

ANÁLISE ECONÔMICA E ESCOLHA ENVOLVENDO RISCO

MÁRIO HENRIQUE SIMONSEN *

1) INTRODUÇÃO

Em toda sua obra o professor Eugênio Gudín tem revelado duas preocupações admiravelmente aderentes ao método científico. Em primeiro lugar, a de se apegar à teoria econômica que ele tão bem soube ensinar a seus discípulos e que com tanto entusiasmo ele soube transmitir aos nossos meios culturais. Em segundo lugar, a de aplicar essa teoria aos nossos problemas práticos, de modo a obter um conjunto consistente de normas de ação política.

Essas duas preocupações devem constituir o esteio filosófico do cientista moderno. Uma ciência nem é um amontoado desconexo de observações nem um conjunto elegante de equações distanciadas da realidade. As observações podem fornecer o material empírico para a construção dos modelos; as equações podem sintetizar a estrutura lógica das elaborações teóricas; mas se elas não se juntam, de modo a traduzir as relações observadas no mundo real, nada se tem que mereça o título de ciência.

É possível que qualquer físico moderno considere extremamente banais todas essas observações. Em economia, porém, as agressões ao método científico ainda são extremamente comuns, tanto da parte dos leigos quanto dos eruditos. Os leigos freqüentemente cometem o erro do empi-

* Diretor da Escola de Pós-Graduação em Economia (FGV).

risco primário que alinha fatos sem os alinhar; daí resultam as escolhas incompatíveis, que ferem os mais elementares princípios de teoria, e que dão origem às mais frustradas experiências econômicas. Os eruditos amiúde caem no extremo oposto de escolasticismo, que se esquece de indagar da validade das premissas, extasiando-se pelas simples construções dedutivas, se possível com elegantes ornamentações matemáticas. Nenhuma dessas atitudes é compatível com a ciência. E elas sempre foram vivamente repelidas pelo professor Eugênio Gudín, cuja obra sempre se preocupou em ajustar a elegância dedutiva à realidade quotidiana.

Essa realidade quotidiana nem sempre tem sido bem contemplada na teoria econômica convencional. De um lado os economistas se habituaram a compreender os riscos e os lucros nas linhas de pensamento de Schumpeter e de Frank Knight. Mas essa compreensão geralmente permanece dissociada das construções teóricas mais elaboradas, como a do equilíbrio geral em concorrência perfeita, onde as premissas conduzem ao fatal desaparecimento dos lucros. Tal dissociação deve ser encarada como um sintoma de subdesenvolvimento da análise econômica, cujos principais modelos partem de premissas que todos sabem que têm que ser melhoradas.

O objetivo do presente artigo consiste precisamente em resumir algumas contribuições que mostram como é possível reunir a teoria do risco à teoria da concorrência perfeita. Sob vários aspectos essas contribuições ainda se encontram em escala embrionária, pois partem de axiomas algo controversos de comportamento diante do risco, e porque recorrem a um conceito de probabilidade subjetiva difícil de se submeter à verificação empírica direta. Também essas contribuições ainda estão muito longe de oferecer uma teoria geral do funcionamento dos mercados. Não obstante, elas valem por integrar formalmente certos fenômenos que até então permaneciam à margem dos modelos convencionais. E como uma ciência progride na medida em que alarga seu campo de explicação, a recapitulação de alguns pontos da teoria do comportamento diante do risco certamente se afinará com o espírito científico do professor Gudín. Em particular porque esses pontos lançam novas luzes sobre a teoria monetária, a que tanto se dedicou o mestre dos economistas brasileiros.

2) O RISCO E A TEORIA ECONÔMICA CONVENCIONAL

Provavelmente a mais bela construção até hoje erguida em análise econômica foi a teoria do equilíbrio geral em concorrência perfeita. Isso não necessariamente implica em colocar Walras no vértice do pensamento econômico moderno, porquanto a compreensão que hoje se tem do equilíbrio geral é bem mais ampla do que aquela que se depreende dos "Elements d'Economie Pure". Em termos cartesianos talvez seja lícito afirmar que Walras não nos legou uma análise tão admirável quanto a sua sín-

tese. Era preciso interpretar o que estava por trás de cada equação do equilíbrio geral, e nesse sentido nada se criou de tão penetrante quanto as obras de Marshall, Edgeworth e Pareto. Era preciso introduzir o fator tempo nos modelos, abrangendo a teoria do investimento, como fizeram Wicksell e Fisher. Finalmente era preciso melhorar o tratamento matemático do modelo, substituindo equações por desigualdades, explorando mais a fundo as suas propriedades analíticas, e lembrando que contar equações e incógnitas não é meio convincente para provar a compatibilidade de um sistema, como fizeram tantos ilustres economistas nos últimos trinta anos. Todas essas contribuições deram à teoria do equilíbrio geral uma amplitude muito maior do que aquela que se poderia inferir da leitura cuidadosa dos "Elements d'Economie Pure", e hoje a síntese Walrasiana se pode reformular com base em alicerces muito mais sólidos do que aqueles que a sustentaram no princípio do século.

Do ponto de vista de elegância dedutiva talvez haja certo parentesco entre a mecânica clássica e a teoria do equilíbrio geral em concorrência perfeita. Ambas partem de um número reduzido de premissas; e ambas se erguem numa vastíssima estrutura dedutiva, de grande poder explicativo. Mas, ao contrário da mecânica newtoniana, não foi preciso uma sofisticada experiência de Michelson-Morley para que os economistas se mostrassem descrentes da universalidade das suas premissas. Com efeito, pelo menos três problemas (fora da freqüente ausência das condições de concorrência perfeita) jamais foram explicados a contento pela teoria do equilíbrio geral: o da imperfeição do mercado de capitais, o da dimensão da empresa em concorrência perfeita e o da diversificação das aplicações mobiliárias.

Descrevamos rapidamente esses três problemas. Na quase totalidade dos modelos convencionais o mercado de crédito se apresenta em termos muito semelhantes ao mercado de batatas: qualquer indivíduo pode tomar emprestado o dinheiro que quiser, desde que se comprometa a pagar a taxa de juros vigentes. Tradição pessoal, cadastro limpo, e um bom patrimônio que sirva de escudo para as dívidas, são fatos que não intervêm na análise. É claro que os economistas jamais imaginaram que isso se verificasse no mundo real. Mas na hora de escrever suas equações ou de desenhar seus gráficos, sistematicamente raciocinavam a partir de tal premissa.

Uma segunda dificuldade da teoria convencional reside na explicação da dimensão de equilíbrio a longo prazo da empresa em concorrência perfeita. Como se sabe, a teoria da concorrência precisa da hipótese de rendimentos físicos decrescentes (pelo menos após certo nível de produção) para determinar a dimensão da unidade produtora. Com efeito, com rendimentos constantes ou crescentes, a empresa tenderia a se expandir indefinidamente, ou ficaria com suas dimensões indeterminadas. Ocorre que a lei dos rendimentos decrescentes pressupõe que se mantenham inalteradas as quantidades de alguns fatores. Isso é perfeitamente plausível na

análise do equilíbrio a curto prazo quando, por hipótese, alguns fatores se consideram fixos. Como, porém, insistir nos rendimentos decrescentes a longo prazo, quando todos os fatores são variáveis? A saída convencional é hábil, mas pouco convincente: admite-se que, para cada unidade produtora, exista um fator fixo, mesmo a longo prazo, a capacidade empresarial dos seus dirigentes. A ação limitativa da capacidade empresarial, note-se bem, não estaria do lado financeiro, pois no modelo qualquer empresa poderia tomar emprestado o que quisesse, pagando a taxa de juros do mercado. A ação seria física, a impossibilidade de aumento da capacidade empresarial exigindo mais do que a duplicação dos fatores para se dobrar o produto. Essa saída não é ilógica, mas parece agressivamente irrealista. Pelo menos no mundo normal, os fazendeiros não se expandem rapidamente comprando as propriedades dos vizinhos porque lhes falta dinheiro para isso, e não por qualquer limite físico da capacidade empresarial.

Uma terceira questão que dificilmente se afina com a teoria convencional é a da diversificação das aplicações mobiliárias. Por que tantos indivíduos costumam diversificar seu patrimônio comprando ações, debêntures e guardando dinheiro, ao invés de se concentrar num único tipo de maior rentabilidade? Qualquer cidadão de mediano bom senso saberá responder a essas perguntas. As respostas óbvias, todavia, não fazem parte dos modelos convencionais da concorrência perfeita. Isso, em particular, deu origem a uma teoria monetária estanque, muito de acordo com a equação quantitativa: como meio de pagamento, isto é, como instrumento de cobertura das defasagens entre receitas e despesas, a moeda constituía um bem sem substitutos; mas como aplicação patrimonial ela sempre seria desinteressante em confronto com os títulos, que sempre renderiam alguma taxa de juros. Mais tarde, Keynes introduziu a procura especulativa, reabilitando a moeda, pelo menos em certas épocas, como forma de aplicação patrimonial. Mas mesmo na Teoria Geral a moeda continua num compartimento estanque, em relação ao comportamento dos investidores.

Tôdas essas dificuldades advêm do simples fato de que a teoria do equilíbrio geral supõe um mundo sem riscos. Os seus modelos ou são estáticos, omitindo qualquer lapso de tempo entre o início da produção e o fim do consumo, ou, quando dinâmicos, admitem que os empresários sejam perfeitamente capazes de prever o futuro. E nesse mundo sem riscos, onde os indivíduos pudessem ler o futuro na palma da mão, nenhuma dessas dificuldades subsistiria: não havendo lugar nem para os insolventes nem para os vigaristas, o mercado de capitais seria absolutamente perfeito; a moeda e os títulos seriam substitutos perfeitos, qualquer deles servindo como meio de pagamento, e rendendo exatamente a taxa de juros de mercado; as dimensões individuais da empresa talvez ficassem indeterminadas a longo prazo, embora houvesse um limite de dimensão da indústria; e os próprios empresários não difeririam senão

muito levemente dos assalariados, as diferenças de profissão resultando apenas de ligeiras diferenças de gosto.

É óbvio que os economistas jamais imaginaram que os empresários possuísem tão admiráveis dons divinatórios. Implicitamente, a possibilidade dos erros de previsão sempre foi admitida. E, explicitamente, a incerteza e o risco passaram a preocupar os economistas, pelo menos depois de que Frank Knight, publicou seu "Risk, Uncertainty and Profit" em 1921. Tal preocupação, no entanto, não foi capaz de integrar de imediato a teoria do risco na análise da formação dos preços. Esta última continuava a desenvolver-se dentro do pressuposto de que o futuro fôsse perfeitamente previsível. E o risco e a incerteza entravam como mera adjetivação qualificativa, sem interferência direta nos modelos.

Duas formas convencionais de raciocínio se estabeleceram na primeira metade deste século para enfrentar o problema do risco e da incerteza, e a maior parte da literatura econômica apela implícita ou explicitamente para uma ou outra dessas formas. A primeira partia da hipótese de que os indivíduos agissem em relação aos valores esperados da mesma forma pela qual enfrentariam as previsões indiscutíveis; em suma, cada empresário teria em mente certa distribuição de probabilidade quanto ao futuro dos parâmetros que lhe interessassem, tomando suas decisões exclusivamente com base nas médias dessa distribuição. Essa hipótese de fato envolvia a indiferença em relação ao risco e, entre outros defeitos, tinha o de levar o lucro puro à mera categoria de erro de previsão. A segunda forma de raciocínio apelava para o conceito de prêmio de risco ao prever os preços futuros, o empresário descontaria determinada percentagem sobre os valores médios, para se cobrir dos riscos.

Nenhuma dessas formas de raciocínio altera as equações básicas dos modelos convencionais de equilíbrio. Por isso mesmo elas são incapazes de fornecer uma explicação para os já citados problemas da imperfeição do mercado de capitais, de diversificação das aplicações mobiliárias, e da dimensão da unidade produtora em concorrência perfeita com rendimentos constantes. Esses problemas exigem um tratamento mais aprofundado de risco, como procuraremos expor a seguir.

3. A ESPERANÇA MORAL E A UTILIDADE CARDINAL DE VON NEUMANN E MORGENSTERN

Bem antes de o pai da análise econômica ter publicado seu *Wealth of Nations*, Daniel Bernouilli já havia lançado os fundamentos da teoria do comportamento econômico envolvendo risco. Fundamentalmente a sua hipótese era a seguinte: para o indivíduo normal, entrar num jogo do qual resulta uma probabilidade p_1 de um patrimônio final Z_1 , uma probabilidade p_2 de um patrimônio final Z_2 , etc. ... e uma probabilidade

p_n de um patrimônio final Z_n , é indiferente a dispor ao certo de um patrimônio Z tal que:

$$\log Z = p_1 \log Z_1 + p_2 \log Z_2 + \dots + p_n \log Z_n.$$

O valor de Z assim determinado constituiria a “esperança moral” do jôgo. Entre várias alternativas envolvendo risco, o indivíduo escolheria aquela que lhe desse maior esperança moral. Com êsse conceito, Daniel Bernouilli conseguiu explicar várias atitudes que seriam consideradas irracionais se os indivíduos agissem apenas com base nas médias das distribuições de probabilidade: a do cidadão que faz seu seguro contra incêndio, a do investidor que diversifica suas aplicações, etc.

Em termos da linguagem econômica corrente, a teoria da esperança moral partia essencialmente de três hipóteses: a) é possível medir a utilidade da renda ou do patrimônio de um indivíduo; b) a utilidade marginal dessa renda ou desse patrimônio é positiva mas decrescente (a lei logarítmica constituía uma particularização supérflua); c) a utilidade de um empreendimento arriscado é igual ao valor esperado das utilidades dos possíveis resultados. (Êsse Valor esperado da utilidade será inferior à utilidade do valor esperado desde que prevaleça a lei da utilidade marginal decrescente). Enquanto os economistas acreditaram piamente na possibilidade de se medir a satisfação absoluta dos indivíduos, essas hipóteses não foram contestadas (embora a terceira de fato parecesse bastante arbitrária). Mas no momento em que a teoria cardinal foi substituída pela ordinal, as hipóteses de Bernouilli pareciam cair por terra no que elas continham de mais fundamental. Com efeito, se os indivíduos apenas ordenavam suas preferências, as funções utilidade poderiam ser modificadas à vontade por meio de transformações monotônicas crescentes. A função utilidade da renda não mais pretenderia medir a satisfação absoluta do indivíduo, mas apenas descrever suas preferências. E isso se conseguiria por meio de qualquer função crescente, já que os indivíduos normais preferem ganhar mais a ganhar menos. O sinal da derivada segunda nada teria a ver com o caso, o que exigia o abandono da tradicional lei da utilidade marginal decrescente. Com isso a teoria ordinal derrubava um dos mais respeitáveis princípios da economia clássica. E, ao mesmo tempo, fechava as portas à explicação do comportamento diante do risco.

Com a publicação da “Theory of Games and Economic Behaviour”, Von Neumann e Morgenstern conseguiram criar um novo sistema de mensuração de utilidades capaz de restaurar o prestígio de toda a teoria de Bernouilli (salvo quanto à lei logarítmica, que é um apêndice desnecessário). Como na teoria ordinal, as funções utilidade na acepção de Von Neumann e Morgenstern são meros índices funcionais, capazes de descrever como os indivíduos escolhem entre várias alternativas, mas

sem qualquer pretensão de medir a satisfação absoluta desses indivíduos. Agora, porém, as funções utilidade só podem ser transformadas por funções lineares crescentes, e não mais por qualquer transformação crescente. Isso significa que duas funções utilidade da renda ($U(Y)$ e $U'(Y)$) válidas para o mesmo indivíduo, devem estar ligadas pela relação:

$$U'(Y) = a U(Y) + b$$

Sendo a e b constantes (independentes de Y) e a maior do que zero. Esse tipo de transformação, análogo ao das escalas termométricas, usuais, conserva o sinal da derivada segunda das funções envolvidas e, por isso, é potencialmente capaz de restaurar o prestígio da lei da utilidade marginal decrescente.

Para chegar a seus índices individuais de utilidade, Von Neumann e Morgenstern partiram de cinco axiomas quanto ao comportamento diante do risco, e que serão enunciados a seguir. Para formalizarmos esse enunciado designaremos por letras maiúsculas, A, B, C, etc. as alternativas que se podem apresentar aos indivíduos. Essas alternativas podem consistir em cestas de mercadorias dadas, ou em loterias capazes de dar uma ou outra alternativa, de acordo com certa distribuição de probabilidades. Usaremos a notação $A < B$ para indicar que a alternativa B é preferível à alternativa A, e $A \sim B$ para expressar que as duas alternativas são indiferentes. Designaremos finalmente por A_p , $B \rightarrow p$ a uma loteria com probabilidade p de dar A e $1-p$ de dar B.

São os seguintes os axiomas de Von Neumann e Morgenstern:

I) *Axioma de ordenação*: Dadas duas alternativas A e B, ou $A < B$, ou $B < A$ ou $A \sim B$. Em outras palavras, ou uma alternativa é preferível a outra ou ambas são indiferentes. As relações de preferência e indiferença supõem-se transitivas.

II) *Axioma de continuidade*: Sejam A, B, C três alternativas tais que $A < B < C$. Então existe p tal que $0 < p < 1$ e

$$B \sim \{ A_p, C_{1-p} \}$$

isto é, tal que B seja indiferente a uma loteria com probabilidade p de dar A e $1-p$ de dar C.

III) *Axioma da indiferença*: Sejam A, B e C três alternativas, sendo A indiferente a B. Então:

$$\{A_p, C_{1-p}\} \sim \{B_p, C_{1-p}\}$$

isto é, se A e B são indiferentes, então uma loteria com probabilidade p de dar A e $1-p$ de dar C é considerada indiferente a uma loteria com probabilidade p de dar B e $1-p$ de dar C.

IV) *Axioma da probabilidade desigual*: Se $A < B$ e $P_1 < p_2$, então:

$$\{A_{p_2}, B_{1-p_2}\} < \{A_{p_1}, B_{1-p_1}\}$$

isto é, se B é preferível a A, entre duas loterias das quais possam resultar ou A ou B o indivíduo preferirá a que tiver menor probabilidade de dar A.

V) *Axioma da Complexidade*

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ A_{p_1}, B_{1-p_1} \right\} p, \left\{ A_{p_2}, B_{1-p_2} \right\} (1-p) \right\} \sim \\ & \sim \left\{ A_{p_1 + p_2(1-p)}, B_{(1-p_1)p + (1-p_2)(1-p)} \right\} \end{aligned}$$

Isso significa que, numa loteria de loterias, o indivíduo avalia os resultados pela regra das probabilidades compostas. Em termos mais específicos admite-se o seguinte: suponhamos que o indivíduo participe de uma loteria L da qual pode resultar, com probabilidade p , uma loteria L_1 , e com probabilidade $1-p$ uma loteria L_2 . A loteria L_1 tem probabilidade p_1 de dar A e $1-p_1$ de dar B; a loteria L_2 tem probabilidade p_2 de dar A e $1-p_2$ de dar B. Então o indivíduo considerará indiferente participar dessa loteria de loterias, ou participar apenas de uma loteria simples, onde a probabilidade de se obter A seja igual a $p_1p + p_2(1-p)$, e a de obter B igual a $(1-p_1)p + (1-p_2)(1-p)$.

São esses os axiomas de Von Neumann e Morgenstern quanto à escolha envolvendo risco. A construção dos índices de utilidade para cada indivíduo se pode descrever nos seguintes termos: Tomemos por base duas alternativas M e N, sendo $M < N$, e arbitremos as utilidades $U(M)$ e $U(N)$ dessas duas alternativas, com a única condição de que $U(M) < U(N)$, (por exemplo,

$$U(M) = 0 \text{ e } U(N) = 100, \text{ ou } U(M) = 32 \text{ e } U(N) = 212).$$

Nesse sistema de referência, a utilidade de uma outra alternativa qualquer A se define da seguinte maneira:

- i) Se $A < M$, seja p a probabilidade tal que

$$M \sim \{A_p, N_{1-p}\}$$

Define-se então $U(A)$ a partir da relação:

$$U(M) = pU(A) + (1-p) U(N)$$

...

- ii) Se $A \sim M$, define-se $U(A) = U(M)$

- iii) Se $M < A < N$, define-se $U(A)$ pela expressão:

$$U(A) = pU(M) + (1-p) U(N)$$

onde p é tal que $A \sim \{M_p, N_{1-p}\}$

- iv) Se $A \sim N$, define-se $U(A) = U(N)$

- v) Se $N < A$, seja p a probabilidade tal que

$$N \sim \{M_p, A_{1-p}\}$$

Define-se então $U(A)$ a partir da relação

$$U(N) = pU(M) + (1-p) U(A).$$

É importante observar que, tal como nas escalas termométricas, os índices de utilidade no sentido de Von Neumann e Morgenstern envolvem dois pontos de referência arbitrários. Nada impede que as utilidades de algumas alternativas se tornem negativas, pois os índices em questão não têm a mínima pretensão de medir a satisfação absoluta dos indivíduos. Trata-se, portanto, de um tipo de mensuração muito diferente daquele que se concebia no fim do século passado.

Os índices em questão gozam de três propriedades fundamentais que a seguir se enunciam:

a) Eles preservam a ordem das preferências individuais, isto é, se $A < B$, $U(A) < U(B)$, e se $A \sim B$, $U(A) = U(B)$.

b) Se L é uma loteria, com probabilidade p_1 de dar A_1 , p_2 de dar A_2 , ..., p_n de dar A_n , sendo $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, então:

$$U(L) = p_1 U(A_1) + p_2 U(A_2) + \dots + p_n U(A_n).$$

c) Para que $U(X)$ e $U'(X)$ sejam duas funções utilidades válidas para o mesmo indivíduo é necessário e suficiente que, para toda alternativa X se tenha

$$U'(X) = a U(X) + b$$

onde a e b representam constantes (independentes da alternativa X), sendo $a > 0$.

Essas três propriedades se podem demonstrar pela adequada manipulação dos axiomas de Von Neumann e Morgenstern. A primeira delas diz, em resumo, que os índices construídos pela regra da probabilidade intermediária servem efetivamente como escalas de utilidade. A segunda garante que a utilidade de uma alternativa arriscada é igual ao valor esperado das utilidades dos possíveis resultados; isso esclarece uma das hipóteses que havia sido usada de forma algo arbitrária por Daniel Bernouilli. Finalmente a terceira propriedade garante que os índices de utilidade só são arbitrários em relação a transformações lineares crescentes. Essa é a propriedade que restaurará o prestígio da lei da utilidade marginal decrescente da renda.

O que seja agora a função utilidade da renda é algo de imediato. Suponhamos dados os preços de mercado dos diversos bens. Então, a cada renda Y corresponderá uma cesta de mercadorias que represente o equilíbrio do indivíduo. A utilidade dessa cesta de mercadorias será por definição, a utilidade da renda Y . É fácil verificar que, nessas condições, a utilidade marginal da renda será positiva, pois os indivíduos melhoram de situação quando sua renda aumenta e os preços não se alteram. O princípio da utilidade marginal decrescente só pode ser deduzido com maiores cuidados. Ele não mais se associa à idéia de "satisfação marginal decrescente", a qual seria herética na teoria de Von Neumann e Morgenstern, mas simplesmente à atitude normal em face do risco, como veremos na próxima secção.

Desenvolveremos a seguir uma série de aplicações da teoria da escolha envolvendo risco. Todas elas se resumem fundamentalmente no

seguinte problema: Um indivíduo dispõe de diversas alternativas de investimento, a alternativa genérica tendo probabilidade p_1 de dar um ganho Y_1 , p_2 de dar Y_2 , ..., p_n de dar Y_n . Então, se $U(Y)$ representa a utilidade do ganho Y , o indivíduo escolherá a alternativa que maximize a expressão:

$$p_1 U(Y_1) + p_2 U(Y_2) + \dots + p_n U(Y_n)$$

Esse tratamento analítico resulta das propriedades acima mencionadas para os índices de utilidade no sentido de Von Neumann e Morgenstern. Formalmente êle é bastante semelhante à análise da "esperança moral" de Daniel Bernouilli. Todavia, a axiomática que o precede é bem mais sofisticada.

É importante notar que, na maioria dos problemas de que vamos tratar no presente artigo, as distribuições de probabilidade se supõem subjetivas. Um empresário, ao tomar sua decisão quanto a êste ou aquele investimento, imagina as probabilidades dos possíveis resultados por algum critério pessoal muito diferente das tábuas de probabilidade das companhias de seguro. Nessas condições, o que efetivamente interessa à análise é aquilo que o empresário imagina que sejam essas probabilidades, o que não necessariamente coincidirá com qualquer distribuição objetiva. É óbvio que no mundo real os diretores de empresas não costumam preceder suas decisões por complicados cálculos de valor esperado da utilidade dos ganhos. Nessas condições, toda a teorização que se segue deve ser entendida nos termos de que "tudo se passa como se fôsse". Voltaremos a êsse assunto no fim do artigo.

4. TIPOS BÁSICOS DE COMPORTAMENTO DIANTE DO RISCO

Imaginemos um indivíduo que, no início de um determinado período, disponha de um determinado patrimônio p o qual deva ser aplicado entre diversas alternativas de investimento. O ganho líquido Y auferido pelo indivíduo será, por definição, a soma do rendimento proporcionado pela aplicação, mais a valorização patrimonial durante o período. A utilização dêsse conceito de ganho, ao qual se incorporam as valorizações patrimoniais, torna plausível o tratamento monopериódico do problema, com apreciáveis vantagens de simplificação matemática. O problema do indivíduo será o de aplicar o seu patrimônio de modo a maximizar o seu índice de utilidade no sentido de Von Neumann e Morgenstern. Isso se fará, especificamente, da seguinte maneira: para cada programa de investimentos, o indivíduo estimará uma probabilidade p_1 de ganhar Y_1 , p_2 de ganhar Y_2 , ..., p_n de ganhar Y_n . Designando por $U(Y)$ a utilidade

do ganho Y o indivíduo escolherá aquele programa de investimentos que maximize a expressão $p_1 U(Y_1) + p_2 U(Y_2) + \dots + p_n U(Y_n)$.

O ponto básico para a discussão do problema é a descrição das propriedades da função utilidade $U(Y)$. Admitiremos preliminarmente que a utilidade marginal $U'(Y)$ seja sempre positiva, o que significa que os indivíduos preferem ganhar mais a ganhar menos. O sinal da derivada segunda define a atitude básica do indivíduo diante do risco. Partindo da classificação de Tobin * dividiremos os indivíduos em três tipos.

A) *Os avessos ao risco*, isto é, aqueles que, entre duas aplicações de mesmo rendimento médio esperado, preferem a menos arriscada.

B) *Os indiferentes ao risco*, isto é, aqueles que consideram indiferentes duas aplicações de mesmo rendimento médio esperado.

C) *Os propensos ao risco*, isto é, aqueles que, entre duas aplicações de mesmo rendimento médio esperado, preferem a mais arriscada.

É fácil traduzir analiticamente essa classificação. Imaginemos uma aplicação com probabilidade p de dar um ganho Y_1 e probabilidade $1 - p$ de dar um ganho Y_2 , sendo $0 < p < 1$ e $Y_1 \neq Y_2$. Imaginemos agora uma outra aplicação que dê, ao certo, um ganho igual a $pY_1 + (1-p)Y_2$. O valor esperado do rendimento é o mesmo para as duas aplicações. O indivíduo avesso ao risco preferirá a seguinte, isto é, $U[pY_1 + (1-p)Y_2] > pU(Y_1) + (1-p)U(Y_2)$. O indivíduo indiferente considerará equivalentes as duas aplicações, e para ele $U[pY_1 + (1-p)Y_2] = pU(Y_1) + (1-p)U(Y_2)$. Finalmente, para o indivíduo propenso ao risco, $U[pY_1 + (1-p)Y_2] < pU(Y_1) + (1-p)U(Y_2)$. Isso é o mesmo que dizer que a curva da utilidade total dos ganhos é côncava, para os indivíduos avessos ao risco; linear para os indiferentes ao risco; e convexa, para os propensos ao risco. Ou, em outras palavras, que a utilidade marginal dos ganhos é decrescente para os avessos ao risco; constante, para os indiferentes ao risco; e crescente, para os propensos ao risco (figura 1, a, b, c).

* J. Tobin — Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk — *The Review Economic Studies*, n.º 67, February, 1958 — págs. 65-86.

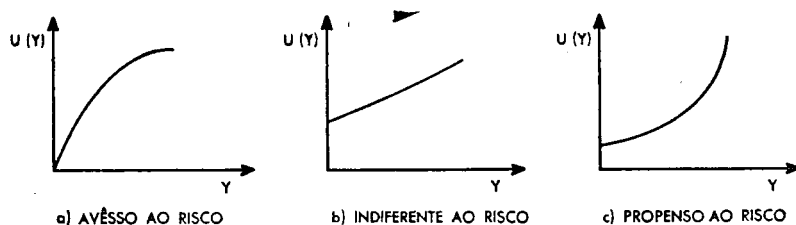


Fig. 1

A psicologia dos diferentes tipos é facilmente compreensível. O indivíduo avêssO ao risco é daqueles que precisa ganhar alguma coisa para se arriscar. O propenso ao risco tem o espírito de jogador: paga para se arriscar. No meio-térmo está o indiferente ao risco, que só se ocupa com as médias das distribuições de probabilidade, mostrando-se absolutamente insensível à dispersão. Para êsse tipo, e só para êsse, vale o procedimento convencional de tratar os valores esperados como as previsões seguras de um mundo onde o futuro fôsse perfeitamente previsível.

Pelo menos para os problemas econômicos relevantes, o tipo normal é o indivíduo avêssO ao risco. Êsse é o que precisará do lucro puro para submeter-se ao risco. As duas características básicas dêsse indivíduo normal são, em resumo:

- a) $U'(Y) > 0$ (utilidade marginal dos ganhos positivos)
- b) $U'(Y) < 0$ (utilidade marginal dos ganhos decrescentes).

Além dessas duas características precisaremos de mais duas outras para completar a descrição do nosso indivíduo normal.

- c) $\lim_{Y \rightarrow \infty} U'(Y) = 0$
- c) $Y \longrightarrow \infty$
- d) $U'(Y) + YU''(Y) > 0$.

A primeira dessas características corresponde a hipótese de que o indivíduo se torne bastante avêssO aos riscos, quando as quantias envolvidas, se tornam muito grandes. Em termos formais, isso corresponde ao

seguinte: Imaginemos que um indivíduo possa escolher entre ganhar Y ao certo, ou entrar num jogo, com probabilidade p de receber nY , ($n > 1$) e probabilidade $1 - p$ de nada a receber. Então, à medida em que Y cresça, também crescerá a probabilidade p necessária para que o indivíduo considere as duas alternativas indiferentes. Essa probabilidade necessária tenderá para 1 quando Y tender para o infinito. Isso analiticamente equivale a se ter:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} p = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{U(Y) - U(0)}{U(nY) - U(0)}$$

o que implica em se ter $\lim_{Y \rightarrow \infty} U'(Y) = 0^*$

Em termos intuitivos, isso equivale ao seguinte: o indivíduo normal, preferiria de bom grado, participar de uma loteria com 95% de probabilidade de ganhar 200 mil cruzeiros e 5% de probabilidade de nada ganhar, a receber ao certo 100 mil cruzeiros. Mas esse mesmo indivíduo normal preferiria ganhar ao certo 100 bilhões de cruzeiros a entrar em qualquer loteria com grande probabilidade de ganhar 200 bilhões, mas alguma probabilidade de nada receber.

A última característica do indivíduo normal, a de que $U'(Y) + YU''(Y) > 0$, equivale à suposição de que a aversão ao risco não seja excessiva. Isso só se tornará claro mais adiante. Mostraremos que essa é a condição para que o indivíduo aplique maior parte de seu patrimônio nas aplicações arriscadas, quando estas se tornarem mais rentáveis sem aumento dos riscos.

É possível encontrar uma infinidade de escalas de utilidade que atendam a essas quatro características do indivíduo normal, em nossa acepção, como por exemplo, as funções:

$$U(Y) = 1Y^\alpha \text{ sendo } 0 < \alpha < 1 \text{ e } k > 0$$

$$U(Y) = \log_e (Y + a), \text{ sendo } a > 0.$$

* Isso se pode concluir da seguinte maneira: ou $U(Y) \rightarrow L < \infty$, caso em que $U'(Y)$ obviamente tende a 0 ou $U(Y) \rightarrow \infty$, caso em que, pela regra de l'Hospital, se conclui: que $U'(Y) \rightarrow 0$.

A maior parte de nossa análise, no presente capítulo, se referirá a esse indivíduo considerado normal pela sua atitude diante do risco. Estabeleceremos, todavia, algumas proposições gerais, e que ajudam a esclarecer o contraste entre esse padrão de comportamento e o dos indivíduos excepcionais, como os propensos e os indiferentes ao risco.

5. O PROBLEMA DAS DUAS APLICAÇÕES

Suponhamos que um indivíduo disponha de um patrimônio P que possa ser aplicado em dois tipos de títulos, A e B. No entender do indivíduo, os títulos do tipo A darão uma rentabilidade segura igual a i (por unidade monetária investida e por período); e os títulos do tipo B têm uma probabilidade p_1 de dar uma taxa de rentabilidade r_1 , p_2 de dar uma taxa r_2 , ... p_n de dar uma taxa r_n . Supõe-se, para efeito de ordenação, que $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ e, naturalmente, que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Deseja-se saber como o indivíduo distribuirá seu patrimônio entre essas duas aplicações.

Designemos por V a quantia que o indivíduo aplica nos títulos de renda aleatória do tipo B, e por $P - V$ a quantia aplicada nos títulos do tipo A. Admitindo que o indivíduo não se possa endividar, teremos $0 < V < P$. Com esse programa de aplicações, o indivíduo terá uma probabilidade p_1 de auferir um ganho igual a $(P - V)i + Vr_1$, p_2 de ganhar $(P - V)i + Vr_2$, ..., p_n de ganhar $(P - V)i + Vr_n$. A utilidade total alcançada pelo indivíduo que aplique V nos títulos de renda aleatória e $P - V$ nos de renda fixa será dada, portanto, pela expressão:

$$F(V) = \sum_{k=1}^n p_k U[(P - V)i + Vr_k] \quad (1)$$

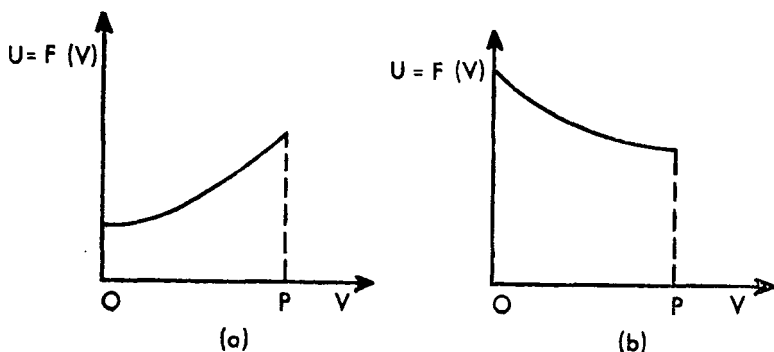
O programa de aplicações escolhido pelo indivíduo será definido pelo valor de V , dentro do intervalo $0 \leq V \leq P$, que maximizar a função $F(V)$.

Para discutir esse problema de maximização, calculemos as duas primeiras derivadas da função $F(V)$. Verifica-se facilmente que:

$$F'(V) = \sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'[(P - V)i + Vr_k] \quad (2)$$

$$F''(V) = \sum_{k=1}^n p_k (r_k - i)^2 U''[(P - V)i + Vr_k] \quad (3)$$

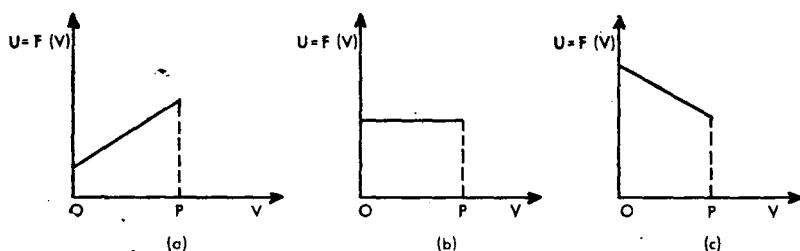
Pela última expressão é fácil concluir que $F''(V) < 0$ para os indivíduos avessos ao risco [$U''(Y) < 0$], que $F''(V) = 0$ para os indivíduos indiferentes ao risco; e que $F''(V) > 0$ para os indivíduos propensos ao risco. Isso equivale a dizer que a utilidade $F(V)$ alcançada quando o indivíduo aplicar V no título de renda aleatória será uma função côncava, linear, ou convexa da variável V , conforme o indivíduo seja, respectivamente, avesso, indiferente ou propenso ao risco.



INDIVÍDUO PROPENSO AO RISCO

Fig. 2

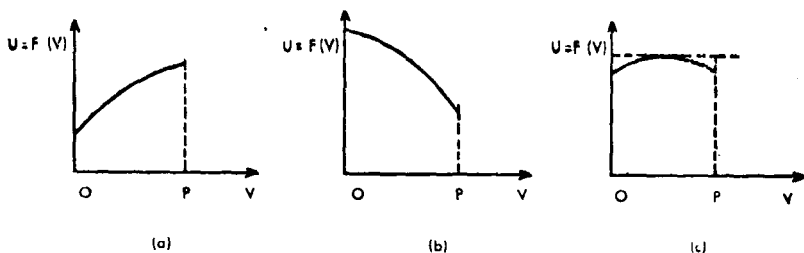
Essa análise do sinal de derivada segunda já nos leva a uma primeira conclusão importante quanto à diversificação das aplicações de um indivíduo. Como sabemos, o máximo, num intervalo fechado $0 \leq V \leq P$, de uma função estritamente convexa (isto é, para a qual $F''(V) = 0$) só pode ocorrer num dos extremos do intervalo (figs. 2a e b). Isso significa que o indivíduo propenso ao risco se concentrará num único tipo de aplicação: ou investirá todo seu patrimônio nos títulos de renda fixa, ou todo seu patrimônio nos títulos de renda aleatória. Já o máximo, num intervalo fechado $0 \leq V \leq P$, de uma função linear, ou ocorre num extremo ou no outro, ou em qualquer ponto do intervalo, no caso particular em que $F(0) = F(P)$, (figuras 3a, b e c). Isso significa que o indivíduo indiferente ao risco ou se concentrará numa única aplicação, ou conside-



INDIVÍDUO INDIFERENTE AO RISCO

Fig. 3

rá indiferente qualquer carteira de investimentos. Esta última hipótese ocorrerá quando $i = \sum_{k=1}^n p_k r_k$, isto é, quando os dois tipos de título tiverem o mesmo rendimento médio. Finalmente, o máximo, num intervalo fechado, de uma função estritamente côncava ($F''(V) < 0$), pode ocorrer ou num dos extremos do intervalo (figs. 4a e b) ou num ponto intermediário (fig 4c). Isso significa que o indivíduo avesso ao risco tanto pode concentrar-se numa única aplicação quanto diversificar sua carteira de investimentos entre os dois tipos de títulos.



INDIVÍDUO AVÊSSO AO RISCO

Fig. 4

Examinemos agora em que condições o indivíduo avesso ao risco diversificará nas aplicações (fig 4c). Para que isso ocorra é preciso que o indivíduo não tenha interesse nem em só guardar títulos de renda fixa, nem em só se concentrar nos de renda variável. Isso corresponde analiticamente a se ter $F'(0) > 0$ e $F'(P) < 0$, a primeira desigualdade

indicando que o indivíduo, só com títulos de renda fixa, melhora quando compra um pouco dos de renda variável, e a segunda desigualdade indicando o oposto para o indivíduo que só estiver com títulos de renda variável. Vejamos em que implicam essas condições:

A desigualdade $F'(0) > 0$ equivale a ser ter

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'(P_i) > 0,$$

o que é o mesmo que dizer que $\sum_{k=1}^n p_k < r_k i$, já que as utilidades marginais dos ganhos são positivas. Isso é o mesmo que dizer que o indivíduo não se concentrará exclusivamente nos títulos de renda fixa se e somente se os de renda aleatória derem maior rendimento médio. Isso é perfeitamente compreensível, tratando-se de um indivíduo avesso ao risco. Para que ele aceite alguma coisa da inversão mais arriscada é necessário que a sua expectativa de rendimento médio seja superior à da inversão segura. Isso não garante que o indivíduo se concentre exclusivamente nessa inversão mais arriscada, mas assegura que ele aí aplicará pelo menos parte de seu patrimônio.

Vejamos agora a desigualdade $F'(P) < 0$. Ela equivale a se ter

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'(Pr_k) < 0, \text{ como condição de que o indivíduo não}$$

se concentre exclusivamente nos títulos de renda variável. Não se pode dar uma interpretação imediata para essa desigualdade. É óbvio que para que ela se verifique é necessário (embora não suficiente) que alguns dos r_k sejam inferiores a i . Isso é compreensível, pois se o título de renda aleatória, mesmo na pior hipótese, rendesse mais que o de renda fixa, ninguém teria motivos para comprar este último.

Suponhamos finalmente que essas duas desigualdades $F'(0) > 0$ e $F'(P) < 0$ se verifiquem. Nesse caso, o indivíduo avesso ao risco diversificará suas aplicações, e a quantia V investida nos títulos de renda variável se determinará pela equação $F'(V) = 0$, isto é:

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'[(P - V)i + Vr] = 0 \quad (4)$$

Nas seções seguintes examinaremos em pormenores as consequências dessa equação.

6. A AVERSÃO NORMAL E A AVERSÃO EXTREMA AO RISCO

Na secção 4 assinalamos que a função utilidade do indivíduo normal deveria ser tal que se tivesse

$$U'(Y) + YU''(Y) > 0.$$

Explicaremos agora o sentido econômico dessa desigualdade.

Imaginemos um indivíduo avesso ao risco que disponha de um patrimônio P , para o qual só existam duas aplicações: a moeda que, por hipótese nada rende; e um título de renda aleatória, com probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n de dar taxas de ganho respectivamente iguais a $r_1, r_2, \dots, \dots, r_n$. A moeda aí desempenha o papel dos títulos garantidos da secção anterior, no caso particular em que $i = 0$.

Admitamos que as condições do título e do indivíduo sejam tais que êle seja levado a diversificar seu patrimônio, aplicando-o parte em títulos, parte em moeda. Isso exige, em primeiro lugar, que $\sum_{k=1}^n p_k r_k > 0$, isto é, que o rendimento médio previsto para o título seja positivo, sem o que o indivíduo avesso ao risco preferiria guardar todo seu patrimônio

sob forma de moeda. E, em segundo lugar que $\sum_{k=1}^n p_k r_k U'(Pr_k) < 0$,

P designando o patrimônio do indivíduo. Esta última condição exige que alguns dos r_k sejam negativos, isto é, que haja o risco de o título dar algum prejuízo.

A quantia V que o indivíduo aplicará em títulos se determinará analiticamente pela equação (4) da secção anterior, no caso particular em que $i = 0$, isto é, pela igualdade:

$$\sum_{k=1}^n r_k r U'(Vr_j) = 0$$

Imaginemos agora que as expectativas do indivíduo quanto ao título se modifiquem, no sentido do aumento de um único dos r_j , sem alteração dos demais, nem das probabilidades subjetivas p_1, p_2, \dots, p_n . Isso significa a melhoria do título, pelo menos na imaginação do indivíduo. Em que sentido êsse aumento de r_1 afetará a quantia V que o indivíduo aplica no título? Derivando parcialmente V em relação a r_j , a partir da equação (5), obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial r_j} = - \frac{p_j [U'(Y_j) + Y_j U''(Y_j)]}{\sum_{k=1}^n p_k r_k^2 U''(Y_k)} \quad (6)$$

onde $Y_k = V r$

É fácil discutir o sinal dessa expressão. Para o indivíduo avêso ao risco, $\sum_{k=1}^n p_k r_k^2 U''(Y_k) < 0$. Segue-se que $\frac{\partial V}{\partial r_j} < 0$, se

$U'(Y_j) + Y_j U''(Y_j) > 0$ e que $\frac{\partial V}{\partial r_j} < 0$, se $U'(Y_j) + Y_j U''(Y_j) < 0$.

Para a maioria dos indivíduos, a reação natural é a de que $\frac{\partial V}{\partial r_j} > 0$: melhorando as expectativas de rentabilidade do título, o indivíduo comprará mais desse título. Essa é a razão pela qual supusemos que, para o indivíduo normal, $U'(Y) + Y U''(Y) > 0$. É possível, não obstante, conceber o comportamento oposto; o indivíduo poderia ser de tal forma avêso ao risco que, diante da expectativa de maiores taxas de lucro, sua reação fôsse a de investir menos no negócio arriscado, o que continuaria a lhe dar uma boa renda esperada, e manter em segurança maior parte do seu patrimônio. Esse comportamento, analiticamente descrito pela desigualdade $U'(Y) + Y U''(Y) < 0$, é o que denominaremos aversão extrema ao risco.

7. A AVERSÃO AO RISCO E A DIMENSÃO DA EMPRESA

Estamos agora em condições de lançar novas luzes sobre o problema da dimensão da empresa em concorrência perfeita. A teoria convencional apela para os rendimentos decrescentes a longo prazo para poder explicar o limite de expansão da unidade produtora. Mostraremos agora que, mesmo em condições de rendimentos constantes, haverá um limite de expansão provocado pela aversão ao risco.

Imaginemos para isso um empresário que disponha de um patrimônio P , no início do período, e que possa endividar-se em qualquer limite de crédito à taxa de juros i . Admitamos que o empresário imagine que durante o período, seu negócio tem uma probabilidade P_1 de dar uma

taxa de ganho r_1 , p_1 de dar uma taxa r_2 , ..., p_n de dar uma taxa r_n , sendo $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Suporemos que o valor esperado dêesses rendimentos seja superior à taxa de juros, isto é, que $\sum_{k=1}^n p_k r_k > i$, sem o que o empresário avêso ao risco não se interessaria pelo negócio. Mas admitiremos também que o negócio envolva algumas possibilidades de render menos do que a taxa de juros, sem o que o indviduamento jamais traria o risco de prejuízo. Suporemos assim que $r_1 < \dots < r_p \leq i < r_{p+1} < \dots < r_n$. Admitiremos também que o empresário tenha a alternativa de empregar seu patrimônio à mesma taxa de juros i , caso ele não o queira aplicar integralmente no negócio. Admitiremos, finalmente, que o empresário seja avêso ao risco e que a utilidade marginal de sua renda tenda a zero quando os ganhos tenderem para o infinito.*

Designemos por V a quantia investida pelo empresário no seu negócio. Admitiremos que haja concorrência perfeita com rendimentos constantes, e que implica em que a distribuição de probabilidades das taxas de ganho não será afetada pela dimensão V da empresa. É fácil verificar que a utilidade alcançada pelo empresário será dada pela mesma fórmula do problema das duas aplicações:

$$F(V) = \sum_{k=1}^n p_k U[(P - V)i + Vr_k] \quad (1)$$

A dimensão escolhida para a empresa será aquele valor de V que maximizar a utilização $F(V)$. Como o empresário possui crédito ilimitado, V pode, em princípio, assumir qualquer valor não negativo. Essa é a única diferença entre o problema em questão e o das duas aplicações, pois neste último V era limitado à direita pelo patrimônio P . Nossa tarefa será a de demonstrar a existência dessa dimensão ótima.

Para isso observemos que, pela fórmula (3) da seção 5 $F''(V) < 0$, pois o empresário se supõe avêso ao risco. Para provar a existência de uma dimensão ótima basta demonstrar que existirá um valor positivo de V para o qual $F'(V) = 0$. Isso se conclui facilmente, observando que $F'(0) > 0$, e que $F'(V)$ se torna negativo para valores suficientemente grandes de V .

* Essas são as três primeiras características de "empresário normal", nos termos da seção 4. O limite de expansão para a empresa existirá, quer o empresário seja normal, quer seja extremamente avêso ao risco, nos termos de seção anterior.

Para provar que $F'(0) > 0$, basta utilizar a fórmula (2) da seção 5 e lembrar a hipótese de que $\sum_{k=1}^n p_k r_k > i$.

$$F'(0) = \sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'(P_i) > 0.$$

Para provar que $F'(V)$ se torna negativo para valores suficientemente grandes de V basta observar que, por hipótese, $r_1 > \dots > r_p < i < r_{p+1} < \dots < r_n$. Decompondo-se a fórmula (2) da seção 5 conclui-se que:

$$\begin{aligned} F'(V) &= \sum_{k=1}^p p_k (r_k - i) U'[(P - V)i + Vr] + \\ &+ \sum_{k=p+1}^n p_k (r_k - i) U'[Pi + V(r_k - i)] \end{aligned}$$

O primeiro desses somatórios é negativo e, como as utilidades marginais são decrescentes, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} F'(V) &< U'(P_i) \sum_{k=1}^p p_k (r_p - i) + \\ &+ \sum_{k=p+1}^n p_k (r_k - i) U'[Pi + V(r_k - i)] \end{aligned}$$

A primeira parcela do segundo membro dessa nova expressão é negativa e independente de V . A segunda é positiva, mas tende para zero quando V tende para o infinito. Segue-se que, para valores suficientemente grandes de V , $F'(V) < 0$.

Provamos, em suma, que a utilidade total alcançada pelo empresário cresce até uma certa dimensão da empresa, mas se torna decrescente após certa dimensão, como na figura 5. Isso prova a existência de uma dimensão ótima, não obstante os rendimentos constantes. Em última análise; a aversão ao risco teria pôsto um limite ao interesse da empresa em se expandir.

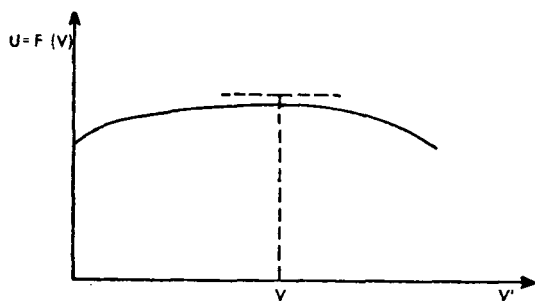


Fig. 5

A dimensão ótima da empresa, nas condições examinadas, determina-se analiticamente pela condição $F'(V) = 0$, correspondente à equação (4) da seção 5.

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U'[(P - V)i + Vr_k] = 0$$

Examinemos como varia a dimensão ótima V em função das variações de um dos r_j . Derivando parcialmente V em relação a r_j , a partir da equação (4), conclui-se que:

$$\frac{\partial V}{\partial r_j} = - p_j \frac{U'(Y_j) + Y_j U''(Y_j) - p_i U'(Y_i)}{\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i)^2 U''(Y_k)} \quad (7)$$

onde

$$Y_k = (P - V)i + Vr_k$$

Como $U''(Y) < 0$, conclui-se que $\frac{\partial V}{\partial r_j} > 0$, se o empresário

fôr normalmente avêso ao risco, isto é, se $U'(Y) + YU''(Y) > 0$. Isso corresponde ao comportamento previsível para a maioria dos empresários: eles se dispõem a investir mais nos negócios quando as perspectivas de rentabilidade aumentam. Para o empresário extremamente avêso ao risco, isto é, para o qual $U'(Y) + YU''(Y) < 0$, a reação poderia ser num sentido ou no outro, dependendo da taxa de juros e do seu patrimônio. (Com efeito, a parcela $- p_i U''(Y_i)$ que figura no numerador da expressão é positiva).

Vejamos agora o que ocorreria se a taxa de juros se alterasse, mantendo-se invariáveis as expectativas de rentabilidade do empresário (essa é uma hipótese típica da análise de equilíbrio parcial, como tôdas as que estamos adotando no presente artigo). Derivando parcialmente V em relação a i , a partir da equação (4), obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial i} = \frac{\sum_{k=1}^n U'(Y_k) + Y_k U''(Y_k) = Pr_k U''(Y_k)}{\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i)^2 U''(Y_k)} \quad (8)$$

Daí se conclui que $\frac{\partial V}{\partial i} < 0$ para o indivíduo normalmente

avêso ao risco, isto é o que, *coeteris paribus*, a empresa investirá menos se a taxa de juros subir. Para o indivíduo extremamente avêso ao risco,

ambas as formas de reação $\frac{\partial V}{\partial i} > 0$ ou $\frac{\partial V}{\partial i} < 0$ seriam possíveis,

dependendo das circunstâncias.

É interessante observar que o modelo apresentado põe à mostra a impropriedade da idéia de uma taxa de risco constante. Podemos a *posteriori*, definir essa taxa como a diferença entre a rentabilidade média

esperada para o negócio $\sum_{k=1}^n p_k r$ e a taxa de juros i . O que provamos

é que o empresário se interessará pelo seu negócio qualquer que seja o valor positivo dessa taxa de risco, e que, em nenhum caso, pensará em se expandir ilimitadamente (enquanto pelo menos um dos r_p fôr inferior à taxa de juros i). Apenas a quantia investida é que variará, à medida em que se modifique o prêmio do risco.

O modelo também fornece uma explicação satisfatória para o fenómeno do lucro puro, como remuneração do risco, nas linhas de pensamento de Frank Knight. Para que o empresário normal se decida a entrar em determinado negócio é preciso que o valor esperado de sua taxa de

ganhos $\sum_{k=1}^n p_k r_k$ seja superior à taxa de juros i . A diferença constitui

aquilo que poderíamos denominar taxa esperada de lucro puro. Em cada caso específico, a taxa efetiva de lucro puro, verificada a *posteriori*, poderá diferir consideravelmente da taxa esperada, por duas razões: pelo caráter aleatório da taxa de ganhos, e pelos possíveis erros de previsão dos empresários. Porém, a longo prazo e para a economia como um todo, é de se esperar que esses erros de previsão se compensem e que a lei dos grandes números aproxime os resultados aleatórios dos seus valores médios esperados. Daí a permanência de um lucro puro efetivo que, a longo prazo, deve aproximar-se da remuneração do risco prevista pelos empresários.

8. A AVERSÃO AO RISCO E OS LIMITES DE CRÉDITO

Mostramos na seção anterior que em concorrência perfeita, mesmo com rendimentos constantes, a empresa teria um limite de expansão, desde que: a) o empresário se revelasse de alguma forma avesso ao risco; b) a utilidade marginal de sua renda tendesse a zero quando a renda tendesse para o infinito; c) o empresário anteviesse a possibilidade, ainda que muito pouco provável, de seu negócio render menos do que a taxa de juros. Essas três condições costumam ocorrer na maioria dos casos, mas não nos devemos esquecer das possíveis exceções. Podemos imaginar uma empresa dirigida por um indivíduo com o espírito de jogador para quem a utilidade marginal de renda seja crescente. Podemos também imaginar um empresário avesso ao risco, mas tão confiante em seu negócio a ponto de descartar a possibilidade de que ele venha a render menos do que a taxa de juros. Como explicar, nesses casos, a existência de um limite de expansão para a empresa?

A resposta é simples. Embora o empresário deva considerar a taxa de juros que ele tem que pagar como um valor certo, os seus financiadores não pensam precisamente nesses termos. O mutuante, ao conceder um empréstimo, contempla a possibilidade da insolvência do mutuário, o que faz que a taxa de juros cobrada seja algo superior à taxa de juros pura. Essa probabilidade de insolvência se tornará tanto maior quanto maior for o endividamento do empresário. Nessas condições, não se pode aceitar a hipótese do que o empresário tenha capacidade de se endividar ilimitadamente a uma taxa de juros constante.

Seria difícil desenvolver uma teoria completa do funcionamento do mercado de capitais levando em conta todos esses aspectos dos riscos do prestamista e do mutuário. Não obstante, é fácil concluir que, para

uma mesma empresa, o custo de obtenção de fundos para empréstimos costuma ser ascendente, e não perfeitamente constante como se supunha na teoria tradicional*. Há duas razões para isso. Em primeiro lugar, para aumentar seu endividamento a firma precisará ou expandir suas linhas de crédito com os financiadores antigos ou encontrar financiadores novos; no primeiro caso os financiados só aceitarão a maior concentração dos riscos em troca de maior remuneração; no segundo caso, a dificuldade está em encontrar novos financiadores com a mesma confiança no negócio revelada pelos financiadores tradicionais. A segunda razão para o custo de obtenção de fundos crescer com o volume de empréstimos é ainda mais objetiva: à medida em que o endividamento da empresa cresce, diminui a margem relativa de garantia oferecida pelo seu patrimônio próprio, aumentando o risco de insolvência.

Na prática, as instituições financeiras costumam adotar algumas regras de bolso para solucionar o seu problema de escolha envolvendo risco. Ao invés de negociar com cada cliente uma taxa de juros diferente, conforme a avaliação dos riscos envolvidos (o que seria um procedimento incrivelmente complicado), cada instituição financeira costuma cobrar uma taxa de juros única (pelo menos para cada tipo básico de operação) e estabelecer, para cada empresa, um limite de crédito. Na fixação desse limite para cada cliente, quatro fatores são levados em conta: a) a conveniência de a instituição financeira diversificar suas aplicações entre vários clientes; b) a confiança do financiador nos negócios do mutuário; c) o endividamento total da empresa no mercado; d) o patrimônio do mutuário. Frequentemente existem leis e regulamentos que bitolam o comportamento das instituições no tocante à fixação desses limites de crédito pelas instituições financeiras.

É claro que esse tipo de comportamento dos financiadores implica num custo ascendente, talvez por degraus, de obtenção de empréstimos para cada empresa. Esgotado o limite de crédito com os financiadores tradicionais a empresa terá que se dirigir a outros propensos a negócios mais arriscados, e que por isso cobram taxas mais elevadas. É possível inclusive que esse procedimento diminua os limites de crédito nas instituições tradicionais, devido ao aumento de endividamento da empresa e do conseqüente maior risco de insolvência. Isso reforça a inelasticidade da oferta de fundos para empréstimos pela empresa, pelo menos após certo limite.

Um custo ascendente de obtenção de empréstimos naturalmente limita o interesse da empresa em se expandir. Na realidade os custos marginais se tornam crescentes, ainda que os rendimentos físicos se man-

* Uma análise pormenorizada desse problema se encontra em Duesenberry — *Business Cycles and Economic Growth* — Mac Graw Hill Book Company, 1958.

tenham constantes. Chegamos nessas condições a algo parecido com a explicação fornecida pela teoria tradicional, embora as motivações agora sejam profundamente diferentes.

Em suma, dois fatores inibem a expansão da empresa, com um dado patrimônio, além de um certo limite de endividamento; em primeiro lugar a aversão do empresário ao risco; no segundo lugar, a aversão ao risco dos seus financiadores. Qual desses fatores o mais importante, é questão que varia de caso para caso. Há empresas que dispõem de bastante folga nos seus limites de crédito, mas que não julgam prudente expandir suas operações. Há outras que gostariam de se expandir, mas que não dispõem de crédito para tanto.

A grande expansão, em tempo útil, das empresas só tem sido possível quando acompanhada pelo aumento do patrimônio. Isso pode ser relativamente fácil pela reinversão dos lucros de monopólio, ainda que se trate de um monopólio transitório, associado a boa dose de pioneirismo empresarial. Os lucros normais de concorrência, no entanto, costumam ser magros demais para permitir uma expansão acelerada. Há, no entanto, consideráveis possibilidades de crescimento quando as pequenas empresas se fundem quando conseguem lançar ações ao público, ou quando conseguem ampliar rapidamente sua área do controle por meio de manobras financeiras, como a dos *trusts*, cadeias de *holdings*, etc. A história de como se formaram as grandes empresas certamente sugere que não podemos construir uma teoria geral sobre os limites de expansão. O importante é que a teoria da escolha envolvendo risco aponta obstáculos a essa expansão, certamente de conhecimento de qualquer comerciante, mas que não eram contemplados pela teoria convencional do equilíbrio econômico.

9. A PROCURA DE MOEDA E A TAXA DE JUROS

Um dos capítulos da análise econômica que dificilmente pode ser explicado sem se apelar para a teoria da escolha envolvendo risco é o da procura de moeda. Qual a razão para os indivíduos manterem parte do seu patrimônio aplicado num papel que nada rende, ao invés de preferirem outros títulos (possivelmente do próprio Governo), capazes de render 2%, 4% ou 6% ao ano?

Tôdas as respostas a essa questão, quando desligadas da teoria do risco, se revelaram pouco convincentes. A primeira motivação para a procura da moeda apontada dentro dessas linhas, era a procura para transações, resultante do fato de que existe uma defasagem entre o recebimento da renda e a realização das despesas. (A essa motivação, Keynes acrescentou uma "procura de precaução" cujos contornos não são muito bem definidos). Que essa procura para transação existe é inteiramente

óbvio, mas é difícil explicá-la sem apêlo ao risco. Num mundo sem incertezas, os pagamentos poderiam ser muito bem efetuados em títulos, vales, ou instrumentos semelhantes; moeda e títulos seriam substitutos perfeitos e, nessas condições, a moeda deveria render o mesmo que qualquer papel de crédito. Se as transações, no mundo real, se efetuam em moeda é exatamente porque há riscos e incertezas que a consagram como o único instrumento normal de liquidação das dívidas.

Na mesma linha, podem-se nutrir algumas dúvidas quanto à procura especulativa keynesiana, quando explicada em termos de expectativas não associadas ao risco. Se os indivíduos se mostrassem indiferentes ao risco, norteando-se apenas pelos valores médios previstos, a procura especulativa de cada um deles fatalmente se comportaria em termos de "tudo ou nada": ou o indivíduo venderia todos os títulos, guardando moeda à espera da baixa de cotações, ou não manteria um testão em caixa, além do necessário para transações e precaução. Isso não parece consentâneo com a realidade.

Tôdas essas dificuldades podem ser superadas desde que se tenha em mente que a composição do patrimônio dos indivíduos resulta de uma escolha envolvendo risco. Como forma de ativo, a moeda tem, comparativamente aos títulos, a desvantagem de nada render. Mas possui a vantagem da liquidez absoluta, característica que os títulos talvez só consigam à custa de oscilações de cotações.

Um exemplo simples, baseado no problema das duas aplicações discutido na seção 5, mostra como é possível enquadrar a procura de moeda numa teoria mais geral de composição de ativos. Imaginemos um indivíduo que disponha de um patrimônio P que possa ser aplicado em moeda ou em títulos de renda fixa. Admitamos que o horizonte do indivíduo se estenda por um período no qual a taxa de juros é igual a i .

O ganho total auferido pelo indivíduo por cruzeiro investido em títulos será igual à taxa i mais a variação relativa do preço do título. Admitamos que o indivíduo imagine que há uma probabilidade p_1 dessa variação ser igual a r_1 , p_2 de ser igual a r_2 , ..., p_n de ser igual a r_n (alguns dos r_i , naturalmente, poderão ser negativos). Os $r_k + i$ representam, no caso, as várias taxas de ganho previstas, e a quantidade V que o indivíduo investirá nos títulos será escolhida de modo a, no intervalo $0 < V < P$, maximizar a função:

$$F(V) = \sum_{k=1}^n p_k U [V (r_k + i)] \quad (9)$$

As possíveis variações na cotação dos títulos representam, no caso, o elemento de risco, e que de alguma forma estimula a retenção de moeda

como forma de aplicação do patrimônio. Nos mesmos termos dos problemas das duas aplicações, é fácil concluir que:

a) o indivíduo aplicará todo seu patrimônio em moeda, não comprando títulos, se $i + \sum_{k=1}^n p_k r < 0$, isto é, se a expectativa média de

desvalorização dos títulos exceder a taxa de juros;

b) O indivíduo aplicará todo seu patrimônio em títulos, nada guardando sob forma de moeda, se $\sum_{k=1}^n p_k (r_p + i) U' [P (r_p + i)] < 0$.

c) Se nenhuma das duas desigualdades acima se verificar, o indivíduo diversificará seu patrimônio, aplicando-o parte em moeda, parte em títulos;

d) Neste último caso, a procura de títulos V será função crescente, e a procura de moeda $P - V$ função decrescente da taxa de juros (mantidas inalteradas as expectativas de valorização e desvalorização do título) desde que o indivíduo seja normalmente (mas não extremamente) avesso ao risco.

Como o leitor pode observar, a procura individual de moeda, em função da taxa de juros, evolui gradativamente no modelo, e não nos temos tudo ou nada da explicação desassociada do risco. A procura especulativa da moeda, no sentido keynesiano, corresponde ao caso a) acima descrito, em que a expectativa média de desvalorização do título excede a taxa de juros. O modelo aponta, todavia, outras razões para que a procura de moeda dependa da taxa de juros, e que resultam essencialmente dos riscos de oscilação no preço dos títulos.

10. O IMPÔSTO DE RENDA E O RISCO

Admite-se freqüentemente que o impôsto de renda atue como forte desestímulo aos negócios arriscados. Isso se deve à sua assimetria de incidência, que reduz os lucros, mas não subsidia os prejuízos. Em termos caritativos, já houve quem assemelhasse o impôsto de renda a um jogo de "se der cara eu ganho, se der coroa você perde". Na realidade a questão é bastante complicada, merecendo alguns comentários.

Suponhamos inicialmente uma empresa, que se possa endividar a uma taxa de juros constante, nas condições discutidas na seção 7. Admitamos que ou o patrimônio da empresa seja igual a zero, ou que a taxa

de juros i seja nula. Em qualquer desses casos, se seu negócio tem uma probabilidade p_1 de render uma taxa r_1 , p_2 de render r_2 , ..., p_n de render r_n , sua dimensão ótima será dada pelo valor de V tal que:

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U' [V (r_k - i)] = 0 \quad (10)$$

Admitamos agora que se introduza um imposto de renda proporcional sobre os lucros, a uma taxa t , mas que não se transforme em subsídio no caso de prejuízos. O efeito de um imposto desse tipo é o mesmo que reduzir os $r_k > i$, e manter inalterados os $r_p < i$. Desde que o empresário seja normalmente (mas não extremamente) avesso ao risco, podemos concluir que o aumento de t implicará na diminuição de V , isto é, que o imposto de renda desestimulará os negócios arriscados.

Suponhamos agora, nas mesmas condições em que ou o patrimônio da empresa ou a taxa de juros é igual a zero, se instituísse um imposto de renda proporcional, à taxa t , mas que agisse como subsídio no caso de prejuízo. Nesse caso, a dimensão ótima da empresa seria dada pela equação:

$$\sum_{k=1}^n p_k (r_k - i) U' [(1 - t) V (r_p - i)] = 0 \quad (11)$$

É fácil concluir que, nesse caso $\frac{dV}{dt} > 0$ * isto é, que o aumento

de imposto de renda estimularia a aceitação do risco. Isso se compreende sem dificuldade. No caso, o imposto de renda atuaria como um amortecedor dos riscos, diminuindo a probabilidade dos grandes lucros, mas também diminuindo a probabilidade das grandes perdas.

Chegamos, de fato, a dois resultados opostos. Em ambos os casos partimos de hipóteses artificiais: ou a empresa não teria patrimônio, ou a taxa de juros seria nula. Concluimos então que um imposto de renda assimétrico, que só incidisse sobre os lucros, e em nada atenuasse os prejuízos, desestimularia as aplicações arriscadas. Mas que um imposto de renda simétrico, que tanto reduzisse os lucros quanto subsidiasse os prejuízos, incentivaria essas aplicações.

*) Estamos supondo que o empresário seja avesso ao risco, isto é, que a utilidade marginal de seus ganhos seja decrescente.

Na prática as coisas se complicam bastante. A empresa costuma dispor de um certo patrimônio e a taxa de juros costuma ser positiva. fatos que impedem a aplicação crua dos modelos acima. É difícil aí apontar o sentido em que um aumento do imposto afetará os empreendimentos arriscados. A empresa disporá, nesse caso, de uma renda de base igual ao juro sobre o patrimônio, de modo que as probabilidades de prejuízo diminuam; sob esse aspecto o imposto de renda favorece os empreendimentos arriscados, pois os riscos aí são menos os de ganhar ou perder do que os de ganhar mais ou ganhar menos. Não obstante, o imposto de renda exerce, no caso, um segundo impacto, cujos resultados são difíceis de se prever: ele diminui a renda-base P_1 sobre o patrimônio, tudo se passando, nos termos de ganhos, como se houvesse uma redução desse patrimônio. Há um fator adicional importante: a maioria das legislações de imposto de renda costuma permitir que os prejuízos de um exercício sejam abatidos, pelo menos em parte, dos lucros dos anos seguintes. Isso tende a melhorar os efeitos do imposto, no que tange à aceitação dos riscos empresariais.

No final, parece impossível dar uma resposta geral quanto aos efeitos do imposto de renda sobre os empreendimentos arriscados. Basicamente tudo indica que o imposto de renda desestimulará as tentativas muito arriscadas, onde há possibilidades de grandes prejuízos sem perspectivas de recuperação futura. Esse efeito se sentirá especialmente se a incidência do imposto de renda sobre os ganhos for progressiva. Todavia, em negócios menos arriscados, onde as possibilidades de perda são muito pequenas e os riscos atuam mais no sentido de ganhar muito ou ganhar pouco, os efeitos do imposto de renda são de previsão bem mais difícil. Em alguns casos, até o imposto poderá estimular a aceitação do risco pelos empresários.

11. ASPECTOS CRÍTICOS DA TEORIA DA ESCOLHA ENVOLVENDO RISCO

Até agora apresentamos com certo entusiasmo as aplicações de teoria da escolha envolvendo risco. De fato essa teoria possui o mérito de explicar certos fenômenos que escapam à análise econômica tradicional. Não obstante ela contém certas imperfeições e, sobretudo, várias limitações que devem ser levadas em consideração.

A primeira dessas limitações resulta de termos tomados como dadas as expectativas e distribuições subjetivas de probabilidade dos agentes econômicos. Em nenhum momento tentamos explicar como se formam essas expectativas e como o confronto com a realidade as modifica. Isso seria tarefa extremamente difícil e que, no atual estado de nosso conhe-

cimento econômico, não poderia escapar a certas hipóteses simplistas e arbitrárias. Mas tomando as expectativas como variáveis exógenas, fatalmente limitamos o alcance de nossa análise, tornando-a puramente tópica, e incapaz de se oferecer como um substituto à teoria do equilíbrio geral. O ideal de construir uma teoria geral do funcionamento dos mercados envolvendo risco ainda parece muito distante. Nessas condições, a teoria da escolha diante do risco deve ser apreciada como intromissão realista na análise clássica, mas não como uma metodologia alternativa à teoria do equilíbrio geral.

A segunda limitação corresponde ao uso das distribuições subjetivas de probabilidade como alicerce da teoria da escolha envolvendo risco. É óbvio que no mundo real os empresários não explicitam essas distribuições de probabilidade nem se decidem a partir de complicados cálculos do valor esperado da utilidade de seus ganhos. Nessas condições, toda a teoria que desenvolvemos se apresenta nos termos de "tudo se passa como se fôsse", o que significa que as suas hipóteses básicas não são susceptíveis de verificação empírica direta. Vários economistas vêem nesse tipo de construção um grave defeito da teoria da escolha envolvendo risco, julgando esotéricas as distribuições subjetivas de probabilidade que ela tanto usa. Sob a inspiração de Frank Knight distinguem risco e incerteza: o primeiro ocorreria quando existisse uma base objetiva para o cálculo das probabilidades, como no caso dos cálculos das companhias de seguro; a incerteza se manifestaria nas decisões cujos resultados não pudessem ser baseados em tais distribuições objetivas. E a teoria apresentada pecaria por aplicar métodos de análise do risco aos problemas de incerteza.

É provável que essas objeções sejam bastante exageradas. Se só aceitássemos as hipóteses capazes de verificação empírica direta, deveríamos preferir as leis de Kepler à lei gravitacional de Newton. Também um empresário que agisse em termos de absoluta incerteza, sem imputar alguns coeficientes de probabilidade aos diversos resultados possíveis, acabaria, de tanto pessimismo, por se candidatar a uma vaga de funcionário público. Em todo o caso a objeção vale no sentido de que a teoria da escolha envolvendo risco adota hipóteses muito definidas sobre matéria na qual ainda somos bastantes ignorantes: os pormenores analíticos da psicologia dos empresários.

A terceira limitação é a mais séria das três, pois atinge diretamente os axiomas de Von Neumann e Morgenstern. Será que os indivíduos realmente se decidem diante do risco de acordo com essas hipóteses? Vários economistas, particularmente M. Allais, têm levantado sérias dúvidas a esse respeito. Essas dúvidas talvez passem despercebidas quando diretamente opostas aos axiomas, mas impressionam bastante quando aplicadas a certos corolários da teoria. Para citar um exemplo, suponhamos que um indivíduo deva escolher entre as seguintes alternativas:

Alternativa 1: Ganhar 10 bilhões de cruzeiros ao certo.

Alternativa 2: Ter 90% de probabilidade de ganhar 20 bilhões, mas 10% de probabilidade de não ganhar nada.

A maioria das pessoas, salvo as muito imprudentes ou multimilionárias, preferirá a alternativa 1. Com efeito, 10 bilhões de cruzeiros já representam uma fortuna considerável para que se aceite 10% de risco de nada ganhar. Isso significa pela teoria da escolha envolvendo risco que:

$$U(L) > 0,9 U(20) + 0,1 V(0).$$

Suponhamos agora que o mesmo indivíduo tivesse que optar entre as duas seguintes alternativas:

Alternativa 3: Ter 0,1% de probabilidade de ganhar 20 bilhões, 1,0% de probabilidade de ganhar 10 bilhões e 98,9% de probabilidade de nada ganhar;

Alternativa 4: 1% de probabilidade de ganhar 20 bilhões e 99% de probabilidade de nada ganhar.

É provável que agora, o mesmo indivíduo preferisse a alternativa 4 à alternativa 3. Com efeito, a probabilidade de ganhar alguma coisa seria agora muito pequena, parecendo melhor escolher a alternativa com maior valor esperado do ganho. Mas isso significa que:

$$0,001 U(20) + 0,010 U(10) + 0,989 U(0) < 0,010 U(20) + 0,990 U(0).$$

o que equivale a se ter:

$$U(10) < 0,9 U(20) + 0,1 U(0).$$

Essa desigualdade obviamente se contradiz com a que foi obtida pela comparação das alternativas 1 e 2. Isso significa que os indivíduos que preferem a alternativa 1 à alternativa 2 e que, ao mesmo tempo, prefeririam a quarta à terceira, não se comportam rigorosamente de acordo com os axiomas de Von Neumann e Morgenstern. Mais ainda, para esses indivíduos não será válido nenhum conjunto de axiomas que leve à conclusão de que a utilidade de uma alternativa envolvendo risco é igual ao valor esperado das utilidades dos possíveis resultados — conclusão que foi a base de toda a análise formal dos problemas de escolha envolvendo risco.

Tôdas essas observações mostram que a teoria examinada neste artigo ainda tem muito o que evoluir, não apenas em pormenores de aplicação, mas nos seus próprios fundamentos axiomáticos. Em todo o caso, ainda que apenas com sua constituição provisória, ela já possui o mérito de injetar uma pitada de realismo na teoria do funcionamento dos mercados.