

# Uma Investigação sobre os Co-Movimentos na Volatilidade dos *Par Bonds* Latino-Americanos\*

Igor A.C. de Morais\*\*

Marcelo S. Portugal\*\*\*

Sumário: 1. Introdução; 2. Volatilidade estocástica univariada; 3. Volatilidade estocástica multivariada; 4. Características dos dados; 5. Conclusão.

Palavras-chave: volatilidade estocástica; filtro de Kalman; máxima verossimilhança.

Código JEL: C32.

Este artigo procura aplicar o método de quase-máxima verossimilhança para estimar a volatilidade estocástica multivariada não-estacionária dos preços de compra dos *par bonds* de quatro países latino-americanos – México, Brasil, Argentina e Venezuela – no período de 9-8-1994 a 15-9-1999. O objetivo é analisar possíveis movimentos comuns nestas variâncias. Os testes feitos revelam que a volatilidade nos modelos univariados não apresentam inclinação, mas possuem alta persistência. A formulação multivariada relaciona bem os dados, obtendo estimativas consistentes e revelando a existência de um comportamento ao longo do tempo similar entre as volatilidades das quatro séries.

This paper uses a quasi-maximum likelihood procedure to estimate the non-stationary stochastic volatility for the *par bonds* of four Latin American countries: Brazil, Argentina, Mexico and Venezuela. The aim is to investigate the possible presence of co-movements in volatility across countries. The estimation period goes from August 1994 to September 1999, including, therefore, the Asian and Russian crises. The estimated volatility for the univariate model does not show any slope and is highly persistent. The multivariate model gives a good fit to the data and shows that there is common movement.

---

\*Artigo recebido em jul. 2000 e aprovado em jan. 2001. Versões anteriores deste artigo, com o título “Características da volatilidade estocástica dos *par bonds* da América Latina” foram apresentadas no XXVIII Encontro Nacional de Economia, no III Encontro de Economia da Região Sul, no V Encontro Regional de Economia e nas XV Jornadas Anuais de Economía do Banco Central do Uruguai. Os autores agradecem a colaboração da bolsista de iniciação científica Patrícia U. Palermo (CNPq) e de André Lenz (UFRGS).

\*\*Doutorando em economia pela UFRGS.

\*\*\*Professor do Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS e pesquisador do CNPq.

## 1. Introdução

Após as duas crises do petróleo na década de 1970, as economias mais desenvolvidas tiveram de modificar sua política econômica, e a combinação de fatores como o baixo crescimento econômico dos países industriais, as taxas de juros internacionais mais elevadas e a queda do preço das *commodities* no mercado mundial resultou em um serviço da dívida maior para as economias em desenvolvimento que já se encontravam altamente endividadas.

A crise da dívida no princípio dos anos 1980 teve início com a suspensão, por parte do México, do pagamento de seus débitos comerciais junto aos bancos mundiais. O resultado foi que as instituições financeiras internacionais bloquearam o crédito para os países em desenvolvimento, agravando ainda mais o cenário macroeconômico.

A primeira tentativa de reestruturação das dívidas das economias em desenvolvimento foi o Plano Baker, em 1985, cuja proposta consistia em um novo empréstimo por parte dos bancos comerciais e das organizações multilaterais, tendo como contrapartida uma reforma estrutural nos países devedores, que reduzisse a instabilidade econômica, aumentasse o crescimento e diminuísse o débito pendente. Mas esse plano não obteve o efeito desejado, tendo fracassado principalmente devido ao curto horizonte de tempo para o pagamento das dívidas (no máximo dois anos) e ao ambiente recessivo de tais economias no período.

Uma segunda tentativa teve início em 1989, com o Plano Brady, cujo objetivo era reestruturar os serviços da dívida externa de forma a reduzir tanto o principal quanto as taxas de juros. Com isto, seria criada uma maior flexibilidade financeira que permitiria o retorno da liquidez para estas dívidas através de sua securitização, possibilitando que os agentes econômicos disseminassem o risco no mercado secundário. Como antes, os países eram obrigados a fazer ajustes em suas economias de acordo com um programa elaborado pelo FMI, denominado SAP (*Structural Adjustment Program*), onde constavam metas para inflação, crescimento do PIB, privatizações e descentralização dos serviços do governo. Estas mudanças deveriam promover o investimento e a geração de poupança interna e permitir a repatriação de capital.

A principal diferença entre os planos Brady e Baker consiste no fato de que, enquanto o primeiro procurava reduzir a dívida externa dos países, o segundo previa apenas a formação de crédito novo.

Como as negociações dentro do Plano Brady foram feitas caso a caso entre os países devedores e os bancos credores, onde era possível escolher entre três tipos de reestruturação da dívida,<sup>1</sup> acabaram por surgir diferentes títulos com características distintas.

Em fevereiro de 1990, o México tornou-se o primeiro país a renegociar sua dívida nos moldes do Plano Brady, com a conversão de US\$48 bilhões de seus débitos estrangeiros em duas opções de empréstimos dentro de garantias negociáveis, emitindo, assim, os *discount bonds* e os *par bonds*. Na sequência, 12 outros países na Ásia, América Latina, África e Europa Oriental seguiram esta estratégia,<sup>2</sup> sendo que Brasil, México e Argentina contabilizam 2/3 dos Brady *bonds* emitidos.<sup>3</sup>

A maioria destes títulos é denominada em dólar americano, com 70% tendo maturidade acima de 10 anos, e é dividida entre instrumentos de renda fixa e flutuante. Os Brady *bonds* se tornaram atraentes, pois possuem *collateral*<sup>4</sup> do principal nos títulos do Tesouro dos EUA, com taxas de juro fixas ou flutuantes, oferecem taxas de retorno atrativas aos investidores, o que possibilita a diversificação do portfólio, e são de fácil negociação no mercado secundário, no qual os mais líquidos e comuns são os *par bonds* e os *discount bonds*, justamente por possuírem uma vida média longa e uma projeção de amortização.

Os preços dos Brady *bonds* sofrem várias influências que podem estar relacionadas tanto com o país emissor quanto com o *collateral*. Desta forma, as variações no crescimento econômico dos países devedores geram incertezas no mercado e afetam o risco soberano, devido ao aumento das probabilidades de *default*.<sup>5</sup> Além do mais, as modificações no mercado dos títulos do Tesouro dos EUA (*collateral*), as variações nas taxas de juros internacionais e as mudanças no retorno relativo dos títulos, como as desvalorizações ocorridas no México em 1994 e no Brasil em 1999, acabam também afetando o preço dos Bradies.

---

<sup>1</sup> As opções eram: trocar empréstimos por títulos soberanos; utilizar títulos com vencimento do valor de face e taxa de juros fixa, ou com desconto e taxa flutuante; fazer um novo empréstimo com reestruturação dos pagamentos.

<sup>2</sup> São eles: Brasil, Argentina, Venezuela, Bulgária, Costa Rica, República Dominicana, Filipinas, Uruguai, Marrocos, Nigéria e Equador.

<sup>3</sup> Podem ser destacados os *par bonds*, *discount bonds (DB)*, *debt conversion bonds (DCB)*, *new money bonds (NMB)*, *front-load interest reduction bonds (Flirbs)*, *capitalization bonds (C-bonds)* e o *interest due unpaid (IDU)*.

<sup>4</sup> *Collateral* é um ativo dado em garantia a um credor até que seu empréstimo seja honrado. Se o tomador se torna inadimplente, o credor tem o direito legal de apreender o bem empenhado ou caucionado e vendê-lo para solução do empréstimo.

<sup>5</sup> Izvorski (1998) calcula a probabilidade de *default* implícita nos preços dos brady bonds de sete países em desenvolvimento.

Estes títulos se tornaram para o investidor internacional um termômetro em relação à performance das economias emergentes, sendo sensíveis às variações de risco de investimento nesses países.<sup>6</sup> Logo, é natural que exista uma maior volatilidade associada aos ativos desses países, principalmente com os títulos da dívida externa.

Nos últimos anos ocorreram vários ajustes estruturais, promovidos com o objetivo de estabilizar as economias emergentes. Entretanto, como este processo envolveu elevados custos, muitos governos encontraram dificuldades em evitar as pressões nas taxas de câmbio e a elevação nas taxas de juros internas.

Como, para o investidor internacional, esses países possuem geralmente problemas similares nos fundamentos da economia, acaba-se por acreditar que, quando surge uma crise econômica em um determinado país, a probabilidade de disseminação para as demais regiões é alta (efeito contágio). Assim, podemos concluir que existe uma percepção comum em relação ao risco entre as economias emergentes.

A sequência de crises financeiras ocorridas recentemente, (México em 1994, Ásia em 1997, Rússia em 1998 e Brasil em 1999), suscitou discussões acerca desta relação de risco entre as economias emergentes, ou pelo efeito contágio ou pela existência de correlação.<sup>7</sup>

Quando estas crises ocorreram, mais do que depressa os governos das outras nações se apressaram em declarar que seus respectivos países possuíam fundamentos econômicos diferentes, o que deveria ser interpretado pelos investidores como a inexistência de uma correlação entre seus ativos e, portanto, do risco de contágio. Na realidade, entretanto, não foi isto o que se observou, principalmente na América Latina.

Se realmente os ativos não são correlacionados e não há o risco de contágio, ou seja, os investidores internacionais acreditam que estes mercados são relativamente independentes, é esperado que a volatilidade dos Bradies de características equivalentes entre estes países, como, por exemplo, os *par bonds*, não apresentem movimentos comuns ao longo do tempo.

---

<sup>6</sup> Por exemplo, muitos analistas medem o "risco Brasil" fazendo uso do spread over treasury, ou seja, quantos pontos base o C-bond está sendo negociado no mercado acima de um título do governo americano que tenha maturidade similar.

<sup>7</sup> Se a volatilidade no mercado financeiro de um dado país é alta, um fundo de investimento poderia vender seus títulos daquele país ou de algum outro a ele correlacionado e adquirir ativos de países fora de crise. Este movimento gera o efeito contágio nos demais países e regiões do mundo.

Com o intuito de analisar este comportamento, este artigo procura capturar a relação de volatilidade entre os *par bonds* de quatro países latino-americanos (México, Brasil, Argentina e Venezuela) através do uso de modelos de volatilidade estocástica multivariados. As características dos *par bonds* desses países são apresentadas na tabela 1.

Tabela 1  
Características dos *par bonds*

País	Data da emissão	Principal em US\$ bilhões	Moeda	Cupom semi-anual	Vencimento
Argentina	abr./1993	14,9	US\$,DM	Flexível	abr./2023
México	mar./1990	22,6	US\$,Y,DM	6,25%	dez./2019
Brasil	abr./1994	8,4	US\$,DM,L	Flexível	abr./2024
Venezuela	dez./1990	6,7	US\$,DM,£	6,75%	mar./2020

Os *par bonds* são utilizados por possuírem maturidade de longo prazo, por estarem entre os mais líquidos e por serem emitidos pelos quatro países aqui considerados, o que permite uma análise da ligação de risco que considere um ativo comum. Aqui deve ser salientado que o pagamento de cupom dos *par bonds* do México está vinculado ao preço futuro do petróleo e aos rendimentos obtidos com a exportação desta *commodity*. A negociação do *par bond* é feita com valor de face de 100%, mas com cupom menor do que o de mercado, e o *collateral* do principal geralmente é o título do Tesouro dos EUA de cupom zero, fazendo com que o preço deste título constitua um piso para o valor do Brady.<sup>8</sup>

Portanto, o objetivo deste artigo é determinar os componentes estocásticos e as características comuns presentes na volatilidade dos *par bonds*. Para tanto, o artigo é dividido em quatro seções, além desta. Nas seções 2 e 3 são discutidas as características dos modelos de volatilidade estocástica univariados e multivariados, respectivamente. Após a apresentação do instrumental estatístico, a seção 4 descreve as características dos dados a serem utilizados com os resultados das estimações. Por fim, as conclusões são apresentadas na seção 5.

<sup>8</sup> O cupom é uma taxa de juros em um título representativo de dívida cujo pagamento é prometido pelo emissor ao titular até o vencimento final, sendo expresso com percentual do valor de face do título. Uma obrigação (título) sem coupon de juros é denominada de zero-cupom.

## 2. Volatilidade Estocástica Univariada

Um modelo de série de tempo estrutural univariado, como apresentado em Harvey (1997), pode ser formulado como na equação (1),

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

onde  $\varepsilon_t$  tem média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ , e os componentes não-observáveis são dados pelo nível ( $\mu_t$ ), a sazonalidade ( $\gamma_t$ ) e o componente cíclico ( $\psi_t$ ). Considere agora que o retorno de um ativo ( $R_t$ ) seja dado por:

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad \varepsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (2)$$

A volatilidade de  $R_t$ , ( $h_t$ ) pode ser determinada como um componente não-observável que apresente determinada característica de evolução no tempo. Assim, elevando os retornos ao quadrado e extraindo o log é obtido:

$$\log R_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2 \quad (3)$$

onde  $h_t = \log \sigma_t^2$ .

Note que  $\log \varepsilon_t^2$  tem distribuição  $\log(\chi_{(1)}^2)$  e que  $E(\log \varepsilon_t^2) = -1,27$  e  $E[(\log \varepsilon_t^2)^2] = \pi^2/2$ .

Suponha agora a existência de um processo de inovação  $\xi_t$  dado por  $\xi_t = \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2)$ , de forma que  $E(\xi_t) = 0$  e  $Var(\xi_t) = \pi^2/2$ . Como  $E(\log \varepsilon_t^2) = -1,27$ , então  $\log \varepsilon_t^2 = \xi_t - 1,27$ . Portanto, (3) pode ser modificado de forma a obter-se:<sup>9</sup>

$$\log R_t^2 = h_t + \xi_t - 1,27 \quad (4)$$

Com ( $h_t$ ) sendo o componente não-observável, sua evolução no tempo pode seguir, por exemplo, um processo auto-regressivo de ordem 1, do tipo:

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t \quad (5)$$

Assim, as equações (4) e (5) constituem o modelo de volatilidade estocástica no formato espaço de estados, onde ( $h_t$ ) é o componente não-observável,

---

<sup>9</sup> Para mais detalhes sobre as características do modelo de volatilidade estocástica univariado, ver Ruiz (1994), Herência (1997) ou, ainda, Morais & Portugal (1999).

ou seja, a variância estocástica. Se  $\phi = 1$ , então  $h_t$  é um *random walk* e o melhor predictor linear dos valores correntes de  $h_t$  é um *Ewma – exponentially weighted moving average* – de valores passados de  $\log R_t^2$  (Harvey, 1997). Note que aqui há uma relação com o modelo determinístico *Igarch*(1,1).<sup>10</sup>

Como o modelo não tem uma distribuição gaussiana, neste artigo é empregado o filtro de Kalman para a estimação dos hiperparâmetros  $\phi$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$  e  $\sigma_\eta^2$  com o uso do método de quase-máxima verossimilhança, de tal forma que temos:

$$\log L_Q(R/\theta) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log F_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\nu_t^2}{F_t} \quad (6)$$

onde  $R = (R_1, \dots, R_n)$  são os retornos,  $\nu_t$  é o erro de previsão um passo à frente para o melhor estimador linear de  $\log R_t^2$ , enquanto  $F_t$  é o erro quadrado médio e  $\theta$  o vetor de parâmetros desconhecidos. Neste caso, como  $\log \varepsilon_t^2$  não tem distribuição normal, o estimador de quase-verossimilhança é um estimador subótimo. Embora seja um estimador consistente, é de se esperar que não apresente boas propriedades para pequenas amostras.

## 2. Volatilidade Estocástica Multivariada

Os modelos de série de tempo estrutural multivariados são interessantes pois podem revelar relações em comum entre as séries utilizadas, e estas relações podem ser observadas através da correlação dos erros de seus componentes não-observáveis. Além do mais, os modelos multivariados são flexíveis a ponto de permitirem a imposição de determinadas restrições, de forma que seja possível obter uma tendência, um ciclo ou uma inclinação comum<sup>11</sup> ou, ainda, tornar proporcionais as matrizes de covariância dos erros (modelo denominado sistema homogêneo). Estas matrizes de covariância correspondem aos parâmetros da variância no modelo univariado, sendo que na diagonal principal estão as variâncias dos distúrbios correspondentes, acima da diagonal encontram-se as correlações, e abaixo, as covariâncias.

Desta forma, o modelo estrutural multivariado com componentes correlacionados temporalmente é similar ao *Sutse* (*seemingly unrelated time series*

<sup>10</sup> No modelo estrutural,  $\phi=1$  é equivalente a  $\alpha_1+\beta_1=1$  no caso do *GARCH*(1,1), onde  $h_t=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\beta_1h_{t-1}$ . Ver Engle & Bollerslev (1986).

<sup>11</sup> A presença de fatores comuns significa que as matrizes de covariância dos erros relevantes são menores do que o posto completo. Para uma explicação detalhada da decomposição destes modelos, ver Harvey & Koopman (1997) ou, ainda, Harvey (1997).

*equations*). Contudo, como pode existir uma correlação entre os erros das séries, no modelo Sutse cada série pode ser modelada como no caso univariado (Harvey, 1997). Se as matrizes de covariância dos erros são proporcionais, significando que as séries têm as mesmas propriedades dinâmicas,<sup>12</sup> então o modelo Sutse é homogêneo.

A generalização da volatilidade estocástica univariada para o caso multivariado é relativamente simples. Suponha  $N$  séries de retornos, de forma que  $R_t$  é um vetor  $N \times 1$ . Assim, existirá um vetor  $\varepsilon_t N \times 1$  de componentes irregulares que produzirá uma matriz de covariância  $\Sigma_\varepsilon$  para os componentes do vetor  $\varepsilon_t$ . Considere que este vetor ( $R_t$ ) de retornos obedeça à seguinte relação:

$$R_{it} = \sigma_{it}\varepsilon_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

no qual  $R_{it}$  é a observação da série de retorno  $i$  no tempo  $t$ , e  $\varepsilon_{it}$  é o componente irregular  $i$  no tempo  $t$  de um vetor  $\varepsilon_t N \times 1$  de componentes irregulares com média zero e matriz de covariância  $\Sigma_\varepsilon$ , com os elementos da diagonal sendo 1 e os fora da diagonal representados por  $\rho_{it}$ . Note que a equação (7) é o caso multivariado de (2).

Procedendo como no modelo univariado, e generalizando o processo AR(1) do componente variância para as  $N$  séries,  $h_{it} = \phi_i h_{it-1} + \eta_{it}$ , onde  $h_{it}$  descreve a variância estocástica da série  $i$  no tempo  $t$ , pode ser obtida a formulação em espaço de estado do caso multivariado:

$$\log R_{it}^2 = -1, 27\lambda + h_t + \xi_t \quad (8)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t$$

onde  $\log R_{it}^2$  e  $\xi_t$  são vetores  $N \times 1$  com  $\xi_{it} = \log \varepsilon_{it}^2 + 1, 27$ , e  $\lambda$  é um vetor  $N \times 1$  de números 1. Aqui, o conjunto de equações (8) é similar ao conjunto (4) e (5) e, da mesma forma, não tem distribuição gaussiana. Sendo assim, pode ser utilizado o estimador de quase-máxima verossimilhança para obter os hiperparâmetros do modelo, onde a quantidade destes dependerá da imposição ou não de restrições.<sup>13</sup>

Neste artigo, para cada série de retornos é formulada uma equação do tipo

$$R_{it} = \alpha_0 + \sum_{p=1}^T \alpha_p R_{it-p} + \sum_{q=0}^Z \beta_q D_q + \omega_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

<sup>12</sup> A mesma função de autocorrelação para a forma estacionária do modelo.

<sup>13</sup> Tanto no modelo univariado quanto no multivariado,  $\xi_t$  e  $\eta_t$  são não correlacionados, mas esta condição pode ser relaxada.



onde  $R_{it}$  é o retorno,  $D_q$  são variáveis *dummies* (intervenção) e  $\omega_{it}$  são os distúrbios aleatórios. Obtido o vetor de distúrbios  $\omega_{it} = (\omega_{it}, \dots, \omega_{NT})$  e assumindo que estes sejam dados por

$$\omega_{it} = \sigma_{it}\varepsilon_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

o modelo multivariado de variância estocástica pode, então, ser formulado de forma similar ao conjunto de equações (8).<sup>14</sup>

Como em (10) podem ser encontrados valores para  $\omega_{it}$  iguais a zero, o que impossibilitaria a aplicação do operador log, é necessário que seja feita alguma transformação de forma a eliminar estes valores. Uma das alternativas é subtrair de  $\omega_{it}$  a média, como em Harvey (1997). Uma outra alternativa é utilizar a equação

$$\log \omega_{it}^2 \cong \log(\omega_{it}^2 + cS_{\omega_i}^2) - cS_{\omega_i}^2/(\omega_{it}^2 + cS_{\omega_i}^2) \quad (11)$$

que segue uma transformação baseada na série de Taylor, e onde  $S_{\omega_i}^2$  é a variância amostral de  $\omega_i$  e  $c$  um parâmetro de valor pequeno.<sup>15</sup> Uma das vantagens da aplicação do filtro de Kalman é que este permite que sejam obtidas estimativas da volatilidade estocástica tanto filtrada quanto suavizada.

Como a volatilidade suavizada é encontrada considerando toda a informação disponível e o propósito deste artigo não é a previsão pontual, e sim a detecção da existência de características comuns das séries, a consideração da volatilidade estocástica suavizada permitirá obter ganhos de inferência. Com a utilização de  $\log \omega_{it}^2$ , a variância dos resíduos da equação (9) pode ser obtida a partir da aplicação de (12):

$$Vol_{it,p} = \exp(N_{it} + 1,27 + h_{it,p}) \quad (12)$$

onde  $p$  = suavizado ou filtrado,  $N_{it}$  é o nível da série  $i$  e  $h_{it}$  é a estimativa da volatilidade.

---

<sup>14</sup> O processo de estimação do caso multivariado é, como pode ser visto, uma generalização do caso univariado. Uma explicação detalhada do caso univariado pode ser encontrada em *Morais & Portugal (1999)* ou em *Herência (1997)*. Em *Koopman et alii (1995)*, *Harvey (1997)* e *Harvey, Ruiz & Shephard (1994)* há uma explicação de modelos de volatilidade estocástica multivariados.

<sup>15</sup> O pacote estatístico utilizado é o Stamp 5.0, onde é proposta esta transformação, com  $c$  tendo valor 0,02 no default do programa. Por exemplo, para um valor de  $\omega_t = 0$  e  $S_{\omega_t}^2 = 0,2$ , então  $\log \omega_t^2 = -3.397$ .

## 4. Características dos Dados

Neste artigo são utilizados os preços dos *par bonds* de quatro países latino-americanos (México, Brasil, Argentina e Venezuela), entre 9-8-1994 e 15-9-1999,<sup>16</sup> perfazendo um total de 1.261 dados.

Como pode ser visto no gráfico da figura 1, estes preços apresentam um comportamento similar ao longo deste período, no qual é evidente o impacto das crises ocorridas no México e na Ásia, a moratória da Rússia, além da mudança de regime cambial no Brasil, o que leva a crer, a princípio, na existência de correlação entre os preços dos *par bonds*. Esta correlação pode significar uma percepção de risco única por parte dos investidores internacionais em relação aos títulos da dívida externa dos países da América Latina.

Os retornos destes títulos são calculados de acordo com a fórmula (13). O gráfico da figura 2 mostra o comportamento dos retornos dos *par bonds* do Brasil, enquanto a tabela 2 apresenta as estatísticas das quatro séries.

$$R_{it} = \log P_{it} - \log P_{it-1} \quad (13)$$

aqui  $i = 1, 2, 3, 4$ , sendo que  $R_{1t}$  representa os retornos da Argentina no tempo  $t$ ,  $R_{2t}$  os retornos do México,  $R_{3t}$  do Brasil, e  $R_{4t}$  da Venezuela.

Tabela 2  
Estatísticas para as séries de retornos

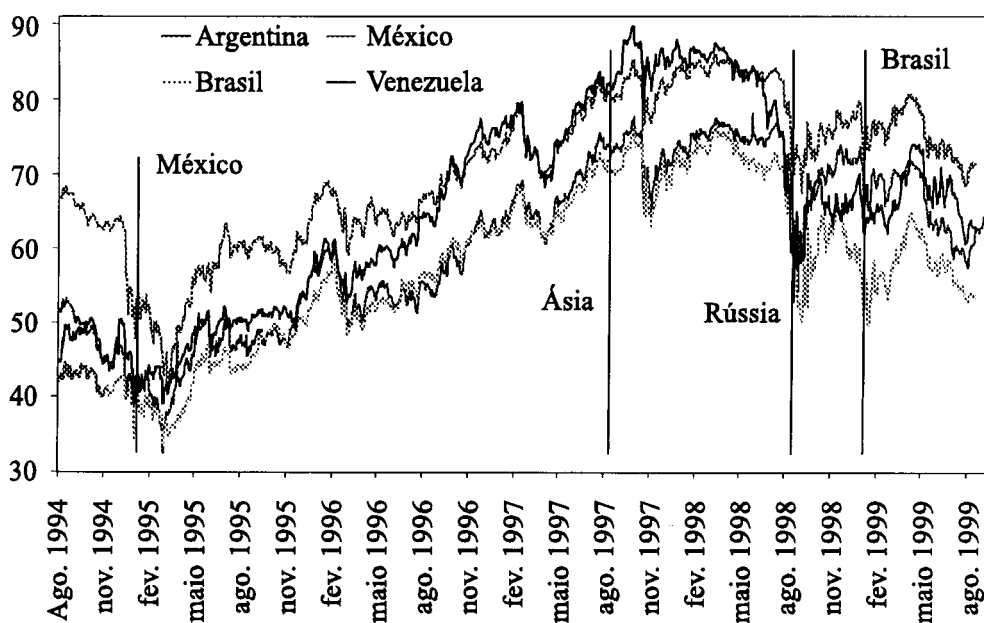
	México	Brasil	Argentina	Venezuela
Média	3.138E-05	0.0001	6.75E-05	0.00012
Desvio-padrão	0.005738	0.00765	0.00825	0.006816
Teste de normalidade	910.96*	2857.9*	3189.9*	1581*
Retorno máximo	0.038918	0.067543	0.079877	0.051267
Retorno mínimo	-0.045438	-0.083337	-0.08161	-0.064741

\*Hipótese  $H_0$  de normalidade significante a 1%.

<sup>16</sup> O período amostral termina antes da declaração, por parte do governo do Equador, de não-pagamento dos juros de seus Bradies.

Como pode ser visto, todas as séries são não-normais, conforme evidenciado pelo teste de normalidade,<sup>17</sup> apresentam uma média de retornos com valores em torno de zero e um desvio-padrão relativamente alto para a média encontrada, na qual o maior desvio é dado pelos retornos dos *par bonds* da Argentina e o menor pelos do México. O teste de Q-Ljung-Box realizado para os retornos e retornos ao quadrado sugere a investigação da existência de dependência temporal nos segundos momentos. Esta característica pode ser modelada a partir de formulações determinísticas, como os modelos Garch multivariados. Contudo, aqui serão utilizados modelos estocásticos, pois estes permitem que sejam determinadas as características comuns das séries.<sup>18</sup>

Figura 1  
Preço de compra dos *par bonds*

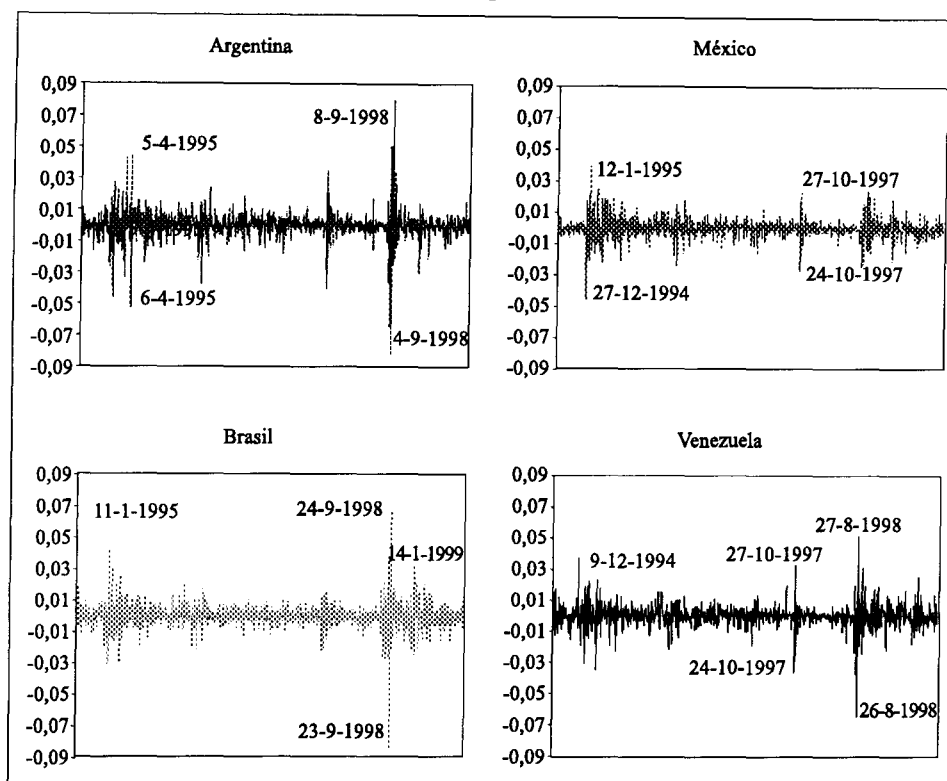


Fonte: *Gazeta Mercantil*.

<sup>17</sup> Este teste foi feito no Pc-Give 9.0.

<sup>18</sup> Racine e Ackert (1998) utilizam o modelo M-Garch para analisar o comportamento de três índices de ações do mercado norte-americano e os preços futuros associados.

Figura 2  
Retorno dos *par bonds*



Apesar de não entrar na formulação, a equação da média que será usada para cada série é importante, no sentido de produzir resíduos não-autocorrelacionados, que serão utilizados para calcular a volatilidade estocástica, seguindo as equações (9) a (11). Mesmo sendo comum a existência de equações do tipo AR(1) para séries financeiras, os testes revelaram que autocorrelações de *lags* diferentes estão aqui presentes. Além do mais, os períodos relacionados às crises dos países emergentes, apresentam grande oscilação, o que implica a presença de valores extremos. Para eliminar este efeito, são utilizadas variáveis *dummies* para os *outliers*. As equações (14) a (17) mostram as melhores relações para a série de retornos dos países analisados,<sup>19</sup> onde os desvios-padrão estão entre parênteses:

<sup>19</sup> Em todas as séries, *D1* é uma dummy de outlier para os retornos negativos, com dias diferentes para cada série, e *D2* as dummies de retornos positivos.

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{1t} = & -0,058 R_{1t-2} - 0,05888 R_{1t-3} + 0,08632 R_{1t-4} - 0,03981 D1 + \\ & (0,028) \quad (0,028) \quad (0,028) \quad (0,002) \\ & + 0,0462 D2 + \omega_{1t} \\ & (0,003) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{2t} = & -0,0934 R_{2t-2} - 0,0577 R_{2t-4} - 0,371 D1 + 0,0298 D2 + \omega_{2t} \\ & (0,028) \quad (0,028) \quad (0,003) \quad (0,003) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{3t} = & -0,06855 R_{3t-2} - 0,06359 R_{3t-3} + 0,057 D1 - 0,8121 D2 + \omega_{3t} \\ & (0,028) \quad (0,028) \quad (0,007) \quad (0,007) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{4t} = & -0,06689 R_{4t-1} - 0,0538 R_{4t-4} - 0,06362 D1 + 0,04321 D2 + \omega_{4t} \\ & (0,028) \quad (0,028) \quad (0,004) \quad (0,004) \end{aligned} \quad (17)$$

Todos os coeficientes são significativos, e a tabela 3 mostra o teste de Ljung-Box para os resíduos das quatro séries, os quais como pode ser visto, são todos não-autocorrelacionados.

Tabela 3  
Teste de Ljung-Box para os resíduos não-padronizados

Q(lag)/séries	México	Brasil	Argentina	Venezuela
Q(1)	0.1359**	0.0262**	0.9787**	0.007255*
Q(2)	0.1366*	0.0433*	0.993**	0.1231*
Q(3)	0.5068**	0.0816*	1.1197**	0.1547*
Q(4)	0.5089*	1.2486**	1.12**	0.1585*
Q(5)	2.45**	1.6709**	1.31**	1.6544**

\*Hipótese  $H_0$  de não-autocorrelação significativa a 5%.

\*\*Hipótese  $H_0$  de não-autocorrelação significativa a 1%.

Com o vetor de resíduos encontrado,  $\omega_t = (\omega_{1t}, \omega_{2t}, \omega_{3t}, \omega_{4t})$ , é feita, então, a transformação pelo uso da equação (11), que elimina os resíduos de valor zero, de forma a obter um vetor  $h_t$ , onde  $h_{it} = \log \omega_{it}^2$ , para, então, ser estimada a volatilidade estocástica. Inicialmente são utilizados modelos univariados, para se testar a inclinação da volatilidade para cada série de retornos.<sup>20</sup> A tabela 4 apresenta os resultados encontrados.

<sup>20</sup> O modelo no formato espaço de estados que testa a inclinação tem a forma

$\omega_{it} = N_{it} + h_{it} + \xi_{it}$

$N_{it} = N_{it-1} + \beta_{it-1} + \delta_{it}$

$\beta_{it} = \beta_{it-1} + v_{it}$

$h_{it} = \phi h_{it-1} + \eta_{it}$ .

Com exceção da Venezuela, o coeficiente auto-regressivo de ordem 1 das outras três séries foram negativos e todos os valores do máximo do log da verossimilhança foram bem próximos, com o maior sendo encontrado pela série do México (-761,66). Como pode ser verificado, o componente da inclinação,  $\sigma^2_{\text{inclinação}}$ , é igual a zero para as quatro séries, o que demonstra a inclinação ser determinística e não-estocástica. A tabela 5 apresenta os valores para o modelo sem a inclinação.<sup>21</sup>

Tabela 4  
Modelos SV univariados: teste da inclinação

Componentes	México	Brasil	Argentina	Venezuela
$\sigma^2_{\text{irregular}}$	1,6911	2,7574	0,0000	3,1257
$\sigma^2_{\text{nível}}$	0,1558	0,0265	0,0344	0,00181
$\sigma^2_{\text{inclinação}}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\sigma^2_{\eta}$	0,349	0,2491	3,071	0,0632
Coeficiente AR(1)	-0,593	-0,3515	-0,041	0,944
Log-verossimilhança	-761,68	-763,54	-778,99	-792,02

Tabela 5  
Modelos SV univariados

Componentes	México	Brasil	Argentina	Venezuela
$\sigma^2_{\text{irregular}}$	2,867	2,434	0,6841	3,129
$\sigma^2_{\text{nível}}$	0,0232	0,0256	0,03302	0,000978
$\sigma^2_{\eta}$	0,1182	0,592	2,3911	0,0621
Coeficiente AR(1)	-0,597	-0,1644	-0,0496	0,948
Log-verossimilhança	-755,75	-757,74	-773,26	-784,77

<sup>21</sup> Na tabela 5 estão os resultados da estimativa do modelo

$\omega_{it} = N_{it} + h_{it} + \xi_{it}$

$N_{it} = N_{it-1} + \delta_{it}$

$h_{it} = \phi h_{it-1} + \eta_{it}$ .

Note que agora, retirando  $\sigma_{\text{inclinação}}^2$ , o componente irregular para a Argentina passa de 0,00 para 0,6841, e os coeficientes AR(1) do México, Argentina, Venezuela e Brasil continuam com valores próximos aos encontrados no modelo anterior. Entretanto, como as séries de retornos não parecem ter um nível estocástico,<sup>22</sup> pode ser estimado um modelo com nível fixo. Esta formulação será aqui denominada modelo estacionário, pelo fato de ser imposta a restrição,  $|\phi| < 1$  na equação da variância estocástica (5).<sup>23</sup> Seus resultados podem ser vistos na tabela 6.

Note que o coeficiente AR(1) de todas as séries são muito próximos de 1, o que revela alta persistência na volatilidade dos *par bonds*, sendo o do México o maior (0,98) e também o que apresenta o maior log da verossimilhança. Desta forma, impondo a restrição de que  $\phi = 1$ , ou seja, assumindo que o modelo é não-estacionário, no qual  $h_{it} = h_{it-1} + \eta_{it}$ , a variância estocástica passa a ser um *random walk*. Os resultados para esta estimativa podem ser vistos na tabela 7.

Tabela 6  
Modelos SV univariados (estacionários)

Componentes	México	Brasil	Argentina	Venezuela
$\sigma_{\text{irregular}}^2$	3,0381	3,019	3,074	3,147
$\sigma_{\eta}^2$	0,0315	0,0389	0,0451	0,0532
Coeficiente AR(1)	0,9803	0,973	0,970	0,963
Log-verossimilhança	-752,87	-753,00	-767,91	-785,10

Os componentes encontrados no modelo não-estacionário, tanto da parte irregular quanto da volatilidade, são próximos aos do modelo estacionário, enquanto o valor do log da verossimilhança para as estimativas do modelo não-estacionário são pouco menores do que aqueles na estimativa estacionária (tabela 6). O próximo passo é a estimação do modelo multivariado, que é formulado seguindo um movimento persistente na volatilidade, onde  $h_t$  é um *random walk* multivariado.

<sup>22</sup> A estacionaridade é encontrada pelo teste de raiz unitária.

<sup>23</sup> Com nível fixo, o modelo segue o apresentado na nota 19, apenas considerando que  $N_{it} = N_{it-1}$ . Sendo assim,  $\sigma_{\text{nível}}^2 = 0$ , ou seja, o nível é determinístico.

Tabela 7  
Modelos SV univariados (não-estacionários)

Componentes	México	Brasil	Argentina	Venezuela
$\sigma_{\text{irregular}}^2$	3,065	3,0647	3,106	3,2263
$\sigma_{\eta}^2$	0,0219	0,0232	0,03037	0,02513
Coeficiente AR(1)	1	1	1	1
Log-verossimilhança	-756,86	-758,27	-774,037	-791,29

Os testes de raiz unitária (Phillips Perron e ADF) aplicados nas quatro séries indicam que são todas estacionárias, resultado esperado devido ao uso da equação (13). Entretanto, a confiabilidade destes testes, quando utilizada a forma reduzida do conjunto de equações 8, é questionável, principalmente se existir alta persistência, ou seja, o coeficiente do AR(1) for próximo a 1, como é o caso dos resultados aqui encontrados.

Com este valor próximo a 1, os testes de raiz unitária rejeitam frequentemente a hipótese nula de raiz unitária, devido a dificuldade de distinguir o modelo de um ruído branco (Pantula, 1991; Schwert, 1989). Neste sentido, seguindo Harvey, Ruiz e Shephard (1994), aplicamos aqui os modelos de nível local multivariado, como na equação (18), da qual é possível concluir o número de tendências comuns a partir da análise do componente principal da matriz estimada  $\hat{\Sigma}_{\eta}$ :

$$\begin{aligned}\log \omega_{it}^2 &= -1,27 \lambda + h_t + \xi_t \\ h_t &= h_{t-1} + \eta_t\end{aligned}\tag{18}$$

Para este caso são estimados dois modelos. No modelo 1 tem-se uma matriz  $\hat{\Sigma}_{\eta}$  de posto completo, na qual  $h_t$  é  $N \times K$  com  $K = N$ . No modelo 2 é imposta uma restrição nesta matriz, de forma a obter fatores comuns da variância das séries, ou seja, trabalha-se com a equação 19:

$$\begin{aligned}\log \sigma_{it}^2 &= -1,27 \lambda + \theta h_t + \bar{h} + \xi_t \\ h_t &= h_{t-1} + \eta_t\end{aligned}\tag{19}$$

onde  $\theta$  é uma matriz  $N \times K$  de coeficientes, com  $K < N$ ,  $h_t$  e  $\eta_t$  são vetores  $N \times 1$ ,  $\bar{h}$  é um vetor  $N \times 1$  com os  $K$  primeiros elementos sendo zero e os  $N - K$  sendo não-restritos.<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup>*N é o número de variáveis dependentes, que no presente caso é quatro, ao passo que K determina o número de fatores comuns.*



Portanto, estimando o modelo de nível local multivariado não-restrito (equação 18), são obtidas as seguintes matrizes de covariância para os resíduos:

$$\hat{\Sigma}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 3,0720 & 0,1101 & 0,3924 & 0,08638 \\ 0,3310 & 2,9770 & 0,0449 & 0,27652 \\ 1,1890 & 0,1340 & 2,9880 & 0,04785 \\ 0,2704 & 0,8521 & 0,1477 & 3,1900 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{\eta} = \begin{bmatrix} 0,0377 & 0,9998 & 0,9739 & 0,9675 \\ 0,0395 & 0,0415 & 0,9739 & 0,9675 \\ 0,0359 & 0,0376 & 0,0360 & 0,9841 \\ 0,0345 & 0,0362 & 0,0343 & 0,0337 \end{bmatrix}$$

Na diagonal principal estão as variâncias, acima da diagonal as correlações, e abaixo as covariâncias.<sup>25</sup> A Argentina e o México apresentam uma alta correlação no nível da volatilidade, ( $\rho_{\eta_{ii}} = 0,9998$ ), ao passo que as demais correlações são pouco menores e bem próximas. No geral, as correlações de  $\eta_t$  são maiores do que as correlações de  $\varepsilon_t$ , (na comparação entre o triângulo acima da diagonal principal). Esta alta correlação existente em  $\hat{\Sigma}_t$  é um indicativo de que as volatilidades dos *par bonds* possuem uma relação temporal comum. O valor do log da verossimilhança para o modelo multivariado (-2787,02) é muito maior do que a soma dos logs dos modelos univariados (-3080,45) com forte convergência após 28 iterações, tendo sido considerados 20 hiperparâmetros.

A análise dos componentes principais da estimativa de  $\hat{\Sigma}_{\eta}$  permite fazer um julgamento do número de possíveis tendências comuns ( $k$ ), onde a presença de fatores comuns implica existência de co-integração. Os resultados da análise do componente principal de  $\hat{\Sigma}_{\eta}$  podem ser vistos na tabela 8. Nesta análise, a matriz de covariância da volatilidade é decomposta como  $\hat{\Sigma}_{\eta} = \Theta D \Theta'$ , onde  $\Theta$  é a matriz de autovetores e  $D$  uma matriz diagonal de autovalores.<sup>26</sup>

<sup>25</sup> As colunas e as linhas das matrizes seguem a sequência das séries Argentina, México, Brasil e Venezuela.

<sup>26</sup> A matriz diagonal de autovalores  $D$ , obtida é [0,1947 0 0,1889].

Tabela 8  
Análise do componente principal

Autovalores	Percentual de variância
0,1942	34,2
0,0000	0
0,1899	33,4
0,1837	32,3

Os três autovalores diferentes de zero são próximos, indicando que explicam percentuais aproximados. Desta forma, podemos assumir que  $K = 3$ , e passar a estimar o modelo 2, que produz as seguintes matrizes de covariância:

$$\hat{\Sigma}_{\xi} = \begin{bmatrix} 3,0720 & 0,1104 & 0,3931 & 0,0838 \\ 0,3341 & 2,9800 & 0,0434 & 0,2725 \\ 1,1920 & 0,1297 & 2,9950 & 0,0427 \\ 0,2637 & 0,8442 & 0,1326 & 3,2200 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{\eta} = \begin{bmatrix} 0,0379 & 0,9998 & 0,9719 & 0,9861 \\ 0,0397 & 0,0416 & 0,9719 & 0,9861 \\ 0,0357 & 0,0374 & 0,0357 & 0,9974 \\ 0,0350 & 0,0366 & 0,0343 & 0,0332 \end{bmatrix}$$

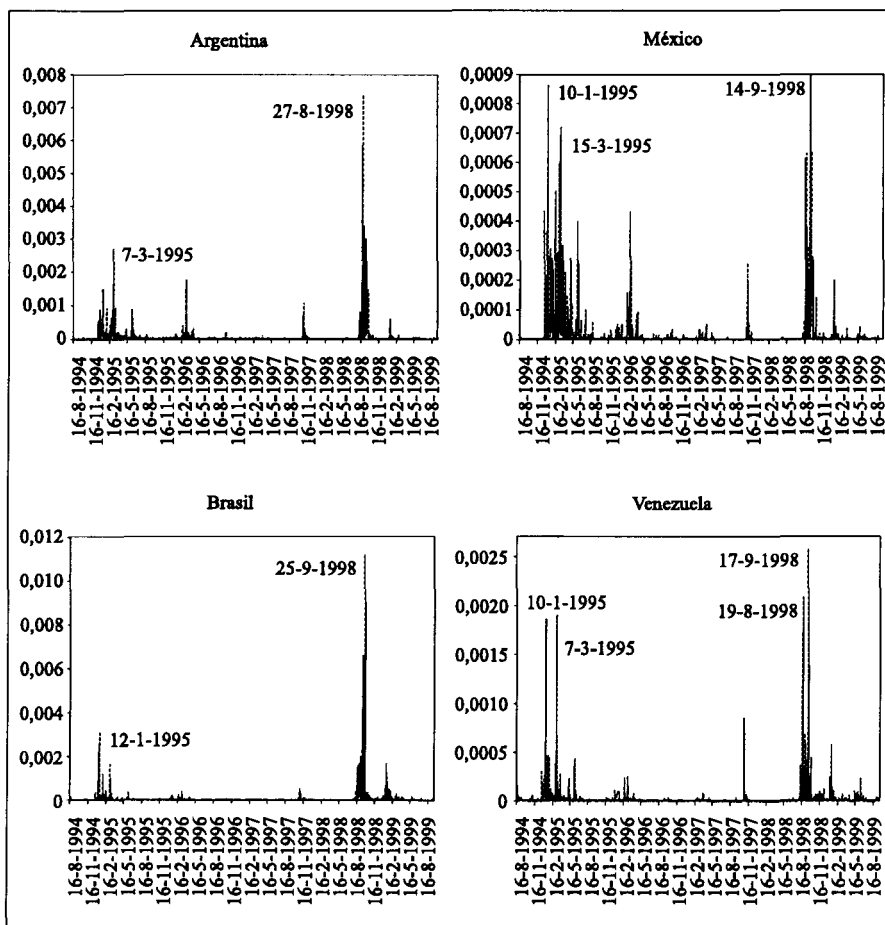
Aqui,  $N = 4$  e  $K = 3$ , de tal forma que as séries de  $\log \omega_{it}^2$  são co-integradas no sentido de Engle e Granger (1987), ou seja, existe  $N - K = 1$  combinação linear de  $\log \bar{\omega}_{it}^2$ , que é ruído branco. As correlações dos componentes irregulares são baixas, tal como no modelo 1, e novamente existe uma alta correlação entre o componente estocástico da volatilidade da série da Argentina e o do México, enquanto as demais correlações são maiores do que as obtidas no modelo 1. O valor do máximo do log da verossimilhança para este modelo restrito é um pouco maior do que o anterior (-2788,07), mas ainda bastante superior à soma dos logs dos modelos univariados não-estacionários. Devido à restrição imposta, são estimados 19 hiperparâmetros, sendo que a convergência foi muito forte em 29 iterações.

Utilizando a equação (19) a relação entre as volatilidades dos *par bonds* dos quatro países pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \log \omega_{1t}^2 &= -1,27 + \hat{h}_{1t} \\ \log \omega_{2t}^2 &= -1,27 + 1,048 \hat{h}_{1t} + \hat{h}_{2t} \\ \log \omega_{3t}^2 &= -1,27 + 0,943 \hat{h}_{1t} + 0,01163 \hat{h}_{2t} + \hat{h}_{3t} \\ \log \omega_{4t}^2 &= -1,27 + 0,9236 \hat{h}_{1t} + 0,01139 \hat{h}_{2t} + 0,0106 \hat{h}_{3t} - 0,781 \end{aligned} \tag{20}$$

onde  $\bar{h} = 0,781$  na relação de  $\log \omega_{4t}^2$ , e  $\bar{h} = 0$  nas demais, pois os  $K$  primeiros elementos em  $\bar{h}$  são zero e os restantes  $N - K$ , são não-restritos. Como os dados estão em log, podemos aplicar (12), de forma a obter a volatilidade estocástica suavizada (figura 3).<sup>27</sup>

Figura 3  
Volatilidades estocásticas suavizadas para o modelo  $N = 4$  e  $K = 3$



<sup>27</sup> Também foi estimado um modelo no qual  $N=4$  e  $K=2$ , ou seja, assumindo a existência de dois fatores comuns. O valor do log da verossimilhança deste modelo (-2.789) é próximo ao obtido com três fatores comuns, e as correlações são bem próximas. A relação entre as volatilidades é dada por:

$$\log \omega_{1t}^2 = -1,27 + \hat{h}_{1t}$$

$$\log \omega_{2t}^2 = -1,27 + 1,041 \hat{h}_{1t} + \hat{h}_{2t}$$

$$\log \omega_{3t}^2 = -1,27 + 0,945 \hat{h}_{1t} + 0,01158 \hat{h}_{2t} - 0,5534$$

$$\log \omega_{4t}^2 = -1,27 + 0,9224 \hat{h}_{1t} + 0,0113 \hat{h}_{2t} - 1,022$$

## 5. Conclusão

O modelo de volatilidade estocástica multivariado é uma generalização do caso univariado, permitindo a inferência em relação à existência de tendências comuns entre as variâncias. Neste artigo foram utilizadas as séries de preços de compra dos *par bonds* de quatro países latino-americanos (México, Brasil, Argentina e Venezuela) entre 9-8-1994 e 15-9-1999.

A estimação inicial de modelos univariados permitiu concluir que a inclinação é determinística, ou seja, é um componente fixo, e também que existe uma alta persistência na volatilidade, devido aos valores encontrados para  $\phi$ , utilizando a abordagem da quase-máxima verossimilhança. A formulação estrutural multivariada aqui aplicada é uma alternativa à proposta por Johansen (1988) na presença de alta persistência na série em questão, permitindo determinar o número de fatores comuns presentes no modelo. Desta forma, nos modelos multivariados considera-se que a volatilidade segue um processo *random walk*, com  $\phi = 1$ .

Em um primeiro momento, as matrizes de covariância foram formuladas sem restrições, ou seja, com posto cheio, de onde foi feita a análise sobre os componentes principais, para concluir sobre o número de fatores comuns. Existe uma alta correlação entre as volatilidades dos *par bonds* da Argentina e do México e, no geral, todas as demais correlações para as outras séries são altas e bem superiores às correlações verificadas nos componentes irregulares. A estimativa seguinte considerou  $K = 3$ , onde  $K$  é o número de fatores comuns.

Como os resultados encontrados para as correlações com  $K = 4$  e  $K = 3$  são bem próximos, conclui-se que há um movimento comum entre as volatilidades, de forma que se espera que os investidores tenham a mesma percepção de risco quando analisam os quatro países em conjunto e procuram determinar suas decisões de investimento. Desta forma, é possível que uma crise econômica na América Latina que afete os títulos da dívida externa de um dado país tenha influência sobre a volatilidade dos demais ativos de características similares. Se, por um lado, uma maior oscilação dos preços dos ativos pode trazer oportunidades de ganho em aplicações, por outro, embute um maior risco nas negociações, que pode vir a ser difundido entre os demais ativos do país em questão e no continente.

## Referências Bibliográficas

- Calderon, P. E. & Fontes, R. Credibilidade e mercado secundário da dívida externa brasileira. *Análise Econômica*, ano 16, (30):69-90, 1998.
- Engle, R. F. & Bollerslev, T. Modelling the persistence of conditional variances (with discussion). *Econometrics Reviews*, 5:1-50, 81-7, 1986.
- \_\_\_\_\_ & Granger, C. W. T. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55:251-76, 1987.
- Harvey, A. C. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge, Cambridge University Press, 1989.
- \_\_\_\_\_. Trends, cycles and autoregressions. *The Economic Journal*, 107:192-201, 1997.
- \_\_\_\_\_ & Koopman, S.J. Multivariate structural time series models. In: Heiji, C.; Schumacher, H.; Hanzon, B. & Praagnan, C. (eds.). *System dynamics in economic and financial models*. John Wiley and Sons, 1997.
- \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_ & Penzer, J. Messy time series: a unified approach. *Advances in Econometrics*, 13:103-43, 1998.
- \_\_\_\_\_ & Nyblon, J. *Tests of common stochastic trends*. 1999. (DAE Working Paper, 9.902.)
- \_\_\_\_\_; Ruiz, E. & Shephard, N. Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies*, 61:247-64, 1994.
- Herência, M. E. Z. Volatilidade nos modelos ARCH e variância estocástica: um estudo comparativo. Campinas, Unicamp, 1997. (Dissertação de Mestrado.)
- Izvorski, I. *Brady bonds and default probabilities*. 1998. (IMF Working Paper, 98/16.)
- Koopman, S. J.; Harvey, A. C.; Doornik, J. A. & Shephard, N. *Stamp 5.0 structural time series analyser, modeller and predictor*. London, Chapman & Hall, 1995.
- Morais, I. A. C. & Portugal, M. S. Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série do Ibovespa. *Estudos Econômicos*, 29(3):303-41, 1999.

Pantula, S. G. Asymptotic distribution of unit-root tests when the process is nearly stationary. *Journal of Business and Economic Statistics*, 9:63-71, 1991.

Racine, M. R. & Ackert, L. F. *Time varying volatility in Canadian and U.S. stock index and index futures markets: a multivariate analysis*. Federal Reserve Bank of Atlanta, 1998. (Working Paper Series, 98-14.)

Ruiz, E. Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 63:289-306, 1994.

Schwert, G. W. Tests for unit roots: a Monte Carlo investigation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7:147-60, 1989.