t(1-e^{-1}) + 2e^{-1} - 1, \ 0 \le t < 1 \\ e^{-1}(t+2) - 2te^{-(t-1)}, \ 1 \le t < 2 \\ 0, \ t \ge 2 \end{cases}$$

10. Para cada resposta ao impulso listada abaixo, determine se o sistema correspondente é causal e/ou estável.

    a) $h(t) = e^{2t}u(t-1)$

    b) $h(t) = u(t+1) - 2u(t-1)$

    c) $h(t) = \cos(\pi t)u(t)$

    d) $h[n] = 2^n u[-n]$

    e) $h[n] = 2u[u] - 2u[n-1]$

    f) $h[n] = \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$

    Resposta:

    a) $h(t) = e^{2t}u(t-1)$
    Causal e não estável
    b) $h(t) = u(t+1) - 2u(t-1)$
    Não causal e não estável
    c) $h(t) = \cos(\pi t)u(t)$
    Causal e não estável
    d) $h[n] = 2^n u[-n]$
    Não causal e estável
    e) $h[n] = 2u[u] - 2u[n-1]$
    Causal e estável
    f) $h[n] = \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$
    Não causal e não estável

11. Considere um sistema de tempo discreto cuja entrada x[n] e a saída y[n] sejam relacionadas por:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right) y[n-1] + x[n]$$

    a) Mostre que esse sistema satisfaz a condição de repouso inicial (isto é, se $x[n] = 0$ para $n < n_0$, então y[n] = 0 para $n < n_0$), então ele é linear e invariante no tempo.

b) Mostre que se esse sistema não satisfaz a condição inicial de repouso inicial, mas, em vez disso, obedece à condição auxiliar $y[0] = 0$, ele é não causal.

Resposta:

a) Para uma entrada $x_1[n]$ em que $x_1[n] = 0$ para $n < n_1$. A saída será:
$y_1[n] = \frac{1}{2}y_1[n-1] + x_1[n], \quad y_1[n] = 0$ para $n < n_1$ (11.1)
Então, considerando outra entrada $x_2[n]$ em que $x_2[n] = 0$ para $n < n_2$. A saída será:
$y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] + x_2[n], \quad y_2[n] = 0$ para $n < n_2$ (11.2)
Multiplicando 11.1 por α e 11.2 por β e somando as duas equações tem-se:
$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = \frac{\alpha}{2}y_1[n-1] + \frac{\beta}{2}y_2[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
Por inspeção, a saída é $y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$ quando a entrada é $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$. Além disso, $y_3(1) = 0 = y_1(1) + y_2(1)$. Portanto, o sistema é linear.

b) Consideramos duas entradas:
$x_1[n] = 0$, para todo n
$$x_2[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n \geq -1 \end{cases}$$
Para o sistema ser linear, a resposta para $x_1[n]$ é $y_1[n] = 0$ para todo n. A saída $y_2[n]$, quando a entrada é $x_2[n]$, desde que $y_2[0] = 0$, será:
$y_2[1] = \left(\frac{1}{2}\right)0 + 0 = 0, \quad y_2[2] = \left(\frac{1}{2}\right)0 + 0 = 0$
Portanto, $y_2[n] = 0$ para $n \leq 0$. Agora para $n < 0$, nota-se que:
$y_2[0] = (\frac{1}{2})y_2[-1] + x[0]$.
Portanto, $y_2[-1] = -2$, $y_2[-2] = -4$, $y_2[-3] = -8$. Portanto, $y_2[n] = -\left(\frac{1}{2}^n\right)u[n-1]$.
Desde que $x_1[n] = x_2[n]$ para todo $n < 0$, isto é verdade caso o sistema seja causal $y_1[n] = y_2[n]$ para $n < 0$. Os resultados obtidos anteriormente mostram que isso não é verdade. Portanto, o sistema é não causal.

12. Suponha que o sinal

$$x(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$$

seja convoluído com o sinal

$$h(t) = e^{jw_0 t}$$

a) Determine o valor de w_0 que garante que $y(0) = 0$. Sendo que $y(t) = x(t) * h(t)$.

b) A resposta do item anterior é única?

Resposta:

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{jw_0(t-\tau)} d\tau$
Portanto,

$y(0) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{jw_0(t-\tau)} d\tau = \frac{2}{w_0}\sin(\frac{w_0}{2})$

a) Se $w_0 = 2\pi, então y(0) = 0$.

b) Não é única. Qualquer $w_0 = 2k\pi,\ k \neq 0$ é suficiente.

13. (Computacional) Siga as instruções:

    a) Dado um sinal $W[n] = e^{\frac{-j2\pi n}{N}}$, com $N = 8$ e $n = 0,1,2,...,8$, expresse o número complexo na forma cartesiana

    b) Plote a parte real pela parte imaginária no Matlab

    c) Calcule $W^k[n]$ para $k = 0,1,2,...,8$ e represente em forma matricial

    d) Dado um segundo sinal $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1 \\ 0, & n \neq 0,1 \end{cases}$. Plote $x[n]$ ao longo das amostras de intervalo n no Matlab.

    e) Escreva a função $X[k] = W^k[n]x^T[n]$ em forma matricial

    f) Calcule a fase e magnitude de $X[k]$ e plote os gráficos

    g) Repita o procedimento computacional presente de a) a f) para $x[n] = cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)$ com $m = 10$, $N = 128$ e $n = 0,1,2,...,128$. Discute os resultados.

14. (Computacional) Siga as instruções a seguir:

    a) Realize a convolução dos sinais abaixo usando o comando padrão do MATLAB, $y = conv(x,h)$, e plote o resultado usando $stem$. Tente o inverso ($y = conv(h,x)$). Há diferença?

```
x = [3,11,7,0,-1,4,2]
h = [2,3,0,-5,2,1]
```

    b) O comando padrão não nos permite localizar os sinais no tempo. Crie a função abaixo, $convolute$:

```
function [y,ny] = convolute(x,h,nx,nh)
nymin = nx(1)+nh(1);
nymax = nx(length(x)) + nh(length(h));
ny = [nymin:nymax];
y = conv(x,h);
```

    Em seguida, teste o seguinte e plote o resultado:

```
nx = [-3: 3]; nh = [-1: 4];
[y, ny] = convolute(x, h, nx, nh);
```

    Calcule agora essa convolução e compare com o obtido na simulação.

    c) Agora, crie o sinal:

```
nx = [0:100];
x = sin(2*pi*nx/50) + sin(20*pi*nx/50);
```

Veja o sinal x usando $stem$. Modifique h para ser:

```
nh = [0:9];
h=0.1*ones(1,10);
```

Realize a convolução entre x e h e plote o resultado. Descreva o que aconteceu.

d) A melhor forma de analisar o que ocorre em c) é analisando o espectro de frequências do sinal. Analise primeiro o espectro de magnitude de x:

```
fs = 256;
freq = [-1: 1/fs: 1-1/fs];
fx=fft (x,512);
fx = fftshift(fx);
fxmag = abs(fx(1:512));
plot(freq,fxmag);
```

Agora do sinal convoluído y:

```
fs = 256;
freq = [-1: 1/fs: 1-1/fs];
fy=fft (y,512);
fy = fftshift(fy);
fymag = abs(fy(1:512));
plot(freq,fymag);
```

Qual o fenômeno que ocorre ao realizar essa convolução?