

Considerações Adicionais Sobre Investimentos

Octávio Gouvea de Bulhões * e
Carlos Alberto N. Cosenza

1. Introdução. 2. A Produção Indireta. 3. O Período Médio de Produção e o Fundo de Subsistência. 4. A Generalização do Período Médio de Produção e a Não Consideração do Incremento de Produtividade por parte de Böhm-Bawerk. 5. A Contribuição de Knut Wicksell. 6. Rentabilidade e Investimentos. 7. A Taxa de Juros do Mercado e o Equilíbrio de Longo Prazo.

Temos repetido que enquanto os economistas não deram ênfase à produção indireta, o conceito de investimento manteve-se nebuloso. É que a caracterização do investimento reside na produção indireta, por ser esse o meio de imprimir-se um acréscimo de produtividade à produção.

Se insistimos nesse destaque é porque o propósito da melhoria de eficiência, via produção indireta, envolve grande número de variáveis: tempo de duração da produção indireta; custo de produção; custo de financiamento; perspectiva de receita, em comparação com a rentabilidade dos empreendimentos presentes; expectativa da depreciação dos equipamentos; expectativa da obsolescência do processo produtivo; risco do empreendi-

* Da Universidade Federal do Rio de Janeiro

mento, em comparação com o de outros empreendimentos; tendência geral da economia do país; perspectivas da ampliação do mercado interno; possibilidades de **exportação**; concorrência do exterior, no mercado nacional e nos mercados **internacionais**. Tôda essa gama de indagações faz parte de um projeto de investimento. Mas, didaticamente, para precisarmos a compreensão do investimento, cumpre-nos ressaltar a peça essencial de sua conceituação, ou seja, a finalidade do acréscimo da eficiência por meio do processo indireto de produção.

2. A Produção Indireta

Um exemplo elementar de Wicksell

$$\frac{R'_t}{R_t} = i$$

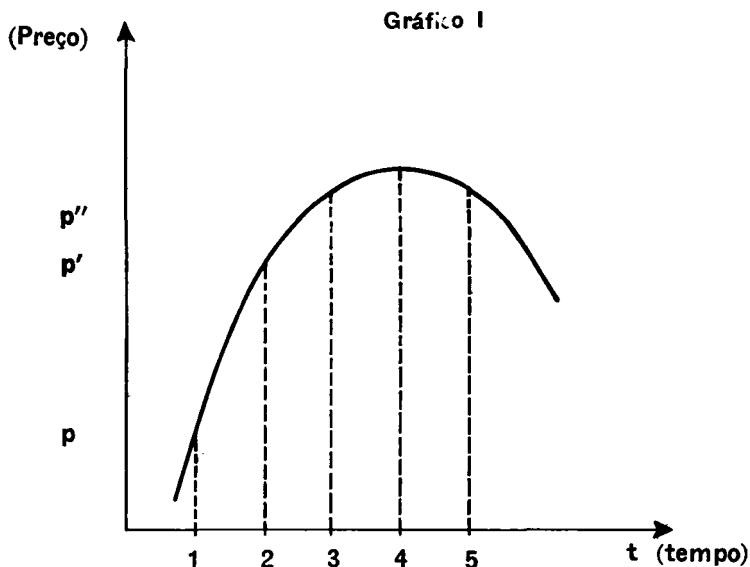
Wicksell, ao verificar a importância do realce do aspecto essencial do investimento, recorreu ao exemplo da produção do vinho, singela demonstração de uma produção indireta, com a finalidade da melhoria da oferta do produto.

Sabemos, por experiência, que o vinho armazenado adquire melhor qualidade e, portanto, pode ser vendido a preço mais elevado. O vinho armazenado corresponde, pois, a um consumo diferido — característica da produção indireta — e a melhoria da qualidade do produto, com o armazenamento, caracteriza a finalidade do investimento. Sejam os seguintes os preços, considerados no exemplo aritmético de Wicksell, correspondentes aos períodos de armazenamento:

Quadro I

	Período de Armazenamento				
	Preço Inicial	Um Ano	Dois Anos	Três Anos	Quatro Anos
Preços	67	73	80	90	100
Diferenças		6	7	10	10

As diferenças de acréscimo indicam que do terceiro período em diante os acréscimos cessam de aumentar e, provavelmente, depois do quarto período os preços deverão sofrer incrementos negativos.



Muito embora, nesse exemplo, por sua singeleza, o elemento tempo seja destacável com maior nitidez do que o próprio processo indireto de produção, êsse aspecto é que deve ser observado com mais atenção. Note-se que o produto poderia ser ofertado logo depois de produzido. Haveria uma produção seguida de consumo. Decide-se, entretanto, submeter a produção a um *prolongamento*, para aperfeiçoar o produto. Difere-se o consumo. O produtor abstém-se de receber uma receita; o consumidor abstém-se de consumir. Há uma poupança, em favor do investimento. Quanto mais prolongado o processo de produção indireta, tanto maior o requisito da poupança. Mas o período do prolongamento não constitui a condição essencial. Pode ser menor, pode ser maior. O requisito essencial é o processo indireto. O *elemento tempo* está implícito nesse processo. Se, por exemplo, o processo no terceiro período fôsse de 85, em vez de 90, e de 90, em vez de 100, poderíamos depreender, de relance, que a produção indireta seria levada a efeito até o segundo período, por ser êsse o de maior acréscimo de produtividade, nas condições existentes.

Suponhamos um empresário que tenha produzido determinada quantidade de vinho ao custo de C unidades monetárias, que vamos considerar como o seu investimento inicial.

O prolongamento do processo de produção compreende, no caso, o tempo para fermentação e envelhecimento.¹

¹ Veja HENDERSON, J.M. QUANDT R.E. *Microeconomic Theory* point — input — point-output e SIMONSEN, M.H. O Período de Produção. In: *Teoria Microeconômica* vol. 3, p. 236.

Suponha-se, para facilidade de análise, que sejam nulos os custos referentes à extensão do processo produtivo e, considere-se somente como tal os juros (i) (considerados constantes no exemplo), referentes ao Investimento Inicial.

O problema do empresário consiste na determinação do período ótimo a ser estabelecido para o prolongamento da produção, já que se considera o preço de mercado como função do tempo: $p = \varphi(t)$.

Portanto, cabe-lhe estabelecer o valor de t que otimize o valor atual de seu ganho.

Podemos expressar seu lucro da forma:

$$L = R(t) e^{-it} - C$$

Maximiza-se o lucro derivando a expressão com relação ao tempo (t) e igualando o seu resultado a zero,

$$\frac{dL}{dt} = R'(t) e^{-it} - iR(t) e^{-it} = 0$$

$$R'(t) e^{-it} = iR(t) e^{-it}$$

$$\therefore \frac{R'(t)}{R(t)} = i$$

Conclui-se, então, que o empresário, em condições de maximização, iguala a taxa de juros ou taxa marginal de custo à taxa de rendimento marginal, com relação ao período da produção indireta.

Convém insistir no processo indireto de produção e na finalidade do acréscimo da eficiência desse processo produtivo porque, conforme destacamos inicialmente, as variáveis são muitas e o realce de algumas delas embaraça a nitidez da compreensão do investimento. O próprio Wicksell, por exemplo, dá muita ênfase ao *elemento tempo*; Böhm-Bawerk enreda-se na análise do *período da produção*. A ênfase do *elemento tempo* tem dado margem a um destaque excessivo da taxa de juros.

3. O Período Médio de Produção e o Fundo de Subsistência

Elementos essenciais da Teoria de Böhm-Bawerk

$$F = N \cdot S \cdot T_m$$

Ao discorrer sobre a produção indireta Böhm-Bawerk generalizou o conceito de período da produção, cometendo o erro de não considerar o adicionamento da produtividade.

Por uma conveniência didática, desenvolveremos esta crítica no item 4, após uma apresentação sucinta do estudo matemático de Böhm-Bawerk, baseada na síntese que Friedrich Lutz² nos oferece.

Böhm-Bawerk elegeu o *período de produção* e o *fundo de subsistência* como os elementos essenciais do investimento.

Expressou sua função de produtividade da forma: $q = \varphi(T_m)$ onde q é o produto de um trabalhador por unidade de tempo e T_m o período médio de produção.

Por sua vez, o conceito de rendimento interno, por unidade de tempo, permite representar o produto do fator trabalho como sendo:

$q = S(1 + iT_m)$, onde i é a taxa de juros, por unidade de tempo, e S o salário de um trabalhador por unidade de tempo. Conclui-se, então, facilmente, que a taxa de retôrno ou taxa de juros, pode ser calculada através da fórmula:

$$i = \frac{q - S}{S \cdot T_m}$$

Portanto, estabelecida a remuneração da mão-de-obra, o empresário determina o *período médio de produção* e maximiza a taxa de retôrno ou taxa de juros.

A condição de 1.^a ordem para essa maximização requer que:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dT_m} &= 0 \\ \frac{di}{dT_m} &= \frac{\frac{dq}{dT_m} (S \cdot T_m) - (q - S)S}{S^2 \cdot T_m^2} = 0 \\ \therefore \quad \frac{dq}{dT_m} &= \frac{q - S}{T_m} \end{aligned}$$

Tal equação mostra que em condições de maximização, o produto marginal do processo indireto de produção é igual ao juro ganho por unidade de tempo.

² FRIEDRICH LUTZ. — *The Theory of Interest* — examina as idéias de Böhm-Bawerk, dizendo que o *período de produção* e o fundo de subsistência constituem os elementos essenciais. O período de produção, ou mais precisamente, o período médio de produção, corresponde à unidade de cada fator (para simplificar a unidade de trabalho) empregada no processo produtivo, multiplicada pelo tempo, entre a data de seu emprêgo e a da conclusão do produto.

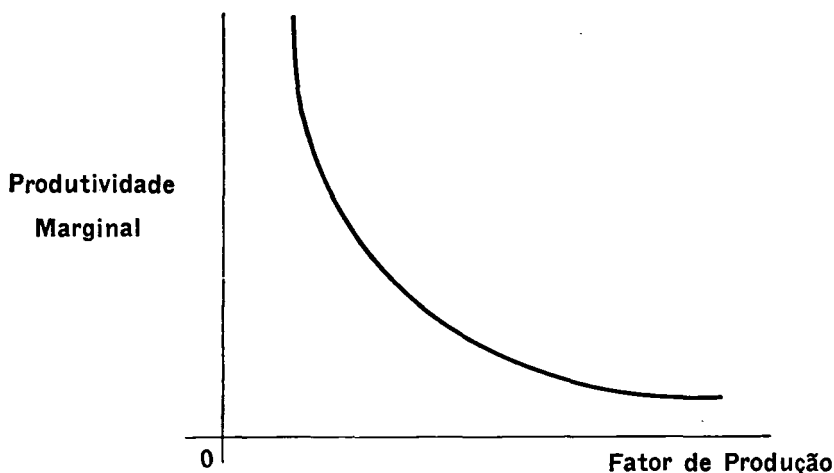
A condição de 2.ª ordem, exige, por sua vez, que:

$$\frac{d^2q}{dT_m^2} = \frac{\frac{dq}{dT_m} \cdot T_m - q + S}{T_m^2} < 0,$$

ou seja que o produto do trabalhador cresce a uma taxa decrescente.

Tal análise é similar às realizadas para a determinação das curvas de procura dos fatores, a partir dos rendimentos marginais dos produtos.

Gráfico II



Verificamos, outrossim, que a expressão:

$$i = \frac{dq}{dT_m} \cdot \frac{1}{S},$$

permite concluir que a taxa de juros é igual ao produto marginal da extensão do processo de produção dividido pelo salário do trabalhador por unidade de tempo.

Lutz observa, no apêndice matemático apresentado em sua obra, que na análise da economia como um todo, o salário torna-se uma incógnita, justificando no modelo a introdução, por parte de Böhm-Bawerk, de uma equação adicional:

$$F = N \cdot S \cdot T_m$$

onde F é um fundo de subsistência que, em condições de equilíbrio, deve ser absorvido durante o período médio de produção, e N o total de mão-de-obra considerada no sistema.

Constata-se, f cilmente, que os recursos necessários para a remuneração do fator mão-de-obra, durante êsse período, podem ser estabelecidos por:

$$K = ST_m$$

onde K   o capital por trabalhador.

Derivando a equação acima com relação ao período médio de produção, vamos obter:

$$\frac{dK}{dT_m} = T_m \frac{dS}{dT_m} + S$$

Sabemos que para o empresário individual $\frac{dS}{dT_m} = 0$, significando que o total de recursos requeridos pelo empresário, para um prolongamento do processo de produção, deve ser igual ao s l rio do trabalhador, por unidade de tempo:

Como $\frac{dK}{dT_m} = S$, temos:

$$i = \frac{q - S}{K}$$

$$\frac{di}{dT_m} = \frac{\frac{dq}{dT_m} K - (q - S) \frac{dK}{dT_m}}{K^2} = 0$$

$$\frac{dq}{dT_m} K - (q - S) \frac{dK}{dT_m} = 0$$

$$K \frac{dq}{dT_m} = (q - S) \frac{dK}{dT_m}$$

$$\frac{\frac{dq}{dT_m}}{\frac{dK}{dT_m}} = i \quad \therefore \quad i = \frac{dq}{dK}$$

Donde se conclui que o empresário em condições de maximização iguala i   taxa interna de retôrno marginal ou produto marginal do capital.

4. A Generalização do Período Médio de Produção e a não consideração do incremento de Produtividade por parte de B hm-Bawerk

Ao falar da produção indireta, B hm-Bawerk julgou que deveria generalizar o conceito de período de produção e medir a diferença entre

a data da aplicação dos fatores de produção e a data da conclusão do produto. Mas a generalização do período de produção não traz esclarecimentos ao fenômeno do investimento. Em qualquer produção, existe uma defasagem entre o emprego dos fatores e a conclusão do produto. Transformar, por exemplo, algodão em tecido e o tecido produzido em venda ao consumidor, equivale a um lapso de tempo de várias semanas. A distância, no tempo, entre as despesas e a receita exige uma antecipação de recursos, fornecida, em parte, por capital próprio e, em parte, pela utilização de reservas monetárias. Nada disso, entretanto, traduz o processo indireto de produção. A transformação de matéria-prima em fios e, depois, em tecidos, constitui rotina de uma fábrica já construída, com instalações e equipamentos em uso. É uma escala de produção resultante de um investimento passado.

O que interessa à análise é o exame do investimento no presente.

Lutz detém-se muito no aspecto das inconsistências do imaginado período de produção e, por esse motivo, não encara o aspecto mais importante da diferenciação entre a produção direta e a produção indireta. Mesmo quando examina e critica Wicksell, a atenção de Lutz continua presa a contradições relacionadas com o período de produção, muito embora Wicksell tenha trazido complementos preciosos à compreensão da importância da análise do investimento como produção peculiar, pelos efeitos que provoca no conjunto da economia.

Böhm-Bawerk envolveu-se no emaranhado da generalização do *período médio da produção* porque, não obstante ter tido a genial compreensão da característica essencial do investimento, deixou de considerar o incremento da produtividade, propiciada pelo investimento. Seus antecessores tinham assinalado o aumento da *produtividade do capital*. Todavia, Böhm-Bawerk manteve-se perplexo ante o problema dos *valôres* dos fatores e dos produtos. Se o equipamento, como fator da produção, é capaz de aumentar a produção, esse aumento vai refletir-se na *valorização* do equipamento, fazendo desaparecer o lucro do investimento.³

3 Concordamos em admitir que o capital possua realmente a produtividade física que se lhe atribuiu, isto é, que se pode, na verdade, produzir mais com a sua presença do que poderia sem a sua contribuição. Mas que os bens produzidos em maior quantidade, com auxílio do capital, tenham, também, maior valor do que o capital empregado para a sua formação, é coisa a ser demonstrada. Se um pescador, com o barco e a rede, consegue pescar muito maior quantidade de peixes do que pescaria sem o auxílio desse barco e dessa rede, isso não significa que o valor da pesca supere o valor do barco e dessa rede, isso não significa que o valor da pesca supere o valor do barco e da rede. (*Histoire Critique des Théories de L'Interêt et Capital*. Giard de Brière vol. 1, p.176-177).

Nessa ordem de considerações, há um equívoco. Confunde-se investimento com capital, assunto que trataremos mais adiante, principalmente quando fizermos referência a Keynes. A *valorização* dos equipamentos pode ocorrer na empresa que realizou o investimento. Mas essa valorização é consequência do Lucro do Investimento. Cabe, ainda, frizar que o lucro do investimento é fenômeno de vasta amplitude. Não se restringe à remuneração do capital.

O acréscimo de produtividade, originado do investimento, peça de primordial importância, foi relegado a um plano secundário. Se Böhm-Bawerk tivesse dado mais atenção a esse fato, ele não precisaria recorrer à consideração de caráter psicológico do ágio dos bens presentes sobre os bens futuros, como explicação do lucro.⁴ Em vez de relacionar o lucro à melhoria da eficiência entre dois *processos produtivos diferentes*, um superior ao outro, ele admite o lucro no mesmo processo produtivo, isto é, na mesma escala de produção, sendo o lucro o resultado da diferença entre o *valor* das matérias-primas (bens futuros, porque dependem de transformação) e o *valor* dos produtos (bens presentes). Daí a idéia notoriamente errônea, de quanto mais prolongada a defasagem entre o emprêgo dos fatores de produção e o acabamento do produto, tanto maior o lucro da produção.⁵

5. A Contribuição de Knut Wicksell

$$F = Ns \int_0^T e^{jt_1} dt_1 + lr \int_0^T e^{jt_2} dt_2$$

Wicksell melhorou a contribuição de Böhm-Bawerk ao acentuar a importância do processo indireto de produção, como conceituação do investimento e ao destacar o lucro do investimento, como resultado do acréscimo de produtividade. Tais idéias estão envoltas com outras, de menor relêvo ou mesmo falsamente relacionadas com o investimento ou, ainda, expostas em condições que permitem considerá-las fora de realidade, quando, de fato, traduzem simplificações admissíveis.

⁴ Bens presentes são, em princípio, de valor maior do que os mesmos bens, em qualidade e número, aos bens disponíveis no futuro. Essa proposição é a peça essencial e central da teoria do juro (ver na *Teoria Positiva do Capital*, na publicação de C.E., Stechert de Nova Iorque, livro V, cap. I, p. 237).

A observação de Böhm-Bawerk pode explicar o juro por parte do poupador (suprimento de capital); não, porém, no que diz respeito à procura de capital e, muito menos, como explicação do lucro do investimento.

⁵ Veja nota ².

Wicksell introduz na função de produtividade de Böhm-Bawerk a quantidade de terra trabalhada (l), por unidade de mão-de-obra empregada (n), do que resulta:

$$q = f(l, T_m)$$

Sabemos, por outro lado, que o produto por unidade de mão-de-obra empregada é:

$$q = (s + si T_m) + (rl + li T_m)$$

onde r é a renda por unidade de terra trabalhada, por unidade de tempo.

Tal desenvolvimento matemático da teoria de Wicksell, apresentada pelo autor em seu livro *Value, Capital and Rent*, é reproduzido por Lutz em *The Theory of Interest* através de um modelo simplês e claro.

Observando a seqüência de Lutz, partimos da expressão:

$$q = (s + rl) \cdot (1 + i T_m)$$

ou

$$i = \frac{q - (s + rl)}{T_m(s + rl)}$$

Para maximizar a taxa de retôrno ou taxa de juros, devemos derivar a expressão acima em relação ao período médio de produção e igualar seu resultado a zero:

$$\frac{\partial i}{\partial T_m} = \frac{T_m(s + rl) \frac{\partial q}{\partial T_m} - [q - (s + rl)](s + rl)}{T_m^2(s + rl)^2} = 0$$

$$\text{Obtendo-se: } \frac{\partial q}{\partial T_m} = [q - (s + rl)] \cdot \frac{1}{T_m}$$

Podemos, então, escrever a taxa de juros ou retôrno como sendo:

$$i = \frac{\partial q}{\partial T_m} \cdot \frac{1}{s + rl}$$

Tal equação mostra que i em condições de maximização, se iguala à produtividade marginal dividida pelo capital que é absorvido durante o período médio de produção.

Consideremos a equação: $i = \frac{q - (s + rl)}{T_m (s + rl)}$, derivando-a em relação a l e igualando a zero o seu resultado, vamos obter:

$$\frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{1}{r T_m} = \frac{q}{(s + rl) \cdot T_m}$$

Verificamos, então, que i atinge o seu valor máximo, quando o produto marginal do fator *terra*, dividido pelo capital relacionado à última unidade desse fator, fôr igual à produção média obtida, sobre o total de recursos investidos por trabalhador.

Inserindo a equação: $q = (s + rl) (1 + i T_m)$ na equação anterior, obtemos:

$$r = \frac{\frac{\partial q}{\partial l}}{1 + i T_m}$$

o que demonstra que o produto marginal do fator terra descontado deve ser igual ao rendimento.

Wicksell considerou no processo indireto de produção os períodos de investimento nos fatores da produção, dando destaque ao acréscimo da produtividade e sua incidência sobre o lucro do investimento.

Se recorrermos à linguagem hodierna e tivermos a preocupação de pinçar o fundamental ao que está sendo considerado, podemos, com Wicksell, dizer que investimento é a aplicação de recursos, retirados da produção direta (bens de consumo) destinados à construção de novas escalas de produção. O lucro do investimento é o resultado da maior produtividade da nova escala de produção, em comparação com a produtividade de escalas de produção de investimentos anteriores.⁶

⁶ Em que consiste o capital? É de uso pensar-se, responde WICKSELL, em estoque de bens. Mas isso é incorreto. O capital não deve ter a forma material para a compreensão do fenômeno do investimento. Deve ser entendido como ato de renúncia ao consumo presente. Em face da redução do consumo (redução no sentido de acréscimo menor), os fatores de produção são liberados para a realização dos investimentos que visam à melhora da futura produção de bens. (Realização da *produção indireta* para garantir a eficiência da produção direta). Esse trecho do Vol. II explica a definição do capital (investimento) que figura no vol. I. Capital significa trabalho e terra economizados. Juro (Lucro do investimento) é a diferença entre a produtividade marginal do trabalho e da terra economizados e a do trabalho e terra correntes. *Lectures on Political Economy*. vol. I, p. 154, vol. II, p. 192. Trabalho e terra economizados traduzem a idéia de transferência de recursos do consumo — poupança — para a realização de investimentos. Pena que não se tenha dado mais atenção a esse crucial aspecto da conceituação do investimento. Mesmo economistas de invulgar capacidade didática e profundos conhecimentos econômicos, como Mário Henrique Simonsen, esquecem-se desse aspecto, limitando-se a dizer o seguinte: “a

No exemplo numérico da produção de vinho, a cada período de produção corresponde uma *escala* de produção, com diferentes graus de produtividade, em relação aos investimentos de 67, 73, 80 e 90.

A ênfase dada ao deslocamento de recursos do consumo para o investimento pode parecer desnecessária em país altamente desenvolvido. Se, todavia, houver sinais de crescente procura de bens e serviços, a observação wickselliana assume papel importante e tanto mais importante quanto mais pronunciado fôr o impulso de dispêndio, em contraste com a escassez de disponibilidade de fatores de produção.

Wicksell, ao introduzir na função de produção os períodos de investimentos necessários à sua realização, modificou também a estrutura do fundo de subsistência.

A função de produção passa a ser:

$$Q = \Psi(n, l, t_1, t_2)$$

onde Q é total da produção; n o número de trabalhadores considerados; l a quantidade de fator (terra) trabalhado; t_1 o período de investimento em mão-de-obra e t_2 o período de investimento em quantidade de terra trabalhada.

Em seu estudo, diz Wicksell que o produto total deve ser igual à soma dos rendimentos e dos salários pagos mais a taxa de juros compostos no tempo que resulta de ambos.⁷

Em consequência, Friedrich Lutz apresenta a expressão de Wicksell da forma:

$$Q = n s e^{j t_1} + l r e^{j t_2}$$

onde s é o salário de um trabalhador, r os rendimentos por unidade de terra trabalhada e j a taxa de juros que se compõe continuamente no tempo.⁸

produção indireta se caracteriza pela intervenção do fator tempo, isto é, pela introdução de alguma defasagem entre a aplicação dos fatores de produção e a obtenção dos produtos. É *nessa linha* (a do elemento tempo) que se chega à afirmação clássica (alusão a Wicksell) de que "capital nada mais é do que terra e trabalhos acumulados", *Teoria Microeconômica*, vol. 3, p. 183. Dentro dessa ordem de considerações, sua análise do exemplo do vinho dá ênfase ao *elemento tempo*, adequado à matemática financeira, exposta aliás, pelo próprio Wicksell. Felizmente, Simonsen, em suas conclusões, faz ressalvas pertinentes (p. 239).

⁷ A consideração do período de investimento; no caso, requer que o tempo (t) seja uma variável contínua, onde as transações econômicas se verifiquem em qualquer ponto do tempo, admitindo-se, também, que os juros se compõem continuamente.

⁸ Rigorosamente, j é:

$j = \log(1 + i)$, onde i é a taxa de juros.

Para maximizar j , diferencia-se parcialmente a equação em relação a n, l, t_1 e t_2 :

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = s e^{j t_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = r l^{j t_2}$$

donde resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial n} \cdot e^{-j t_1} = s,$$

ou seja, o produto físico marginal descontado, de um trabalhador, num dado instante, do período de investimento (t_1) deve ser igual ao ganho do trabalhador.

$$e, \quad \frac{\partial Q}{\partial l} \cdot e^{-j t_2} = r,$$

o que demonstra que o produto marginal da terra descontado durante o período de investimento (t_2) deve ser igual à renda por unidade de fator terra.

Deduz-se, também:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t_1}}{l \cdot r \cdot e^{j t_1}} \quad e \quad \gamma = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t_2}}{l \cdot r \cdot e^{j t_2}}$$

Estas duas equações mostram que j deve ser igual à produtividade marginal do prolongamento do período de investimento referente a cada um dos fatores, dividida pela contribuição desses fatores para o valor do produto.

Friedrich Lutz faz outras observações sobre a suposta função homogênea linear de n e l , no exemplo de Wicksell da produção de vinho, mostrando que a equação:

$$Q = n s e^{j t_1} + l r e^{j t_2},$$

não pode ser considerada como independente das equações de produtividade marginal.

Em consequência, são relacionadas 5 equações com 8 incógnitas Q, n, l, t_1, t_2, j, s e r .

Mostra Lutz, desta forma, que são necessárias mais três equações. Uma expressando a condição de que todo o trabalho deve ser empregado, e conseqüentemente, $n = N$. De maneira análoga, temos: $t = T$.

Isto pôsto, temos a condição que o fundo de subsistência deve ser absorvido pelos salários e rendimentos pagos.

$$F = N \cdot s \int_0^T e^{jt_1} dt_1 + lr \int_0^T e^{jt_2} dt_2$$

6. Rentabilidade e Investimentos. Outras Considerações.

A definição de Keynes é mais precisa do que a de Wicksell na indicação da rentabilidade, mas tem a desvantagem de silenciar sôbre o processo indireto de produção. Keynes ressalta que o realizador de um investimento espera auferir uma série de rendimentos durante o tempo de existência do empreendimento, devendo a soma das anuidades, devidamente descontadas, equivaler ao custo do investimento.⁹

Trata-se, como se pode observar no exemplo da produção do vinho, de *rendimento interno de um investimento*.¹⁰

A taxa de *desconto*, ao igualar a série de rendimentos ao custo de investimento, revela a taxa de eficiência dêsse investimento. Se o desconto igualasse a série de rendimentos ao *capital* da empresa, a taxa de desconto seria inexpressiva porque o valor do capital reflete o valor dos rendimentos.

Irving Fischer, que inspirou Keynes, diz que a renda deflui do capital (seria melhor dizer que a renda deflui do investimento) e o valor do capital origina-se do valor da renda. O valor do capital é o valor da renda capitalizada.¹¹ No cálculo de capitalização deixa de prevalecer a taxa interna do investimento. A taxa é a taxa média do juro de mercado.

Keynes, seguindo Fischer, prende-se à noção de equilíbrio estático, motivo porque julga que os investimentos prosseguem até que a taxa in-

⁹ KEYNES, J.M.. *The General Theory of Employment, Interest and Money* 1936, p. 135.

¹⁰ Lutz, no livro que estamos citando, à página 142, corrige a expressão errônea de Keynes de eficiência marginal do *capital* por eficiência marginal do *investimento*. A equação relaciona a expectativa do rendimento do "último equipamento adquirido", "mediante desconto a ser calculado segundo a própria equação". Suponhamos um equipamento que dure três anos, com a *quase-renda* de Q_1, Q_2, Q_3 ,

$$C = \frac{Q_1}{(1+r)} + \frac{Q_2}{(1+r)^2} + \frac{Q_3}{(1+r)^3}$$

Explicaremos no texto a expressão^o *quase-renda*.

¹¹ FISCHER, I. *The Theory of Interest* p. 13 a 15.
Veja, também, VON WISSER, *Natural Value*, p. 139.

terna seja igual à taxa de juros. Essa razão da referência ao *último equipamento adquirido* (ver nota 10).

A alusão à quase-renda, feita por Lutz (ver nota 10) é de influência marshalliana. Marshall estende a idéia da renda diferenciada da terra ao lucro na indústria, quando os equipamentos novos oferecem um lucro excelente sobre a média dos lucros. A *quase-renda* equivale, pois, a lucro líquido superior à lucratividade média das empresas.

Lutz conclui suas observações concernentes à *eficiência marginal do investimento*, dizendo que Keynes deixou de considerar o capital circulante. Mas a "introdução do modelo do capital circulante acarretará a dependência da eficiência marginal do investimento à taxa de juros". Na verdade, o levantamento do capital de giro, por meio de empréstimos bancários, amplia a soma do custo de produção. É mais um ítem no rol das despesas. Não vemos, entretanto, motivo para afirmar-se que, nesse caso, a taxa de eficiência marginal passa a ser dependente da taxa de juros. Será tão dependente como a de qualquer variação de preço das componentes que participam do custo de produção.

"De acôrdo com Fischer", afirma Lutz, "o investimento prosseguirá até que a taxa de lucro iguale a taxa de juros do mercado: Entretanto, se a taxa de lucros fôsse maximizada, o investimento não prosseguiria até ao nível da taxa de juros; o investimento independeria da taxa de juros do mercado".¹²

7. A Taxa de Juros do Mercado e o Equilíbrio de Longo Prazo

São de Lutz as seguintes observações: "uma das causas surpreendentes da teoria do capital é a falta de concordância sobre o que compete ao empresário maximizar"... "A adoção do critério escolhido por Wicksell (cálculo da taxa interna de rendimento) deixa os projetos dos empresários independentes de taxa de juros do mercado. Outros autores consideram o vulto do investimento regulado pela equivalência da taxa marginal do rendimento com a taxa de juros"... "Nessa segunda hipótese, a diferença entre o valor presente dos futuros rendimentos do investimento e o presente valor do custo do investimento é maximizada pela taxa corrente de juros".¹³

Creio não haver tão acentuada divergência, como à primeira vista pode parecer. A alusão à taxa de juros do mercado prende-se à concepção

¹² Livro citado, p. 89-90.

¹³ The Essentials of Capital Theory no Proceedings of a conference held by The International Economic Association (1958, p. 6).

do equilíbrio, incompatível com a realização de investimentos. Desde que haja margem de lucro, a noção de equilíbrio requer a entrada de novas empresas, até que a rentabilidade dos empreendimentos seja igualada ao nível da taxa de juros do mercado. O professor Mario Henrique Simonsen acentua bem esse aspecto da análise, nas seguintes ponderações que faz em aula: "é de hábito admitir-se uma hierarquia dos investimentos baseada na taxa interna. Entre dois projetos terá prioridade aquele que possuir maior taxa de rendimento". ... "A noção de taxa de rendimento interna só é analiticamente precisa num mercado ideal, onde o futuro possa ser rigorosamente previsto pelo empresário. Nesse mercado a taxa marginal de rendimento interno deverá igualar, a curto prazo, a taxa de juros. A longo prazo, a equalização vai mais longe, atingindo a taxa de rendimento não apenas na margem, mas em sua média para qualquer investimento". ... "No mercado real da incerteza, o conceito do rendimento interno (calculado na base dos rendimentos esperados) fornece apenas uma indicação preliminar da hierarquia dos investimentos, em igualdade de riscos. Mas essa hierarquia pode ser substancialmente modificada pelos diferentes graus de incerteza associados a cada projeto".

A primeira observação a ser feita, em relação às considerações indicadas no parágrafo anterior, é que o investimento não se adapta a um esquema de equilíbrio. Quem decide realizar um investimento é porque espera um resultado superior ao que vem conseguindo. Por maior que seja a concorrência, empresário algum levará a efeito um acréscimo de produção se tiver ciência de que com esse acréscimo a taxa de lucro cairá ao nível da taxa de juros do mercado. Em face dessa previsão seria preferível ao empresário utilizar os recursos financeiros disponíveis e empregá-los na compra de títulos de geral aceitação, ou mesmo depositá-los em Banco.

Não tem, contudo, sentido plausível a generalização das condições de longo prazo, dado o grande número de restrições constatadas na prática.

Alguns autores, para facilidade de exposição, consideram conveniente, inclusive, levar em conta inicialmente a homogeneidade de custos.

O equilíbrio de longo prazo em tais condições requer que o lucro total seja nulo:

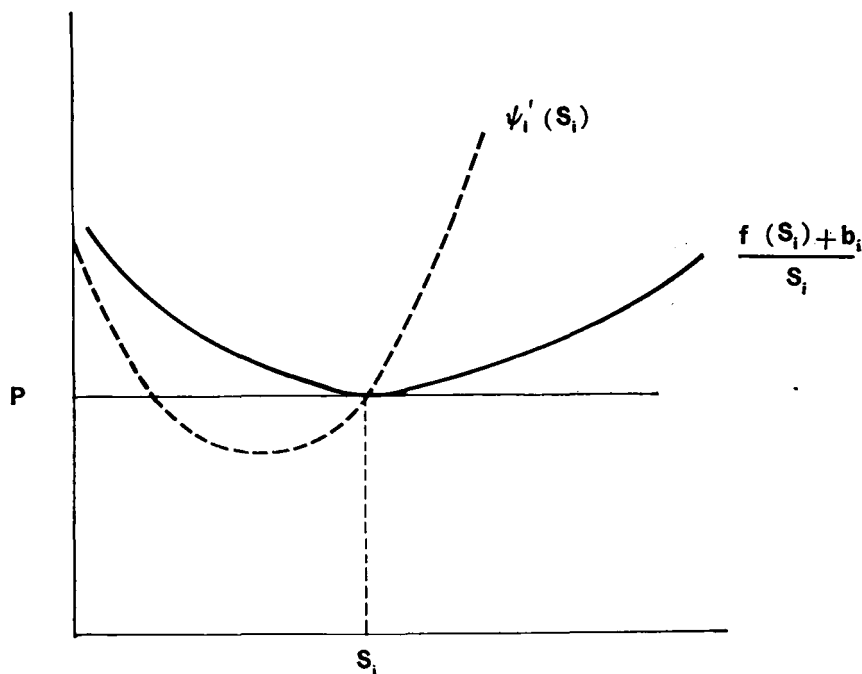
$$L = S \cdot p - n \Psi_i \left(\frac{S}{n} \right) = 0$$

onde S é a oferta agregada; p o preço de mercado; n o número de empresas do setor e $\Psi_i \left(\frac{S}{n} \right)$ o custo total de uma empresa.

A condição de equilíbrio da 1.^a empresa é:

$$\frac{dL}{dS_i} = \Psi_i(S_i) = Cm_i = P$$

Gráfico III



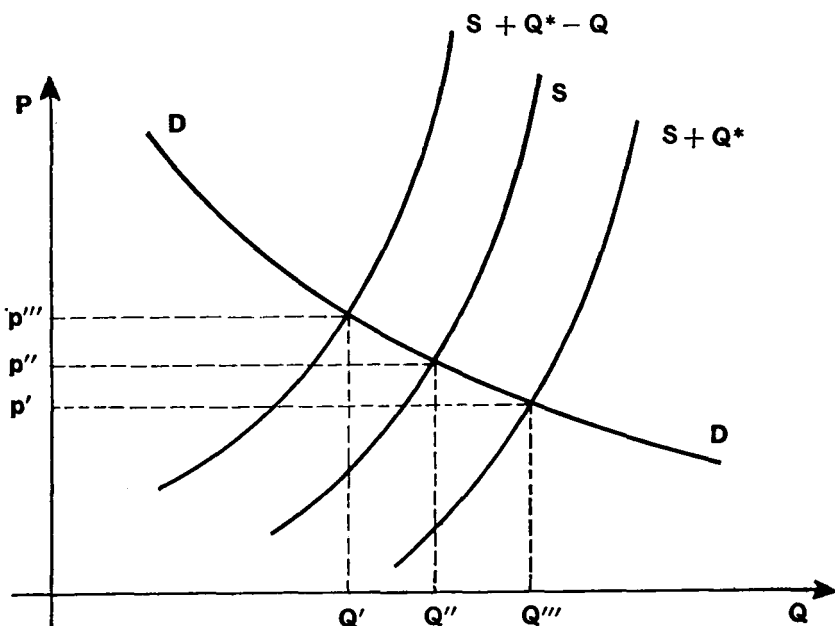
A condição de longo prazo por implicar na entrada de novas empresas no mercado, permite registrar, à medida que isto se verifica, uma tendência no sentido desse equilíbrio, dada uma maior aproximação no instante t , dos custos médios mínimos ao preço de mercado.

Por outro lado, as novas empresas, de uma forma geral, se caracterizam por tecnologia mais avançada e como o mercado produtor apresenta custos diferenciais, é plausível considerar que aquelas empresas de custos mais elevados, a partir de um número x de entrada de novos concorrentes, atinjam a condição de lucro normal, ou mesmo venham a ser forçadas a abandonar o mercado.

Suponhamos, no entanto, que uma fábrica, cuja produção seja Q , já se encontre em condições de lucro normal. A entrada de uma nova empresa implicaria em sua retirada do mercado, já que o deslocamento da curva de oferta para a direita faz com que o preço do produto atinja um valor abaixo do seu mínimo custo médio.

No entanto, a nova fábrica, muito embora possa apresentar produtividade superior, sua produção Q^* não necessariamente deve ser maior do que Q . Suponhamos inclusive $Q^* < Q$, o que implicaria numa melhoria das condições de mercado, aumentando o lucro das empresas existentes e não permitindo, sem outras considerações, o retorno da que saiu.

Gráfico IV

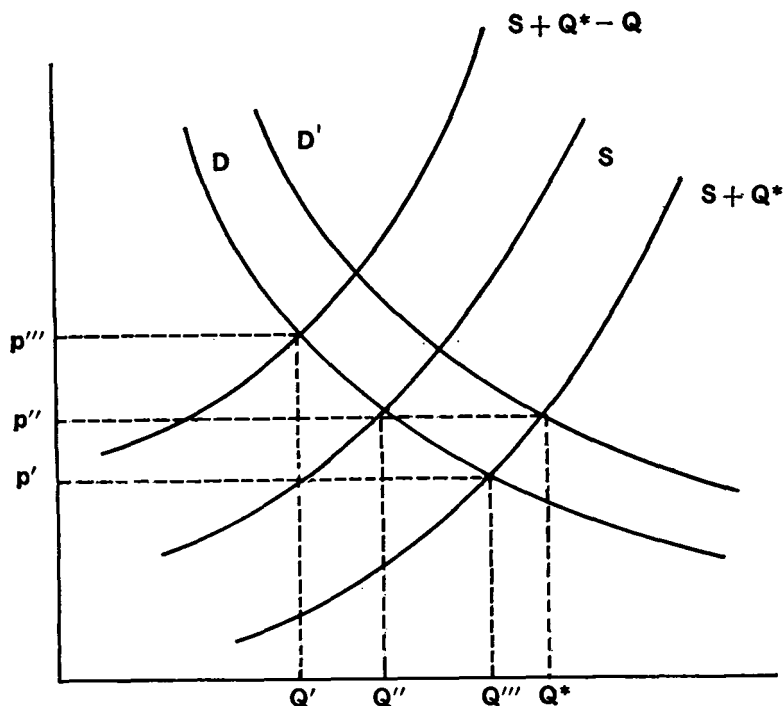


Poderíamos considerar, ainda, alguns efeitos paralelos, tais como as alterações da estrutura da função de demanda.

O crescimento da demanda pode modificar o quadro anterior, permitindo afirmar que a entrada de uma nova empresa no mercado não implica, necessariamente, na saída de outra em condições de lucro normal, dado um duplo deslocamento da oferta e da demanda.

Portanto, as expansões naturais de mercado permitem, considerando determinados limites, levar a efeito acréscimos de produção e manter a taxa de lucro acima do nível da taxa de juros para escalas cada vez maiores, no tempo, registrando-se uma melhoria do *ganho real* (R) por introdução de novas técnicas ou melhores processos.

Gráfico V



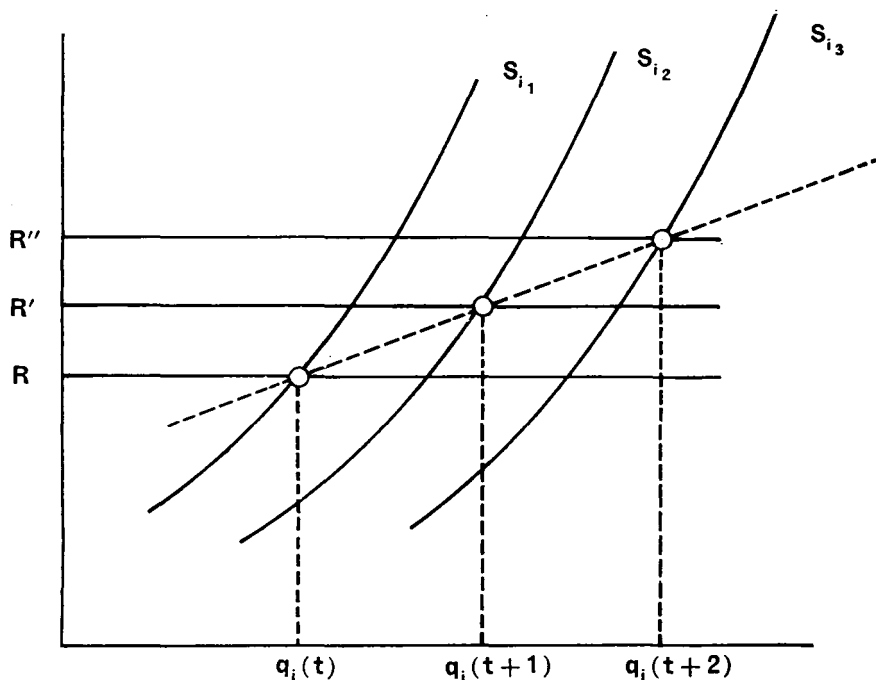
Nem govêrno, nem particulares, se empenham em construir ou modificar processos produtivos para alcançar o mesmo resultado que observam no presente e, muito menos, para reduzir o nível atual de remuneração, a não ser em competição com núcleos monopolísticos.

Na simples rotina das substituições arroladas pela contabilidade social, com a característica do investimento bruto, há mais do que geralmente se admite. O destaque implícito de que o investimento líquido (o investimento adicional) é o que propulsiona a economia enquanto as substituições de máquinas e equipamentos asseguram o nível anteriormente conquistado, encerra uma estimativa inferior à realidade dos fatores. As substituições são feitas com inovações, não poucas vêzes revolucionárias. Não pretendemos, com essa afirmação, invalidar a aludida classificação de investimentos.

Desejamos, tão sòmente, ressaltar a importância do acréscimo de produtividade relacionado com qualquer investimento, desde que haja a preocupação da melhoria, isto é, que prevaleça o espírito do aperfeiçoamento.

Qual a margem de diferença entre a taxa de rendimento interno e a taxa de juros do mercado? É difícil responder. Grande é o número de condições que determinam a variação dessa margem, ora mais ampla, ora mais estreita, mas sempre acima da taxa de juros do mercado. A equivalência seria mais um índice de estagnação do que um roteiro de expansão econômica.

Gráfico VI



Como, entretanto, conciliar a diferença das taxas com o equilíbrio monetário que, na fundamentada argumentação de Wicksell, é rompido quando a taxa de juros do mercado mantém-se em nível inferior à *taxa natural*, ou seja, a “taxa de lucro do investimento”?

Wicksell reconhece a presença de vários níveis de taxas de juros e de taxas de lucros. Nestas condições, ao considerarmos a modificação da taxa de juros devemos encarar a modificação em termos relativos e não em termos absolutos. A equivalência de taxas aludida por Wicksell é equivalência relativa.

O mercado financeiro inclui o sistema bancário e o mercado de capitais. O mercado de capitais compreende os empréstimos a longo prazo, as ações

de empreendimentos novos e os títulos representativos de investimentos passados. Em cada um desses mercados prevalecem taxas peculiares. Normalmente, a taxa de juros dos financiamentos bancários mantém-se em nível inferior à taxa de juros de empréstimos a longo prazo. A taxa de juros de empréstimos a longo prazo está em nível inferior à taxa dos dividendos. Acima dessa última rentabilidade figura a perspectiva de lucros de novos investimentos. A compra de *ações novas* ou de *debêntures novas* é a característica fundamental de *economias e investimentos*. O resto representa mera transferência de renda.

Em resumo: a taxa de eficiência marginal dos investimentos¹⁴ corresponde aos investimentos novos; a taxa de juros prende-se à cotação dos títulos de investimentos passados e, desse modo, regula o preço do levantamento de recursos financeiros; a taxa de juros bancários está relacionada com a preferência pela liquidez; regula as operações de crédito de prazo curto e médio.

¹⁴ Abba Lerner foi o primeiro economista a duvidar do acerto da expressão "eficiência marginal do capital". Propôs substituir por "eficiência marginal do investimento". Como os investimentos passados transformam-se em edifícios, instalações, equipamentos, máquinas, ou seja em conjunto de *estoque de capital*, vários economistas notoriamente Cardner Ackley, julgam acertado reter a denominação de eficiência marginal do capital para o *estoque* e contemplar a expressão "eficiência marginal do investimento" para os investimentos, mas essa distinção não é suficientemente clara como procuramos explicar na *Revista Brasileira de Economia*, ao analisar o livro de EDWARD SHAPIRO.

Further Remarks on Investments

1. Introduction

As long as economists do not focuss on the roundabout production process — let it be repeated once and again — the concept of investment remains in want of clearness. This is because the distinguishing feature of investment rests upon said process which makes it possible that the investment goal namely the achievement of superior productivity is attained. The reason why emphasis must be laid over and over again on this point is that the quest for superior productivity through the roundabout process involves too many variables: The time of production; cost of production; cost of financing the investment prospective returns on investment as compared with those of current ventures; prospective depreciation; pro-

spective obsolescence of the producing process; risks involved as compared with those of other ventures; the trend of the economy as a whole; the prospective size of the domestic market; exporting possibilities; foreign competition in alike the home and world markets --. All these questions matter much. Didactically however emphasis must be laid on the essential feature of investment — namely the quest for increase productivity through the roundabout process — lest the concept of investment should fall short of clearness.

2. The Roundabout Production Process: Wicksell Elementary Illustrative Case

$$\frac{R'_t}{R_t} = i$$

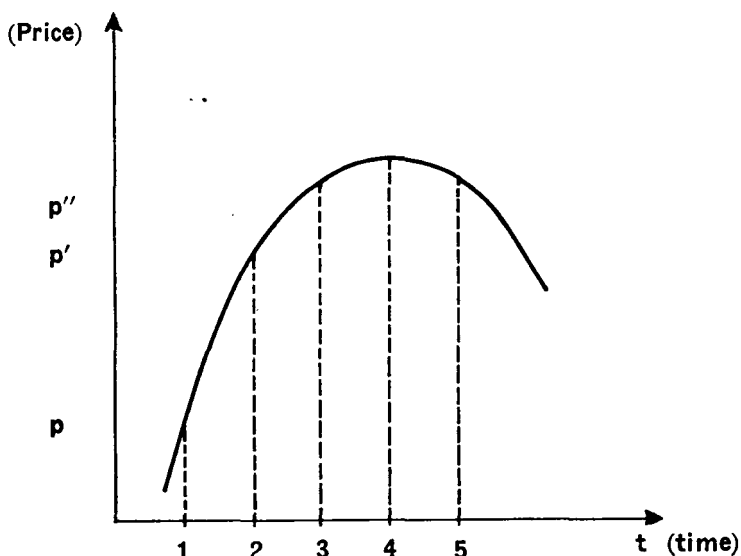
Knowing that the emphasis to be laid upon the essential feature of the investment was a matter of much import Wicksell presented the illustrative case of wine which is a simple example of a roundabout process directed towards the improvement of the product supply. We have all learnt through experience that for wine greater aging means higher quality and that therefore wine which is left to age sells at a higher price. But leaving wine to age means postponed consumption the distinguishing feature of roundabout process while the superior quality attained through aging characterizes the achievement towards which investment is directed. Table I shows the prices of wine Wicksell has figured out as related to the length of time it was left to age.

Table I

Aging Time					
	Initial Price	1 Year	2 Years	3 Years	4 Years
Price	67	73	80	90	100
Price differences		6	7	10	10

The price differences disclose that aging a fourth year adds to the value of wine as much as does the third year and the additional years from the fourth year on would be likely to add less.

Graph I



Even though the simplicity of the case presented by Wickcell led him to lay an emphasis upon time greater than the one laid on the roundabout process it is the latter which deserves greater attention. Notice should be given to it that the good could be used as soon as produced in which case consumption would immediately followed production. Nevertheless the length of time involved in the wine production was prolonged that the product might achieve higher quality. Consumption was postponed, producer waited longer for the yield from his money and consumer refrained from consumption:

This means that there was saving favouring investment. The longer the roundabout process the greater the saving involved. But the length of time is not the main feature since it may be longer or shorter. The essential feature rests on the roundabout process. The time variable is implicit in the process.

Should price, for example, be 85 instead of 90 in the third year and 90 instead of 100 in the fourth period it would be seen at once that the roundabout process would be carried no further than the second period inasmuch as in the case this would be the period in which productivity would attain the highest increase. Let an individual entrepreneur be assumed who had produced a given amount of wine at the cost of C monetary units which will be taken as his initial investment. The passage

of more time required by the process in the case springs from necessity of fermenting the must and leaving wine to age.¹

For simplicity's sake let the costs of additional time in the production process be assumed nihil so that interests are the sole costs (constant by assumption) involved seeing that the market price is a function of time $p = \varphi(t)$. The entrepreneur's problem will then be how to set the optimal length of the production process. It therefore follows that a value of t must be determined which optimizes the present value of the prospective gains. The profits L may be expressed by

$$L = R(t) e^{-it} - C$$

where the discounted present value of gross profit is in terms of continuously compounding at an i per cent interest rate.

The profit is maximized by setting the derivative with respect to t equal to zero:

$$\frac{dL}{dt} = R'(t) e^{-it} - iR(t) e^{-it} = 0$$

$$R'(t) e^{-it} = iR(t) e^{-it}$$

$$\therefore \frac{R'(t)}{R(t)} = i$$

It is therefore seen that optimally the percentage marginal yield with respect to time equals the rate of interest. It behooves us to insist on the roundabout process directed towards superior efficiency. Since, as already mentioned, there are too many variables involved too much emphasis laid upon some of them would make the investment concept fall short of accuracy. As a matter of fact Wicksell himself put too much emphasis on the time variable while Böhm-Bawerk was led into the harras involved in the search for the production time. The emphasis laid on the time variable gave rise to an excessive emphasis on the rate of interest.

3. The Basic Elements of Böhm-Bawerk Theory

$$F = N \cdot S \cdot T_m$$

¹ See HENDERSON, J.M. and QUANDT R.E. *Microeconomic Theory point input — point-output* and SIMONSEN, M.H. O Período de Produção, In: *Teoria Microeconômica* — vol. 3, p. 236.

Writing on the roundabout process Böhm-Bawerk takes the concept of the period of production to be its distinguishing feature. The shortcomings of his theory rest on his neglect of the increase in productivity. For clearness sake the criticism of Böhm-Bawerk theory is left for section IV of this paper following a brief outline of his mathematical treatment of the subject matter based on Friedrich Lutz work.²

According to Böhm-Bawerk those are the essential features of investment: The period of production and the subsistence fund. His productivity function is $q = \varphi(T_m)$ where q stands for the product of labour per unit period and T_m for the average period of production. It is the concept of internal yield per unit of time that makes it possible to define the product of labour as:

$$q = S(1 + iT_m)$$

where q is the product of labour and S the wage of a worker per unit of time. Accordingly it may be easily seen that the rate of interest is given by

$$i = \frac{q - S}{S \cdot T_m} \quad (1)$$

Given the wage the entrepreneur chooses the average period of production so as to maximize the rate of return or rate of interest.

Putting $\frac{di}{dT_m} = 0$ and differentiating equation (1) with respect to T_m , we have:

$$\frac{di}{dT_m} = \frac{\frac{dq}{dT_m}(S \cdot T_m) - (q - S)S}{S^2 \cdot T_m^2} = 0$$

whence:

$$\frac{dq}{dT_m} = \frac{q - S}{T_m} \quad (2)$$

Equation (2) shows that optimally the marginal product of the roundabout process is equal to the interest yield per unit of time.

² FRIEDRICH LUTZ — *The Theory of Interest* — examines Böhm Bawerk's Theory saying that the period of production and the subsistence fund are the essential features of Böhm Bawerk's Theory — the period of production or better still the average period of production is calculated as follows: each unit of each factor (labour for simplicity's sake) used in the production process is multiplied by the time which elapses between the moment of its application and the completion of the product.

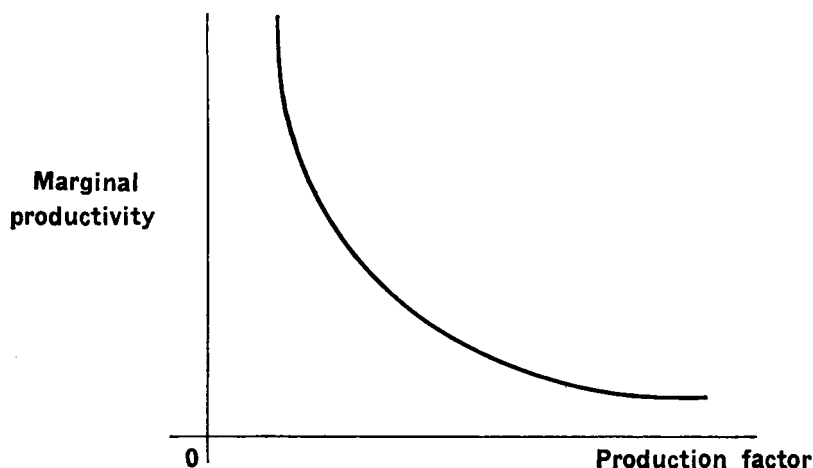
The second order condition requires that:

$$\frac{d^2q}{dT_m^2} = \frac{\frac{dq}{dT_m} \cdot T_m - q + S}{T_m^2} < 0$$

That is to say the worker product increases at a declining rate.

Such analysis is akin to the one used to derive the demand for productive factors starting out from marginal yields.

Graph II



It is also noticed that

$$i = \frac{dq}{dT_m} \cdot \frac{1}{S}$$

shows that interest rate is equal to the marginal product obtained from the extension of the process of production divided by wage.

In the mathematical appendix of his aforementioned work Lutz draws attention to it that should the economic system be analysed as a whole the wage would be an unknown which fact led Böhm-Bawerk to make use an additional equation:

$$F = N \cdot S \cdot T_m$$

where F is the subsistence fund which in equilibrium would be absorbed during the average period of production and N the number of workers

engaged in the production. It may be seen that the resources meted out to workers during such a period is

$$K = ST_m \quad (3)$$

where K is capital per worker.

Differentiating (3) with respect to time:

$$\frac{dK}{dT_m} = T_m \frac{dS}{dT_m} + S$$

It is known that for the individual entrepreneur $\frac{dS}{dT_m} = 0$ meaning that the sum of the resources the entrepreneurs need for extending the time of the production process must be equal to the wage per unit of time. Seeing that

$$\frac{dK}{dT_m} = S$$

and

$$i = \frac{q - S}{K}$$

it follows that

$$\frac{di}{dT_m} = \frac{\frac{dq}{dT_m} K - (q - S) \frac{dK}{dT_m}}{K^2} = 0$$

$$\frac{dq}{dT_m} K - (q - S) \frac{dK}{dT_m} = 0$$

$$K \frac{dq}{dT_m} = (q - S) \frac{dK}{dT_m}$$

$$\frac{\frac{dq}{dT_m}}{\frac{dK}{dT_m}} = i \quad \therefore \quad i = \frac{dq}{dK}$$

It therefore follows that when in a position to maximize his profits the entrepreneur will set i equal to the marginal internal yield or the marginal return on capital.

4. The Average Production Period Formula for the General Case and Böhm-Bawerk's Neglect of Increased Productivity

According to Böhm-Bawerk analysis the period of production is the distinguishing characteristic of the roundabout process and therefore the economist attention should be focussed on measuring the time elapsing from the moment when services are first used to the moment when the finished goods become available. To state that time is the distinguishing characterist of investment is misleading. All production whatsoever involves a time lag between the moment the resources are used and the moment the finished good becomes available. For example several weeks must elapse before cotton is transformed into cloth ready to sell.

The time lag between disbursements and receipts makes it a necessary concomitant the advancement of resources provided for, partly by the entrepreneur owned capital, partly by monetary reserves. This however is no distinguishing characteristic of the roundabout process. The transformation of raw materials first into yarn and then into cloth is a manufacturing routine in a textile mill already established and having plant equipments and machines. Such transformation is but a production stage resulting from a past investment. The point which must hold our attention is present investment. Lutz dwells at length on the inconsistencies surrounding the so called period of production and this is the reason why he does not focuss on the more important feature of the difference between the roundabout process and the direct production. Even when he analyses and censures Wicksell, Lutz attention is drawn to the contradictions relating to the period of production despite the fact that Wicksell has made momentous contributions to our understanding of the investment analysis as a peculiar process whose importance lies upon the effects it has on the economy as a whole.

Böhm-Bawerk is led into the harras involved in the search for average period formulas of production because, though he had ingeniously understood the essential feature of investment yet he neglected the increase of productivity springing out of investment absolutely. Economists prior to Böhm-Bawerk have laid emphasis on the productivity increase. None the less Böhm-Bawerk remains perplex in face of the problems concerning the values of factors and output. If the equipment as a production factor makes the increase in production possible said increase will be reflected

in the valuation of the equipment which in its turn will make the return on investment disappear.³

There is an error in this reasoning. It confuses investment and capital. The matter will be dealt with later when reference is made to Keynes. It may be that evaluation takes place when a firm makes an investment. This valuation however springs out of the *investment profits*. It should be noticed that the profits of investment is a phenomenon of a large scope. It is not restricted to the remuneration of capital. The increase in productivity arising from the investment, a matter of paramount importance, is held by Böhm-Bawerk as of secondary import.

Had greater attention been paid to this fact there would be no need for taking into account the psychological character of the higher evaluation of present goods as compared with future goods as an explanation for profits.⁴ Instead of linking the profit to the higher efficiency of *one production process as compared to another* Böhm-Bawerk admits of profits in the same production process that is to say at the same scale of production. Accordingly the profit is the difference between the value of the raw material (future goods because they must be transformed) and the value of present goods. Whence the palpably erroneous idea that the longer the production process the higher the profits springing out of production.⁵

5. Knut Wicksell Contribution

$$F = Ns \int_0^T e^{jt_1} dt_1 + lr \int_0^T e^{jt_2} dt_2$$

Wicksell improved Böhm-Bawerk contribution both by stressing the importance of the roundabout process and emphasizing the investment profits

³ We agree that capital has really the physical productivity assigned to it that is to say that in point of fact larger output may be obtained with capital than otherwise. However that the larger amount of goods produced with the help of capital values more than the capital tied up in the production process is something that remains to be proved. That fishing with a net from a boat produces a larger amount of fish than fishing with a hook does not mean that the value of the fishery is higher than that of the boat and net *Histoire Critique des Théories de l'Interêt et Capital*. Giard de Brière, volume 1, p. 176-177.

⁴ As a rule present goods are worth more than goods in the same amount and at the same standard of quality available in the future. This statement is the essential part and stands at the core of the theory of interest (*Positive Theory of Capital*, published by Stechert, New York, book V, chapter I). Böhm-Bawerk's observation may explain the interest as from the saver point of view (capital supply) but does not hold true as far as the demand for capital is concerned and still less as an explanation for the return on investment.

⁵ See note².

as a result of increased productivity. Those ideas are mingled with other of secondary relevance or even erroneously related to the investment and are put forward in such a manner that are likely to lead one to hold them as unrealistic when in point of fact they are acceptable simplifications.

Wicksell introduces in the Böhm-Bawerk production function the amount of land services (l) per unit of worker employed (n). We therefore have:

$$q = f(l, T_m)$$

Upon the other hand it is known that:

$$q = (s + siT_m) + (rl + liT_m)$$

where r is rent for a unit of land services.

The mathematical development of Wicksell theory appearing in *Value, Capital and Rent* is reproduced in Lutz's *The Theory of Interests* by means of a simple and clear-cut example:

According to Lutz sequence the following equation is taken up first:

$$q = (s + rl) \cdot (1 + iT_m)$$

or

$$i = \frac{q - (s + rl)}{T_m (s + rl)} \quad (4)$$

To maximize the rate of return or rate of interest the first derivative of equation (4) with respect to T_m must be put equal to zero:

$$\frac{\partial i}{\partial T_m} = \frac{T_m (s + rl) \frac{\partial q}{\partial T_m} - [q - (s + rl)] (s + rl)}{T_m^2 (s + rl)^2} = 0$$

whence

$$\frac{\partial q}{\partial T_m} = [q - (s + rl)] \cdot \frac{1}{T_m}$$

It therefore follows that the rate of return or rate of interest may be expressed as:

$$i = \frac{\partial q}{\partial T_m} \cdot \frac{1}{s + rl} \quad (5)$$

Let equation

$$i = \frac{q - (s + rl)}{T_m (s + rl)} \quad (6)$$

be considered:

Differentiating partially with respect of land putting the result equal to zero:

$$\frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{1}{rT_m} = \frac{q}{(s + rl)T_m}$$

It is therefore seen that i is maximized when the marginal product of land divided by the capital tied up to the last unit of said factor is equal to the ratio between the average output and the total resources invested by worker.

If equation

$$q = (s + rl) (1 + iT_m)$$

is substituted in equation (5)

it is seen that

$$r = \frac{\frac{\partial q}{\partial l}}{1 + iT_m}$$

showing that the discounted value of the marginal product of land must be equal to its return. Accordingly, Wicksell took into account in the roundabout process the period of the investment, emphasis being laid upon the increase in productivity as well as on its bearings on the return on investment.

If modern economic language is used and if our concern is to detach the fundamentals of what has been said we may say that investment is application of resources taken out of direct production (consumption goods) to be used to build a new scale of production. The investment profit results from the superior productivity of the new scale of production as compared to the productivity of prior investments.⁶ The numerical

⁶ What is capital? Capital says Wicksell is commonly understood to be stock of goods. This is fallacious. One must not give a material form to capital if one is to have a clear cut perception of the investment phenomenon. Capital must be thought as an act of refraining from present consumption. In view of the reduction in consumption (reduction in the sense of a smaller addition) the factors of production are released to become available for being used in investments directed towards superior output in the future (Roundabout production purporting to guarantee the efficiency of direct

example concerning the production of wine shows a scale of production with different degree of productivity as related to investments of 67, 73, 80 and 90 corresponding to each production period.

Emphasis laid upon the move of resources from consumption to investment may appear unnecessary in a highly developed country. If however there were indicators of increased demand for goods and services Wicksell's observation plays an important role and the greater the need for outlays as compared with scarcity of means of production the more important the role to be played by it.

Introducing in the production function the periods of production necessary to carry the production into effect Wicksell has also altered the structure of the subsistence fund.

The production function transforms into:

$$Q = \Psi (n, l, t_1, t_2)$$

where Q is total output; n the number of workers employed; l number of land services employed; t_1 investment period of the labour services; and t_2 investment period of the land services. In his study Wicksell says that total output must be equal to the sum of the rents and wages plus the compounded interests accrued on both.⁷ Hence Friedrich Lutz formula for Wicksell presentation:

$$Q = n s e^{jt_1} + l r e^{jt_2}$$

where s is wage of a worker, r rent for a unit of land services and j the rate of interest which is permitted to compound continuously through time.⁸

production). This passage of volume II throws light on the definition of *capitas* appearing in vol. I. Capital is saved up labour and saved up land. Interest (return on investment) is the difference between the marginal productivity of saved up and saved up land of current labor and land. Even economists of no common didactic qualities and deep knowledge of economics as Mario Henrique Simonsen take no account of this feature and merely state that. "The distinguishing characterist of the roundabout process is that it involves the passage of time in an essential way that is to say it involves a span of time from the moment when the factors are used to the moment the good becomes available. It is along that line of reasoning (concerning time) that the classical statement that capital is labour and land accumulated in the past (reference to Wicksell) is arrived at. *Teoria Microeconômica*, vol. 3, p. 183. Accordingly Simonsen's analysis of the case of wine stresses the time variable which makes it well suited to mathematical treatment which by the way was also put forward by Wicksell himself. Fortunately in his conclusions Simonsen the relevant qualifications.

⁷ Taking the period of production into account makes it imperative to permit time (t) to vary continuously so that economic transactions take place at any point of time. Interest also is considered as being compounded continuously.

⁸ Rigorously j is

$$j = \log (1 + i) \text{ where } i \text{ is the rate of interest.}$$

Differentiating partially with respect to n, l, t_1 and t_2 :

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = s e^{jt_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = r l^{jt_2}$$

whence $\frac{\partial Q}{\partial n} \cdot e^{-jt_1} = s$, (7) i.e., the marginal product of a worker discounted to the moment of the input of his service must be equal to the wage, and $\frac{\partial Q}{\partial l} \cdot e^{-jt_2} = r$, (8) showing that the marginal product of land discounted over the investment period of the land service must be equal to the rent of a unit of land.

It may also be surmised that

$$\gamma = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t_1}}{l \cdot r \cdot e^{jt_1}} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t_2}}{l \cdot r \cdot e^{jt_2}}$$

The above mentioned equations state that the interest rate j must be equal to the marginal product of the lengthening of the investment period of each of the two productive inputs divided by their contributions to the value of output.

Friedrich A. Lutz put forward further observations on the assumed linearly homogeneous function of n and l in Wicksell example on wine production showing that equation

$$Q = n s e^{jt_1} + l r e^{jt_2},$$

must not be counted as an independent equation in addition to the marginal productivity equations (7) and (8).

Accordingly five equations with 8 unknowns Q, n, l, t_1, t_2, j, s and r , are set simultaneously. Three more equations are needed. The first one expresses the condition that all labour must be employed so that $n = N$. Correspondingly $t = T$. This being the case a condition is arrived at that the subsistence fund must be absorbed by wages and rent payments:

$$F = N \cdot s \int_0^T e^{jt_1} dt_1 + l r \int_0^T e^{jt_2} dt_2$$

6. Rentability and Investments-Further Remarks

Keynes definition is more accurate than Wicksell's in so far as it takes rentability into account but falls short of accuracy in that it does not account for the roundabout process. Keynes stresses it that the investor expects to receive a series of returns through the lifetime of its investment and that the sum of these annuities duly discounted must be equal to the cost of investment.⁹ That this concept is the same as the internal yield of investment may be seen by examining the case of production of wine.¹⁰

The discount rate discloses the rate of efficiency of investment in that it puts the series of returns equal to the cost of investment. Should the discount make the series of returns equal to the capital of the enterprises it would be void of any meaning inasmuch as the value of the capital reflects the value of the returns.

Irving Fischer from whose theory Keynes' stems says that income is derived from capital (he should rather have said that income derives from investment) and that the value of capital is derived from the value of income. The value of capital is the present capital value of future income.¹¹ In evaluating capital the internal rate of yield must not be taken into account. The rate to be used is the market rate of interest.

Following Fischer, the equilibrium Keynes has in mind is static and that is the reason why he believes that investments will be carried forth up to the point at which the internal rate of yield equals the rate of interest. That is why reference is made to the last equipment acquired (see note 10). The reference made to quasi rents (see note 10) is due to Marshall influence on Lutz. Marshall extended the concept of differential rent of land so as to cover industry profits whenever the yield of new equipment exceeds the average yield of currently used equipments. It is therefore seen that "quasi-rent" means the difference between the equipment's value yield and that of the average equipment currently used.

⁹ KEYNES J.M. *The General Theory of Employment Interest and Money*. 1936, p. 135.

¹⁰ In the afore mentioned book Lutz corrects Keynes erroneous expression using marginal efficiency of investment for marginal efficiency of capital. The equation relates the expected returns from the last capital good acquired, discounted at the internal rate of return which is to be calculated from the equation itself, with the purchase price of the capital good. Let us imagine an equipment which lasts three years and which yields the quasi-rents Q_1 in the first, Q_2 in the second and Q_3 in the third year. Then,

$$C = \frac{Q_1}{(1+r)} + \frac{Q_2}{(1+r)^2} + \frac{Q_3}{(1+r)^3}$$

¹¹ FISCHER I. *The Theory of Interest*. p. 13 to 15. See also Von Wieser. *Natural Value*. p. 132.

Lutz ends up his remarks on the marginal efficiency of investment stating that Keynes disregarded circulating capital.

However: "The introduction into the model of circulating capital would make the marginal efficiency of investment dependent on the interest rate". In point of fact to borrow working capital from the banking system will add up to the production costs. It will add one more item to the list of costs. None the less as far as we can see the statement that in such a case the rate of the marginal efficiency of investment will be dependent upon the rate of interest does not stand to reason. It will depend on that rate as much as on any fluctuation of price of any other cost item.

As Lutz says: "According to Fischer investment will proceed up to the point at which the rate of interest equals the marginal rate of return. However if the rate of return were to be maximized the investment would fall short of the level of the rate of interest; the investment would be independent of the market rate of interest".¹²

7. The Market Rates of Interest and the Long Run Equilibrium

According to Lutz: "Surprisingly enough one of the causes for the theory of capital is the lack of general consensus about what the entrepreneur should maximize" ... "Should Wicksell criterium be adopted (the internal rate of yield) the entrepreneurs projects would not depend upon the market rate of interest, while other authors believe that the size of investment is set by the equality between the marginal rate of return and the rate of interest" ... "According to our second assumption the difference between the present value of future returns on investment and the present value of the cost of investment is maximized by the current rate of interest".¹³

To our mind the difference of opinions is not as sharp as it seems at first sight. Reference to the rate of interest is linked with the concept of equilibrium which by its very nature is incompatible with investment. If investments are profitable the concept of equilibrium requires that new firms enter the industry until the returns on investments are equal to the rate of interest. As professor Mario Henrique Simonsen stresses so well: "It is commonly assumed that investments are ranked according to the internal rate of yields. Given two projects priority is given to the one having the

¹² Op. cit., p. 89-90.

¹³ The Essentials of Capital Theory in Proceedings of a conference held by the International Economic Association (1958, p. 6).

higher rate of return"... "The concept of the rate of internal yield is analitically accurate only as far as an ideal market is concerned where foresight is perfect. In said market the marginal rate of internal yield must on the short run be equal to the rate of interest. On the long term it is the average rate that is equal to the rate of interest". In actual market where uncertainty prevails the concept of internal yields (calculated on the basis of expected returns) provides only for a preliminary ranking of ventures equally risky. This ranking however may be substantially altered by the different degree of uncertainty involving each project.

The just mentioned considerations lead one to notice that the investments does not fit into any equilibrium pattern. Whoever invests expects returns higher than those currently received. However perfect a competition might be no entrepreneur would add up to production should he anticipate that this addition to the current production would make yield falls to the level of the interest rate. It would profit him more to use his available resources to purchase gilt edged bonus or even to deposit them in banks.

To generalize, long term conditions are meaningless in view of the great number of qualifications that must be put forward lest the generalization should be of no practical value.

Some authors for the sake of clearness believe that it would behoove the reader to start out from the assumption that costs are homogeneous.

The long term equilibrium will then be reached at the point at which total profit is nihil:

$$L = S \cdot p - n \Psi_i \left(\frac{S}{n} \right) = 0$$

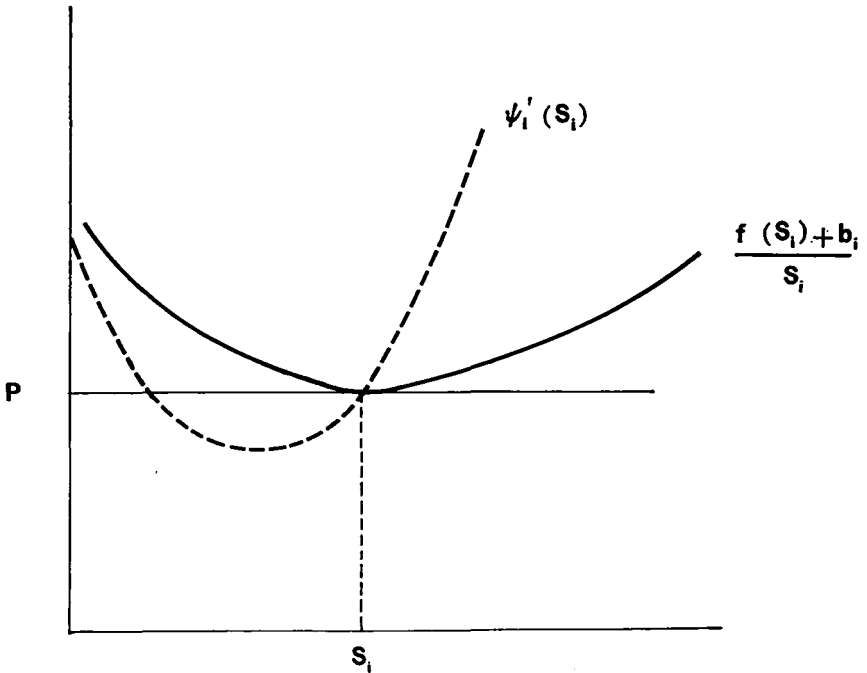
Where S is aggregated supply, p the market price, n the number of firms in the sector and $\Psi_i \left(\frac{S}{n} \right)$ the total cost of the individual firm.

The equilibrium condition for the first firm is

$$\frac{dL}{dS_i} = \Psi_i(S_i) = Cm_i = P$$

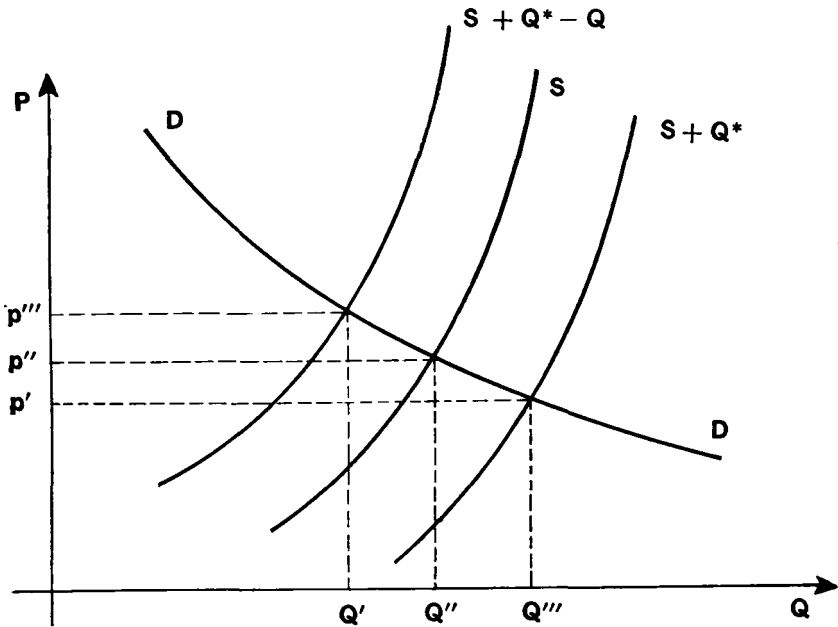
The long term condition implies the entrance of new firms in the market and therefore makes it possible for us to notice along with those entrances a trend towards the equilibrium point inasmuch as the minimum average costs are closer to the market price at time t .

Graph III



Upon the other hand new firms as a rule have more advanced technology. It therefore follows, seeing that the producing firms have differential costs, that the assumption stands to reason that firms with higher costs will as from the entrance of a number x of new comers become marginal firms yielding neither profit nor loss or will even be forced to leave the market. Nevertheless let us assume that a firm is already a marginal firm. The entrance of a new firm would imply that said firm would leave the market since a shift of the supply curve to the right would set the market price below its minimum average costs. Yet although the new firm may have superior productivity its output Q^* would not be necessarily larger than Q . Let us assume that $Q^* < Q$ which would mean that the existing concerns would have higher profits but that the market conditions, other things being equal, would not allow the entrance of the formerly marginal firm back into the market. Other parallel effects such as a change in the structure of the demand function could be accounted for.

Graph IV



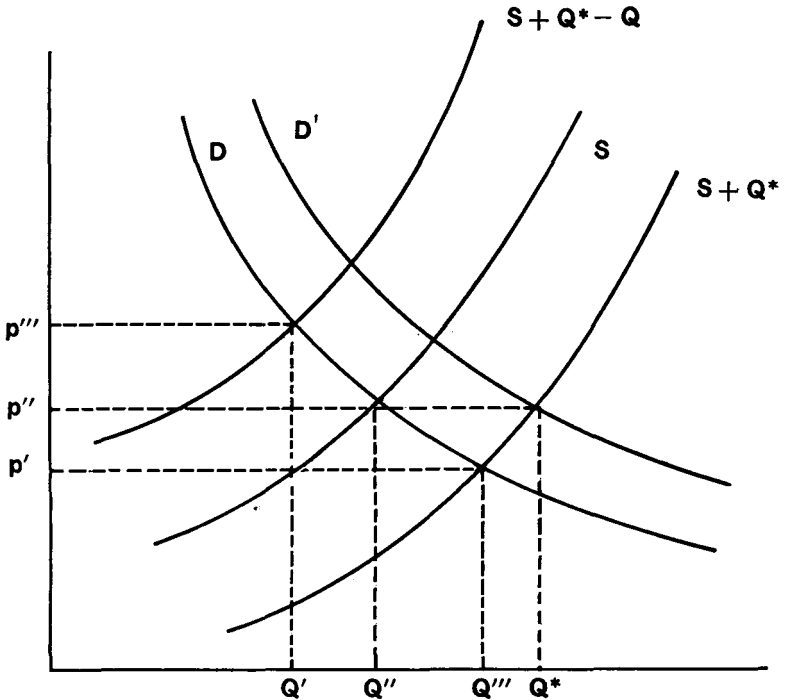
An increase of demand may alter the curve appearing in the above panel and would give grounds for the statement that the entrance of a new firm in the market does not necessarily imply that the marginal firm must leave the market inasmuch as in that case both the supply and the demand curves would shift.

It therefore follows that within given limits, the natural expansion of markets may make it possible that the output is increased and the rate of interest remains at the same level for larger scale of production through time while the *real gain* (R) increases by reason of adoption of new techniques or improved process of production.

Neither government non private concerns would engage in new processes to achieve results similar to the present results and less still to reduce the present level of profits unless they are competing with monopolistic groups.

Replacements appearing in the national accounts under the item gross investments conceal much more than is currently assumed. It is implicitly assumed that net investments (additional investment) push the economy forward. However in point of fact the assumption that re-

Graph V

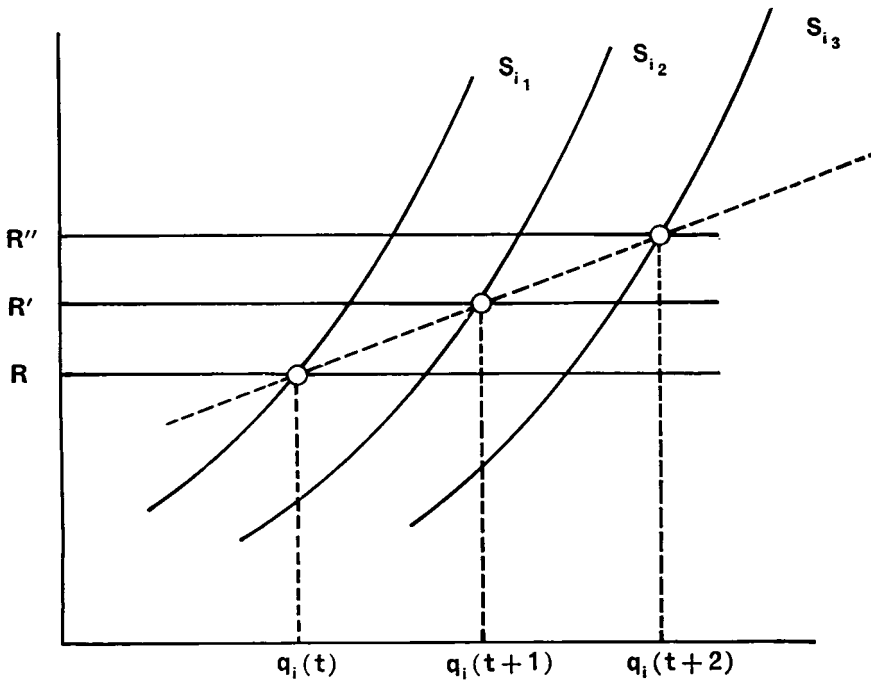


placements of machines and equipments are directed towards maintaining the same level attained in the past is misleading since replacements sometimes involve revolutionary innovations. This statement however does not intend to question said classification of investments. It merely stresses the importance of the increase in productivity involved by any investment provided the investor is concerned with improving the current conditions, that is to say provided only that the spirit to improve prevails.

What is the gap between the rate of internal yield and the rate of interest? This is a difficult question. There are too many variables influencing the size of said gap which is sometimes wider sometimes narrower but is always above the market rate of interest. Equality of both rates would rather be an indicator of stagnation than a guide for economic expansion.

How is then possible to reconcile the gap with the monetary equilibrium which, according to Wicksell well grounded rationale, is disturbed whenever the market rate of interest is below the natural rate, that is to say the rate of returns on investment?

Graph VI



Wicksell acknowledges the existence of several levels of rates of interest and returns. Accordingly changes in the rate of interest must be relative and not absolute changes. The equality referred to by Wicksell is a relative equivalence. The financing market includes both the banking system and the capital market. The latter includes long term liabilities newly issued stocks and stocks representing past investments. There are different rates prevailing in those different markets. As a rule, the rate of interest on bank borrowing is lower than the rate on long term liabilities, and the latter by its turn lower than the dividends rates. It is the purchase of newly issued stocks and debentures that characterizes savings and investments. The rest is but income transfers.

In brief, the marginal efficiency rate of investment corresponds¹⁴ to new investments; the rate of interest is linked to the price at which a

¹⁴ Abba Lerner was the first economist to question the expression Marginal Efficiency of Capital, and suggested that marginal efficiency of investment should be used instead. As past investments may be buildings, plants, equipments, machines and so on that is to say since past investments as a whole constitute the stock of capital several economists among whom stands Gardner Ackley hold it to be correct that the name of marginal efficiency of capital is retained for stock and that marginal

security representing a past investment sells and rules the price of raising monetary resources; the rate of interest or bank loans is related with the liquidity preference and rules the credit operations in the short or medium term.

efficiency of investment is used for investment. This however is not a clear cut distinction as we attempt to explain in our review of Edward Shapiro book published in the *Revista Brasileira de Economia*.