

Lab 5 - Metode iterative (Studiu individual)

Exerciții alese de: Radu Stochițoiu

Martie 2020

1 Exerciții

1.1 Ex. 1

Sistemul liniar

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$

are soluția $(1, 2, -1)^t$.

1. Arătați că $\rho(G_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.
2. Arătați că metoda Jacobi cu $x^{(0)} = 0$ diverge după 25 de iterații.
3. Arătați că $\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$.
4. Folosiți metoda Gauss-Seidel cu $x^{(0)} = 0$ și aproximați soluția sistemului cu o eroare de 10^{-5} folosind norma ∞ .

1.2 Ex. 2

Sistemul liniar

$$x_1 - x_3 = 0.2$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 1.425$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2$$

are soluția $(0.9, -0.8, 0.7)^t$.

1. Este matricea de coeficienți A strict diagonal dominantă?
2. $\rho(G_{GS}) = ?$

3. Folosiți metoda Gauss-Seidel cu și aproximați soluția sistemului cu o eroare de 10^{-2} și un maxim de 300 de iterații.
4. Ce se întâmplă în punctul anterior dacă sistemul este schimbat cu

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_3 &= 0.2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

1.3 Ex. 3

Repetăți exercițiul anterior folosind Jacobi în loc de Gauss-Seidel.

1.4 Ex. 4

Arătați că dacă A este strict diagonal dominantă, atunci $\|G_J\|_\infty < 1$.

1.5 Ex. 5

Arătați că dacă A este strict diagonal dominantă, atunci $\rho(G_J) < 1$ și $\rho(G_{GS}) < 1$.

Sugestie: Teorema cercurilor lui Gershgorin.

1.6 Ex. 6

Pentru o matrice de forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

calculați matricea de iterație Jacobi $N^{-1}P = -D^{-1}(L+U)$ și valorile ei proprii μ_i . De asemenea, calculați matricea de iterație Gauss-Seidel $-(D+L)^{-1}U$ și valorile ei proprii λ_i . Decideți dacă $\lambda_{max} = \mu_{max}^2$.

1.7 Ex. 7

Arătați de ce iterația $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$ nu converge pentru $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.8 Ex. 8

De ce norma lui B^k nu e niciodată mai mare decât $\|B\|^k$?

Atunci $\|B\| < 1$ garantează că puterile B^k se apropie de 0 (converg). Asta nu este o surpriză din moment ce $|\lambda|_{max}$ are o valoare mai mică decât $\|B\|$.

2 Quote of the day

“Until you make the unconscious conscious, it will direct your life and you will call it fate. - Carl Jung“

Aș adăuga “- just like an iterative method -“.