

# Fragilidade Bancária com (e sem) Serviço Sequencial\*

JEFFERSON BERTOLAI<sup>†</sup>  
MATHEUS MELO<sup>‡</sup>

**Sumário:** 1. Introdução; 2. A escolha de Sistema Bancário; 3. Instabilidade Financeira sem Serviço Sequencial; 4. Instabilidade Financeira com Serviço Sequencial; 5. Observações finais; A. Demonstrações; B. Figuras.

**Palavras-chave:** Serviço sequencial; Contágio; Corridas bancárias.

**Códigos JEL:** E4, E6.

Este artigo apresenta os modelos e principais resultados de Allen e Gale (2000) e de Bertolai et alii (2016) como casos limites de um mesmo problema de escolha de sistema bancário ótimo para, em seguida, estabelecer resultados complementares a estas referências. Estuda-se formas alternativas de abordar o tema de fragilidade bancária, com base na exigência ou não de serviço sequencial ao escolher o sistema bancário ótimo. A primeira contribuição é complementar ao resultado de contágio estabelecido por Allen e Gale (2000) e mostra que existe uma intervenção no mercado interbancário capaz de eliminar o colapso generalizado do sistema bancário provocado pelo contágio entre bancos. A segunda contribuição é generalizar o resultado de existência de corrida bancária de Bertolai et alii (2016). São estabelecidas as condições sob as quais somente os  $k$  últimos depositantes de cada um dos bancos da economia não participam da crise bancária ao manter seus recursos investidos no sistema bancário.

*This paper presents the models and main results of Allen e Gale (2000) and Bertolai et alii (2016) as limiting cases of the society's problem in choosing the optimal banking system. Next, complementary results to these references are established. Alternative approaches to banking fragility are studied, highlighting the effects of imposing the sequential service constraint on the choice of the optimal banking system. The first contribution is complementary to the contagion result of Allen e Gale (2000) and shows that there exists an intervention in the interbank market that eliminates the widespread collapse of the banking system caused by the contagion. In the second contribution, the bank-run's existence result of Bertolai et alii (2016) is generalized. In their results, everyone but the last depositor (or the last two depositors) participate in the bank run. For arbitrary  $k$ , we establish under which conditions only the last  $k$  depositors in each bank do not participate in the bank run by keeping their resources invested in the banking system.*

## 1. INTRODUÇÃO

Uma importante referência na literatura acadêmica que estuda instabilidade financeira é Diamond e Dybvig (1983). Um dos precursores em utilizar a abordagem de Desenho de Mecanismos para estudar fragilidade bancária<sup>1</sup> (possibilidade de corridas bancárias) e o seguro depósito como forma de contornar

\*Agradecemos os comentários e sugestões do avaliador anônimo.

<sup>†</sup>Professor e Pesquisador da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo. E-mail: jbertolai@fearp.usp.br

<sup>‡</sup>Mestre em Economia pela FEARP/USP. E-mail: mamelo@usp.br

<sup>1</sup>Outra referência neste sentido é Bryant (1980). Para uma referência anterior a respeito do efeito de *moral hazard* do seguro depósito sobre as decisões de investimento dos bancos, mas que utiliza a abordagem de equilíbrio, ver Kareken e Wallace (1978).



tal problema, Diamond e Dybvig (1983) mostram que a existência de corrida bancária pode estar associada à busca da sociedade em alocar de forma eficiente a liquidez da economia. Argumentam então que um mecanismo de seguro depósito é capaz de eliminar a fragilidade financeira ao garantir proteção àqueles indivíduos que optam por manter seus recursos investidos no sistema financeiro.

Wallace (1988) argumenta, no entanto, que o seguro depósito proposto por Diamond e Dybvig (1983) não é factível devido a uma importante característica do sistema bancário, o *serviço sequencial*. No sistema bancário, os depositantes são atendidos de forma sequencial: não há a opção de operar o sistema acumulando demandas de saques para somente então escolher o nível dos (e executar os) pagamentos aos depositantes. Wallace (1988) observa que, embora Diamond e Dybvig (1983) tenham reconhecido a importância do serviço sequencial para modelos de Teoria Bancária, os autores não se utilizaram desta característica de forma adequada. O seguro depósito proposto por Diamond e Dybvig (1983) requer conhecer toda a demanda de saques antes de executar os pagamentos ou acionar o seguro depósito.

A partir da contribuição de Wallace (1988), a literatura que estuda fragilidade bancária pode ser dividida entre trabalhos que se utilizam de modelos nos quais o sistema bancário não pode operar sem respeitar o serviço sequencial e estudos nos quais a restrição de serviço sequencial é ignorada. As vantagens de impor serviço sequencial ao modelo já é reconhecida em Diamond e Dybvig (1983). A vantagem em ignorar o serviço sequencial é tratabilidade. Uma importante referência na literatura que se desenvolveu optando pela tratabilidade (ao ignorar a restrição de serviço sequencial) é Allen e Gale (2000). Após o cálculo do sistema bancário socialmente ótimo (escolha da forma eficiente de alocar a liquidez na economia), os autores mostram que algumas estruturas de mercado de depósitos interbancários são capazes de implementar (descentralizar) a alocação ótima.<sup>2</sup> Tais estruturas, no entanto, criam interligações entre os bancos capazes de transmitir choques localizados para toda a economia. É demonstrado que o surgimento inesperado de um choque localizado em um banco pode se propagar para todos os demais bancos (por meio do mercado interbancário) e gerar uma crise generalizada no sistema bancário, em um processo denominado pelos autores de *Contágio Financeiro*.

A complexidade do sistema bancário socialmente ótimo sob a exigência de serviço sequencial é documentada em Green e Lin (2003). Mais importante ainda, estes autores mostram que não há equilíbrio de corrida bancária sob o sistema escolhido pela sociedade se (i) os depositantes possuem uma boa estimativa sobre a quantidade de depositantes que visitaram o banco antes deles e (ii) os choques de liquidez (necessidade de consumo imediato) são independentes.<sup>3</sup> Tal resultado é central para a literatura em Teoria Bancária, pois impõe o desafio de encontrar um outro modelo capaz de explicar as crises bancárias existentes no mundo real.

Em uma resposta a este desafio, Peck e Shell (2003) propõem um modelo no qual os depositantes sabem pouco sobre a quantidade de depositantes que visitaram o banco antes deles e o choque de liquidez é bastante profundo. Os autores constroem um exemplo numérico no qual o sistema bancário ótimo possui equilíbrio de corrida bancária.<sup>4</sup> Bertolai et alii (2014) estudam a economia proposta por Peck e Shell (2003), mas preservando a intensidade do choque de liquidez utilizado por Green e Lin (2003). É demonstrado que o sistema bancário ótimo possui equilíbrio de corrida bancária se a taxa de retorno da economia é baixa e/ou a população da economia é grande. Mais recentemente, Bertolai et alii (2016) demonstram que a alocação ótima de liquidez da economia pode gerar corrida bancária mesmo se os depositantes possuem uma boa estimativa sobre a quantidade de depositantes que visitaram o banco antes deles,<sup>5</sup> um importante contraponto ao resultado de Green e Lin (2003). Enquanto o modelo em Green e Lin (2003) pode ser visto como uma descrição de sistemas bancários nos quais a integração

<sup>2</sup>Para uma referência sobre a dificuldade de coexistência de bancos e mercados, ver Jacklin (1987).

<sup>3</sup>Para a importância da hipótese de independência, ver Andolfatto et alii (2007) e Ennis e Keister (2009).

<sup>4</sup>Ennis e Keister (2009) relaxam a hipótese de independência utilizada por Green e Lin (2003) e propõem um algoritmo capaz de computar exemplos de alocação ótima com equilíbrio de corrida bancária, se os choques de demanda por liquidez são correlacionados e a quantidade de depositantes não é muito grande.

<sup>5</sup>E se os choques forem independentes.

completa entre bancos é factível, o modelo proposto por Bertolai et alii (2016) pode ser visto como o caso no qual a integração é necessariamente parcial. Os bancos são capazes de prover (e obter) liquidez aos (dos) demais bancos no longo prazo, mas no curto prazo eles operam em isolamento físico e informacional.

A contribuição deste artigo reside em apresentar os modelos e principais resultados de Allen e Gale (2000) e de Bertolai et alii (2016) como casos limites de um mesmo *problema de escolha de sistema bancário ótimo* para, em seguida, estabelecer resultados complementares a estas referências. O artigo trata de formas alternativas de estudar fragilidade bancária com base na exigência ou não de serviço sequencial (ao escolher o sistema bancário ótimo). O primeiro resultado é complementar ao resultado de contágio estabelecido por Allen e Gale (2000) e mostra que existe uma intervenção no mercado interbancário capaz de eliminar o colapso generalizado do sistema bancário provocado pelo contágio entre bancos.

O segundo resultado é complementar ao resultado de existência de corrida bancária de Bertolai et alii (2016). São estabelecidas as condições sob as quais somente os  $k$  últimos depositantes de cada um dos bancos da economia não participam da crise bancária ao manter seus recursos investidos no sistema bancário.

O artigo está dividido em quatro seções. A primeira seção apresenta os principais objetos e conceitos utilizados nas seções 3 e 4. Em especial, ela apresenta o problema de escolha de sistema bancário, o conceito de instabilidade bancária e o conceito e implicações da restrição de serviço sequencial. As seções 3 e 4 discutem, respectivamente, os modelos de Allen e Gale (2000) e Bertolai et alii (2016). Um objetivo destas seções é apresentar formas de estudar instabilidade financeira na ausência e na presença de serviço sequencial. Outro objetivo é apresentar as contribuições deste artigo. Na subseção 3.3, é proposta uma intervenção no mercado interbancário capaz de eliminar o contágio entre bancos durante uma crise identificado por Allen e Gale (2000). Nas subseções 4.1 e 4.2, generaliza-se o resultado de Bertolai et alii (2016). O apêndice é dedicado a demonstrações e figuras não incluídas no texto.

## 2. A ESCOLHA DE SISTEMA BANCÁRIO

Considere uma economia com  $N = 2$  indivíduos inicialmente idênticos, os quais vivem por dois períodos (data 1 e data 2) e estão considerando estabelecer um contrato entre si para organizar a distribuição de consumo entre datas e entre indivíduos. Este contrato estabelece o conjunto de regras do que será denominado o *sistema bancário* desta economia. A escolha contratual será feita no início da data 1 a fim de maximizar a *utilidade esperada* dos indivíduos e precisa respeitar as restrições de *factibilidade*, de *participação* e de *incentivos*, conforme descrito a seguir.

A utilidade esperada (*ex ante*) é a mesma para os dois indivíduos, uma vez que estes são inicialmente idênticos. Ela depende de choques sob os quais os indivíduos estão sujeitos. Após a assinatura do contrato e em  $t = 1$ , o indivíduo sofre ou não um choque de preferência, denominado *choque de liquidez*. Este choque ocorre com probabilidade  $p \in (0,1)$  e torna o indivíduo ávido por consumo imediato (na data 1). Isto é modelado supondo que ele afigure utilidade somente a partir do consumo na data 1,  $c_1$ . Com probabilidade  $1 - p$ , o indivíduo não sofre o choque de liquidez e, portanto, não possui necessidade de consumo imediato inadiável. Neste caso, supõe-se que ele afigure utilidade a partir do consumo agregado (nas duas datas),  $c_1 + c_2$ . Se a relação de preferência do indivíduo é representada pela função utilidade  $u(x) = \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta}$ , então a utilidade do indivíduo será  $u(c_1)$  se sofrer o choque de liquidez e será  $u(c_1 + c_2)$  se não sofrer o choque. No primeiro caso, o indivíduo é dito ser do tipo 0, ou ainda *impaciente*, e no segundo caso ele é dito ser do tipo 1, ou ainda *paciente*.

O momento exato durante a data 1 no qual cada indivíduo descobre se foi ou não atingido pelo choque de liquidez é incerto. Um dado indivíduo será o primeiro a descobrir seu tipo (se sofreu ou não o choque) segundo a probabilidade  $1/N = 0.5$ . Ele será o segundo a descobrir com probabilidade  $1/N = 0.5$ . Se  $\omega_i \in \{0,1\}$  denota o tipo do  $i$ -ésimo indivíduo a descobrir se sofreu ou não o choque, então  $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2) \in \{0,1\}^2$  denota a realização de choques na economia e é denominado estado da



natureza. O conjunto  $\Omega \equiv \{0,1\}^N = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$  é chamado de conjunto de estados da natureza.

Como o choque de liquidez é independente entre indivíduos e  $\Pr(\omega_i = 0) = p$ , então a probabilidade de cada estado  $\omega \in \Omega$  é  $\Pr(\omega_1, \omega_2) = p^{2-\omega_1-\omega_2} (1-p)^{\omega_1+\omega_2}$ . Suponha que o  $i$ -ésimo indivíduo a descobrir seu tipo no estado da natureza  $\omega$  consome  $x_i(\omega)$  na data 1 e  $y_i(\omega)$  na data 2. Então a utilidade esperada *ex ante* de cada indivíduo é

$$U(x, y) \equiv \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} u \left[ x_i(\omega) + \omega_i y_i(\omega) \right].$$

A factibilidade do contrato depende da quantidade de recursos na economia em cada data. Inicialmente, a dotação de recursos de cada indivíduo é  $e = 1$  e, portanto, da economia como um todo é  $Ne = 2$ . Não há dotação de recursos ao longo da data 1 e na data 2. Existe uma tecnologia de armazenamento com retornos constante de escala, a qual gera (para cada unidade de investimento) uma unidade de recurso no curto prazo (data  $t = 1$ ) e  $R > 1$  unidades de recurso no longo prazo (data  $t = 2$ ). Considere um dado estado da natureza  $\omega \in \Omega$ . Sendo  $\sum_{i=1}^N x_i(\omega)$  o consumo total dos indivíduos na data 1 e este não pode ser maior do que os recursos disponíveis nesta data, então factibilidade do contrato exige que

$$\sum_{i=1}^N x_i(\omega) \leq Ne.$$

Os recursos não consumidos na data 1,  $Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega)$ , são mantidos armazenados e geram  $R \left( Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega) \right)$  unidades de recursos na data 2. Sendo  $\sum_{i=1}^N y_i(\omega)$  o consumo total dos indivíduos na data 2 e este não pode ser maior do que os recursos disponíveis nesta data, então factibilidade do contrato exige que

$$\sum_{i=1}^N y_i(\omega) \leq R \left( Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega) \right).$$

Finalmente, o contrato não pode exigir quantidades de consumo negativas e, portanto,  $x_i(\omega) \geq 0$  e  $y_i(\omega) \geq 0$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ .

A participação dos indivíduos no contrato é voluntária e decidida no momento da assinatura do contrato (início da data 1). Os indivíduos estarão dispostos a participar do contrato se a utilidade esperada *ex ante* obtida sob o contrato for maior do que (ou igual) a utilidade esperada *ex ante* obtida fora do contrato. A opção de não participar do contrato é chamada de *autarquia*, uma vez que neste caso o indivíduo decide seu padrão de investimento e de consumo de forma independente dos demais indivíduos. Ele investe toda sua dotação  $e$  na tecnologia de armazenagem. Quando sofrer o choque de liquidez, o indivíduo escolherá consumir na data 1 todo recurso investido e consumirá nada na data 2. Se não sofrer o choque de liquidez, o indivíduo escolherá consumir nada na data 1 e todo recurso investido na data 2. Portanto, a utilidade esperada obtida fora do contrato bancário é dada por

$$U_a \equiv pu(e) + (1-p)u(Re).$$

Conclui-se que o contrato induzirá a participação dos indivíduos (atenderá a restrição de participação) se, e somente se,  $U(x, y) \geq U_a$ .

O problema de incentivo ao escolher o contrato tem origem na incapacidade da sociedade (todos os indivíduos em conjunto) observar todos os choques sofridos por cada um dos indivíduos. Embora o momento no qual o indivíduo sofre o choque é observado pela sociedade,<sup>6</sup> o tipo de choque é *informação*

<sup>6</sup>Wallace (1988) utiliza a analogia com uma máquina que faria pagamentos durante a noite enquanto todos (a sociedade) estão dormindo. O choque de liquidez neste caso é o nível de fome que cada indivíduo acorda durante a noite. A máquina observa o momento em que os indivíduos acordam e vão até a máquina requerer seu consumo  $x_i(\omega)$  na data 1, mas não observa o nível de fome do indivíduo.

*privada* de cada indivíduo. Caso seja *ex ante* atrativo para a sociedade descobrir o tipo de cada indivíduo, o contrato firmado precisa prover incentivo para o indivíduo revelar seu verdadeiro tipo.

Considere a decisão do primeiro indivíduo a descobrir seu tipo, supondo que ele sabe ser o primeiro e acredita que o outro indivíduo irá anunciar ser do tipo 0 com probabilidade  $q \in [0,1]$ . Suponha que ele sofreu o choque de liquidez e, portanto, sua utilidade é  $u(c_1)$ . Se revelar a verdade (ser do tipo 0) e o outro indivíduo revelar ser do tipo  $\omega_2$ , ele obterá níveis de consumo  $x_1(0, \omega_2)$  na data 1 e  $y_1(0, \omega_2)$  na data 2 e nível de utilidade  $u[x_1(0, \omega_2)]$ . Com isso, sua utilidade esperada em revelar a verdade é

$$U_T^1(0; q) \equiv qu[x_1(0,0)] + (1 - q)u[x_1(0,1)]. \quad (1)$$

Caso minta sobre seu tipo (anuncie ser tipo 1) e o outro indivíduo revelar ser do tipo  $\omega_2$ , ele obterá o plano de consumo  $[x_1(1, \omega_2), y_1(1, \omega_2)]$  e nível de utilidade  $u[x_1(1, \omega_2)]$ . Logo, sua utilidade esperada em mentir sobre seu tipo é

$$U_L^1(0; q) \equiv qu[x_1(1,0)] + (1 - q)u[x_1(1,1)]. \quad (2)$$

Portanto, o primeiro indivíduo a descobrir seu tipo possui incentivo a revelar verdadeiramente seu tipo quando ele é do tipo 0 se e somente se  $U_T^1(0; q) \geq U_L^1(0; q)$ .

Considere agora o caso em que o primeiro indivíduo não sofreu o choque de liquidez e, portanto, sua utilidade é  $u(c_1 + c_2)$ . Se revelar a verdade (ser do tipo 1) e o outro indivíduo revelar ser do tipo  $\omega_2$ , ele obterá níveis de consumo  $x_1(1, \omega_2)$  na data 1 e  $y_1(1, \omega_2)$  na data 2 e nível de utilidade  $u[x_1(1, \omega_2) + y_1(1, \omega_2)]$ . Com isso, sua utilidade esperada em revelar a verdade é

$$U_T^1(1; q) \equiv qu[x_1(1,0) + y_1(1,0)] + (1 - q)u[x_1(1,1) + y_1(1,1)]. \quad (3)$$

Caso minta sobre seu tipo (anuncie ser tipo 0) e o outro indivíduo revelar ser do tipo  $\omega_2$ , ele obterá o plano de consumo  $[x_1(0, \omega_2), y_1(0, \omega_2)]$  e nível de utilidade  $u[x_1(0, \omega_2) + y_1(0, \omega_2)]$ . Logo, sua utilidade esperada em mentir sobre seu tipo é

$$U_L^1(1; q) \equiv qu[x_1(0,0) + y_1(0,0)] + (1 - q)u[x_1(0,1) + y_1(0,1)]. \quad (4)$$

Portanto, o primeiro indivíduo a descobrir seu tipo possui incentivo a revelar verdadeiramente seu tipo quando ele é do tipo 1 se e somente se  $U_T^1(1; q) \geq U_L^1(1; q)$ .

Em resumo, o primeiro indivíduo a descobrir seu tipo possui incentivo a revelar verdadeiramente seu tipo, quando ele é do tipo  $\theta \in \{0,1\}$  e acredita que o outro indivíduo revelará ser do tipo 0 com probabilidade  $q_1 \in [0,1]$ , se e somente se  $U_T^1(\theta; q_1) \geq U_L^1(\theta; q_1)$ .

De forma análoga, o segundo indivíduo a descobrir seu tipo possui incentivo a revelar verdadeiramente seu tipo  $\theta \in \{0,1\}$  quando ele acredita que o outro indivíduo revelou ser do tipo 0 com probabilidade  $q_2 \in [0,1]$ , se e somente se  $U_T^2(\theta; q_2) \geq U_L^2(\theta; q_2)$ , em que

$$\begin{aligned} U_T^2(\theta; q_2) &= \sum_{\omega_1=0}^1 q_2^{1-\omega_1} (1 - q_2)^{\omega_1} u \left[ x_2(\omega_1, \theta) + \theta y_2(\omega_1, \theta) \right] \\ U_L^2(\theta; q_2) &= \sum_{\omega_1=0}^1 q_2^{1-\omega_1} (1 - q_2)^{\omega_1} u \left[ x_2(\omega_1, 1 - \theta) + \theta y_2(\omega_1, 1 - \theta) \right]. \end{aligned}$$

Lembrando que a escolha contratual é feita no início da data 1 a fim de maximizar a utilidade esperada dos indivíduos e precisa respeitar as restrições de factibilidade, de participação e de incentivos. Ou seja, o *arranjo bancário*  $(x, y)$  é escolhido para resolver o seguinte problema de otimização:



$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{sujeito a:} \quad \begin{cases} x_i(\omega) \geq 0 \text{ e } y_i(\omega) \geq 0, & \forall i \in \{1,2\}, \forall \omega \in \Omega \\ \sum_{i=1}^N x_i(\omega) \leq Ne, & \forall \omega \in \Omega \\ \sum_{i=1}^N y_i(\omega) \leq R \left( Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega) \right), & \forall \omega \in \Omega \\ U(x,y) \geq U_a \\ U_T^i(\theta; p) \geq U_L^i(\theta; p), & \forall i \in \{1,2\}, \forall \theta \in \{0,1\} \end{cases}$$

em que se supõe na última restrição que o indivíduo decide ou não revelar a verdade para a sociedade supondo que o outro indivíduo está revelando a verdade com certeza (probabilidade 1). Ou seja, ele supõe que o outro indivíduo revelará ser do tipo 0 com probabilidade  $p$ .

O arranjo bancário  $(x,y)$  escolhido pelos indivíduos como solução do problema acima possui as seguintes propriedades, por construção:

- (a) Existe recurso suficiente para fazer todos os pagamentos programados pelo contrato para cada estado da natureza  $\omega \in \Omega$ .
- (b) Os dois indivíduos aceitarão participar do (assinar o) contrato, uma vez que a utilidade sob o contrato é maior do que fora dele:  $U(x,y) \geq U_a$ .
- (c) Existe um equilíbrio (no jogo de anúncios induzido pelo arranjo  $(x,y)$ ) no qual os dois indivíduos revelam seu verdadeiro tipo. Se um dado indivíduo acredita que o outro está revelando a verdade para a sociedade, sua *melhor resposta* é revelar a verdade, uma vez que neste caso sua utilidade em revelar a verdade é maior do que a utilidade obtida ao mentir:  $U_T^i(\theta; p) \geq U_L^i(\theta; p)$ .
- (d) A quantidade ótima de bancos é indeterminada, tendo em vista a tecnologia de estocagem com retorno de escala constante.<sup>7</sup> O arranjo bancário  $(x,y)$  pode ser visto como a descrição de um sistema com  $M = 1$  banco com  $L = 2$  depositantes, assim como de um sistema com  $M = 2$  bancos com  $L = 1$  depositante cada um, desde que estes operem em completa integração (física e informacional).<sup>8</sup>

O equilíbrio descrito no item (c) acima é chamado de equilíbrio com *revelação da verdade* e descreve o funcionamento do sistema financeiro em tempos normais, nos quais não há crise.

O sistema bancário  $(x,y)$  escolhido pelos indivíduos proporciona uma descrição para eventos de crise bancária se ele possui um outro equilíbrio, chamado de equilíbrio de *corrida bancária*. Neste equilíbrio de instabilidade bancária, indivíduos pacientes (tipo 1) mentem sobre seu tipo quando eles acreditam que outros pacientes estão mentindo e que todos os impacientes (tipo 0) estão revelando a verdade. Ou seja, o sistema bancário definido pelo contrato  $(x,y)$  possui um equilíbrio de corrida bancária se e somente se

$$\begin{aligned} U_T^i(1; 1) &< U_L^i(1; 1) && \text{para algum } i \in \{1,2\} \\ U_T^i(0; 1) &\geq U_L^i(0; 1) && \text{para todo } i \in \{1,2\}. \end{aligned} \quad (5)$$

A condição (5) determina a extensão da corrida bancária. Se ela é satisfeita para todo  $i$ , a corrida é dita *completa*. Se ela é satisfeita para algum  $i$ , mas não para todo  $i$ , a corrida é dita *parcial*.

<sup>7</sup>Este é um resultado análogo ao que ocorre no modelo de Crescimento Neoclássico com retorno de escala constante, no qual o número de firmas usado para descentralizar a alocação ótima por meio de mercados competitivos é indeterminado.

<sup>8</sup>Pode-se ainda interpretar que  $(x,y)$  descreve um sistema com  $M \in \mathbb{N}$  bancos com  $L = 2$  depositantes cada um, desde que eles operem em completo isolamento – físico e informacional.

Parte da literatura relacionada ao modelo de Diamond e Dybvig (1983) estuda os sistemas bancários escolhidos para resolver o problema descrito acima. Uma importante referência neste sentido é Allen e Gale (2000). A subseção 2.1 apresenta a alocação ótima para o problema acima e apresenta o sistema bancário estudado por Allen e Gale (2000) como o caso limite no qual  $N \rightarrow \infty$ .

Inspirada em Wallace (1988), outra parte da literatura destaca a importância de o contrato entre os indivíduos satisfazer uma restrição adicional, chamada de restrição de *serviço sequencial*. Tal restrição não permite que os pagamentos escolhidos para o primeiro indivíduo dependa do anúncio do segundo indivíduo. Os pagamentos precisam ser imediatos e, portanto, efetuados em sequência. Especificamente, o contrato  $(x, y)$  precisa satisfazer

$$x_1(0,1) = x_1(0,0) \quad \text{e} \quad x_1(1,0) = x_1(1,1). \quad (6)$$

A subseção 2.2 apresenta a alocação ótima para o problema acima sujeito à restrição de serviço sequencial (6), a qual pode ser vista como a descrição de um sistema de  $M \in \mathbb{N}$  bancos operando em isolamento com  $N = 2$  depositantes cada um.<sup>9</sup> O sistema bancário estudado por Bertolai et alii (2016) é então apresentado como o caso limite no qual o número de bancos é muito grande ( $M \rightarrow \infty$ ) e os bancos operam sob integração completa na data 2.

### Propriedades gerais do sistema bancário

Algumas propriedades ótimas do sistema bancário  $(x, y)$  são comuns aos casos *sem* serviço sequencial e *com* serviço sequencial. Tais propriedades simplificam sensivelmente o problema de escolha de  $(x, y)$ . Em especial, os itens (d) até (g) a seguir permitem reduzir a quantidade de variáveis de escolha do problema acima de  $16 (= 2N2^N)$  para duas:  $x_1(0,0)$  e  $x_2(1,0)$ .

- (a) a restrição de participação  $U(x, y) \geq U_a$  é sempre inativa e, portanto, pode ser ignorada na escolha de  $(x, y)$ .
- (b) a restrição de factibilidade  $\sum_{i=1}^N x_i(\omega) \leq Ne$  é sempre satisfeita e, portanto, pode ser ignorada na escolha de  $(x, y)$ .
- (c) a restrição de incentivos  $U_T^i(\theta; p) \geq U_L^i(\theta; p)$  é sempre inativa<sup>10</sup> e, portanto, pode ser ignorada na escolha de  $(x, y)$ .
- (d) não há desperdício de recursos, uma vez que a restrição de factibilidade da data 2,  $\sum_{i=1}^N y_i(\omega) \leq R(Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega))$  é sempre ativa.
- (e) os indivíduos anunciando ser impacientes (tipo 0) não recebem pagamento na data 2:

$$y_1(0,0) = y_1(0,1) = y_2(0,0) = y_2(1,0) = 0.$$

- (f) os indivíduos anunciando ser pacientes (tipo 1) não recebem pagamento na data 1:

$$x_1(1,0) = x_1(1,1) = x_2(0,1) = x_2(1,1) = 0.$$

- (g) há tratamento igualitário na data 2 entre as pessoas anunciando ser pacientes:

$$y_1(1,1) = y_2(1,1) = Re.$$

<sup>9</sup>Conforme destacado na nota de rodapé 8.

<sup>10</sup>Conforme estabelecido por Green e Lin (2003).





Observe que, independentemente da presença ou não da restrição de serviço sequencial, o sistema bancário ótimo provê seguro completo contra o choque de posicionamento na fila de saques para os indivíduos anunciando ser pacientes (tipo 1).

Com base nas propriedades acima, a escolha do sistema bancário ótimo resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \sum_{\omega} P(\omega) & \left( \sum_{i=1}^2 \frac{1-\omega_i}{N} u[x_i(\omega)] + \frac{|\omega|}{N} u[y(\omega)] \right) \\ \text{sujeito a } \begin{cases} x_i(\omega) \geq 0 & \text{e} & y(\omega) \geq 0 & \forall \omega \in \Omega \\ |\omega|y(\omega) = R \left( Ne - \sum_{i=1}^2 (1-\omega_i)x_i(\omega) \right) & \forall \omega \in \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $|\omega| = \sum_i \omega_i$  é a quantidade de anúncios de tipo 1 em  $\omega$  e  $(\omega_{-i}, \theta)$  é construído a partir de  $\omega \in \Omega$  substituindo a  $i$ -ésima coordenada de  $\omega$  por  $\theta$ . Ou seja,  $(\omega_{-1}, \theta) = (\theta, \omega_2)$  e  $(\omega_{-2}, \theta) = (\omega_1, \theta)$ .

## 2.1. Sistema bancário sem serviço sequencial

Na ausência da restrição de serviço sequencial, o sistema bancário é capaz de aguardar todos os anúncios de tipo na data 1 antes de iniciar os pagamentos desta data. Como consequência, o contrato ótimo entre os indivíduos é bastante simples, conforme estabelecido pelo lema 2.1 a seguir.

**Lema 2.1** (Alocação ótima sem serviço sequencial). *O sistema bancário ótimo sem serviço sequencial*

- (i) *trata igualmente as pessoas anunciando ser impacientes;*
- (ii) *paga mais àqueles anunciando ser pacientes do que àqueles anunciando ser impacientes, pois para todo  $\omega \notin \{(0,0), (1,1)\}$*

$$u'[x_i(\omega_{-i}, 0)] = Ru'[y(\omega)]$$

*para todo  $i$  tal que  $\omega_i = 0$ .*

**Demonstração.** Seja  $\mu_{\omega} \Pr(\omega)/N$  o multiplicador de Lagrange associado a restrição de factibilidade. O lagrangeano associado ao problema de maximização é

$$\sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\omega)}{N} \left\{ \sum_{i=1}^2 (1-\omega_i) u[x_i(\omega)] + |\omega| u(y(\omega)) \right\} + \sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\omega)}{N} \mu_{\omega} \left[ R \left( Ne - \sum_{i=1}^2 (1-\omega_i) x_i(\omega) \right) - |\omega| y(\omega) \right].$$

A condição de primeira ordem em  $x_i(\omega_{-i}, 0)$  é

$$\frac{P(\omega_{-i}, 0)}{N} [(1-\omega_i) u'(x_i(\omega_{-i}, 0)) - R \mu_{(\omega_{-i}, 0)} (1-\omega_i)] = \frac{P(\omega_{-i}, 0)}{N} [u'(x_i(\omega)) - R \mu_{\omega}] = 0.$$

Sabe-se que a razão  $\frac{P(\omega)}{N} \neq 0$ , então  $u'(x_i(\omega)) = R \mu_{\omega}$ . Para o caso em que  $\omega = (0,0)$ , tem-se  $u'(x_1(0,0)) = R \mu_{\omega} = u'(x_2(0,0))$ . Como  $u'$  é estritamente decrescente (dada a concavidade estrita da função utilidade), tem-se  $x_1(0,0) = x_2(0,0)$ . A condição de primeira ordem em relação à  $y(\omega_{-i}, 1)$ :

$$\frac{P(\omega_{-i}, 1)}{N} [\omega_i u'(y(\omega_{-i}, 1)) - \mu_{(\omega_{-i}, 1)} \omega_i] = \frac{P(\omega_{-i}, 1)}{N} [u'(y_i(\omega)) - \mu_{\omega}] = 0.$$



Lembrando que  $\frac{P(\omega)}{N} \neq 0$ , então  $u'(y(\omega)) = \mu_\omega$ . Logo, para  $\omega \notin \{(0,0), (1,1)\}$ , tem-se

$$Ru'(y(\omega)) = R\mu_\omega = u'(x_i(\omega)),$$

e, portanto,  $u'(y(\omega)) < u'(x_i(\omega))$ . Como  $u'$  é estritamente decrescente, segue que  $y(\omega) > x_i(\omega)$ .  $\square$

Como consequência do lema 2.1 e da restrição de recursos ativa, quando  $\delta = 2$  tem-se  $x_1(0,0) = x_2(0,0) = e$ ,  $y(1,0) = y(0,1) = \sqrt{R}x_1(0,1) = \sqrt{R}x_2(1,0) = \sqrt{R}Ne/(1 + \sqrt{R})$ . Como já tínhamos que  $y(1,1) = Re$ , o contrato ótimo está completamente descrito.

Na ausência da restrição de serviço sequencial, o nível de consumo de cada pessoa depende somente da quantidade de anúncios de cada tipo. Em particular, o sistema bancário ótimo provê seguro completo contra o choque de posicionamento na fila de saques também para os indivíduos anunciando ser impacientes (tipo 0).

Considere agora o caso  $N > 2$ . A generalização da demonstração do lema 2.1 para este caso é direta e, portanto, o tratamento igualitário na data 1 continua válido. Com isso, o problema de maximização sem serviço sequencial pode ser reescrito como:

$$\max_{x,y} \sum_{j=0}^N \Pr(|\omega| = j) \left[ \frac{N-j}{N} u[x(j)] + \frac{j}{N} u[y(j)] \right] \quad (8)$$

$$\text{sujeito a } \forall j \in \{0, 1, \dots, N\} \begin{cases} x(j) \geq 0 & \text{e } y(j) \geq 0 \\ \frac{N-j}{N} x(j) + \frac{j}{N} y(j) R^{-1} \leq 1, \end{cases} \quad (9)$$

em que  $N - |\omega|$  é a quantidade de impacientes no estado  $\omega \in \Omega$  e  $\Pr(|\omega| = n) = \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^n$  é a probabilidade de a quantidade de pacientes ser igual a  $n$ . O corolário 2.2 a seguir generaliza o lema 2.1 para o caso com um número arbitrário de depositante  $N \in \mathbb{N}$ .

**Corolário 2.2** (Sistema bancário ótimo sem serviço sequencial). *Suponha  $\delta = 2$  e  $N \in \mathbb{N}$  depositantes. O sistema bancário ótimo sem serviço sequencial é dado por  $(x, y)$  tal que para cada  $\omega \in \Omega$*

$$(x(|\omega|), y(|\omega|)) = \begin{cases} (e, 0) & \text{se } 0 = |\omega| < N \\ \alpha\left(\frac{|\omega|}{N}\right) (e, \sqrt{R}e) & \text{se } 0 < |\omega| < N \\ (0, Re) & \text{se } 0 < |\omega| = N \end{cases}$$

em que  $\alpha(q) = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R}(1-q) + q}$  para  $q \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* Ver apêndice A.  $\square$

A economia estudada em Allen e Gale (2000), na qual há um contínuo de indivíduos, pode ser vista como o caso limite da economia acima quando  $N \rightarrow \infty$ . O problema de maximização apresentado em Allen e Gale (2000) é

$$\max_{x,y} \left\{ \gamma u(x) + (1-\gamma)u(y) \right\} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} x \geq 0 & \text{e } y \geq 0 \\ \gamma x + (1-\gamma)R^{-1}y \leq 1 \end{cases}$$



em que  $\gamma \in [0,1]$ . Usando uma Lei dos Grandes Números, a variável aleatória  $|\omega|/N$  converge para  $(1-p)$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left( \left| \frac{|\omega|}{N} - (1-p) \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Com isso, quando  $N \rightarrow \infty$ , a função objetivo em (8) converge para  $pu(x) + (1-p)u(y)$  e a única restrição de factibilidade em (9) revelante do ponto de vista probabilístico é  $px + (1-p)R^{-1}y \leq 1$ .

Tomando  $\gamma = p$ , o sistema bancário ótimo na economia de Allen e Gale (2000) e no caso limite da economia acima coincidem. Do corolário 2.2 e do fato de que  $\alpha(1-p) = \frac{\sqrt{R}}{1+p(\sqrt{R}-1)}$ , o contrato ótimo converge para

$$(x,y) = \left( \frac{\sqrt{R}}{p(\sqrt{R}-1)+1} e, \frac{R}{p(\sqrt{R}-1)+1} e \right)$$

o qual coincide com a alocação ótima apresentada em Allen e Gale (2000) se  $\gamma = p$  e  $e = 1$ .

## 2.2. Sistema bancário com serviço sequencial

Considere novamente a escolha de sistema bancário com  $N = 2$  indivíduos. Conforme discutido acima, com serviço sequencial o contrato ótimo precisa satisfazer a restrição  $x_1(0,0) = x_1(0,1)$ . Ou seja, o pagamento para o indivíduo na posição  $i = 1$  com anúncio  $\omega_1$  não pode depender do anúncio do indivíduo na posição posterior,  $i = 2$ . Portanto, o problema de escolha de sistema bancário é resolver o problema (7) sujeito a restrição de serviço sequencial. Ou seja,

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \sum_{\omega} P(\omega) & \left( \sum_{i=1}^2 \frac{1-\omega_i}{N} u[x_i(\omega_{-i},0)] + \frac{|\omega|}{N} u[y(\omega_{-i},1)] \right) \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} x_i(\omega) \geq 0 & \text{e} & y(\omega) \geq 0 & \forall \omega \in \Omega \\ |\omega|y(\omega) = R \left( Ne - \sum_{i=1}^2 (1-\omega_i)x_i(\omega) \right) & \forall \omega \in \Omega \\ x_1(0,0) = x_1(0,1) \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

**Lema 2.3** (Alocação ótima com serviço sequencial). *O sistema bancário ótimo com serviço sequencial é definido pelas restrições de factibilidade e por*

$$(x_1(0,0), x_2(1,0)) = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{p + (1-p)/R}}, \frac{1}{1 + \sqrt{1/R}} \right) Ne.$$

Como consequência, o contrato ótimo não trata igualmente as pessoas anunciando ser impacientes.

*Demonstração.* O problema de maximização não é separável em  $\omega \in \Omega$  devido a existência da restrição de serviço sequencial (o mesmo pagamento ocorre em histórias diferentes, como exemplo tome o pagamento  $x_1(0)$  que ocorre nas histórias  $(0,0)$  e  $(0,1)$ ). Desse modo, o problema de maximização acima pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
p^2 \left[ \frac{1}{2}u(x_1(0,0)) + \frac{1}{2}u(Ne - x_1(0,0)) \right] &+ (1-p)^2 \left[ \frac{1}{2}u(y_1(1,1)) + \frac{1}{2}u(RNe - y_1(1,1)) \right] \\
&+ p(1-p) \left[ \frac{1}{2}u(x_1(0,0)) + \frac{1}{2}u(R(Ne - x_1(0,0))) \right] \\
&+ p(1-p) \left[ \frac{1}{2}u(R(Ne - x_2(1,0))) + \frac{1}{2}u(x_2(1,0)) \right]
\end{aligned}$$

em que as restrições de factibilidade e de serviço sequencial foram substituídas na função objetivo. A condição de primeira ordem em  $x_1(0,0)$  é

$$\frac{p^2}{N} [u'(x_1(0,0)) - u'(Ne - x_1(0,0))] + \frac{p(1-p)}{N} [u'(x_1(0,0)) - Ru'[R(Ne - x_1(0,0))]] = 0$$

Usando  $\delta = 2$ , obtém-se

$$p + (1-p)R^{-1} = \frac{u'(x_1(0,0))}{u'[Ne - x_1(0,0)]} = \left( \frac{Ne - x_1(0,0)}{x_1(0,0)} \right)^2 = \left( \frac{Ne}{x_1(0,0)} - 1 \right)^2$$

e, portanto,  $x_1(0,0) = \frac{1}{1+\sqrt{p+(1-p)/R}} Ne$ . A condição de primeira ordem em  $x_2(1,0)$  é

$$\frac{p(1-p)}{N} [u'(x_2(1,0)) - Ru'(R(Ne - x_2(1,0)))] = 0.$$

Usando  $\delta = 2$  e  $\frac{p(1-p)}{N} \neq 0$ , obtém-se  $u'(x_2(1,0)) = R^{-1}u'(Ne - x_2(1,0))$  e, portanto,

$$R^{-1} = \frac{u'(x_2(1,0))}{u'(Ne - x_2(1,0))} = \left( \frac{Ne - x_2(1,0)}{x_2(1,0)} \right)^2 = \left( \frac{Ne}{x_2(1,0)} - 1 \right)^2$$

de onde se obtém  $x_2(1,0) = \frac{1}{1+\sqrt{1/R}} Ne$ .

□

Após o anúncio de tipo 0 na primeira posição, o serviço sequencial impede o sistema de aguardar o anúncio da segunda posição. Conforme estabelecido no lema 2.1, quando é possível aguardar o anúncio, o sistema paga para a primeira posição  $x_1(0,0) = e$  se o segundo anúncio é tipo 0 e  $x_1(0,1) = \alpha(1/N)e = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R}+1} Ne$  se o segundo anúncio é tipo 1. Aqui, o sistema estima que o segundo anúncio será tipo 0 com probabilidade  $p$  e paga  $x_1(0,0) = x_1(0,1)$  tais que

$$e < x_1(0,0) = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{pR + (1-p)}} Ne < \alpha(1/N)e.$$

O lema 2.3 mostra que não há seguro completo na data 1 contra o choque de posicionamento na fila de saques, uma vez que  $x_2(0,0) = Ne - x_1(0,0) < Ne - e = e$  e, portanto,  $x_2(0,0) < e < x_1(0,0)$ . Este resultado de seguro incompleto na data 1 decorre da exigência de serviço sequencial, tendo em vista que a única diferença entre os problemas de escolha do sistema bancário ótimo das subseções 2.1 e 2.2 é a presença da restrição de serviço sequencial no problema (10).

O resultado de seguro incompleto se mantém com  $N > 2$  depositantes em cada um de  $M \in \mathbb{N}$  bancos da economia – desde que eles operem sob integração completa. Similarmente, a agenda de



pagamentos descrita no lema 2.3 se mantém com  $M > 1$  bancos e  $N = 2$  depositantes cada um, desde que não exista integração entre os bancos (eles operem em isolamento).<sup>11,12</sup>

O sistema bancário estudado em Bertolai et alii (2016) pode ser visto como um caso intermediário de integração entre  $M \in \mathbb{N}$  bancos da economia. Os bancos operam em isolamento na data 1, mas operam sob integração completa na data 2. Por exemplo, suponha que há  $M = 2$  bancos e que, ao final da data 1, os anúncios foram  $\omega^{(1)} = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)})$  no banco 1 e  $\omega^{(2)} = (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)})$  no banco 2. Os pagamentos na data 1 foram  $(x_1^{(1)}(\omega^{(1)}), x_2^{(1)}(\omega^{(1)}))$  no banco 1 e  $(x_1^{(2)}(\omega^{(2)}), x_2^{(2)}(\omega^{(2)}))$  no banco 2. A integração completa entre os bancos na data 2, permite financiar os pagamentos na data 2 usando a poupança agregada da economia,

$$R \left[ Ne - \sum_{i=1}^2 (1 - \omega_i^{(1)}) x_i^{(1)}(\omega^{(1)}) \right] + R \left[ Ne - \sum_{i=1}^2 (1 - \omega_i^{(2)}) x_i^{(2)}(\omega^{(2)}) \right],$$

enquanto que o isolamento entre os bancos na data 2 limita os pagamentos do banco  $m \in \{1, 2\}$  na data 2 à sua poupança:  $|\omega^{(m)}| y^{(m)}(\omega) \leq R \left( Ne - \sum_{i=1}^2 (1 - \omega_i^{(m)}) x_i^{(m)}(\omega^{(m)}) \right)$ .

Mais geralmente, se  $\tilde{\omega} = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(M)})$  e se  $x^{(m)}(\omega^{(m)})$  e  $y^{(m)}(\tilde{\omega})$  denotam os pagamentos do banco  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  nas datas 1 e 2, respectivamente, então a restrição de factibilidade sob integração completa na data 2 é dada por

$$\sum_{m=1}^M |\omega^{(m)}| y^{(m)}(\tilde{\omega}) \leq \sum_{m=1}^M R \left[ Ne - \sum_{i=1}^2 (1 - \omega_i^{(m)}) x_i^{(m)}(\omega^{(m)}) \right]. \quad (11)$$

Ou seja, a restrição de factibilidade em (10) é substituída pela sua soma em  $\omega^{(m)}$ , a restrição (11). A utilidade esperada *ex ante* dos indivíduos é<sup>13</sup>

$$\sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \sum_{\omega^{(m)} \in \Omega} P(\omega^{(m)}) \left( \sum_{i=1}^2 \frac{1 - \omega_i^{(m)}}{N} u[x_i^{(m)}(\omega_{-i}^{(m)}, 0)] + \frac{|\omega^{(m)}|}{N} u[y^{(m)}(\tilde{\omega})] \right), \quad (12)$$

a qual pode ser vista como a soma da função objetivo de (10) em  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ , normalizada por  $1/M$ . O problema de escolha de sistema bancário  $(x, y)$  em Bertolai et alii (2016) consiste em maximizar (12) sujeito a (11) e  $\sum_{i=1}^2 (1 - \omega_i^{(m)}) x_i^{(m)}(\omega^{(m)}) \leq Ne$  para cada  $m$  e cada  $\omega^{(m)}$ . Quando  $M \rightarrow \infty$ , a utilidade (12) e a restrição (11) convergem<sup>14</sup> para, respectivamente,

$$p^2 [u(c_1) + u(c_2)] + p(1-p) [u(c_1) + u(y)] + p(1-p) [u(y) + u(\bar{c})] + (1-p)^2 [2u(y)]$$

e

$$p(1-p)[R(Ne - c_1) - y] + p(1-p)[R(Ne - \bar{c}) - y] + (1-p)^2[RNe - 2y] = 0, \quad (13)$$

em que para todo  $m \in \mathbb{N}$  a variável  $c_1$  denota  $x_1^{(m)}(0, 0)$ ,  $c_2$  denota  $x_2^{(m)}(0, 0)$ ,  $\bar{c}$  denota  $x_2^{(m)}(1, 0)$  e  $y$  denota o pagamento  $y^{(m)}(\tilde{\omega})$ , o qual deixa de ser aleatório quando  $M \rightarrow \infty$ . As demais restrições são reescritas como  $c_1 + c_2 = Ne$ ,  $c_1 \leq Ne$  e  $\bar{c} \leq Ne$ .

<sup>11</sup>Ver notas de rodapé 7 e 8.

<sup>12</sup>Ennis e Keister (2009) e Bertolai et alii (2014) propõem algoritmos para calcular a alocação ótima no caso geral  $N \in \mathbb{N}$  mantendo a hipótese de função utilidade  $u(c) = \frac{c^{1-\delta}}{1-\delta}$ .

<sup>13</sup>Definida antes da distribuição (aleatória) dos indivíduos entre os bancos.

<sup>14</sup>Conforme demonstrado em Bertolai et alii (2016).

**Lema 2.4.** O sistema bancário ótimo com um contínuo de bancos é definido por  $(c_1, \bar{c}, y)$  tal que  $u'(\bar{c}) = Ru'(y)$

$$\begin{aligned} u'(c_1) &= (1-p)Ru'(y) + pu'(Ne - c_1) \\ y &= \frac{R}{N}[p(Ne - c_1) + p(Ne - \bar{c}) + (1-p)Ne]. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver apêndice A. □

Observe a relação entre o pagamento na data 2 e o pagamento na data 1 após anúncio de tipo 1 na primeira posição,  $u'(\bar{c}) = Ru'(y)$ . Bertolai et alii (2016) mostram que tal resultado pode ser generalizado<sup>15</sup> para o caso  $N > 2$ , de forma que há tratamento igualitário na data 1 logo após algum anúncio de tipo 1 na data 1. Há tratamento desigual na data 1 somente enquanto não surgir um anúncio tipo 1. Trata-se da mesma relação entre o pagamento na data 2 e o pagamento na data 1 escolhida no caso sem serviço sequencial, conforme estabelecido no Lema 2.1 e no Corolário 2.2.

### 3. INSTABILIDADE FINANCEIRA SEM SERVIÇO SEQUENCIAL

Considere o modelo de Allen e Gale (2000), no qual *não há* a exigência de serviço sequencial na escolha de sistema bancário. Conforme discutido, este modelo pode ser visto como um caso limite da economia apresentada na subseção 2.1 quando  $N \rightarrow \infty$ .

As duas datas da seção 2 são divididas em três períodos  $t \in \{0, 1, 2\}$ , de forma que o período 0 corresponde ao início da data 1. A tecnologia de armazenamento é apresentada como alternativas de investimento em ativos de curto e de longo prazo. Cada unidade de bem de consumo investida em ativo de curto prazo no período  $t$  produz 1 unidade do bem de consumo em  $t + 1$ . Cada unidade de bem de consumo investida em ativo de longo prazo em  $t = 0$  produz  $R > 1$  unidades de consumo em  $t = 2$  e  $r \in (0, 1)$  de unidades de consumo em  $t = 1$ .

A economia é dividida em quatro regiões *ex ante* idênticas: regiões  $A, B, C$  e  $D$ . Cada região possui um contínuo de indivíduos *ex ante* idênticos, de medida  $1/4$ . Com probabilidade  $p \in (0, 1)$  o indivíduo sofre o choque de liquidez e se torna impaciente (tipo 0). Com probabilidade  $1 - p$  ele não sofre o choque e se torna paciente (tipo 1). A probabilidade  $p$  varia entre regiões, sendo  $p_i$  a probabilidade de um indivíduo se tornar impaciente na região  $i \in \{A, B, C, D\}$ . Ela é uma variável aleatória com dois valores possíveis,  $p_H$  e  $p_L$  tais que  $0 < p_L < p_H < 1$ . Há dois estados possíveis e equiprováveis:  $S_1$  e  $S_2$  com  $\Pr(S_1) = \Pr(S_2) = 1/2$ . No estado agregado  $S_1$ , tem-se  $p_A = p_C = p_H$  e  $p_B = p_D = p_L$  e no estado agregado  $S_2$ , tem-se  $p_A = p_C = p_L$  e  $p_B = p_D = p_H$ . A Tabela 1 organiza tal informação de maneira transparente.

**Tabela 1:** Choques de liquidez por região

Est/Reg	A	B	C	D
$S_1$	$p_H$	$p_L$	$p_H$	$p_L$
$S_2$	$p_L$	$p_H$	$p_L$	$p_H$

<sup>15</sup>Desde que  $N$  não seja muito grande ou  $R$  seja suficientemente baixo.



Como existe um contínuo de indivíduos na região  $i \in \{A, B, C, D\}$ , a Lei dos Grandes Números garante que a proporção de indivíduos impacientes nesta região será  $p_i$ .<sup>16</sup> Logo, a quantidade de impacientes na região  $i$  é  $p_i/4$ . Conclui-se então que a quantidade de impacientes na economia é

$$\gamma \equiv \sum_{i \in \{A, B, C, D\}} \frac{p_i}{4} = \frac{p_H}{4} + \frac{p_L}{4} + \frac{p_H}{4} + \frac{p_L}{4} = \frac{p_H + p_L}{2}$$

nos dois estados da natureza  $S_1$  e  $S_2$ . Toda a incerteza é resolvida em  $t = 1$  quando o estado da natureza ( $S_1$  ou  $S_2$ ) é revelado e cada consumidor descobre seu tipo.

Conforme antecipado na subseção 2.1, o problema de escolha de sistema bancário nesta economia é<sup>17</sup>

$$\max_{c_1, c_2} \left\{ \gamma u(c_1) + (1 - \gamma)u(c_2) \right\} \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} c_1 \geq 0 & \text{e} & c_2 \geq 0 \\ \gamma c_1 + (1 - \gamma)R^{-1}c_2 \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

em que  $c_t$  denota o pagamento do sistema bancário no período  $t \in \{1, 2\}$ . A simplicidade do problema acima decorre de três propriedades da alocação ótima: (i) os pagamentos não dependem do estado da natureza, dado que não existe incerteza agregada; (ii) os pagamentos não dependem da região do indivíduo, dado que os indivíduos são *ex ante* idênticos e a utilidade é estritamente côncava; (iii) o investimento no ativo de curto prazo é igual a quantidade total de pagamentos no período 1,  $\gamma c_1$ ; o investimento no ativo de longo prazo é igual a quantidade total de pagamentos no período 2,  $(1 - \gamma)c_2$ .

Seja  $a = (s, l, c_1, c_2)$  uma alocação nesta economia, em que  $s$  é o investimento no ativo de curto prazo e  $l$  é o investimento no ativo de longo prazo. Seja  $a^* = (s^*, l^*, c_1^*, c_2^*)$  a solução de (14). Então,  $s^* = \gamma c_1^*$  e  $l^* = (1 - \gamma)c_2^*/R$ . Além disso, o Lema 2.1 (ao tomar o limite  $N \rightarrow \infty$ ) garante que  $u'(c_1^*) = Ru'(c_2^*)$ . Dada a concavidade estrita de  $u$  e  $R > 1$ , tem-se  $c_1^* < c_2^*$  e, portanto, a restrição de incentivos  $u(c_2) \geq u(c_1)$  é atendida por  $a^*$ . Os indivíduos impacientes acham fracamente melhor revelar seu verdadeiro tipo ao invés de mentir e consumir em  $t = 1$ .

### 3.1. Descentralização (O Mercado Interbancário de Depósitos)

Allen e Gale (2000) mostram que a alocação ótima  $a^*$  pode ser descentralizada por meio de um sistema bancário competitivo. Ou seja, por meio de um grande número de bancos, cada região paga aos seus indivíduos  $c_1^*$  na data 1 e  $c_2^*$  na data 2.

O mercado interbancário (integração entre os bancos) é usado para transferir recursos entre as diferentes regiões. Há inicialmente  $1/4$  unidades de recursos em cada região e a demanda por recursos no período 1 será  $p_H c_1^*/4$  nas regiões com muitos impacientes e  $p_L c_1^*/4$  nas regiões com poucos impacientes. Cada região investe em ativo de curto prazo  $s^*/4 = \gamma c_1^*/4$  e em ativo de longo prazo e  $l^*/4 = (1 - \gamma)c_2^*/4R$ , de forma que no agregado e economia investe  $s^*$  no curto prazo e  $l^*$  no longo prazo. Como  $p_L < \gamma < p_H$ , as regiões com muitos impacientes possuem excesso de demanda por consumo no período 1, dado por  $(p_H - \gamma)c_1^*/4$ , e excesso de oferta de recursos no período 2, dado por  $(1 - p_H - \gamma)c_2^*/4$ . Similarmente, as regiões com poucos impacientes possuem excesso de recursos no período 1, dado por  $(\gamma - p_L)c_1^*/4$  e excesso de demanda por recursos no período 2, dado por  $(1 - p_L - \gamma)c_2^*/4$ . O mercado interbancário opera em ambos os períodos para transferir recursos das regiões com excesso de oferta de recursos para as regiões com excesso de demanda por recursos. Tais

<sup>16</sup>Por exemplo, no estado  $S_1$ , a região  $A$  tem uma proporção  $p_H$  de indivíduos impacientes (assim como a região  $C$ ) e a região  $B$  tem uma proporção  $p_L$  de indivíduos impacientes (assim como a região  $D$ ).

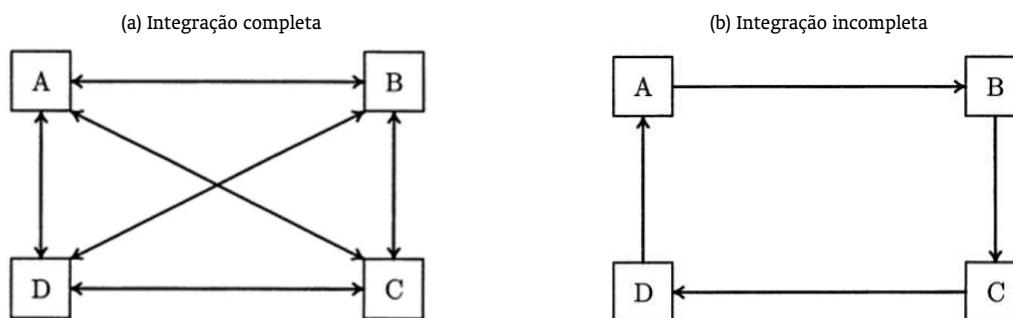
<sup>17</sup>A desigualdade  $\gamma c_1 + (1 - \gamma)R^{-1}c_2 \leq 1$  exige que a soma entre a quantidade de ativos de curto  $\gamma c_1$  e de longo prazo  $(1 - \gamma)c_2$  não ultrapasse a dotação da economia: 1 unidade de bem de consumo. Como existe um contínuo de agentes e cada agente tem uma unidade do bem, no agregado há uma unidade de recurso.

transferências permitem honrar as promessas de pagamento  $c_1^*$  e  $c_2^*$  em cada uma das regiões sem a necessidade de resgatar o ativo de longo prazo.

A alocação descentralizada é descrita em termos do comportamento de um banco representativo em cada região  $i \in \{A, B, C, D\}$ . Cada consumidor deposita sua 1 unidade de bem no banco da sua região, o qual investe em um portfólio  $(s^i, l^i) \geq 0$  e oferece em troca um contrato  $(c_1^i, c_2^i)$  que permite ao consumidor retirar  $c_1^i$  unidades de consumo em  $t = 1$  ou  $c_2^i$  unidades de consumo em  $t = 2$ . O contrato é suposto invariante aos choques de liquidez das regiões. Para implementar a alocação ótima por meio do setor bancário descentralizado, deve-se ter  $a^i = (s^i, l^i, c_1^i, c_2^i) = (s^*/4, l^*/4, c_1^*, c_2^*)$ .

No mercado interbancário, os bancos podem depositar parte de sua dotação inicial em (transferir em  $t = 0$  para) bancos de outras regiões. Se o banco receptor está na região  $i$ , ele promete pagar ao banco depositante  $c_1^i$  se o depósito for resgatado em  $t = 1$  e  $c_2^i$  se o depósito for resgatado em  $t = 2$ . Allen e Gale (2000) estudam dois tipos de mercados interbancários, os quais são apresentados na Figura 1. A flecha aponta para o banco que recebe o depósito e tem origem no banco que deposita. O mercado interbancário apresentado na subfigura 1a é chamado de *completo*, pois cada banco pode depositar em todos os demais bancos. O mercado interbancário apresentado na subfigura 1b é chamado de *incompleto*, pois o banco de cada região pode depositar em somente uma região e receber depósito de somente uma outra região. Por exemplo, o banco da região  $B$  pode depositar recursos somente no banco da região  $C$  e receber recursos somente da região  $A$ .

**Figura 1:** Tipos de mercado interbancário em Allen e Gale (2000).



**Lema 3.1** (Descentralização). *É factível pagar em todas as regiões  $c_1^*$  no período  $t = 1$  e  $c_2^*$  no período  $t = 2$ , tanto no caso de mercado interbancário completo quanto no caso de mercado interbancário incompleto.*

- Se o mercado é completo, basta o banco da região  $i \in \{A, B, C, D\}$  manter  $z^i = (p_H - \gamma)/8$  depósitos em cada região  $j \neq i$ .
- Se o mercado é incompleto, basta o banco da região  $i \in \{A, B, C, D\}$  manter  $z^i = (p_H - \gamma)/4$  depósitos na região permitida.

*Demonstração.* Ver apêndice A. □

Nas duas estruturas de mercado consideradas, as regiões com alta demanda por consumo em  $t = 1$  resgatam seus depósitos no mercado interbancário em  $t = 1$  e pagam os depósitos obtidos no interbancário em  $t = 2$ . As regiões com baixa demanda por consumo em  $t = 1$  resgatam seus depósitos em  $t = 2$  e pagam os depósitos obtidos em  $t = 1$ .





### 3.2. Contágio

Considere agora a existência de um estado da natureza imprevisível  $\bar{S}$ . Neste estado, a proporção de impaciente é igual a  $\gamma$  nas regiões  $B$ ,  $C$  e  $D$  e igual a  $\gamma + \epsilon$  na região  $A$ , para  $\epsilon \in (0, 1 - \gamma)$ , conforme apresentado na Tabela 2.

**Tabela 2:** Choques de liquidez por região com perturbação

Est/Reg	A	B	C	D
$S_1$	$p_H$	$p_L$	$p_H$	$p_L$
$S_2$	$p_L$	$p_H$	$p_L$	$p_H$
$\bar{S}$	$\gamma + \epsilon$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$

A imprevisibilidade de  $\bar{S}$  significa que sua realização ocorre com probabilidade zero. Com isso, o sistema bancário ótimo não muda e continua sendo dado por  $a^*$ . Nos estados  $S_1$  e  $S_2$  o comportamento de equilíbrio da economia continua o mesmo. No estado  $\bar{S}$ , contudo, o comportamento será diferente.

Suponha realizado o estado  $\bar{S}$ . Indivíduos e bancos irão decidir se retiram seus depósitos em  $t = 1$  ou  $t = 2$ . Os indivíduos impacientes sempre sacam em  $t = 1$ , uma vez que não auferem utilidade em consumir em  $t = 2$ . Os consumidores pacientes tem a opção de sacar em  $t = 1$  ou em  $t = 2$  e vão optar pelo período que lhe fornecer maior quantidade de consumo. Para o comportamento dos bancos em  $\bar{S}$ , Allen e Gale (2000) fazem as seguintes hipóteses: os bancos são obrigados a pagar  $c_1^*$  em  $t = 1$ , sempre que factível, e os ativos remanescentes em  $t = 2$  são liquidados e distribuídos igualmente entre os depositantes (indivíduos e bancos) que decidem retirar em  $t = 2$ . Se não é possível pagar  $c_1^*$  para todos que desejam sacar em  $t = 1$ , os bancos são obrigados a liquidar todos os seus ativos em  $t = 1$  e distribuir os recursos assim obtidos igualmente entre seus depositantes (indivíduos e bancos).

A ordem individualmente ótima na qual os bancos liquidam seus ativos é chamada por Allen e Gale (2000) de *pecking order*. Primeiramente, os bancos liquidam o ativo de curto prazo. Em seguida, liquidam os depósitos interbancários. Por fim, liquidam o ativo de longo prazo. A otimalidade deste ordenamento decorre dos diferentes custos de liquidação (custo de se obter consumo corrente (em  $t = 1$ ) em termos de consumo futuro (em  $t = 2$ )) de cada ativo:<sup>18</sup>

$$1 < \frac{c_2^*}{c_1^*} < \frac{R}{r}$$

em que  $c_1^* < c_2^*$  decorre da condição de otimalidade  $u'(c_1^*) = Ru'(c_2^*)$  e  $r$  pode ser escolhido suficientemente pequeno para que  $R/r > c_2^*/c_1^*$  seja satisfeita, uma vez que a alocação ótima é invariante a  $r$ .

Considere daqui em diante a principal estrutura de mercado estudada por Allen e Gale (2000), a estrutura incompleta apresentada na Figura 1b. Suponha que o banco da região  $i$  depositou  $z^i = (p_H - \gamma)/4$  na única região em que ele é capaz de fazê-lo.<sup>19</sup> Ao se deparar com  $(\gamma + \epsilon)/4$  saques em  $t = 1$  (cada um deles de valor prometido  $c_1^*$ ), o banco da região  $A$  irá demandar seus depósitos junto ao banco  $B$ , uma vez que seus ativos de curto prazo  $s^*/4 = \gamma c_1^*/4$  são insuficientes para honrar seus compromissos em  $t = 1$ . Com isso, o banco da região  $B$  demanda seus depósitos junto ao banco  $C$ , pois o banco  $B$  não é capaz de pagar a demanda dos seus  $\gamma/4$  depositantes e do banco  $A$ ,  $z^A$ , utilizando somente sua dotação de ativo de curto prazo,  $s^*/4 = \gamma c_1^*/4$ . De forma análoga, o banco da região  $C$

<sup>18</sup>Uma unidade de ativo de curto prazo vale 1 unidade de consumo hoje e 1 unidade de consumo amanhã (custo 1). Ao liquidar 1 unidade de depósito o banco desiste de  $c_2^*$  unidades de consumo futuro e obtém  $c_1^*$  unidades de consumo presente (custo  $c_2^*/c_1^*$ ). Se o banco liquida 1 unidade de ativo de longo prazo, ele troca  $R$  unidades de consumo futuro por  $r$  unidades de consumo presente (custo  $R/r$ ).

<sup>19</sup> $A$  depositou em  $B$ ,  $B$  depositou em  $C$ ,  $C$  depositou em  $D$  e  $D$  depositou em  $A$ .

demanda seus depósitos junto ao banco  $D$  e o banco da região  $D$  demanda seus depósitos junto ao banco  $A$ . Como os depósitos entre os bancos tem o mesmo valor, o mercado interbancário não é capaz de auxiliar o banco  $A$  a satisfazer suas obrigações sem recorrer aos ativos de longo prazo. O saque do banco  $A$  junto ao banco  $B$  é usado para pagar o saque do banco  $D$  junto ao banco  $A$ .

Do exposto acima, o banco da região  $A$  necessita liquidar também ativos de longo prazo para honrar seus compromissos em  $t = 1$ . Logo, ele não será capaz de honrar o compromisso  $c_2^*$  junto aos seus depositantes em  $t = 2$ . Se o banco  $A$  liquidar  $x$  unidades de ativo de longo prazo, ele pagará na data 2 somente  $c_2^A = 4R[l^*/4 - x]/(1 - \gamma - \epsilon)$ . Os indivíduos pacientes continuarão a sacar no período 2 se e somente se  $c_2^A \geq c_1^*$ , ou seja, se e somente se  $x \leq [l^* - (1 - \gamma - \epsilon)c_1^*/R]/4$ . Caso contrário, eles optarão por sacar no período 1, o que caracteriza<sup>20</sup> uma *corrida bancária* na região  $A$ . Como a região  $A$  possui  $s^*/4 = \gamma c_1^*/4$  unidades de ativo de curto prazo e  $(\gamma + \epsilon)/4$  indivíduos impacientes, então o banco  $A$  precisa obter  $\epsilon c_1^*/4$  unidades de consumo por meio da liquidação do ativo de longo prazo. Logo, o banco da região  $A$  liquida  $x = \epsilon \frac{c_1^*}{4}$  unidades de ativo de longo prazo.

**Lema 3.2.** Seja  $\beta^* = \frac{r}{R-r} \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*}$  e suponha realizado o estado  $\bar{S}$ . Então, existe corrida bancária na região  $A$  se e somente se

$$\beta^*(1 - \gamma) < \epsilon. \quad (15)$$

*Demonstração.* Ao liquidar  $x = \epsilon c_1^*/4r$  unidades de ativo de longo prazo, o banco  $A$  é capaz de pagar no período 2

$$c_2^A = \frac{4R[l^*/4 - \epsilon c_1^*/4r]}{1 - \gamma - \epsilon} = \frac{(1 - \gamma - \epsilon)c_2^* + \epsilon c_2^* - R\epsilon c_1^*/r}{1 - \gamma - \epsilon} = c_2^* + \frac{\epsilon}{1 - \gamma - \epsilon} \left( \frac{c_2^*}{c_1^*} - \frac{R}{r} \right) c_1^*.$$

Por hipótese,  $R/r > c_2^*/c_1^*$ . Então  $c_2^A < c_2^*$  para todo  $\epsilon \in (0, 1 - \gamma)$  e  $c_2^A$  é decrescente em  $\epsilon$ . Logo,  $c_2^A \geq c_1^*$  se e somente se  $\frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*} + \frac{\epsilon}{1 - \gamma - \epsilon} \left( \frac{c_2^*}{c_1^*} - \frac{R}{r} \right) \geq 0$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \beta^* \frac{R - r}{r} = \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*} &\geq \frac{\epsilon}{1 - \gamma - \epsilon} \left( \frac{R}{r} - \frac{c_2^*}{c_1^*} \right) = \frac{\epsilon}{1 - \gamma - \epsilon} \left( \frac{R}{r} - \beta^* \frac{R - r}{r} - 1 \right) \\ (1 - \gamma - \epsilon)\beta^* \frac{R - r}{r} &\geq \epsilon(1 - \beta^*) \frac{R - r}{r} \end{aligned}$$

o que é equivalente a  $\epsilon \leq (1 - \gamma)\beta^*$ .  $\square$

Se  $\epsilon \leq \beta^*(1 - \gamma)$ , não há corrida bancária na região  $A$  e o banco desta região é capaz de absorver o choque  $\epsilon$  por conta própria. O choque não tem repercussão sobre bancos em outras regiões. Os indivíduos pacientes da região  $A$ , no entanto, estão em pior situação: a prematura liquidação do ativo de longo prazo não permite ao bancos pagar  $c_2^*$  em  $t = 2$ .

Se  $\epsilon > \beta^*(1 - \gamma)$ , haverá corrida bancária. Todos os  $1/4$  indivíduos da região  $A$  e o banco  $D$  demandarão seus depósitos em  $t = 1$ . O valor de liquidação dos ativos do banco  $A$  é  $s^*/4 + r l^*/4 + z^A q^B$ , em que  $q^i$  é o valor do depósito no banco  $i \in \{A, B, C, D\}$  quando há corrida bancária no banco  $A$ . Como  $q^B \leq c_1^*$ , o banco  $A$  não é capaz de honrar a promessa  $q^A = c_1^*$ , pois

$$\frac{s^* + r l^*}{4} + z^A q^B \leq \frac{\gamma c_1^* + r(1 - \gamma)c_2^*/R}{4} + z^D c_1^* < \left( \frac{1}{4} + z^D \right) c_1^*$$

em que a desigualdade estrita decorre de  $R/r > c_2^*/c_1^*$ . Logo,  $q^A = \frac{s^* + r l^* + 4 z^A q^B}{1 + 4 z^D} < c_1^*$  e todos os indivíduos da região  $A$  serão prejudicados pelo choque  $\epsilon$ , assim como haverá um *spillover effect* negativo para a região  $D$  – uma vez que seus depósitos no interbancário perdem valor.

<sup>20</sup>Conforme discutido na seção 2.



O *spillover effect* sobre o banco da região  $D$  reduz o valor de seus ativos, de forma que os ativos de curto prazo  $s^*/4$  e o depósito no interbancário  $z^D q^A$  são insuficientes para honrar os pagamentos em  $t = 1$ ,  $(\gamma/4 + z^C)c_1^*$ , pois  $q^A < c_1^*$  implica em  $s^*/4 + z^D q^A < (\gamma/4 + z^C)c_1^*$ . Logo, o banco da região  $D$  também necessita liquidar ativos de longo prazo para honrar seus compromissos em  $t = 1$  e, portanto, ele não será capaz de honrar o compromisso  $c_2^*$  junto aos seus depositantes em  $t = 2$ . Se o banco  $D$  liquidar  $x$  unidades de ativo de longo prazo, ele pagará na data 2 somente  $c_2^D = 4R[l^*/4 - x]/(1 - \gamma)$ . Os indivíduos pacientes continuarão a sacar no período 2 se e somente se  $c_2^D \geq c_1^*$ , ou seja, se e somente se  $x \leq [l^* - (1 - \gamma)c_1^*/R]/4$ . Caso contrário, eles optarão por sacar no período 1, o que caracteriza uma *corrida bancária* na região  $D$ . Então o banco  $D$  precisa obter  $(\gamma/4 + z^C)c_1^* - (s^*/4 + z^D q^A) = z^D(c_1^* - q^A) > 0$  unidades de consumo por meio da liquidação do ativo de longo prazo. Logo, o banco da região  $D$  liquida  $x = z^D(c_1^* - q^A)/r$  unidades de ativo de longo prazo.

Analogamente, o banco da região  $C$  liquida  $x = z^C(c_1^* - q^D)/r$  unidades de ativo de longo prazo e o banco da região  $B$  liquida  $x = z^B(c_1^* - q^C)/r$  unidades de ativo de longo prazo.

**Lema 3.3.** *Seja  $z = p_H - \gamma$ . A corrida bancária no banco  $A$  gera uma corrida bancária via contágio em todas as regiões se  $\beta^* < z$ , ou seja*

$$\frac{r}{R} < \frac{zc_1^*}{zc_2^* + (1 + z)(c_2^* - c_1^*)}. \quad (16)$$

Neste caso, os valores de liquidação são  $q^A = q^B = q^C = q^D = s^* + rl^*$ .

*Demonstração.* Seja  $Y \equiv c_1^* - \frac{r(1-\gamma)}{Rz}(c_2^* - c_1^*)$ . Ao liquidar  $x = z^D(c_1^* - q^A)/r$  unidades de ativo de longo prazo, o banco  $D$  é capaz de pagar no período 2

$$c_2^D = \frac{4R[l^*/4 - z^D(c_1^* - q^A)/r]}{1 - \gamma} = c_2^* - \frac{Rz}{r(1 - \gamma)}(c_1^* - q^A),$$

pois  $4z^i = z$  para todo  $i \in \{A, B, C, D\}$ . Então,  $c_2^D \geq c_1^*$  se e somente se  $c_2^* - \frac{Rz}{r(1-\gamma)}(c_1^* - q^A) - c_1^* \geq 0$ . Ou seja,  $q^A \geq Y$ . De forma análoga,  $c_2^C \geq c_1^*$  se e somente se  $q^D \geq Y$ . Ainda,  $c_2^B \geq c_1^*$  se e somente se  $q^C \geq Y$ . Note que  $q^B \leq c_1^*$  e, portanto,  $q^A = \frac{s^* + rl^* + 4z^A q^B}{1 + 4z^A} \leq \frac{s^* + rl^* + zc_1^*}{1 + z}$ . Logo,

$$\begin{aligned} Y - q^A &\geq Y - \frac{\gamma c_1^* + (r/R)(1 - \gamma)c_2^* + zc_1^*}{1 + z} \\ &= c_1^* - \frac{r(1 - \gamma)}{Rz}(c_2^* - c_1^*) - \frac{\gamma c_1^* + (r/R)(1 - \gamma)c_2^* + zc_1^*}{1 + z} \\ &= -\frac{r(1 - \gamma)}{Rz}(c_2^* - c_1^*) - \frac{(r/R)(1 - \gamma)c_2^* - (1 - \gamma)c_1^*}{1 + z} \\ &= (1 - \gamma) \left[ \frac{c_1^*}{1 + z} - \frac{r}{R} \left( \frac{c_2^* - c_1^*}{z} + \frac{c_2^*}{1 + z} \right) \right] \\ &= (1 - \gamma) \left[ \frac{c_1^*}{1 + z} - \frac{r}{R} \left( \frac{(1 + z)(c_2^* - c_1^*) + zc_2^*}{z(1 + z)} \right) \right] > (1 - \gamma) \left[ \frac{c_1^*}{1 + z} - \frac{c_1^*}{1 + z} \right] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

em que se usou (16) na última desigualdade.

Segue que ocorre corrida bancária na região  $D$ . O valor de liquidação no banco  $D$  é  $q^D = \frac{s^* + rl^* + 4z^D q^A}{1 + 4z^D} \leq \frac{s^* + rl^* + zc_1^*}{1 + z}$ , pois  $q^A \leq c_1^*$ . Álgebra análoga a (17) estabelece que  $q^D < Y$  e, portanto, há corrida na região  $C$ . O valor de liquidação no banco  $C$  é  $q^C = \frac{s^* + rl^* + 4z^C q^D}{1 + 4z^C} \leq \frac{s^* + rl^* + zc_1^*}{1 + z}$ , pois  $q^D \leq c_1^*$ . Álgebra análoga a (17) estabelece que  $q^C < Y$  e, portanto, há corrida na região  $B$ .

Como há corrida bancária em todas as regiões, então  $q^i = X + Zq^j$  para todo  $(i, j) \in \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, A)\}$ , em que  $X \equiv \frac{s^* + rl^*}{1 + z}$  e  $Z \equiv \frac{z}{1 + z} \in (0, 1)$ . Logo,

$$\begin{pmatrix} 1 & -Z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z \\ -Z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^A \\ q^B \\ q^C \\ q^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ X \\ X \end{pmatrix}.$$

Observe que  $q^A = q^B = q^C = q^D = X/(1 - Z) = s^* + r l^*$  é a única solução dos sistema acima, pois o determinante da matriz de coeficientes é  $1 - Z^4 > 0$ .

□

### 3.3. Uma intervenção no interbancário para eliminar contágio

Considere uma intervenção no mercado interbancário no estado  $\bar{S}$  sob a estrutura de mercado incompleta apresentada na Figura 1b,<sup>21</sup> cujo objetivo é evitar a corrida bancária em todos os bancos. Suponha que (15) e (16) são válidas e, portanto, há corrida bancária em todos os bancos na ausência de intervenção, conforme estabelecido pelos Lemas 3.2 e 3.3.

Uma autoridade central impõe o seguinte mecanismo de coordenação aos bancos no estado  $\bar{S}$ : (i) todos os bancos liquidam somente  $(1/4)\epsilon c_1^*/4r$  unidades de ativo de longo prazo; (ii) o banco  $A$  liquida somente  $(3/4)\epsilon c_1^*/4$  unidades em depósitos junto ao banco  $B$ ; (iii) o banco  $B$  liquida somente  $(2/4)\epsilon c_1^*/4$  unidades em depósitos junto ao banco  $C$ ; (iv) o banco  $C$  liquida somente  $(1/4)\epsilon c_1^*/4$  unidades em depósitos junto ao banco  $D$ ; e (iv) o banco  $D$  não resgata seus depósitos junto ao banco  $A$  em  $t = 1$ .

O saque do banco  $i$  não pode exceder  $z^i c_1^*$ , ou seja,  $\epsilon \leq 16z^i/3 = 4z/3$ . Adicionalmente, o banco  $A$  será capaz de cumprir sua promessa de pagamento em  $t = 1$  se

$$\frac{1}{4}(\gamma + \epsilon)c_1^* + 0 \leq \frac{s^*}{4} + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} + \frac{3}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4}$$

em que o termo nulo representa o saque realizado pelo banco  $D$  e o termo  $\epsilon c_1^*/16 = r\epsilon c_1^*/(16r)$  é o montante de recursos obtido pelo banco  $A$  por meio da liquidação de ativo de longo prazo. Analogamente, os bancos  $B$ ,  $C$  e  $D$  serão capazes de cumprir suas promessas de pagamento em  $t = 1$  se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{4}c_1^* + \frac{3}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} &\leq \frac{s^*}{4} + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} + \frac{2}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} \\ \frac{\gamma}{4}c_1^* + \frac{2}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} &\leq \frac{s^*}{4} + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} \\ \frac{\gamma}{4}c_1^* + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} &\leq \frac{s^*}{4} + \frac{1}{4}\frac{\epsilon c_1^*}{4} + 0 \end{aligned}$$

em que o termo nulo representa o saque realizado pelo banco  $D$  no banco  $A$ . Como  $s^* = \gamma c_1^*$ , então as quatro condições acima são satisfeitas com igualdade.

Sob a intervenção descrita, todos os bancos conseguem pagar  $c_1^*$  aos impacientes e aos demais bancos e o custo do choque  $\epsilon$  é absorvido pelos indivíduos impacientes de todas as regiões. Os pacientes recebem  $c_2^i < c_2^*$  para todo  $i \in \{A, B, C, D\}$ , conforme estabelecido pelo Lema 3.4 a seguir.

**Lema 3.4.** *Sob o mecanismo de intervenção, o pagamento aos pacientes na data 2 é dado por*

$$c_2^A = c_2^B = c_2^C = c_2^D = c_2^* - \frac{\epsilon c_1^*}{4} \frac{R/r - c_2^*/c_1^*}{1 - \gamma - \epsilon/4} < c_2^*.$$

<sup>21</sup>A análise é restrita a esta estrutura de mercado por ser este o principal caso estudado por Allen e Gale (2000) e ser aquele no qual o contágio possui efeitos mais profundos e disseminados.



*Demonstração.* Ver apêndice A. □

Os indivíduos pacientes continuarão a sacar no período 2 se e somente se  $c_2^i \geq c_1^*$  para todo  $i \in \{A, B, C, D\}$ . Portanto, para que elimine a corrida bancária, a intervenção precisa satisfazer:

$$\begin{aligned} c_2^* - c_1^* &\geq \frac{\epsilon c_1^*}{4} \frac{R/r - c_2^*/c_1^*}{1 - \gamma - \epsilon/4} = c_1^* \frac{R/r - c_2^*/c_1^*}{4(1 - \gamma)/\epsilon - 1} \\ (4(1 - \gamma)/\epsilon - 1) \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*} &\geq R/r - c_2^*/c_1^* \\ 4(1 - \gamma)/\epsilon \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*} &\geq \frac{R}{r} - \frac{c_2^*}{c_1^*} + \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*} = \frac{R - r}{r} \\ \epsilon &\leq 4\beta^*(1 - \gamma), \end{aligned}$$

em que se usou  $\beta^* = \frac{r}{R-r} \frac{c_2^* - c_1^*}{c_1^*}$ . De (15), conclui-se ser necessário que  $\epsilon \in (\beta^*(1 - \gamma), 4\beta^*(1 - \gamma)]$  para que exista corrida bancária no banco  $A$  sem intervenção e não ocorra corrida bancária sob a intervenção em banco algum. A proposição (3.5) sumariza tal resultado.

**Proposição 3.5.** *Existe  $(\epsilon, r)$  sob o qual há corrida bancária em todas as regiões na ausência de intervenção e não há corrida bancária na presença da intervenção descrita acima. Basta que  $\beta^* < z$ ,  $\epsilon \leq \frac{4z}{3} e$*

$$\beta^*(1 - \gamma) < \epsilon \leq 4\beta^*(1 - \gamma).$$

#### 4. INSTABILIDADE FINANCEIRA COM SERVIÇO SEQUENCIAL

Considere o modelo de Bertolai et alii (2016), no qual há a exigência de serviço sequencial na escolha de sistema bancário.<sup>22</sup> Conforme discutido, o caso a ser estudado nesta seção (no qual há um contínuo de bancos) pode ser visto como um caso limite da economia apresentada na subseção 2.2 quando o número de bancos é muito grande ( $M \rightarrow \infty$ ) e os bancos se integram parcialmente, compartilhando as reservas bancárias em  $t = 2$ .

As preferências dos indivíduos são levemente diferentes daquelas apresentadas na seção 2, embora os principais resultados descritos naquela seção continuem válidos. Como em Diamond e Dybvig (1983), as preferências são representadas por uma função utilidade  $u(c_1)$  se o indivíduo sofre o choque de preferência e  $u(c_1 + c_2)$  caso contrário. A função  $u : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$  é duas vezes diferenciável, estritamente crescente, côncava, tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty$  e a aversão ao risco relativa em  $e$  é maior que 1:<sup>23</sup>

$\delta \equiv -\frac{eu''(e)}{u'(e)} > 1$ . Como consequência do conceito de integração parcial utilizado, as transferências em  $t = 1$  em um dado banco não dependem de anúncios feitos em outros bancos. No entanto, o pagamento em  $t = 2$  depende do que acontece nos demais bancos.

Considere inicialmente o caso já apresentado na subseção 2.2, no qual há dois depositantes ( $N = 2$ ) em cada banco. O problema de escolha de sistema bancário  $(x, y)$  consiste em maximizar

$$p^2 [u(c_1) + u(c_2)] + p(1 - p) [u(c_1) + u(y)] + p(1 - p) [u(y) + u(\bar{c})] + (1 - p)^2 [2u(y)]$$

sujeito às restrições  $c_1 + c_2 = Ne$  e

$$p(1 - p)[R(Ne - c_1) - y] + p(1 - p)[R(Ne - \bar{c}) - y] + (1 - p)^2[Re - 2y] = 0, \quad (18)$$

<sup>22</sup>A fim de facilitar a comparação com a apresentação em Bertolai et alii (2016), será usada nesta seção a notação original destes autores. Para facilitar a comparação com a apresentação da seção 2, a notação será relacionada sempre que necessário.

<sup>23</sup>Esta função tem como caso particular a função utilizada na seção 2:  $u(c) = c^{1-\delta}/(1-\delta)$ . Tal função possui aversão ao risco relativa constante e igual a  $\delta$  em todo domínio, não só no ponto  $c = e$ .

em que para todo banco  $m \in [0,1]$  as variáveis  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\bar{c}$  e  $y$  denotam, respectivamente, os pagamentos  $x_1^{(m)}(0,0)$ ,  $x_2^{(m)}(0,0)$ ,  $x_2^{(m)}(1,0)$  e  $y^{(m)}(\tilde{\omega})$ . Bertolai et alii (2016) generalizam o Lema 2.4 para funções de utilidade mais gerais e mostram que a solução ótima satisfaz as seguintes condições de primeira ordem:

$$u'(\bar{c}) = Ru'(y) \quad (19)$$

$$u'(c_1) = (1-p)Ru'(y) + pu'(Ne - c_1) \quad (20)$$

$$y = \frac{R}{N} [p(Ne - c_1) + p(Ne - \bar{c}) + (1-p)Ne]. \quad (21)$$

A existência de corrida bancária nesta economia depende do incentivo dos indivíduos pacientes em revelar a verdade quando estes acreditam que outros pacientes não estão revelando a verdade. Suponha que todos os indivíduos acreditam que os indivíduos na primeira posição estão anunciando tipo 0 e que todos os indivíduos na segunda posição estão revelando a verdade. Com isso, todos acreditam que  $p$  bancos estão recebendo anúncios  $\omega = (0,0)$  e os demais  $1-p$  bancos estão recebendo  $\omega = (0,1)$ . Logo, os indivíduos não acreditam que o pagamento em  $t = 2$  será determinado pela restrição (18). Ele será dado por

$$(1-p)[R(Ne - c_1) - y] = 0, \quad (22)$$

já que os bancos com história  $(0,0)$  exaurem suas reservas em  $t = 1$ , pois  $c_1 + c_2 = Ne$ , e os bancos com história  $(0,1)$  pagam  $c_1$  em  $t = 1$  e poupam  $Ne - c_1$  para  $t = 2$ .

O incentivo para revelar ou não a verdade depende do tipo do agente e de sua posição na fila de saques. Para os indivíduos impacientes a decisão é trivial: eles sempre revelam a verdade (tipo 0), uma vez que não auferem utilidade consumindo na segunda data. Para os indivíduos pacientes, a decisão é mais sofisticada. Considere inicialmente um indivíduo paciente na segunda posição da fila de saques. Ao mentir sobre seu tipo (anunciar tipo 0), ele espera receber  $Ne - c_1$ , pois acredita que o primeiro indivíduo em sua fila revelou ser do tipo 0 e consumiu  $c_1$ . Caso revele a verdade, ele espera receber  $R(Ne - c_1)$ , conforme implicado por (22). Como  $R > 1$ , tal indivíduo acha melhor revelar a verdade. Considere agora um indivíduo paciente na primeira posição da fila de saques. Ao mentir sobre seu tipo (anunciar tipo 0), ele espera receber  $c_1$  e, caso revele a verdade, ele espera receber  $R(Ne - c_1)$ . Logo, mentir sobre seu tipo (se juntar à corrida bancária na primeira posição) é atrativo se

$$F(R) \equiv u(c_1) - u[R(Ne - c_1)] > 0.$$

Note das condições de primeira ordem acima que  $(c_1, \bar{c}, y) \rightarrow (e, e, e)$  quando  $R \rightarrow 1$ . Logo, o indivíduo paciente na primeira posição fica indiferente entre revelar ou não a verdade durante uma corrida quando  $R \rightarrow 1$ , pois  $F(1) = 0$ . Se utilizando da abordagem proposta por Bertolai et alii (2014), Bertolai et alii (2016) estudam a existência de corrida por meio da derivada  $F'(R)$  na vizinhança de  $R = 1$ , ao destacar que se  $F'(1) \equiv \lim_{R \rightarrow 1} F'(R) > 0$ , então existe corrida bancária para  $R$  suficientemente próximo de (e maior do que) 1. No caso  $N = 2$  ela é dada por

$$F'(R) = u'(c_1) \frac{dc_1}{dR} - u'[R(Ne - c_1)] \left( Ne - c_1 - R \frac{dc_1}{dR} \right).$$

Logo,  $F'(1) = u'(e)[2c'_1 - e]$ , em que  $c'_1 \equiv \lim_{R \rightarrow 1} dc_1/dR$ . Os autores calculam  $c'_1$  diferenciando o sistema de condições de primeira ordem em  $R$  e, em seguida, estudando o limite das derivadas obtidas quando  $R \rightarrow 1$ .



**Lema 4.1.** Suponha  $N = 2$ . Existe corrida bancária (com pacientes revelando a verdade somente na segunda posição) para  $R \approx 1$  se

$$\frac{\delta - 1}{\delta} > \frac{1 + 2p}{2(1 - p)},$$

pois  $c'_1 = \frac{1-p}{1+2p} \frac{\delta-1}{\delta} e$ .

*Demonstração.* Denote  $\bar{c}' \equiv \lim_{R \rightarrow 1} d\bar{c}/dR$  e  $y' \equiv \lim_{R \rightarrow 1} dy/dR$ . A derivada de (19) é dada por  $u''(\bar{c}) \frac{d\bar{c}}{dR} = u'(y) + Ru''(y) \frac{dy}{dR}$ , cujo limite é  $u''(e)\bar{c}' = u'(e) + u''(e)y'$ . Usando  $\delta = -eu''(e)/u'(e)$ , tem-se  $\bar{c}' = y' - e/\delta$ . O limite da derivada de (20) em  $R$  quando  $R \rightarrow 1$  é dada por  $u''(e)c'_1 = (1-p)[u'(e) + u''(e)y'] - pu''(e)c'_1$ . Logo,  $c'_1 = \frac{1-p}{1+p}(y' - e/\delta)$ . Finalmente, diferenciando (21) em  $R$  e tomando o limite da derivada assim obtida quando  $R \rightarrow 1$ , obtém-se  $y' = e - (p/2)(c'_1 + \bar{c}')$ . Conclui-se com isso que

$$\bar{c}' = e \frac{\delta - 1}{\delta} - \frac{p}{2}(c'_1 + \bar{c}') \quad \text{e} \quad c'_1 = \frac{1-p}{1+p} \bar{c}'.$$

Logo,

$$\frac{2+p}{2} \bar{c}' = e \frac{\delta - 1}{\delta} - \frac{p}{2} c'_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}' = \frac{1}{2+p} \left( 2e \frac{\delta - 1}{\delta} - pc'_1 \right)$$

$$(1+p)c'_1 = \frac{(1-p)}{2+p} \left( 2e \frac{\delta - 1}{\delta} - pc'_1 \right)$$

$$[(1+p)(2+p) + p(1-p)]c'_1 = 2(1-p)e \frac{\delta - 1}{\delta}$$

$$[2 + 4p]c'_1 = 2(1-p)e \frac{\delta - 1}{\delta}$$

e, portanto,  $c'_1 = \frac{1-p}{1+2p} \frac{\delta-1}{\delta} e$ . Segue que,

$$F'(1) = u'(e)[2c'_1 - e] = u'(e)e \left[ 2 \frac{1-p}{1+2p} \frac{\delta - 1}{\delta} - 1 \right]$$

e, portanto, existe corrida se  $\frac{\delta-1}{\delta} > \frac{1+2p}{2(1-p)}$ . □

Do Lema 4.1, existe corrida bancária parcial (restrita à primeira posição da fila) se  $p$  e suficientemente baixo e  $\delta$  é suficientemente alto. Por exemplo, se  $e = 1$ ,  $p = 0.05$  e  $\delta = 3$ , então  $c'_1 = 19/33$ . Neste caso,  $F'(1) = \frac{5}{33}u'(1) > 0$  e existe corrida para  $R$  suficientemente baixo.

Para o caso geral com  $N \in \mathbb{N}$  depositantes, o estudo de existência de corrida é análogo. Bertolai et alii (2016) mostram que o problema de escolha de sistema bancário  $(x, y)$  consiste em maximizar

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N (1 - \omega_i) u[x_i(\omega^i)] + N(1-p)u(y) \right]$$

sujeito a  $x_i(\omega^i) \geq 0$ ,

$$\sum_{i=1}^N (1 - \omega_i) x_i(\omega^i) \leq Ne \tag{23}$$

$$y \leq \frac{R}{N(1-p)} \mathbb{E} \left[ Ne - \sum_{i=1}^N x_i(\omega^i) \right]. \tag{24}$$



O lagrangeano associado a este problema é demonstrado ser

$$\hat{\phi}[u(y) - \lambda y] + \bar{\phi}[u(\bar{c}) - \lambda R\bar{c}] + \sum_{i=1}^N (p^N [u(c_i) - \mu c_i] + \phi_i [u(c_i) - \lambda R c_i])$$

em que  $\mu$  e  $\lambda$  são os multiplicadores de Lagrange associados, respectivamente, a (23) e (24). Como no caso  $N = 2$ , a variável  $c_i$  denota o pagamento  $x_i(0,0,\dots,0)$ , a variável  $\bar{c}$  denota o pagamento  $x_i(\omega)$  para  $\omega \neq (0,0,\dots,0)$  e  $y$  é o pagamento em  $t = 2$ . Os coeficientes  $\hat{\phi}$ ,  $\bar{\phi}$ , e  $\phi_i$  são tais que  $\phi_i = p^i - p^N$ ,  $\bar{\phi} = Np - (p + p^2 + \dots + p^N)$  e  $\hat{\phi} + \bar{\phi} + \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i = N(1 - p^N)$ . O Lema a seguir é demonstrado por Bertolai et alii (2016) e é a generalização dos Lemmas 2.4 e 4.1.

**Lema 4.2** (Bertolai et alii (2016)). *Para  $R \approx 1$ , o sistema bancário ótimo com um contínuo de bancos e  $N \in \mathbb{N}$  é definido por  $(c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, \bar{c}, y)$  tal que*

$$\begin{aligned} u'(\bar{c}) &= Ru'(y) \\ u'(c_i) &= p^{N-i} u'(c_N) + (1 - p^{N-i}) Ru'(y) \\ (1 - p^N) RNe &= \hat{\phi}y + R\bar{\phi}\bar{c} + R \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i c_i \end{aligned} \quad (25)$$

e, portanto,  $y' = \bar{c}' + e/\delta$  e

$$\begin{aligned} c'_i &= \left(1 - \frac{p^{N-i}}{1 - p^N} (1 - p)N\right) \bar{c}' \\ \bar{c}' &= e \frac{\delta - 1}{\delta} \frac{1 - p}{1 - \frac{p^N}{1 - p^N} (1 - p)N} > 0. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver Bertolai et alii (2016). □

A hipótese de  $R$  suficientemente baixo é usada para demonstrar que as restrições de incentivo (revelação da verdade) são atendidas pela solução do problema acima (no qual tais restrições foram ignoradas)<sup>24</sup> e para demonstrar que o pagamento em  $t = 1$  é constante após o primeiro anúncio de tipo 1.

O estudo sobre existência de corrida bancária para o caso geral  $N \in \mathbb{N}$  segue a mesma estratégia do caso  $N = 2$ . Contrói-se a função  $F(R)$  que determina existência de corrida bancária quando é não negativa. Usando que  $F(1) = 0$  também no caso geral, estuda-se o sinal da derivada  $F'(1) \equiv \lim_{R \rightarrow 1} F'(R)$ . A condição de corrida será dada por  $F'(1) > 0$ .

Suponha novamente que todos os indivíduos acreditam que os indivíduos nas primeiras  $N - 1$  posições estão anunciando tipo 0 e que todos os indivíduos na última posição ( $N$ ) estão revelando a verdade. Com isso, todos acreditam que  $p$  bancos estão recebendo anúncios  $\omega = (0, \dots, 0, 0) \in \{0, 1\}^N$  e os demais  $1 - p$  bancos estão recebendo  $\omega = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \{0, 1\}^N$ . Logo, os indivíduos não acreditam que o pagamento em  $t = 2$  será determinado pela restrição (25). Ele será dado por

$$(1 - p) \left[ R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right) - y \right] = 0, \quad (26)$$

<sup>24</sup>O resultado enunciado na seção 2 de que tais restrições são sempre atendidas é estabelecido por Green e Lin (2003) para economias em que os bancos operam em completo isolamento ou sob completa integração. A economia em Bertolai et alii (2016) estuda o caso de integração parcial e, portanto, o resultado de Green e Lin (2003) não é válido necessariamente.



pois os bancos com história  $(0,0,\dots,0,0)$  exaurem suas reservas em  $t = 1$ , já que  $\sum_{i=1}^N c_i = Ne$ , e os bancos com história  $(0,0,\dots,0,1)$  pagam no total  $\sum_{i=1}^{N-1} c_i$  em  $t = 1$  e poupam  $Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i$  para  $t = 2$ .

Como no caso  $N = 2$ , os indivíduos impacientes e os indivíduos pacientes situados na última posição sempre anunciam seus verdadeiros tipos: os impacientes não prezam por consumo em  $t = 2$  e os pacientes na posição  $N$  preferem anunciar a verdade para obter  $R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right)$  do que mentir para obter  $Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i$ . Considere então um paciente na posição  $i \leq N - 1$ . Ao mentir sobre seu tipo, o indivíduo receberá  $c_i$  com certeza. Se revelar a verdade na posição  $i$ , o paciente receberá<sup>25</sup>  $y = R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right)$ . Portanto, é atrativo para o paciente da posição  $i$  mentir sobre seu tipo se

$$F_i(R) \equiv u(c_i) - u \left[ R \left( Ne - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \right) \right] > 0.$$

Como  $(c_i, \bar{c}, y) \rightarrow (e, e, e)$  quando  $R \rightarrow 1$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , então  $F_i(1) = 0$ . A derivada de  $F_i(R)$  é neste caso  $F'_i(1) = u'(e)[c'_i - e - c'_N]$ , pois de  $\sum_{j=1}^N c_j = Ne$  sabe-se que  $c'_N = -\sum_{j=1}^{N-1} c'_j$ . Usando o Lema 4.2 para obter  $c'_i$  e  $\bar{c}'$  e (26) para obter  $y'$ , Bertolai et alii (2016) calculam as condições sob as quais  $F'_i(1) > 0$  para todo  $i \leq N - 1$ . Ou seja,  $c'_i > e + c'_N$  para todo  $i \leq N - 1$ .

**Proposição 4.3** (Bertolai et alii (2016)). *Suponha  $N \in \mathbb{N}$ . Existe corrida bancária (com pacientes revelando a verdade somente na posição  $N$ ) para  $R \approx 1$  se*

$$\frac{\delta - 1}{\delta} f_1(1) > \frac{1 - p^N}{N(1 - p)} - p^N$$

$$\text{em que } f_k(n) = \frac{1 - p^k}{k(1 - p)} - p^k - (1 - p)p^n$$

*Demonstração.* Ver Bertolai et alii (2016). □

Note que a proposição 4.3 tem como caso particular o Lema 4.1 quando  $N = 2$ . De forma similar, é demonstrado existência de corrida bancária na qual os indivíduos pacientes revelam a verdade somente nas duas últimas posições da fila ( $N - 1$  e  $N$ ).

Suponha agora que todos os indivíduos acreditam que os indivíduos nas primeiras  $N - 2$  posições estão anunciando tipo 0 e que todos os indivíduos na penúltima e na última posição ( $N - 1$  e  $N$ ) estão revelando a verdade. Com isso, todos acreditam que  $p^2$  bancos estão recebendo anúncios  $\omega = (\mathbf{0}^{N-2}, 0, 0) \in \{0, 1\}^N$ ,  $p(1 - p)$  bancos estão recebendo anúncios  $\omega = (\mathbf{0}^{N-2}, 0, 1) \in \{0, 1\}^N$ ,  $(1 - p)p$  bancos estão recebendo anúncios  $\omega = (\mathbf{0}^{N-2}, 1, 0) \in \{0, 1\}^N$  e os demais  $(1 - p)^2$  bancos estão recebendo  $\omega = (\mathbf{0}^{N-2}, 1, 1) \in \{0, 1\}^N$ , em que  $\mathbf{0}^n \in \{0, 1\}^n$  é a história parcial de anúncios com  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  anúncios iguais a zero. Logo, os indivíduos acreditam que o pagamento em  $t = 2$  será determinado pela seguinte restrição

$$p \left[ R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right) - y \right] + p \left[ R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-2} c_i - \bar{c} \right) - y \right] + (1 - p) \left[ R \left( Ne - \sum_{i=1}^{N-2} c_i \right) - 2y \right] = 0, \quad (27)$$

pois os bancos com história  $(\mathbf{0}^{N-2}, 0, 0)$  exaurem suas reservas em  $t = 1$ , os bancos com história  $(\mathbf{0}^{N-2}, 0, 1)$  poupam  $Ne - \sum_{i=1}^{N-1} c_i = c_N$  para  $t = 2$ , os bancos com história  $(\mathbf{0}^{N-2}, 1, 0)$  poupam

<sup>25</sup> Apesar de este anúncio provocar o surgimento de um banco com história de anúncios  $\omega \notin \{(0, 0, \dots, 0, 0), (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ , o efeito da poupança deste banco na poupança agregada é desprezível tendo em vista que existe na economia um contínuo de bancos. Portanto, ao revelar a verdade na posição  $i$ , o paciente não afeta seu pagamento na data 2.

$Ne - \sum_{i=1}^{N-2} c_i - \bar{c} = c_N + c_{N-1} - \bar{c}$  para  $t = 2$  e os bancos com história  $(0^{N-2}, 1, 1)$  poupam  $Ne - \sum_{i=1}^{N-2} c_i = c_N + c_{N-1}$  para  $t = 2$ .

Novamente os indivíduos impacientes sempre anunciam seus verdadeiros tipos, uma vez que não prezam por consumo em  $t = 2$ . Considere o incentivo de um indivíduo paciente mentir ou não na posição  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Ao mentir sobre seu tipo, o indivíduo receberá  $c_i$ . Se revelar a verdade, o paciente receberá<sup>26</sup> pagamento  $y$  que satisfaz (27), ou seja,  $y = (R/2)(c_N + c_{N-1} - p(\bar{c} - c_N))$ . Portanto, será atrativo para o paciente na posição  $i$  mentir sobre seu tipo se

$$F_i(R) \equiv u(c_i) - u\left[\frac{R}{2}(c_N + c_{N-1} - p(\bar{c} - c_N))\right] > 0.$$

Novamente  $F_i(1) = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . A derivada de  $F_i(R)$  é neste caso  $F'_i(1) = u'(e)[c'_i - e - \frac{1}{2}(c'_N + c'_{N-1} - p(\bar{c}' - c'_N))]$ , pois de  $\sum_{j=1}^N c_j = Ne$  sabe-se que  $c'_N = -\sum_{j=1}^{N-1} c'_j$ . Usando o Lema 4.2 para obter  $c'_i$  e  $\bar{c}'$  e (27) para obter  $y'$ , Bertolai et alii (2016) calculam as condições sob as quais  $F'_i(1) > 0$  para todo  $i \leq N-2$  e  $F'_i(1) \leq 0$  para  $i \in \{N-1, N\}$ .

**Proposição 4.4** (Bertolai et alii (2016)). *Suponha  $N \in \mathbb{N}$ . Existe corrida bancária (com pacientes revelando a verdade somente nas posições  $N-1$  e  $N$ ) para  $R \approx 1$  se*

$$\frac{\delta - 1}{\delta} f_2(2) > \frac{1 - p^N}{(1 - p)N} - p^N \geq \frac{\delta - 1}{\delta} f_2(1)$$

em que  $f_k(n) = \frac{1-p^k}{k(1-p)} - p^k - (1-p)p^n$ .

*Demonstração.* Ver Bertolai et alii (2016). □

Diferentemente do obtido na proposição 4.3, na proposição 4.4 há duas desigualdades. A primeira desigualdade garante que é atrativo para todo indivíduo  $i \leq N-2$  participar da corrida e a segunda desigualdade garante que os demais dois (últimos) depositantes não queiram participar da corrida. Na proposição 4.3, há somente uma desigualdade, pois o último depositante da fila sempre prefere revelar a verdade.

#### 4.1. Outros equilíbrios de corrida bancária

Considere agora o caso em que todos os indivíduos acreditam que os indivíduos nas primeiras  $N-3$  posições estão anunciando tipo 0 e que todos os indivíduos nas três últimas posições ( $N-2$ ,  $N-1$  e  $N$ ) estão revelando a verdade. Com isso, todos acreditam que a quantidade de bancos recebendo anúncios  $\omega = (0^{N-3}, \omega_{N-2}, \omega_{N-1}, \omega_N) \in \{0, 1\}^N$  é dada por

$$\Pr(\omega_{N-2}, \omega_{N-1}, \omega_N) = p^{3-(\omega_{N-2}+\omega_{N-1}+\omega_N)}(1-p)^{(\omega_{N-2}+\omega_{N-1}+\omega_N)}.$$

Se  $s(\omega_{N-2}, \omega_{N-1}, \omega_N)$  denota a poupança para o período  $t = 2$  do banco com história de anúncios  $\omega = (0^{N-3}, \omega_{N-2}, \omega_{N-1}, \omega_N)$  e  $A = Ne - \sum_{i=1}^{N-3} c_i$  denota a reserva bancária após  $N-3$  anúncios de tipo 0, então

<sup>26</sup>Novamente, o paciente não afeta seu pagamento na data 2 ao revelar a verdade na posição  $i$ .



$$s(x) = \begin{cases} A - c_{N-2} - c_{N-1} - c_N & = 0 & \text{se } x = (0,0,0) \\ A - c_{N-2} - c_{N-1} - 0 & = c_N & \text{se } x = (0,0,1) \\ A - c_{N-2} - 0 - \bar{c} & = c_N + c_{N-1} - \bar{c} & \text{se } x = (0,1,0) \\ A - c_{N-2} - 0 - 0 & = c_N + c_{N-1} & \text{se } x = (0,1,1) \\ A - 0 - \bar{c} - \bar{c} & = c_N + c_{N-1} + c_{N-2} - 2\bar{c} & \text{se } x = (1,0,0) \\ A - 0 - \bar{c} - 0 & = c_N + c_{N-1} + c_{N-2} - \bar{c} & \text{se } x = (1,0,1) \\ A - 0 - 0 - \bar{c} & = c_N + c_{N-1} + c_{N-2} - \bar{c} & \text{se } x = (1,1,0) \\ A - 0 - 0 - 0 & = c_N + c_{N-1} + c_{N-2} & \text{se } x = (1,1,1) \end{cases} \quad (28)$$

Logo, os indivíduos acreditam que o pagamento em  $t = 2$  será determinado pela seguinte restrição

$$\sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x) [Rs(x) - (x_1 + x_2 + x_3)y] = 0, \quad (29)$$

a qual generaliza (27). Mais uma vez, os indivíduos impacientes sempre anunciam seus verdadeiros tipos, uma vez que não prezam por consumo em  $t = 2$ . Considere o incentivo de um indivíduo paciente mentir ou não na posição  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Ao mentir sobre seu tipo, o indivíduo receberá  $c_i$ . Se revelar a verdade, o paciente receberá<sup>27</sup> pagamento  $y$  que satisfaz (29), ou seja,  $y = \frac{R}{3(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x)s(x)$ . Portanto, é atrativo para o paciente na posição  $i$  mentir sobre seu tipo se

$$F_i(R) \equiv u(c_i) - u \left[ \frac{R}{3(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x)s(x) \right] > 0.$$

Novamente  $F_i(1) = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , pois  $\sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x)s(x) \rightarrow 3(1-p)e$  quando  $R \rightarrow 1$ . A derivada de  $F_i(R)$  para  $R = 1$  é neste caso

$$F'_i(1) = u'(e) [c'_i - y'],$$

em que  $y' = e + \frac{1}{3(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x)s'(x)$  é a derivada do pagamento em  $t = 2$  definido por (29), avaliada em  $R = 1$ , e  $s'(x) \equiv \lim_{R \rightarrow 1} ds(x)/dR$ . A proposição 4.5 a seguir apresenta as condições sobre os parâmetros sob as quais  $F'_i(1) > 0$  para todo  $i \leq N-3$  e  $F'_i(1) \leq 0$  para  $i \in \{N-2, N-1, N\}$ .

**Proposição 4.5.** Suponha  $N \in \mathbb{N}$ . Existe corrida bancária (com pacientes revelando a verdade somente nas posições  $N-2$ ,  $N-1$  e  $N$ ) para  $R \approx 1$  se

$$\frac{\delta-1}{\delta} f_3(3) > \frac{1-p^N}{(1-p)N} p^N - p^N \geq \frac{\delta-1}{\delta} f_3(2) \quad (30)$$

em que  $f_k(n) = \frac{1-p^k}{k(1-p)} - p^k - (1-p)p^n$ .

**Demonstração.** Observe que  $F'_i(1) > 0$  se e somente se  $c'_i > y'$ , em que  $y' = e + \sum_{x \in \{0,1\}^3} \frac{\Pr(x)}{3(1-p)} s'(x)$ . Usando (28), note também que

<sup>27</sup>Mais uma vez, o paciente não afeta seu pagamento na data 2 ao revelar a verdade na posição  $i$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \{0,1\}^3} \Pr(x) s'(x) &= (1-p^3)c'_N + [1-p^3-p^2(1-p)]c'_{N-1} \\
&\quad + [1-p^3-2p^2(1-p)-p(1-p)^2]c'_{N-2} - p(1-p)(2+p)\bar{c}' \\
&= (1-p) \left[ (1+p+p^2)c'_N + (1+p)c'_{N-1} + c'_{N-2} - p(2+p)\bar{c}' \right]
\end{aligned}$$

em que se usou  $1-p^3 = (1-p)(1+p+p^2)$  na segunda igualdade. Logo,  $y' = e + \frac{1}{3} [(1+p+p^2)c'_N + (1+p)c'_{N-1} + c'_{N-2} - (2+p)p\bar{c}']$ . Usando  $c'_i$  e  $\bar{c}'$  definidos no Lema 4.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
y' - e &= \frac{\bar{c}'}{3} \left[ (1+p+p^2) \left( 1 - \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right) + (1+p) \left( 1 - \frac{p(1-p)N}{1-p^N} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \frac{p^2(1-p)N}{1-p^N} \right) - p(2+p) \right] \\
&= \frac{\bar{c}'}{3} \left[ (3+2p+p^2-p(2+p)) - [1+p+2p^2+p(1+p)] \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right] \\
&= \frac{\bar{c}'}{3} \left[ 3 - [2p^2 + (1+p)^2] \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right].
\end{aligned}$$

Portanto, é atrativo mentir na posição  $i$  se e somente se

$$\begin{aligned}
\left( 1 - \frac{p^{N-i}(1-p)N}{1-p^N} \right) \bar{c}' = c'_i &> y' = e + \frac{\bar{c}'}{3} \left[ 3 - [2p^2 + (1+p)^2] \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right] \\
\left( 3 - 3p^{N-i} \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right) \bar{c}' &> 3e + \bar{c}' \left[ 3 - [2p^2 + (1+p)^2] \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right] \\
0 &> 3 + \frac{\bar{c}'}{e} [3p^{N-i} - 2p^2 - (1+p)^2] \frac{(1-p)N}{1-p^N} \\
-3 \frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{(1-p)N} &> 3p^{N-i} - [2p^2 + (1+p)^2].
\end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima é crescente em  $i$ , então basta verificar sob quais condições a desigualdade é satisfeita para  $i = N-3$  e violada para  $i = N-2$ . Ou seja,

$$\frac{3}{1-p} f_3(3) = [2p^2 + (1+p)^2] - 3p^3 > 3 \frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{(1-p)N} \geq [2p^2 + (1+p)^2] - 3p^2 = f_3(2) \frac{3}{1-p}.$$

Do Lema 4.2, tem-se  $\left( 1 - p^N \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right) \frac{\bar{c}'}{e} = \frac{\delta-1}{\delta} (1-p)$ . Logo,

$$3 \frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{(1-p)N} = \frac{1-p^N}{(1-p)N} \frac{3}{1-p} \left( 1 - p^N \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right) \frac{\delta}{\delta-1} = \frac{\delta}{\delta-1} \frac{3}{1-p} \left( \frac{1-p^N}{(1-p)N} - p^N \right).$$

Portanto, a condição de existência da referida corrida é

$$p^N + f_3(3) \frac{\delta-1}{\delta} > \frac{1-p^N}{(1-p)N} \geq p^N + f_3(2) \frac{\delta-1}{\delta}$$

a qual é equivalente à condição (30). □



## 4.2. O caso geral

Considere agora o caso em que todos os indivíduos acreditam que os indivíduos nas primeiras  $N - k$  posições estão anunciando tipo 0 e que todos os indivíduos nas  $k$  últimas posições ( $N - k + 1, N - k + 2, \dots, N - 1$  e  $N$ ) estão revelando a verdade. Com isso, todos acreditam que a quantidade de bancos recebendo anúncios  $\omega = (\mathbf{0}^{N-k}, \omega_{N-k+1}, \omega_{N-k+2}, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N) \in \{0,1\}^N$  é dada por

$$\Pr(\omega_{N-k+1}, \omega_{N-k+2}, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N) = p^{k-|\omega|_k} (1-p)^{|\omega|_k},$$

em que  $|\omega|_k = \sum_{i=1}^k \omega_{N-k+i}$ . Se  $s(\omega_{N-k+1}, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N)$  denota a poupança para o período  $t = 2$  do banco com história de anúncios  $\omega = (\mathbf{0}^{N-k}, \omega_{N-k+1}, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N)$  e  $A = Ne - \sum_{i=1}^{N-k} c_i = \sum_{i=1}^k c_{N-k+i}$  denota a reserva bancária após  $N - k$  anúncios de tipo 0, então

$$\begin{aligned} s(x) &= A - \sum_{i=1}^k (1 - x_i) \left[ c_{N-k+i} \left( I_{[\sum_{j=1}^i x_j=0]} \right) + \bar{c} \left( 1 - I_{[\sum_{j=1}^i x_j=0]} \right) \right] \\ &= A - (k - |x|_k) \bar{c} - \sum_{i=1}^k (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]} \end{aligned} \quad (31)$$

em que  $|x|_i = \sum_{j=1}^i x_j$  denota a quantidade de pacientes entre as posições  $N - k + 1$  e  $N - k + i$ . A função  $I_{[expr]}$  é igual a 1 se a sentença *expr* é verdadeira e igual a 0 caso contrário. Na segunda igualdade também foi usado que  $(1 - x_i) = 1$  sempre que  $I_{[|x|_i=0]} = 1$ . Logo, os indivíduos acreditam que o pagamento em  $t = 2$  será determinado pela seguinte restrição

$$\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) [Rs(x) - y|x|_k] = 0. \quad (32)$$

Mais uma vez, os indivíduos impacientes sempre anunciam seus verdadeiros tipos, uma vez que não prezam por consumo em  $t = 2$ . Considere o incentivo de um indivíduo paciente mentir ou não na posição  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Ao mentir sobre seu tipo, o indivíduo receberá  $c_i$ . Se revelar a verdade, o paciente receberá<sup>28</sup> pagamento  $\tilde{y}_k$  que satisfaz (32), ou seja,  $\tilde{y}_k = \frac{R}{k(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s(x)$ . Portanto, é atrativo para o paciente na posição  $i$  mentir sobre seu tipo se

$$F_i(R) \equiv u(c_i) - u(\tilde{y}_k) > 0.$$

Novamente  $F_i(1) = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , pois  $\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s(x) \rightarrow k(1-p)e$  quando  $R \rightarrow 1$ . A derivada de  $F_i(R)$  para  $R = 1$  é neste caso

$$F'_i(1) = u'(e) [c'_i - \tilde{y}'_k],$$

em que  $\tilde{y}'_k = e + \frac{1}{k(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s'(x)$  é a derivada do pagamento em  $t = 2$  definido por (32), avaliada em  $R = 1$ , e  $s'(x) \equiv \lim_{R \rightarrow 1} ds(x)/dR$ . A proposição 4.6 a seguir apresenta as condições sobre os parâmetros sob as quais  $F'_i(1) > 0$  para todo  $i \leq N - k$  e  $F'_i(1) \leq 0$  para  $i > N - k$ .

**Proposição 4.6.** *Suponha  $N \in \mathbb{N}$ . Existe corrida bancária (com pacientes revelando a verdade somente nas  $k$  últimas posições) para  $R \approx 1$  se*

$$\frac{\delta - 1}{\delta} f_k(k) > \frac{1 - p^N}{(1 - p)N} - p^N \geq \frac{\delta - 1}{\delta} f_k(k - 1) \quad (33)$$

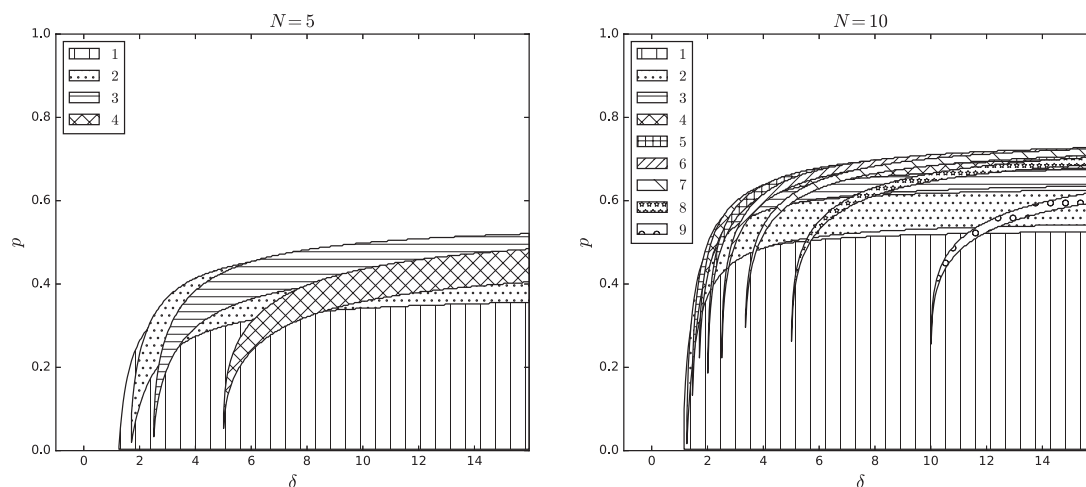
em que  $f_k(n) = \frac{1 - p^k}{k(1 - p)} - p^k - (1 - p)p^n$ .

<sup>28</sup>Mais uma vez, o paciente não afeta seu pagamento na data 2 ao revelar a verdade na posição  $i$ .

Demonstração. Ver apêndice A. □

Note que (33) não é satisfeita para  $k = N$ , independentemente do valor de  $(N, p, \delta)$ . Tal resultado é consistente com o atendimento das restrições de *truth-telling* quando  $R \approx 1$ , conforme estabelecido por Bertolai et alii (2016). Quando todos acreditam que todos estão revelando a verdade (revelando verdade nas últimas  $k = N$  posições), a melhor opção para cada um dos indivíduos é revelar a verdade. Observe ainda que  $f_1(1) = (1 - p)^2$ ,  $f_1(0) = 0$  e  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-p^N}{(1-p)N} - p^N = 0$ . Logo, (33) é satisfeita para  $k = 1$  quando  $N$  é suficientemente grande<sup>29</sup> e quando  $N = 2$  e  $\delta$  é suficientemente grande.<sup>30</sup> A Figura a seguir ilustra o padrão de existência de corrida para  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq k < N$ .

**Figura 2:** Economias nas quais há corrida



São apresentados exemplos para  $N = 3$  e  $N = 10$ . Os gráficos apresentam em áreas hachuradas os valores de  $(\delta, p)$  para os quais há corrida. São estudados valores  $p \in (0, 1)$  e  $\delta \in (1, 16)$ . Os gráficos sugerem não haver padrão claro em relação ao número de equilíbrios de corrida. Há casos sem corrida bancária, casos com somente um equilíbrio de corrida e casos com mais de um equilíbrio de corrida. Eles mostram que é cada vez menor o conjunto de economias nas quais há equilíbrio de corrida somente nas primeiras posições da fila de saques ( $k \approx N$ ).<sup>31</sup>

## 5. OBSERVAÇÕES FINAIS

Este artigo propõe uma linguagem sob a qual os modelos de Allen e Gale (2000) e Green e Lin (2003) podem ser vistos como casos particulares. Ambos são baseados em Diamond e Dybvig (1983) e estudam o sistema bancário escolhido pela sociedade para alocar (distribuir) eficientemente a liquidez da economia. Além disso, este artigo complementa dois importantes resultados na literatura de Teoria Bancária: a possibilidade de contágio durante uma crise bancária (estabelecida por Allen e Gale (2000)) e a existência de corrida bancária (estabelecida por Bertolai et alii (2016) em uma economia bastante similar àquela estudada por Green e Lin (2003)). Demonstra-se que (i) o contágio existente no modelo de Allen e Gale (2000) pode ser eliminado com uma intervenção bastante parcimoniosa no mercado interbancário;

<sup>29</sup>Conforme já estabelecido pela proposição 4.3.

<sup>30</sup>Conforme já estabelecido pelo Lema 4.1.

<sup>31</sup>Os demais exemplos apresentados no apêndice B corroboram esta afirmação.





e (ii) as condições para existência de corrida pode ser generalizadas para o caso em que os pacientes nas últimas  $k \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$  posições na fila de saques não participam da corrida.

## BIBLIOGRAFIA

- Allen, F. & Gale, D. (2000). Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1):1–33.
- Andolfatto, D., Nosal, E., & Wallace, N. (2007). The role of independence in the Green–Lin Diamond–Dybvig model. *Journal of Economic Theory*, 137(1):709–715.
- Bertolai, J. D., Cavalcanti, R. d. O., & Monteiro, P. K. (2014). Run theorems for low returns and large banks. *Economic Theory*, 57(2):223–252.
- Bertolai, J. D., Cavalcanti, R. d. O., & Monteiro, P. K. (2016). Bank runs with many small banks and mutual guarantees at the terminal stage. Mimeo.
- Bryant, J. (1980). A model of reserves, bank runs, and deposit insurance. *Journal of Banking & Finance*, 4(4):335–344.
- Diamond, D. W. & Dybvig, P. H. (1983). Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy*, 91(3):401–419.
- Ennis, H. M. & Keister, T. (2009). Bank runs and institutions: The perils of intervention. *The American Economic Review*, 99(4):1588–1607.
- Green, E. J. & Lin, P. (2003). Implementing efficient allocations in a model of financial intermediation. *Journal of Economic Theory*, 109(1):1–23.
- Jacklin, C. J. (1987). Demand Deposits, Trading Restrictions, and Risk Sharing. *Contractual Arrangements for Intertemporal Trade*, 1:26–47.
- Kareken, J. & Wallace, N. (1978). Deposit Insurance and Bank Regulation: A Partial Equilibrium Exposition. *Journal of Business*, 51(Jul):413–438.
- Peck, J. & Shell, K. (2003). Equilibrium bank runs. *Journal of political Economy*, 111(1):103–123.
- Wallace, N. (1988). Another attempt to explain an illiquid banking system: the Diamond and Dybvig model with sequential service taken seriously. *Quarterly Review*, pages 3–16.

## A. DEMONSTRAÇÕES

### A.1. Corolário 2.2

*Demonstração.* Seja  $\mu_\omega P(\omega)/N$  o multiplicador de Lagrange associado a restrição de factibilidade no estado  $\omega \in \Omega$ . O lagrangeano do problema de maximização é dado por:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\omega)}{N} [(N - |\omega|)u(x(\omega)) + |\omega|u(y(\omega))] + \sum_{\omega \in \Omega} \mu_\omega \frac{P(\omega)}{N} [Ne - [(N - |\omega|)x(\omega) + |\omega|y(\omega)R^{-1}]] .$$

A condição de primeira ordem em  $x(\omega)$  é:

$$\frac{P(\omega)}{N} (N - |\omega|) [u'(x(\omega)) - \mu_\omega] = 0.$$

Como  $P(\omega)/N \neq 0$ , para  $|\omega| < N$  tem-se  $u'(x(\omega)) = \mu_\omega$ . A condição de primeira ordem em  $y(\omega)$  é:

$$\frac{P(\omega)}{N} |\omega| [u'(y(\omega)) - \mu_\omega R^{-1}] = 0.$$

Dado que  $P(\omega)/N \neq 0$ , para  $|\omega| > 0$  tem-se  $Ru'(y(\omega)) = \mu_\omega$ . Por fim, derivando o lagrangeano em relação a  $\mu_\omega$ , obtém-se

$$P(\omega) \left[ 1 - \frac{N - |\omega|}{N} x(\omega) - \frac{|\omega|}{N} R^{-1} y(\omega) \right] = 0$$

e, portanto,  $(1 - |\omega|/N)x(\omega) + (|\omega|/N)y(\omega)/R = e$ , visto que  $P(\omega) \neq 0$ .

(i) Se  $0 < |\omega| < N$ , então  $u'(x(\omega)) = \mu_\omega = Ru'(y(\omega))$ . Como  $\delta = 2$ , tem-se  $y(\omega) = \sqrt{R}x(\omega)$ .

Usando a restrição de factibilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{N - |\omega|}{N} x(\omega) + \frac{|\omega|}{N} R^{-1} \sqrt{R} x(\omega) &= e \\ \left[ \left( 1 - \frac{|\omega|}{N} \right) \sqrt{R} + \frac{|\omega|}{N} \right] x(\omega) &= \sqrt{R} e \end{aligned}$$

e, portanto,  $x(\omega) = \alpha(|\omega|/N)e$ . Consequentemente,  $y(\omega) = \alpha(|\omega|/N)\sqrt{R}e$ .

(ii) Se  $0 = |\omega| < N$ , então  $u'(x(\omega)) = \mu_\omega$ . Usando a condição de primeira ordem em  $\mu_\omega$ , obtém-se  $x(\omega) = e$ . Portanto,  $\mu_\omega = u'(e)$ . No cenário em que depositantes pacientes não existem, os depositantes impacientes consomem toda a dotação da economia:  $(x(\omega), y(\omega)) = (e, 0)$ .

(iii) Se  $0 < |\omega| = N$ , então  $Ru'(y(\omega)) = \mu_\omega$ . Usando a condição de primeira ordem em  $\mu_\omega$ , obtém-se  $y(\omega) = Re$ . Portanto,  $\mu_\omega = Ru'(Re)$ . Já para o cenário com nenhum depositante impaciente, os depositantes pacientes consomem toda a dotação da economia:  $(x(\omega), y(\omega)) = (0, Re)$ .

□

## A.2. Lema 2.4

*Demonstração.* Seja  $\mu$  o multiplicador de Lagrange associado a restrição  $c_1 + c_2 = Ne$  e  $\lambda$  o multiplicador associado a restrição (13). As demais restrições valem com desigualdade estrita no ótimo. O lagrangeano associado ao problema de maximização é

$$\begin{aligned} p^2(u(c_1) + u(c_2)) + p(1-p)(u(c_1) + u(y)) + p(1-p)(u(y) + u(\bar{c})) + 2(1-p)^2 u(y) \\ + \mu(Ne - c_1 - c_2) \\ + \lambda[(1-p^2)RNe - p(1-p)(Rc_1 + y) - p(1-p)(R\bar{c} + y) - 2(1-p)^2 y]. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem para o ótimo são:

$$\begin{aligned} p^2 u'(c_1) + p(1-p)u'(c_1) - \mu - p(1-p)\lambda R &= 0 \\ p^2 u'(c_2) - \mu &= 0 \\ p(1-p)u'(\bar{c}) - p(1-p)\lambda R &= 0 \\ (1-p)[pu'(y) + pu'(y) + 2(1-p)u'(y) - 2\lambda p - 2\lambda(1-p)] &= 0 \\ Ne - c_1 - c_2 &= 0 \\ (1-p) \left[ \frac{1-p^2}{1-p} RNe - p(Rc_1 + y) - p(R\bar{c} + y) - 2(1-p)y \right] &= 0. \end{aligned}$$



De onde se obtém  $\mu = p^2 u'(c_2)$ ,  $\lambda = u'(y)$  e  $c_1 = Ne - c_2$ . Substituindo tais resultados nas equações restantes e usando  $\delta = 2$ , se obtém os resultados do lema.  $\square$

### A.3. Lema 3.1

*Demonstração.* Lembrando que as regiões com alta demanda por consumo em  $t = 1$  resgatam seus depósitos no interbancário em  $t = 1$  e as regiões com baixa demanda por consumo em  $t = 1$  resgatam seus depósitos no interbancário em  $t = 2$ . Sem perda de generalidade, suponha realizado o estado  $S_1$  e, portanto, há alta demanda por consumo em  $t = 1$  nas regiões  $A$  e  $C$  e baixa demanda por consumo em  $t = 1$  nas regiões  $B$  e  $D$ .

Considere inicialmente o caso de mercado interbancário completo e suponha  $z^i = (\omega_H - \gamma)/8$ . Os investimentos em  $t = 0$  são factíveis, pois as trocas de depósito entre os bancos tem o mesmo valor e, portanto, se cancelam. O pagamento  $c_1^*$  será factível sem a liquidação de ativo de longo prazo para os bancos das regiões  $A$  e  $C$  se

$$\frac{\omega_H}{4} c_1^* + \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_1^* \leq \frac{s^*}{4} + 3 \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_1^*.$$

O banco da região  $A$  ( $C$ ) promete para o estado  $S_1$  pagar  $\omega_H/4$  saques (para indivíduos impacientes) em sua própria região e enviar  $z^j = (\omega_H - \gamma)/8$  depósitos para o banco da região  $C$  ( $A$ ). Como cada pagamento em  $t = 1$  é igual a  $c_1^*$ , então a demanda total por pagamentos em  $t = 1$  é dada pelo lado esquerdo da restrição acima. Por outro lado, o banco dispõe de  $s^*/4$  unidades de ativo de curto prazo e resgata  $3z^i = 3(\omega_H - \gamma)/8$  depósitos nas demais regiões, os quais prometem  $c_1^*$  unidades de consumo cada um. Como  $s^* = \gamma c_1^*$ , então a restrição acima é satisfeita com igualdade. Similarmente, o pagamento  $c_1^*$  será factível sem a liquidação de ativo de longo prazo para os bancos das regiões  $B$  e  $D$  se

$$\frac{\omega_L}{4} c_1^* + 2 \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_1^* \leq \frac{s^*}{4}.$$

O banco da região  $B$  ( $D$ ) promete para o estado  $S_1$  pagar  $\omega_L/4$  saques (para indivíduos impacientes) na própria região em  $t = 1$  e enviar  $2z^j = 2(\omega_H - \gamma)/8$  depósitos para os bancos das regiões  $A$  e  $C$ . Como cada pagamento em  $t = 1$  é igual a  $c_1^*$ , então a demanda total por pagamentos em  $t = 1$  é dado pelo lado esquerda restrição acima. Por outro lado, o banco possui  $s^*/4$  unidades de ativo de curto prazo. Como  $\omega_H - \gamma = \gamma - \omega_L$  e  $s^* = \gamma c_1^*$ , a restrição acima é satisfeita com igualdade.

Os bancos das regiões  $A$  e  $C$  prometem para  $t = 2$  pagar  $(1 - \omega_H)/4$  saques (para indivíduos pacientes) na própria região e enviar  $2(\omega_H - \gamma)/8$  depósitos para as regiões  $B$  e  $D$ . Como cada pagamento em  $t = 2$  é igual a  $c_2^*$  e o banco possui  $l^*/4$  unidades de ativo de longo prazo, então o pagamento  $c_2^*$  será factível nas regiões  $A$  e  $C$  se

$$\frac{1 - \omega_H}{4} c_2^* + 2 \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_2^* \leq R \frac{l^*}{4}.$$

Já a região  $B$  ( $D$ ) promete para o estado  $S_1$  em  $t = 2$  pagar  $(1 - \omega_L)/4$  saques (para indivíduos pacientes) na própria região e enviar  $(\omega_H - \gamma)/8$  depósitos para a região  $D$  ( $B$ ). Como cada pagamento em  $t = 2$  é igual a  $c_2^*$ , então o pagamento  $c_2^*$  será factível nas regiões  $B$  e  $D$  se

$$\frac{1 - \omega_L}{4} c_2^* + \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_2^* \leq R \frac{l^*}{4} + 3 \frac{\omega_H - \gamma}{8} c_2^*$$

em que  $l^*/4$  e a quantidade de ativo de longo prazo disponível e  $3(\omega_H - \gamma)/8$  é o recurso obtido ao resgatar os depósitos nas demais regiões. Usando o fato de que  $l^* = (1 - \gamma)c_2^*/R$ , conclui-se que as duas restrições acima são satisfeitas com igualdade.

Considere agora o caso de mercado interbancário *incompleto* e suponha  $z^i = (\omega_H - \gamma)/4$ . Como no caso de mercado completo, os investimentos em  $t = 0$  são factíveis, pois as trocas de depósito entre

os bancos tem o mesmo valor e, portanto, se cancelam. O pagamento  $c_1^*$  será factível sem a liquidação de ativo de longo prazo para os bancos das regiões  $A$  e  $C$  e para os bancos das regiões  $B$  e  $D$  se, respectivamente,

$$\frac{\omega_H}{4}c_1^* \leq \frac{s^*}{4} + z^i c_1^* \quad \text{e} \quad \frac{\omega_L}{4}c_1^* + z^i c_1^* \leq \frac{s^*}{4}.$$

Como  $s^* = \gamma c_1^*$  e  $z^i = (\omega_H - \gamma)/4$ , então ambas as restrições são satisfeitas com igualdade. O pagamento  $c_2^*$  será factível nas regiões  $A$  e  $C$  e  $B$  e  $D$  se, respectivamente,

$$\frac{1 - \omega_H}{4}c_2^* + z^i c_2^* \leq R \frac{l^*}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1 - \omega_L}{4}c_2^* \leq R \frac{l^*}{4} + z^i c_2^*.$$

Como  $l^* = (1 - \gamma)c_2^*/R$  e  $z^i = (\omega_H - \gamma)/4$ , então ambas as restrições são satisfeitas com igualdade.  $\square$

#### A.4. Lema 3.4

*Demonstração.* Ao liquidar  $\epsilon c_1^*/16r$  unidades de ativo de longo prazo, o banco  $i$  pagará na data 2 somente  $c_2^i$  tal que

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - \gamma - \epsilon}{4} + z^D \right) c_2^A &= R \left( \frac{l^*}{4} - \frac{\epsilon c_1^*}{16r} \right) + \left( z^A - \frac{3\epsilon}{16} \right) c_2^B \\ \left( \frac{1 - \gamma}{4} + z^A - \frac{3\epsilon}{16} \right) c_2^B &= R \left( \frac{l^*}{4} - \frac{\epsilon c_1^*}{16r} \right) + \left( z^B - \frac{2\epsilon}{16} \right) c_2^C \\ \left( \frac{1 - \gamma}{4} + z^B - \frac{2\epsilon}{16} \right) c_2^C &= R \left( \frac{l^*}{4} - \frac{\epsilon c_1^*}{16r} \right) + \left( z^C - \frac{\epsilon}{16} \right) c_2^D \\ \left( \frac{1 - \gamma}{4} + z^C - \frac{\epsilon}{16} \right) c_2^D &= R \left( \frac{l^*}{4} - \frac{\epsilon c_1^*}{16r} \right) + z^D c_2^A. \end{aligned}$$

Multiplicando cada uma das equações por 4, o sistema de equações pode ser reorganizado como  $AX = M$  tal que  $X = (c_2^A, c_2^B, c_2^C, c_2^D)'$ ,  $M = R(l^* - \epsilon c_1^*/4r)[1, 1, 1, 1]'$  e

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \gamma + z - \epsilon & \frac{3\epsilon}{4} - z & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma + z - \frac{3\epsilon}{4} & \frac{\epsilon}{2} - z & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma + z - \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{4} - z \\ -z & 0 & 0 & 1 - \gamma + z - \frac{\epsilon}{4} \end{bmatrix}.$$

Seja  $\alpha = 1 - \gamma + z$ . Note que  $1 - \gamma > \omega_H - \gamma = z$  e  $0 < \epsilon < 1 - \gamma$ . Logo,  $\alpha > z$  e  $\alpha > \epsilon$ . O sistema é possível e determinado, com solução única, pois

$$|A| = (\alpha - \epsilon)(-1)^2 \begin{vmatrix} \alpha - \frac{3\epsilon}{4} & \frac{\epsilon}{2} - z & 0 \\ 0 & \alpha - \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{4} - z \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{\epsilon}{4} \end{vmatrix} + \left( \frac{3\epsilon}{4} - z \right) (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & \frac{\epsilon}{2} - z & 0 \\ 0 & \alpha - \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{4} - z \\ -z & 0 & \alpha - \frac{\epsilon}{4} \end{vmatrix}$$

e, portanto,



$$\begin{aligned}
 |A| &= (\alpha - \epsilon) \left( \alpha - \frac{3\epsilon}{4} \right) \left( \alpha - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( \alpha - \frac{\epsilon}{4} \right) - \left( z - \frac{3\epsilon}{4} \right) z \left( z - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{4} \right) \\
 &> (\alpha - \epsilon) \left( z - \frac{3\epsilon}{4} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{4} \right) - \left( z - \frac{3\epsilon}{4} \right) z \left( z - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{4} \right) \\
 &= (\alpha - z - \epsilon) \left( z - \frac{3\epsilon}{4} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{4} \right) \\
 &= (1 - \gamma - \epsilon) \left( z - \frac{3\epsilon}{4} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{2} \right) \left( z - \frac{\epsilon}{4} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

Utilizando o palpite de que os consumos em todas as regiões são iguais a uma constante  $\bar{c}$ , o sistema será dado por  $\bar{c}A[1,1,1,1]' = M$ . Dado que as linhas da matriz  $A$  somam cada um delas  $(1 - \gamma - \epsilon/4)$ , então,

$$\begin{aligned}
 \bar{c} &= \frac{R(l^* - \epsilon c_1^*/4r)}{1 - \gamma - \epsilon/4} = \frac{R((1 - \gamma)c_2^*/R - \epsilon c_1^*/4r)}{1 - \gamma - \epsilon/4} = \frac{(1 - \gamma \pm \epsilon/4)c_2^* - R\epsilon c_1^*/4r}{1 - \gamma - \epsilon/4} \\
 &= c_2^* + \frac{\epsilon c_1^* c_2^*/c_1^* - R/r}{4} \frac{1 - \gamma - \epsilon/4}{1 - \gamma - \epsilon/4} = c_2^* - \frac{\epsilon c_1^* R/r - c_2^*/c_1^*}{4} \frac{1 - \gamma - \epsilon/4}{1 - \gamma - \epsilon/4}.
 \end{aligned}$$

Como  $\bar{c}$  satisfaz o sistema e a solução do sistema é única,  $\bar{c}$  é a única solução possível para o sistema de equações acima.  $\square$

## A.5. Proposição 4.6

*Demonstração.* Observe que  $F'_i(1) > 0$  se e somente se  $c'_i > \tilde{y}'_k$ , em que  $\tilde{y}'_k = e + \sum_{x \in \{0,1\}^k} \frac{\Pr(x)}{k(1-p)} s'(x)$ . Usando (31), note também que

$$\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s(x) = A - kp\bar{c} - \sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) \sum_{i=1}^k I_{[|x|_i=0]} (c_{N-k+i} - \bar{c}) \quad (\text{A-1})$$

em que se usou  $\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x)(k - |x|_k) = k - k(1 - p)$ . A seguir, será demonstrado por indução que para todo  $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) \sum_{i=1}^k I_{[|x|_i=0]} (c_{N-k+i} - \bar{c}) = \sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^{k-l}} \Pr(\tilde{x}) g(\tilde{x}, l) \quad (\text{A-2})$$

em que  $g(x, 0) = \sum_{i=1}^k (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]}$  para todo  $x \in \{0,1\}^k$  e

$$g(x, l+1) = pg[(x, 0), l] + (1-p)g[(x, 1), l]$$

para todo  $x \in \{0,1\}^{k-(l+1)}$ . A condição (A-2) é trivialmente satisfeita quando  $l = 0$ . Suponha que (A-2) é válida para  $l \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ . Integrando na  $(k-l)$ -ésima entrada  $\tilde{x}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^{k-l}} \Pr(\tilde{x})g(\tilde{x},l) &= \sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^{k-l-1}} \left[ \Pr(\tilde{x},0)g[(\tilde{x},0),l] + \Pr(\tilde{x},1)g[(\tilde{x},1),l] \right] \\
&= \sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^{k-(l+1)}} \Pr(\tilde{x}) \left[ pg[(\tilde{x},0),l] + (1-p)g[(\tilde{x},1),l] \right] \\
&= \sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^{k-(l+1)}} \Pr(\tilde{x})g(\tilde{x},l+1)
\end{aligned}$$

em que se usou  $\Pr(\tilde{x}) = \Pr(\tilde{x},0)/p = \Pr(\tilde{x},1)/(1-p)$ . Portanto, (A-2) se verifica para todo  $l \in \{0,1,\dots,k-1\}$ . Agora, será demonstrado que para todo  $l \in \{0,1,\dots,k-1\}$

$$g(x,l) = \sum_{i=1}^{k-l-1} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]} + \sum_{i=k-l}^k p^{l-k+i} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_{k-l}=0]} \quad (\text{A-3})$$

em que  $\sum_{i=j}^l m(i) = 0$  se  $j > l$  para toda função  $m$ . A condição (A-3) é trivialmente satisfeita quando  $l = 0$ . Suponha que (A-3) é válida para  $l \in \{0,1,\dots,k-2\}$ . Então,

$$\begin{aligned}
g(x,l+1) &= pg[(x,0),l] + (1-p)g[(x,1),l] \\
&= p \left( \sum_{i=1}^{k-l-1} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|(x,0)|_i=0]} + \sum_{i=k-l}^k p^{l-k+i} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|(x,0)|_{k-l}=0]} \right) \\
&\quad + (1-p) \sum_{i=1}^{k-l-1} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|(x,1)|_i=0]}.
\end{aligned}$$

pois  $I_{[|(x,1)|_{k-l}=0]} = I_{[\sum_{j=1}^{k-l-1} x_j + 1 = 0]} = 0$ . Logo, usando  $I_{[|(x,0)|_i=0]} = I_{[|(x,1)|_i=0]} = I_{[|x|_i=0]}$  para  $i < k-l$ , tem-se

$$g(x,l+1) = \sum_{i=1}^{k-l-1} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]} + \sum_{i=k-l}^k p^{l+1-k+i} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|(x,0)|_{k-l}=0]}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(x,l+1) &= \sum_{i=1}^{k-l-2} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]} + \sum_{i=k-l-1}^{k-l-1} p^0 (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_{k-l-1}=0]} \\
&\quad + \sum_{i=k-l}^k p^{l+1-k+i} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_{k-l-1}=0]} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1-(l+1)} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_i=0]} + \sum_{i=k-(l+1)}^k p^{(l+1)-k+i} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[|x|_{k-(l+1)}=0]}.
\end{aligned}$$

Portanto, (A-3) se verifica para todo  $l \in \{0,1,\dots,k-1\}$ . Em particular, para  $l = k-1$  tem-se  $g(x,k-1) = \sum_{i=1}^k p^{i-1} (c_{N-k+i} - \bar{c}) I_{[x_1=0]}$ . Avaliando a condição (A-2) para  $l = k-1$ , implica



$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) \sum_{i=1}^k I_{[|x|_i=0]} (c_{N-k+i} - \bar{c}) &= \sum_{\tilde{x} \in \{0,1\}^k} \Pr(\tilde{x}) g(\tilde{x}, k-1) \\
 &= pg(0, k-1) + (1-p)g(1, k-1) \\
 &= \sum_{i=1}^k p^i (c_{N-k+i} - \bar{c})
 \end{aligned}$$

em que se usou  $g(1, k-1) = 0$ . Finalmente, pode-se reescrever (A-1) como

$$\sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s(x) = A - kp\bar{c} - \sum_{i=1}^k p^i (c_{N-k+i} - \bar{c}).$$

Lembrando que  $A' = \sum_{i=1}^k c'_{N-k+i}$ , segue que

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}'_k &= e + \frac{1}{k(1-p)} \sum_{x \in \{0,1\}^k} \Pr(x) s'(x) \\
 &= e + \frac{1}{k(1-p)} \left[ \sum_{i=1}^k c'_{N-k+i} - kp\bar{c}' - \sum_{i=1}^k p^i (c_{N-k+i} - \bar{c}) \right] \\
 &= e + \frac{1}{k(1-p)} \left[ \sum_{i=1}^k (1-p^i) c'_{N-k+i} + \bar{c}' \sum_{i=1}^k p^i - kp\bar{c} \right] \\
 &= e + \frac{\bar{c}'}{k(1-p)} \left[ \sum_{i=1}^k (1-p^i) \frac{c'_{N-k+i}}{\bar{c}'} + p \frac{1-p^k}{1-p} - kp \right].
 \end{aligned}$$

Usando  $c'_i$  e  $\bar{c}'$  definidos no Lema 4.2, obtém-se  $\sum_{i=1}^k (1-p^i) \frac{c'_{N-k+i}}{\bar{c}'} = \sum_{i=1}^k (1-p^i) \left( 1 - p^{k-i} \frac{(1-p)N}{1-p^N} \right)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k (1-p^i) \frac{c'_{N-k+i}}{\bar{c}'} &= \sum_{i=1}^k (1-p^i) - \frac{(1-p)N}{1-p^N} \sum_{i=1}^k (p^{k-i} - p^k) \\
 &= k + \sum_{i=1}^k p^i - \frac{(1-p)N}{1-p^N} \left( \sum_{i=1}^k p^{k-i} - kp^k \right) \\
 &= k - p \frac{1-p^k}{1-p} - \frac{k(1-p)N}{1-p^N} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} p^i - p^k \right) \\
 &= k - p \frac{1-p^k}{1-p} - \frac{k(1-p)N}{1-p^N} h(k)
 \end{aligned}$$

em que  $h(k) = \frac{1}{k} \frac{1-p^k}{1-p} - p^k$ . Logo,



$$\begin{aligned}
\tilde{y}'_k &= e + \frac{\bar{c}'}{k(1-p)} \left[ k - p \frac{1-p^k}{1-p} - \frac{k(1-p)N}{1-p^N} h(k) + p \frac{1-p^k}{1-p} - kp \right] \\
&= e + \frac{\bar{c}'}{k(1-p)} \left[ (1-p)k - \frac{k(1-p)N}{1-p^N} h(k) \right] \\
&= e + \bar{c}' - \frac{\bar{c}'N}{1-p^N} h(k).
\end{aligned}$$

Portanto, é atrativo mentir na posição  $i$  se e somente se

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{p^{N-i}(1-p)N}{1-p^N}\right) \bar{c}' = c'_i &> \tilde{y}'_k = e + \bar{c}' - \frac{\bar{c}'N}{1-p^N} h(k) \\
-\frac{p^{N-i}(1-p)N}{1-p^N} \bar{c}' &> e - \frac{\bar{c}'N}{1-p^N} h(k) \\
\frac{\bar{c}'N}{1-p^N} (h(k) - p^{N-i}(1-p)) &> e \\
f_k(N-i) &> \frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{N},
\end{aligned}$$

pois  $f_k(N-i) = h(k) - (1-p)p^{N-i}$ . Como  $f_k(N-i)$  é decrescente em  $i$ , então basta verificar sob quais condições a desigualdade é satisfeita para  $i = N-k$  e violada para  $i = N-(k-1)$ . Ou seja,

$$f_k(k) > \frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{N} \geq f_k(k-1).$$

Do Lema 4.2, tem-se  $\left(1 - p^N \frac{(1-p)N}{1-p^N}\right) \frac{\bar{c}'}{e} = \frac{\delta-1}{\delta}(1-p)$ . Logo,

$$\frac{e}{\bar{c}'} \frac{1-p^N}{N} = \frac{1-p^N}{(1-p)N} \left(1 - p^N \frac{(1-p)N}{1-p^N}\right) \frac{\delta}{\delta-1} = \frac{\delta}{\delta-1} \left(\frac{1-p^N}{(1-p)N} - p^N\right).$$

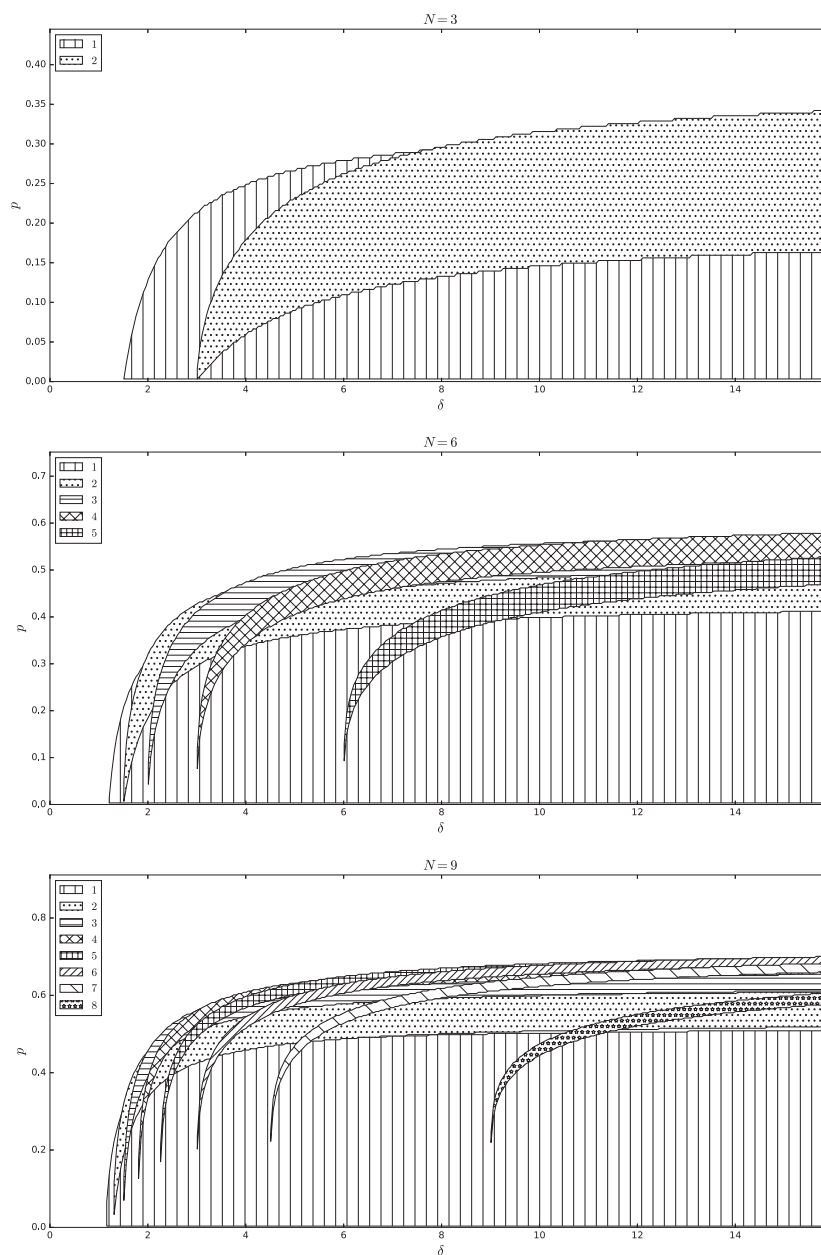
Portanto, a condição de existência da referida corrida é

$$f_k(k) > \left[\frac{1-p^N}{(1-p)N} - p^N\right] \frac{\delta}{\delta-1} \geq f_k(k-1),$$

ou seja, a condição (30). □

## B. FIGURAS

**Figura B-1:** Economias nas quais há corrida:  $N \in \{3, 6, 9\}$ .



**Figura B-2:** Economias nas quais há corrida:  $N \in \{12, 16, 20\}$ .