

Geometría Algebraica *et* Ciencia: ¿demasiado álgebra o hacia un nuevo paradigma teórico-computacional?

Alexandru Iosif
Universidad Rey Juan Carlos de Madrid

3,14...
MMXXIII

¿Qué es la Geometría Algebraica?

“La geometría algebraica es uno de los temas más antiguos y desarrollados de las matemáticas. Está íntimamente relacionada con la geometría proyectiva, el análisis complejo, la topología, la teoría de números y muchas otras áreas de la actividad matemática actual. Además, en los últimos años la geometría algebraica ha experimentado grandes cambios de estilo y lenguaje. Por estas razones ha surgido en torno a esta materia una reputación de inaccesibilidad.”

(Prefacio a *Principles of Algebraic Geometry* de Griffiths y Harris)

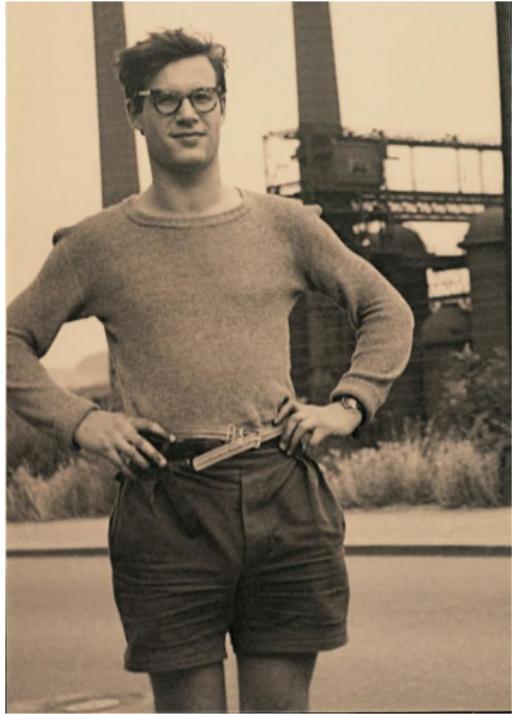
Pero, ¿qué es la Geometría Algebraica?

- **Primera aproximación:**
 - Estudia soluciones de **ecuaciones polinómicas** (el tema de esta charla)
- También (según Dieudonné):
 - La clasificación de objetos algebraicos
 - El estudio de puntos infinitamente cerca (multiplicidad)
 - Extensión de los escalares (puntos complejos, puntos genéricos)
 - Extensión del espacio (espacio proyectivo, espacio n -dimensional, esquemas)
 - Análisis y topología en geometría algebraica (geometría compleja; algunas conjeturas de por medio, como las conjeturas de Hodge)
 - Álgebra comutativa y geometría algebraica
- También:
 - Teoría de números
- *Et caetera*

Emmy Noether (1882–1935)



Alexander Grothendieck (1928–2014)



Un ejemplo sencillísimo, tres puntos de vista

Ejemplo sencillo: Geometría Algebraica Compleja

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces complejas tiene?

Respuesta

Exactamente dos^a:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

^aContadas con multiplicidad.

Ejemplo sencillo: Geometría Algebraica Real

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces reales tiene?

Respuesta

Tiene dos, una, o ninguna, dependiendo del signo de Δ :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

Ejemplo sencillo: Geometría Semi-Algebraica

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene?

Respuesta

Tiene dos, una, o ninguna, dependiendo del signo de Δ , de b y de $b \pm \sqrt{\Delta}$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

Una brevíssima introducción a la geometría algebraica computacional

De vuelta al álgebra lineal: eliminación Gaussiana

Supongamos que tenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

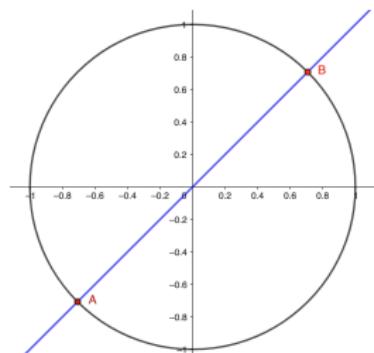
Si usamos la eliminación Gaussiana, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Este último sistema equivalente es mucho más sencillo que el primero, ya que nos dice las soluciones con muy poco o ningún esfuerzo.

¿Eliminación Gaussiana para sistemas de polinomios?

Intersección de una circunferencia con una recta:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

El siguiente sistema equivalente es mucho más sencillo

$$\begin{cases} y^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Bases de Gröbner

- El segundo sistema representa una Base de Gröbner del primero.
- Es mucho más sencillo leer las soluciones en la base de Gröbner.

Algoritmo de Buchberger (complejidad $d^{2^{n+o(1)}}$)

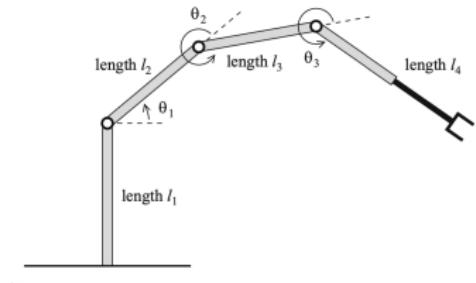
Entrada: Un conjunto de polinomios finito F que genera un ideal I

Salida: Una base de Gröbner G para I

- ① $G := F$
- ② Para cada f_i, f_j en G , se denota por g_i al término líder de f_i con respecto del orden dado, y por a_{ij} al mínimo común múltiplo de g_i y g_j .
- ③ Se escogen dos polinomios en G , y se denota
 $S_{ij} = (a_{ij}/g_i)f_i - (a_{ij}/g_j)f_j$.
- ④ Se reduce S_{ij} , mediante el algoritmo de división multivariable, con respecto del conjunto G hasta que el resultado no se pueda reducir más. Si el resultado es distinto de cero, se añade a G .
- ⑤ Se repiten los pasos 2-4 hasta que todos los pares posibles hayan sido considerados, incluidos los que contienen polinomios añadidos en el paso 4.
- ⑥ Se devuelve G .

Ejemplos de aplicaciones

Ejemplo 1: Brazo robot



(Fuente:

Cox et al., Ideal, Varieties, and Algorithms)

Queremos saber si podemos alcanzar un punto \$(a, b)\$ con la mano del robot.

Hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ b = l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1) + l_2 \sin \theta_1 \end{cases}$$

Sistema polinómico equivalente (sustituir \$\cos \theta_i \rightarrow c_i\$ y \$\sin \theta_i \rightarrow s_i\$):

$$\begin{cases} a = l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1 \\ b = l_3(c_1s_2 + c_2s_1) + l_2s_1 \\ 0 = c_1^2 + s_1^2 - 1 \\ 0 = c_2^2 + s_2^2 - 1 \end{cases}$$

G_0

$$\left| \begin{array}{c} s1 + \frac{a*l3}{a^2 + b^2} + \frac{-a^2 - b^2 - b*l2^2 + b*l3^2}{2a^2 l2^2 + 2b^2 l2^2} \end{array} \right|$$

1
R

G_1

$$\left| \begin{array}{c} c2 + \frac{-a^2 - b^2 + l2^2 + l3^2}{2l2^2 * l3^2} \end{array} \right|$$

1
R

G_2

$$\left| \begin{array}{c} c1 + \frac{-b*l3}{a^2 + b^2} + \frac{-a^3 - a*b^2 - a*l2^2 + a*l3^2}{2a^2 l2^2 + 2b^2 l2^2} \end{array} \right|$$

1
R

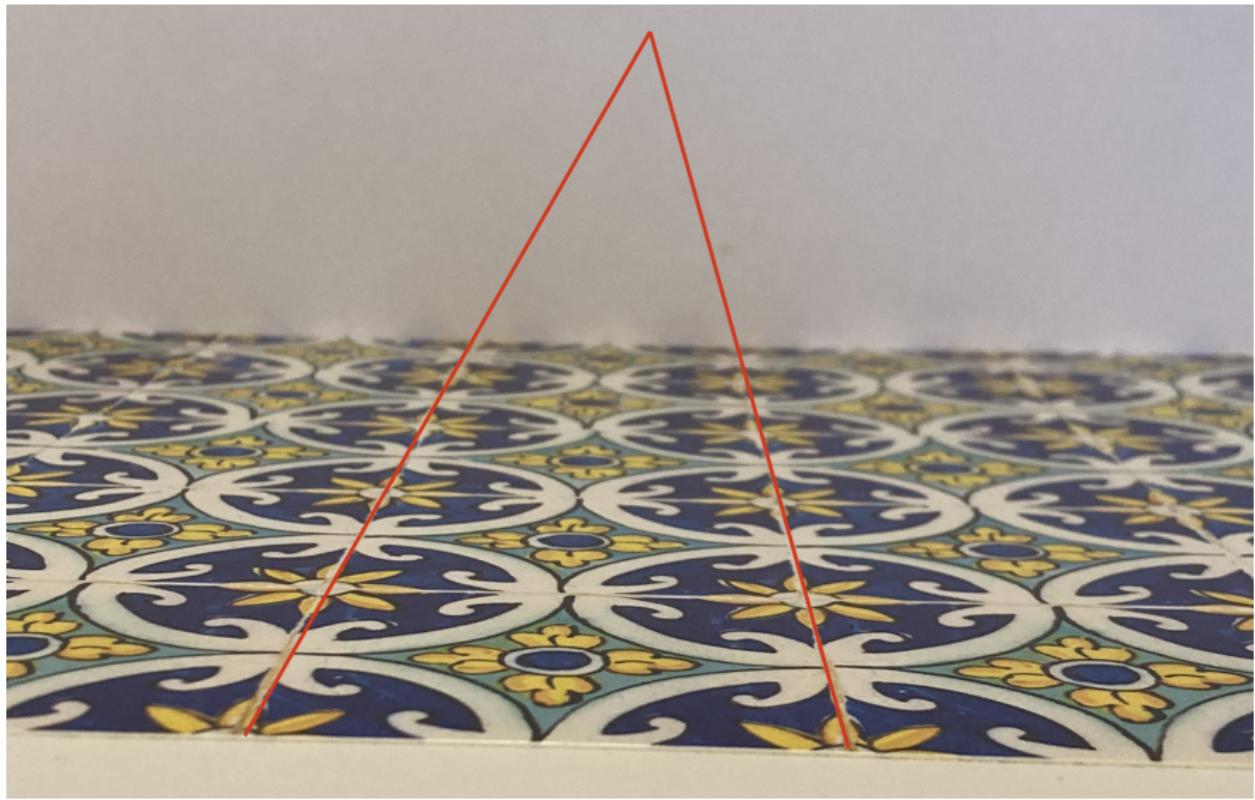
G_3

$$\left| \begin{array}{c} s2 + \frac{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 l2^2 - 2b^2 l2^2 + l2^4 - 2a^2 l3^2 - 2b^2 l3^2 - 2l2^2 l3^2 + l3^4}{4l2^2 l3^2} \end{array} \right|$$

Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas



Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas



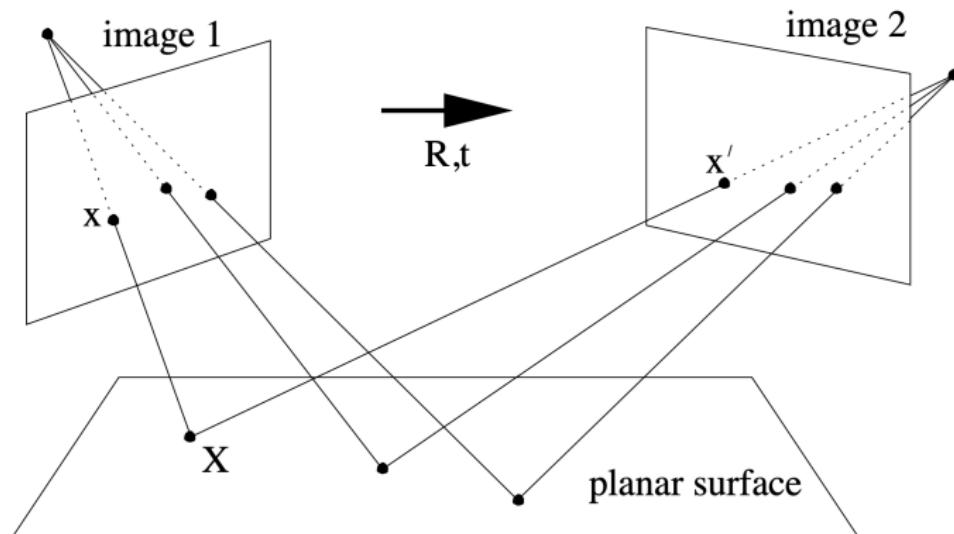
Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas



[Pietro Perugino, Entrega de las llaves de San Pedro]

Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas

Ya no es adecuado usar \mathbb{R}^2 (plano Euclídeo), sino \mathbb{P}^2 (plano proyectivo).



[Fuente: Hartley et al., Multiple View Geometry in computer vision]

Ejemplo 3: Estadística Algebraica

- Variable aleatoria X que puede tomar los valores 0, 1, 2 con probabilidades p_1, p_2, p_3 .
- Los números p_1, p_2, p_3 satisfacen

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

- Si X es una variable aleatoria binomial con parámetro q y $n = 2$, entonces

$$p_i = \binom{2}{i} q^i (1 - q)^{2-i},$$

en cuyo caso p_1, p_2 y p_3 satisfacen

$$4p_0p_2 - p_1^2 = 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

Ejemplo 4: Criptografía postcuántica

Problema

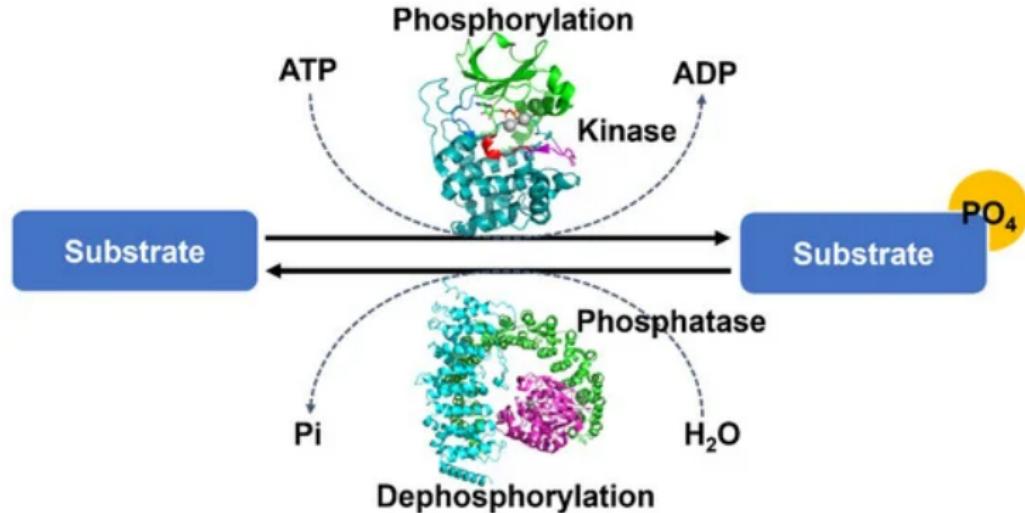
Una computadora cuántica suficientemente potente resolvería con bastante facilidad los cada uno de los tres problemas en los que se basa la criptografía clásica:

- Factorización de enteros
- Problema del logaritmo discreto
- Criptografía de curvas elípticas

Possible solución (una de ellas)

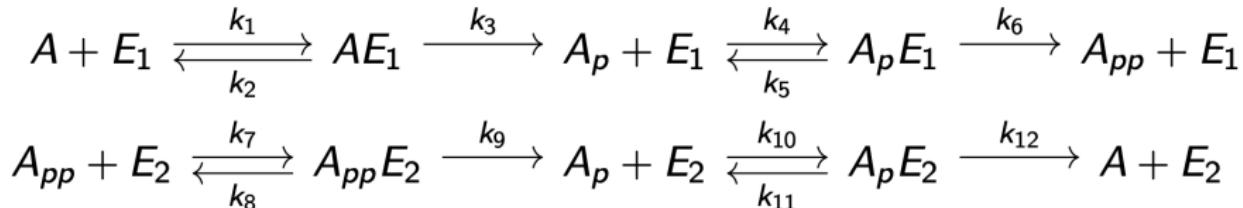
Resolver sistemas de ecuaciones polinómicas en varias variables es un problema difícil (calcular una base de Gröbner tiene complejidad $d^{2^{n+o(1)}}$).

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”



[Fuente: Seok, S.-H. Structural Insights into Protein Regulation by Phosphorylation and Substrate Recognition of Protein Kinases/Phosphatases. *Life* 2021, 11, 957]

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”



$$\dot{[S]} = -k_1[S][K] + k_2[SK] + k_{12}[S_p P]$$

$$\dot{[K]} = -k_1[S][K] + (k_2 + k_3)[SK] - k_4[K][S_p] + (k_5 + k_6)[S_p K]$$

$$\dot{[SK]} = k_1[S][K] - (k_2 + k_3)[SK]$$

$$\dot{[S_p]} = k_3[SK] - k_4[K][S_p] + k_5[S_p K] + k_9[S_{pp}P] - k_{10}[S_p][P] + k_{11}[S_p P]$$

$$\dot{[S_p K]} = k_4[K][S_p] - (k_5 + k_6)[S_p K]$$

$$\dot{[S_{pp}]} = k_6[S_p K] - k_7[S_{pp}][P] + k_8[S_{pp}P]$$

$$\dot{[P]} = -k_7[S_{pp}][P] + (k_8 + k_9)[S_{pp}P] - k_{10}[S_p][P] + (k_{11} + k_{12})[S_p P]$$

$$\dot{[S_{pp}P]} = k_7[S_{pp}][P] - (k_8 + k_9)[S_{pp}P]$$

$$\dot{[S_p P]} = k_{10}[S_p][P] - (k_{11} + k_{12})[S_p P].$$

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”

BB: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC10000000/>

Este es el resultado de la ejecución del comando `get_ipython().run_line_magic('load_ext', 'nb_black')` en una celda de Jupyter Notebook.

Este comando ejecuta el módulo `nb_black`, que es responsable de aplicar el efecto "dark mode" a la interfaz de Jupyter Notebook. El efecto "dark mode" consiste en cambiar el fondo de la interfaz a negro y las fuentes a blanco o colores claros, lo que hace que sea más fácil leer el código y los resultados.

El resultado de la ejecución del comando es una impresión de la interfaz de Jupyter Notebook con el efecto "dark mode" aplicado. Se observa que el fondo es negro y las fuentes son blancas o de color claro, lo que hace que sea más fácil leer el código y los resultados.

Este resultado es una representación visual de la ejecución del comando `get_ipython().run_line_magic('load_ext', 'nb_black')` en una celda de Jupyter Notebook.

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”

En el año 1960 se realizó una investigación en la Universidad de Stanford que buscaba determinar si existía una diferencia entre los niveles de colesterol en la sangre de los varones que tenían ataques cardíacos y los que no. La muestra utilizada para la investigación consistió en 32 varones que habían sufrido ataques cardíacos y 32 varones que no lo habían hecho. Los niveles de colesterol en la sangre fueron medidos para cada uno de los varones y se obtuvieron los siguientes datos:

Nivel de colesterol (mg/dl)	Varones sin ataques (n = 32)	Varones con ataques (n = 32)
180	1	0
185	1	0
190	1	0
195	1	0
200	1	0
205	1	0
210	1	0
215	1	0
220	1	0
225	1	0
230	1	0
235	1	0
240	1	0
245	1	0
250	1	0
255	1	0
260	1	0
265	1	0
270	1	0
275	1	0
280	1	0
285	1	0
290	1	0
295	1	0
300	1	0
305	1	0
310	1	0
315	1	0
320	1	0
325	1	0
330	1	0
335	1	0
340	1	0
345	1	0
350	1	0
355	1	0
360	1	0
365	1	0
370	1	0
375	1	0
380	1	0
385	1	0
390	1	0
395	1	0
400	1	0
405	1	0
410	1	0
415	1	0
420	1	0
425	1	0
430	1	0
435	1	0
440	1	0
445	1	0
450	1	0
455	1	0
460	1	0
465	1	0
470	1	0
475	1	0
480	1	0
485	1	0
490	1	0
495	1	0
500	1	0
505	1	0
510	1	0
515	1	0
520	1	0
525	1	0
530	1	0
535	1	0
540	1	0
545	1	0
550	1	0
555	1	0
560	1	0
565	1	0
570	1	0
575	1	0
580	1	0
585	1	0
590	1	0
595	1	0
600	1	0
605	1	0
610	1	0
615	1	0
620	1	0
625	1	0
630	1	0
635	1	0
640	1	0
645	1	0
650	1	0
655	1	0
660	1	0
665	1	0
670	1	0
675	1	0
680	1	0
685	1	0
690	1	0
695	1	0
700	1	0
705	1	0
710	1	0
715	1	0
720	1	0
725	1	0
730	1	0
735	1	0
740	1	0
745	1	0
750	1	0
755	1	0
760	1	0
765	1	0
770	1	0
775	1	0
780	1	0
785	1	0
790	1	0
795	1	0
800	1	0
805	1	0
810	1	0
815	1	0
820	1	0
825	1	0
830	1	0
835	1	0
840	1	0
845	1	0
850	1	0
855	1	0
860	1	0
865	1	0
870	1	0
875	1	0
880	1	0
885	1	0
890	1	0
895	1	0
900	1	0
905	1	0
910	1	0
915	1	0
920	1	0
925	1	0
930	1	0
935	1	0
940	1	0
945	1	0
950	1	0
955	1	0
960	1	0
965	1	0
970	1	0
975	1	0
980	1	0
985	1	0
990	1	0
995	1	0
1000	1	0

Trabajo de Fin de Grado:

Geometría Computacional

Aplicaciones a alguno de los temas mencionados

Geometría Algebraica más teórica

etc.

Bibliografía:

- ① Cox, Little, O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms
- ② Dieudonné, The Historical Development of Algebraic Geometry
- ③ Griffiths, Harris, Principles of Algebraic Geometry
- ④ Hartley, Zisserman, Multiple View Geometry in computer vision

¡Muchas Gracias!

Vă Mulțumesc!