Custos de Transação em Investimentos Coletivos*

Alberto de Azevedo†, Bernardo Kulnig Pagnoncelli‡, Carlos Tomei§

Conteúdo: **1. Introdução; 2. O Problema e uma Reformulação; 3. Resolvendo o Problema sem Constrangimentos; 4. O Que Falta; 5. Um Exemplo; 6. Conclusão.**

Palavras-chave: **Custos de Transação, Otimização.**

Códigos JEL: **D23, C61.**

Este artigo estuda o efeito de custos de transação em investimentos financeiros coletivos como fundos de investimento ou *pools* de investidores. Consideramos um grupo de sócios ou investidores independentes que contribuíram para um projeto e precisam acertar as contas entre si através de repasses que envolvem custos de transação. O objetivo é efetuar estes repasses de maneira ótima, minimizando o valor pago em custos de transação ou corretagem, ou, de maneira equivalente, minimizando o valor pago por cada um dos sócios ao final dos ajustes. Inicialmente, consideramos o problema de forma intuitiva. Os passos empregados depois são rigorosamente justificados, levando inclusive a um algoritmo simples para cálculo da solução.

We study the effect of transaction costs in collective investment schemes such as investment funds or investments pools. We consider a group of partners or independent investors who contributed for a project with different amounts and now need to get even through financial transfers which involve transaction costs. Those transfers have to be made in an optimal way, minimizing the amount paid in commissions or fees. The problem is first tackled in an intuitive way. The steps employed are later justified, leading to a simple algorithm for the computation of the solution.

*Bernardo Kulnig Pagnoncelli agradece a Funenseg pelo suporte financeiro. Carlos Tomei agradece o apoio de CNPq e FAPERJ. Os autores agradecem a Felipe Pina pela leitura atenta da primeira versão deste texto e pelas sugestões que certamente tornaram o texto mais claro e legível.

†Departamento de Matemática, Universidade de Brasília (UnB), Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília, DF. E-mail: acpa@unb.br

‡Escuela de Negocios, Universidad Adolfo Ibañez, Santiago, Chile. E-mail: bernardo.pagnoncelli@uai.cl

§Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio), Rio de Janeiro. E-mail: carlos@mat.puc-rio.br

1. INTRODUÇÃO

Frequentemente, operações financeiras são oneradas por *custos de transação*, como os que incidem sobre a compra e venda de ações e sobre transações financeiras em geral. Um exemplo familiar entre brasileiros foi a *Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira* (CPMF), um imposto cobrado sobre certas transmissões de valores, que vigorou por vários anos (para maiores informações, veja Wikipedia). Outro exemplo importante são os fundos de investimento, onde um grupo de sócios ou investidores aporta um capital para iniciar as operações e os lucros são divididos entre os membros do fundo.

A denominação "fundos de investimento" coloca sobre o mesmo nome uma série de instrumentos financeiros essencialmente distintos onde o fator comum é a possibilidade de se fazer um investimento coletivo. A modalidade mais simples consiste em um grupo de investidores que compram ações emitidas por um controlador (um banco, um governo de um país), pagando taxas de corretagem pelo investimento. Os fundos podem ser abertos ou fechados: os primeiros possuem unidades de participação variável, ou seja, cada nova subscrição resulta em um aumento no número de unidades de participação (UP) do fundo. Este número varia de acordo com a procura do mercado, ou seja, cada nova subscrição resulta num aumento de UP. Já nos fundos fechados, o numero de UP é fixado no momento da oferta e só pode ser alterado caso existam condições para tal na cláusula de emissão. Os métodos apresentados neste artigo se adequam melhor a fundos fechados, com número fixo de UP. Para o leitor interessado em conhecer com mais detalhes os distintos fundos de investimento e suas regras sugerimos a leitura de Jacobs (2001).

Um exemplo que possui um maior grau de complexidade são os chamados *fundos de fundos* (FoF). Como o nome sugere, os FoF são fundos de investimento onde a estratégia de aplicação de recursos é possuir um portfolio composto de outros fundos ao invés de investir diretamente em ações ou títulos. Uma vantagem deste tipo de investimento é que em geral não são necessárias grandes quantidades de capital para participar de um FoF, em comparação com fundos de investimento em geral. Além disso, é um investimento com um grau ainda maior de diversificação se comparado a um fundo porque a diversidade de ativos subjacentes é muito grande. A principal desvantagem são as taxas cobradas: além dos custos de gerenciamento normais de um fundo, o administrador do FoF repassas ao cotistas as taxas cobradas pelos fundos que fazem parte do portfolio. Dentro dos FoF também existem diversas variações porém nosso objetivo não é descrever estas nuances, apenas dar uma ideia geral desta modalidade de investimento. Mais detalhes podem ser encontrados em Lian (2003).

O fato fundamental é que custos de transação complicam ajustes de contas. Um dos autores (A.A.) já tratou da situação no caso de dois e três sócios (de Azevedo, 2008a,b) envolvidos em um projeto comum. No presente artigo, considera-se um ajuste entre um número arbitrário de sócios. Na Seção 2, o problema é formulado e a seguir é atacado de maneira informal, sem detalhar os argumentos, bastante naturais. As demonstrações completas estão na Seção 4: o problema de fato possui uma solução ótima, descrita na Seção 3, e que pode ser encontrada de forma simples. O artigo termina com um exemplo e um resumo à guisa de conclusão.

2. O PROBLEMA E UMA REFORMULAÇÃO

Vamos supor que n sócios contribuíram com pagamentos $Q_i, i = 1, \ldots, n$, para um projeto e que os ajustes são feitos por meio de repasses $r_{ij} \geq 0$ do sócio i para o sócio j, com a intenção de obter o mesmo desembolso D para todos os sócios. Definimos α como o custo de transação, que pode ser a taxa cobrada pelo fundo ou ainda a CPMF, e $\lambda = \alpha + 1$. Assim, o desembolso inicial de cada sócio é, na realidade, $P_i = \lambda Q_i$. Depois dos repasses, o sócio i terá pago $P_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ e recebido $\sum_{j=1}^{n} r_{ji}$, tendo desembolsado

$$D = P_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} r_{ij} - \sum_{j=1}^{n} r_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Os repasses devem ser calculados de maneira a minimizar o gasto total em com os custos de transação, $G = \alpha \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} = \alpha T$, onde $T = \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}$ é o *repasse total*.

Existe outra formulação natural do mesmo problema. Somando em i todas as equações (1), obtemos

$$nD = \sum_{i=1}^{n} P_i + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P_i + \alpha T = \sum_{i=1}^{n} P_i + G$$

Então, o gasto mínimo ocorre quando o *desembolso total* nD (ou o próprio D) também é mínimo, o que, aliás, é muito razoável.

3. RESOLVENDO O PROBLEMA SEM CONSTRANGIMENTOS

Como pensaria alguém sem grandes pretensões formais? O argumento a seguir é plausível, mas poderia ser criticado por um leitor mais rigoroso. Agregando as *saídas* (S_i) e *entradas* (E_i) por repasse do sócio i, a Equação (1) torna-se

$$D = P_i + \lambda S_i - E_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Note, aliás, que o total dos repasses é

$$T = \sum_{i,j} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Agora, indexamos os sócios para ter pagamentos não crescentes,

$$P_1 \geq P_2 \geq \ldots \geq P_n$$

Estamos em busca de um desembolso ótimo D, que naturalmente deve estar entre P_1 e P_n. Assim, ao colocar D entre os pagamentos P_i, obtemos um corte

$$P_1 \geq \ldots \geq P_c \geq D \geq P_{c+1} \geq \ldots \geq P_{c+d}$$

para o qual os índices c e d somam n. Os c primeiros sócios são credores dos d últimos, os devedores. É razoável supor que repasses vão de devedores a credores: credores não pagam saídas e recebem entradas, enquanto o oposto acontece com os devedores. As expressões para entradas e saídas passam a ser

$$E_j = \sum_{i=c+1}^{c+d} r_{ij}, \quad S_j = 0, \quad j = 1, \ldots, c$$

$$E_j = 0, \quad S_j = \sum_{i=1}^{c} r_{ji}, \quad j = c+1, \ldots, c+d$$

e as equações (2) ficam ainda mais simples:

$$D = P_i - E_i, \quad i = 1, \ldots, c, \quad D = P_{c+j} + \lambda S_{c+j}, \quad j = 1, \ldots, d \tag{3}$$

o que garante que as entradas $E_i = P_i - D$ e as saídas $S_{c+j} = D - P_{c+j}$ são não negativas, como deviam. Agora, o total dos repasses é dado por

$$T = \sum_{i=1}^{c} E_i = \sum_{j=1}^{d} S_{c+j}$$

Somando as c primeiras equações em (3) e depois as d últimas, obtemos

$$cD = \sum_{i=1}^{c} P_i - T, \quad dD = \sum_{j=1}^{d} P_{c+j} + \lambda T$$

que pode ser interpretado como um sistema em duas equações para as duas variáveis D e T. Explicitamente,

$$D = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{c} P_i + \sum_{j=1}^{d} P_{c+j}}{\lambda c + d}, \quad T = \frac{d \sum_{i=1}^{c} P_i - c \sum_{j=1}^{d} P_{c+j}}{\lambda c + d} \tag{4}$$

Fica por conta do leitor mostrar que D está entre P_1 e P_n e que T é não negativo.

Para calcular os repasses r_{ij} associados sem pruridos intelectuais, comece obtendo as entradas e saídas

$$E_i = P_i - D \geq 0, i = 1, \ldots, c, \quad S_{c+j} = \frac{D - P_{c+j}}{\lambda} \geq 0, j = 1, \ldots, d$$

Agora, cada devedor desembolse λS_{c+j} a um fundo comum, no qual, após descontar os custos de transação, resta $T = \sum_{j=1}^{d} S_{c+j}$. Finalmente, é só repartir T entre os credores, $T = \sum_{j=1}^{c} E_{c+j}$.

Falta só um detalhe para completar essa abordagem pragmática. As contas se baseiam no fato que, se D está entre P_c e P_{c+1}, o ótimo é calculado como acima. Mas ninguém garante que o D calculado de fato satisfaz essas restrições. Assim, o que deve ser feito para resolver o problema com n sócios é calcular D para as escolhas $c = 1,2, \ldots, n-1$ e ver qual é o maior valor de c para o qual $P_c \geq D \geq P_{c+1}$ (o que aliás sugere que os cálculos sejam feitos para c começando por $n-1$ e descendo).

4. O QUE FALTA

O argumento acima baseou-se em duas hipóteses: o problema tem solução e os repasses necessários são muito simples, limitando-se a transferir dinheiro de devedores a credores. Mas, enfim, quem garante que o problema de minimização de fato tem uma solução e por que repasses mais complexos não são mais vantajosos?

Vamos chamar uma atribuição de valores r_{ij} que resolva o problema de *repasse ótimo*. Uma atribuição que satisfaça as condições (1) para algum desembolso D é um *repasse admissível*.

Proposição 4.1 *Existem repasses admissíveis.*

Prova: Isso é óbvio para alguém menos crítico, mas em princípio requer comprovação. Suponha que estamos na situação habitual, na qual n sócios contribuem inicialmente com $P_1, \ldots, P_n$ para o projeto. Comece com um repasse delirante, claramente não admissível, onde o sócio n seja responsável por todos os custos do projeto. Os desembolsos até o momento são

$$D_1 = P_1 - P_1 = 0, \quad D_2 = P_2 - P_2 = 0, \quad \cdots \quad D_{n-1} = P_{n-1} - P_{n-1} = 0$$

$$D_n = P_n + \lambda \left(\sum_{j<n} P_j \right)$$

Para se obter um repasse admissível é suficiente que cada sócio $j < n$ repasse um valor r para o sócio n, devidamente calculado para dar origem a um desembolso comum D. Igualando o desembolso dos $n-1$ primeiros sócios com o do sócio n,

$$D = \lambda r = P_n + \lambda \left(\sum_{j<n} P_j \right) - (n-1)r$$
$$\Leftrightarrow r(\lambda + (n-1)) = P_n + \lambda \left(\sum_{j<n} P_j \right)$$

o que nos dá o repasse admissível

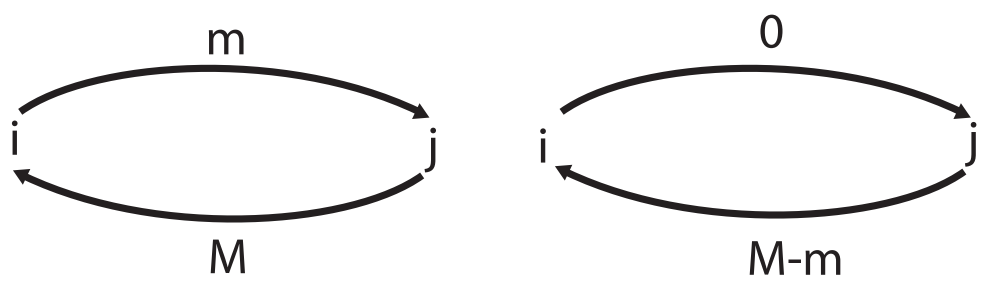
$$r = \frac{P_n + \lambda \left(\sum_{j<n} P_j \right)}{\lambda + (n-1)}$$

□

Proposição 4.2 *Existe um repasse ótimo.*

Prova: Como já vimos, desembolsos mínimos correspondem a repasses totais mínimos. O desembolso admissível R_{adm} obtido acima está longe de ser mínimo, mas estabelece uma cota superior para os repasses: $r_{ij} \geq 0$ não precisa ser maior do que R_{adm}. Assim, estamos procurando o mínimo de uma função contínua (linear!) – o repasse total – em um conjunto compacto de valores: o resultado segue do Teorema de Weierstrass. □

Figura 1: Trocando dois repasses por um mais eficiente, não admissível



Vamos ver agora que um repasse ótimo tem várias propriedades especiais. Suponha, por exemplo, que, em um repasse admissível com desembolso D, os sócios i e j se transfiram quantias $r_{ij} = m \leq$

$r_{ji} = M$: é fácil ver que existe um repasse admissível com desembolso comum D_m menor. De fato, imagine uma situação intermediária, representada na figura 1, em que os novos repasses $\tilde{r}$ diferem de r apenas entre os sócios i e j, para os quais $\tilde{r}_{ij} = 0$ e $\tilde{r}_{ji} = M - m$. Seja $\lambda = \alpha + 1$. O desembolso do sócio i diminui de $D = D_i = P_i + \lambda S_i - E_i$ para

$$\tilde{D}_i = P_i + \lambda S_i - \lambda m - (E_i - m) = D - \alpha m,$$

e o sócio j, aliás, também vai de D para

$$\tilde{D}_j = P_i + \lambda S_j - \lambda m - (E_j - m) = D - \alpha m.$$

Os sócios i e j desembolsam um pouco menos dos demais, mas uma redistribuição simples dá origem a outro repasse admissível: suponha que i e j repassam adicionalmente a mesma quantia q para os outros $n-2$ sócios. O desembolso final de cada sócio é

$$\hat{D} = \tilde{D}_i + \lambda(n-2)q = \tilde{D}_j + \lambda(n-2)q = D - 2q,$$

e como $\tilde{D}_i = \tilde{D}_j = D - \alpha m$, obtemos

$$q = \frac{\alpha m}{\lambda(n-2)+2}. \tag{5}$$

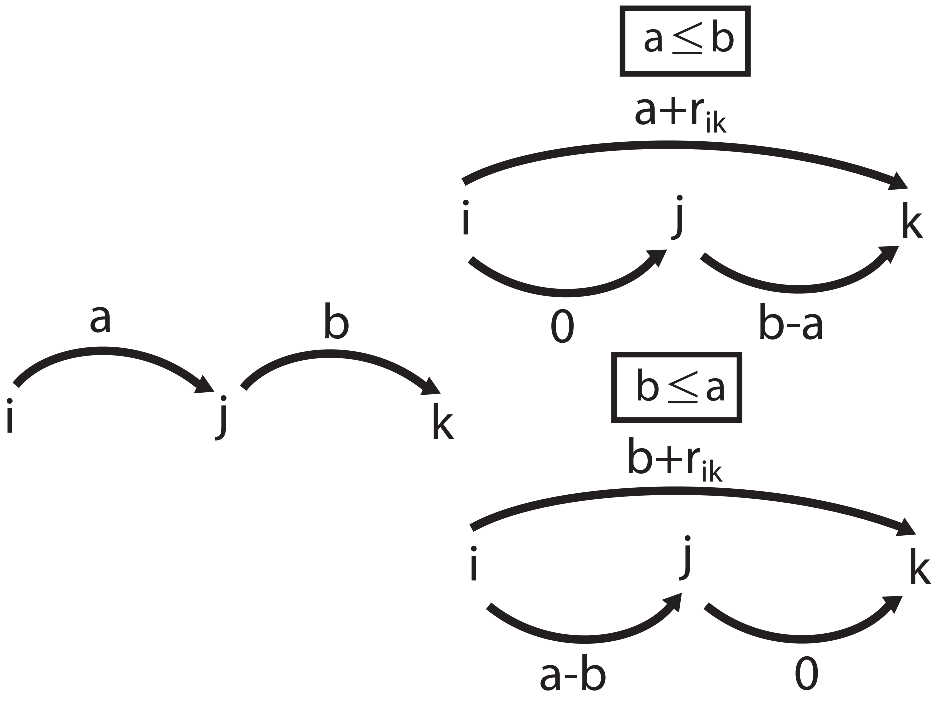
Resumindo, obtivemos uma restrição bastante evidente para um repasse admissível ótimo r: fazer dinheiro ir e vir entre dois sócios aumenta inutilmente os custos de transação, isto é, r_{ij} ou r_{ji} é zero. De maneira análoga, pode-se mostrar que, não convém restituir dinheiro a si mesmo. Em outras palavras, $r_{ii} = 0$ para todo sócio i. O que nos interessa mais é uma pequena amplificação: nenhum sócio recebe e repassa ao mesmo tempo – em outras palavras, nenhum sócio é credor e devedor ao mesmo tempo.

De fato, se, como representado na figura 2, i repassa $r_{ij} = a$ a j que por sua vez repassa $r_{jk} = b$ a k, é fácil construir um outro repasse com desembolso comum menor fazendo com que a soma de r_{ik} com a quantia menor entre a e b passe diretamente de i para k e que a diferença (positiva) entre os dois valores seja repassado de j para k se $a < b$ e de i para j caso contrário. O desembolso dos sócios i e k é o mesmo nas duas situações, mas o do sócio j diminui. Mais uma vez, uma redistribuição simples dá origem a um repasse admissível para o qual o desembolso comum é menor do que o desembolso do repasse original. Repetindo os passos feitos para se chegar a expressão (5), o leitor é convidado a verificar que, neste caso, o sócio j deve repassar

$$q = \frac{\alpha \min\{a,b\}}{\lambda(n-1)+1}$$

para cada um dos outros sócios para que tenhamos um novo repasse admissível com custo total menor. Demonstramos então a primeira afirmação do teorema a seguir.

Figura 2: i repassa $r_{ik} + \min\{ab\}$ diretamente para k



Teorema 4.3 Existe um repasse admissível ótimo com a propriedade adicional que cada sócio ou é credor ou é devedor. As contas apresentadas na seção anterior podem ser justificadas.

Prova: Sabemos que existe uma solução ótima, que minimiza o desembolso comum D e consiste de um repasse r em que cada sócio ou é credor ou devedor. Suponha que existam c credores e d devedores para um valor adequado de c (e o leitor cético e preguiçoso pode até aceitar os casos extremos $c = 0$ e $c = n$). Agora, as equações (3) estão bem justificadas, e como sabemos que existe um repasse mínimo, sabemos também que, para algum c, a expressão calculada para D forçosamente satisfaz a condição $P_c \geq D \geq P_{c+1}$, o que garante que saídas e entradas são não negativas de acordo com (3). O argumento está completo. □

Terminamos a seção com algumas observações. Note que, apesar da fórmula aparentemente explícita para o desembolso mínimo D, ele não foi encontrado: é necessário saber o c adequado para calculá-lo. A demonstração de que algum D de fato está em $P_c \geq D \geq P_{c+1}$ não precisa ser feita: ela segue do Teorema de Weierstrass (Bortolossi, 2002)!

Um leitor conhecedor de técnicas de pesquisa operacional identifica o problema original como um caso simples de programação linear. Nessa interpretação, não é difícil ver que escolhas diferentes de c correspondem a vértices do conjunto admissível. O problema aliás é altamente degenerado, no sentido que muitos repasses admissíveis são ótimos.

5. UM EXEMPLO

Vamos considerar um exemplo numérico com 10 sócios, com pagamentos que vão de $P_1 = \text{R\$}\,100\,380{,}0$ a $P_{10} = \text{R\$}\,4\,015{,}2$ (aqui $\alpha = 0{,}038$). Podemos imaginar que são investidores aportando capital para um projeto e que depois vão fazer o acerto de contas entre eles. Ou ainda podemos contextualizar o problema em um fundo de investimento fechado onde um grupo de 10 pessoas quer investir o mesmo valor comprado as quotas do fundo. No entanto, cada sócio tem uma disponibilidade de capital diferente e como o fundo é fechado existe um risco de esgotamento de cotas. Os sócios entram em acordo que depois de compradas as cotas repassas entre eles vão ter que ser feitos para equilibrar as finanças.

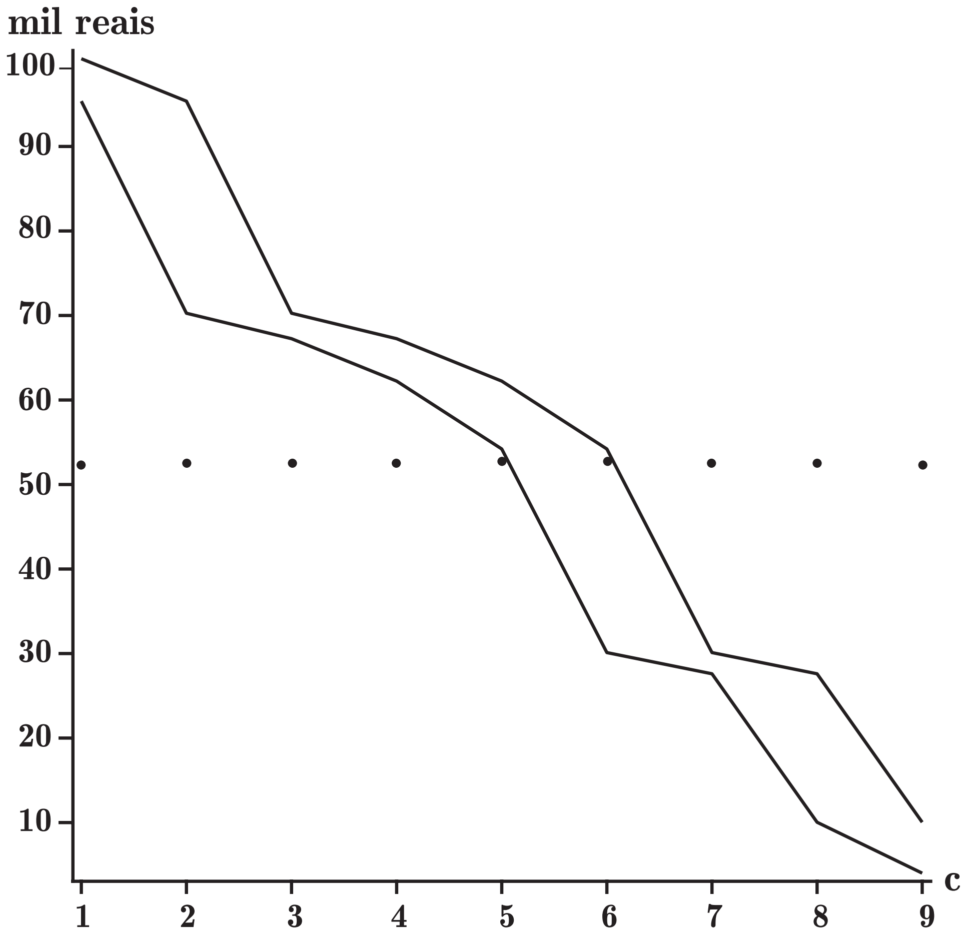
Os dados do problema e os diferentes valores de D em reais estão na Tabela 1.

Tabela 1: O problema com 10 sócios

c	P_c	P_{c+1}	D
1	100 380,0	95 361,0	52 165,731
2	95 361,0	70 266,0	52 182,133
3	70 266,0	67 254,6	52 188,997
4	67 254,6	62 235,6	52 194,713
5	62 235,6	54 205,2	52 198,522
6	54 205,2	30 114,0	52 199,282
7	30 114,0	27 604,5	52 190,912
8	27 604,5	10 038,0	52 181,598
9	10 038,0	4 015,2	52 165,638

Note que, para a maioria dos cortes (isto é, de escolhas para o número c de credores), o desembolso calculado não satisfaz as exigências $P_c \geq D \geq P_{c+1}$. Aliás, o único desembolso que honra as restrições é justamente o ótimo, $D = \text{R\$}\,52\,199{,}282$. Uma outra maneira de representar a Tabela 1 é através de um gráfico. Na figura 3, o eixo x representa as diferentes escolhas de c e as funções lineares por partes superior e inferior são obtidas interligando os valores de P_{c+1} e P_c respectivamente. Os círculos representam os diferentes valores de D para cada c, e o desembolso ótimo D é aquele que está dentro da região definida pelas duas funções. Neste exemplo, os sócios 1 a 6 são credores e os demais são devedores.

Figura 3: Gráfico dos valores da Tabela 1



6. CONCLUSÃO

Neste artigo estudamos o problema de como efetuar um acerto de contas entre investidores de um projeto levando em consideração custos de transação. Sem preocupações formais, começamos obtendo uma expressão para o desembolso ótimo comum D supondo a priori que D está entre pagamentos

P_{c+1} e P_c dispostos em ordem não crescente. Em seguida, demonstramos que o desembolso D obtido em (4) é de fato o desembolso ótimo.

A análise teórica da Seção 4 levou a um algoritmo simples para encontrar o desembolso ótimo: basta calcular D para diferentes configurações credor-devedor e observar o maior valor de c para o qual D fica entre P_{c+1} e P_c.

O artigo tem aplicações em esquemas de investimento coletivos como fundos de investimento, fundos de fundos ou qualquer projeto que possua altos custos que não possam ser cobertos por um só indivíduo ou empresa. Após cada sócio desembolsar uma quantia distinta para cobrir com os custos totais do projeto, é necessário fazer repassas entre eles para que todos tenham as mesmas despesas ao final levando-se em consideração os custos de transação.

BIBLIOGRAFIA

Bortolossi, H. J. (2002). *Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis: Uma Introdução à Teoria de Otimização*. PUC-Rio.

de Azevedo, A. (2008a). Fazendo contas com a CPMF. *Revista do Professor de Matemática*, 67:40–42.

de Azevedo, A. (2008b). Fazendo contas com a CPMF. Disponível em `http://www.sbm.org.br/web/up/editor/File/prof_alberto.pdf`.

Jacobs, B. (2001). *All About Mutual Funds*. McGraw-Hill Companies, 2 edition.

Lian, B. (2003). On the performance of alternative investments: CTAs, hedge funds, and funds-of-funds. Disponível em SSRN: `http://ssrn.com/abstract=378140` ou DOI: 10.2139/ssrn.378140.

Wikipedia (2009). CPMF. Disponível em `http://pt.wikipedia.org/wiki/CPMF`.