Arbitragem de carteira de ações contra futuro de índice*

Cypriano Lopes Feijó Filho**

O artigo estuda a arbitragem entre uma carteira de ações contra o futuro de índice de bolsa de valores. A carteira de ações é suposta de possuir um "β" qualquer em relação ao índice. Os prazos de liquidação das transações de bolsa e do futuro podem diferir entre si e também são genéricos. As condições de liquidação antecipada do portfólio de arbitragem são obtidas.

The paper study the arbitrage opportunities between a portfolio of stocks and a futures contract on the stock exchange index. The portfolio is assumed to show a generic "β" in relation to the stock index. The settlement dates for the transactions with stocks and futures are allowed to differ from each other and are also generic. Conditions for early closing of the positions are obtained.

1. Introdução

O objetivo deste artigo é investigar a operação de arbitragem de uma carteira de ações contra o futuro de índice de bolsa de valores.

Na primeira seção discutimos a regra de ajustes dos contratos futuros de maneira que, quaisquer que sejam a estrutura a termo de juros e a trajetória do futuro de índice, um determinado valor financeiro seja obtido na data de liquidação do contrato futuro, após seu vencimento supõe-se conhecida a estrutura a termo de juros e permitimos uma liquidação dos contratos futuros em k dias úteis, k genérico.

Na segunda seção discutimos a arbitragem de futuro de índice contra uma carteira de ações. A carteira é suposta render β vezes o retorno do índice à vista, β genérico. Além disso, permitimos um período também genérico de liquidação das transações em bolsas de valores de s dias úteis.

Na subseção Condições de arbitragem discutimos as condições de arbitragem sob as hipóteses de ausência de custos de transação, e crédito e vendas a descoberto ilimitados. Nessa seção utilizamos o conceito de imunização de um portfólio relativamente ao índice à vista para construirmos o portfólio de arbitragem. Com base neste derivamos o preço "justo" — aquele que não permite ganhos de arbitragem — do contrato futuro de índice. Basicamente o resultado decorre da aplicação do modelo de "custo de carregamento" ao contexto do futuro de índice de bolsa.

Na subseção *Hedge* estatístico mostramos que o princípio de imunização de portfólio utilizado na subseção Condições de arbitragem produz o mesmo resultado que o princípio conhecido como *hedge* estatístico, que consiste em minimizar a variância de um portfólio. Embora, a rigor, a arbitragem da subseção Condições de arbitragem só seja válida para

* Artigo recebido em fev. 1994 e aprovado em mar. 1995.
** Doutorando da EPGE/FGV.

indivíduos neutros ao risco ou numa economia onde o único componente aleatório do retorno da carteira seja o retorno do índice, o princípio de imunização de portfólio é muito mais intuitivo do que aquele de minimização de variância.

Na subseção Liquidação antecipada discutimos as condições de otimalidade para se encerrar prematuramente o portfólio de arbitragem. A idéia intuitiva de que devemos encerrar o portfólio assim que o futuro de índice atinge seu valor "justo" na data é corroborada, sob certas condições.

Na seção Aspectos operacionais fazemos uma breve abordagem dos aspectos operacionais da arbitragem.

Por fim concluímos o artigo fazendo um resumo dos principais resultados.

2. Regra de ajustes de contratos futuros de índice

Nesta seção veremos como resolver o problema oriundo dos ajustes diários dos contratos futuros, para a montagem de portfólios de arbitragem. Cada ajuste diário é determinado pela diferença entre os preços de ajuste do dia e do dia anterior, proporcionalmente ao número de contratos possuídos.

A demonstração da regra de ajustes de contratos futuros de índice realizada nesta seção baseia-se em Cox, Ingersoll e Ross (1981). Para uma aplicação da regra num contexto de taxas de juros constantes, ver Varga (1993).

Suponhamos que as taxas de juros sejam não estocásticas. Seja $r(t)$ a taxa de juros.diária entre a data t e a data $t+1$. Todas as datas são tratadas como dias úteis. Defina $J(x,y)$ como 1 mais a taxa de juros acumulada entre as datas x e y, para $y \geq x$, i.e.,

$$J(x,y) \equiv \begin{cases} (1+r(x))(1+r(x+1))\ldots(1+r(y-1)) & y > x \\ 1 & y = x \end{cases} \tag{1}$$

ou

$$J(x,y) \equiv \begin{cases} \prod_{i=x}^{y-1}(1+r(i)) & y > x \\ 1 & y = x \end{cases} \tag{1'}$$

Seja $F(t)$ o preço de um contrato futuro na data t de um ativo $I(t)$, cujo vencimento se dá na data T. Suponha que todas as transações de uma data ocorram ao preço de ajuste da data. Seja h a quantidade de cruzeiros (ou quantidade de unidades monetárias) por contrato futuro.

Seja k o prazo de liquidação do contrato futuro, ou seja, um investidor que compre z contratos na data t, receberá em $t+k+1$ a quantia de $zh[F(t+1)-F(t)]$, relativa ao ajuste diário de $t+1$. Denotemos por $n(t+1, k)$ o total de contratos futuros comprados na data t, cuja liquidação se dá em k dias.

Nosso problema é determinar uma seqüência de contratos $n(t+1, k)$, $t = 0,1,..., T-1$ tal que na data $T+k$ o montante financeiro resultante da operação com os contratos futuros seja igual a $nh[F(T)-F(0)]$, n arbitrário. A razão disso é que queremos que tal montante independa da trajetória seguida pelos preços dos contratos futuros entre as datas 0 e T, dependendo apenas de $F(0)$ e $F(T)$.

Proposição 1. A seqüência de contratos $n(t+1,k)=\dfrac{n}{J(t+k+1,T+k)}$, $t = 0,1,\ldots\ T-1$ produz em $T+k$ o montante financeiro $nh[F(T)-F(0)]$.

Demonstração. Seja $G(T+k)$ o montante financeiro na data $T+k$, oriundo da seqüência de contratos futuros. A compra de $n(t+1, k)$ contratos na data t produz $n(t+1,k)\,h[F(t+1)-F(t)]$ na data $t+k+1$, que investidos às taxas de juros de mercado rendem em $T+k$ a quantia de $n(t+1,k)\,h[F(t+1)-F(t)]J(t+k+1,T+k)$. O total financeiro em $T+k$ é dado por:

$$G(T+k)=\sum_{t=0}^{T-1} n(t+1,k)\,h[F(t+1)-F(t)]\,J(t+k+1,T+k)$$

Observe que $\sum_{t=0}^{T-1} nh[F(t+1)-F(t)]=nh[F(T)-F(0)]$. Assim, tomando-se

$n(t+1,k)J(t+k+1,T+k)=n$, $t = 0,1,\ldots,\ T-1$ obtemos o resultado desejado. CQD

A demonstração da proposição 1 é uma adaptação da demonstração da proposição 2 em Cox, Ingersoll e Ross (1981), que demonstra que, independentemente dos juros serem estocásticos ou não, o preço futuro $F(t)$ é o valor de um contrato que pagará em T o valor $I(T)$ $J(t+k, T+k)$ (na realidade, ou autores fazem $k = 0$).

Note que o fator de desconto é $J(t+k+1, T+k)$ e não $J(t+k, T+k)$. Isso decorre do fato de que é preciso esperar até o ajuste do dia seguinte para se saber qual o ajuste diário. O efeito prático disto é reduzir em um dia útil o período até o vencimento do futuro de índice, independentemente do prazo de liquidação do mesmo.

Intuitivamente a proposição 1 nos diz que o número de contratos em cada dia é o número de contratos desejado no vencimento do contrato futuro, descontado por uma taxa de juros apropriada. Note que se $k = 0$, ou seja, liquidação financeira se dá sem defasagem — o caso da maioria dos livros textos — então $n(t+1,0)$ é o valor presente de n, da data T, na data $t+1$. A introdução de um período de liquidação de $k > 0$ dias tem o efeito de deslocar por k dias a estrutura dos juros.

O efeito pode ser significativo. Para uma estrutura a termo de juros crescente no tempo, o número de contratos (o valor absoluto de contratos, já que n pode ser negativo quando temos que vender contratos) é menor que aquele da regra dos livros textos ($k = 0$). Analogamente, para uma estrutura a termo decrescente, o número de contratos é maior que aquele quando $k = 0$. O efeito prático de se ignorar a defasagem de liquidação é tornar o montante financeiro oriundo dos contratos futuros dependente da trajetória $F(t)$, $t = 0,1,\ldots\ T$ enquanto que pela regra da proposição 1, tal montante é função apenas de $F(0)$ e $F(T)$.

Mais genericamente, se fizermos o ajuste dos contratos futuros por uma estrutura a termo $J^*(t+k+1, T+k)$ (no caso de se ignorar a defasagem, $J^*(t+k+1, T+k) = J(t+1,T)$, por exemplo), obteremos

$$G^*(T+k) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{n}{J^*(t+k+1,T+k)} h[F(t+1)-F(t)]J(t+k+1,T+k) =$$

$$nh[F(T)-F(0)] + \sum_{t=0}^{T-1} nh[F(t+1)-F(t)]\left[\frac{J(t+k+1,T+k)}{J^*(t+k+1,T+k)} - 1\right]$$

Note que $G^*(T+k)$ depende da trajetória dos $F(t)$ e da relação entre as estruturas a termo efetiva e suposta. Além disso, não podemos determinar *a priori* quão grande é a distorção relativamente a $nh[F(T)-F(0)]$.

Particularmente no caso de ignorância da defasagem temos uma relação simples entre os contratos dados pela seqüência da proposição 1, e aqueles oriundos da defasagem, denotados por $n(t+1, k=0)$:

$$n(t+1, k=0) = n(t+1, k)\frac{J(T, T+k)}{J(t+1, t+k+1)}$$

Observe que $n(t+1, k=0) = n(t+1, k)$, $t = 0,1,\ldots, T-1$, implica $r(t)$ constante para $t = 1,2,\ldots, T+k-1$. Também $r(t) = r$ para $t = 1,2,\ldots, T+k-1$ implica a irrelevância da defasagem k. Com efeito, nesse caso, para cada t

$$J(t+k+1,T+k) = (1+r)^{T-t-1} \qquad \forall k$$

Nesse caso a seqüência de contratos $n(t+1) = \dfrac{n}{(1+r)^{T-t-1}}$ $\quad t = 0,1,\ldots, T-1$ produz em $T+k$ o resultado financeiro $nh[F(T)-F(0)]$. Note que temos $T-t-1$ dias úteis e não $T-t$.

Assim, a defasagem de liquidação k é irrelevante se e somente se a taxa de juros diária entre $t = 1,2,\ldots, T+k-1$ é constante.

A estratégia da proposição 1 implica uma relação clara entre o número de contratos entre duas datas quaisquer:

$$\frac{n(t+p+1, k)}{n(t+1, k)} = \frac{\dfrac{n}{J(t+p+k+1, T+k)}}{\dfrac{n}{J(t+k+1, T+k)}} = J(t+k+1, t+p+k+1) \qquad 0 \le p \le T-t-1$$

Lembrando que $J(t+k+1, t+k+2) = (1+r(t+k+1))$, temos que a proposição 1 pode ser alternativamente enunciada como:

Proposição 1'. A seqüência de contratos

$$n(t+1,k)=\begin{cases}\dfrac{n}{J(k+1,T+k)} & t=0\\ n(t,k)(1+r(t+k)) & 1\le t\le T-1\end{cases}$$

produz em $T+k$ o fluxo financeiro $nh[F(T)-F(0)]$.

Pela proposição 1', uma vez obtido o número de contratos inicial, basta aumentá-lo de um *overnight* (diferido em k dias úteis) para se obter o número de contratos do dia seguinte e assim sucessivamente.

Vejamos um exemplo com o futuro de índice Ibovespa, negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF).

Tamanho do contrato ("h"): CR$50,00 por ponto de índice;

Período para liquidação ("k"): um dia útil;

Data inicial: 14-1-1994;

Vencimento: 9-2-1994;

Estrutura a termo: taxa de 1,7% ao dia para todos os dias de janeiro e taxa de 1,93% ao dia para todos os dias de fevereiro;

Dias úteis no período (calendário): 18, sendo 12 em janeiro e seis em fevereiro;

Contratos desejados no vencimento ("n"): 10

Conforme notado anteriormente, o número de dias úteis correto é de 17, sendo 11 em janeiro e seis em fevereiro.

O efeito prático do deslocamento da curva de juros de um dia é fazer com que a operação tenha, efetivamente, 10 dias úteis em janeiro e sete dias úteis em fevereiro.

Nas tabelas 1 e 2 a seguir apresentamos quatro cenários. Em cada um deles mostramos a seqüência de contratos futuros, os ajustes diários, e o ganho acumulado da operação.

No primeiro cenário seguimos a regra da proposição 1. No segundo, ignoramos a defasagem de um dia. No terceiro, fazemos o ajuste pela taxa de juros média diária do período, considerando a defasagem. Esta taxa é dada por 1,7946%.[1] No quarto, não fazemos qualquer ajuste de contratos, mantendo 10 contratos desde o início da operação.

A seqüência de cotações do contrato futuro é arbitrária e iremos admitir que podemos comprar um número fracionário de contratos (observe que isto é apenas uma questão de escala). No exemplo, $F(0)=68.000$ e $F(T)=66.400$. Dessa forma o valor financeiro desejado no vencimento é dado por $50^*10^*(-1.600)=-800.000$.

---

[1] $(1{,}017)^{10}(1{,}0193)^{7}=(1{,}017946).^{17}$

Tabela 1

Data	Juros	Fut.	Cenário 1			Cenário 2: $k = 0$		
			{n}	Ajuste	G. acum.	{n}	Ajuste	G. acum.
14-1		68.000	7,39			7,41		
17-1	1,0170	68.200	7,52			7,53		
18-1	1,0170	67.900	7,64	73.905	73.905	7,66	74.073	74.073
19-1	1,0170	67.800	7,77	(112.743)	(37.581)	7,79	(112.998)	(37.666)
20-1	1,0170	68.000	7,91	(38.220)	(76.440)	7,92	(38.306)	(76.612)
21-1	1,0170	67.400	8,04	77.739	0	8,06	77.915	0
24-1	1,0170	69.000	8,18	(237.182)	(237.182)	8,20	(237.718)	(237.718)
25-1	1,0170	69.000	8,32	643.237	402.023	8,33	644.692	402.932
26-1	1,0170	68.000	8,46	0	408.858	8,48	0	409.782
27-1	1,0170	68.400	8,60	(415.808)	0	8,62	(416.749)	0
28-1	1,0170	67.000	8,75	169.151	169.151	8,77	169.533	169.533
31-1	1,0170	66.400	8,92	(602.092)	(430.066)	8,92	(603.454)	(431.038)
1-2	1,0193	66.300	9,09	(262.426)	(699.803)	9,09	(263.020)	(701.386)
2-2	1,0193	66.100	9,26	(44.582)	(757.891)	9,26	(44.582)	(759.504)
3-2	1,0193	66.500	9,44	(90.885)	(863.403)	9,44	(90.885)	(865.047)
4-2	1,0193	66.900	9,62	185.277	(694.789)	9,62	185.277	(696.465)
7-2	1,0193	67.000	9,81	188.853	(519.346)	9,81	188.853	(521.054)
8-2	1,0193	66.500	10,00	48.124	(481.245)	10,00	48.124	(482.986)
9-2	1,0193	66.400		(245.266)	(735.799)		(245.266)	(737.574)
10-2				(50.000)	(800.000)		(50.000)	(801.809)

Tabela 2

Data	Juros	Fut.	Cenário 3: tx. média			Cenário 4: nenhum ajuste		
			{n}	Ajuste	G. acum.	{n}	Ajuste	G. acum.
14-1		68.000	7,39			10,00		
17-1	1,0170	68.200	7,52			10,00		
18-1	1,0170	67.900	7,66	73.905	73.905	10,00	100.000	100.000
19-1	1,0170	67.800	7,80	(112.848)	(37.686)	10,00	(150.000)	(48.300)
20-1	1,0170	68.000	7,94	(38.291)	(76.617)	10,00	(50.000)	(99.121)
21-1	1,0170	67.400	8,08	77.956	36	10,00	100.000	(806)
24-1	1,0170	69.000	8,22	(238.066)	(238.029)	10,00	(30.000)	(300.820)
25-1	1,0170	69.000	8,37	646.236	404.160	10,00	800,.	494,066
26-1	1,0170	68.000	8,52	0	411.031	10,00	0	502.465
27-1	1,0170	68.400	8,67	(418.524)	(506)	10,00	(500.000)	11.007
28-1	1,0170	67.000	8,83	170.414	169.900	10,00	200.000	211.194
31-1	1,0170	66.400	8,99	(607.154)	(434.366)	10,00	(700.000)	(485.215)
1-2	1,0193	66.300	9,15	(264.879)	(706.629)	10,00	(300.000)	(793.464)
2-2	1,0193	66.100	9,31	(44.939)	(765.205)	10,00	(50.000)	(858.778)
3-2	1,0193	66.500	9,48	(91.490)	(871.464)	10,00	(100.000)	(975.352)
4-2	1,0193	66.900	9,65	186.265	(702.019)	10,00	200.000	(794.177)
7-2	1,0193	67.000	9,82	189.607	(525.960)	10,00	200.000	(609.504)
8-2	1,0193	66.500	10,00	48.253	(487.859)	10,00	50.000	(571.268)
9-2	1,0193	66.400		(245.592)	(742.867)		(250.000)	(832.293)
10-2				(50.000)	(807.204)		(50.000)	(898.356)

Como se observa, apenas no primeiro cenário obtém-se o resultado desejado. Observe também que os cenários 2 e 3 produzem ajustes próximos ao valor correto, mas a estratégia de não se fazer nenhum ajuste pode produzir resultados muito distintos do desejado. Por fim, observe-se do cenário 1 que, seguindo a regra da proposição 1, toda a vez que o índice futuro retorna ao seu valor inicial, o ganho acumulado se anula. Demonstraremos esse resultado na proposição 5.

3. Arbitragem de carteira de ações contra futuro de índice

Condições de arbitragem

Sejam $I(t)$, $F(t)$ e $C(t)$ o índice de bolsa à vista, o futuro de índice e o valor de uma carteira de ações na data t, respectivamente. Suponha que desejemos criar um portfólio composto por uma carteira de ações e por contratos futuros de índice, de maneira que o retorno deste portfólio entre as datas 0 e T independa da trajetória do índice à vista $I(t)$, $t = 0,1,..., T$. Queremos apenas que haja dependência a $I(0)$, que é conhecido na data 0.

Postulemos um comportamento do retorno da carteira relativamente ao retorno do índice. Sejam $RC(x,y)$ e $RI(x,y)$ as taxas de retorno da carteira e do índice à vista entre as data x e y. Por hora, vamos supor uma relação determinística entre $RC(x,y)$ e $RI(x,y)$. Na seção seguinte, quando tratarmos do *hedge* estatístico, mostraremos que a relação aqui usada pode ser interpretada como aquela esperada entre as variáveis, bem como os resultados obtidos nesta seção.

Suponha que, para o período de interesse, a taxa de retorno da carteira seja β vezes a taxa de retorno do índice, mais um excesso α, ou seja,[2]

$$RC(0,T) = \alpha + \beta\, RI(0,T) \tag{2}$$

Suponha que a liquidação no mercado futuro ocorra em k dias úteis, e a liquidação no mercado de ações em s dias úteis. Seja $W(x,y)$ a função que leva um valor na data x à data y:

$$W(x,y) = \begin{cases} J(x,y) & x \leq y \\ J(x,y)^{-1} & x > y \end{cases} \tag{3}$$

Seja $P(T+s)$ o valor do portfólio na data $T+s$, quando temos n contratos futuros na data T:

$$P(T+s) = C(T) + nh[F(T) - F(0)]W(T+k, T+s) \tag{4}$$

---

[2] Na seção seguinte iremos trabalhar com a relação

$$RC(0,T) = \alpha + \beta\, RI(0,T) + \varepsilon$$

que nada mais é do que relação (2) acrescida de um termo estocástico de média nula.

Na data T, $F(T) = I(T) = I(0)(1 + RI(0,T))$ e $C(T) = C(0)(1 + RC(0,T))$. Substituindo em (4):

$$P(T+s) = C(0)(1 + RC(0,T)) + nh[I(0)(1 + RI(0,T)) - F(0)]W(T+k, T+s) \quad (5)$$

Ou usando a relação (2):

$$P(T+s) = C(0)(1 + \alpha + \beta\, RI(0,T)) + nh[I(0)(1 + RI(0,T)) - F(0)]W(T+k, T+s) \quad (6)$$

O princípio de imunização de portfólio em relação a uma variável consiste em tornar o portfólio insensível a mudanças na referida variável. No caso queremos tornar o portfólio imune a variações em $RI(0,T)$.

Derivando a expressão (6) em relação a $RI(0,T)$, a expressão de n que anula a derivada é dada por

$$n = -\frac{\beta\, C(0)}{hI(0)W(T+k, T+s)} \quad (7)$$

Vejamos a interpretação de (7). O sinal negativo significa que a posição no mercado futuro de índice tem que ser oposta àquela no mercado à vista. Caso contrário, teríamos uma dupla exposição ao mercado à vista.

Os termos h e $W(T+k, T+s)$ são técnicos em essência: o primeiro corrige o tamanho do contrato, sendo meramente um fator de escala; o segundo "acerta" as datas de liquidação do mercado futuro e à vista.

O termo $\frac{\beta C(0)}{I(0)}$ possui uma interpretação bastante interessante e intuitiva: é a quantidade de unidades de índice correspondente à carteira à vista.

Substituindo (7) em (6) obtemos $P(T+s)^*$ dado por:

$$P(T+s)^* = C(0)\left(1 + \alpha + \beta\left(\frac{F(0)}{I(0)} - 1\right)\right) \quad (8)$$

que claramente independe de $I(T)$ e de $C(T)$.

Note que tudo que foi dito até o momento pressupõe as seguintes hipóteses, que chamaremos de hipóteses básicas:

— ausência de custos de transação;
— juros conhecidos e não estocásticos;
— estabilidade da relação (2).

Podemos enunciar a proposição 2:

Proposição 2 (composição do portfólio de arbitragem). Valendo as hipóteses básicas, o portfólio composto pela carteira $C(0)$ e pela seqüência de contratos futuros

$$n(t+1,k) = -\frac{\beta C(0)}{hI(0)J(t+k+1,T+s)},\ t = 0,1,\dots T-1$$

vale em $T+s$ $P(T+s)^{*} = C(0)\left(1+\alpha+\beta\left(\frac{F(0)}{I(0)}-1\right)\right)$.

Demonstração: Substitua n dado por (7) na proposição 1 e observe que

$$W(T+k,T+s)J(t+k+1,T+k) = J(t+k+1,T+s).\ \text{CQD}$$

Na prática, dificilmente supomos $\alpha \neq 0$ e, dessa forma, iremos ignorar esse termo daqui em diante para não carregar demais a notação. A hipótese (2) será reduzida simplesmente a:

$$RC(0,T) = \beta\, RI(0,T) \tag{2'}$$

A relação (8) passa a ser dada por:

$$P(T+s)^{*} = C(0)\left(1+\beta\left(\frac{F(0)}{I(0)}-1\right)\right) \tag{8'}$$

Em que situação vale a pena construir o portfólio da proposição 2? Quando o valor de tal portfólio for superior ao seu custo de carregamento. Em termos formais, montamos o portfólio quando:

$$P(T+s)^{*} > J(s,T+s)C(0) \tag{9}$$

O ganho $G(\beta,0,T+s)$ da operação iniciada na data 0, na data $T+s$ é dado por:

$$G(\beta,0,T+s) = \frac{\beta C(0)}{I(0)}[F(0)-F(\beta,0)] \tag{10}$$

onde $F(\beta,\tau) = I(\tau)\left(1+\frac{J(s+\tau,T+s)-1}{\beta}\right)$ (11)

$F(\beta,\tau)$ pode ser interpretado como o índice "justo" na data τ, isto é, se $F(\tau)$ difere de $F(\beta,\tau)$, então há possibilidades de arbitragem, que consiste em comprar ou vender a carteira de ações e adquirir a seqüência de contratos futuros descrita na proposição 2. Enunciemos a proposição 3:

Proposição 3 (preço futuro na ausência de possibilidades de arbitragem). Valendo as hipóteses básicas e o acesso ilimitado ao crédito e ao mecanismo de venda a descoberto, então $F(\tau) = F(\beta,\tau),\ 0 \leq \tau \leq T$.

Demonstração. De (10), se $F(0) > F(\beta,0)$, a compra da carteira conjuntamente à venda de contratos futuros na seqüência da proposição 2 não apresenta nenhum custo inicial para um ganho certo na data $T+s$. Isso porque a compra da carteira pode ser financiada. Com crédito infinito, o investidor obteria um lucro infinito, o que é incompatível com a idéia de equilíbrio.

Se $F(0) < F(\beta,0)$, o investidor faz o reverso, vendendo a carteira a descoberto e aplicando os fundos obtidos até a data $T+s$. A possibilidade de venda infinita a descoberto produz lucros infinitos.

A única configuração de equilíbrio é aquela onde $F(0) = F(\beta,0)$. Para estender o resultado a uma data τ qualquer, basta iniciar a operação de compra ou venda da carteira e aquisição da seqüência de contratos futuros a partir da data τ e notar que analogamente a (10) temos:

$$G(\beta,\tau,T+s) = \frac{\beta\, C(\tau)}{I(\tau)}\left[F(\tau) - F(\beta,\tau)\right] \qquad \text{CQD}(12)$$

As hipóteses de venda a descoberta e acesso a crédito infinitos são trivialmente violadas na prática. Entretanto o resultado é extremamente útil: com $F(\tau) \neq F(\beta,\tau)$, há ganhos de arbitragem a serem explorados que, embora não sejam infinitos, são muito bem-vindos.

Vejamos um exemplo de ganho de arbitragem quando $F(0) < F(\beta,0)$. A trajetória dos preços futuros, as taxas de juros e os prazos são os mesmos das tabelas 1 e 2. Suponha $\beta = 1{,}03$, ou seja, a carteira tende a andar 3% mais rapidamente que o índice à vista.

A liquidação das operações de bolsa no Brasil é feita em dois dias úteis. Assim, o período da transação possui 18 dias úteis, sendo 10 em janeiro e oito em fevereiro. A taxa de juros do período é dada por:

$$(1{,}017)^{10}\,(1{,}0193)^{8} - 1 = 37{,}9195\%$$

Suponha que $I(0) = 51.000$. Isto implica que o índice justo seja dado por:

$$51.000\left(1 + \frac{0{,}379195}{1{,}03}\right) = 69.775{,}68$$

Vendendo o equivalente a CR$102.000.000,00 na carteira, o ganho esperado da arbitragem em 11-2-1994 é de (usando (10)):

$$-\frac{1{,}03^{*}102.000.000}{51.000}\,(68.000 - 69.775{,}68) = 3.657.905{,}84$$

Para tal é necessário seguir a proposição 2, com n dado por (7). No caso W(10-2-1994, 11-2-1994) = 1,0193. Dessa forma n é igual a

$$n = -\frac{1{,}03^{*} - 102.000.000}{50^{*}51.000^{*}1{,}0193} = 40{,}4199$$

Como $I(T) = F(T) = 66.400$, temos que o índice à vista rendeu 30,1961% no período e como $\beta = 1{,}03$ a carteira rendeu 31,1020% no período.

A tabela 3 a seguir mostra a evolução do ganho no mercado futuro até 10-2-1994. A tabela 4 resume o resultado financeiro da operação que é composto de três partes: a) ganho no mercado futuro em 11-2-1994, que é o ganho de 10-2-1994 corrigido por 1,93%; b) ganho decorrente da aplicação dos CR$102.000.000,00 no mercado de juros; e c) ganho decorrente da necessidade de recomprar a carteira a preços de mercado.

Tabela 3

Data	Juros	Fut.	{n}	Ajuste	G. acum.
14-1		68.000	29,8725		
17-1	1,0170	68.200	30,3803		
18-'	1,0170	67.900	30,8968	298.725	298.725
19-1	1,0170	67.800	31,4220	(455.705)	(151.902)
20-1	1,0170	68.000	31,9562	(154.484)	(308.968)
21-1	1,0170	67.400	32,4995	314.220	0
24-1	1,0170	69.000	33,0520	(958.686)	(958.686)
25-1	1,0170	69.000	33,6138	2.599.957	1.624.973
26-1	1,0170	68.000	34,1853	0	1.652.598
27-1	1,0170	68.400	34,7664	(1.680.692)	0
28-1	1,0170	67.000	35,3575	683.706	683.706
31-1	1,0170	66.400	36,0399	(2.433.650)	(1.738.321)
1-2	1,0193	66.300	36,7354	(1.060.724)	(2.828.597)
2-2	1,0193	66.100	37,4444	(180.199)	(3.063.388)
3-2	1,0193	66.500	38,1671	(367.354)	(3.489.865)
4-2	1,0193	66.900	38,9037	748.888	(2.808.331)
7-2	1,0193	67.000	39,6546	763.342	(2.099.190)
8-2	1,0193	66.500	40,4199	194.519	(1.945.186)
9-2	1,0193	66.400		(991.364)	(2.974.092)
10-2				(202.099)	(3.233.592)

Tabela 4

Resultados em 11-2-1994	
Futuros	
10-2-1994	(3.233.591,68)
a) 11-2-1994	(3.296.000,00)
Carteira	
b) Juros	140.677.905,84
c) Recompra	(133.724.000,00)
Total (a + b + c)	3.657.905,84

Hedge *estatístico*

Na seção anterior supomos válida a relação 2, que definia o retorno do índice à vista como a única fonte de variação para o retorno da carteira.

Suponhamos agora uma relação um pouco mais complexa que incorpora a possibilidade de outros fatores afetarem o retorno da carteira:

$$RC(0,T) = \alpha + \beta\, RI(0,T) + \varepsilon \tag{13}$$

Seja $E[X]$ o valor esperado da variável aleatória X. Vamos supor que $E[\varepsilon]$ e $E[\varepsilon RI(0,T)]$ sejam ambos nulos, o que implica ε e $RI(0,T)$ não correlacionados no período.

No que se segue, quando não houver risco de confusão, abreviaremos a notação não escrevendo o período ao qual as variáveis se referem.

Observe que das hipóteses estatísticas acima, a relação (2) vale em termos de valor esperado

$$E[RC] = \alpha + \beta\, E[RI] \tag{14}$$

e que

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(RC, RI)}{\operatorname{var}(RI)} \tag{15}$$

e

$$\operatorname{var}(RC) = \beta^2 \operatorname{var}(RI) + \operatorname{var}(\varepsilon) \tag{16}$$

O valor do portfólio composto pela carteira e n contratos futuros na data $T+s$ é dado por (5) e será repetido aqui por conveniência:

$$P(T+s) = C(0)(1+RC) + nh\big[I(0)(1+RI) - F(0)\big]W \tag{5}$$

O valor esperado e a variância do portfólio em $T+s$ são dados respectivamente por:

$$E\big[P(T+s)\big] = C(0)(1+E[RC]) + nh\big[I(0)(1+E[RI]) - F(0)\big]W \tag{17}$$

$$\operatorname{var}(P(T+s)) = C(0)^2 \operatorname{var}(RC) + (nhI(0)W)^2 \operatorname{var}(RI) + 2\operatorname{cov}(RC, RI)C(0)nhWI(0) \tag{18}$$

O princípio do *hedge* estatístico (ver Duffie, 1989, por exemplo) é minimizar a variância do portfólio através da escolha apropriada do número de contratos futuros. Minimizando a expressão acima em n, obtemos:

$$n = -\frac{C(0)}{hI(0)W(T+k,T+s)}\frac{\operatorname{cov}(RC,RI)}{\operatorname{var}(RI)} \tag{19}$$

Ou usando (15):

$$n = -\frac{\beta\, C(0)}{hI(0)W(T+k,T+s)} \tag{20}$$

que é idêntica à expressão (7).

Substituindo n dado por (20) em (17) e usando a relação (14), temos que o valor esperado do portfólio em $T+s$ coincide com $P(T+s)^*$ dado por (8). Assim, em termos de valor esperado, os procedimentos de imunização do portfólio relativamente ao índice à vista usado na seção anterior e o de minimização da variância do portfólio são equivalentes.

Quanto à variância do portfólio, substituindo n dado por (20) em (18), temos:

$$\mathrm{var}(P(T+s))^* = C(0)^2\,\mathrm{var}(RC) - \beta^2 C(0)^2\,\mathrm{var}(RI) \tag{21}$$

Usando a relação (16), (21) reduz-se a:

$$\mathrm{var}(P(T+s))^* = C(0)^2\,\mathrm{var}(\varepsilon) \tag{22}$$

Observe que a variância do portfólio de arbitragem não é nula, a menos que $\mathrm{var}(\varepsilon) = 0$ que é exatamente o caso da seção Condições de arbitragem. Com $\mathrm{var}(\varepsilon) \neq 0$, o portfólio de arbitragem não pode ser assim chamado, uma vez que ainda existe risco.

Assim, no contexto mais geral da relação (13), as proposições 3 em diante (quando pertinente, é claro; algumas proposições a serem enunciadas posteriormente) somente são válidas se: a) $\mathrm{var}(\varepsilon) = 0$, ou seja a relação entre RC e RI é determinística; ou b) o indivíduo é neutro ao risco, quando a variância residual (22) passa a ser irrelevante. No que se segue, suporemos que alguma dessas condições seja válida.

Liquidação antecipada

Havemos de levantar uma questão importante: em que condições devemos encerrar prematuramente o portfólio da arbitragem? A manutenção do portfólio de arbitragem, de acordo com a regra de ajustes dos contratos, conduz a um ganho de (9) na data $T+s$. O valor desse retorno numa data $\tau + s \leq T+s$ é dado por:

$$\frac{G(\beta,0,T+s)}{J(\tau+s,T+s)} = \frac{\beta C(0)}{I(0)}\frac{[F(0)-F(\beta,0)]}{J(\tau+s,T+s)} \tag{23}$$

Investiguemos agora o retorno do encerramento prematuro do portfólio da arbitragem na data τ. Comecemos pelo retorno da posição de contratos futuros.

Proposição 5 (ganho na posição de futuros). Seguindo a seqüência de contratos da proposição 1, o ganho acumulado da posição de futuros, na data $\tau + s$, iniciada na data 0 e encerrada na data τ, $G(0,\tau + s)$, é dado por:

$$G(0,\tau+s)=\frac{nh[F(\tau)-F(0)]}{J(\tau+s,T+k)} \tag{24}$$

Demonstração. Por definição:

$$G(0,\tau+s)=\sum_{t=0}^{\tau-1} n(t+1,k)\,h[F(t+1)-F(t)]\,J(t+k+1,\tau+s)$$

Multiplicando ambos os termos por $J(\tau+s,T+k)$ obtemos:

$$J(\tau+s,T+k)G(0,\tau+s)=\sum_{t=0}^{\tau-1} n(t+1,k)\,h[F(t+1)-F(t)]\,J(t+k+1,T+k)$$

Usando a definição de $n(t+1, k)$ como na proposição 1 temos que:

$$J(\tau+s,T+k)G(0,\tau+s)=\sum_{t=0}^{\tau-1} nh[F(t+1)-F(t)]=nh[F(\tau)-F(0)]$$

o que demonstra a proposição. CQD

Note da proposição 5 que toda vez que $F(\tau) = F(0)$, o ganho acumulado no mercado futuro se anula, como observado na tabela 1.

No caso da arbitragem de índice, com n dado por (7), temos que:

$$G(0,\tau+s)=-\frac{\beta C(0)}{hI(0)W(T+k,T+s)}\frac{h[F(\tau)-F(0)]}{J(\tau+s,T+k)}$$

ou

$$G(0,\tau+s)=-\frac{\beta C(0)}{I(0)}\frac{[F(\tau)-F(0)]}{J(\tau+s,T+s)} \tag{25}$$

O ganho da carteira em $\tau + s$ é dado por

$$C(\tau)-C(0)J(s,\tau+s) \tag{26}$$

O ganho do portfólio, iniciado em 0, em $\tau + s$ é dado por (26) + (25), ou seja:

$$G(\beta,0,\tau+s)=C(\tau)-C(0)J(s,\tau+s)-\frac{\beta C(0)}{I(0)}\frac{[F(\tau)-F(0)]}{J(\tau+s,T+s)} \tag{27}$$

Observe que $G(\beta,0,\tau + s)$ é função de $C(\tau)$ e $F(\tau)$.

Podemos enunciar a proposição 6, cuja demonstração é evidente.

Proposição 6 (critério para liquidação antecipada). Se $C(\tau)$ e $F(\tau)$ são tais que

$$G(\beta,0,\tau+s) > \frac{G(\beta,0,T+s)}{J(\tau+s,T+s)}$$

então a liquidação antecipada do portfólio de arbitragem é ótima.

O critério da proposição 6 é bastante claro e envolve o cálculo de (23) e (27). Entretanto, existe a idéia intuitiva de que o portfólio de arbitragem deve ser encerrado assim que o índice futuro da data τ atingir o índice justo da mesma data. Vejamos em que condições é possível obtermos tal relação.

Iniciemos notando que, a menos que $\beta = 1$, a carteira rendendo β vezes o retorno do índice em dois subperíodos não renderá β vezes o índice em todo o período. Com efeito para uma data τ arbitrária entre 0 e T:

$$(1+\beta RI(0,\tau))(1+\beta RI(\tau,T)) = \left(1+\beta\left(\frac{I(\tau)}{I(0)}-1\right)\right)\left(1+\beta\left(\frac{I(T)}{I(\tau)}-1\right)\right) \neq \left(1+\beta\left(\frac{I(T)}{I(0)}-1\right)\right)$$

Enunciemos a chamada hipótese de aproximação.

Hipótese de aproximação. O retorno de uma carteira igual a β vezes o retorno do índice em dois subperíodos subseqüentes produz o retorno de β vezes o retorno do índice para todo o período.

Cabe observar que para $\beta = 1$ não há necessidade de tal hipótese, já que esta é trivialmente satisfeita. Valendo a hipótese de aproximação:

$$C(\tau) = C(0)(1+\beta RI(0,\tau)) = C(0)\left(1+\beta\left(\frac{I(\tau)}{I(0)}-1\right)\right) \tag{28}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\dfrac{\beta\, C(0)}{I(0)}\dfrac{F(\beta,0)}{J(\tau+s,T+s)}$ em (25), obtemos:

$$G(0,\tau+s) = \frac{G(\beta,0,\tau+s)}{J(\tau+s,T+s)} + \frac{\beta C(0)}{I(0)}\frac{[F(\beta,0)-F(\tau)]}{J(\tau+s,T+s)} \tag{29}$$

Com (28) e (29) podemos reescrever (27):

$$G(\beta,0,\tau+s) = \frac{G(\beta,0,\tau+s)}{J(\tau+s,T+s)} + \frac{\beta C(0)}{I(0)J(\tau+s,T+s)}A(\beta,\tau,\ldots) \tag{30}$$

onde

$$A(\beta,\tau,\ldots) = I(\tau)J(\tau+s,T+s) + I(0)\frac{1-\beta}{\beta}J(\tau+s,T+s) - \frac{I(0)}{\beta}J(s,T+s) + F(\beta,0) - F(\tau) \tag{31}$$

De posse das equações (30) e (31) podemos enunciar a proposição 6 em outros termos:

Proposição 6′ (critério para liquidação antecipada). Valendo a hipótese de aproximação, se $C(\tau)$ e $F(\tau)$ são tais que $C(0)$ e $A(\beta,\tau,\ldots)$ possuem o mesmo sinal, então a liquidação antecipada do portfólio de arbitragem é ótima.

Vejamos agora como reescrever $A(\beta,\tau,\ldots)$ de uma maneira mais intuitiva. De (11) temos que:

$$F(\beta,0) = \frac{I(0)}{\beta}J(s,T+s) - \frac{1-\beta}{\beta}I(0) \tag{32}$$

Substituindo (32) em (31) obtemos:

$$A(\beta,\tau,\ldots) = I(\tau)J(\tau+s,T+s) - F(\tau) + I(0)\frac{1-\beta}{\beta}(J(\tau+s,T+s)-1) \tag{33}$$

Também de (11) temos:

$$I(\tau)J(\tau+s,T+s) = \beta F(\beta,\tau) + I(\tau)(1-\beta) \tag{34}$$

Substituindo (34) em (33):

$$A(\beta,\tau,\ldots) = \beta(F(\beta,\tau) - F(\tau)) + H(\beta,\tau,\ldots) \tag{35}$$

onde

$$H(\beta,\tau,\ldots) = (1-\beta)\left[\frac{I(0)}{\beta}(J(\tau+s,T+s)-1) + I(\tau) - F(\tau)\right] \tag{36}$$

Se $H(\beta,\tau,\ldots)$ é aproximadamente igual a zero, então o sinal de $A(\beta,\tau,\ldots)$ é dado pelo sinal $F(\beta,\tau) - F(\tau)$. Observe que $H(1,\tau,\ldots) = 0$. Podemos enunciar a proposição 7:

Proposição 7 (critério para liquidação antecipada). Se a) $\beta = 1$ ou b) vale a hipótese de aproximação e $H(\beta,\tau,\ldots) = 0$, então a liquidação antecipada do portfólio de arbitragem é ótima nas seguintes circunstâncias:

a) estamos vendidos a futuro e o preço do contrato futuro na data τ é menor que o contrato justo nesta data; ou

b) estamos comprados a futuro e o preço do contrato futuro na data τ é maior que o contrato justo nesta data.

Demonstração. Iremos demonstrar o item (a), já que o segundo é análogo. Quando estamos vendidos a futuro no portfólio de arbitragem, estamos comprados na carteira, pela proposição 2, ou seja, $C(0) > 0$.

Se e o preço do contrato futuro na data τ é menor que o contrato justo nesta data, então $F(\beta,\tau) - F(\tau) > 0$. Como $H(\beta,\tau,...) = 0$ por hipótese, temos de (35) que $A(\beta,\tau,...) > 0$, tendo, portanto, o mesmo sinal que $C(0)$. Pela proposição 6', a liquidação antecipada é ótima. CQD

A proposição 7 corresponde à idéia intuitiva de que devemos liquidar o portfólio de arbitragem assim que o índice futuro atinge o índice justo. No entanto, tal idéia somente é plenamente correta se $\beta = 1$. Quando β difere de 1 o resultado vale como aproximação, já que não podemos garantir nem a validade da hipótese de aproximação, nem $H(\beta,\tau,...) = 0$.

A seguir apresentamos um exemplo de liquidação antecipada quando $\beta = 1$ e estamos vendidos na carteira de ações e comprados nos futuros de Ibovespa. Todos os dados são idênticos àqueles das tabelas anteriores com a seguintes alterações:

a) o índice justo é dado por $51.000\left(1 + \frac{0,379195}{1}\right) = 70.338,95$;

b) o ganho esperado em 11-2-1994 é de

$$-\frac{1^{*}102.000.000}{51.000}(68.000 - 70.338,952) = 4.677.905,84;$$

c) $n = -\frac{1^{*} - 102.000.000}{50^{*}51.000^{*}1,0193} = 39,2426;$

d) o índice à vista e a carteira renderam 30,1961% no período;

e) em 26-1-1994, oito dias úteis após o início das operações, o índice futuro retorna ao seu nível justo da data; para as outras datas, o preços futuros são os mesmos das tabelas anteriores. O índice à vista subiu 15% desde o início da operação, passando a valer 58.650. A carteira também subiu 15%, e vale CR$117.300.000. A taxa de juros de 28-1-1994 até 11-2-1994 é de $1,379195/(1,017^{8}) = 1,205197$. O futuro justo é dado por:

$$58.650 * 1,205197 = 70.684,80$$

A tabela 5 mostra a evolução do ganho no mercado futuro até 10-2-1994. A tabela 6 resume o resultado financeiro da operação completa, sem encerrá-la em 26-1-1994. Finalmente, a tabela 7 mostra que o resultado da liquidação antecipada em 26-1-1994 é idêntico àquele da tabela 6.

Tabela 5

Data	Juros	Fut.	{n}	Ajuste	G. acum.
14-1		68.000	29,0024		
17-1	1,0170	68.200	29,4955		
18-1	1,0170	67.900	29,9969	290.024	290.024
19-1	1,0170	67.800	30,5068	(442.432)	(147.477)
20-1	1,0170	68.000	31,0254	(149.984)	(299.969)
21-1	1,0170	67.400	31,5529	305.068	0
24-1	1,0170	69.000	32,0893	(930.763)	(930.763)
25-1	1,0170	69.000	32,6348	2.524.231	1.577.644
26-1	1,0170	70.685	33,1896	0	1.604.464
27-1	1,0170	68.400	33,7538	2.749.177	4.380.917
28-1	1,0170	67.000	34,3276	(3.791.601)	663.792
31-1	1,0170	66.400	34,9902	(2.362.767)	(1.687.691)
1-2	1,0193	66.300	35,6655	(1.029.829)	(2.746.210)
2-2	1,0193	66.100	36,3538	(174.951)	(2.974.163)
3-2	1,0193	66.500	37,0554	(356.655)	(3.388.219)
4-2	1,0193	66.900	37,7706	727.076	(2.726.535)
7-2	1,0193	67.000	38,4996	741.109	(2.038.049)
8-2	1,0193	66.500	39,2426	188.853	(1.888.530)
9-2	1,0193	66.400		(962.489)	(2.887.468)
10-2				(196.213)	(3.139.409)

Tabela 6

Resultados em 11-2-1994	
Futuros	
10-2-1994	(3.139.409,40)
a) 11-2-1994	(3.200.000,00)
Carteira	
b) Juros	140.677.905,84
c) Recompra	(132.800.000,00)
Total (a + b + c)	4.677.905,84

Tabela 7

Resultados em 28-1-1994	
Futuros	
27-1-1994	4.380.917,29
a) 28-1-1994	4.455.392,88
Carteira	
b) Juros	116.726.051,58
c) Recompra	(117.300.000,00)
Total (a + b + c)	3.881.444,46
Juros	20,5197%
Resultado em 11-2-1994	4.677.905,84

Aspectos Operacionais

Nesta subseção abordaremos três questões operacionais importantes para a montagem da operação de arbtitragem de uma carteira de ações contra futuro de índice.

A primeira questão diz respeito às taxas de juros. Todos os resultados aqui obtidos, em especial a obtenção do preço "justo" para o futuro de índice, partiram do pressuposto do conhecimento prévio das taxas de juros, o que pode ser uma hipótese por demais simplificadora.

Em particular, posições compradas em futuros de índice (e vendidas na carteira de ações) são beneficiadas com a elevação das taxas de juros, o contrário ocorrendo para posições vendidas.

O procedimento adequado seria fazer um *hedge* para a taxa de juros, o que está fora do escopo deste trabalho.

O segundo ponto relaciona-se ao critério de seleção da carteira de ações. A carteira deve ser escolhida de maneira a possuir o beta mais estável possível, para que o desempenho da carteira relativamente ao índice não sofra desvios significativos do desempenho esperado.

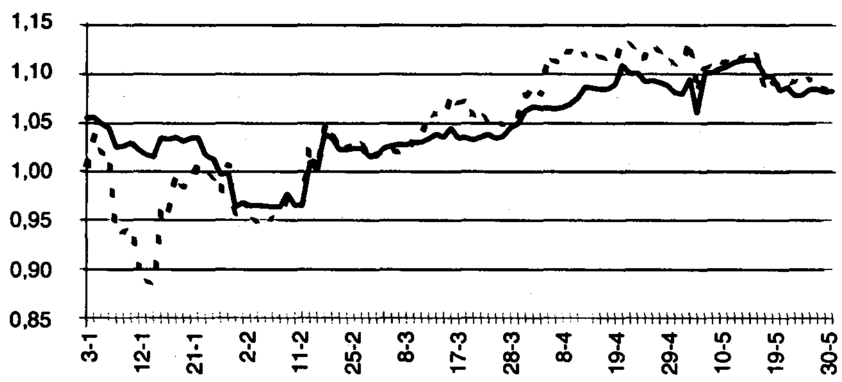
Observe que este critério pode não coincidir com aquele mais difundido de se escolher a carteira com o beta mais próximo de 1.

Na prática, entretanto, a seleção da carteira não é uma tarefa fácil por dois motivos: a) a inclusão de diversos papéis pode inviabilizar a execução da operação, e b) para carteiras relativamente pequenas, os betas podem ser muito instáveis.

A instabilidade dos betas é o nosso terceiro ponto. A título de exemplo, mostramos abaixo um gráfico dos betas de Telebrás PN, a ação de maior participação no Índice Bovespa, com uma participação superior a 30%.

Os betas foram estimados a partir de regressões lineares simples, utilizando-se o método de mínimos quadrados ordinários. A linha contínua corresponde a uma amostra de três meses e a pontilhada, a uma amostra de dois meses.

Betas de Telebrás PN
1994



Observe que mesmo a estimativa de três meses, mais estável, flutua consideravelmente. Na prática, este problema é grave, já que em geral lidamos com prazos inferiores a dois meses.

O gráfico acima sugere a aleatoriedade do parâmetro β. Para analisarmos os efeitos disso sobre o *hedge* da carteira de ações com futuros de Ibovespa, consideremos a seguinte adição à modelagem da seção *Hedge* estatístico:

$$\beta = \beta^* + \delta \tag{37}$$

com $E[\delta] = E[\delta\varepsilon] = E[\delta RI] = 0$. Dessa forma, o valor esperado de β é β^*.

Podemos escrever a seguinte equação:

$$RC(0,T) = a + \beta^* RI(0,T) + \theta \tag{13'}$$

onde $\theta = \delta RI(0,T) + \varepsilon$. Nosso problema passa a ser estimar β^*.

Como $E[\theta] = 0$, podemos escrever:

$$E[RC] = a + \beta^* E[RI] \tag{14'}$$

Analogamente à seção *Hedge* estatístico, gostaríamos de mostrar que β^* é a razão entre a covariância entre *RC* e *RI*, dividido pela variância de *RI*. Infelizmente, obtemos apenas a relação abaixo:

$$\beta^* = \frac{\mathrm{cov}(RC, RI) - E\left[\delta RI^2\right]}{\mathrm{var}(RI)} \tag{15'}$$

O efeito prático da aleatoriedade de β é tornar inadequada a sua estimação através de mínimos quadrados ordinários, que fornece estimadores viesados para o parâmetro. O problema aqui é a questão clássica de correlação entre o erro e a variável independente ($\mathrm{cov}(\theta, RI) = E[\delta RI]$).

Fica evidente a necessidade da modelagem do processo estocástico de β, mas isto foge ao escopo deste trabalho. Uma sugestão interessante seria fazer com que a estimativa do parâmetro dependesse mais fortemente da informação recente, como num modelo ARCH (ver Engle, 1982, por exemplo). A idéia subjacente a esta modelagem é que os mercados financeiros se adaptam rapidamente às novas condições de mercado, tornando relações históricas de variáveis tão menos relevantes quanto mais distantes no tempo. Para um resumo de aplicações da modelagem ARCH e outras técnicas daí decorrentes, ver Bollerslev, Chou e Kroner (1992).

Por fim, cabe ressaltar que, independente do modelo usado para se estimar o β, é necessário "calibrar" as estimativas desse parâmetro de acordo com as condições de mercado. Isso é especialmente importante quando há mudanças de regime no relacionamento dos papéis da carteira relativamente ao índice. A título de exemplo, considere que a atividade de uma determinada empresa fique comprometida após a descoberta de uma nova tecnologia. Nesse caso, é de se esperar que a ação dessa empresa tenha pior desempenho do que antes da inovação tecnológica, pelo menos pelo período necessário à completa absorção da informação pelos participantes do mercado. Nessa situação, a informação histórica produz indicações erradas qualquer que seja o modelo utilizado, dada a impossibilidade da descoberta tecnológica estar refletida na série passada de preços.

Outro aspecto importante dessa "calibragem" é a questão do tratamento da amostra. Problemas na divulgação da série de preços, bem como observações muito díspares das outras observações amostrais, podem introduzir ruído e conseqüentemente erros na estimação.

4. Conclusões

A utilização de contratos futuros envolve algumas complicações técnicas, relativamente aos contratos a termo, já que as taxas de juros nominais são positivas. Tais complicações traduzem-se pela necessidade de se ajustar o número de contratos futuros numa determinada seqüência, para que se obtenha o resultado desejado. A obtenção da seqüência de contratos requer a incorporação dos prazos de liquidação financeira, bem como o pleno conhecimento da estrutura a termo de juros. Na ausência deste último, é necessário fazer um *hedge* para as taxas de juros.

O preço de um contrato futuro se relaciona com o preço do ativo ou índice à vista, mas a maneira exata como isto se dá depende de variáveis como taxas de juros, custos de transação, estabilidade de parâmetros estatísticos e outros. Neste artigo supomos a estrutura a termo conhecida, ausência de custos de transação e parâmetro β conhecido e constante. Vimos o papel fundamental que tal parâmetro desempenha: o índice à vista e a estrutura a termo não são suficientes para determinar o preço do contrato futuro. É necessário saber como a carteira de ações se relaciona ao índice à vista. Uma vez conhecida essa relação, o preço futuro é determinado por arbitragem através da construção de um portfólio adequado.

Tal arbitragem por sua vez só pode ser considerada como tal (i.e., sem risco) sob determinadas condições: indivíduo neutro ao risco e/ou retorno da carteira unicamente dependente do retorno do índice à vista. Se tais condições não forem válidas, temos apenas um portfólio de variância mínima, que, no entanto, faz com que o preço futuro não se diferencie demais do preço "justo", uma vez que essa variância mínima independe da diferença entre o preço efetivo e o preço "justo", mas o ganho esperado cresce na razão direta da diferença.

Uma vez constituído o portfólio de arbitragem, não é necessário aguardar o vencimento do contrato futuro para obter o lucro esperado. Sob determinadas condições, a posição deve ser encerrada quando o índice futuro retorna ao preço "justo" da data corrente.

Referências bibliográficas

Bollerslev, Tim; Chou, Ray Y. & Kroner, Kenneth F. ARCH modeling in finance. A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics* (52): 5-59, 1992.

Bolsa Mercantil e de Futuros. *Especificação de contratos*. 1993

Cox, J.; Ingersoll & Ross, S. The relation between forward prices and futures prices. *Journal of Financial Economics* (9): 321-46, 1981.

Duffie, Darrel. *Futures markets*. Prentice-Hall International, 1989.

Engle, Robert F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* (50), 987-1.008, 1982.

Kolb, Robert W. *Understanding futures markets*. Kolb Publishing Company, 1991.

Hull, John. *Options, futures and other derivative securities*. Prentice-Hall, 1989.

Varga, Gyorgy. Estratégias de proteção no mercado futuro de dólar. *Revista Brasileira de Economia*, *47*(3): 449-66, jul./set. 1993.