Indices de desigualdade segundo distintas unidades recipientes da renda: algumas relações úteis

José W. Rossi*

O artigo mostra as circunstâncias em que certas relações podem ser estabelecidas entre os índices de desigualdade quando distintas unidades recipientes da renda são utilizadas. Três distribuições básicas são consideradas: a) a distribuição das famílias (ou domicílios) segundo a renda familiar; b) a distribuição das famílias segundo a renda *per capita* familiar; c) a distribuição dos indivíduos segundo a renda *per capita* familiar. As relações entre os índices de desigualdade dessas distribuições são discutidas inicialmente de modo formal e depois verificadas tanto com dados artificialmente construídos como a partir de dados empíricos do Brasil e de alguns outros países.

1. Introdução

Uma dificuldade freqüentemente encontrada em estudos comparativos sobre distribuição de renda é que, além das diferenças quanto à variável utilizada para a renda, diferem em geral as unidades recipientes desta variável. De fato, os índices de desigualdade da renda são calculados ora a partir da distribuição das famílias segundo a renda familiar, ora a partir da distribuição das famílias segundo sua renda *per capita*, ou ainda calculados para a distribuição dos indivíduos segundo a renda *per capita* da família (que, diga-se de passagem, é a distribuição mais apropriada para aferir-se o grau de bem-estar dos indivíduos) ou da distribuição desses mesmos indivíduos segundo a sua própria renda ou a renda da família a que pertencem.

Neste estudo pretendemos reunir elementos que permitam estabelecer algumas relações entre os índices de desigualdade obtidos com essas distintas unidades recipientes da renda, de tal modo que possam ser úteis para os pesquisado-

*Do Ipea/Inpes e da UFRJ. O autor agradece os comentários de um leitor anônimo que, refazendo os seus cálculos, encontrou dois erros na versão anterior da tabela 1.

res nesta área. No item 2, discutimos essas relações de modo formal, para no item 3 apresentar os resultados obtidos tanto com distribuições de renda artificialmente construídas como com distribuições empíricas de alguns países, inclusive o Brasil.

2. Relações entre os índices para distintas unidades recipientes da renda

Como ponto de partida, considere-se que o tamanho da família, m_h, seja constante dentro de cada classe de renda. Se m_h for também constante ao longo das várias classes de renda, é óbvio, então, que a distribuição das famílias segundo a renda familiar, $y(H)$, será idêntica à distribuição das famílias segundo a renda *per capita* familiar, $z(H)$. Se, entretanto, m_h crescer monotonicamente com a renda familiar, y_h, mas a uma taxa que seja menor que aquela da renda (isto é, a elasticidade de y_h com respeito a m_h é maior que a unidade), tem-se, como demonstrado por Anand (1983, p. 347-8), que a distribuição das famílias segundo a renda *per capita* familiar será Lorenz-dominante à distribuição das famílias segundo a renda familiar (isto é, a curva de Lorenz da primeira distribuição situar-se-á inteiramente acima daquela da segunda); ou em notação simbólica:

$$z(H) \geqslant L\ y(H) \tag{1}$$

Isto implica, naturalmente, que o índice de Gini da primeira distribuição será o menor dos dois; ou seja:

$$G\ z(H) < G\ y(H) \tag{2}$$

Sob as mesmas condições que acabamos de discutir, pode ser ainda demonstrado (cf. Anand, 1983; p. 349-50) que a distribuição dos indivíduos segundo a sua renda *per capita* familiar, $z(n)$, será Lorenz-dominante à distribuição das famílias segundo a renda familiar; isto é:

$$z(n) \geqslant L\ y(H) \tag{3}$$

o que implica

$$G\ z(n) < G\ y(H) \tag{4}$$

De fato, podem-se usar alternativamente nas relações (2) e (4) índices de desigualdade como o índice de Theil, o índice de Atkinson, ou, ainda, o quadrado do coeficiente de variação (cf. Anand. 1983, p. 340).

Suponha-se agora que os dados da renda sejam disponíveis apenas na forma grupada, onde $\bar{m}_h$ é o tamanho médio da família na classe de renda h, com $\bar{y}_h$ sendo a correspondente renda média das famílias. É claro que, se o tamanho da família for constante dentro de cada classe de renda e se este tamanho crescer monotonicamente com $\bar{y}_h$, mas a uma taxa menor que aquela para $\bar{y}_h$, estamos, então, diante de uma situação semelhante à que acabamos de discutir. Como não é nula, contudo, a variância do tamanho da família dentro de cada classe de renda, outras possibilidades podem ocorrer. Por exemplo, se tal variância for substancial, pode-se obter a inversão no sentido da relação em (2), mesmo que $\bar{m}_h$ cresça monotonicamente com $\bar{y}_h$ e a uma taxa que seja menor que aquela para $\bar{y}_h$. Isto porque a elevada variância no tamanho da família dentro das classes de renda poderia causar uma forte mudança na ordenação das famílias quando se passa da variável renda familiar para a variável renda *per capita* familiar. De fato, este foi o caso encontrado por Anand (1983) com dados da Malaísia; isto é, apesar de $\bar{m}_h$ crescer monotonicamente com $\bar{y}_h$ e a uma taxa menor que aquela de y_h, aumentou a desigualdade entre as famílias quando a sua ordenação passou da variável renda familiar para a variável renda *per capita* familiar.

Na realidade, uma orientação mais precisa sobre a relação entre as distribuições $y(H)$ e $z(H)$ só é possível caso se aceite a variância do logaritmo da renda como medida de desigualdade.[1] Neste sentido e seguindo Anand (1983, p. 350), seja $z = y/m$ a renda *per capita*, obtendo-se então (V significa variância):

$$\mathrm{V} \log z = \mathrm{V} \log y + \mathrm{V} \log m - 2 \operatorname{Cov} (\log y, \log m) \qquad (5)$$

Assim, se $Cov\ (log\ y,\ log\ m) \leqslant 0{,}5\ V\ log\ m$, segue-se que $V\ log\ z \geqslant V\ log\ y$. Portanto, uma covariância positiva entre y_h e m_h não é suficiente para que a distribuição $z(H)$ seja menos desigual que a distribuição $y(H)$; tal covariância deve ser, de fato, suficientemente forte. Neste contexto, ressalte-se que, como sugerem Datta & Meerman (1980), se a elasticidade de y_h com relação a m_h for muito baixa, mas excedendo zero, então pode-se obter a inversão no sentido das relações dadas em (2) e (4). O item seguinte fornece na realidade evidência corroborando este ponto.

A relação entre as distribuições $y(H)$ e $z(n)$ parece ser bem mais complexa do que aquela entre $y(H)$ e $z(H)$. Por exemplo, Anand (1983; p. 350-4) mostra que se a distribuição conjunta de y_h e m_h for independente – isto é, $f(y, m) = g(y) \times h(m)$ – e, adicionalmente, se $y(H)$ tiver uma distribuição Pareto com parâmetro α, então $z(n)$ terá também esta mesma distribuição e com o mesmo parâmetro α. Obviamente, há dois problemas aqui. Primeiro, a distribuição de renda não é em geral do tipo Pareto. Pior ainda, a independência entre y_h e m_h dificilmente teria respaldo empírico. E se esses pressupostos não forem utilizados, conclui-se que (ver Anand, 1983) $z(n)$ pode ser tanto mais como menos desigual que $y(H)$.

3. Relação entre os índices de desigualdade com base em dados construídos e dados empíricos de alguns países

Inicialmente, mostramos na tabela 1 algumas simples distribuições de renda com dados construídos e que servem para confirmar os resultados discutidos no item anterior. Observe-se, antes de mais nada, que as distribuições são caracterizadas

[1] Esta é uma medida de desigualdade aceitável caso a distribuição de renda seja do tipo *log*-normal, pois em tais circunstâncias a medida satisfaz o princípio da transferência de Pigou (isto é, a transferência de renda de uma pessoa mais rica para uma mais pobre, sem que haja uma alteração na hierarquia de uma com relação à outra, resulta em menor desigualdade). Aliás, se a distribuição de renda é do tipo *log*-normal, então o índice de Gini seria uma simples transformação monotônica da variância do logaritmo da renda. Sobre estes pontos, ver Hart (1975), ou Rossi (1982).

Tabela 1
Relação entre os índices de Gini para várias distribuições com distintas unidades recipientes da renda

Tamanho *(N)* e renda *per capita (PC)* das várias distribuições		Renda das famílias I 200	Renda das famílias II 300	Índices de Gini e elasticidade *Gy (H)*	*Gz (H)*	*Gz (n)*	E_{ym}
A	N	1	4	0,10	0,23	0,20	0,17
	PC	200	75				
B	N	1	3	0,10	0,16	0,15	0,25
	PC	200	100				
C	N	2	5	0,10	0,13	0,11	0,33
	PC	100	60				
D	N	1	2	0,10	0,07	0,06	0,50
	PC	200	150				
E	N	2	3	0,10	0	0	1,00
	PC	100	100				
F	N	3	4	0,10	0,03	0,03	1,50
	PC	67	75				
G	N	4	5	0,10	0,05	0,04	2,00
	PC	50	60				
H	N	5	6	0,10	0,06	0,06	2,50
	PC	40	50				

por terem valores crescentes para a elasticidade da renda familiar com relação ao tamanho da família, E_{ym}. Os resultados da tabela podem ser assim resumidos: as distribuições *A* e *B*, com elasticidades de 0,17 e 0,25 respectivamente, envolvem um substancial reordenamento das famílias quando se passa da variável renda familiar para a variável renda *per capita* da família. Isto resultou na inversão do sentido das relações do índice de Gini dadas em (2) e (4). Nas distribuições *C* e *D*, por outro lado, apesar de ainda indicarem um reordenamento das famílias quando este é efetuado por aquelas mesmas duas variáveis de renda, o processo agora é apenas moderado. Desta forma, tem-se aqui dois resultados distintos.

Primeiro, na distribuição C, assim como nas distribuições A e B, tem-se mais desigualdade na distribuição $z(H)$ do que naquela em $y(H)$, mas a desigualdade desta última, apesar de permanecer menor, aproxima-se agora daquela da distribuição $z(n)$ – este último resultado poderia ser invertido como, aliás, foi encontrado por Anand (1983) com dados de renda para a Malaísia em 1970. Já a distribuição D produz relações para o índice de Gini que são opostas àquelas encontradas com as distribuições A e B. Vale dizer, tem-se agora resultados que estão de acordo com as relações em (2) e (4); note-se que as elasticidades E_{ym} nas distribuições C e D são ainda menores do que a unidade, sendo respectivamente 0,33 e 0,50. Finalmente, nas distribuições de E em diante, todas as elasticidades E_{ym} estão acima da unidade, resultando, pois, que as relações (2) e (4) são satisfeitas em todos os casos. Ressalte-se ainda que em tais distribuições não há qualquer alteração na ordenação das famílias quando se passa da renda familiar para a renda *per capita* da família. De fato, tem-se nestes casos uma associação positiva tanto entre a renda familiar, y_h, e o tamanho da família, m_h, como entre a renda *per capita* da família, z_h, e o tamanho da família. Vale dizer, uma associação negativa entre z_h e m_h é incompatível com elasticidades E_{ym} maiores que a unidade. Mais interessante, porém, é o fato de que uma associação positiva entre y_h e m_h, e negativa entre z_h e m_h é compatível tanto com as relações (2) e (4) como com a inversão no sentido dessas relações; tudo dependendo da intensidade destas associações. Como os resultados da tabela 1 indicam claramente, quando aumenta a associação positiva entre y_h e m_h, diminui (em valores absolutos) a associação negativa entre z_h e m_h. Observe-se, em particular, que na distribuição E a primeira dessas associações (estamos usando aqui a elasticidade E_{ym} como medida de associação) é unitária e a segunda, zero. O ponto é que uma forte associação negativa entre z_h e m_h (que implica, como vimos, uma fraca associação positiva entre y_h e m_h) parece incompatível com os resultados simultâneos de (2) e (4).

Vale analisar agora o resultado obtido para alguns países quanto a essas relações de desigualdade. Segundo Datta & Meerman (1980), a evidência empírica parece sugerir que para os países em desenvolvimento as relações em (2) e (4) são geralmente observadas. Isto foi pelo menos constatado por Visaria (1978) com dados de renda de países como Índia, Nepal, Sri Lanka, Formosa e Malaísia. No caso dos EUA, porém, a evidência encontrada por Datta & Meerman (1980) com dados de renda relativos a 1970 inverte o sentido da relação em (4), já que se obteve $G\ z(n) = 0{,}39$ e $G\ y(H) = 0{,}36$. Isto porque "nos EUA há uma fraca progressão na renda média que cresce com o tamanho da família, progressão esta que é invertida para famílias com mais de cinco membros" (Datta & Meerman, 1980, p. 31).

Com relação ao Brasil, utilizaremos a distribuição de renda de 1970 como dada em Lluch (1981). Quando a renda das famílias é distribuída ao longo de 21 classes de renda (ver tabela 5 do estudo de Lluch), nota-se que, pelo menos ao longo dessas classes, $\bar{m}_h$ cresce em geral com o aumento de $\bar{y}_h$, e isto ocorre a uma taxa que é menor para a primeira dessas variáveis. Assim, na ausência de maior variação no tamanho da família dentro de cada classe, segue-se que um resultado como na relação em (2) deve ser esperado. Como Lluch dispunha dos dados em bases individuais, foi-lhe possível ordenar as famílias também de acordo com a sua renda *per capita*, obtendo-se respectivamente $G\ y(H) = 0{,}575$ e

$G\,z(H) = 0{,}524$.[2] Estes resultados, que estão, pois, de acordo com a relação em (2), sugerem que a reordenação das famílias dentro de cada classe de renda não deve ter sido muito intensa quando se passa da variável renda familiar para a variável renda *per capita* familiar; caso contrário, o sentido daquela relação seria invertido – recorde-se do caso da Malaísia, obtido por Anand, (1983). Não foi desprezível, porém, a ordenação das famílias. De fato, quando Lluch, que primeiro distribui as famílias de acordo com os vários decis da renda familiar, também o faz de acordo com a renda *per capita* familiar (ver a tabela 9 do estudo de Lluch), obtém, então, uma matriz 10 por 10 que é razoavelmente não-diagonal. Isto indica, obviamente, um certo reordenamento das famílias, apesar de não ter sido suficiente para inverter o sentido da relação em (2).

É interessante comparar ainda, com esses mesmos dados do Brasil, as distribuições $y(H)$ e $z(n)$. Dos nossos comentários anteriores, dever-se-ia esperar que $z(n)$ fosse menos desigual que $y(H)$, quando menos por ser este o caso que prevalece entre os países em desenvolvimento, conforme já se notou. Entretanto, o resultado obtido por Lluch está mais em linha com aquele obtido por Datta & Meerman (1980) para os EUA – isto é, $G\,z(n) > G\,y(H)$; mais precisamente, obtiveram-se os índices $G\,z(n) = 0{,}624$ e $G\,y(H) = 0{,}575$, contrariando pois a relação em (4).[3] Lluch calculou ainda $G\,y(n) = 0{,}568$, que indica o índice de Gini da distribuição dos indivíduos segundo a sua ordenação pela renda da família. Na comparação entre $G\,z(n) = 0{,}624$ e $G\,y(n) = 0{,}568$, Lluch sugere que o primeiro é maior que o segundo devido ao fato de que enquanto há uma associação positiva entre y_h e m_h, prevalece uma forte associação negativa entre z_h e m_h, o que parece razoável para este caso. Entretanto, se a associação negativa entre z_h e m_h é forte, então será fraca a associação positiva entre y_h e m_h, conforme vimos da tabela 1. E uma associação positiva fraca entre y_h e m_h tenderia, de acordo com (5), a inverter o sentido da relação em (2), contrariamente, pois, ao obtido por Lluch; a menos, é claro, que seja pouco expressiva a variância do tamanho da família dentro de cada classe de renda, como se depreende, uma vez mais, da relação em (5). Esta é, pois, uma questão que merece investigação adicional, mas que vai além dos objetivos destas notas.

[2] O parecerista do artigo sugere que este índice de Gini de 0,524 é na verdade calculado para a curva de Lorenz, onde a abscissa é a proporção acumulada de pessoas e a ordenada é a proporção acumulada da renda familiar por pessoa. De fato, cálculos efetuados por este autor (juntamente com Ricardo Paes de Barros), com dados da Pnad-1985, indicam que, para todos os estados da Federação, $Gz\,(H)$ é maior do que $Gy\,(H)$, contrariando, pois, o resultado de Lluch. De qualquer modo, como a tabela 1 do trabalho de Lluch informa que a distribuição utilizada é a das famílias ordenadas pela renda familiar por pessoa, achamos por bem interpretar o índice como sendo $Gz\,(H)$; cabe, pois, registrar aqui a dúvida.

[3] Semelhantes cálculos foram efetuados por Hoffmann & Kageyama (1986) com os dados dos censos de 1970 e 1980, obtendo para o Brasil, respectivamente, $Gy\,(H)$ e $Gz\,(n)$ de 0,608 e 0,634, para 1970, e 0,597 e 0,606 para 1980. Esses mesmos autores calcularam, ainda, o índice de Gini para a distribuição das pessoas economicamente ativas conforme o rendimento mensal, obtendo, nesses dois anos, os índices de 0,604 e 0,624. Isto é, piorou, no período, a distribuição de renda dos indivíduos segundo a sua própria renda, mas melhorou essa distribuição quando lhes atribuímos a renda *per capita* da família em que se inserem; melhorou também a distribuição de renda das famílias segundo a sua renda familiar.

Abstract

The article shows how certain relationships can be established among the inequality indices when distinct income recipient units are used. Three basic distributions are considered: a) the family (or household) distribution according to total family income; b) the family distribution according to the *per capita* income of the family; c) the distribution of the individuals according to the *per capita* income of the family. The relationships among the inequality indices are initially shown formally and then verified with both artificially constructed data and empirical data of Brazil and a few other countries.

Referências bibliográficas

Anand, S. *Inequality and poverty in malaysia;* measurement and decomposition. Oxford University Press, 1983.

Datta, G. & Meerman, J. *Household income or household income* per capita *in welfare comparisions.* 1980. (World Bank Staff Working Paper, n. 378.)

Hart, P.E. Moment distribution in economics: an exposition. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A, v. *138,* part 3, p. 423-34, 1975.

Hoffmann, R. & Kageyama, A.A. Distribuição de renda no Brasil, entre famílias e entre pessoas, em 1970 e 1980. *Estudos Econômicos, 16*(1):25-31, 1986.

Lluch, C. Pobreza e concentração da renda no Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico, 11*(3):757-82, dez. 1981.

Rossi, J.W. *Índices de desigualdade de renda e medidas de concentração industrial;* aplicações a casos brasileiros. Rio de Janeiro, Zahar, 1982.

Visaria, P. Demographic factors and the distribution of income, some issues. Paper prepared for the Conference on Demographic and Economic Change: Issues for the 1980's, convened by the International Union for the Scientific Study of Population, Helsinki, Aug. 28-Sept. 1,1978.