

# Filtragem e Previsão com Modelos de Volatilidade: Volatilidade Estocástica *versus* GARCH\*

Maurício Zevallos Herencia\*\*

Luiz K. Hotta\*\*\*

Pedro L. Valls Pereira\*\*\*\*

Sumário: 1. Introdução; 2. Comparação empírica dos modelos; 3. Comparação empírica das previsões um-passo à frente *ex ante*; 4. Comparação dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE estacionário através de simulações; 5. Conclusões.

Palavras-chave: volatilidade; estimação; previsão; efeito de especificação.

Códigos JEL: G22, G52, G53 e G100.

O objetivo deste artigo é comparar a volatilidade estimada pelos modelos GARCH e de Volatilidade Estocástica, utilizando-se tanto séries reais quanto simuladas. Os aspectos considerados são basicamente dois: estimação pontual da volatilidade e a previsão um-passo à frente. As comparações são feitas no caso em que o processo gerador dos dados é conhecido e desconhecido.

The purpose of this paper is to compare the volatility estimates using GARCH and Stochastic Volatility Models in real and simulated series. The two issues that are considered are: point estimation and one-step prediction. The comparison are made when the data generation process is known and also when it is unknown.

## 1. Introdução

Na literatura de finanças existem vários trabalhos que comparam, empiricamente, modelos de volatilidade para os retornos. Por exemplo, Pagan & Schwert (1990) comparam modelos ARCH e alternativas não-paramétricas; Cao & Tsay (1993) comparam modelos TAR e ARCH; e Taylor (1994) compara modelos ARCH e de Variância Estocástica (VE). Por sua vez, entre

---

\* Artigo recebido em 3-3-1998 e aprovado em 11-5-1998. Os autores agradecem a um parecerista desta revista, aos participantes do XIX Encontro Brasileiro de Econometria, Recife; 7<sup>a</sup> Escola de Séries Temporais e Econometria, Canela; e 60<sup>a</sup> AEA Conference in Emerging Finance Markets, Paris. Os dois últimos autores agradecem o financiamento do CNPq e do Pronex.

\*\* Mestre do Departamento de Estatística, Unicamp.

\*\*\* Do Departamento de Estatística, Unicamp.

\*\*\*\* Do departamento de Estatística da USP e do Instituto de Economia, Unicamp.

os estudos teóricos temos os de Nelson & Foster (1994) e Foster & Nelson (1996), que comparam modelos ARCH e de Variância Estocástica a tempo contínuo, e de Jacquier et alii (1994), que comparam as estimativas do modelo AR(1)-VE através das abordagens quase-máxima verossimilhança (QMV) e Markov Chain Monte Carlo (MCMC). O grande problema na comparação de estimativas de volatilidade dos modelos reside no fato de que, na prática, a volatilidade é uma variável não observada. Para contornar esse problema, a solução freqüentemente utilizada é adotar como referência (*benchmark*) para a volatilidade mensal a variância mensal não condicional dos retornos diários. Esta abordagem não será usada neste artigo porque utilizaremos dados diários, e a variância não condicional de retornos dentro do dia poderia introduzir problemas de escolher a freqüência de utilização destes dados. Neste artigo apresentaremos as comparações das estimativas de volatilidade através dos modelos ARCH e VE utilizando a série de Telebrás e simulações. Os aspectos considerados são basicamente dois: estimação pontual da volatilidade e a previsão um-passo à frente. A comparação das estimativas pontuais das volatilidades é realizada sob critérios basicamente qualitativos enquanto na comparação das previsões um-passo à frente é utilizado um critério baseado nos retornos observados já utilizado em Herencia et alii (1995).

A comparação empírica dos modelos ARCH e de VE é realizada utilizando a série de Telebrás e, neste caso, o verdadeiro processo da volatilidade é desconhecido.

Por outro lado, com o objetivo de comparar as abordagens ARCH e VE quando o processo gerador dos dados e a volatilidade são conhecidos, recorreremos à simulações. Primeiro é considerado um processo gerador dos dados construído de forma que, especificando os parâmetros ARCH, os parâmetros do VE sejam obtidos analiticamente, e vice-versa. Em segundo lugar, os modelos ARCH e VE são comparados quando não é possível estabelecer relações analíticas entre os parâmetros dos modelos, sendo necessário estimar um dos modelos. Considerando que os resultados apresentados estão baseados em poucas simulações, esses resultados devem ser tomados como ilustrativos. A ênfase nas comparações será dada nos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE estacionário.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Nas seções 2 e 3 é apresentada a comparação empírica dos modelos ARCH e VE na estimativa da volatilidade e na previsão um-passo à frente usando a série de Telebrás. Na seção 4 comparamos os modelos AR(1)-VE estacionário e GARCH(1,1) através de simulações e, finalmente, na última seção, apresentamos as conclusões. Os modelos que foram usados nestas comparações são apresentados no apêndice.

## 2. Comparação Empírica dos Modelos

É sabido que os modelos ARCH e VE são capazes de reproduzir teoricamente vários fatos estilizados observados nas séries financeiras; ver, por exemplo, Herencia et alii (1995).

Nesta seção será discutido outro aspecto na comparação das duas abordagens, as estimativas pontuais da volatilidade. Na ausência de um teste de hipóteses para comparar as volatilidades obtidas nas duas abordagens, nos parágrafos seguintes será realizada uma discussão basicamente qualitativa. Dentro da abordagem de VE o estimador utilizado é o suavizado<sup>1</sup> e na abordagem ARCH, o usual.

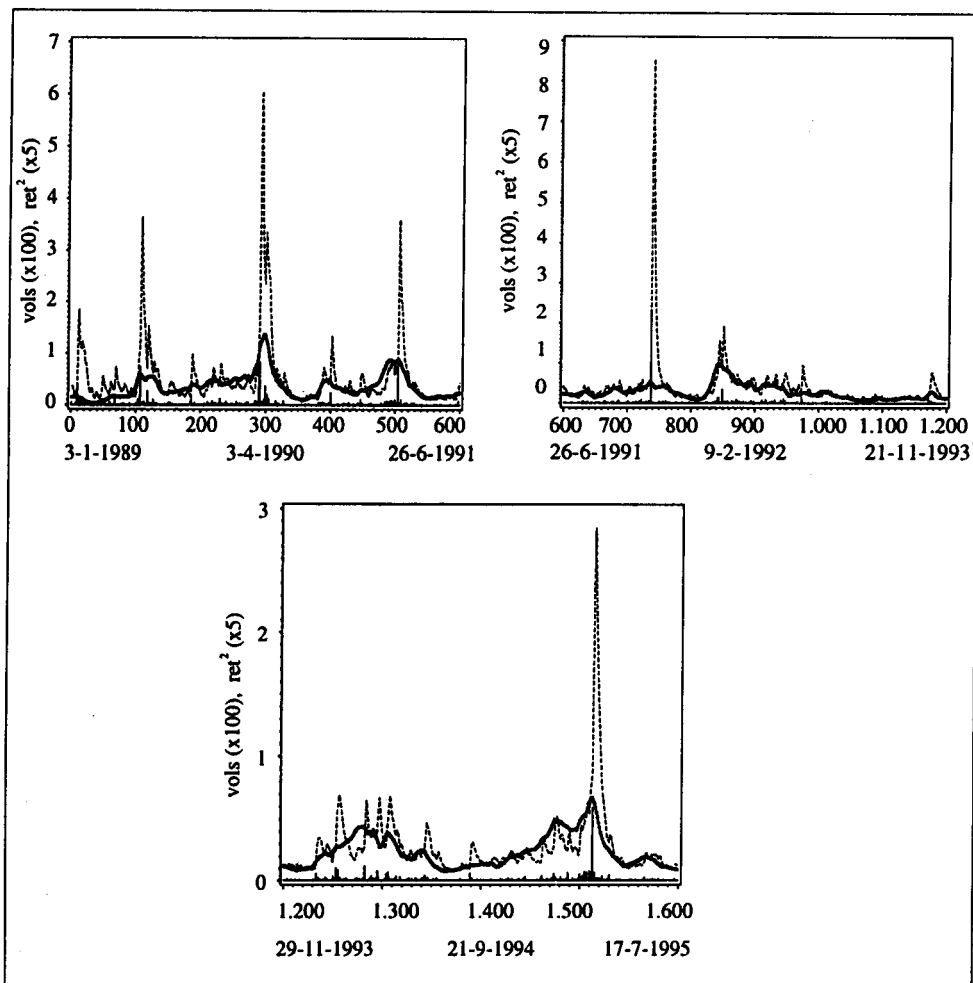
### 2.1 Conglomerados de volatilidade e suavidade

Como pode ser constatado nas figuras 1 e 2, tanto a volatilidade estimada pelos modelos ARCH quanto a do AR(1)-VE estacionário são capazes de imitar os movimentos de aumentos e diminuições dos quadrados dos retornos. É possível observar também que a volatilidade do modelo VE apresenta um comportamento bem mais suave quando comparado à volatilidade do modelo ARCH.

---

<sup>1</sup> Na modelagem estrutural de séries temporais um dos objetivos é extrair os componentes não observados, por exemplo, a volatilidade. Pode-se definir dos estimadores destes componentes: filtrado e suavizado. O componente filtrado é aquele que considera a informação até o instante  $t-1$  e o suavizado é aquele que considera toda a informação amostral, isto é, até o instante  $T$ .

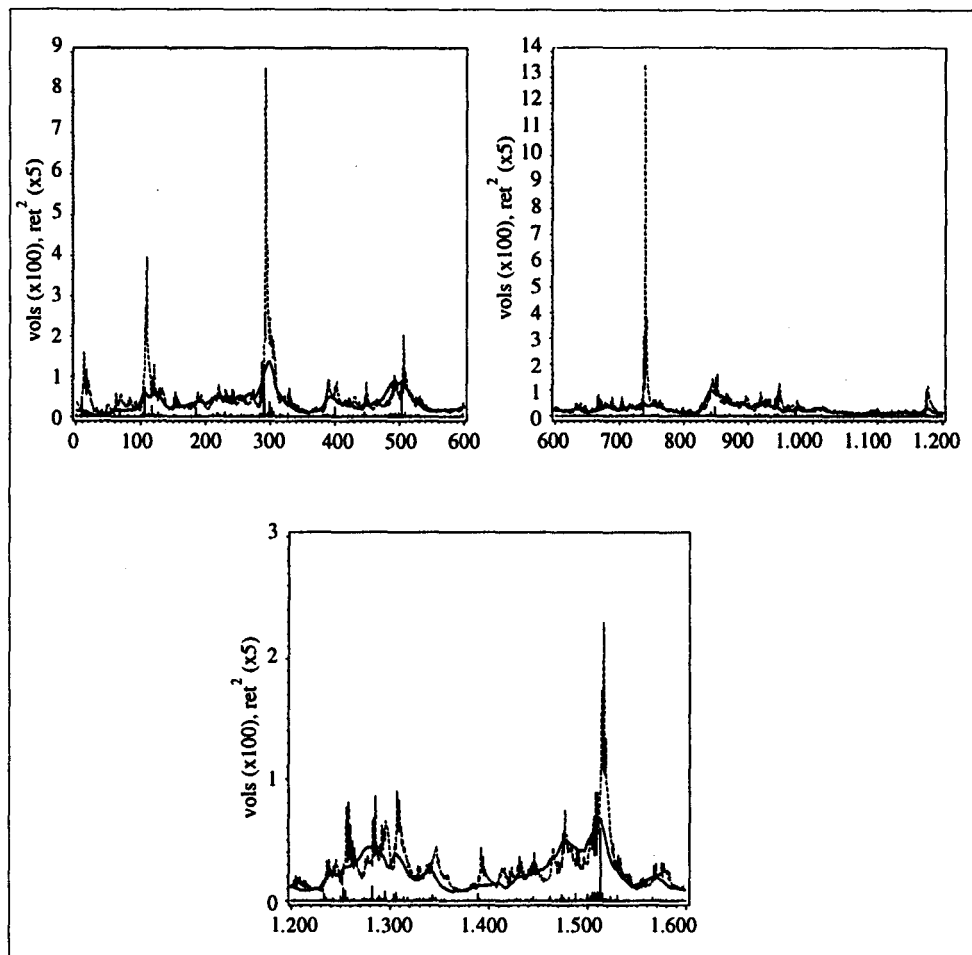
Figura 1  
Volatilidades estimadas: GARCH(1,2) e AR(1)-VE



Notas: GARCH(1,2) ..... , AR(1)-VE ———

vols = volatilidades,  $ret^2$  = quadrados dos retornos.

Figura 2  
Volatilidades estimadas: EGARCH(2,2) e AR(1)-VE



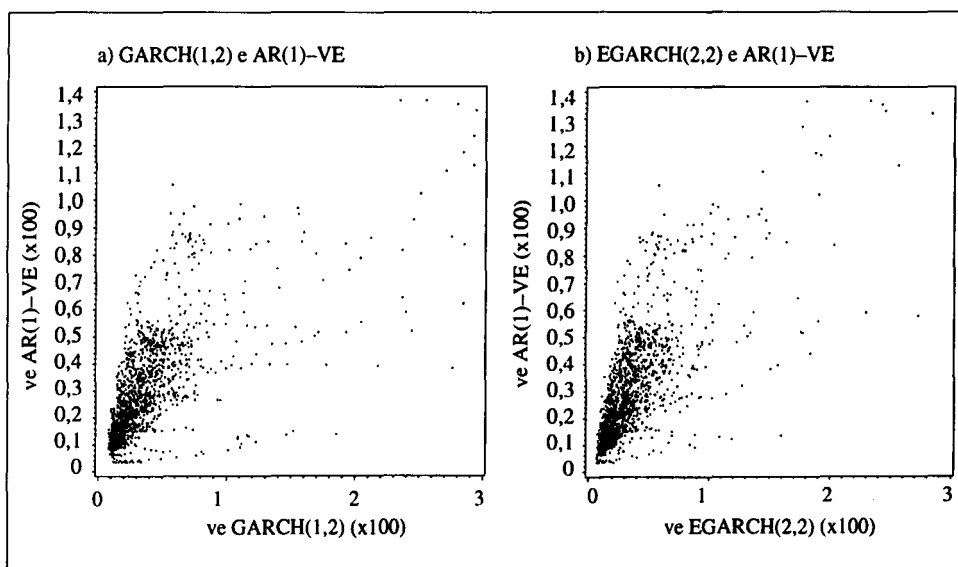
Notas: EGARCH(2,2) -----, AR(1)-VE ———

vols = volatilidades, ret<sup>2</sup> = quadrados dos retornos.

## 2.2 Estimativas pontuais da volatilidade

Para a série de Telebrás, ao se comparar as volatilidades estimadas pelos modelos AR(1)-VE e GARCH(1,2) (figura 3a) ou EGARCH(2,2) e AR(1)-VE (figura 3b), percebemos que as diferenças entre as estimativas podem ser bastante grandes.<sup>2</sup> Para se ter uma idéia da magnitude das diferenças, calculamos a percentagem dos retornos cuja diferença entre as estimativas de volatilidade é maior que 20 e 45%, o que equivale a calcular a percentagem dos retornos cujos desvios-padrão da volatilidade se diferenciam em aproximadamente 10 e 20%, respectivamente. Nas tabelas 1 e 2 apresentamos os resultados quando a volatilidade estimada pelos modelos ARCH e AR(1)-VE estacionário, respectivamente, é tomada como referência.

Figura 3  
Comparação das volatilidades estimadas ARCH e Variância Estocástica<sup>a</sup>



<sup>a</sup> Não foram considerados os retornos que: a)  $100 \cdot ve \text{ garch}(1,2) > 3$ ; b)  $100 \cdot ve \text{ egarch}(2,2) > 3$ .

Nos dois casos o número total de pontos é igual a 1.592 (99,56%).

Nota: ve = volatilidade.

<sup>2</sup> As figuras foram realizadas sem considerar alguns retornos (sete em cada caso; a e b) nos quais as diferenças são bastante grandes. Esses pontos estão relacionados com valores extremos nos quadrados dos retornos, alguns dos quais são discutidos posteriormente.

Tabela 1  
Diferenças entre as estimativas de volatilidade ARCH e AR(1)-VE  
estacionário para Telebrás (%)

Quando a volatilidade ARCH é considerada referência						
	Diferença vs>1,2vg	maior que vs<0,8vg	20% Total	Diferença vs>1,45vg	maior que vs<0,55vg	45% Total
vs = AR(1)-VE	21,83	40,90	62,73	10,82	14,82	25,64
vg = GARCH(1,1)						
vs = AR(1)-VE	21,95	40,09	62,04	11,07	14,95	26,02
vg = GARCH(1,2)						
vs = AR(1)-VE	21,64	40,59	62,23	10,76	14,20	24,96
vg = GARCH(2,2)						
Quando a volatilidade AR(1)-VE é considerada referência						
	Diferença vs>1,2vg	maior que vs<0,8vg	20% Total	Diferença vs>1,45vg	maior que vs<0,55vg	45% Total
vs = AR(1)-VE	45,09	18,89	63,98	27,08	3,19	30,27
vg = GARCH(1,1)						
vs = AR(1)-VE	43,96	19,20	63,16	27,33	3,69	31,02
vg = GARCH(1,2)						
vs = AR(1)-VE	44,78	18,32	63,10	28,08	2,75	30,83
vg = GARCH(2,2)						

Notas: vs representa a volatilidade do modelo AR(1)-VE; vg representa a volatilidade do modelo GARCH.

Os dados da tabela 1 mostram que para uma grande proporção dos retornos as diferenças entre as estimativas são consideráveis. Especificando a volatilidade ARCH como referência, para ambas as magnitudes de diferença (20 e 45%), a volatilidade AR(1)-VE subestima com maior frequência a volatilidade ARCH. Por sua vez, especificando a volatilidade AR(1)-VE como referência, a volatilidade ARCH superestima com mais frequência a volatilidade AR(1)-VE. Em consequência, a volatilidade estimada pelos modelos ARCH é maior que a volatilidade estimada pelo AR(1)-VE.

## 2.3 Persistência

Na tabela a seguir mostramos as estimativas da persistência<sup>3</sup> nos ajustes considerados para a série de Telebrás.

Tabela 2  
Persistências estimadas para Telebrás

	ARCH					VE
	GARCH (1,1)	GARCH (1,2)	GARCH (2,2)	EGARCH (2,0)	EGARCH (2,2)	AR(1)-VE
Telebrás	0,9967	*	*	*	**	0,9656
	209,7 <sup>a</sup>					19,80

<sup>a</sup>valores da meia vida; \* não foi calculada a persistência; \*\*o modelo não é covariância estacionário.

Pelos resultados desta tabela podemos concluir que a persistência encontrada no modelo GARCH(1,1) é muito maior que a correspondente ao AR(1)-VE estacionário.

## 2.4 Influência das observações extremas dos quadrados dos retornos

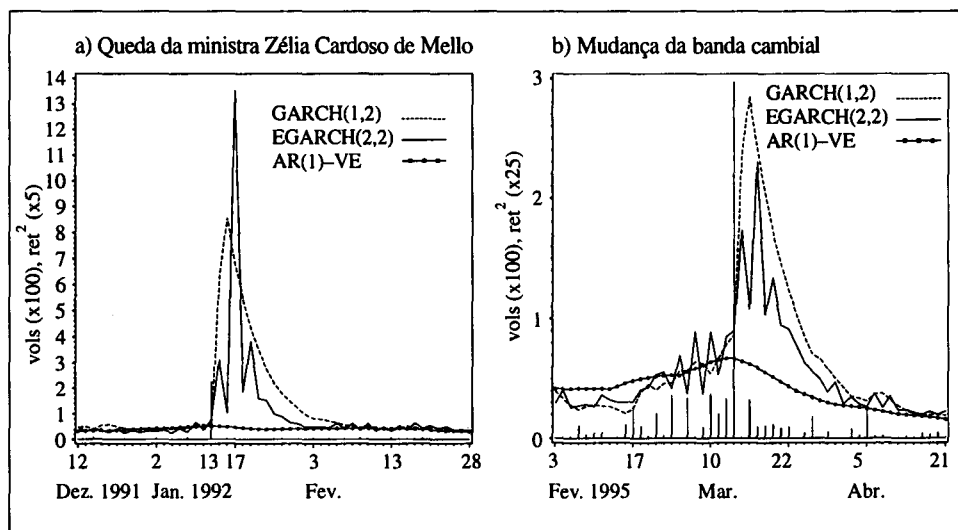
Nos modelos ARCH ajustados constatamos que as observações extremas produzem um aumento bastante grande na volatilidade estimada nos instantes após sua ocorrência. Por exemplo, no período da queda da ministra Zélia Cardoso de Mello (figura 4a) observamos a presença de um retorno que pode ser considerado um valor aberrante (VA) do tipo AO (*aditive outlier*), pois não produz aumento na volatilidade. No entanto ele produz um aumento brutal nas estimativas das volatilidades futuras pelos modelos GARCH(1,2)<sup>4</sup> e EGARCH(2,2). O impacto é tão grande que somente após 20 dias (aproximadamente) da ocorrência do VA, a volatilidade estimada apresenta o mesmo valor que o apresentado antes da ocorrência dessa observação extrema. Outro período no qual se pode observar a forte influência de um VA é nos dias seguintes à mudança da banda cambial (figura 4b).

<sup>3</sup> A persistência no modelo GARCH é definida por  $\alpha(1)+\beta(1)$  e no modelo AR(1)-VE pelo coeficiente  $\gamma_1$ .

<sup>4</sup> A volatilidade do modelo GARCH(1,1) é quase idêntica à do modelo GARCH(1,2).



Figura 4  
Influência das observações extremas dos retornos nas volatilidades  
estimadas ARCH e Variância Estocástica



Notas: vols = volatilidades estimadas,  $ret^2$  = quadrados dos retornos.

Por outro lado, e como se pode comprovar pela figura 4, a volatilidade suavizada do modelo AR(1)-VE estacionário é menos influenciada pela presença de observações extremas. Essa é uma característica desejável para um modelo de volatilidade se o valor extremo é consequência da ocorrência de uma intervenção do tipo AO, enquanto o contrário ocorre quando usualmente existe um aumento real da volatilidade, por exemplo, devido a uma intervenção do tipo IO (*innovation outlier*).

## 2.5 Influência de grandes conglomerados de volatilidade

Na modelagem da série de Telebrás pela abordagem de VE (ver Herencia et alii, 1995 e apêndice), observou-se que a volatilidade estimada pelo modelo AR(1)-VE estacionário é mais afetada pela presença de um conjunto de retornos cujos quadrados são grandes do que pela presença de valores aberrantes isolados (figura 1). Nos modelos ARCH ocorre o contrário: a volatilidade estimada é mais sensível à presença de valores extremos, embora certamente na presença de vários valores grandes próximos as estimativas também aumentam.

### 3. Comparação Empírica das Previsões Um-Passo à Frente *Ex Ante*

Como comentado anteriormente, de maneira geral, a dificuldade na comparação de modelos de volatilidade reside no fato de que a volatilidade é não observada na prática e, portanto, não é possível utilizar critérios de aderência como o Erro Médio Quadrático. Usualmente, esse problema tem sido contornado construindo-se uma série de referência para a volatilidade mensal, que é estimada pela variância mensal não condicional dos retornos diários (ver, por exemplo, Cao & Tsay, 1993). Neste artigo propomos uma abordagem diferente comparando a qualidade da previsão dos modelos utilizando os retornos observados. A idéia, implementada em Herencia et alii (1995) consiste no seguinte: tanto para os modelos ARCH quanto para os modelos VE, conhecemos a distribuição condicional dos retornos (usualmente normal) dados a informação passada e o valor dos parâmetros. Supondo que o modelo é  $Y_t = \mu_t + Y_t^*$ , essa distribuição tem média igual a  $\mu_t$  e variância condicional dada pela volatilidade estimada. Assim, podemos construir intervalos de confiança (i.c.) para as previsões um-passo à frente e comparar as abordagens ARCH e VE considerando dois critérios:

- a) o número de retornos incluídos nos i.c. e,
- b) o comprimento dos i.c.

O modelo que apresentar maior número de retornos dentro dos i.c. e menor comprimento dos i.c., será preferido, embora esses dois critérios sejam de certa forma contraditórios.

No cálculo das previsões para o instante  $t$ , idealmente, o modelo teria que ser estimado utilizando toda a informação até o instante  $t - 1$ , mas por exigir muito esforço computacional isso não será feito. Mas é possível utilizar uma alternativa supondo que as estimativas dos parâmetros do modelo, atualizadas cada vez que um retorno é incorporado na série, não apresentam grandes diferenças num período de, por exemplo, 50 retornos. Dessa forma, estimando os parâmetros até o instante  $t_0$  e supondo que esses são constantes nas próximas 50 observações, podemos calcular o componente filtrado via Filtro de Kalman e obter as previsões da volatilidade um-passo à frente através da expressão:

$$\hat{\sigma}_{f,t+s/t}^2 = \hat{k} \exp(\hat{h}_{t+s-1/t}) s \geq 2$$

e, a seguir, podemos calcular os i.c. para os retornos. Outra alternativa é modificar os procedimentos da seguinte forma:

- a) estimar os parâmetros do modelo até o instante  $t_0$ ;
- b) baseados nas estimativas dos parâmetros no instante  $t_0$  e considerando que as estimativas dos parâmetros utilizados até  $t$  para  $t_0 - 49 \leq t \leq t_0$  são aproximadamente constantes, utilizamos as estimativas encontradas em (a) para calcular as estimativas filtradas da previsão um-passo à frente da volatilidade:  $Prev_{t/t-1}$  via Filtro de Kalman no período  $\{t_0 - 49, t_0 - 48, \dots, t_0\}$ ; e
- c) calculamos os i.c. 95% para os retornos. De forma geral os i.c.  $(1 - 2\alpha)$  são dados por:  $(\mu_t - t_{\nu, \alpha}(Prev_{t/t-1})^{1/2}, \mu_t + t_{\nu, \alpha}(Prev_{t/t-1})^{1/2})$ , onde  $t_{\nu, \alpha}$  corresponde à distribuição  $t$ -Student padrão.

Analogamente, podemos fazer o mesmo com as volatilidades estimadas pelo modelo ARCH. No cálculo da previsão da volatilidade dentro da abordagem ARCH é utilizado o estimador usual e, dentro da abordagem de VE, é utilizada a volatilidade filtrada. Os resultados são apresentados na tabela 3.

Tabela 3  
Previsão um-passo à frente para Telebrás  
Número de retornos fora do intervalo de confiança 95%  
(número esperado = 1,25)<sup>a</sup>

Período	ARCH			VE
	GARCH (1,1)	GARCH (1,2)	EGARCH (2,2)	AR(1)-VE
6-12-94 a 15-2-95	33 <sup>b</sup>	33	22	00
16-2-95 a 5-5-95	11	11	11	22
8-5-95 a 13-7-95	11	11	11	00

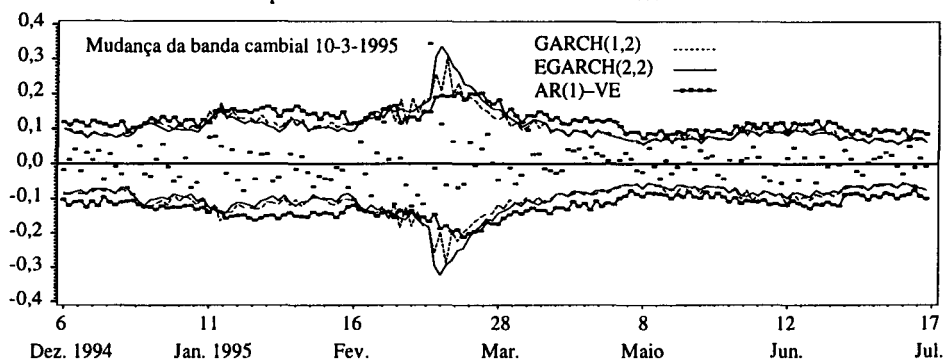
<sup>a</sup>Corresponde a 2,5% de 50; <sup>b</sup>Número de retornos fora dos i.c. 95% (cauda inferior; cauda superior) construídos com as estimativas utilizando toda a amostra.

Analisando os resultados da tabela 3, constatamos que o número de retornos fora dos i.c. é quase o mesmo nos modelos GARCH(1,1), GARCH(1,2) e EGARCH(2,2) e menores no modelo AR(1)-VE, embora a diferença não seja significativamente diferente. A não-significância pode ser devido ao baixo número de observações.

É importante observar que, conforme a tabela 3, os resultados na análise da previsão um-passo à frente permanecem inalterados se considerarmos as estimativas dos parâmetros utilizando toda a informação da amostra. Outro aspecto importante é a percentagem de retornos fora dos i.c., que para o modelo AR(1)-VE, em todos os períodos, e para os modelos ARCH, nos dois últimos períodos, é inferior ao valor esperado a 5%, existindo, portanto, uma indicação de superestimação da largura dos i.c.

A figura 5 apresenta os i.c. 95% considerando os modelos reestimados em cada período. É possível observar que os i.c. construídos com a volatilidade AR(1)-VE estão mais próximos dos i.c. construídos com a volatilidade GARCH(1,1), em períodos de baixa volatilidade, mas, como os i.c. se cruzam, não existe um padrão conclusivo.

Figura 5  
Comparação dos intervalos de confiança 95% para os retornos obtidos pelos modelos ARCH e Variância Estocástica



A influência dos grandes valores nos quadrados dos retornos no comprimento dos i.c. pode ser observada nas figuras 4b e 5, que apresentam a mudança da banda cambial. Como os i.c. são baseados na volatilidade, a presença de uma observação extrema faz com que os i.c. dos modelos GARCH(1,2) e EGARCH(2,2), nos instantes posteriores à ocorrência do valor extremo, sejam desnecessariamente largos, dado que o grande valor do retorno não influencia os retornos futuros (VA do tipo AO). Em consequência, considerando que os i.c. do modelo AR(1)-VE incluem o mesmo número de retornos, o modelo VE é preferível nestas situações. Observe, no entanto, que após algumas observações os i.c. do modelo AR(1)-VE passam a ser desnecessariamente largos.

#### 4. Comparação dos Modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE Estacionário através de Simulações

Como comentado anteriormente, uma das dificuldades de se comparar as estimativas da volatilidade, através da série de Telebrás, era o fato das volatilidades serem desconhecidas. Uma forma de se evitar isso é através de simulação onde o processo gerador dos dados (PGD) é conhecido. Conhecendo-se o PGD e a volatilidade é possível comparar as estimativas. Esse procedimento, entretanto, adiciona um outro problema, o de escolher o PGD, já que um modelo pode ser adequado para um PGD e inadequado para outro. Como estamos comparando estimativas de volatilidade através de modelos GARCH e VE é natural que estes dois modelos estejam entre os PGDs escolhidos. Ao escolhermos estes modelos podemos adicionalmente verificar o quanto um modelo de uma família pode aproximar o de outra família, ou o quanto um procedimento é robusto em termos de PGD.

Sabemos que tanto processos GARCH(1,1) como AR(1)-VE podem gerar processos com função de autocorrelação (f.a.c.) dos quadrados dos retornos da forma ARMA(1,1) com a primeira autocorrelação pequena e decaimento lento. Quando as f.a.c. dos dois modelos são próximas, eles são ditos equivalentes em termos de f.a.c. dos quadrados dos retornos. Nesse caso, espera-se que não exista grande diferença nas estimativas da volatilidade, não perdendo, portanto, muita eficiência, quando um modelo GARCH(1,1) é ajustado como AR(1)-VE e vice-versa. Porém, como a igualdade da f.a.c. não necessariamente implica estimativas de volatilidades iguais, é interessante que estes casos estejam incluídos entre os PGDs escolhidos. Modelos equivalentes são apresentados na subseção 4.1, enquanto as comparações para estimativas de volatilidade destes modelos e a previsão um-passo à frente são apresentadas na subseção 4.2. Para evitar que problemas de estimação dificultem a comparação, vamos considerar que conhecemos os parâmetros dos modelos equivalentes. Um segundo tipo de PGD a ser estudado, e apresentado na subseção 4.3, é quando não existem modelos equivalentes. Nesse caso, os parâmetros dos modelos ajustados têm que ser estimados.

##### 4.1 Modelos equivalentes GARCH(1,1) e AR(1)-VE estacionário

Sejam os modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE, pode-se mostrar, ver por exemplo Harvey & Shephard (1993), que quando  $\gamma$  é próximo a um, as f.a.c.

dos quadrados dos retornos apresentam forma ARMA(1,1) e são dadas por:

$$\text{GARCH}(1,1) \rho(\tau) = \frac{\alpha(1 - \alpha\beta - \beta^2)}{1 - 2\alpha\beta - \beta^2} (\alpha + \beta)^{\tau-1} \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\text{AR}(1)\text{-VE } \rho^*(\tau) = \frac{\exp(\sigma_h^2) - 1}{3\exp(\sigma_h^2) - 1} \gamma^\tau \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Os parâmetros responsáveis pela dinâmica no modelo GARCH(1,1) são  $\alpha$ ,  $\beta$  e no AR(1)-VE  $\gamma$ ,  $\sigma_\eta^2$  dado que  $\sigma_h^2 = \frac{1-\gamma}{\sigma_\eta^2}$ . A seguir mostramos como é obtida a equivalência.

### Especificando o modelo AR(1)-VE

Dado o modelo GARCH(1,1), i.e.,  $\alpha$  e  $\beta$ , os valores de  $\rho(1)$  e  $\rho(2)$  são calculados a partir de 1. Substituindo-se esses valores em 2, obtém-se o AR(1)-VE equivalente através do sistema de duas equações com duas incógnitas, isto é:

$$\frac{\exp(\sigma_h^2) - 1}{3\exp(\sigma_h^2) - 1} \gamma = \rho(1) \quad (3)$$

$$\rho(1) \gamma = \rho(2) \quad (4)$$

cujas solução é dada por:

$$\gamma = \frac{\rho(2)}{\rho(1)} \quad (5)$$

$$\sigma_h^2 = \log \left( \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{\rho(2) - 3\rho(1)^2} \right) \quad (6)$$

Na expressão (6) é necessária a restrição  $\rho(2) > 3\rho(1)^2$  para que a variância seja bem-definida e, por sua vez, devemos considerar as condições para a existência de segundo e quarto momentos do GARCH(1,1), que são  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  e  $3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1$ .

Por outro lado, substituindo-se (1) em (5), obtém-se a seguinte relação:

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (7)$$

isto é, as definições de persistência, quando grandes (aproximadamente 1), levam ao mesmo valor de persistência nos dois modelos.

Finalmente, podemos encontrar  $\sigma_\eta^2$  e  $q = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2/(\pi^2/2)$  através das expressões

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_h^2(1 - \gamma^2) \quad (8)$$

$$q = \sigma_\eta^2/4, 93 \quad (9)$$

Portanto, especificada a dinâmica do modelo GARCH(1,1) (através de  $\alpha$  e  $\beta$ ), obtém-se o modelo equivalente (em dinâmica) AR(1)-VE determinado por (7) e (8) ou (9).

### Especificando o modelo GARCH(1,1)

Substituindo-se em (1)  $\rho(1)$  por  $\rho * (1)$  calculada a partir de (2) e  $\alpha$  por  $\gamma - \beta$ , obtém-se uma equação em  $\beta$  da seguinte forma:

$$\beta^2 [\rho(1) - \gamma] + [\gamma^2 - 2\rho(1)\gamma + 1] \beta + [\rho(1) - \gamma] = 0$$

uma vez resolvida a equação anterior (isto é, em  $\beta$ ), obtém-se  $\alpha$  através de  $\alpha = \gamma - \beta$ .

Para completar a equivalência dos modelos precisamos estabelecer o nível da volatilidade. Os parâmetros responsáveis por esse valor são  $\omega$  no modelo GARCH(1,1) e  $\kappa$  no modelo AR(1)-VE. A relação entre os dois parâmetros é encontrada utilizando-se o valor da variância da série dos retornos. Assim:

$$\text{no GARCH(1,1)} : E[Y_t^2] = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \quad (10)$$

$$\text{no AR(1)-VE} : E[Y_t^2] = \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \gamma^2)}\right) \quad (11)$$

em consequência, igualando essas expressões, obtém-se:

$$\omega = (1 - \gamma) \exp(\sigma_h^2/2)$$

ou

$$\kappa = \frac{\omega}{(1 - \alpha - \beta)} \exp(-\sigma_h^2/2)$$

Na tabela 4 são apresentados alguns modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE com grande persistência que apresentam igual dinâmica, sendo o PGD verdadeiro um GARCH(1,1).

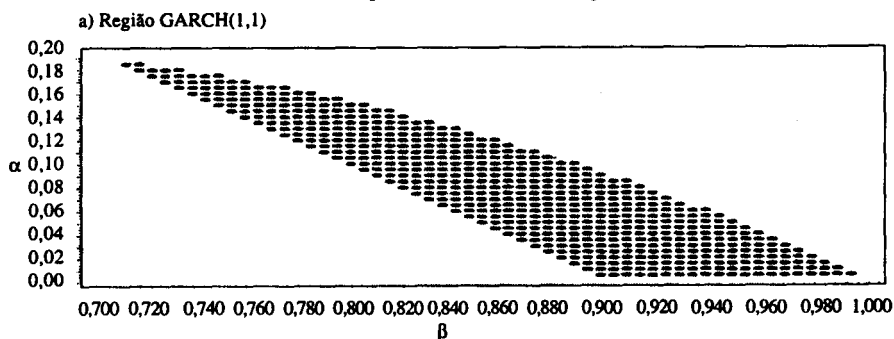
Tabela 4  
Equivalência de alguns modelos GARCH(1,1) e  
AR(1)-VE estacionário

Modelo	$\alpha$	$\beta$	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\gamma$	$\sigma_{\eta}^2$	$q$
1	0,15	0,80	0,300	0,285	0,95	0,2500	0,0500
2	0,10	0,80	0,140	0,126	0,90	0,3000	0,0600
3	0,10	0,87	0,226	0,219	0,97	0,0552	0,0110
4	0,05	0,94	0,155	0,153	0,99	0,0092	0,0019
5	0,18	0,80	0,540	0,529	0,98	n.e.	n.e.
6	0,14	0,85	0,562	0,556	0,99	n.e.	n.e.

n.e. = não existe equivalência.

Da análise da tabela 4, pode-se observar que não existe equivalência com o AR(1)-VE para o quinto e sexto modelos, pois os parâmetros do GARCH(1,1) não satisfazem a restrição  $\rho(2) > 3\rho^2(1)$ . Comparando-se os modelos 1, 2 e 3 nota-se que o tamanho de  $\alpha$  é determinante na equivalência dos modelos. Na figura 6 é apresentada a região de equivalência para o modelo AR(1)-VE e GARCH(1,1) para valores de persistências maiores que 0,90.

Figura 6  
Região de equivalência dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE  
estacionário sob persistência maior do que 0,90





## 4.2 Comparação das estimativas de volatilidade e previsão um-passo à frente

Na simulação do PGD são escolhidos valores para os parâmetros dentro de um conjunto que ocorrem com frequência na literatura empírica. Assim, nos modelos ARCH muito frequentemente a persistência é maior do que 0,90 (Taylor, 1986), com valores de  $\beta$  maiores que 0,80. Por sua vez, nos modelos AR(1)-VE, os valores de  $\gamma$  são usualmente maiores do que 0,90 e os valores de  $\sigma_\eta^2$  estão entre 0,01 e 2,77 (ver Taylor, 1986 e 1994; Jacquier et alii, 1994). Na tabela 6 são apresentadas as três especificações escolhidas para os modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE equivalentes.

Tabela 5  
Modelos utilizados nas simulações

Modelo	$P$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa^a$	$\gamma$	$\sigma_\eta^2$	$\sigma_h^2$	$q$
Mod. I	0,95	$10^{-6}$	0,15	0,80	5,547	0,95	0,25008	2,56495	0,05073
Mod. II	0,97	$10^{-6}$	0,10	0,87	20,900	0,97	0,05522	0,93443	0,01100
Mod. III	0,99	$10^{-6}$	0,05	0,94	79,300	0,99	0,00923	0,46363	0,00187

<sup>a</sup>Valores multiplicados por  $10^6$ .

Nota:  $P$  é o valor da persistência.

No modelo I os parâmetros do GARCH(1,1) são similares às estimativas da Telebrás (ver Herencia et alii, 1995). Por sua vez, no modelo II os parâmetros do AR(1)-VE são similares aos valores utilizados nas simulações realizadas por Ruiz (1994), nas quais  $\gamma = 0,97$  e  $\sigma_\eta^2 = 0,04$ . Finalmente, no modelo III os parâmetros exibem valores similares aos encontrados em Harvey & Shephard (1993b) iguais a  $\gamma = 0,975$  e  $\sigma_\eta^2 = 0,01$ .

As observações simuladas foram obtidas utilizando-se um programa desenvolvido na linguagem do Procedimento IML do pacote estatístico SAS 6.0. Para cada um dos modelos da tabela 4 são realizadas duas simulações, uma considerando-se como PGD verdadeiro o GARCH(1,1) e outra considerando-se o AR(1)-VE. Na geração das séries foram inicialmente geradas 3.100 observações, utilizando-se a variância não-condicional como condição inicial e desconsiderando-se as primeiras 100 observações. Na tabela 6, apresentam-se os nomes dados para cada uma das simulações.

Tabela 6  
Simulações realizadas

Modelo	Persistência	Gerador	Nome
Mod. I	0,95	GARCH(1,1)	Sim 1
		AR(1)-VE	Sim 1a
Mod. II	0,97	GARCH(1,1)	Sim 2
		AR(1)-VE	Sim 2a
Mod. III	0,99	GARCH(1,1)	Sim 3
		AR(1)-VE	Sim 3a

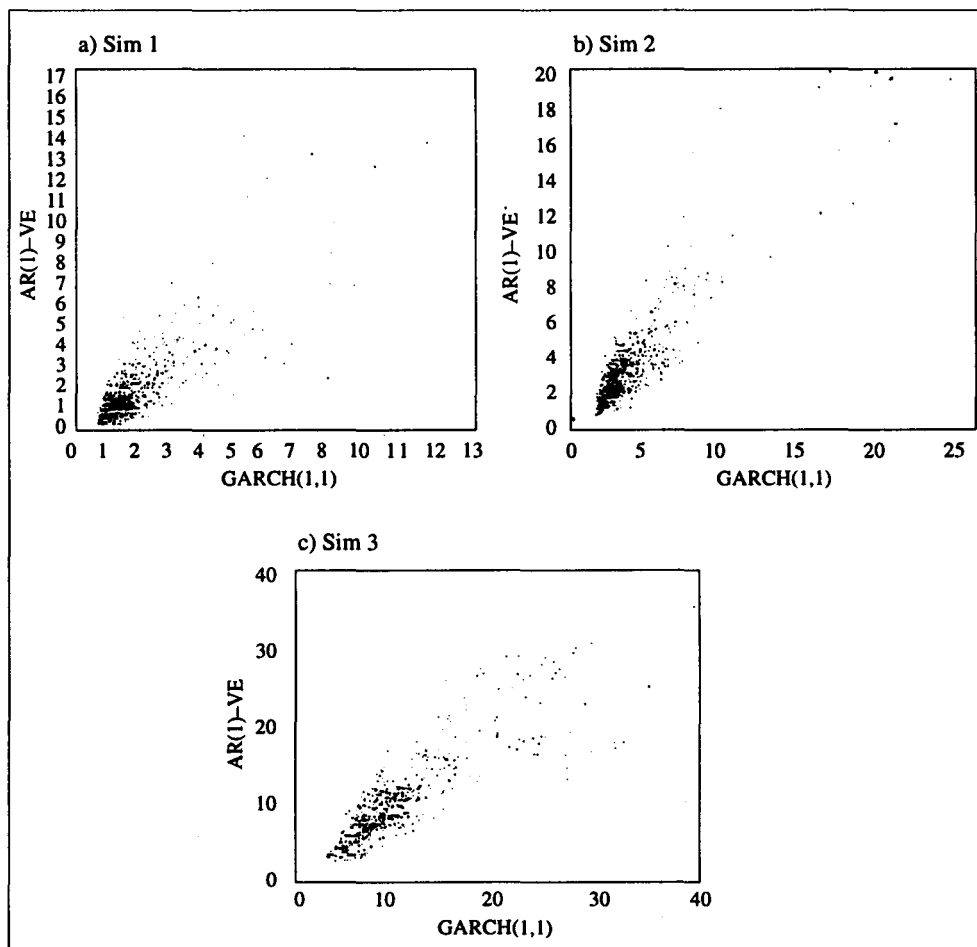
A seguir, apresentam-se os resultados para os dois casos considerados; quando simulamos o modelo GARCH(1,1) e quando simulamos o AR(1)-VE. Em cada um deles, a volatilidade verdadeira gerada pelo modelo é nomeada simplesmente de volatilidade, enquanto a volatilidade estimada a partir das observações geradas por  $\{Y_t\}$  será chamada de volatilidade estimada.

### O processo gerador é GARCH(1,1)

Neste caso, uma vez obtidos os parâmetros equivalentes do modelo AR(1)-VE, calculamos as volatilidades filtrada e suavizada através do Filtro de Kalman. A volatilidade filtrada é utilizada para a previsão um-passo à frente, enquanto a suavizada é usada para a comparação com a volatilidade verdadeira.

Nas figuras 7a-c são comparados os valores das volatilidades e suas estimativas. Observa-se que a volatilidade estimada subestima ou superestima a volatilidade GARCH(1,1) de maneira considerável. Para se ter uma idéia da superestimação, calculou-se a percentagem de pontos alocados acima da reta de 450 levando-se em consideração os níveis da volatilidade. Temos então:

Figura 7  
 Comparação das volatilidades geradas GARCH(1,1) e estimadas AR(1)-VE



Nota: volatilidades ( $\times 10^5$ ).

Tabela 7  
 Modelo simulado GARCH(1,1):  
 percentagem de superestimação da volatilidade

	Baixo	Médio	Alto	Total
Sim 1	39*	42,4*	50,9	44,10
Sim 2	48,2	55,7*	50,8	51,57
Sim 3	48,8	50,2	51,2	50,07

\*Rejeita hipótese de probabilidade 50% com nível de significância igual a 0,5%, mas considerando independência.

A partir dos resultados e tabela, pode-se concluir que, praticamente, ambos os modelos, Sim 3 e Sim 2, subestimam e superestimam a volatilidade. Deve-se notar, entretanto, que para valores baixos da volatilidade o modelo Sim 1 tende a superestimar a volatilidade.

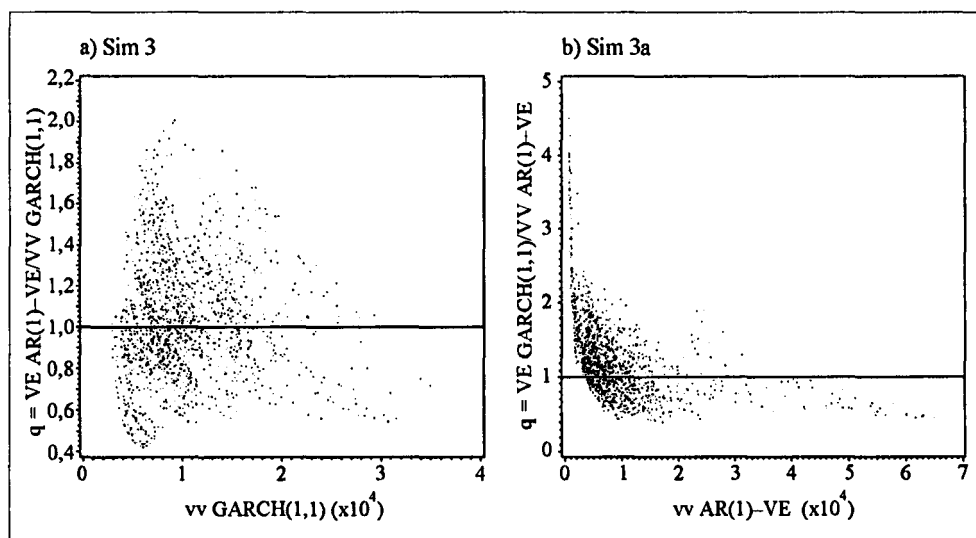
Para medir a magnitude da subestimação ou superestimação, utilizou-se o mesmo procedimento da seção anterior: calculou-se a percentagem dos retornos cuja estimativa da volatilidade AR(1)-VE é diferente em 20 e 45% da volatilidade verdadeira GARCH(1,1). Os resultados registrados na tabela 8 mostram que numa grande percentagem dos retornos, a subestimação e a superestimação são consideráveis, diminuindo essas percentagens à medida que a persistência aumenta, i.e., à medida que os modelos são mais próximos em dinâmica. Por sua vez, de maneira geral, as percentagens de superestimação e subestimação são similares. Para ilustrar a grande diferença observada nas volatilidades verdadeira e estimada apresentamos na figura 8a o gráfico da variável  $q$ , definida com o quociente entre a volatilidade estimada e verdadeira no caso Sim 3. Embora não apresentado, o mesmo padrão é obtido para Sim 1 e Sim 2.

Tabela 8

Magnitude da subestimação e superestimação da volatilidade estimada (vs) AR(1)-VE com respeito à volatilidade verdadeira (vg) GARCH(1,1) (%)

	Diferença vs>1,2vg	maior que vs<0,8vg	20% Total	Diferença vs>1,45vg	maior que vs<0,55vg	45% Total
Sim 1	31,24	38,13	69,37	18,67	16,80	35,47
Sim 2	32,23	26,87	59,10	14,06	4,07	18,13
Sim 3	26,20	19,67	45,97	8,87	3,16	12,03

**Figura 8**  
**Comparação das volatilidades geradas e estimadas quando existem**  
**modelos equivalentes**



Notas: VV = volatilidade verdadeira, VE = volatilidade estimada.

Com relação à previsão um-passo à frente, calcula-se a percentagem dos retornos fora dos i.c. construídos a partir da previsão da volatilidade filtrada, considerando-se os níveis de volatilidade. Diferentemente do realizado para a série de Telebrás, aqui os parâmetros dos modelos são conhecidos e não há necessidade de estimar os parâmetros a cada 50 observações. Nesse caso a volatilidade filtrada é atualizada para cada retorno e a previsão é dada pelo Filtro de Kalman. Na tabela 9 apresentam-se os resultados e podemos constatar (ao observar a última linha) que para Sim 1 a percentagem dos retornos fora dos i.c. construídos com a volatilidade estimada é muito maior do que quando os i.c. são construídos usando a volatilidade verdadeira. Essa diferença de percentagem diminui à medida que a persistência aumenta, sendo bastante próxima para Sim 3. Considerando-se os níveis de volatilidade, em Sim 1, os i.c. estimados excluem uma percentagem muito maior do que a esperada, enquanto a diferença de percentagem observada e esperada é menor nas três simulações quando a volatilidade é média.

Tabela 9

Modelo simulado GARCH(1,1): percentagem de retornos fora do i.c. 95%

Nível de volatilidade	Sim persistência=	1 0,95	Sim persistência=	2 0,97	Sim persistência=	3 0,99
Baixo	12,40	3,5 <sup>a</sup>	6,30	5,2	6,7	6,20
Médio	8,20	4,70	5,70	4,9	5,2	4,90
Alto	8,30	5,30	6,50	4,6	5,5	5,00
Total (%)	9,63	4,47	6,17	4,9	5,8	5,37

<sup>a</sup>Corresponde à percentagem observada com os i.c. construídos com a volatilidade verdadeira GARCH(1,1).

Uma das causas da diferença entre a percentagem estimada e a observada é a influência das observações muito pequenas nos quadrados dos retornos. Para ilustrar isto apresentam-se na tabela a seguir os valores da volatilidade e a previsão para alguns instantes de Sim 1.

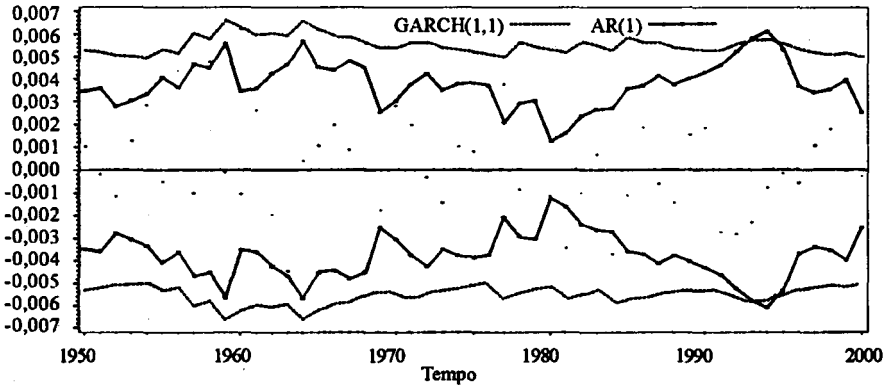
Tabela 10

Modelo simulado GARCH(1,1): efeito das observações muito pequenas nos quadrados dos retornos

Tempo	$Y_t^2$	Volatilidade ( $\times 10^5$ )	Previsão ( $\times 10^5$ )
1978	$7,0 \times 10^{-7}$	0,8243	0,2233
1979	$8,2 \times 10^{-12}$	0,7706	0,2403
1980	$1,3 \times 10^{-6}$	0,7165	0,0401
1981	$1,2 \times 10^{-5}$	0,6932	0,0690

Os resultados da tabela mostram que o efeito do retorno  $T = 1979$  na previsão da volatilidade em  $T = 1980$  é bastante grande, produzindo uma subestimação considerável da volatilidade. Esse efeito, como será explicado a seguir, permanece nas previsões seguintes. Como produto da subestimação, os i.c. construídos apresentam largura muito menor do que o verdadeiro e, como pode ser observado na figura 9, esses i.c. estimados não conseguem incluir os retornos em  $T = 1981$  e 1984.

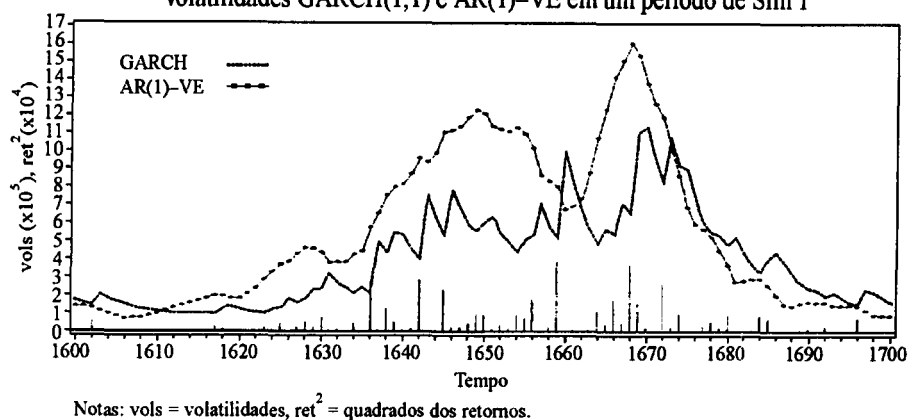
Figura 9  
i.c. 95% para os retornos em um período de Sim 1



Considerando que no instante  $T = t$ , tanto a volatilidade quanto a previsão um-passo à frente dependem do mesmo conjunto de informação:  $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1\}$  é simples explicar a diferença de comportamento observada antes da presença de observações muito pequenas. Com efeito, numa situação de alta persistência (no caso igual a 0,95) e  $\beta$  grande (igual a 0,80), a contribuição de um retorno pequeno (em valor absoluto),  $Y_{t-1}$ , na volatilidade GARCH(1,1) no instante  $t$ :  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$  é menor quando comparada com a contribuição de  $\sigma_{t-1}^2$ . Por sua vez, para o modelo AR(1)-VE estacionário, temos que a previsão um-passo à frente é dada por:  $\hat{\sigma}_{t/t-1}^2 = \kappa \exp[m_{t/t-1}]$  onde  $m_{t/t-1} = [\gamma(1 - P_{t-1})]m_{t-1/t-2} + \gamma P_{t-1}X_{t-1}$  e o preditor do vetor de estado no Filtro de Kalman,  $P_{t-1}$ , é a matriz de variância-covariância da atualização do vetor de estado no Filtro de Kalman e  $X_t = \log(Y_t^2) + 1,27 - \log(\kappa)$ . Neste caso, já que o efeito de  $Y_t^2$  é multiplicativo, uma quantidade muito pequena nos quadrados produz um decrescimento grande na previsão.

As observações com quadrado dos retornos muito grandes também produzem grande efeito na previsão um-passo à frente. Assim, quando no instante  $T = t - 1$  a volatilidade e a volatilidade estimada apresentam valores próximos, uma observação muito grande de  $Y_t^2$  no instante  $T = t$  faz explodir a volatilidade, enquanto a previsão pode subestimar a volatilidade. Na figura 10, ilustramos esse efeito.

Figura 10  
Volatilidades GARCH(1,1) e AR(1)-VE em um período de Sim 1



## O processo gerador é AR(1)-VE

Para as três simulações, uma vez geradas as observações  $Y_t$  e as volatilidades, calculamos as volatilidades estimadas a partir da relação  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ .

Os resultados da tabela 11 mostram que para uma proporção bastante grande das observações, a subestimação e a superestimação são consideráveis, sendo essas proporções menores à medida que a persistência aumenta. Claramente, existe uma frequência maior de superestimação, diferentemente do que acontece na tabela 8, onde a superestimação é similar à subestimação. Na figura 8b, correspondente a Sim 3a, podemos constatar as grandes diferenças encontradas entre a volatilidade estimada e a verdadeira, utilizando como medida o quociente  $q$ .

Tabela 11

Magnitude da subestimação e superestimação da volatilidade (vg)  
GARCH(1,1), com respeito à volatilidade verdadeira (vg) AR(1)-VE  
(%)

	Diferença vg > 1,2vs	maior que vg < 0,8vs	20% Total	Diferença vg > 1,45vs	maior que vg < 0,55vs	45% Total
Sim 1a	71,80	16,70	88,50	65,37	9,10	74,47
Sim 2a	51,83	20,37	72,20	37,30	6,47	43,77
Sim 3a	44,93	18,87	63,80	27,47	3,40	30,87



Com relação à previsão um-passo à frente, na tabela 12, apresentamos os resultados da percentagem dos retornos fora dos i.c. 95%. Os dados dessa tabela mostram que, considerando toda a informação (% total), a percentagem dos retornos fora dos i.c. estimados é próxima à percentagem esperada, mas, ao considerar os níveis de volatilidade, essas percentagens apresentam em alguns casos diferenças importantes. Assim, de maneira geral, quando a volatilidade verdadeira é baixa, a percentagem dos retornos fora dos i.c. é menor do que a esperada (i.e., existe superestimação da volatilidade), enquanto, quando a volatilidade é alta, as percentagens observadas e esperadas são próximas.

Tabela 12

Modelo simulado AR(1)-VE: percentagem de retornos fora do i.c. 95%

Nível de volatilidade	Sim	1a	Sim	2a	Sim	3a
Baixo	1,50	4,7 <sup>a</sup>	4,8	5,20	2,70	3,30
Médio	3,70	4,40	7,4	5,40	5,40	5,90
Alto	6,90	4,60	5,5	5,10	4,40	4,40
Total (%)	4,02	4,57	5,9	5,23	4,17	4,53

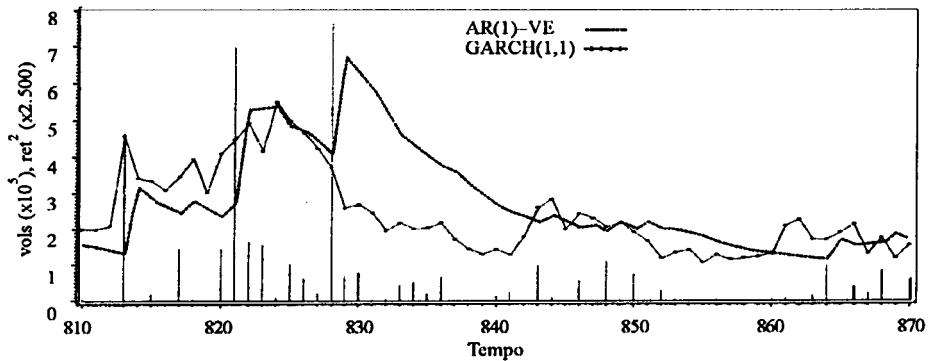
<sup>a</sup>Corresponde à percentagem observada com os i.c. construídos com a volatilidade verdadeira AR(1)-VE.

A diferença para o caso anterior, quando o PGD era GARCH(1,1), é que os valores da volatilidade e da previsão um-passo à frente (igual à volatilidade) dependem de informações diferentes. Com efeito, a volatilidade AR(1)-VE é um processo que evolui independentemente dos retornos passados e depende dos choques  $\eta_t$  segundo a equação de evolução da volatilidade, i.e.,  $h_t^2 = \gamma h_{t-1}^2 + \eta_t$ , sendo que os retornos são definidos a partir da volatilidade e dos choques  $\varepsilon_t$  através de  $Y_t = \sigma \exp(h_t/2) \varepsilon_t$ . Por sua vez, a previsão um-passo à frente (ou a volatilidade estimada) depende do valor da volatilidade e dos retornos no instante anterior. Portanto, a volatilidade no instante  $T = t$  depende da informação  $\{h_{t-1}, \eta_t, h_{t-2}, \eta_{t-1}, \dots\}$  enquanto a previsão um-passo à frente (ou volatilidade estimada) depende da informação  $\{\sigma_{t-1}^2, Y_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, Y_{t-2}^2, \dots\}$ .

A utilização de informações diferentes levam a reações diferentes diante de observações extremas (tanto grandes quanto pequenas), que por sua vez produzem grandes diferenças entre a volatilidade e a previsão um-passo à frente (ou volatilidade estimada). Para ilustrar isto apresentamos a seguir

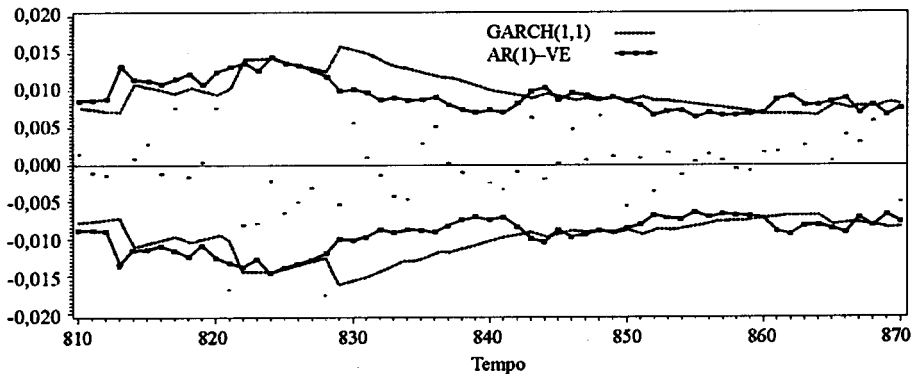
duas situações de Sim 2a. Na figura 11 é observado que em  $T = 828$  temos uma observação muito grande como produto de um choque  $\varepsilon_t$  igual a -2,88. O valor muito grande dos quadrados dos retornos faz com que o valor da previsão GARCH(1,1) aumente de forma abrupta, os efeitos do retorno em  $T = 828$  permanecem significativos por vários instantes de tempo. Como resultado da superestimação da volatilidade após a ocorrência da observação extrema, os i.c. estimados são muito maiores do que os verdadeiros, mas, ambos os i.c. incluem o mesmo número de retornos até  $T = 845$  (instante no qual a volatilidade e a volatilidade estimada são próximas). Por sua vez, em  $T = 862$  (figura 11) ocorre uma observação muito pequena nos quadrados dos retornos que produz a diminuição da volatilidade e, em menor medida, a diminuição da volatilidade (previsão) estimada no instante seguinte. Neste caso, observa-se uma subestimação da volatilidade. Na figura 12 podemos observar que em  $T = 864$  os i.c. estimados não conseguem incluir o retorno observado.

Figura 11  
Volatilidades GARCH(1,1) e AR(1)-VE em um período de Sim 2a



Nota: vols = volatilidades,  $\text{ret}^2$  = quadrados dos retornos.

Figura 12  
i.c. 95% para os retornos em um período de Sim 2a



### 4.3 Comparação dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE estacionário quando não existem modelos equivalentes

Com o objetivo de ilustrar a comparação dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE quando não existe equivalência na f.a.c. da série dos quadrados dos retornos, são realizadas quatro simulações. Primeiro são simulados dois processos GARCH(1,1) e estimados os parâmetros e a volatilidade AR(1)-VE, depois simulamos o AR(1)-VE e estimamos os parâmetros e a volatilidade GARCH(1,1).

#### Simulando GARCH(1,1)

Na tabela 13 são apresentados os modelos gerados e as estimativas dos parâmetros correspondentes. Para os dois ajustes do modelo AR(1)-VE temos convergência muito forte, e na análise de adequabilidade o modelo é satisfatório. Como realizado na seção 4.2, para a previsão um-passo à frente utilizamos a volatilidade filtrada e para a comparação com a volatilidade verdadeira utilizamos a volatilidade suavizada.

Tabela 13

Parâmetros do modelo simulado GARCH(1,1) e estimativas do modelo AR(1)-VE no caso em que não existe equivalência

	P.A. <sup>a</sup>	GARCH(1,1)				AR(1)-VE <sup>b</sup>			
		$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}_\eta^2$	$\hat{q}$
Sim 4	0,1793	$10^{-6}$	0,15	0,60	0,75	$3,5 \times 10^{-6}$	0,8548	0,1028	0,0215
Sim 5	0,1189	$10^{-6}$	0,10	0,70	0,80	$4,9 \times 10^{-6}$	0,8212	0,0990	0,0213

<sup>a</sup>P.A. corresponde a primeira autocorrelação. <sup>b</sup>O modelo foi estimado sem a restrição  $\sigma_\zeta^2 = 4,93$  e as estimativas são muito próximas deste valor.

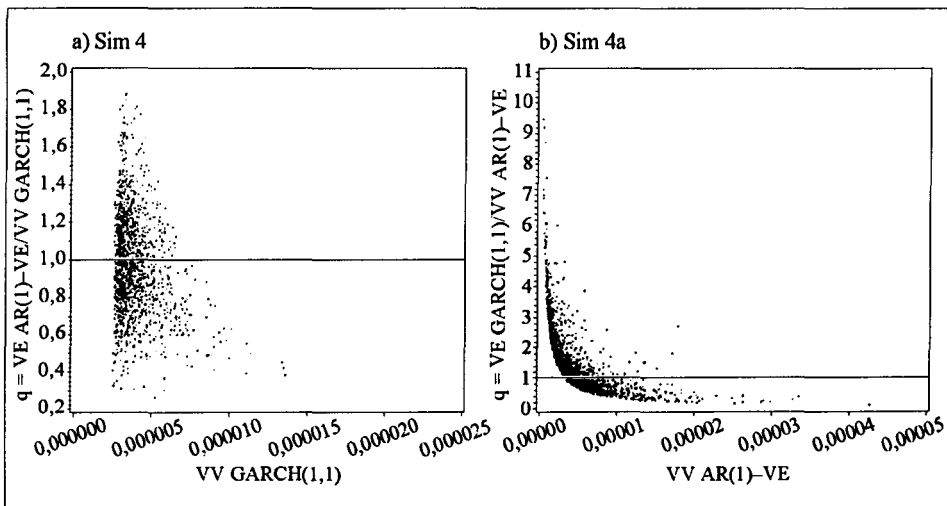
Os resultados da tabela 14 mostram que para uma proporção bastante grande de observações a diferença entre a volatilidade verdadeira e a estimada é considerável, sendo que as percentagens de subestimação e superestimação são similares. Ao comparar esses dados com os resultados da tabela 8, vemos que neste caso a frequência de subestimação e superestimação é menor. Para Sim 4, é apresentado na figura 13a o gráfico de  $q$ . Comparando esse gráfico com a figura 8a, observamos que os padrões exibidos pelos pontos são semelhantes.

Tabela 14

Magnitude da subestimação e superestimação da volatilidade estimada (vs) AR(1)-VE com respeito à volatilidade verdadeira (vg) GARCH(1,1) no caso de modelos não equivalentes

	Diferença vs>1,2vg	maior que vs<0,8vg	20% Total	Diferença vs>1,45vg	maior que vs<0,55vg	45% Total
Sim 4	19,17	25,10	44,27	4,57	4,76	9,33
Sim 5	23,67	17,00	40,67	4,00	1,47	5,47

Figura 13  
Comparação das volatilidades geradas e estimadas quando não existem modelos equivalentes



Notas: VV = volatilidade verdadeira, VE = volatilidade estimada.

Com relação à previsão um-passo à frente, os resultados estão registrados na tabela 15. Esses dados mostram que para Sim 5 (maior persistência) os resultados são melhores quando comparados com Sim 4, no sentido de que a percentagem das observações fora dos i.e. é mais próxima da observada (e esperada). Analisando por níveis, obtemos os piores resultados nos níveis de volatilidade alta.

Tabela 15  
 Percentagem de retornos fora dos i.c. 95% se o modelo simulado é  
 GARCH(1,1) e não existe equivalência

Nível de volatilidade	Sim	4	Sim	5
Baixo	3,60	3,50 <sup>a</sup>	3,90	5,50
Médio	4,40	4,00	4,00	4,10
Aalto	10,10	5,80	7,70	5,80
Total (%)	6,03	4,43	5,20	5,13

<sup>a</sup>Corresponde à percentagem observada com os i.c. construídos com a volatilidade verdadeira GARCH(1,1).

Os resultados obtidos na estimação da volatilidade mostram que as percentagens de subestimação e superestimação (diferenças em 20 e 45%) são menores quando comparadas com os resultados da tabela 8. Por sua vez, com relação à previsão um-passo à frente, temos que as percentagens totais da tabela 15 são similares às percentagens totais encontradas para Sim 2 e Sim 3. Isso indica que o modelo AR(1)-VE equivalente não necessariamente leva uma melhor *performance*.

## Simulando AR(1)-VE

Os modelos AR(1)-VE gerados e as estimativas do modelo GARCH(1,1) são mostrados na tabela 16.

Tabela 16  
 Modelos AR(1)-VE simulados e estimativas GARCH(1,1)  
 quando não existe equivalência

	P.A. <sup>b</sup>	AR(1)-VE <sup>a</sup>				GARCH(1,1)			
		$\kappa$	$\gamma$	$\sigma_{\eta}^2$	$q$	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\widehat{\alpha + \beta}$
Sim 4a	0,11517	$4 \times 10^{-6}$	0,75	0,1972	0,04	$1,3 \times 10^{-6}$ ( $3,3 \times 10^{-7}$ ) <sup>c</sup>	0,14918 (0,027)	0,5867 (0,080)	0,73
Sim 5a	0,11533	$4 \times 10^{-6}$	0,80	0,1479	0,03	$9,4 \times 10^{-7}$ ( $2,4 \times 10^{-7}$ )	0,1417 (0,068)	0,6670 (0,068)	0,80

<sup>a</sup>O modelo foi estimado sem a restrição  $\sigma_{\zeta}^2 = 4,93$  e as estimativas são muito próximas deste valor; <sup>b</sup>P.A. corresponde à primeira autocorrelação; <sup>c</sup>Desvio-padrão das estimativas.

Segundo os resultados da tabela 17, constatamos que a frequência de subestimação e superestimação é bastante grande. Considerando as diferenças de 20%, neste caso, as percentagens totais de superestimação e subestimação são similares às encontradas nos casos Sim 1a, Sim 2a, Sim 3a da seção 4.2, quando existem modelos equivalentes. Já ao considerar as diferenças de 45%, neste caso, as percentagens totais são inferiores às apresentadas quando existem modelos equivalentes. Na figura 13b ilustramos o que acontece para Sim 4a, sendo observado que o padrão das observações é similar ao padrão da figura 8b. Além disso, a variável  $q$  apresenta valores muito altos, em alguns casos indicando grande superestimação.

Tabela 17

Magnitude da subestimação e superestimação da volatilidade estimada (vg) GARCH(1,1) com respeito à volatilidade verdadeira (vs) AR(1)-VE quando não existe equivalência

	Diferença vg>1,2vs	maior que vg<0,8vs	20% Total	Diferença vg>1,45vs	maior que vg<0,55vs	45% Total
Sim 4a	49,87	26,26	76,13	37,97	9,76	47,73
Sim 5a	48,30	25,63	73,93	35,53	9,17	44,70

Quando à previsão um-passo à frente, os resultados da tabela 18 mostram que o desempenho dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE são similares ao considerar a percentagem dos retornos fora dos i.c. 95%. Mas, quando comparamos os resultados considerando os níveis da volatilidade, as diferenças entre essas abordagens são grandes, sendo que no nível alto a percentagem dos retornos fora do i.c. é muito maior que a esperada.

Tabela 18

Percentagem de retornos fora do i.c. 95% quando o modelo simulado é AR(1)-VE e não existe equivalência

Nível de volatilidade	Sim	4a	Sim	5a
Baixo	0,9	4,8 <sup>a</sup>	4,1	4,5
Médio	4,1	4,3	1,0	4,7
Alto	12,4	4,7	11,7	4,6
Total (%)	5,8	4,6	5,6	4,6

<sup>a</sup>Corresponde à percentagem observada com os i.c. construídos com a volatilidade verdadeira AR(1)-VE.

Finalmente, ao observar as percentagens totais da tabela 18 e da tabela 12 podemos dizer que os resultados são comparáveis, mas, ao considerar os níveis da volatilidade, não.

## 5. Conclusões

As volatilidades estimadas, assim como as previsões um-passo à frente fornecidas pelas abordagens ARCH e VE, foram comparadas sob dois aspectos, empiricamente mediante o ajuste da série de Telebrás e através de simulações. A seguir apresentamos as principais conclusões:

Ajuste da série de Telebrás:

- Na comparação das volatilidades estimadas encontramos que para uma proporção grande de retornos as diferenças entre as volatilidades estimadas ARCH e VE são consideráveis, sendo que, na maioria das vezes, a volatilidade estimada ARCH é maior que a volatilidade estimada pelo AR(1)-VE estacionário.
- Com relação à previsão um-passo à frente e utilizando o critério dos retornos observados, encontramos que o desempenho dos modelos ARCH e VE são similares. Dado ao exposto anteriormente, principalmente em períodos posteriores à ocorrência de observações extremas nos quadrados dos retornos, o modelo AR(1)-VE é mais adequado.
- A persistência estimada pelo modelo GARCH(1,1) é muito maior à apresentada pelo modelo AR(1)-VE estacionário.

Simulações quando existem modelos equivalentes:

- Os resultados das simulações evidenciam que, quando o modelo simulado é GARCH(1,1), para uma grande proporção dos retornos a volatilidade estimada pelo modelo AR(1)-VE estacionário superestima ou subestima a volatilidade GARCH(1,1) consideravelmente. Por sua vez, quando simulamos o modelo AR(1)-VE encontramos que também há superestimação e subestimação consideráveis para um grande número dos retornos, sendo que, nesse caso, a superestimação é mais freqüente quando comparada com o caso em que geramos o GARCH(1,1). Quando o modelo é GARCH(1,1), o ajuste do modelo AR(1)-VE superestima ( $vs > 1,2vg$ ) com menos freqüência do que quando o modelo é AR(1)-VE e a volatilidade é estimada

através do modelo GARCH(1,1). Em relação à frequência de subestimação, quando consideramos a frequência em que existe subestimação, ocorre o contrário.

- Quanto à previsão um-passo à frente, observa-se que, se o modelo simulado é GARCH(1,1), os desempenhos dos modelos AR(1)-VE e GARCH(1,1) não são diferentes (em termos da percentagem de retornos observada dentro dos i.c.), desde que a persistência seja maior ou igual a 0,97. Quando a persistência é igual a 0,95, devido à subestimação comentada anteriormente, a frequência de valores de retornos fora dos i.c. construídos através do modelo AR(1)-VE é maior. Por sua vez, quando o modelo simulado é AR(1)-VE, o desempenho desse modelo é similar ao apresentado pelo GARCH(1,1).

Do exposto acima não podemos concluir se um modelo é superior ao outro. Simulações quando não existem modelos equivalentes:

- Ao simular o modelo GARCH(1,1) observamos que a volatilidade estimada pelo modelo AR(1)-VE superestima e subestima a verdadeira volatilidade para uma grande proporção dos retornos, sendo que essas percentagens são menores às obtidas quando existem modelos equivalentes (comparando os modelos com igual persistência). Essa mesma situação acontece quando o modelo simulado é AR(1)-VE.
- Tanto ao simular GARCH(1,1) como quando simulamos AR(1)-VE, observamos que para uma quantidade bastante grande de retornos existe superestimação e subestimação de forma considerável. A superestimação é mais freqüente quando o modelo simulado é o GARCH(1,1) e ajustado o AR(1)-VE do que quando o modelo simulado é AR(1)-VE. Em relação à subestimação, as freqüências observadas ao simular o GARCH(1,1) são similares às encontradas ao simular AR(1)-VE.
- Quando o modelo GARCH(1,1) é simulado, as percentagens observadas de superestimação e subestimação são menores do que quando existe modelo equivalente AR(1)-VE. Esta aparente contradição pode ser explicada pelo fato de que, no caso de não existir modelos equivalentes, os parâmetros são estimados, ou seja, é escolhido o valor do parâmetro de forma que seja escolhido o modelo AR(1)-VE que melhor se ajuste aos dados.
- Na previsão um-passo à frente, ao simular o GARCH(1,1) encontramos que os desempenhos dos modelos GARCH(1,1) e AR(1)-VE são similares (em



termos da percentagem de retornos observada dentro dos i.c.). O mesmo ocorre quando o modelo gerado é AR(1)-VE e estimamos o GARCH(1,1). Esses desempenhos são similares aos encontrados no caso quando há equivalência entre os modelos.

- Resumindo, neste caso existe uma leve superioridade do modelo GARCH(1,1) dada a maior frequência de superestimação no ajuste de modelos AR(1)-VE quando o modelo verdadeiro é GARCH(1,1).

## Referências Bibliográficas

Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307-27, 1986.

Cao, C. Q. & Tsay, R. S. Nonlinear time-series analysis of stock volatilities. In: Pesaran, M. H. & Potter, M. (eds.). *Nonlinear dynamics, chaos and econometrics*. New York, John Wiley & Sons, 1993.

Foster, D. & Nelson, D. B. Continuous record asymptotics for rolling sample variance estimators. *Econometrica*, 64:139-74, 1996.

Harvey, A. C. & Shephard, N. Estimation and testing of stochastic variance models. LSE Statistical Dept., Sticerd, 1993. (Discussion Paper, EM/93/268.)

Herencia, M. Z.; Hotta, L. K.; Valls Pereira, P. L.; Ferreira, J. & Mecchi, M. Volatilidade nos retornos de Telebrás: uma comparação entre abordagem ARCH em modelo de volatilidade estocástica. Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria. 1:587-621, 1995.

\_\_\_\_\_. Volatilidade nos modelos ARCH e variância estocástica: um estudo comparativo. Imecc/Unicamp, 1997. (Dissertação de Mestrado.)

Jacquier, E.; Polson, N. G. & Rossi, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economics Statistics*, 12:371-417, 1994.

Nelson, D. B. & Foster, D. P. Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models. *Econometrica*, 62:1-41, 1994.

Pagan, A. & Schwert, G. W. Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 45:267-90, 1990.

Ruiz, E. Quase maximum likelihood estimation of stochastic variance models. *Journal of Econometrics*, 63:284-306, 1994.

Taylor, S. J. *Modelling financial time series*. Chichester, John Wiley, 1986.

\_\_\_\_\_. Modelling stochastic volatility: review and comparative study. *Mathematical Finance*, 4:183-204, 1994.

## Apêndice

Neste apêndice apresentam-se os modelos estimados para Telebrás-PN para o período de 2 de janeiro de 1989 até 17 de julho de 1995, deflacionados pela taxa de câmbio R\$/US\$. A média condicional para todos os modelos é dada pela seguinte especificação:

$$y_t = E(y_t | I_{t-1}) + y^*_t$$

onde

$$E(y_t | I_{t-1}) = py_{t-1} + \sum_{i=1}^5 \delta_i D_{it}$$

$D_{it}$   $i = 1, \dots, 5$  são variáveis *dummies* para os dias da semana,  $y^*_t = \varepsilon_t \sigma_t$  e  $\varepsilon_t \sim NI(0, 1)$ .

Para a variância condicional, duas classes de modelos foram usadas, o XARCH e AR(1)-VE. Para a classe XARCH foram considerados dois modelos: GARCH e EGARCH. A especificação do modelo GARCH( $p, q$ ) é dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j y_{t-j}^2$$

e a especificação do modelo EGARCH( $p, q$ ) é dada por:

$$\ln \sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \Delta_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q+1} \Psi_j g(\varepsilon_{t-j})$$

onde

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + |\varepsilon_t| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

A especificação do AR(1)-VE é dada por:

$$\begin{aligned} y_t^* &= \varepsilon_t \sigma_t \\ h_t &= \gamma_1 h_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

onde  $h_t = \ln(\sigma_t^2)$  e  $\eta_t \sim NI(0, \sigma_\eta^2)$ . A equação de observação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$X_t = \ln(y_t^{*2}) = \ln \sigma_t^2 + \ln \varepsilon_t^2 = \bar{\kappa} + h_t + \xi_t$$

onde  $\xi_t = \ln \varepsilon_t^2 + 1,27$ , que tem média zero e variância igual a  $\frac{\pi^2}{2}$ . Em alguns modelos os efeitos fim de semana e feriados podem afetar a variância condicional, e neste caso a equação de observação será dada por:

$$X_t = \ln(y_t^{*2}) = \ln \sigma_t^2 + \ln \varepsilon_t^2 = \bar{\kappa} + h_t + \omega D_{st} + f D_{ft} + \xi_t$$

onde  $D_{st}$  é a variável *dummy* para fim de semana e  $D_{ft}$  é a variável *dummy* para feriado.

Os parâmetros estimados para o melhor, usando o critério B.I.C., modelo na classe XARCH, são dados a seguir.

	Variância constante	EGARCH(2,0)	EGARCH(2,2)
$\rho$	0,0865 <sup>a</sup>	0,0022	0,0530
	0,0249 <sup>b</sup>	0,0284	0,0259
	0,0005 <sup>c</sup>	0,9375	0,5548
Segunda	-0,0077	-0,0052	-0,0062
	0,0034	0,0027	0,0026
	0,0235	0,0583	0,0165
Terça	0,0049	0,0046	0,0053
	0,0034	0,0027	0,0026
	0,1494	0,0876	0,0381
Quarta	-0,0033	0,0058	0,0058
	0,0034	0,0027	0,0024
	0,3304	0,0318	0,0155
Quinta	0,0051	0,0032	0,0027
	0,0034	0,0027	0,0025
	0,1298	0,2327	0,2656
Sexta	0,0013	0,0020	0,0027
	0,0034	0,0025	0,0024
	0,7007	0,4411	0,2574
$\kappa$		-0,3104	-0,5137
		0,0839	0,1304
		0,0008	0,0001
$\Delta_1$		0,2804	0,4031
		0,0406	0,0959
		0,0001	0,0001
$\Delta_2$		0,6635	0,5056
		0,0421	0,0950
		0,0001	0,0001
$\Psi_1$		0,4102	0,2572
		0,0380	0,0453
		0,0001	0,0001
$\Psi_2$			0,0030
			0,0579
			0,9591
$\Psi_3$			0,2614
			0,0571
			0,0001
$\theta$		-0,0993	-0,1521
		0,0596	0,0562
		0,0959	0,0068
A.I.C.	-4427,57	-4779,11	-4790,45
B.I.C.	-4395,31	-4719,97	-4720,56

<sup>a</sup> Estimativa dos parâmetros; <sup>b</sup> Desvio-padrão; <sup>c</sup> Valor descritivo (*p-value*).

	GARCH(1,1)	GARCH(1,2)	GARCH(2,1)
$\rho$	-0,0282 <sup>a</sup>	0,0327	0,0165
	0,0279 <sup>b</sup>	0,0278	0,0278
	0,3117 <sup>c</sup>	0,2395	0,5530
Segunda	-0,0059	-0,0062	-0,0048
	0,0025	0,0026	0,0026
	0,0189	0,0183	0,0609
Terça	0,0066	0,0070	0,0055
	0,0029	0,0026	0,0026
	0,0217	0,0074	0,0322
Quarta	0,0050	0,0048	0,0052
	0,0026	0,0026	0,0025
	0,0542	0,0664	0,0424
Quinta	0,0022	0,0019	0,0028
	0,0026	0,0028	0,0026
	0,3901	0,4981	0,2800
Sexta	0,0034	0,0040	0,0024
	0,0027	0,0026	0,0027
	0,2091	0,1253	0,3896
$\omega$	0,0001	0,0001	0,0002
	0,00003	0,00003	0,00004
	0,0004	0,0004	0,0002
$\alpha_1$	0,1872	0,1324	0,2574
	0,0230	0,0332	0,0285
	0,0001	0,0001	0,00014
$\alpha_2$		0,0921	
		0,0452	
		0,0691	
$\beta_1$	0,8095	0,7836	0,2148
	0,0202	0,0269	0,0808
	0,0001	0,0001	0,0078
$\beta_2$			0,5152
			0,0737
			0,0001
A.I.C.	-4771,34	-4772,47	-4770,92
B.I.C.	-4722,95	-4718,17	-4717,15

	GARCH(1,1)	GARCH(1,2)	GARCH(2,1)
	-0,0282 <sup>a</sup>	0,0327	0,0165
	0,0279 <sup>b</sup>	0,0278	0,0278
	0,3117 <sup>c</sup>	0,2395	0,5530

<sup>a</sup>Estimativa dos parâmetros; <sup>b</sup>Desvio-padrão; <sup>c</sup>Valor descritivo (*p-value*).

Usando o critério B.I.C. os melhores modelos são GARCH(1,1) e EGARCH(2,2). As estimativas dos parâmetros para o modelo AR(1)-VE são dadas a seguir.

	Modelo I <sup>a</sup>	Modelo II <sup>b</sup>	Modelo III <sup>c</sup>	Modelo IV <sup>d</sup>
p.e.v. <sup>e</sup>	5,3764	5,3840	5,3800	5,3882
$\omega$	0,1468	0,1585		
	(0,3000) <sup>f</sup>	(0,2600)		
$f$	0,4305		0,4468	
	(0,1300)		(0,1200)	
$\sigma_{\xi}^2$	5,0284	5,0326	5,0291	5,0341
$\sigma_{\eta}^2$	0,0463	0,0463	0,0462	0,0461
$\gamma_1$	0,9656	0,9656	0,9657	0,9656
A.I.C.	1,6883	1,6884	1,6877	1,6880
B.I.C.	1,7051	1,7019	1,7012	1,6981

<sup>a</sup>Com *dummies* fim de semana e feriados; <sup>b</sup>Com somente *dummies* fim de semana; <sup>c</sup>Com somente *dummies* feriados; <sup>d</sup>Sem *dummies*; <sup>e</sup>Variância do erro de previsão; <sup>f</sup>Desvio-padrão.

Usando o critério B.I.C. o melhor modelo é IV, sem efeitos de fim de semana e feriados.