Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

História e caraterísticas da Pesquisa Operacional

aula 01

Introdução

O termo "Pesquisa Operacional" aparentemente foi cunhado em 1938 para descrever o uso de cientistas na análise de situações militares.

Durante a Segunda Guerra Mundial (1939 a 1045) havia uma necessidade urgente de alocar recursos escassos às operações militares.

Várias seções de Pesquisa Operacional foram estabelecidas nas forças armadas britânicas e, a seguir, pelos Estados Unidos.

Muitos cientistas foram chamados para realizar pesquisas sobre atividades operacionais militares.

Daí surgiu os termos *Operational Research* (na Inglaterra) e *Operations Research* (nos Estados Unidos).

A tradução para o português seguiu o termo britânico.

Introdução

Diversas áreas do conhecimento foram reunidas para fundamentar e elaborar a Pesquisa Operacional, pois é um método científico de tomada de decisões, formulado por equipes interdisciplinares de cientistas (SILVA et al., 2010).

Após a guerra, as ideias propostas para operações militares foram adaptadas para melhorar a eficiência e a produtividade no setor civil (TAHA, 2008, p.1).

A pesquisa Operacional foi introduzida no âmbito empresarial e em instituições governamentais, tendo seu período de auge, situado desde 1945 a 1970 (MOREIRA, 2010).

Os ambientes, tanto o acadêmico quanto o empresarial, procuram utilizar as técnicas desenvolvidas em problemas de administração.

A Força Aérea dos Estados Unidos organizou um grupo de pesquisadores denominados SCOOP (Scientific Computation of Optimum Program), neste grupo participava George Dantzig, que desenvolveu o **método Simplex**, em 1947, para solucionar problemas por meio de Programação Linear. Até hoje o método Simplex é muito importante conforme verificaremos neste curso.

Introdução

Atualmente, a Pesquisa Operacional, além de ser uma disciplina acadêmica, lecionada nos cursos de graduação e de pós graduação, tem sido amplamente empregada como abordagem gerencial de resolução de problemas nos mais diversos setores da sociedade mundial (LONGARAY, 2013).

Uma das explicações para o sucesso da Pesquisa Operacional no âmbito empresarial reside na objetividade das técnicas que conformam o arcabouço metodológico, instrumentalizadas na prática, por meio de modelos que apresentam a potencialidade de traduzir, de forma clara, objetiva e estruturada, as situações problemáticas do cotidiano organizacional.

The Operational Reserch Society (UK)
https://www.theorsociety.com/

Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (BR)
https://sobrapo.org.br/

Revista Bimestral de Pesquisa Operacional (US)
https://www.informs.org/

Características da Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional é um método de tomada de decisão. Em linhas, gerais, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo e através da experimentação do modelo (SILVA et al., 2010).

A Pesquisa Operacional possui uma sistematização metodológica que permite ao tomador de decisão, individualmente ou em equipe, ter bases mais eficientes e justificadas que garantam maior **segurança e credibilidade** em suas estratégias de decisão.

Fases de um estudo de Pesquisa Operacional
1. Formulação do problema
2. Construção do modelo do sistema
3. Cálculo da solução através do modelo
4. Teste do modelo e da solução
5. Implantação e acompanhamento

Fonte: adaptado de Silva et al. (2010)

A Construção de Modelos de Pesquisa Operacional

A aplicação de técnicas é uma parte do processo de solução, mas não podemos esquecer que **o processo começa com a detecção do problema** (MOREIRA, 2010).

Para que o problema seja solucionado, **inicialmente é elaborado um modelo para a estruturação dos dados**.

Para a Pesquisa Operacional, **os modelos formulados são matemáticos, compostos por inequações e equações**.

Uma das equações do conjunto serve para medir a eficiência do sistema modelado, para cada solução elaborada para o problema. **É a função objetivo ou função de eficiência** (SILVA et al., 2010).

As outras equações do sistema modelado **são elaboradas para descreverem as limitações ou restrições técnicas do sistema**.

As variáveis que são elaboradas para a composição das equações são divididas em duas categorias: **variáveis controladas ou de decisão** e **variáveis não controladas**.

A Construção de Modelos de Pesquisa Operacional

Variáveis controladas	Variáveis não controladas
São variáveis cujo valor está sob o controle do administrador. Dentro desse contexto, a tomada de decisão, consistirá na atribuição de um determinado e específico valor a cada uma dessas variáveis. Exemplos: a programação da produção, a linha de montagem etc.	São variáveis cujos valores são controlados por sistemas fora do domínio do administrador. Exemplos: custos de produção, demanda de produtos, preços de mercado etc.

Fonte: adaptado de Silva et al. (2010)

Referências

LACHTHERMARCHER, Gerson, Pesquisa operacional na tomada de decisões. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

LOESCH, Cláudio e HEIN, Nelson Pesquisa Operacional: fundamentos e modelos. São Paulo: Saraiva, 2009.

LONGARAY, André Andrade, Introdução à Pesquisa Operacional. São Paulo: Saraiva, 2013.

MARINS, Fernando Augusto Silva, Introdução à Pesquisa Operacional. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, 2011.

MOREIRA, Daniel Augusto, Pesquisa Operacional: curso introdutório. 2a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PASSOS, Eduardo José Pedreira Franco dos, Programação Linear como instrumento da pesquisa operacional. São Paulo: Atlas, 2008.

SILVA, E. M da et al. Pesquisa Operacional: Programação Linear, Simulação. 4a ed. São Paulo: Atlas, 2010.

TAHA, Hamdy A., Pesquisa Operacional: uma visão geral, 8a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Teoria da decisão estatística em face da certeza, do risco e da incerteza

aula 02

Introdução

As pessoas quando deparam-se com o desafio de resolverem problemas, usualmente recorrem aos conhecimentos pessoais, à intuição ou aos conselhos de colegas.

Entretanto, quando se especifica, por exemplo, uma área do conhecimento ou um campo de atuação profissional, existem protocolos desenvolvidos para nortearem a tomada de decisão.

Serão apresentadas em seguida algumas conceituações sobre a **Teoria da Decisão**.

O que é a Teoria da Decisão?

A terminologia que atualmente se conhece como a Teoria da Decisão pode ser estabelecida como uma composição de singulares técnicas, as quais objetivam apoiar um tomador de decisão, para a identificação de detalhes e de especificidades do seu problema, o qual foi previamente detectado e, desta maneira, obtenha condições de desenvolver uma **estruturação sistemática para a resolução do seu problema**.

*"O problema de decisão envolve uma tomada de decisão hoje (ou seja, no momento presente ou próximo), mas **as consequências dessa decisão serão mantidas ao longo do tempo**" (MOREIRA, 2010, p. 207).*

O que é a Teoria da Decisão?

A Teoria da Decisão foi desenvolvida para que sejam encontradas soluções para um problema previamente observado, mediante determinados critérios preestabelecidos.

A expressão "**tomador de decisão**" possui uma amplitude conceitual de compor a análise de **uma pessoa**, de **um grupo** de pessoas ou de **uma organização** empresarial ou institucional.

O **ponto de início para a Teoria da Decisão** situa-se no **reconhecimento de elementos similares que ocorrem nos problemas de decisão**, desta forma, **é possível conceituar a palavra decisão como a etapa final de um processo**, primeiramente instaurado pela constatação de uma situação adversa e consequentemente, pela elaboração e realização de etapas adequadamente estruturadas para a resolução desse mesmo problema.

O que é a Teoria da Decisão?

A Teoria da Decisão foi desenvolvida para que sejam encontradas soluções para um problema previamente observado, mediante determinados critérios preestabelecidos.

A expressão "**tomador de decisão**" possui uma amplitude conceitual de compor a análise de **uma pessoa**, de **um grupo** de pessoas ou de **uma organização** empresarial ou institucional.

O **ponto de início para a Teoria da Decisão** situa-se no **reconhecimento de elementos similares que ocorrem nos problemas de decisão**, desta forma, **é possível conceituar a palavra decisão como a etapa final de um processo**, primeiramente instaurado pela constatação de uma situação adversa e consequentemente, pela elaboração e realização de etapas adequadamente estruturadas para a resolução desse mesmo problema.

Segundo Goldbarg e Luna (2005, p.12) **o objetivo primordial da tomada de decisão é maximização do lucro ou a minimização do custo**.

O que é a Teoria da Decisão?

Conforme Goldbarg e Luna (2005), uma tomada de decisão pode ocorrer mediante as seguintes condições:

Situação de certeza:

Nestas situações o tomador de decisão possui as informações completas, conhecendo antecipadamente, o resultado associado a cada ação.

Situação de risco ou incerteza:

Nestas situações o tomador de decisão possui as informações parciais, sabendo que a cada ação podem resultar duas ou mais consequências, cada uma associada a um estado de natureza (*) cuja probabilidade seja conhecida.

Situação de conflito:

Nestas situações o tomador de decisão encontra o estado de natureza (*) substituído por um oponente que visa, ao mesmo tempo, maximizar a sua utilidade e a minimizar a utilidade do adversário.

(*) **Estados da natureza:** São as **ocorrências futuras que podem influir sobre as alternativas**, fazendo com que elas possam apresentar mais de um resultado.

O que é a Teoria da Decisão?

Conforme Moreira (2010), uma tomada de decisão pode ocorrer mediante as seguintes condições:

Decisão tomada sob certeza (DTSC):

Acontece quando o tomador de decisão conhece o estado de natureza que vai ocorrer, ou de alguma forma, conhece com certeza todos os dados do problema.

Decisão tomada sob risco (DTSR):

Acontece quando o tomador de decisão não conhece exatamente o estado de natureza que ocorrerá no seu problema, podendo somente associar a cada estado de natureza uma probabilidade de sua ocorrência.

Decisão tomada sob incerteza (DTSI):

Acontece quando o tomador de decisão não conhece exatamente quando o estado de natureza ocorrerá e não é possível associar quaisquer probabilidades de ocorrência aos estados de natureza.

(*) **Estados da natureza:** São as **ocorrências futuras que podem influir sobre as alternativas**, fazendo com que elas possam apresentar mais de um resultado.

O que é a Teoria da Decisão?

Conceitos básicos, conforme Moreira (2010, p.210):

ESTRATÉGIAS:
As estratégias são as possíveis soluções para o problema.

RESULTADOS:
Cada alternativa de solução leva a um ou mais resultados, que são as consequências das alternativas.

ESTADOS DA NATUREZA:
São as ocorrências futuras que podem influir sobre as alternativas, fazendo com que elas possam apresentar mais de um resultado.

VALOR ESPERADO DA ALTERNATIVA (VEA):
É a soma dos produtos dos resultados da alternativa pelas respectivas probabilidades dos estados da natureza a eles associados.

VALOR ESPERADO DA INFORMAÇÃO PERFEITA (VEIP):
É o ganho excedente sobre a decisão tomada com o mero conhecimento das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza futuros.

A Matriz de Decisão

"A matriz de decisão é uma ferramenta auxiliar, que permite visualizar os elementos apresentados: as estratégias alternativas, os estados de natureza e os resultados associados" (MOREIRA, 2010, p.209).

Estado da Natureza / Alternativas	EN_1	EN_2	...	EN_K
A_1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1k}
A_2	R_{21}	R_{21}	...	R_{2k}
...			...	
A_p	R_{p1}	R_{p2}	...	R_{pk}

Decisão Tomada Sob Risco (DTSR)

Conforme apresentado a DTSR acontece quando o tomador de decisão não conhece exatamente o estado de natureza que ocorrerá no seu problema, podendo somente **associar a cada estado da natureza uma probabilidade de sua ocorrência**.

A solução de um problema de DTSR depende do conceito de **Valor Esperado da Alternativa (VEA)**.

Para escolher a melhor alternativa, ou seja, para solucionar o problema, devemos seguir estes procedimentos:

1. Calcular, para cada alternativa o Valor Esperado da Alternativa (VEA)
2. Escolher o melhor dos valores calculados (*)

Essa metodologia é também conhecida como ***Regra de Decisão de Bayes***.

(*) Caso a matriz seja apresentada em termos de **lucro ou receita**, o **melhor** valor corresponde ao **maior** valor. Caso a matriz seja apresentada em termos de **custo ou despesa**, o **melhor** valor corresponde ao **menor** valor.

Decisão Tomada Sob Risco (DTSR)

Uma organização almeja a divulgação de um novo modelo de um determinado dispositivo. A partir desta iniciativa é possível desenvolver uma escolha entre as alternativas: produzir um novo modelo ou manter o modelo atual. Qual opção trará melhores retornos financeiros? Mediante as duas alternativas apresentadas, a empresa precisa também admitir três estados futuros da demanda: baixa, média e alta. Para tanto, inicia-se a análise de tomada de decisão pela elaboração da Matriz de Decisão, na qual se apresentam os estados da natureza e as probabilidades.

Estado da Natureza / Alternativas	Demanda baixa P = 0,2	Demanda média P = 0,3	Demanda alta P = 0,5
Desenvolver novo produto	-100	100	200
Manter o produto atual	-300	0	400

Alternativa desenvolver novo produto: VEA = -100 (0,2) + 100 (0,3) + 200 (0,5) = 110

Alternativa manter o produto atual: VEA = -300 (0,2) + 0 (0,3) + 400 (0,5) = 140

Resposta: A alternativa **manter o produto atual** conduz a um **lucro maior**, portanto é a opção escolhida.

Decisão Tomada Sob Risco (DTSR)

Um fabricante de brinquedos está diante da decisão de comprar de terceiros ou manufaturar um componente comum a vários de seus produtos. A probabilidade de baixa demanda é de 40%, de média demanda é de 35% e de alta demanda é de 25%. O lucro para cada alternativa é apresentado na Matriz de Decisão abaixo. Calcular o Valor Esperado da Alternativa (VEA) para cada caso: comprar de terceiros ou manufaturar (MOREIRA, 2010, p. 211).

Estado da Natureza / Alternativas	Demanda baixa P = 0,4	Demanda média P = 0,35	Demanda alta P = 0,25
Comprar o componente	10	40	100
Manufaturar o componente	-30	20	150

Alternativa comprar o componente: VEA = 10 (0,4) + 40 (0,35) + 100 (0,25) = 43

Alternativa manufaturar o componente: VEA = -30 (0,4) + 20 (0,35) + 150 (0,25) = 32,5

Resposta: A alternativa **comprar o componente** conduz a um **lucro maior**, portanto é a opção escolhida.

Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)

VEIP é o excedente obtido (sobre o melhor VEA) quando temos de antemão a informação perfeita, ou seja qual o estado da natureza que ocorrerá em seguida (MOREIRA, 2010, p. 213).

Calcular com base no exemplo anterior o valor máximo que poderia ser pago por uma informação melhor, aliás o valor máximo para a melhor das informações.

Estado da Natureza / Alternativas	Demanda baixa P = 0,4	Demanda média P = 0,35	Demanda alta P = 0,25
Comprar o componente	**10**	**40**	100
Manufaturar o componente	-30	20	**150**

Alternativa comprar o componente: VEA = 10 (0,4) + 40 (0,35) + 100 (0,25) = 43

Alternativa melhores valores para cada Estado da Natureza: VEA = 10 (0,4) + 40 (0,35) + 150 (0,25) = 55,5

Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP): 55,5 – 43 = 12,5

Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)

Tabela alternativa para calcular o VEIP:

Estado da Natureza	Melhor Alternativa	Valor	Probabilidade	Ponderação
Baixa demanda	Comprar o componente	10	0,4	10 (0,4) = 4
Média demanda	Comprar o componente	40	0,35	40 (0,35) = 14
Alta demanda	Manufaturar o componente	150	0,25	150 (0,25) = 37,5
SOMA				**55,5**

Alternativa melhores valores para cada Estado da Natureza: VEA = 10 (0,4) + 40 (0,35) + 150 (0,25) = 55,5

Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP): 55,5 – 43 = 12,5

Solução alternativa (Matriz de Arrependimento)

Uma solução alternativa para o problema de decisão é aplicar a Regra de Decisão de Bayes aos arrependimentos em vez de aplicá-la à matriz original, escolhendo a alternativa que conduzir ao mínimo arrependimento médio. Os arrependimentos são calculados da seguinte forma (MOREIRA, 2010, p. 214):

1. Para cada Estado da Natureza, faz-se a diferença entre o resultado associado à melhor alternativa (sob esse estado) e o resultado das demais alternativas
2. Escolhe-se a alternativa que leva ao mínimo arrependimento.

Estado da Natureza / Alternativas	Demanda baixa P = 0,4	Demanda média P = 0,35	Demanda alta P = 0,25
Comprar o componente	0	0	**50** → (150-100)
Manufaturar o componente	**40** → (10 - (-30))	**20** → (40-20)	0

Alternativa comprar o componente: VEA = 0 (0,4) + 0 (0,35) + 50 (0,25) = 12,5

Alternativa manufaturar o componente: VEA = 40 (0,4) + 20 (0,35) + 0 (0,25) = 23

Resposta: O mínimo arrependimento corresponde a opção **comprar o componente**.

Exercício

Um fabricante está considerando duas possibilidades para a distribuição de seus produtos em certa região. A primeira possibilidade é a que está sendo adotada atualmente: entregar os produtos diretamente aos revendedores locais. A segunda alternativa consiste em abrir um armazém próprio de distribuição. Dependendo de como se comporte a demanda futura para a região, as alternativas trarão receitas diferenciadas segundo a matriz de decisão apresentada a seguir. Calcular, portanto, os Valores Esperados das Alternativas (VEA), o Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP), criar a Matriz de Arrependimento e escolher a alternativa que leva ao mínimo arrependimento.

Estado da Natureza / Alternativas	Demanda baixa P = 0,4	Demanda média P = 0,35	Demanda alta P = 0,25
Usar revendedores locais	200	150	100
Construir armazém próprio	-50	50	200

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Processos decisórios

aula 03

Objetivo:

Explicar como são desenvolvidos os processos decisórios na tomada de decisão e apresentar das etapas do processo de resolução de um problema.

Introdução

No processo decisório, o gestor se baseia nos conceitos da teoria da decisão que é prescritiva ou normativa, porque pretende auxiliar as pessoas a tomarem decisões melhores.

A teoria da decisão pode ser definida como: "um conjunto de procedimentos e métodos de análise que procuram assegurar coerência, a eficácia e a eficiência das decisões tomadas" (GOMES, 2012, p.24).

De fato, **tomar decisões é uma tarefa básica da gestão**, nos seus vários níveis, estratégico, gerencial (tático) ou operacional, devendo ser entendido que **o ato de decidir significa fazer uma opção entre alternativas de solução que sejam viáveis de serem aplicadas à situação** (MARINS, 2011).

"**A tomada de decisão é um processo de identificar um problema ou uma oportunidade e selecionar uma linha de ação para resolvê-lo**. Um problema ocorre quando o estado atual de uma situação é diferente do estado desejado. Já uma oportunidade ocorre quando as circunstâncias oferecem a chance de um indivíduo ou de uma organização ultrapassar ou alterar seus objetivos ou metas." (LACHTHERMARCHER, 2009).

Management Sciences

Atualmente, denomina-se "**Management Sciences** (MS) ou "Ciência da Gestão" a **área de estudos que utiliza computadores, estatísticas e matemática para resolver problemas de negócios**" (LACHTHERMARCHER,2009, p.2).

A Management Sciences apresenta três objetivos que se inter-relacionam mutuamente:

1. **Converter dados em informações significativas**, ou seja, transformar dados brutos em dados de forma organizada.
2. **Apoiar o processo de tomada de decisão** de formas transferíveis e independentes **por meio de sistemas de apoio aos processos decisórios**, para que a tomada de decisão seja **clara** e **transparente**.
3. **Criar sistemas computacionais para usuários não especializados**, por meio de **sistemas de fácil utilização**.

Atualmente, as decisões têm sido acumuladas em bases de conhecimento por meio de sistemas especialistas, essas bases armazenam as decisões tomadas para que elas possam **orientar decisões futuras**, funcionando como uma **memória empresarial** (LACHTHERMARCHER, 2009).

Management Sciences

Management Sciences (MS) é considerada como uma subárea da Pesquisa Operacional (PO), por desenvolver modelos matemáticos aplicados à área de negócios.

Há alguns anos, nos Estados Unidos, as duas sociedades que estudavam separadamente MS e PO se fundiram em uma única sociedade, denominada International Federation of Operations Research Societies (INFORS).

No Brasil, a contraparte dessa instituição norte-americana é a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional – SOBRAPO (www.sobrapo.org.br).

Management Sciences

Entre os tipos de problemas em que Pesquisa Operacional e Management Sciences podem ser utilizadas para auxiliar nos processos decisórios, encontram-se:

- Problemas de otimização de recursos.
- Problemas de localização.
- Problemas de roteirização.
- Problemas de carteiras de investimentos.
- Problemas de alocação de pessoas.
- Problemas de previsão e planejamento.
- Problemas de alocação de verbas e mídia

(LACHTHERMARCHER, 2009).

Management Sciences

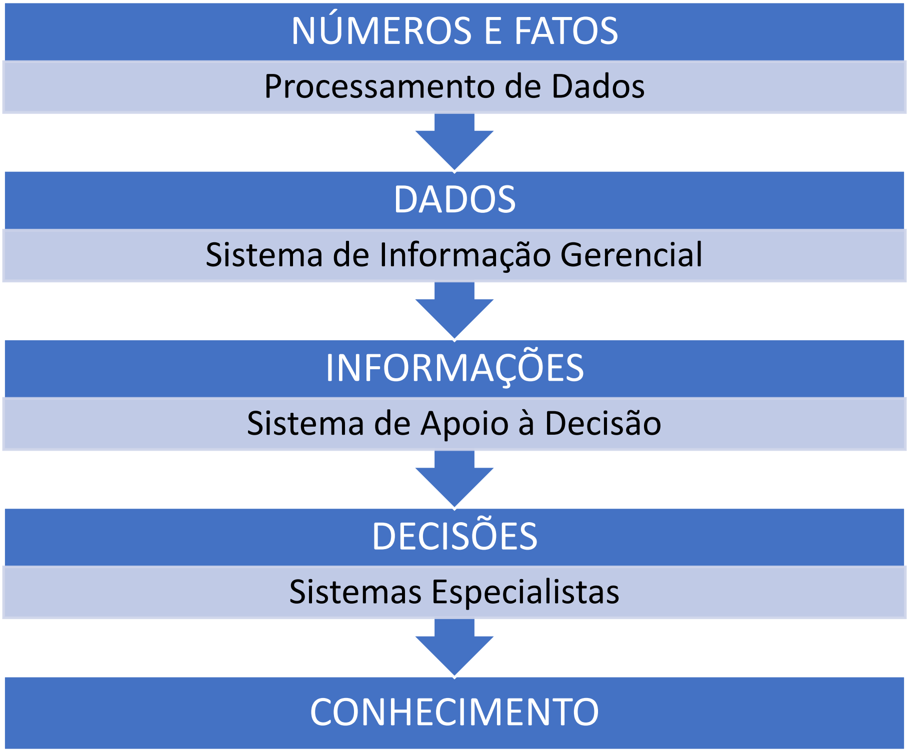
O processo decisório envolve seis elementos:

1. Tomador de decisão: é o indivíduo ou grupo de indivíduos que faz uma escolha entre várias possibilidades de ação disponíveis.
2. Objetivos: são metas que precisam ser alcançadas.
3. Sistemas de valores: são parâmetros para a escolha.
4. Cursos de ação: são possibilidades de execução.
5. Estados da Natureza: são fatores ambientais e condições de certeza, risco ou incerteza;
6. Consequências: são os resultados

(CHIAVENATO, 2007).

Transformação de dados brutos em conhecimento

O processo de transformação de dados brutos em conhecimento é demonstrado na figura abaixo:



Fonte: adaptado de (LACHTHERMARCHER, 2009)

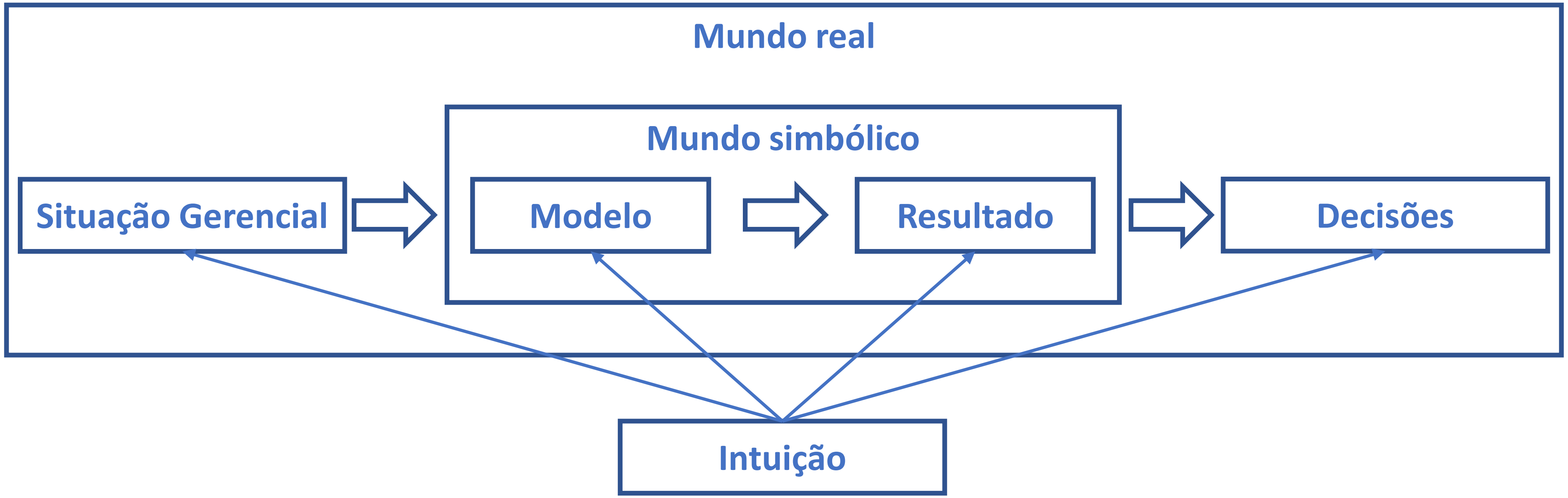
Sistemas de Informações Gerenciais (SIG)

Os Sistemas de Informações Gerenciais (SIG) serão responsáveis pela **transformação dos dados em informações gerenciais que podem ser utilizadas nos processos decisórios**.

Os SIG são sistemas que **geram informações consolidadas referentes a um determinado período, para que possam ser comparadas com o mesmo período do ano anterior**.

Processo de tomada de decisão

A intuição do tomador de decisão deve ajudá-lo na seleção das informações relevantes, nos possíveis cenários a serem estudados, na validação do modelo e na análise de seus resultados. Este processo está representado na figura abaixo:



Fonte: adaptado de (LACHTHERMARCHER, 2009)

Processo de resolução de um problema

Para que se realize uma tomada de decisão deve-se seguir as etapas do processo de resolução de um problema, conforme representado na figura abaixo:

Fonte: adaptado de (LACHTHERMARCHER, 2009)

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Decisão Tomada Sob Incerteza (DTSI)

aula 04

(aulas 04 a 06 do AVA)

Decisão Tomada Sob Incerteza (TDSI)

Nos problemas de Tomada de Decisão Sob Incerteza são conhecidos todos os possíveis estados da natureza, mas não há uma estimativa de suas probabilidades.

Abre-se um amplo leque de possibilidades e, portanto, o tomador de decisão poderá optar por algum critério de seu interesse.

A decisão, consequentemente, não será a mesma, dependerá do critério adotado.

Há alguns critérios considerados com frequência. Entre eles destaca-se:

- Critério maximax
- Critério maximin
- Critério Laplace
- Critério do realismo (Hurwicz)
- Critério do mínimo arrependimento

Critério Maximax

O critério maximax (máximo entre os máximos) apresenta uma visão de mundo extremamente otimista.

A partir da matriz de decisão escolhe-se a alternativa que leva ao melhor resultado possível. Para isso escolhe-se o melhor resultado de cada alternativa e, em seguida, "o melhor dos melhores" (MOREIRA, 2017).

	Demanda grande	Demanda pequena
Usar revendedores locais	140	40
Construir armazém próprio	200	-30
Usar grande distribuidor local	160	10

Não são inseridas as probabilidades dos dois estados da natureza, que por hipótese são desconhecidas.

Independentemente dos estados da natureza, os melhores resultados de cada alternativa são:

- Alternativa "Usar revendedores locais": 140
- Alternativa "Construir armazém próprio": **200** (alternativa escolhida pelo critério maximax)
- Alternativa "Usar grande distribuidor local": 160

O otimista tomador de decisão optou pela alternativa acima porque acredita que o estado da natureza será demanda grande.

Nota: O critério maximax conduz ao maior valor, em termos de lucros ou receitas, e ao menor valor se a matriz for expressa em despesas ou prejuízos.

Critério Maximin

No critério maximin (máximo entre os mínimos) a partir da matriz de decisão escolhe-se o pior resultado de cada alternativa e, em seguida, dentre os piores, escolhe-se o melhor deles "o melhor dos piores" ou o "menos ruim" (MOREIRA, 2017).

	Demanda grande	Demanda pequena
Usar revendedores locais	140	40
Construir armazém próprio	200	-30
Usar grande distribuidor local	160	10

Não são inseridas as probabilidades dos dois estados da natureza, que por hipótese são desconhecidas.

Independentemente dos estados da natureza, os piores resultados de cada alternativa são:

- Alternativa "Usar revendedores locais": 40 (alternativa escolhida pelo critério maximin)
- Alternativa "Construir armazém próprio": -30
- Alternativa "Usar grande distribuidor local": 10

O pessimista tomador de decisão optou pela alternativa acima porque acredita que o estado da natureza será demanda pequena.

Critério de Laplace

O critério de Laplace é também conhecido como "critério de razão insuficiente" porque não há razão para admitir o contrário. Assume-se que são idênticas as probabilidades dos diversos estados da natureza. Calcula-se, portanto o valor médio entre os resultados de cada alternativa. Dentre os resultados médios, escolhe-se o melhor deles (MOREIRA, 2017).

	Demanda grande	Demanda pequena	Resultados médios
Usar revendedores locais	140	40	(140+40)/2 = **90**
Construir armazém próprio	200	-30	(200-30)/2 = **85**
Usar grande distribuidor local	160	10	(160+10)/2 = **85**

Independentemente dos estados da natureza, os piores resultados de cada alternativa são:

- Alternativa "Usar revendedores locais": média = 90 (alternativa escolhida pelo critério Laplace)
- Alternativa "Construir armazém próprio": média = 85
- Alternativa "Usar grande distribuidor local": média = 85

O tomador de decisão optou pela alternativa acima porque apresenta o melhor resultado médio, neste caso, o maior resultado médio.

Critério do realismo (Hurwicz)

O critério do realismo é também chamado de Hurwicz ou da média ponderada. Consiste entre adotar um compromisso entre uma visão otimista e pessimista da realizada. O tomador de decisão seleciona um coeficiente de realismo α variando de 0 a 1. Quanto maior o valor escolhido para α, mais otimista o tomador de decisão está em relação ao futuro. Após a adoção de α, escolhe-se para cada alternativa o melhor e o pior resultado, calculando a média ponderada (MOREIRA, 2017).

	Demanda grande	Demanda pequena	Resultados médios
Usar revendedores locais	140	40	140.(0,7) + 40.(1-0,7) = **110**
Construir armazém próprio	200	-30	200.(0,7) + (-30).(1-0,7) = **131**
Usar grande distribuidor local	160	10	160.(0,7) + 10.(1-0,7) = **115**

Independentemente dos estados da natureza, os piores resultados de cada alternativa são:

- Alternativa "Usar revendedores locais": média ponderada = 110
- Alternativa "Construir armazém próprio": média ponderada = 131 (alternativa escolhida pelo critério Hurwicz
- Alternativa "Usar grande distribuidor local": média ponderada = 115

O tomador de decisão optou pela alternativa acima porque fornece o melhor VEA (Valor Esperado da Alternativa).

Critério do mínimo arrependimento

No critério do mínimo arrependimento monta-se inicialmente a matriz de arrependimentos e, em seguida, para cada alternativa, escolhe-se o pior dos arrependimentos. Como último passo, é escolhida a alternativa com o "menos ruim" dos arrependimentos, isto é, aplica-se à matriz de arrependimentos o critério maximin (MOREIRA, 2017).

	Demanda grande	Demanda pequena
Usar revendedores locais	140	**40**
Construir armazém próprio	**200**	-30
Usar grande distribuidor local	160	10

Para "Demanda grande" o melhor resultado é 200 (Construir armazém próprio) e para "Demanda pequena" o melhor resultado é 40 (Usar revendedores locais).

	Demanda grande	Demanda pequena	Pior arrependimento
Usar revendedores locais	200 – 140 = 60	40 – 40 = 0	60
Construir armazém próprio	200 – 200 = 0	40 - (-30) = 70	70
Usar grande distribuidor local	200 – 160 = 40	40 – 10 = 30	**40**

Dos piores arrependimentos, o menos ruim é 40, que corresponde à alternativa Usar um grande distribuidor local. (Foi o único dentre os cinco critérios analisados que forneceu tal solução.)

Exercício

Uma confecção está produzindo sua coleção de inverno, a ser lançada em alguns meses. A diretoria tem dúvidas sobre quanto investir na coleção, pois nos últimos anos o clima tem se revelado um tanto errático. É sabido que se o inverno apresentar muitos veranicos, a coleção de inverno irá fracassar; se, por outro lado, o inverno for rigoroso, a coleção trará lucros substanciais à empresa. O diretores prepararam a matriz de decisão a seguir, com lucro em milhares de reais:

	Inverno rigoroso	Inverno com poucos veranicos	Inverno com muitos veranicos
Alto investimento na coleção	5000	2000	-2000
Médio investimento na coleção	1500	1000	-500
Baixo investimento na coleção	800	200	0

Supor que a instabilidade do clima nos últimos anos torne muito difícil atribuir possibilidades aos estados da natureza. Determinar a solução por meio dos seguintes critérios:

- maximax
- maximin
- Laplace
- Hurwicz ($\alpha = 0{,}6$)
- mínimo arrependimento

Exercícios

Decisão Tomada Sob Risco (DTSR)
Decisão Tomada sob Incerteza (DTSI)

aulas 04 e 05

(aulas 03 a 06 do AVA)

Exercício 1

Dada a matriz de **lucros** a seguir (valores em milhares de reais), determinar:

a) A melhor alternativa usando o VEA (Valor Esperado da Alternativa)

b) O valor do lucro médio com a informação perfeita

c) O VEIP (Valor Esperado da Informação Perfeita)

	EN1 (p=0,20)	EN2 (p=0,50)	EN3 (p=0,30)
A1	25	40	55
A2	38	28	48
A3	30	50	15

(MOREIRA, 2017)

Exercício 1 (Resposta)

	EN1 (p=0,20)	EN2 (p=0,50)	EN3 (p=0,30)
A1	25	40	55
A2	38	28	48
A3	30	50	15

A1: VEA (Valor Esperado da Alternativa) = 25 (0,20) + 40 (0,50) + 55 (0,30) = 5 + 20 + 16,5 = 41,5

A2: VEA (Valor Esperado da Alternativa) = 38 (0,20) + 28 (0,50) + 48 (0,30) = 7,6 + 14 + 14,4 = 36

A3: VEA (Valor Esperado da Alternativa) = 30 (0,20) + 50 (0,50) + 15 (0,30) = 6 + 25 + 4,5 = 35,5

Lucro médio com a informação perfeita = 38 (0,20) + 50 (0,50) + 55 (0,30) = 7,6 + 25 + 16,5 = **49,1**

VEIP (Valor Esperado da Informação Perfeita) = 49,1 – 41,5 = **7,6**

Exercício 2

Dada a matriz de **despesas** a seguir (valores em milhares de reais), determinar:

a) A melhor alternativa usando o VEA (Valor Esperado da Alternativa)

b) Despesa média com a informação perfeita

c) O VEIP (Valor Esperado da Informação Perfeita)

	EN1 (p=0,15)	EN2 (p=0,35)	EN3 (p=0,40)	EN4 (p=0,10)
A1	20	30	10	25
A2	25	15	35	8

(MOREIRA, 2017)

Exercício 2 (Resposta)

	EN1 (p=0,15)	EN2 (p=0,35)	EN3 (p=0,40)	EN4 (p=0,10)
A1	20	30	10	25
A2	25	15	35	8

A1: VEA (Valor Esperado da Alternativa) = 20 (0,15) + 30 (0,35) + 10 (0,40) + 25 (0,10) = 3 + 10,5 + 4 + 2,5 = 20

A2: VEA (Valor Esperado da Alternativa) = 25 (0,15) + 15 (0,35) + 35 (0,40) + 8 (0,10) = 3,75 + 5,25 + 14 + 0,8 = 23,8

Despesa média com a informação perfeita = 20 (0,15) + 15 (0,35) + 10 (0,40) + 8 (0,10) = 3 + 5,25 + 4 + 0,8 = **13,05**

VEIP (Valor Esperado da Informação Perfeita) = 20 - 13,05 = **6,95**

Exercício 3

Dada a matriz de **lucros** a seguir (valores em milhares de reais), encontrar a melhor alternativa de acordo com os seguintes critérios:

1. maximax
2. maximin
3. Laplace

	EN1	EN2	EN3	EN4
A1	10	18	28	15
A2	30	5	18	13
A3	15	18	25	13

(MOREIRA, 2017)

Exercício 3 (Resposta)

	EN1	EN2	EN3	EN4
A1	10	18	28	15
A2	30	5	18	13
A3	15	18	25	13

1. maximax (o máximo entre os máximos) → (máximos: 30, 18, 28, 15) → 30 (A2)
2. maximin (o máximo entre os mínimos) → (mínimos: 10, 5, 18, 13) → 18 (A2)
3. Laplace (o melhor entre as média de cada alternativa) → (17,75, 16,50, 17,75) → 17,75 (A1 e A3)

Exercício 4

Dada a matriz de **despesas** a seguir (valores em milhares de reais), encontrar a melhor alternativa de acordo com os seguintes critérios:

1. maximax
2. maximin
3. Laplace

	EN1	EN2	EN3	EN4
A1	10	18	28	15
A2	30	5	18	13
A3	15	18	25	13

(MOREIRA, 2017)

Exercício 4 (Resposta)

	EN1	EN2	EN3	EN4
A1	10	18	28	15
A2	30	5	18	13
A3	15	18	25	13

1. maximax (o máximo entre os máximos) → (máximos: 10, 5, 18, 13) → 5 (A2)
2. maximin (o máximo entre os mínimos) → (mínimos: 30, 18, 28, 15) → 15 (A1)
3. Laplace (o melhor entre as média de cada alternativa) → (17,75, 16,50, 17,75) → 16,50 (A2)

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Álgebra Linear: Vetores

aula 06

(aula 07 do AVA)

Introdução

No decorrer dos cálculos realizados pela Pesquisa Operacional, conceitos matemáticos como matrizes e vetores são amplamente utilizados, portanto, apresenta-se uma revisão desses fundamentos matemáticos que fazem parte da Álgebra Linear.

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares definidas entre eles. Quando os espaços têm dimensões finitas, as transformações lineares podem ser representadas por matrizes.

De maneira que a Álgebra Linear, além de vetores e transformações lineares, lida também com matrizes e formas quadráticas.

São numerosas e bastante variadas as situações, em Matemática e em suas aplicações, onde esses objetos se apresentam (KOZAKEVICH, 2011).

Vetores

Existem dois tipos de grandeza: as **escalares** e as **vetoriais**.

As grandezas **escalares** são aquelas que ficam completamente definidas apenas por um número real, (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, massa, volume densidade são exemplos de grandezas escalares.

As grandezas **vetoriais** necessitam para serem completamente caracterizadas, é necessário conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. "Força, velocidade, aceleração são exemplos de grandezas vetoriais".

(WINTERLE, 2000, p. p.1).

Vetores

Um vetor é um par ordenado de pontos, no plano ou no espaço. Visualizamos o vetor

como uma seta cujo ponto inicial é A e o ponto final é B. "Todo vetor pode ser pensado com o ponto inicial na origem. Consequentemente, todos os pontos podem ser identificados com vetores" (AVRITZER, 2009, p. 24).

Vetor é um conjunto de números, o qual pode ser escrito como:

$p = (p_1 , p_2 , ..., p_n)$.

O vetor p é um vetor de dimensão n, ou seja, possui n elementos.

Vetores são geralmente representados por letras minúsculas em negrito e seus elementos são usualmente representados por letras minúsculas com um subscrito.

A letra utilizada para os elementos é normalmente a mesma letra utilizada para o vetor. O subscrito representa o índice do elemento do vetor.

Por exemplo, p_2 é o segundo elemento do vetor. A notação p_i indica o i-ésimo elemento do vetor.

Soma e subtração de vetores

Dois vetores podem ser adicionados somente se eles tiverem a mesma dimensão. Para **somar** dois vetores, basta somar individualmente cada elemento deles (AVRITZER, 2009).

O vetor resultante será da mesma dimensão dos vetores originais.

Simbolicamente, temos que, se **r = p + q**, então **r = p + q** , para todo i.

Dados os vetores:

p = (4, 5, 1, 7) q = (1, -2, 3, -4) s = (1, 5, 4)

Temos que:

p + q = (5, 3, 4, 3)

Não é possível computar **p + s**, nem **q + s,** visto que **p** e **q** são da 4ª dimensão e s de da 3ª dimensão.

Um vetor pode ser multiplicado por um escalar, multiplicando-se cada elemento do vetor por este escalar. Exemplo:

2 (1, 3, -2) = (2, 6, -4)

Subtração entre dois vetores é equivalente a somar o primeiro com o produto do segundo pelo escalar -1.

Então **s – t = s + (-t)**.

Por exemplo:

(1, 4, 3) - (0, 2, -1) = (1, 4, 3) + (0, -2, 1) = (1, 2, 4)

Soma e subtração de vetores

Faça a soma dos seguintes vetores:

p = (-4, -5, -1, -7) + q = (1, 2, 3, 4) => (-3, -3, 2, -3)

p = (4, 5, 1, 7) + q = (-1, -2, -3, -4) => (3, 3, -2, 3)

p = (4, -5, -1, 7) + q = (1, -2, 3, -4) => (5, -7, 2, 3)

p = (-4, -5, -1, -7) + q = (-1, -2, -3, -4) => (-5, -7, -4, -11)

Faça a multiplicação dos escalares pelos vetores:

3   q = (1, 2, 3, 4) => (3, 6, 9, 12)

3 q = (-1, -2, -3, -4) => (-3, -6, -9, -12)

-3 q = (1, 2, 3, 4) => (-3, -2, -9, -12)

-3 q = (-1, -2, -3, -4) => (3, 6, 9, 12)

Faça a subtração dos seguintes vetores:

p = (1, 4, 3) - q = (0, 2, 1) => (1, 4, 3) + (0, -2, -1) => (1, 2, 2)

p = (1, 4, 3) - q = (0, -2, -1) => (1, 4, 3) + (0, 2, 1) => (1, 6, 4)

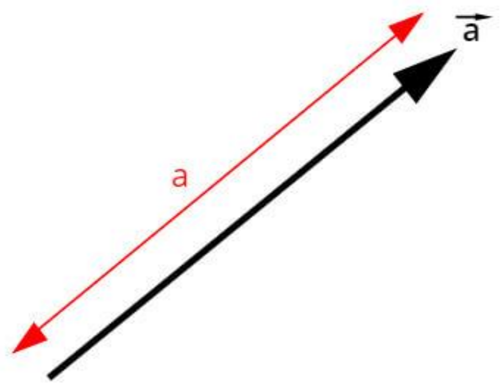
p = (-1, -4, -3) - q = (0, 2, 1) => (-1, -4, -3) + (0, -2, -1) => (-1, -6, -4)

p = (-1, -4, -3) - q = (0, -2, -1) => (-1, -4, -3) + (0, 2, 1) => (-1, -2, -2)

Componentes de um vetor

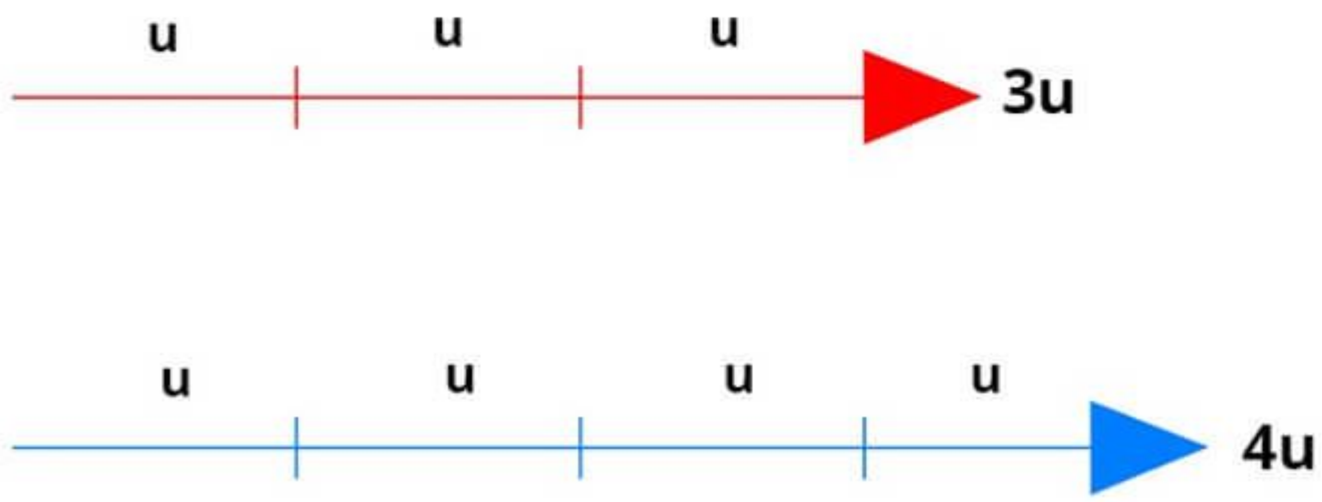
Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido. Os vetores são usados para expressar grandezas físicas vetoriais, ou seja, aquelas que só podem ser completamente definidas se conhecemos o seu valor numérico, a direção em que atuam (horizontal e vertical), bem como o seu o sentido (para cima, para baixo – indicado pela seta). Exemplos: força e velocidade.

Em geral, trabalharemos com "vetores livres", ou seja, com vetores que podem sofrer deslocamentos paralelos arbitrários. Dizemos que dois vetores são iguais quando eles têm a mesma direção, o mesmo módulo e o mesmo sentido.



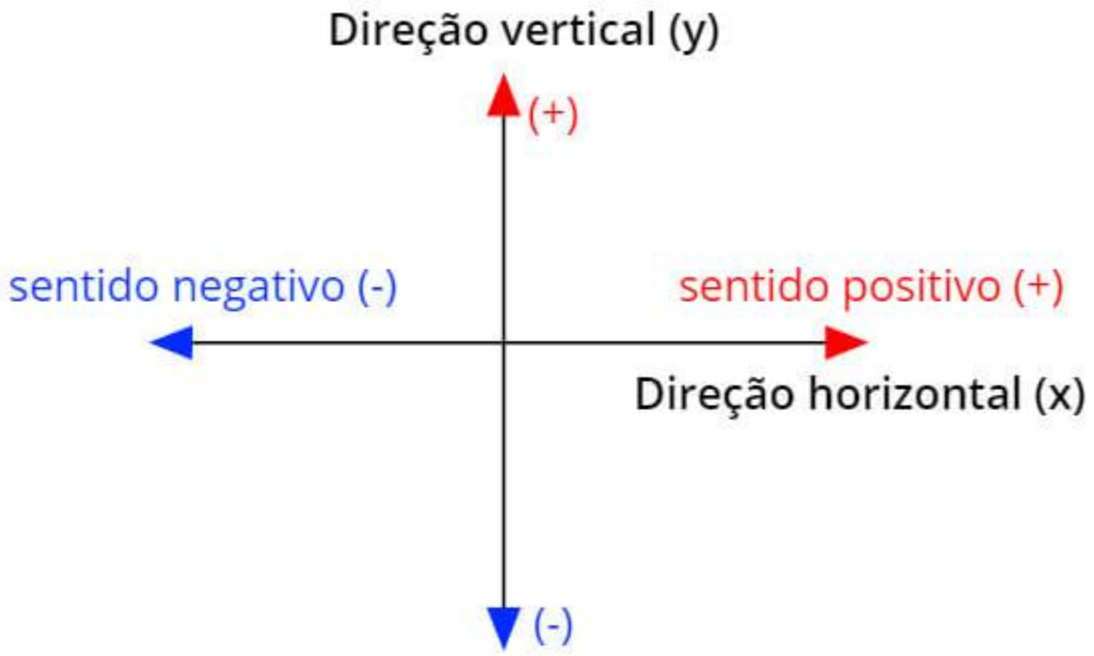
Componentes de um vetor

Para desenharmos vetores, é necessário perceber que sua representação deve levar em conta o seu tamanho. Ou seja, um vetor que represente uma grandeza de valor numérico igual a 10 deve ser desenhado com a metade do tamanho de um vetor que tenha tamanho 20.



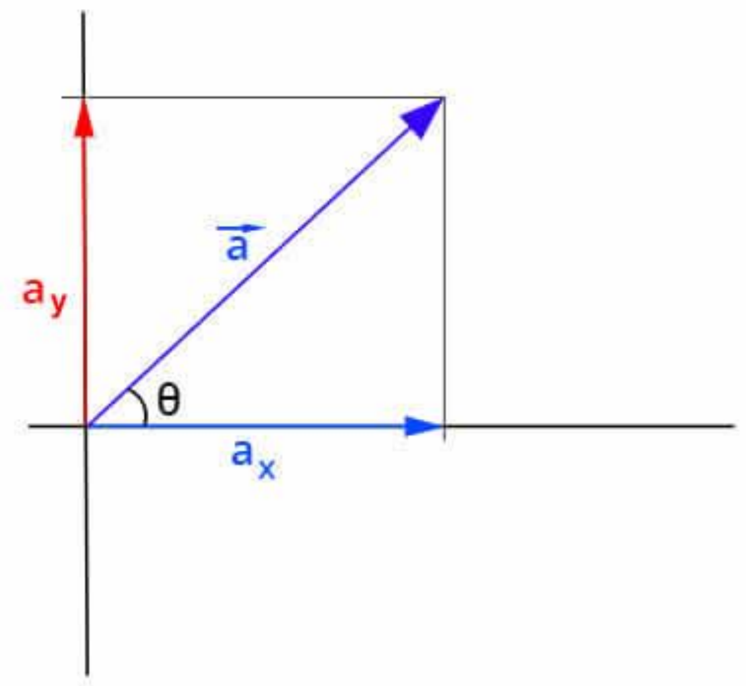
Componentes de um vetor

As direções de um vetor podem ser definidas com base no sistema de coordenadas escolhido, por exemplo. Usando-se o sistema cartesiano, as direções do espaço seriam x e y e um vetor poderia ser escrito como V = (x, y). O sentido, por sua vez, diz respeito à seta na ponta do vetor, que o indica, podendo ser tanto positivo como negativo.



Componentes de um vetor

Quando escrevemos que um vetor é definido por suas coordenadas x e y, dizemos que x e y são as suas componentes horizontal e vertical, respectivamente. Quando um vetor encontra-se inclinado, sem coincidir com qualquer um dos eixos do sistema de coordenadas, é possível determinar o tamanho das suas componentes. Para tanto, basta conhecermos o ângulo θ, formado entre o vetor e a direção horizontal, e o módulo do vetor a:



Para calcularmos essas componentes, é necessário fazer o seguinte cálculo:

$$a_x = a.cos\theta$$

$$a_y = a.sen\theta$$

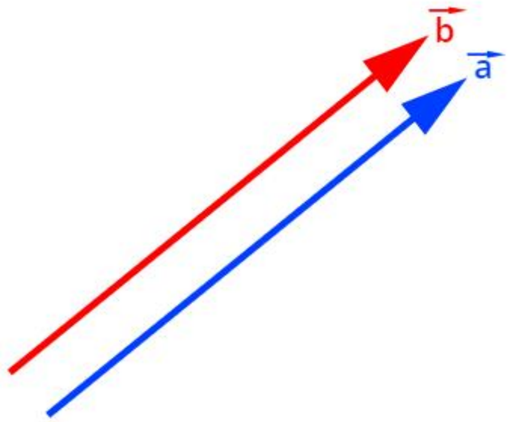
Com base nas componentes ax e ay de um vetor, é possível calcular o seu módulo (tamanho). Para isso, basta aplicarmos o teorema de Pitágoras, uma vez que essas componentes são perpendiculares entre si:

$$|a| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$$

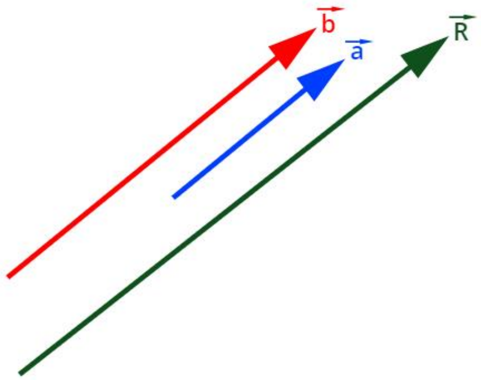
Operações com vetores

Soma de vetores

Vetores paralelos são aqueles que se encontram na mesma direção e no mesmo sentido. O ângulo formado entre esses vetores é sempre nulo. Observe a figura abaixo:



Caso esses vetores (paralelos) tenham também o mesmo módulo, dizemos que se trata de vetores iguais. Para encontrarmos a resultante desses vetores, basta somarmos o módulo de cada um, além disso, o vetor resultante estará na mesma direção e sentido dos vetores paralelos, e seu tamanho deverá ser o tamanho dos dois vetores originários:



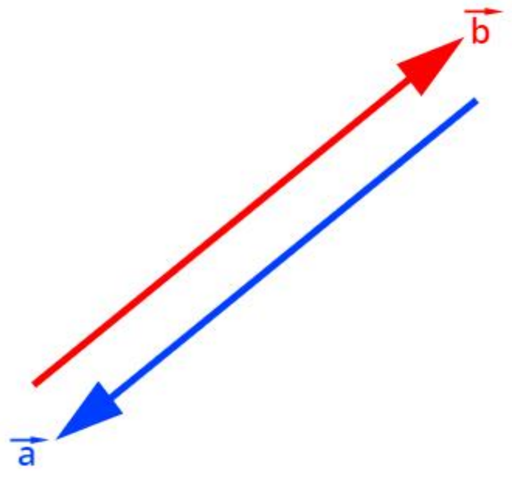
Para calcularmos o módulo do vetor R, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$|\vec{R}| = |\vec{a} + \vec{b}|$$

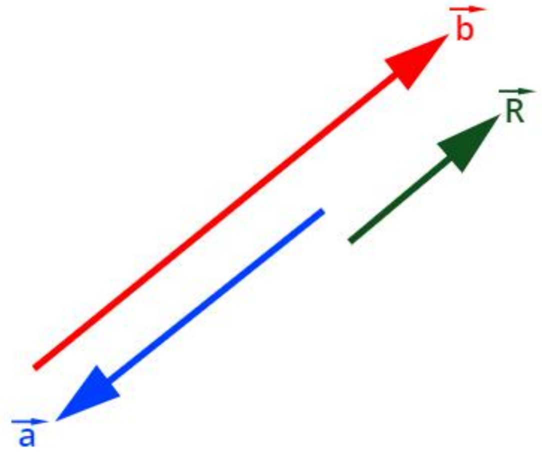
Operações com vetores

Subtração de vetores

Vetores opostos fazem um ângulo de 180º entre si, encontram-se na mesma direção, porém com sentidos contrários, como mostra a figura:



O vetor resultante de dois vetores opostos é dado pela diferença no módulo desses, como é possível ver na figura seguinte:



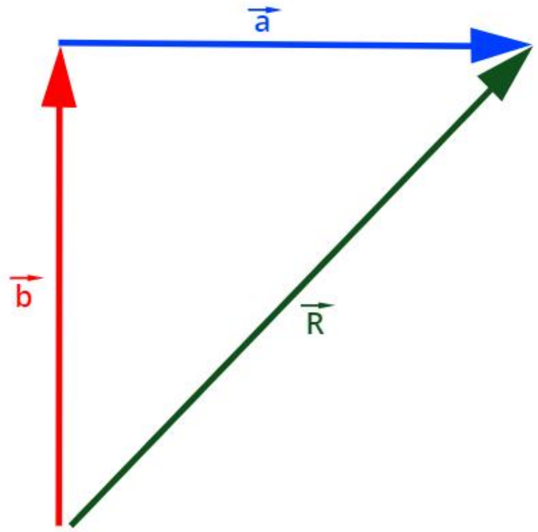
Nesse caso, o vetor resultante terá sua direção e sentido determinados pelo vetor de maior módulo e poderá ser calculado por meio da seguinte fórmula:

$$|\vec{R}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

Operações com vetores

Vetores perpendiculares: Teorema de Pitágoras

Vetores perpendiculares formam um ângulo de 90º entre si. Para encontrarmos o vetor resultante de dois vetores perpendiculares, devemos ligar o início de um dos vetores à ponta do outro. O vetor resultante, nesse caso, formará a hipotenusa de um triângulo retângulo, observe:



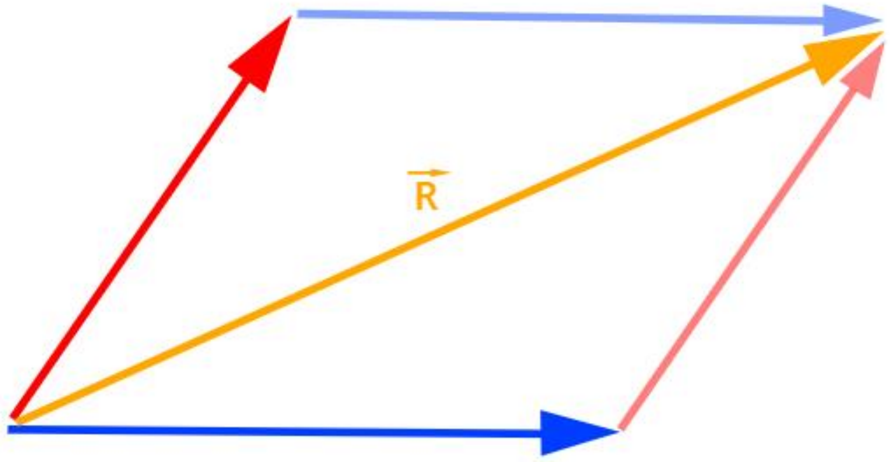
O módulo desse vetor resultante pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

Operações com vetores

Vetores oblíquos: regra do paralelogramo

Vetores que não se encaixem em nenhum dos casos anteriores podem ser determinados geometricamente pela regra do paralelogramo, como na próxima figura:



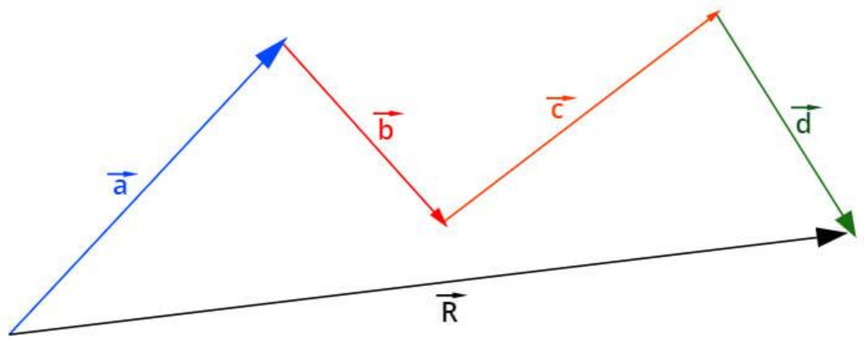
Sendo θ o ângulo formado entre os dois vetores de base (azul e vermelho), o módulo do vetor resultante poderá ser obtido por meio da próxima fórmula:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|a|.|b|.cos\theta$$

Operações com vetores

Resultante de vários vetores

Quando temos diversos vetores e queremos encontrar o vetor resultante, devemos conectá-los uns aos outros. Nesse processo, que independe da ordem escolhida, devemos ligar a ponta de um vetor ao início do próximo. No fim, o vetor resultante será aquele que liga o início do primeiro vetor com a ponta do último:



Para encontrarmos o módulo desse vetor, somamos as componentes x e y de cada um dos vetores a, b, c, e d, e, no fim, aplicamos o Teorema de Pitágoras.

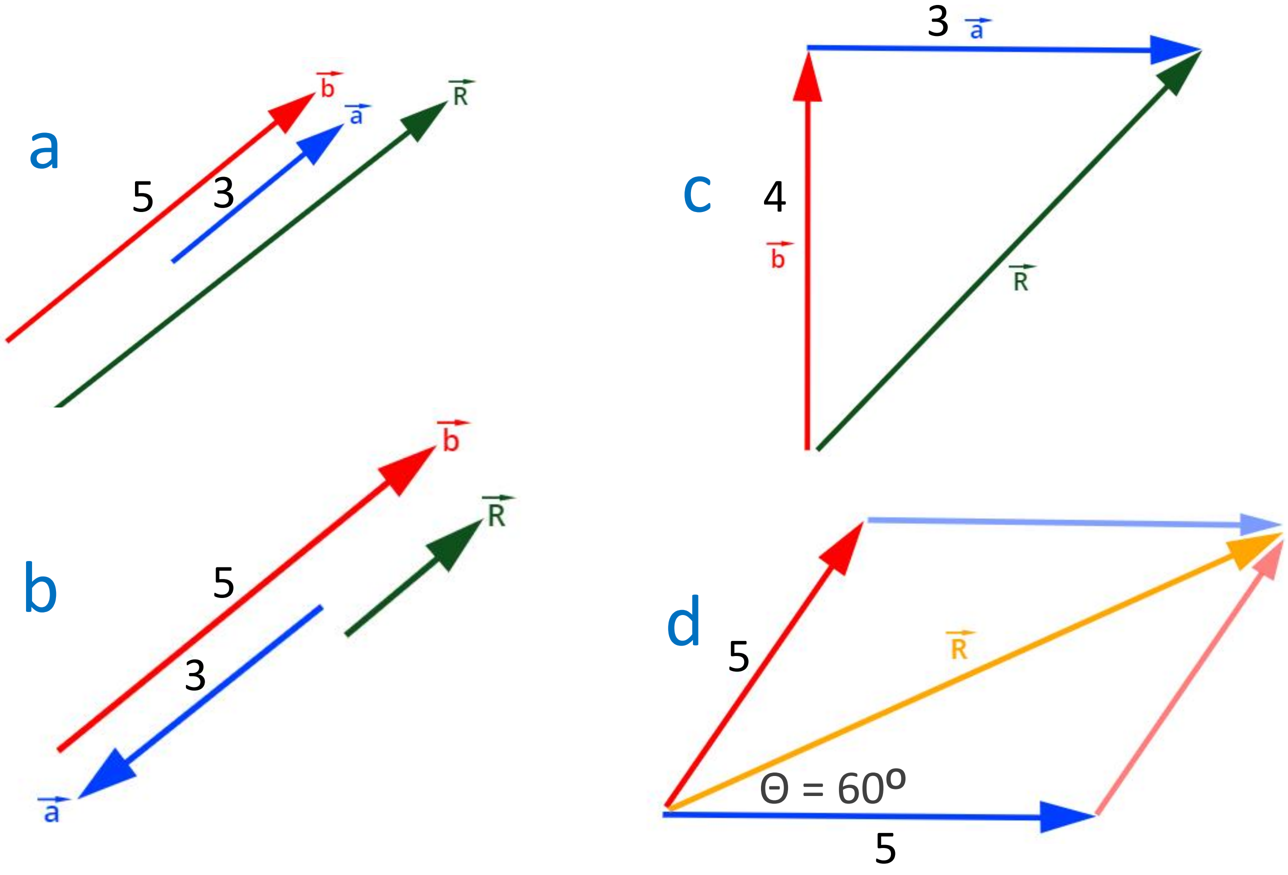
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$vetores \rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (a_x, a_y) \\ \vec{b} = (b_x, b_y) \\ \vec{c} = (c_x, c_y) \\ \vec{d} = (d_x, d_y) \end{cases}$$

$$vetor\ \ resultante \rightarrow \vec{R} = (a_x + b_x + c_x + d_x\ ,\ a_y + b_y + c_y + d_y)$$

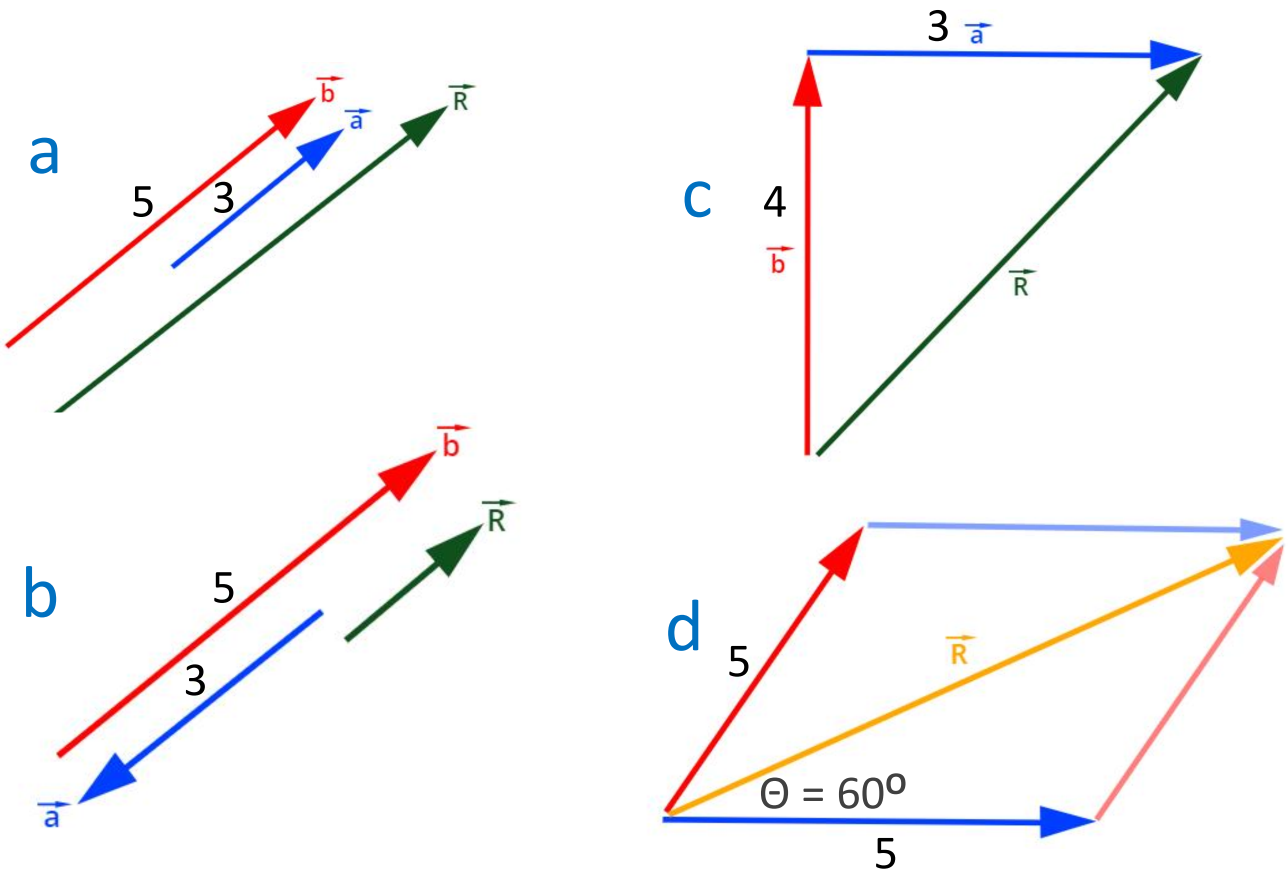
Operações com vetores

Determine o módulo da resultante dos seguintes vetores:



Operações com vetores

Determine o módulo da resultante dos seguintes vetores:



$a)\ b + a = 5 + 3 = 8$

$b)\ b - a = 5 - 3 = 2$

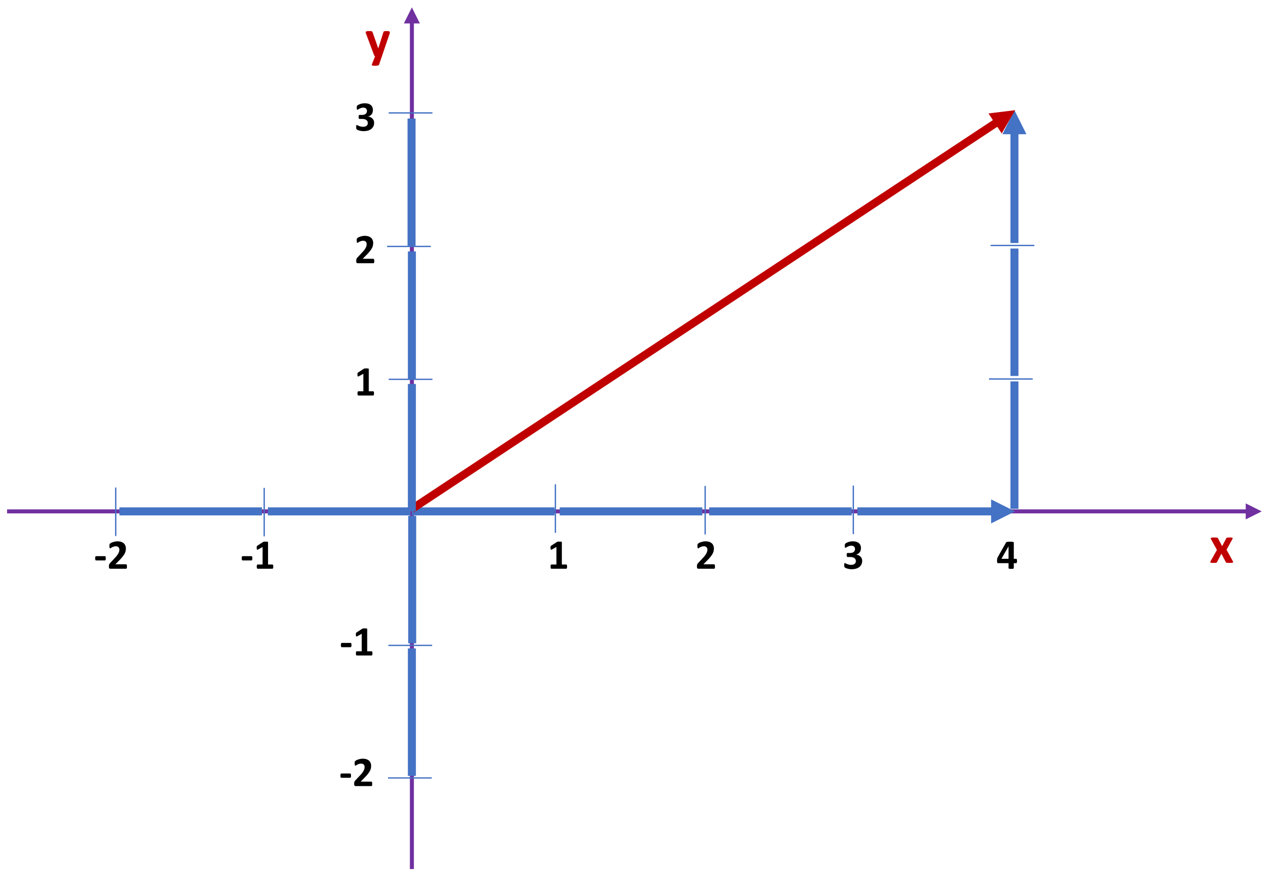
$c)\ R^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow R = \sqrt[2]{3^2 + 4^2} = 5$

$d)\ R^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,.\,|b|.\,cos\theta$

$d)\ R^2 = 5^2 + 5^2 + 2\,.\,5\,.\,5\,.\,\cos(60)$

$d)\ R = \sqrt{25 + 25 + 50\,.\,0{,}5} = \sqrt{75} = 8{,}66$

Coordenadas Cartesianas



Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Álgebra Linear: Matrizes

aula 07

(aula 08 do AVA)

Matrizes

Matrizes são estruturas matemáticas que podem ser encontradas em muitos problemas do nosso dia-a-dia.

Uma matriz é um arranjo de números, símbolos, letras, etc., dispostos em linhas e colunas.

As matrizes geralmente são representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

Se uma matriz possui m linhas e n colunas diremos que a matriz tem ordem $m \times n$ (KOZAKEVICH et al, 2011).

Matrizes

Uma matriz é um conjunto retangular de números, que pode ser escrito como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

A matriz A é uma matriz de ordem m x n, ou seja, possui m linha e n colunas.

Matrizes são geralmente representadas por letras minúsculas em negrito e seus elementos são usualmente representados por letras minúsculas com dois subscritos.

Os subscritos representam respectivamente a linha e a coluna ocupadas pelo elemento na matriz.

Por exemplo, $a_{\mathbf{23}}$ é o elemento localizado na segunda linha e na terceira coluna da matriz.

Para que duas matrizes sejam iguais é necessário de que sejam da mesma ordem, isto é, possuam o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

Soma de Matrizes

Duas matrizes podem ser adicionadas se forem da mesma ordem.

Para somar duas matrizes basta somar individualmente cada elemento delas.

A matriz resultante da soma será da mesma ordem das matrizes somadas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Subtração de Matrizes

Subtração entre duas matrizes é equivalente a somar a primeira com o produto da segunda pelo escalar -1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} * -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & 11 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Uma matriz pode ser multiplicada por um escalar, multiplicando-se cada elemento da matriz por este escalar.

Soma de Matrizes (Aplicação)

Uma pessoa possui três páginas no Facebook e deseja criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Há três categorias básicas de interação: curtidas, compartilhamentos e comentários. As tabelas a seguir apresentam os dois primeiros meses a partir da publicação das páginas.

tabela Janeiro

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas	20	52	30
Compartilhamentos	80	92	80
Comentários	28	30	12

tabela Fevereiro

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas	72	71	77
Compartilhamentos	75	83	10
Comentários	95	95	35

Com base nas duas tabelas, janeiro e fevereiro, elabore uma tabela com os resultados acumulados no bimestre.

```
         Curtidas: ?+? ?+? ?+?
Compatilhamentos: ?+? ?+? ?+?
      Comentários: ?+? ?+? ?+?
```

tabela Bimestre

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas			
Compartilhamentos			
Comentários			

Soma de Matrizes (Aplicação)

Uma pessoa possui três páginas no Facebook e deseja criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Há três categorias básicas de interação: curtidas, compartilhamentos e comentários. As tabelas a seguir apresentam os dois primeiros meses a partir da publicação das páginas.

tabela Janeiro

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas	20	52	30
Compartilhamentos	80	92	80
Comentários	28	30	12

tabela Fevereiro

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas	72	71	77
Compartilhamentos	75	83	10
Comentários	95	95	35

Com base nas duas tabelas, janeiro e fevereiro, elabore uma tabela com os resultados acumulados no bimestre.

```
         Curtidas: 20+72   52+71   30+77
Compatilhamentos: 80+75   92+83   80+10
      Comentários: 28+95   30+95   12+35

         Curtidas:  92  123  107
Compatilhamentos: 155  175   90
      Comentários: 123  125   47
```

tabela Bimestre

	Página 1	Página 2	Página 3
Curtidas	92	123	107
Compartilhamentos	155	175	90
Comentários	123	125	47

Multiplicação de Matrizes

É possível multiplicar duas matrizes mediante a condição de que o número de colunas da matriz à esquerda seja igual ao número de linhas da matriz da direita.

Sejam as matrizes **A** e **B** abaixo:

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}$$

Soma do produto da 1ª linha de A com o produto da 1ª coluna de B:

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{C_{11}}{1\times2+3\times0}\\ \\ \end{bmatrix}$$

Soma do produto da 1ª linha de A com o produto da 2ª coluna de B:

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{C_{11}}{1\times2+3\times0}&\overset{C_{12}}{1\times2+3\times1}\\ & \end{bmatrix}$$

Soma do produto da 2ª linha de A com o produto da 1ª coluna de B:

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{C_{11}}{1\times2+3\times0}&\overset{C_{12}}{1\times2+3\times1}\\ \underset{C_{21}}{2\times2+5\times0} & \end{bmatrix}$$

Soma do produto da 2ª linha de A com o produto da 2ª coluna de B:

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{C_{11}}{1\times2+3\times0}&\overset{C_{12}}{1\times2+3\times1}\\ \underset{C_{21}}{2\times2+5\times0} & \underset{C_{22}}{2\times2+5\times1}\end{bmatrix}$$

Então temos que:

$$A\times B=\begin{bmatrix}2&5\\4&9\end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes, usualmente, não é comutativa, ou seja, no caso de duas matrizes C e D e a sua multiplicação, CD, a multiplicação DC não será realizada, e se excepcionalmente ocorrer (no caso de matrizes quadradas) , não será igual a CD.

Multiplicação de Matrizes (Aplicação)

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de Futebol, realizada na França em 1998, o grupo A era formado por: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. O número de vitórias, empates e derrotas está registrado na tabela A.

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem respectivamente a seguinte pontuação: 3 pontos, 1 ponto e 0 ponto. Veja isso representado na tabela B.

tabela A

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

tabela B

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A pontuação de cada país pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de A por B):

```
  Brasil: ? * ? + ? * ? + ? * ? = ?
 Escócia: ? * ? + ? * ? + ? * ? = ?
Marrocos: ? * ? + ? * ? + ? * ? = ?
 Noruega: ? * ? + ? * ? + ? * ? = ?
```

País	Pontos
Brasil	6
Escócia	1
Marrocos	4
Noruega	5

Multiplicação de Matrizes (Aplicação)

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de Futebol, realizada na França em 1998, o grupo A era formado por: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. O número de vitórias, empates e derrotas está registrado na tabela A.

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem respectivamente a seguinte pontuação: 3 pontos, 1 ponto e 0 ponto. Veja isso representado na tabela B.

tabela A

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

tabela B

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A pontuação de cada país pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de A por B):

```
  Brasil: 2 * 3 + 0 * 1 + 1 * 0 = 6
 Escócia: 0 * 3 + 1 * 1 + 2 * 0 = 1
Marrocos: 1 * 3 + 1 * 1 + 1 * 0 = 4
 Noruega: 1 * 3 + 2 * 1 + 0 * 0 = 5
```

País	Pontos
Brasil	6
Escócia	1
Marrocos	4
Noruega	6

Multiplicação de Matrizes (Aplicação)

Uma confecção produz três tipos de calças: A, B e C. Cada tipo de calça usa dois tipos de botões P (pequenos) G (grandes). O número de botões usados em cada tipo de calça é apresentado na tabela A e o número de calças produzidas em janeiro e fevereiro é apresentado na tabela B.

tabela A

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Botões P	6	4	2
Botões G	4	3	2

tabela B

	janeiro	fevereiro
Tipo A	60	100
Tipo B	80	90
Tipo C	70	120

De acordo com os dados fornecidos, calcule a quantidade de botões utilizados em janeiro e fevereiro.

```
  janeiro: ?*?+?*?+?*? ?*?+?*?+?*? = ?
fevereiro: ?*?+?*?+?*? ?*?+?*?+?*? = ?
```

	janeiro	fevereiro
Botões P		
Botões G		

Multiplicação de Matrizes (Aplicação)

Uma confecção produz três tipos de calças: A, B e C. Cada tipo de calça usa dois tipos de botões P (pequenos) G (grandes). O número de botões usados em cada tipo de calça é apresentado na tabela A e o número de calças produzidas em janeiro e fevereiro é apresentado na tabela B.

tabela A

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Botões P	**6**	**4**	**2**
Botões G	**4**	**3**	**2**

tabela B

	janeiro	fevereiro
Tipo A	**60**	**100**
Tipo B	**80**	**90**
Tipo C	**70**	**120**

De acordo com os dados fornecidos, calcule a quantidade de botões utilizados em janeiro e fevereiro.

```
  janeiro:  6*60+4*80+2*70   6*100+4*90+2*120
fevereiro:  4*60+3*80+2*70   4*100+3*90+2*120

  janeiro:  360 + 320 + 140  600 + 360 + 240
fevereiro:  240 + 240 + 240  400 + 270 + 240
```

	janeiro	fevereiro
Botões P	**820**	**1200**
Botões G	**620**	**810**

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Álgebra Linear: Sistemas de Equações Lineares

aula 08

(aula 09 do AVA)

Sistemas de Equações Lineares

Sistemas Lineares são conjuntos de equações associadas que apresentam a forma a seguir:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Os sistemas lineares podem ser classificados conforme o número de soluções possíveis:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD):** Há apenas uma solução possível, o que acontece quando o determinante é diferente de zero (D ≠ 0).
- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** As soluções possíveis são infinitas, o que acontece quando o determinante é igual a zero (D = 0).
- **Sistema Impossível (SI):** Não é possível apresentar qualquer tipo de solução, o que acontece quando o determinante principal é igual a zero (D = 0) e um ou mais determinantes secundários são diferentes de zero (D ≠ 0).

Sistemas de Equações Lineares: classificando em SPD, SPI ou SI

$$\begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ 15x - 2y = 24 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}$$

$3 * 15 = 45$ $\quad$ $7 * (-2) = -14$

$D = -14 - 45$

$D = -59$, ou seja $D \neq 0$ (SPD)

SPD (Sistema Possível e Determinado)

Sistemas de Equações Lineares: classificando em SPD, SPI ou SI

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 4x - 2y + 6z = -8 \end{cases}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right|$$

$2 * 2 * 6 = 24$

$-1 * (-1) * 4 = 4$

$3 * 1 * (-2) = -6$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right|$$

$-1 * 1 * 6 = -6$

$2 * (-1) * (-2) = 4$

$3 * 2 * 4 = 24$

$24 + 4 - 6 = 22$

$-6 + 4 + 24 = 22$

$D = 22 - 22$

$D = 0$

D = 0: podemos estar diante de um SPI ou de um SI. Assim, para saber qual a classificação correta, calcularemos os determinantes secundários.

Nos determinantes secundários são utilizados os termos independentes das equações. Os termos independentes substituirão uma das incógnitas escolhidas.

Resolveremos o determinante secundário Dx, por isso, vamos substituir o x pelos termos independentes.

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -8 & -2 & 6 & -8 & -2 \end{array}\right|$$

$-4 * 2 * 6 = -48$

$-1 * (-1) * (-8) = -8$

$3 * 5 * (-2) = -30$

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -8 & -2 & 6 & -8 & -2 \end{array}\right|$$

$-1 * 5 * 6 = -30$

$-4 * (-1) * (-2) = -8$

$3 * 2 * (-8) = -48$

$-48 - 8 - 30 = -86$

$-30 - 8 - 48 = -86$

$D = -86 + 86$

$D= 0$

SPD (Sistema Possível e Indeterminado)

Sistemas de Equações Lineares: Método da Soma

A partir do método algébrico por adição pelo menos uma das equações deve ser multiplicada por um escalar real, de maneira que, após a soma das equações, apenas uma das variáveis seja efetivamente a incógnita do problema.

$$10x + 20y = 400$$

$$15x + 10y = 300$$

1º passo: multiplicar a segunda equação por (-2):

$$10x + 20y = 400$$
$$-30x - 10y = -600$$

2º passo: somar as duas equações

$$-20x = -200 \Rightarrow \mathbf{x = 10}$$

3º passo: substituir **x** em uma das equações acima para encontrar o valor de **y**:

$$10 * 10 + 20y = 400 \Rightarrow 100 + 20y = 400 \Rightarrow 20y = 400 - 100 \Rightarrow 20y = 300 \Rightarrow \mathbf{y = 15}$$

Sistemas de Equações Lineares: Método da Substituição

No método algébrico por substituição, isola-se uma das variáveis em uma das equações, substituindo-se a relação obtida na outra equação.

$$10x + 20y = 400$$

$$15x + 10y = 300$$

1º passo: isolar o **x**:

$$x = \frac{400 - 20y}{10} = 40 - 2y$$

2º passo: substituir **x** na segunda equação:

$15 (40 - 2y) + 10y = 300 \Rightarrow 600 - 30y + 10y = 300 \Rightarrow -20y = -300 \Rightarrow 20y = 300 \Rightarrow \mathbf{y = 15}$

3º passo: substituir **y** em uma das equações acima para encontrar o valor de **x**:

$10x + 20 * 15 = 400 \Rightarrow 10x + 300 = 400 \Rightarrow 10x = 400 - 300 \Rightarrow 10y = 100 \Rightarrow \mathbf{x = 10}$

Sistemas de Equações Lineares: Método Gauss-Jordan

O Método de Gauss - Jordan consiste da derivação de um sistema de equações lineares que tenha a mesma solução que o sistema original.

São permitidas as seguintes transformações lineares:

- Troca de linhas;
- Multiplicação da linha por um escalar;
- Soma de uma linha multiplicada por um escalar a uma outra linha.

```
10x  20y  400
15x  10y  300
```

1º passo: divisão da linha 1 por 10 (transforma o coeficiente de **x** na equação 1 para 1).

```
  x   2y   40
15x  10y  300
```

2º passo: subtração da linha 2 pela linha 1 multiplicada por 15 (transforma o coeficiente de **x** na equação 2 para 0).

```
  x   2y    40
15x  10y   300 => (-15x + 15x) (-30y + 10y) (-600 + 300)

  x   2y =   40
 0x -20y = -300
```

3º passo: divisão da linha 2 por (-20) (transforma o coeficiente de **y** na equação 2 para 1).

```
  x    2y    40
 0x  -20y  -300 => (0x / -20) (-20y / -20) (-300 / -20)

  x   2y   40
 0x    y   15
```

4º passo: subtração da linha 1 pela linha 2 multiplicada por 2 (transformação do coeficiente de **y** na equação 1 para 0).

```
  x   2y   40 => (x - 0x) (2y - 2y) (40 - 30)
 0x    y   15

  x   0y   10
 0x    y   15
```

Portanto, **x = 10** e **y = 15**

Sistemas de Equações Lineares: Regra de Cramer

Pelo teorema de Cramer, se um sistema linear apresenta o número de equações igual ao número de incógnitas e determinante diferente de zero, então as incógnitas são calculadas por:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_x}{D}\,;\, y = \frac{D_y}{D} \text{ e } z = \frac{D_z}{D},\, D \neq 0$$

Os valores de Dx, Dy e Dz são encontrados substituindo a coluna de interesse pelos termos independentes da matriz.

$$D_x = \begin{matrix} \mathbf{d_1} & b_1 & c_1 \\ \mathbf{d_2} & b_2 & c_2 \\ \mathbf{d_3} & b_3 & c_3 \end{matrix}\,;\, D_y = \begin{matrix} a_1 & \mathbf{d_1} & c_1 \\ a_2 & \mathbf{d_2} & c_2 \\ a_3 & \mathbf{d_3} & c_3 \end{matrix}\,;\, D_z = \begin{matrix} a_1 & b_1 & \mathbf{d_1} \\ a_2 & b_2 & \mathbf{d_2} \\ a_3 & b_3 & \mathbf{d_3} \end{matrix}$$

Sistemas de Equações Lineares: Regra de Cramer (sistema 2x2)

Observe o sistema a seguir com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 12x + 3y = 15 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$$

1º passo: calcular o determinante da matriz de coeficientes.

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = 12.(-3) - 3.2 = -36 - 6 = -42$$

2º passo: calcular Dx substituindo os coeficientes da primeira coluna pelos termos independentes.

$$M_x = \begin{bmatrix} \mathbf{15} & 3 \\ \mathbf{13} & -3 \end{bmatrix}$$

$$D_x = 15.(-3) - 3.13 = -45 - 39 = -84$$

3º passo: calcular Dy substituindo os coeficientes da segunda coluna pelos termos independentes.

$$M_x = \begin{bmatrix} 12 & \mathbf{15} \\ 2 & \mathbf{13} \end{bmatrix}$$

$$D_y = 12 . 13 - 15 . 2 = 156 - 30 = 126$$

4º passo: calcular o valor das incógnitas pela regra de Cramer.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-84}{-42} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{126}{42} = -3$$

Portanto, **x = 2** e **y = -3**.

Como calcular o determinante de uma matriz 3 x 3 (regra de Sarrus)

Calcular o Determinante da matiz abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ -2x + 6y + 4z = 20 \\ x + 4y + 7z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

Subtrair a soma dos produtos da diagonal secundária da soma dos produtos da diagonal principal.

(3*6*7)+(2*4*1)+(1*-2*4) = +126+8-8 = 126 **(diagonal principal)**

-((1*6*1)+(3*4*4)+(2*-2*7)) = -(6+48-28) = -26 **(diagonal secundária)**

D = 126-26=100 **(Determinante)**

Sistemas de Equações Lineares: Exercício

Considere o seguinte sistema de equação linear e responda as questões abaixo.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + 1y + 2z = -3 \end{cases}$$

- Classifique o sistema em: Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) ou Sistema Impossível (SI).
- Apresente o valor das incógnitas x, y e z através dos seguintes métodos:
  - Soma
  - Substituição
  - Gauss-Jordan
  - Cramer

MÉTODO DA SOMA

2x	+y	-z	=	8	I
-3x	-y	+2z	=	-11	II
-2x	+y	+2z	=	-3	III

2x	+y	-z	=	8	I
-2x	+y	+2z	=	-3	III
	2y	+z	=	5	IV

-6x	-2y	+4z	=	-22	II . 2
6x	-3y	-6z	=	9	III . -3
	-5y	-2z	=	-13	V

2x	+y	-z	=	8	I
	2y	+z	=	5	IV
	-5y	-2z	=	-13	V

-4y	-2z	=	-10	IV . -2
5y	+2z	=	13	V . -1
y		=	3	VI

2x	+y	-z	=	8	I
	2y	+z	=	5	IV
	y		=	3	VI

2y	+z	=	5	IV
-2y		=	-6	VI . (-2)
	z	=	-1	VII

2x	+y	-z	=	8	I
	y		=	3	VI
		z	=	-1	VII

2x	+y	-z	=	8	I
	-y		=	-3	VI . (-1)
		z	=	-1	VII
2x			=	4	

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

$2x + y - z = 8$	I
$-3x - y + 2z = -11$	II
$-2x + y + 2z = -3$	II

$y = -2x + z + 8$ — Ia

$-2x + (-2x + z + 8) + 2z = -3$ — substituir Ia em III

$-4x + 3z = -8 - 3$

$3z = 4x - 11$

$z = \frac{4x - 11}{3}$ — IIIa

$-3x - (-2x + z + 8) + 2z = -11$ — substituir Ia em II

$-3x + 2x - z - 8 + 2z = -11$

$-x + z = -11 + 8$

$-x + z = -3$ — IIa

$-x + \frac{4x - 11}{3} = -3$ — substituir IIIa em IIa

$-3x + 4x - 11 = -9$ — multiplicar por 3

$x - 11 = -9$

$x = 11 - 9$

$x = 2$

$z = \frac{4 \cdot (2) - 11}{3}$ — substituir x em IIIa

$z = \frac{8 - 11}{3}$ $\quad z = \frac{-3}{3}$ $\quad z = -1$

$2x + y - z = 8$ — substituir x e z em I

$2.(2) + y - (-1) = 8$

$4 + y + 1 = 8$

$5 + y = 8$

$y = 8 - 5$

$y = 3$

MÉTODO DE GAUSS JORDAN

I	2	1	-1	8	
II	-3	-1	2	-11	
III	-2	1	2	-3	

IV	1	1/2	-1/2	4	← I . 1/2
II	-3	-1	2	-11	
III	-2	1	2	-3	

IV	1	1/2	-1/2	4	
V	0	1/2	1/2	1	← (IV . 3) - II
III	-2	1	2	-3	

IV	1	1/2	-1/2	4	
V	0	1/2	1/2	1	
VI	0	2	1	5	← (IV . 2) - III

IV	1	1/2	-1/2	4	
VII	0	1	1	2	← (V . 2)
VI	0	2	1	5	

IV	1	1/2	-1/2	4	
VII	0	1	1	2	
VIII	0	0	-1	1	← (VII . -2) - VI

IV	1	1/2	-1/2	4	
VII	0	1	1	2	
IX	0	0	1	1	← (VIII . -1)

IV	1	1/2	-1/2	4	
VII	0	1	1	2	
X	0	0	1	-1	← (IX . -1)

IV	1	1/2	-1/2	4	
XI	0	1	0	3	← (X . -1) - VII
X	0	0	1	-1	

XII	1	1/2	0	7/2	← (X . 1/2) - IV
XI	0	1	0	3	
X	0	0	1	-1	

XIII	1	0	0	2	← (XI . 1/2) - XII
XI	0	1	0	3	
X	0	0	1	-1	

MÉTODO DE CRAMER

X	Y	Z	TI
2	1	-1	8
-3	-1	2	-11
-2	1	2	-3

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

D	-1

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -11 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

DX	-2

X	2

DX/D

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -3 & -11 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

DY	-3

Y	3

DY/D

Z	-1

DZ/D

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -3 & -1 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

DZ	1

Matrix Calculator

Cálculo de sistemas de equações lineares online:

https://matrixcalc.org/pt/slu.html

Usando o R para resolver Sistemas de Equações Lineares

Usaremos o R para calcular o valor da incógnitas x, y e z do seguinte sistema de equação linear:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - 1y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Requisito:

Instalar e carregar o package **matlib**:

```
install.packages("matlib")
library(matlib)
```

1º passo: Criar a matriz 3 x 3 com os coeficientes de cada incógnita:

```
A <- matrix(c(2, 1, -1, -3, -1, 2, -2,  1, 2), 3, 3, byrow=TRUE)
```

2º passo: criar um vetor com os valores correspondentes a cada equação:

```
b <- c(8, -11, -3)
```

3º passo: Verificar se o sistema de equações foi criado corretamente:

```
showEqn(A, b)
```

x, y e z são apresentados por padrão no R como x1, x2 e x3, respectivamente.

4º passo: Encontrar os valores de x, y e z (x1, x2 e x3):

```
solve(A, b)
```

Sistemas de Equações Lineares

Método de Castilho

MetodoDeCastilho_temp.xlsx

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4

2	1
1	-3

2	1
3	1

2	1
1	2

2	1
3	-1

2	1
1	-1

2	1
3	4

Z	

Y	

X	

Planilha1

MetodoDeCastilho_temp.xlsx

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1		
3	1		

2	1		
3	-1		

2	1		
3	4		

-7	3		

-7	-3		

Z	

Y	

X	

Planilha1

MetodoDeCastilho_temp.xlsx

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3
	-1	-5	5

Z	
Y	
X	

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-3	-1
3	1	2	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-3	-5
3	-1	-2	

-7	3		
-1	-5		

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1	-3	5
3	4	8	

-7	-3		
-1	5		

Planilha1

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3
	-1	-5	5
		38	-38

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1	-3	-1
3	1	2	

2	1	-3	-5
3	-1	-2	

2	1	-3	5
3	4	8	

-7	3	3	38
-1	-5	35	

-7	-3	-3	-38
-1	5	-35	

Z	

Y	

X	

MetodoDeCastilho_temp.xlsx

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3
	-1	-5	5
		38	-38

Z	-1

D7/C7

Y	

X	

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1	-3	-1
3	1	2	

2	1	-3	-5
3	-1	-2	

2	1	-3	5
3	4	8	

-7	3	3	38
-1	-5	35	

-7	-3	-3	-38
-1	5	-35	

Planilha1

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3
	-1	-5	5
		38	-38

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-3	-1
3	1	2	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-3	-5
3	-1	-2	

-7	3	3	38
-1	-5	35	

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1	-3	5
3	4	8	

-7	-3	-3	-38
-1	5	-35	

Z	-1

D7/C7

Y	0

(D6-C6*B9)/B6

X	

MetodoDeCastilho_temp.xlsx

X	Y	Z	TI
2	1	1	1
1	-3	2	-1
3	1	-1	4
	-7	3	-3
	-1	-5	5
		38	-38

Z	-1	D7/C7
Y	0	(D6-C6*B9)/B6
X	1	(D2-(B2*B11)-(C2*B9))/A2

2	1	-1	-7
1	-3	-6	

2	1	-1	3
1	2	4	

2	1	-1	-3
1	-1	-2	

2	1	-3	-1
3	1	2	

2	1	-3	-5
3	-1	-2	

2	1	-3	5
3	4	8	

-7	3	3	38
-1	-5	35	

-7	-3	-3	-38
-1	5	-35	

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Programação Linear (PL)

aula 09

(aula 10 do AVA)

Objetivo

Apresentar os fundamentos da Programação Linear, seus objetivos, áreas e formas de aplicação. Apresentar os procedimentos para solução de problemas usando a álgebra linear.

Introdução

O modelo matemático de Programação Linear é composto de uma função objetivo e restrições técnicas representadas por um grupo de inequações também lineares.

Esse procedimento técnico é empregado no campo empresarial para:

- Análise e planejamento de linha de produção;
- Análise e planejamento de demanda;
- Análise e planejamento de transportes;
- Análise e planejamento de restrições de demandas ou ofertas, etc.

O objetivo que as organizações esperam alcançar é de maximizar os lucros e minimizar os custos.

Formulação de modelos de Programação Linear

Um modelo típico de Programação Linear apresenta duas grandes partes:

- Uma expressão que se deseja maximizar ou minimizar chamada **função objetivo**. A expressão é composta por variáveis denominadas **variáveis de decisão**.
- Um determinado número de restrições, expressas no forma de equações ou inequações matemáticas. As restrições representam limitações como escassez de recursos, limitações legais, etc.

Diretrizes para formulação de modelos de Programação Linear

Devem ser considerados como parte da solução os seguintes elementos:

- Parâmetros: valores já fixados, fora do controle de quem monta o modelo. Fazem parte do problema, mas não estão sob discussão.
- Variáveis de decisão: grandezas que poderão assumir diversos valores. A combinação dos valores irá maximizar ou minimizar a função objetivo. As variáveis de decisão são indicadas por letras: x, y, z, ... ou por letras indexadas: x_1, x_2, x_3, ...

Modelagem aplicando álgebra linear e vetores na construção de gráficos

Se um problema simples de programação linear apresentar apenas duas variáveis de decisão, ele poderá ser representado graficamente.

O fato de ter apenas duas variáveis de decisão permite representa-las em um par de eixos ortogonais que será a base para colocação de retas que, por sua vez, serão a base para plotagem das retas que delimitarão as restrições.

Construção da reta em função da equação:

$8x + 12y = 48$

Primeiro ponto da reta: obter $x = 0$:

$0x + 12y = 48 \Rightarrow y = 48/12 \Rightarrow y = 4$

Primeiro ponto da reta: $x = 0$; $y = 4$

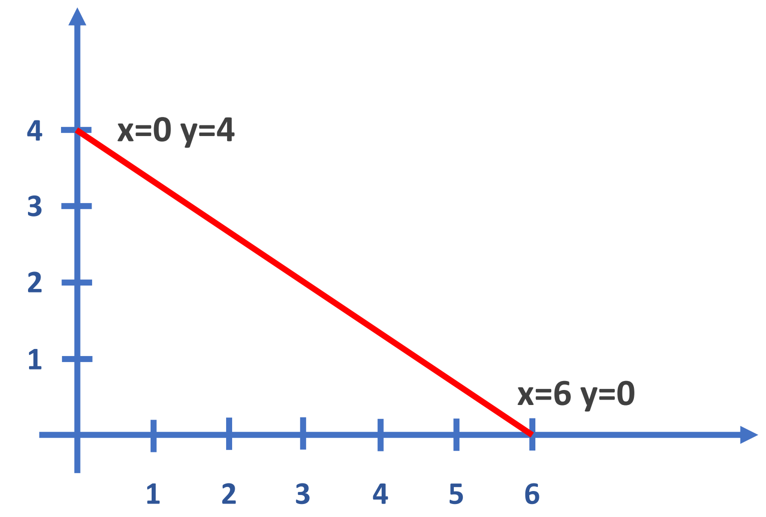
Representado pelas coordenadas (0,4)

Segundo ponto da reta: obter $y = 0$:

$8x + 0y = 48 \Rightarrow x = 48/8 \Rightarrow x = 6$

Segundo ponto da reta: $x = 6$; $y = 0$

Representado pelas coordenadas (6,0)



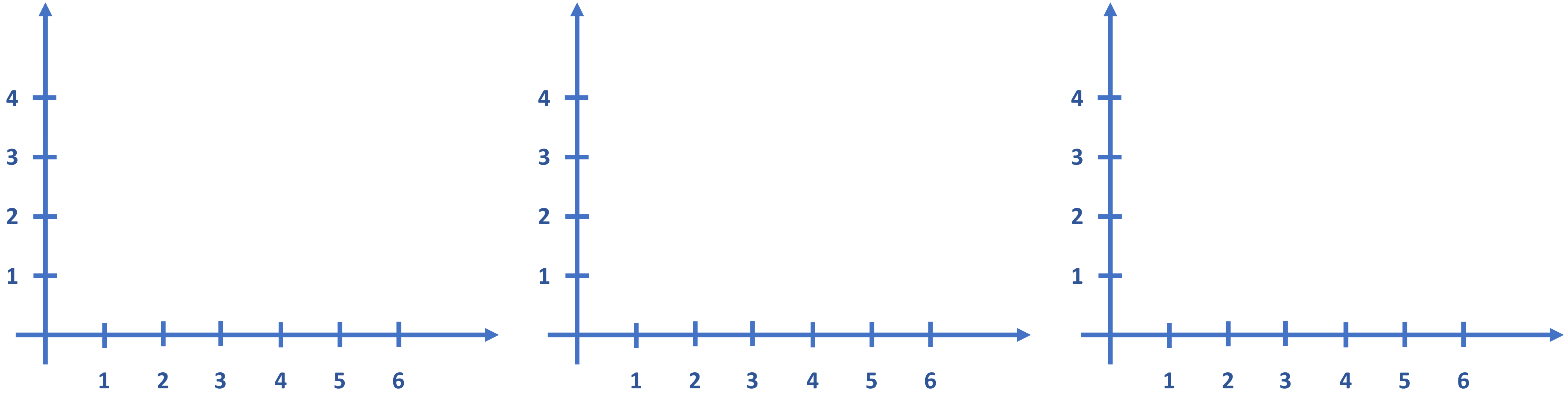
Exercícios

Determinar os pontos para x=0 e y=0 e plotar as retas que correspondem às seguintes funções:

$x + 2y = 6$

$x + 3y = 6$

$4x + 4y = 16$



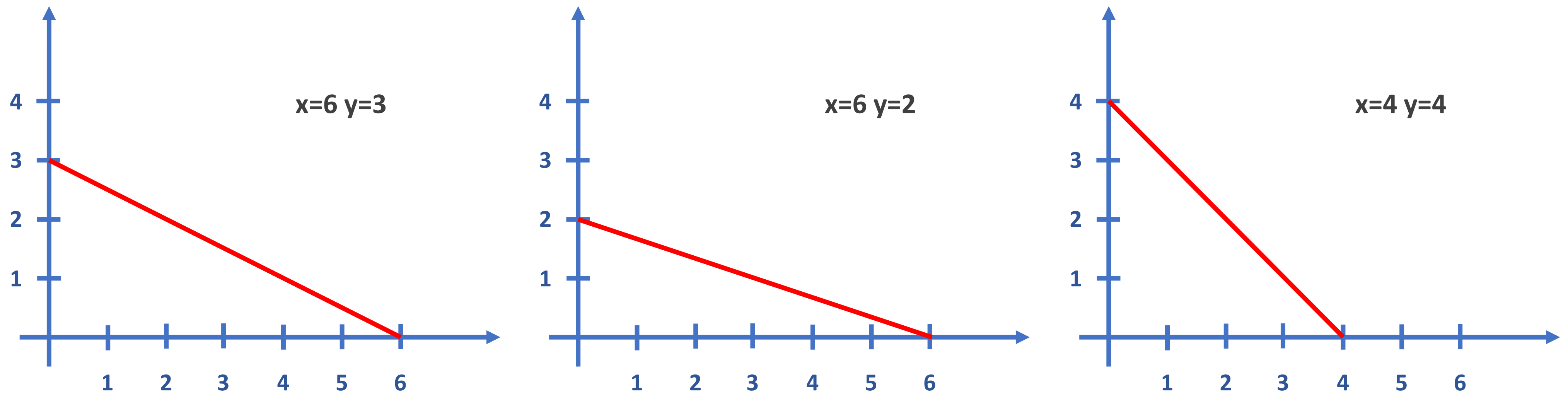
Exercícios

Determinar os pontos para x=0 e y=0 e plotar as retas que correspondem às seguintes funções:

x + 2y = 6 => x + 0 = 6 => **x = 6** | 0 + 2y = 6 => y = 6/2 => **y = 3**

x + 3y = 6 => x + 0 = 6 => **x = 6** | 0 + 3y = 6 => y = 6/3 => **y = 2**

4x + 4y = 16 => 4x + 0 = 16 => x = 16/4 => **x = 4** | 0 + 4y = 16 => y = 16/4 => **y = 4**



Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Solução de problemas de PL pelo método gráfico

aula 10

(aula 11 do AVA)

Objetivo

Apresentar as diretrizes para construção de modelos de Programação Linear, elaborando a função objetivo, as restrições do problema e sua condição de não negatividade.

Introdução

Quando um tomador de decisão estiver diante de um problema, pelo qual deverá ser formulado com um modelo de Programação Linear, há a necessidade de estar atento aos **parâmetros** e às **variáveis de decisão**.

Por **parâmetros** denominam-se os **valores já fixados que restringem a formulação do modelo**, estes valores **não podem ser alterados** e **devem fazer parte da resolução do problema**.

As **variáveis da decisão** são **grandezas que podem assumir diversos valores**, sendo que **existe uma certa combinação de valores que poderá maximizar ou minimizar a função objetivo**, de acordo com cada caso do problema.

A **solução do problema** é esta **combinação de valores, isto é, as variáveis de decisão aparecem tanto na função objetivo como nas restrições**.

Os **parâmetros** aparecem como coeficientes das variáveis de decisão ou como valores máximos ou mínimos das grandezas que constituem o modelo.

As **variáveis de decisão** são usualmente indicadas por letras como x, y, z … ou por letras indexadas x_1, x_2, x_3 etc. (SILVA et al., 2010, p.4)

Formulação da função objetivo e das restrições

Na formulação de um problema de maximização ou minimização é possível identificar os **parâmetros**, as **variáveis de decisão** e as **restrições**. Exemplo:

Análise da produção dos itens A e B, produzidos nas máquinas M_1 e M_2.

Devido à produção de outros itens a M_1 tem 24 horas de ociosidade para produzir os itens A e B e a M_2 tem 16 horas de ociosidade para produzir os mesmos itens.

Para produzir um item A são necessárias 4 horas em M_1 e M_2.

Para produzir um item B são necessárias 6 horas em M_1 e 2 horas em M_2.

O item A proporcionar lucro de R$ 80,00 e o item B proporciona lucro de R$ 60,00.

Para o item B é de 3 unidades e a demanda para o item A é ilimitada.

Quantos itens A e B devem ser produzidos para maximizar o lucro conforme as condições apresentadas?

1º passo: Elaborar a matriz de decisão

Itens	Horas gastas em M1	Horas gastas em M2	Demanda máxima	Lucro unitário (R$)
A	4	4	ilimitada	80
B	6	2	3	60
Horas disponíveis	24	16		

Formulação da função objetivo

Função objetivo é uma expressão formada por uma combinação linear de variáveis de decisão.

A quantidade dos itens **A** e **B** são chamadas de **x** e **y**.

Portanto x e y são os valores procurados que fornacerão a solução do problema.

O objetivo é **maximizar** o lucro na venda de **x** unidades de **A** e **y** unidades de **B**, ou seja, maximizar o resultado numérico da seguinte expressão:

80x + 60y

Pois, cada unidade de **A** gera um lucro de R$ **80**,00 e cadas unidade de **B** gera um lucro de R$ **60**,00.

Portanto a **função objetivo** pode ser formulada conforme segue:

maximizar 80x + 60y

Formulação das restrições

As restrições do problema são:

Não se pode gastar mais de **24** horas na máquina $\mathbf{M_1}$ e mais de **16** horas na máquina $\mathbf{M_2}$.

Cada unidade do item **A** consome **4** horas e cada unidade do item **B** consome **6** horas em $\mathbf{M_1}$. Logo:

$\mathbf{M_1 = 4x + 6y}$

Cada unidade do item **A** consome **4** horas e cada unidade do item **B** consome **2** horas em $\mathbf{M_2}$. Logo:

$\mathbf{M_2 = 4x + 2y}$

Reescrevendo as restrições (levando-se em consta a disponibilidade de cada máquina):

$\mathbf{4x + 6y \leq 24}$

$\mathbf{4x + 2y \leq 16}$

A demanda do item **B** é de **3** unidades e do item **A** é ilimitada. Logo:

$\mathbf{y \leq 3}$

Visto que o item **A** não apresenta restrição, a expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$\mathbf{0x + 1y \leq 3}$

As condições de não negatividade definem que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos. (Não existe "produção negativa"). Logo:

$\mathbf{x \geq 0; y \geq 0}$

Formulação completa das restrições:

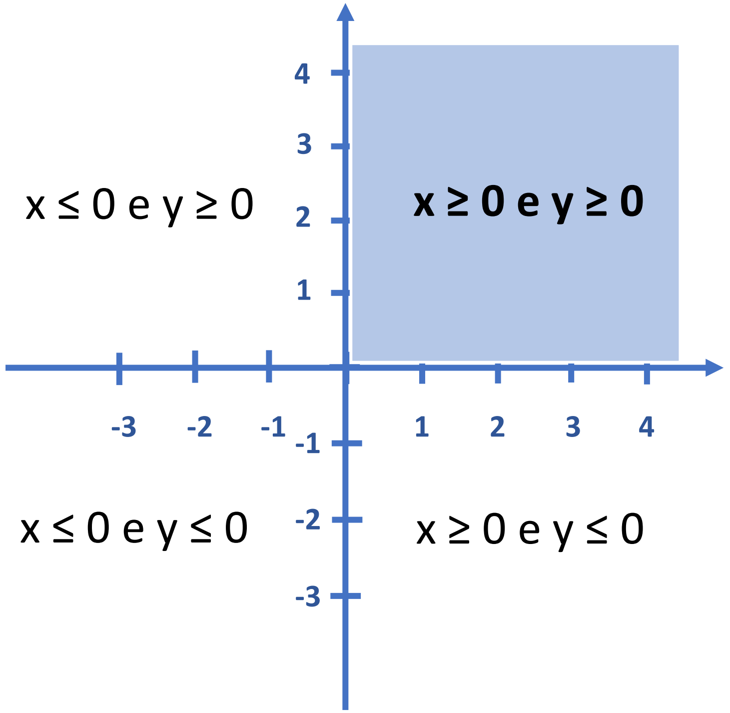
$\mathbf{4x + 6y \leq 24}$

$\mathbf{4x + 2y \leq 16}$

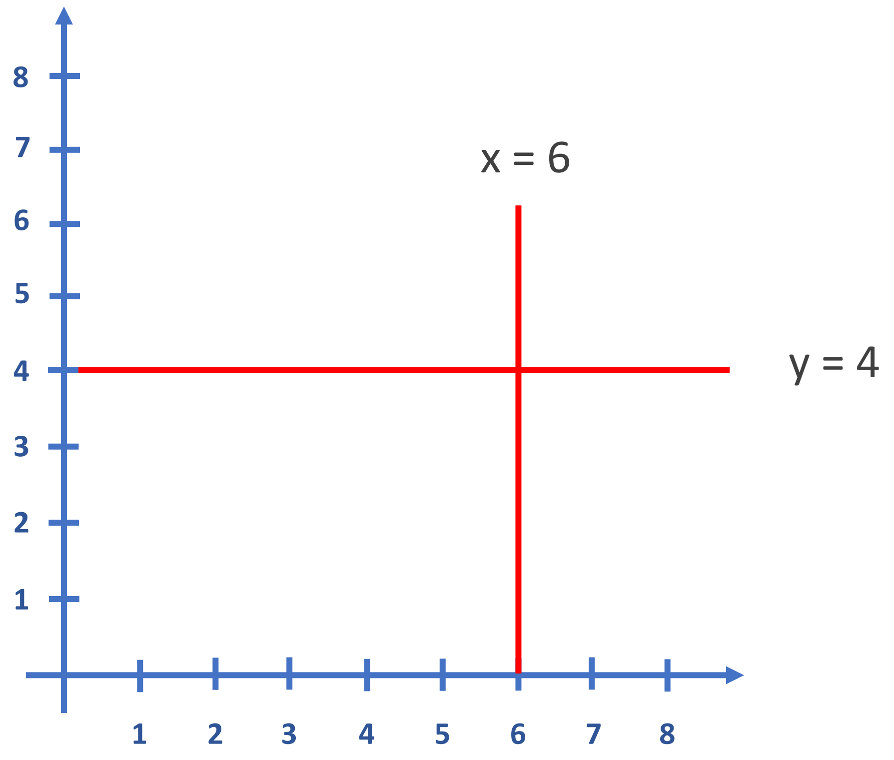
$\mathbf{0x + 1y \leq 3}$

$\mathbf{x \geq 0; y \geq 0}$

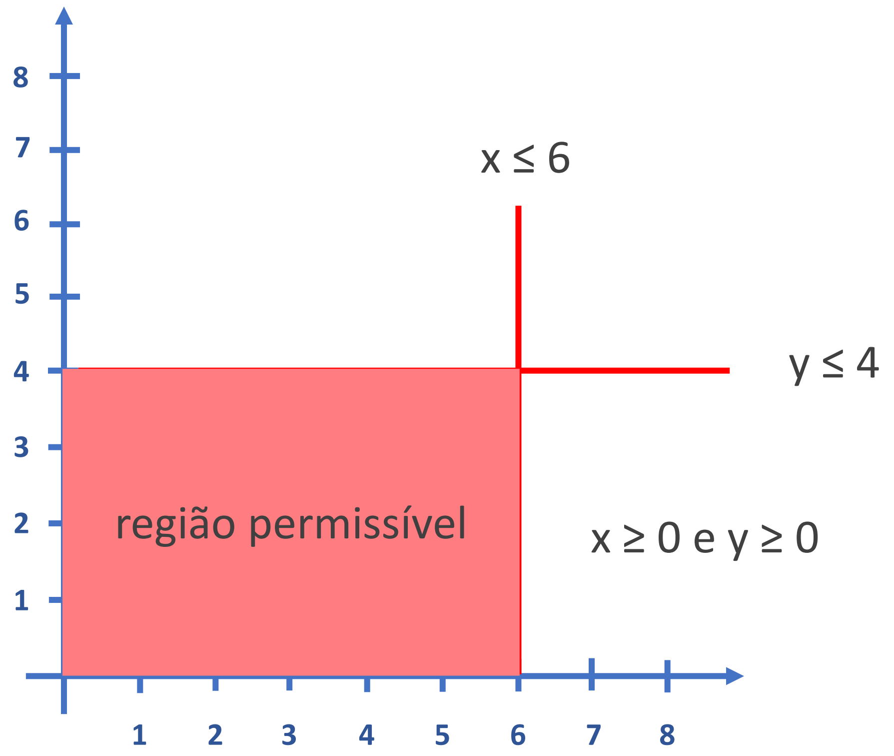
Não negatividade



Formulação das restrições



Formulação das restrições



Formulação das restrições

Cada uma das restrições será representada por uma reta no sistema de eixos ortogonais e pela definição de uma região permissível de soluções.

A análise da região final, comum a todas as restrições, dará a solução final do problema.

1ª restrição: M1 tem 24 horas de ociosidade para produzir os itens A e B

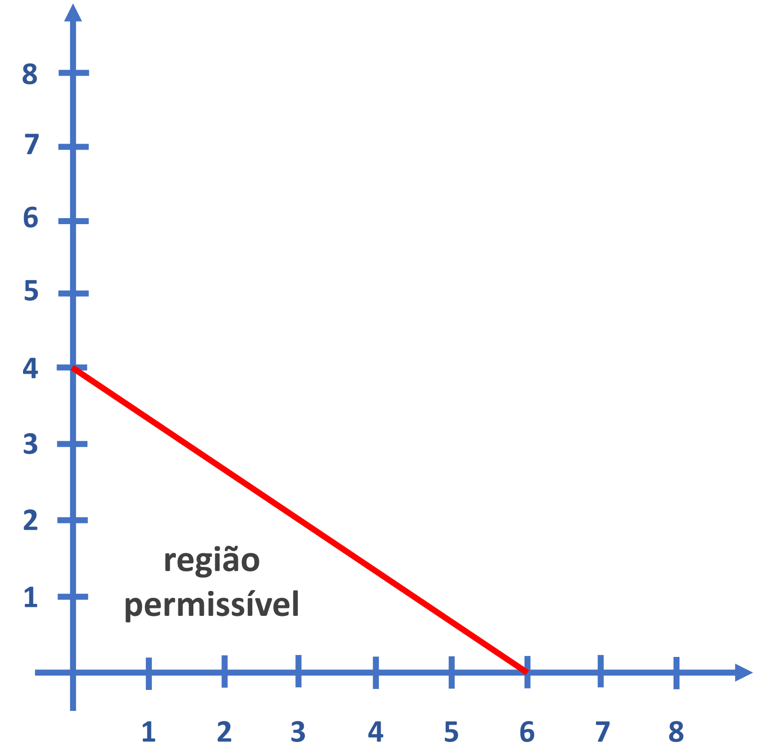
Portanto: $4x + 6y \leq 24$

Primeiro passo: transformar a inequação em uma equação:

$4x + 6y = 24$

Se $y = 0 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow \mathbf{x = 6}$

Se $x = 0 \Rightarrow 6y = 24 \Rightarrow \mathbf{y = 4}$



Formulação das restrições

2ª restrição: M2 tem 16 horas de ociosidade para produzir os itens A e B

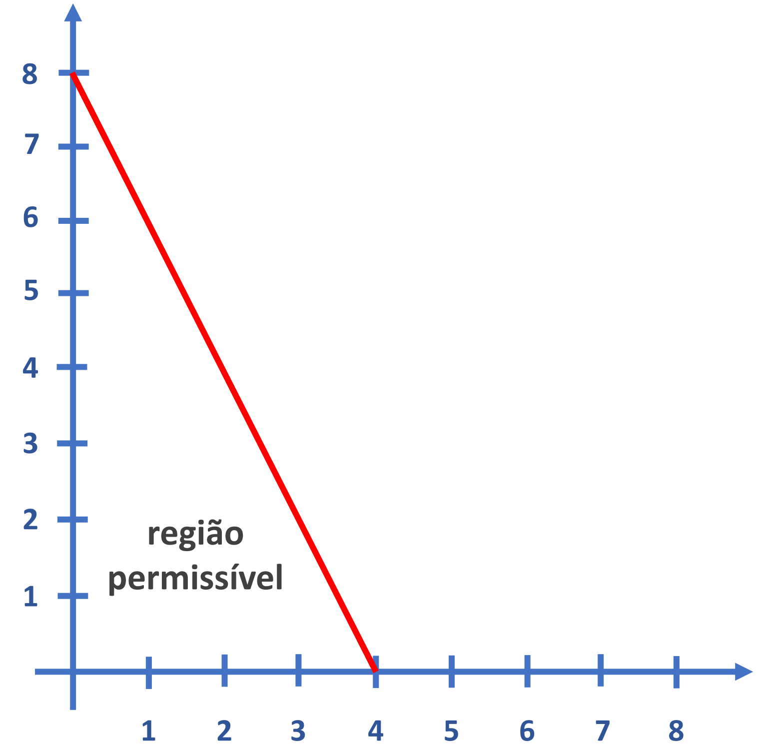
Portanto: $4x + 2y \leq 16$

Primeiro passo: transformar a inequação em uma equação:

$4x + 2y = 16$

Se $y = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow$ **$x = 4$**

Se $x = 0 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow$ **$y = 8$**



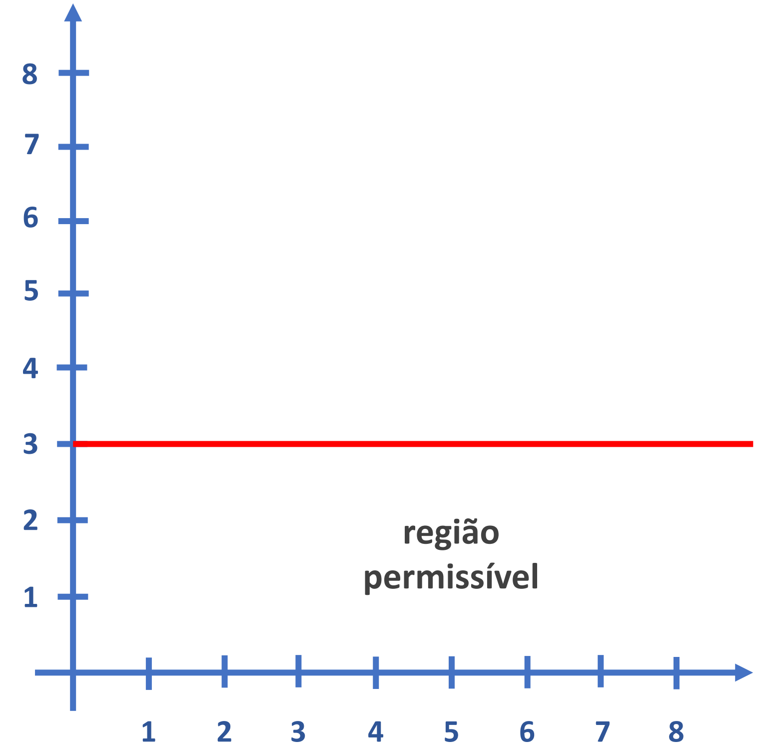
Formulação das restrições

3ª restrição: A demanda do item B é de 3 unidades e do item A é ilimitada.

Portanto: $0x + 1y \leq 3$

Primeiro passo: transformar a inequação em uma equação:

$0x + 1y = 3 \Rightarrow \mathbf{y = 3}$



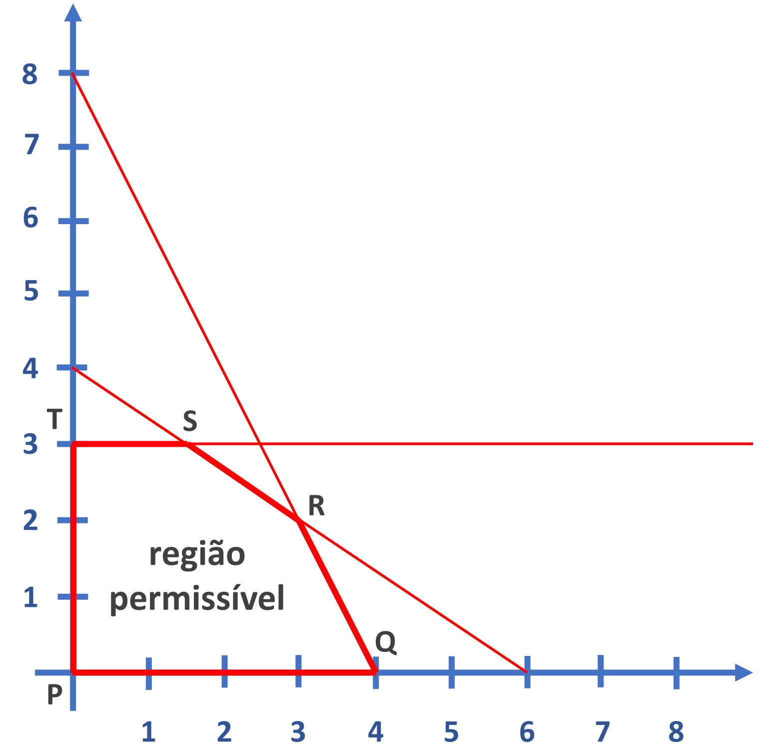
Formulação das restrições

As representações gráficas das três restrições podem ser colocadas em um só gráfico, como mostrado a seguir.

As três restrições delimitam agora uma região comum, que é o polígono PQRST.

Todos os pontos internos a essa região obedecem simultaneamente a todas as restrições.

Os pontos PQRST são chamados de **pontos extremos da região permissível**.



Formulação das restrições

A seguir deve-se determinar as coordenadas dos pontos extremos:

P (x=0; y=0) é a origem dos pontos

Q (x=4; y=0)

T (x=0; y=3)

S => y=3

Calcular a coordenada x de S:

$4x + 6y = 24$

$4x + 6(3) = 24$

$4x = 6$

$x = 6/4 \Rightarrow x = 3/2$

R é o encontro das retas $4x + 6y = 24$ e $4x + 2y = 16$.

O sistema de equações lineares fornecerá os valore de x e y:

$4x + 6y = 24$

$4x + 2y = 16$

Subtraindo as equações temos:

$(4x - 4x) + (6y - 2y) = 24 - 16$

$0 + 4y = 8$

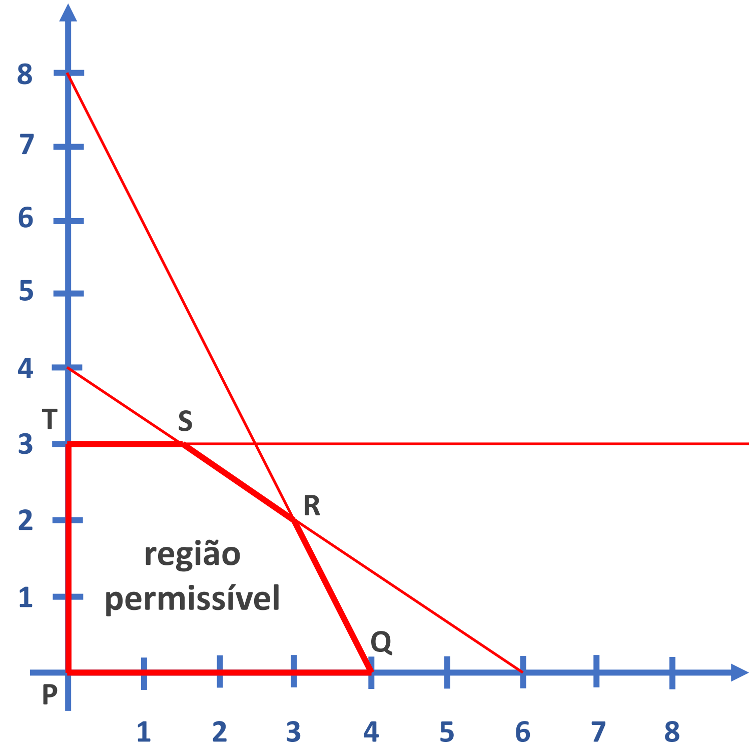
$x = 2$

Substituindo y = 2 em qualquer uma das equações temos:

$4x + 6(2) = 24$

$4x = 12$

$x = 12/4 \Rightarrow x = 3$



Formulação das restrições

Propriedade dos pontos extremos:

A solução ótima ao problema está em um dos pontos extremos da região permissível.

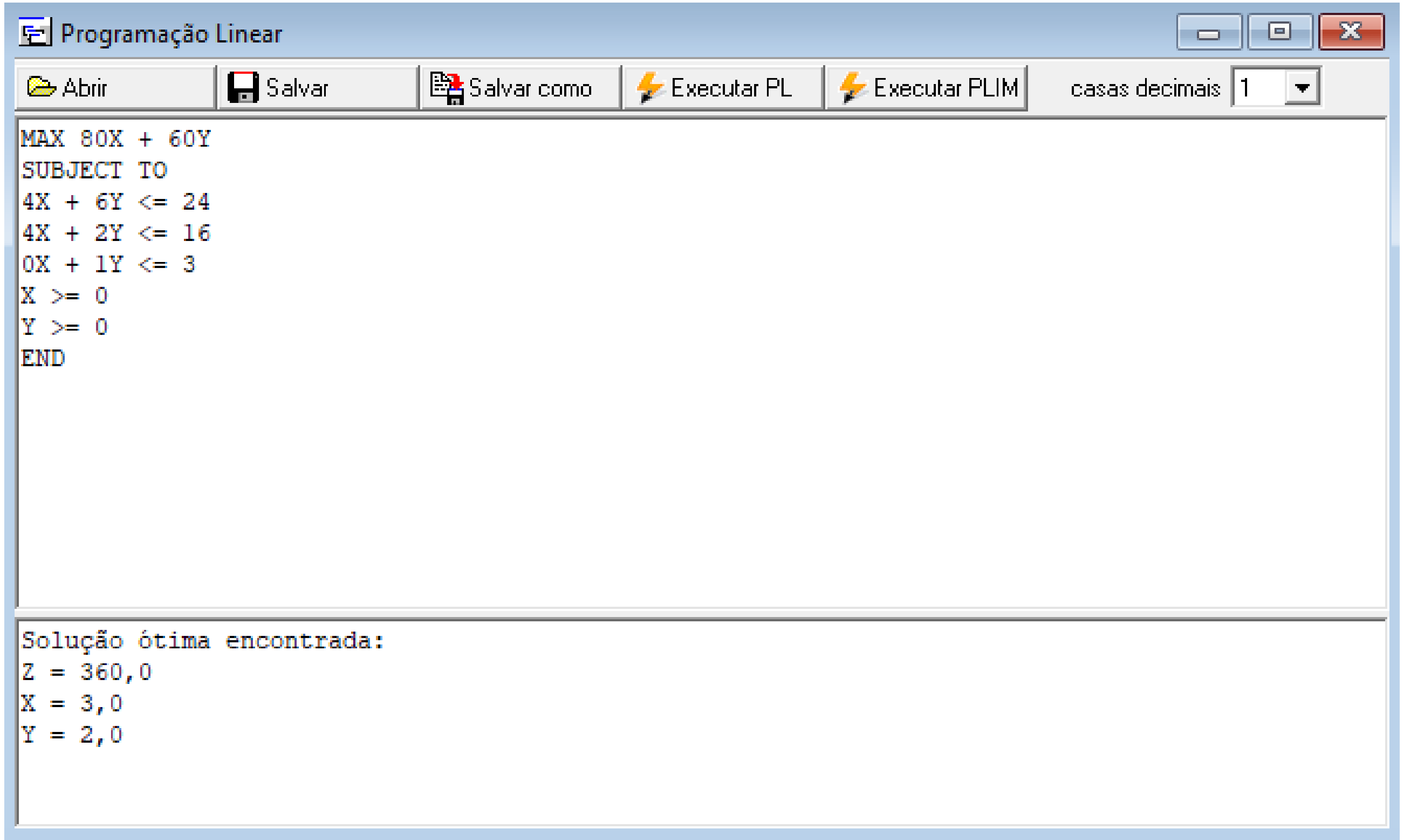
Portanto, basta substituir as coordenadas de todos os pontos possíveis na função objetivo e verificar qual delas fornece o **valor máximo.**

Encontraremos a solução na tabela a seguir:

ponto extremo	valor de x	valor de y	função objetivo 80x + 60 y
P	0	0	0
Q	4	0	320
R	**3**	**2**	**360**
S	3/2	3	300
T	0	3	180

O ponto extremo **R** é, portanto, a solução de nosso problema de maximização, com **x = 3** e **y = 2**.

Utilizando o Otimiza para resolver problemas de PL



Exercício

Uma indústria de móveis produz, entre outros artigos, dois tipos de conjuntos para sala de jantar: o conjunto A e o conjunto B.

A empresa está preparando sua programação semanal de produção para os dois conjuntos.

Sabe-se que, embora não haja restrições no tocante à demanda do conjunto A (dentro das limitações de produção atuais) para o conjunto B dificilmente a demanda semanal ultrapassará 8 unidades.

A fabricação dos dois conjuntos é dividida em dois grandes blocos de operações: preparação (consistindo do corte da madeira e preparação para montagem) e acabamento (consistindo da montagem dos conjuntos e acabamento final).

Em face dos outros produtos existentes, a empresa não poderá alocar mais de 100 horas para a preparação e 108 horas para o acabamento durante a semana. O conjunto A exige 5 horas para a preparação e 9 horas para o acabamento, enquanto que para o conjunto B esses números são de 10 e 6 horas, respectivamente.

A empresa deve decidir quantas unidades de cada conjunto devem ser fabricadas, levando em conta que o conjunto A fornece um lucro unitário de R$ 4.000,00 enquanto que para o conjunto B o lucro unitário é de R$ 5.000,00.

Exercício

1º passo - Reuna os dados em uma **tabela**.

Conjunto	Horas Preparação	Horas Acabamento	Demanda Máxima	Lucro Unitário
Tempo disponível				

2º passo - Defina as **variáveis de decisão** (Exemplo: **x** para conjunto A e **y** para conjunto B).

3º passo - Estabeleça a **função objetivo**.

4º passo - Considerar a restrição: total de horas de **preparação** para os dois conjuntos e o tempo total disponível para etapa preparação.

5º passo - Considerar a restrição: total de horas de **acabamento** para os dois conjuntos e o tempo total disponível para etapa acabamento.

6º passo - Considerar a restrição: conjunto A não apresenta restrição quanto à **demanda** e conjunto B apresenta demanda que não pode ultrapassar 8 unidades semanais.

7º passo - Considerar as chamadas condições de **não negatividade**, segundo as quais as variáveis de decisão só podem assumir valores positivos ou nulos (zero).

Resposta

Exercício

1º passo - Reuna os dados em uma tabela.

Conjunto	Horas Preparação	Horas Acabamento	Demanda Máxima	Lucro Unitário
A	5	9	não há	4000
B	10	6	8	5000
Tempo disponível	100	108		

2º passo - Defina as variáveis de decisão.

x = número de unidades do conjunto A

y = número de unidades do conjunto B

Exercício

3º passo - Estabeleça a função objetivo.

Visto que cada unidade de conjunto A contribui com R$ 4000,00 de lucro e cada unidade do conjunto B contribui com R$ 5000,00, o lucro total derivado de x unidades do primeiro conjunto e y unidades do segundo conjunto será dado por:

4000x + 5000y

Expressão esta que desejamos maximizar. Portanto:

MAX 4000x + 5000y

4º passo - Considerar a restrição: total de horas de preparação para os dois conjuntos e o tempo total disponível para etapa preparação:

x (conjunto A) = 5

y (conjunto B) = 10

total de horas para preparação: 100

5x + 10y ≤ 100

Exercício

5º passo - Considerar a restrição: total de horas de acabamento para os dois conjuntos e o tempo total disponível para etapa acabamento:

x (conjunto A) = 9

y (conjunto B) = 6

total de horas para acabamento: 108

$9x + 6y \leq 108$

6º passo - Considerar a restrição: conjunto A não apresenta restrição quanto à demanda e conjunto B apresenta demanda que não pode ultrapassar 8 unidades semanais:

x (conjunto A) = 0

y (conjunto B) = 8

$0x + 1y \leq 8$

7º passo - Considerar as chamadas condições de não negatividade, segundo as quais as variáveis de decisão só podem assumir valores positivos ou nulos (zero):

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Exercício

O problema da indústria de móveis, segundo um modelo de programação linear é o seguinte:

MAX 4000x + 5000y
SUBJECT TO
5x + 10y <= 100
9x + 6y <= 108
0x + 1y <= 8
x >= 0
y >= 0
END

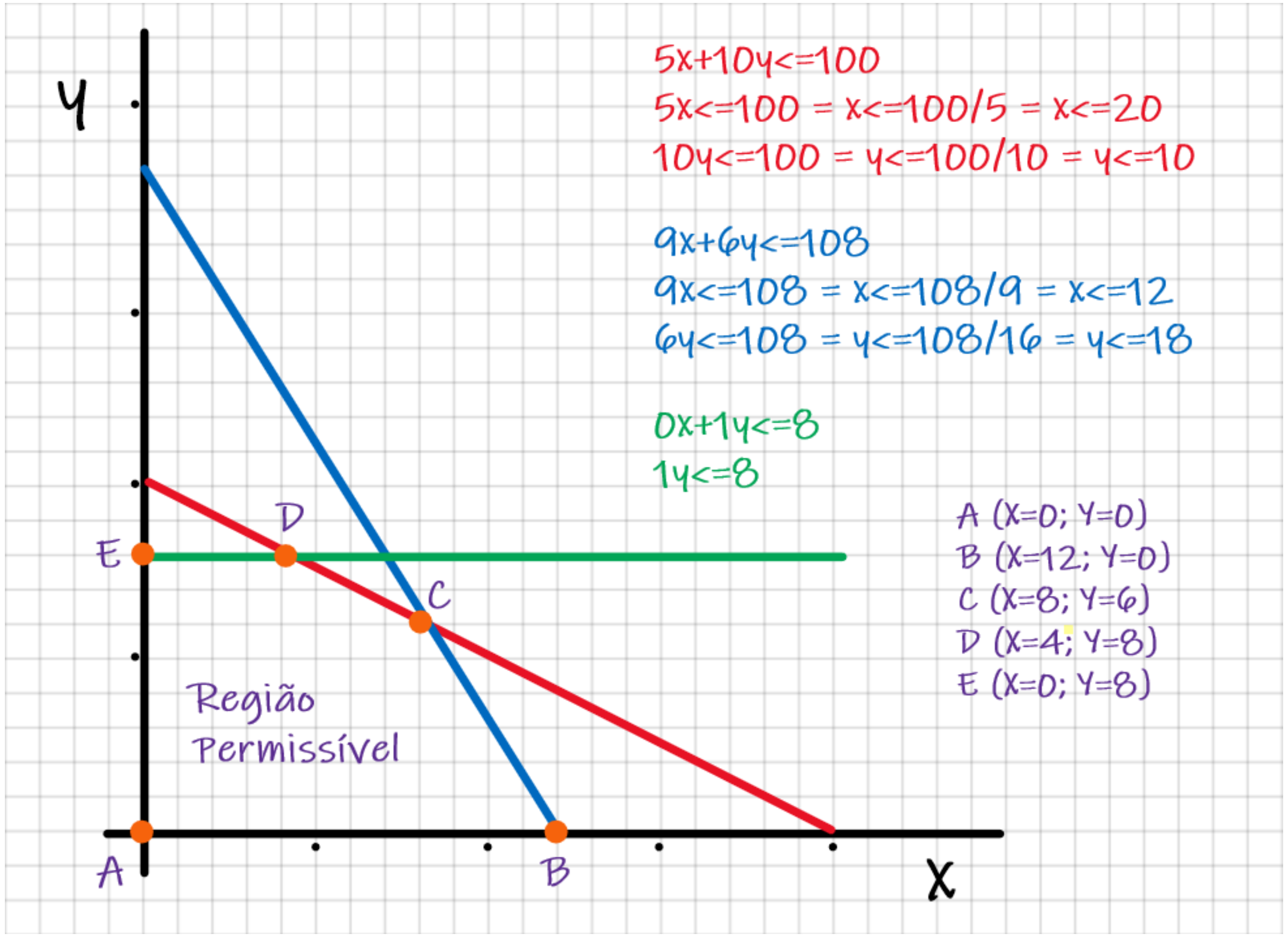
Solução ótima encontrada:

Z = 62000

x = 8

y = 6

Exercício


Y
X
5x+10y<=100
5x<=100 = x<=100/5 = x<=20
10y<=100 = y<=100/10 = y<=10
9x+6y<=108
9x<=108 = x<=108/9 = x<=12
6y<=108 = y<=108/16 = y<=18
0x+1y<=8
1y<=8
A (X=0; Y=0)
B (X=12; Y=0)
C (X=8; Y=6)
D (X=4; Y=8)
E (X=0; Y=8)
A
B
C
D
E
Região
Permissível

Exercício

Propriedade dos pontos extremos:

A solução ótima ao problema está em um dos pontos extremos da região permissível.

Portanto, basta substituir as coordenadas de todos os pontos possíveis na função objetivo e verificar qual delas fornece o **valor máximo.**

Encontraremos a solução na tabela a seguir:

ponto extremo	valor de x	valor de y	função objetivo 4000x + 5000 y
A	0	0	0
B	12	0	48000
C	**8**	**6**	**62000**
D	4	8	56000
E	0	8	40000

O ponto extremo **C** é, portanto, a solução de nosso problema de maximização, com **x = 8** e **y = 6**.

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Solução de problemas de PL pelo método analítico

Formulação da função objetivo e das restrições

Análise da produção dos itens A e B, produzidos nas máquinas M_1 e M_2.

Devido à produção de outros itens a M_1 tem 24 horas de ociosidade para produzir os itens A e B e a M_2 tem 16 horas de ociosidade para produzir os mesmos itens.

Para produzir um item A são necessárias 4 horas em M_1 e M_2.

Para produzir um item B são necessárias 6 horas em M_1 e 2 horas em M_2.

O item A proporcionar lucro de R$ 80,00 e o item B proporciona lucro de R$ 60,00.

Para o item B é de 3 unidades e a demanda para o item A é ilimitada.

Quantos itens A e B devem ser produzidos para maximizar o lucro conforme as condições apresentadas?

1º passo: Elaborar a matriz de decisão:

Itens	Horas gastas em M1	Horas gastas em M2	Demanda máxima	Lucro unitário (R$)
A	4	4	ilimitada	80
B	6	2	3	60
Horas disponíveis	24	16		

2º passo: Formulação da função objetivo:

max 80x + 60y

Formulação das restrições

Cada unidade do item **A** consome **4** horas e cada unidade do item **B** consome **6** horas em $\mathbf{M_1}$. Logo:

$\mathbf{M_1 = 4x + 6y}$

Cada unidade do item **A** consome **4** horas e cada unidade do item **B** consome **2** horas em $\mathbf{M_2}$. Logo:

$\mathbf{M_2 = 4x + 2y}$

Não se pode gastar mais de **24** horas na máquina $\mathbf{M_1}$ e mais de **16** horas na máquina $\mathbf{M_2}$.

Reescrevendo as restrições (levando-se em consta a disponibilidade de cada máquina):

$\mathbf{4x + 6y \leq 24}$

$\mathbf{4x + 2y \leq 16}$

A demanda do item **B** é de **3** unidades e do item **A** é ilimitada. Logo:

$\mathbf{y \leq 3}$

Visto que o item **A** não apresenta restrição, a expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$\mathbf{0x + 1y \leq 3}$

As condições de não negatividade definem que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos. (Não existe "produção negativa"). Logo:

$\mathbf{x \geq 0; y \geq 0}$

Formulação completa das restrições:

$\mathbf{4x + 6y \leq 24}$

$\mathbf{4x + 2y \leq 16}$

$\mathbf{0x + 1y \leq 3}$

$\mathbf{x \geq 0; y \geq 0}$

Solução pelo método analítico

max $80x + 60y$

$4x + 6y \leq 24$

$4x + 2y \leq 16$

$0x + 1y \leq 3$

$x \geq 0; y \geq 0$

Transformar as inequações (≤) em equações (=):

$4x + 6y = 24$

$4x + 2y = 16$

Resolver o sistema de equações lineares:

$4x + 6y = 24$

$\underline{-4x - 2y = -16}$ (multiplicamos por -1)

$4y = 8 \rightarrow y = 8/4 \rightarrow$ **$y = 2$** (satisfaz também a restrição $y \leq 3$ e $y \geq 0$)

$4x + 6.(2) = 24$

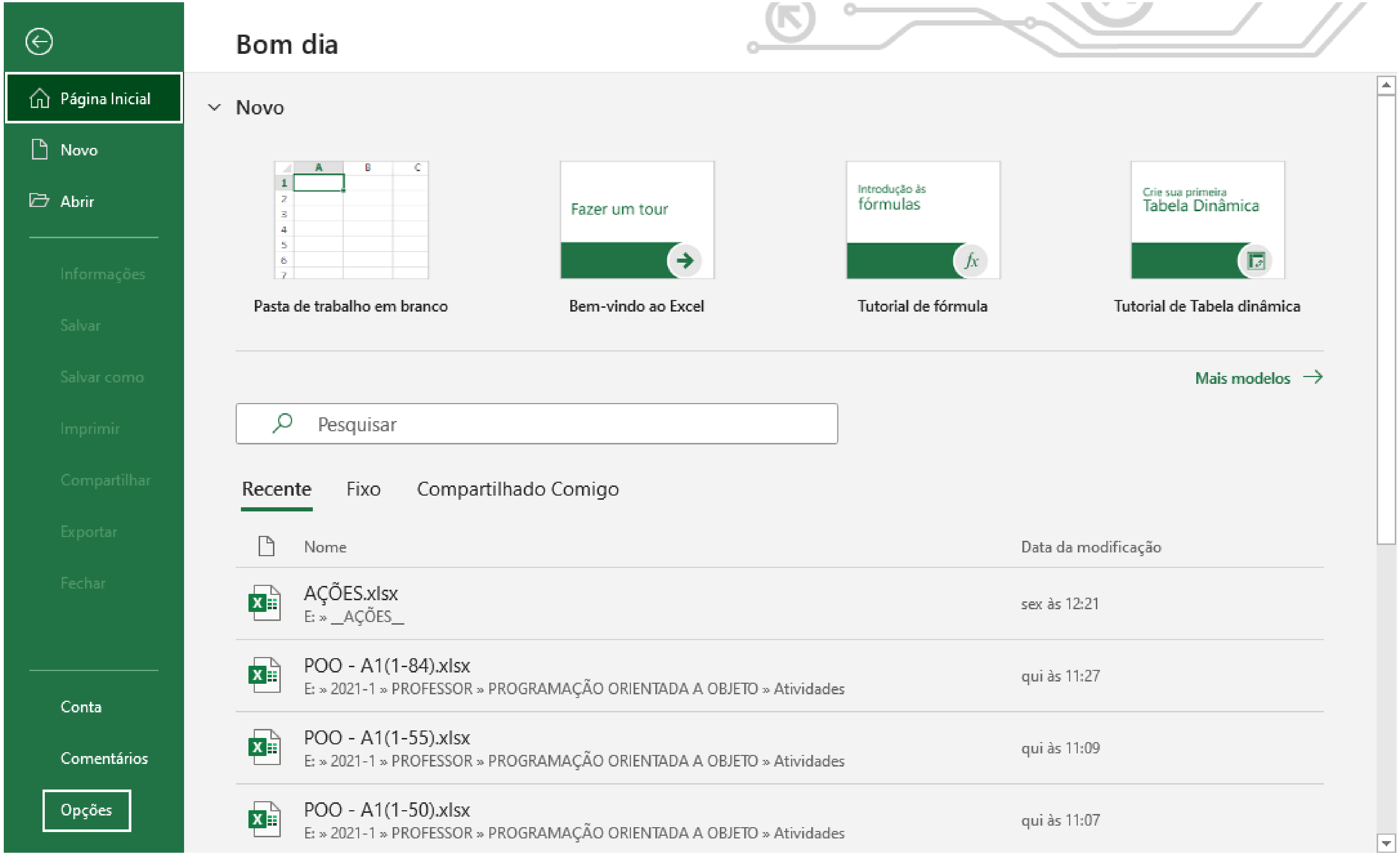
$4x + 12 = 24 \rightarrow 4x = 24 - 12 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 12/4 \rightarrow$ **$x = 3$** (satisfaz também a restrição $x \geq 0$)

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

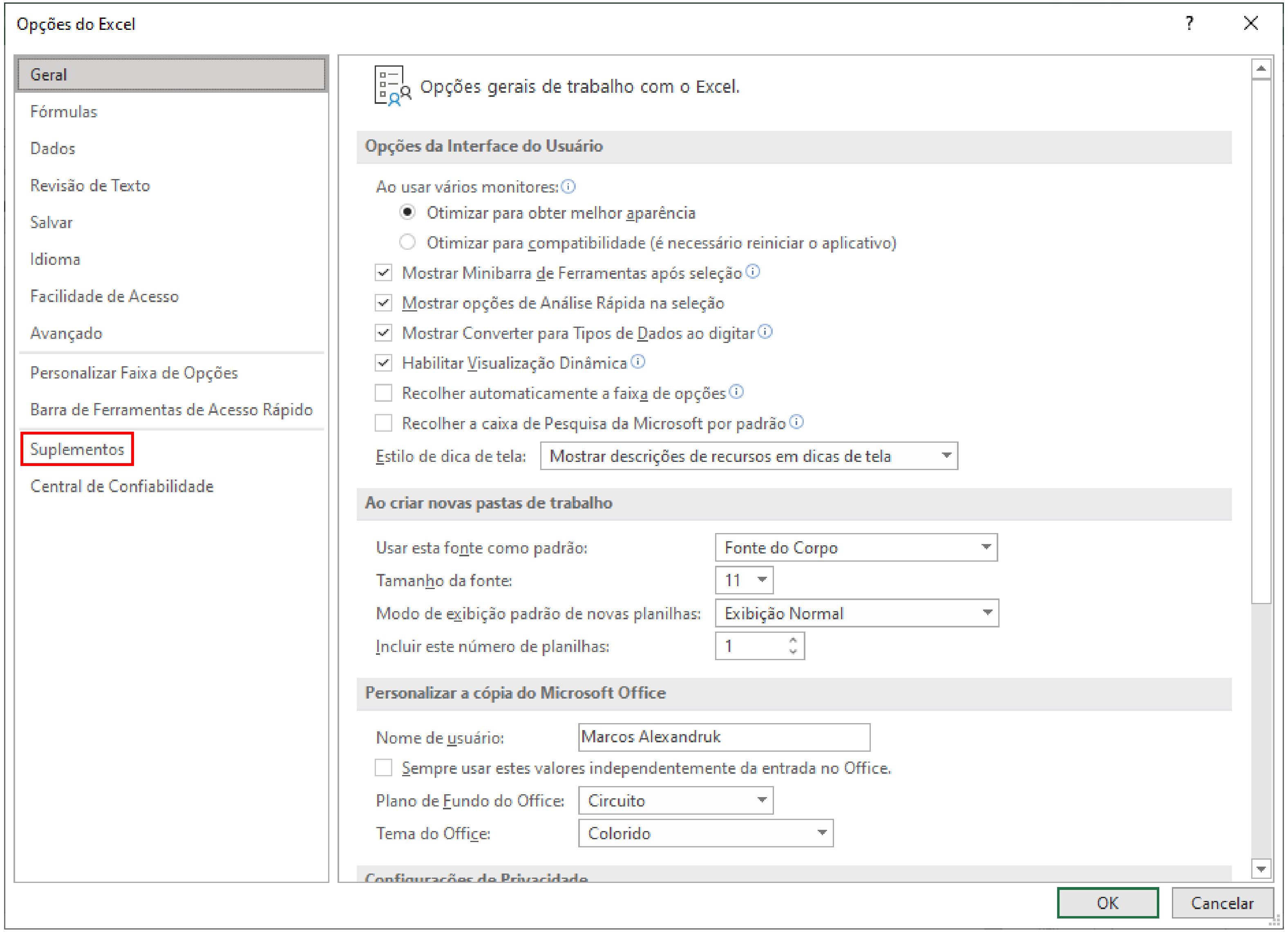
https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

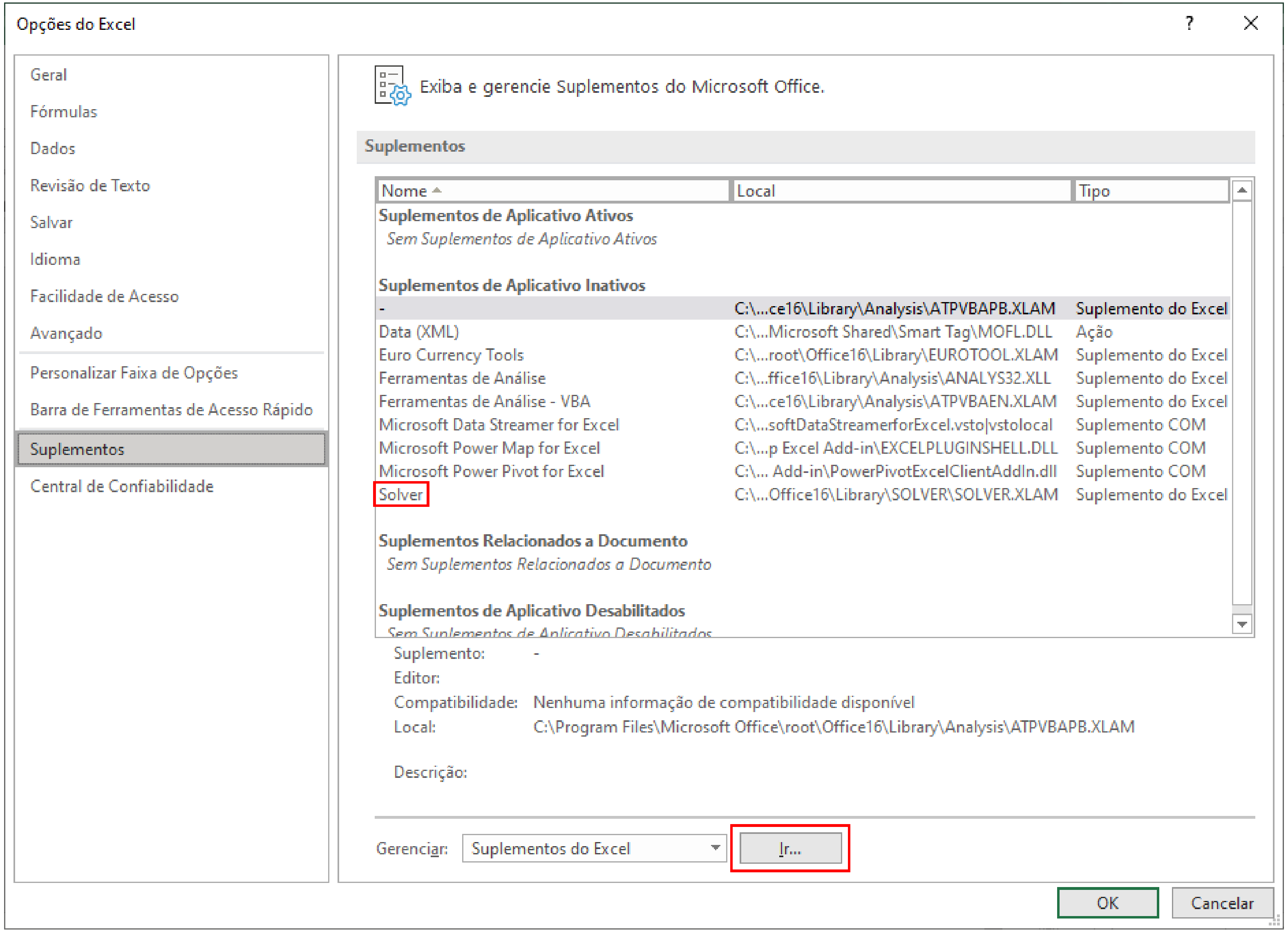
Excel - Solver



Clique em Opções

Clique em Suplementos

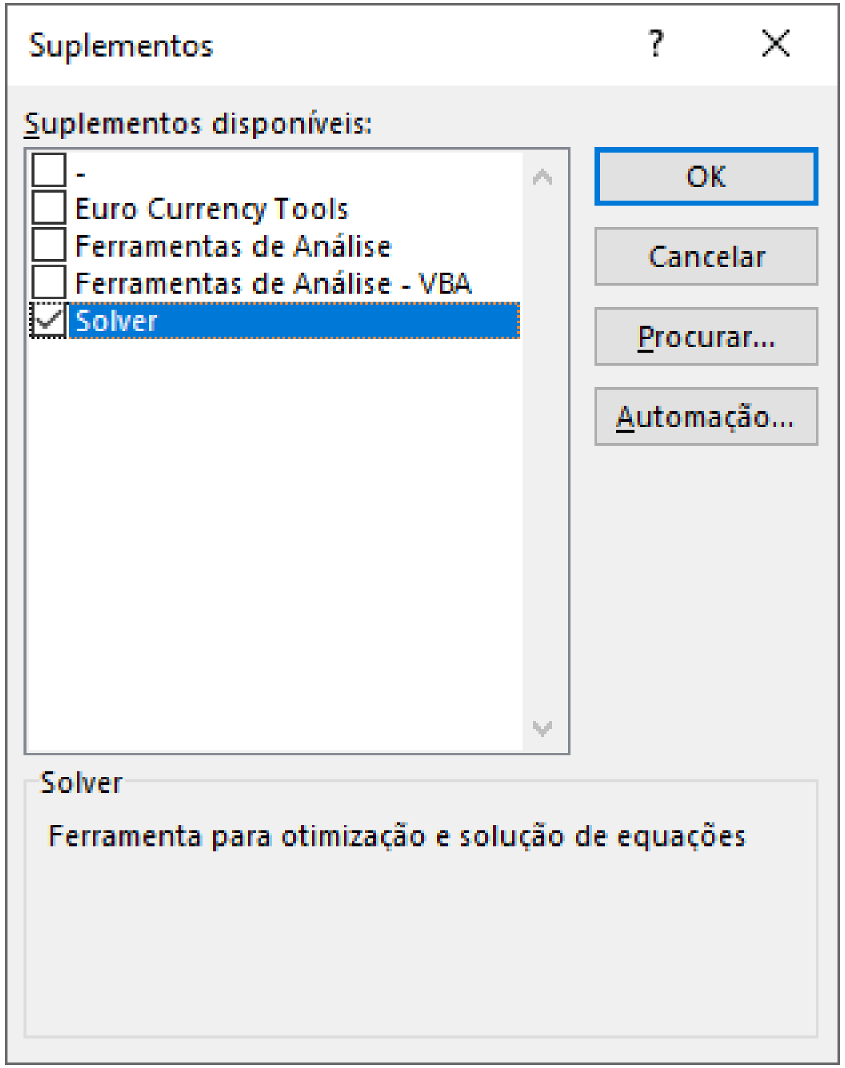


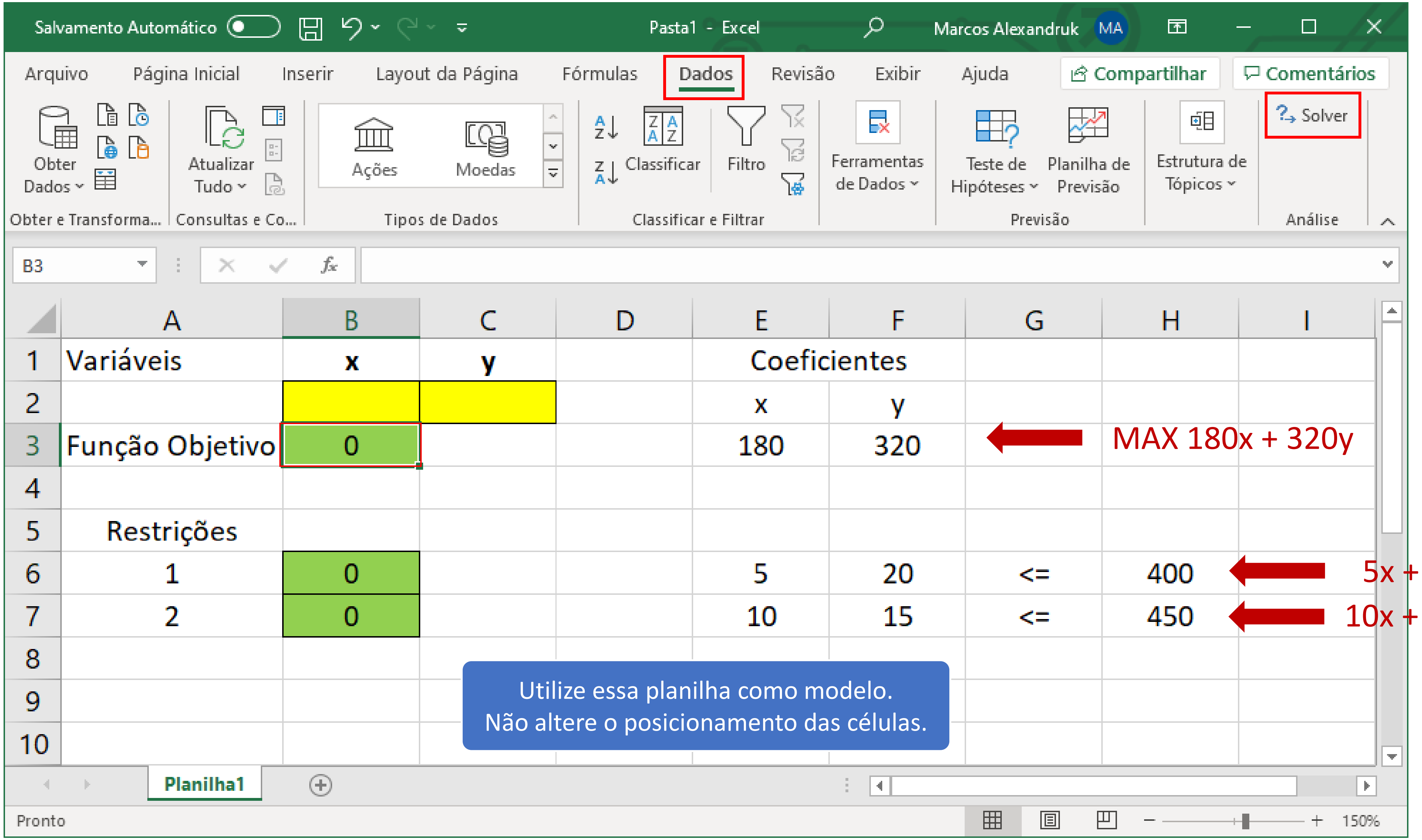


Selecione Solver

Clique em Ir ...

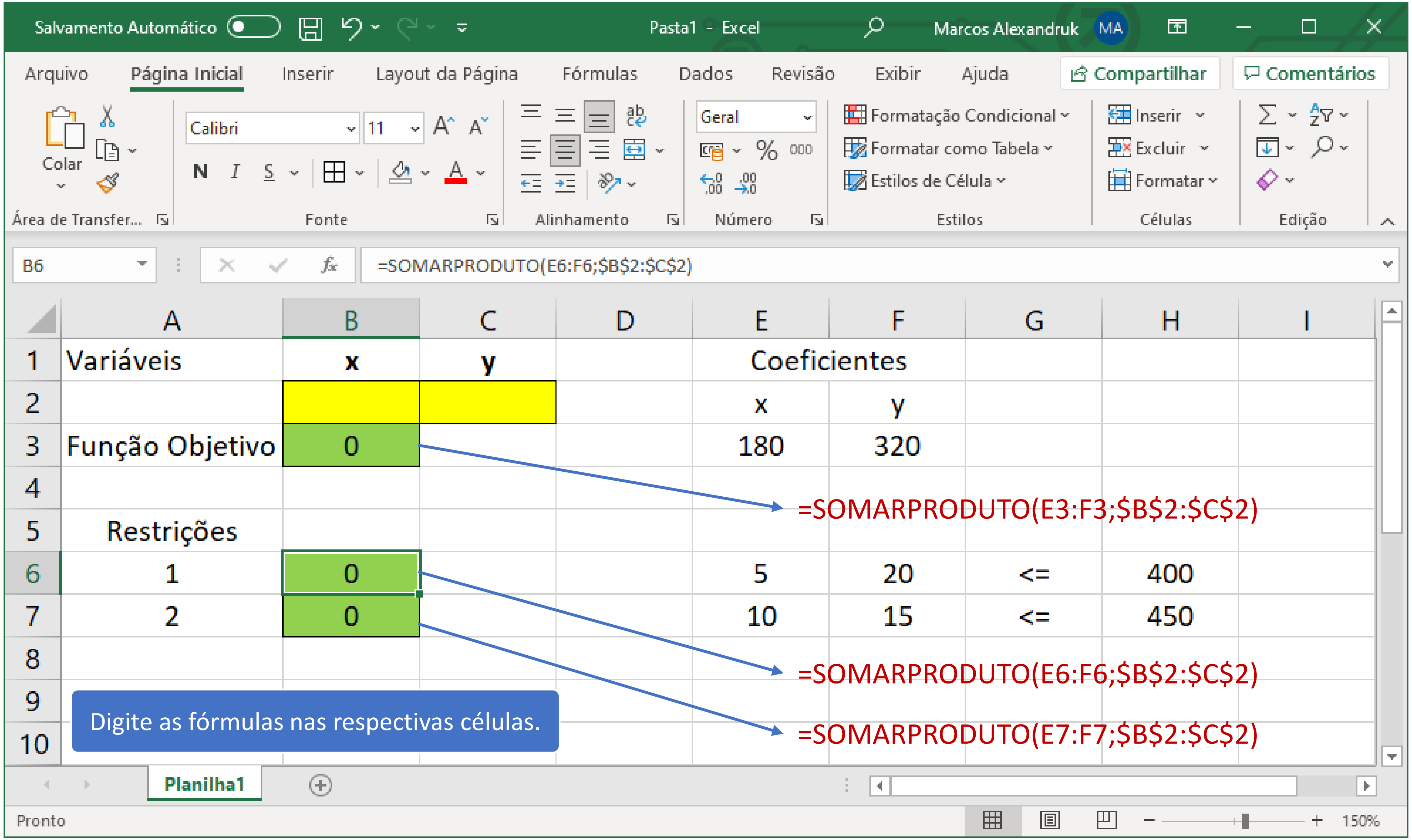
Selecione Solver



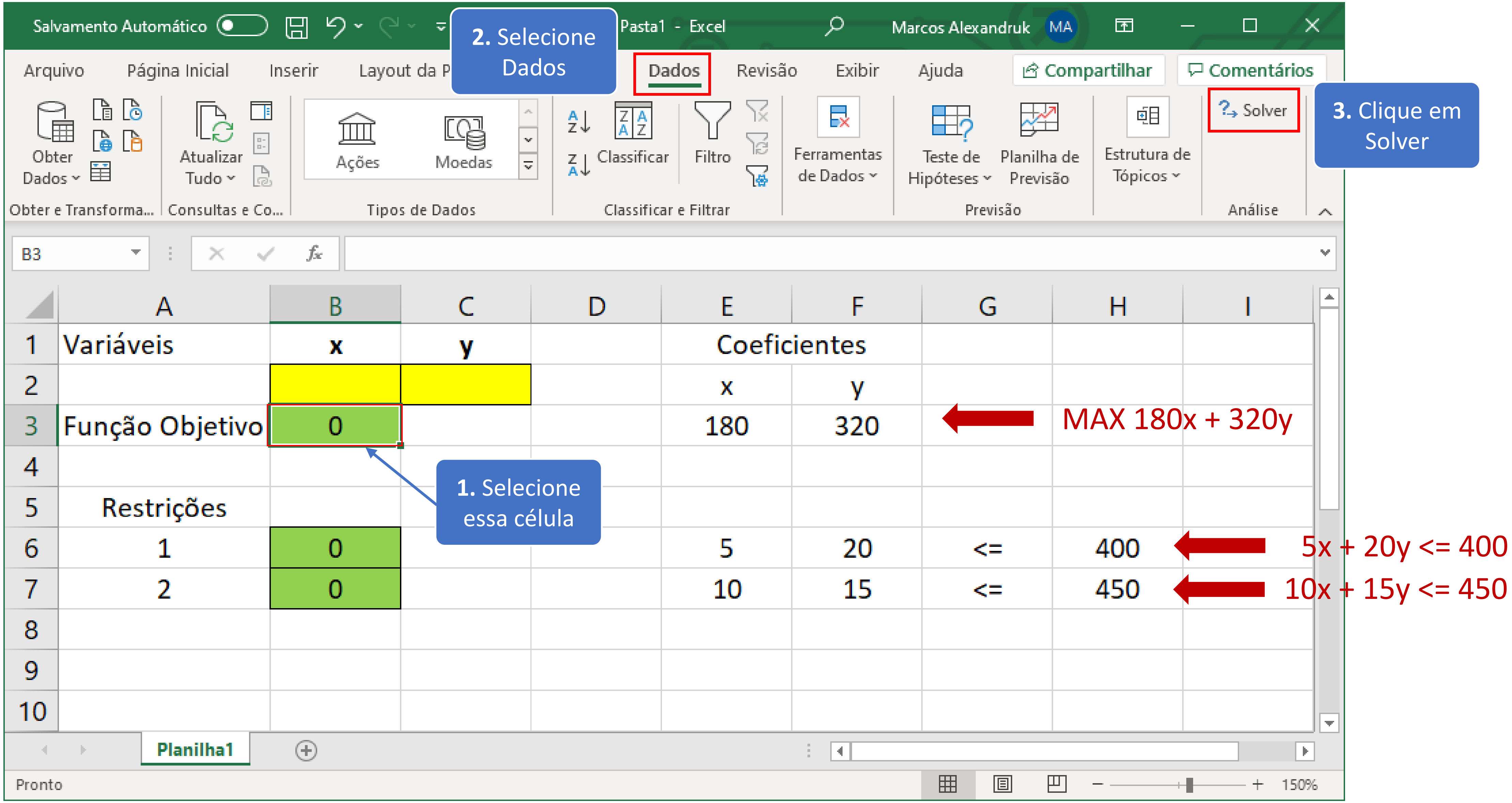


5x + 20y <= 400

10x + 15y <= 450


Salvamento Automático
Pasta1 - Excel
Marcos Alexandruk
Arquivo
Página Inicial
Inserir
Layout da Página
Fórmulas
Dados
Revisão
Exibir
Ajuda
Compartilhar
Comentários
B6
=SOMARPRODUTO(E6:F6;$B$2:$C$2)
Variáveis
x
y
Coeficientes
x
y
Função Objetivo
0
180
320
=SOMARPRODUTO(E3:F3;$B$2:$C$2)
Restrições
1
0
5
20
<=
400
2
0
10
15
<=
450
=SOMARPRODUTO(E6:F6;$B$2:$C$2)
Digite as fórmulas nas respectivas células.
=SOMARPRODUTO(E7:F7;$B$2:$C$2)
Planilha1
Pronto
150%

Pesquisa Operacional

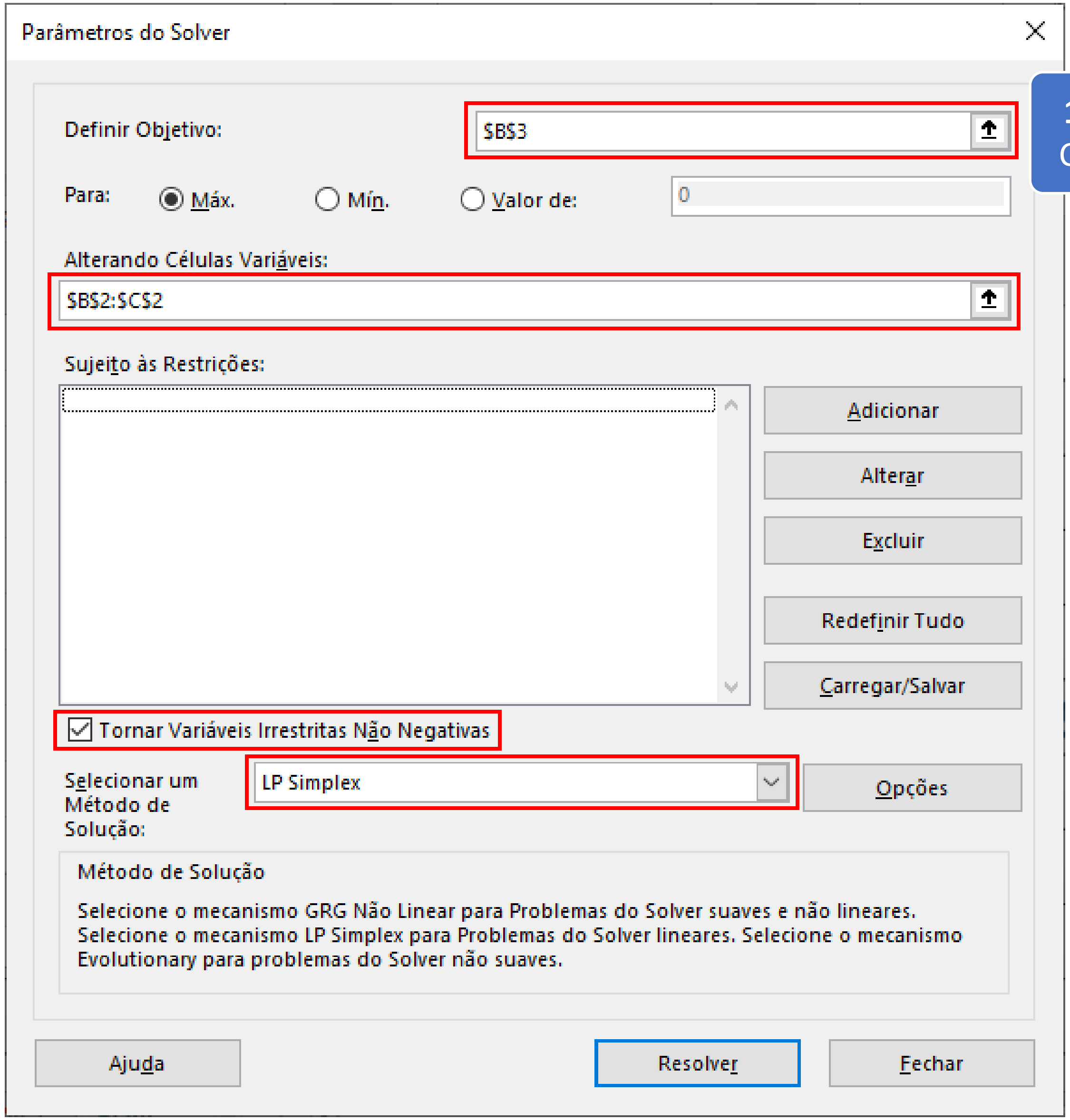


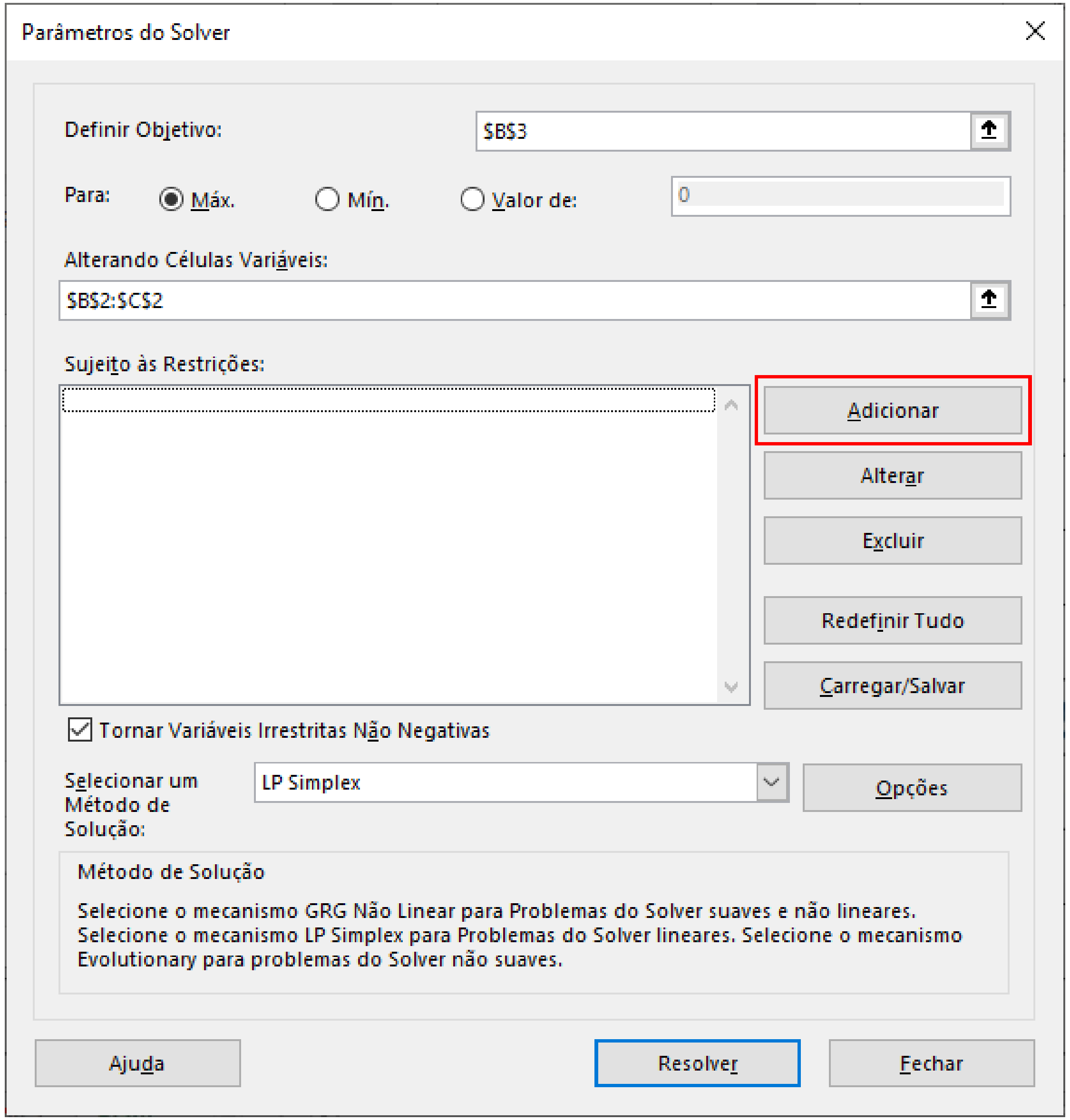
1. Esse campo deverá aparecer preenchido. Caso contrário, preencha com esses valores.

2. Células que correspondem às variáveis x e y. (amarelas)

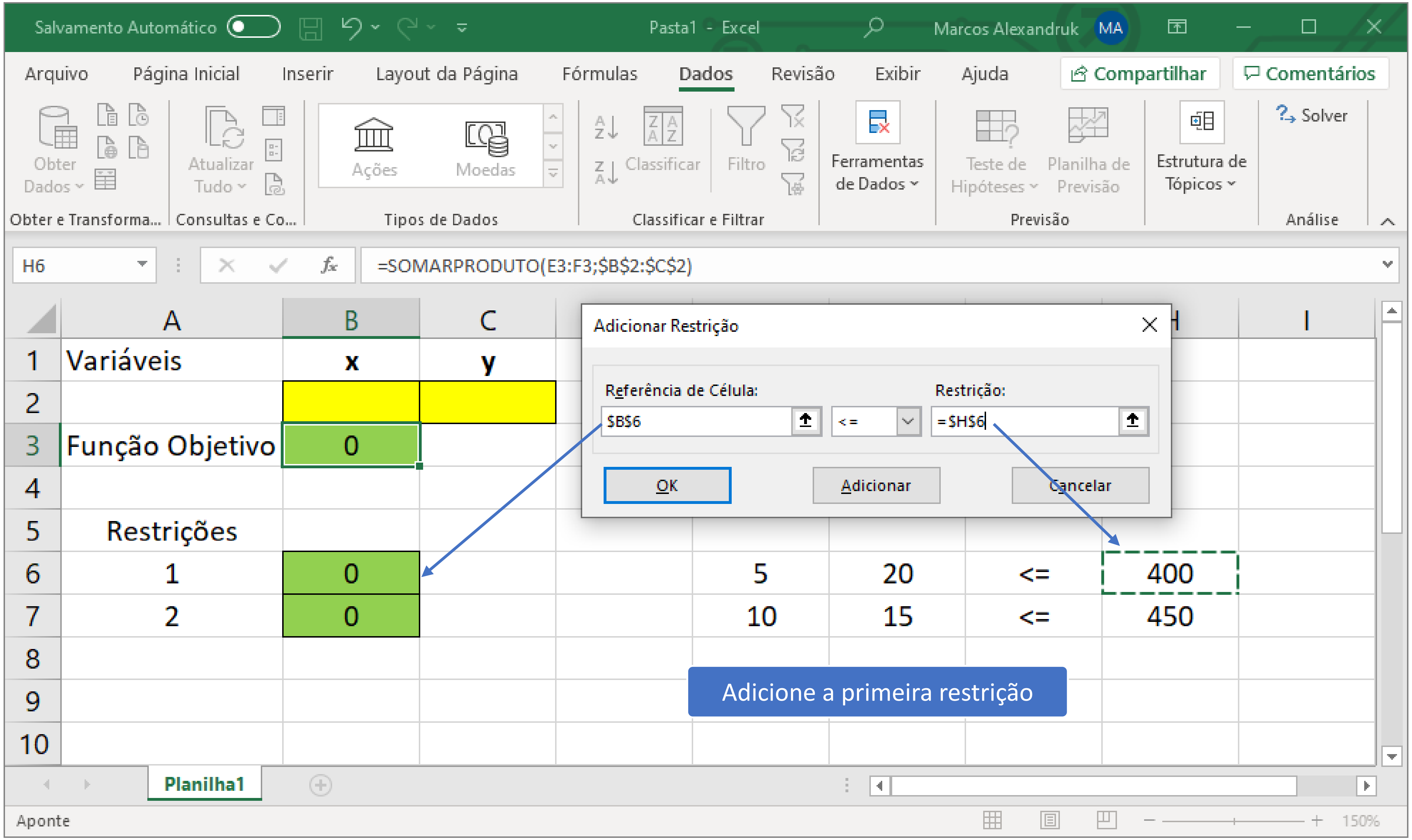
3. Restrição de não negatividade

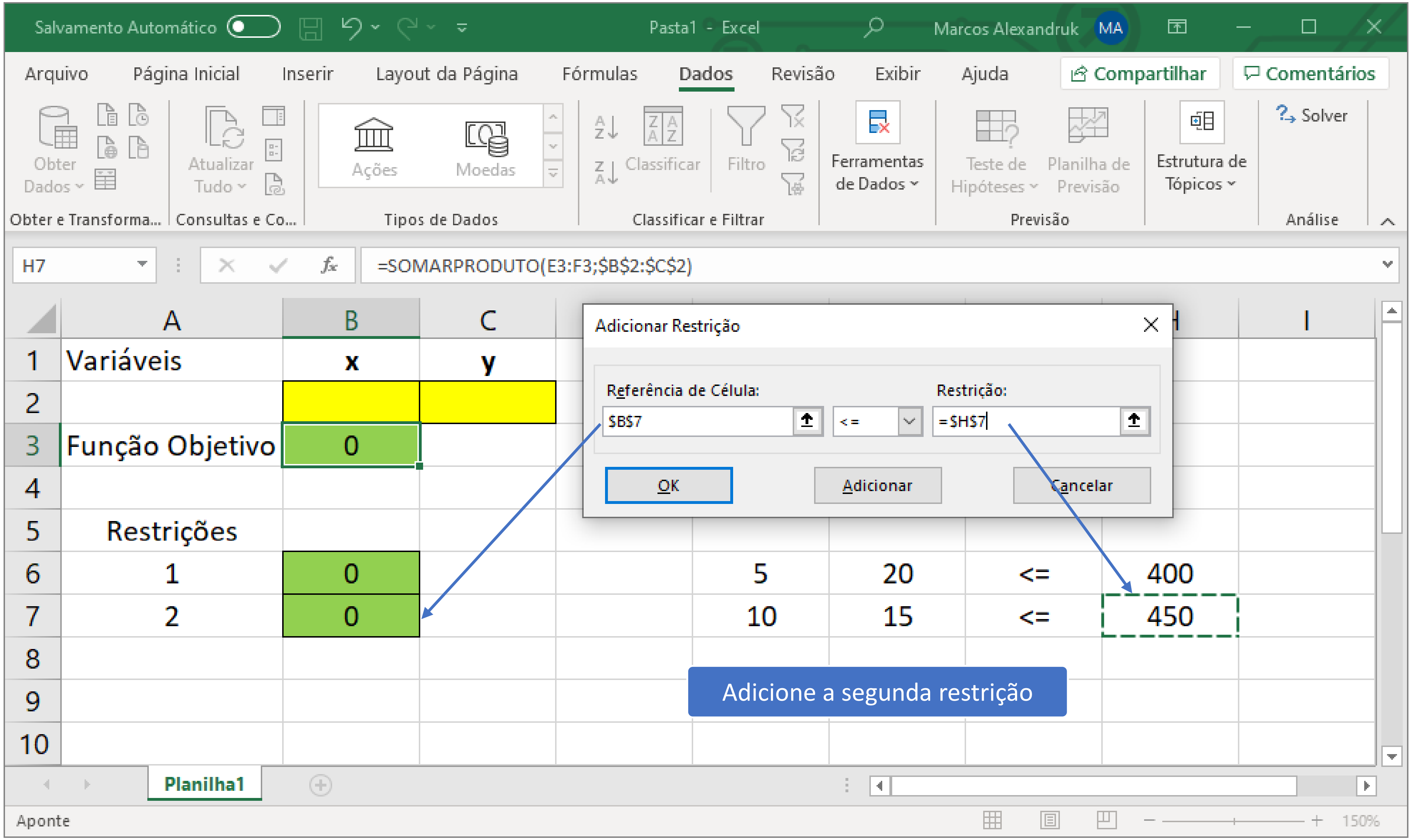
4. Método de Solução. Selecione **LP Simplex**



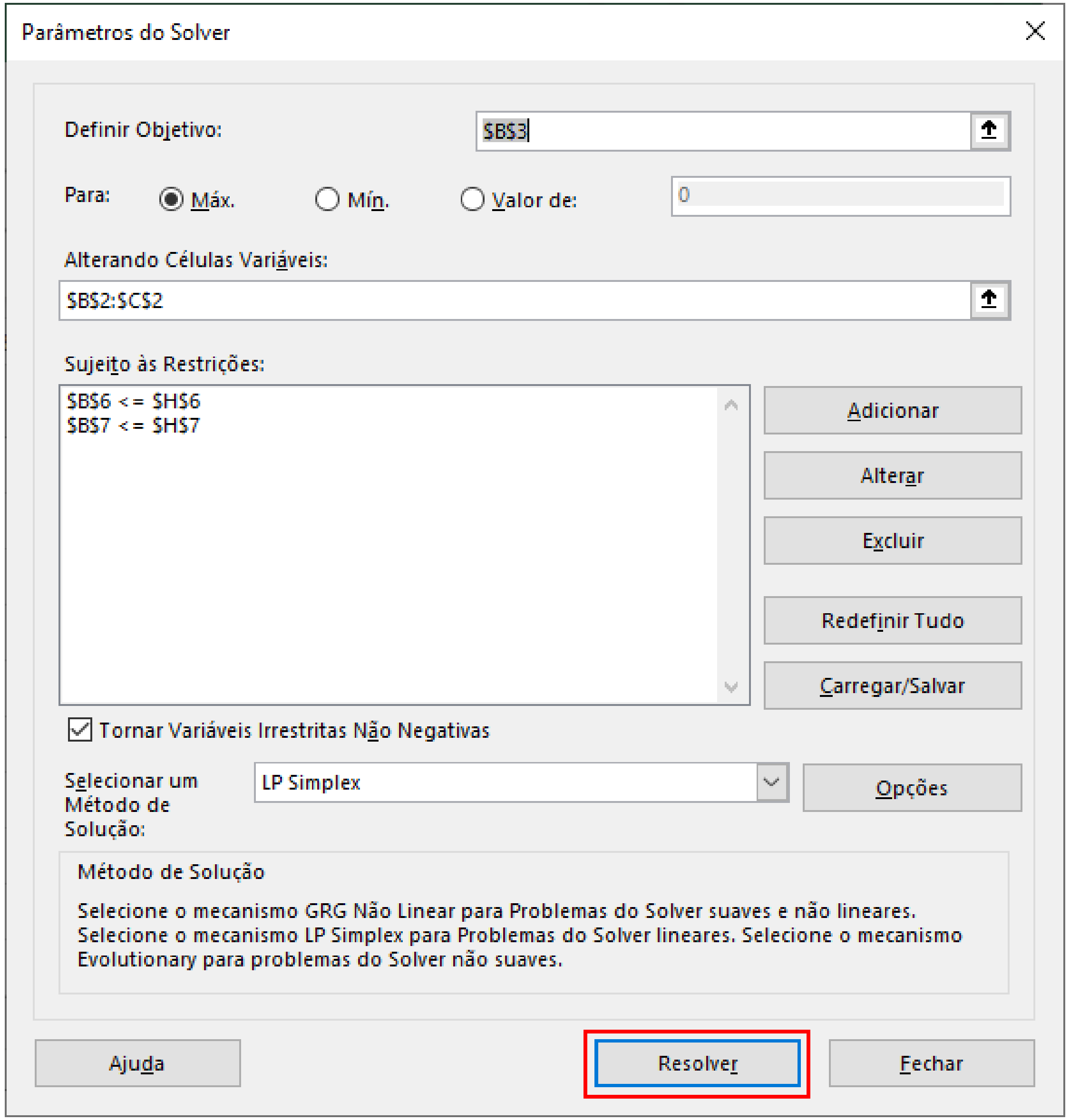


Clique em Adicionar
para incluir as restrições


Salvamento Automático
Pasta1 - Excel
Marcos Alexandruk
Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Ajuda
Compartilhar
Comentários
Solver
Obter Dados
Atualizar Tudo
Ações
Moedas
Classificar
Filtro
Ferramentas de Dados
Teste de Hipóteses
Planilha de Previsão
Estrutura de Tópicos
Obter e Transforma...
Consultas e Co...
Tipos de Dados
Classificar e Filtrar
Previsão
Análise
H6
=SOMARPRODUTO(E3:F3;$B$2:$C$2)
Variáveis
x
y
Função Objetivo
0
Restrições
1
0
2
0
5
20
<=
400
10
15
<=
450
Adicionar Restrição
Referência de Célula:
$B$6
<=
Restrição:
=$H$6
OK
Adicionar
Cancelar
Planilha1
Aponte
150%
Adicione a primeira restrição



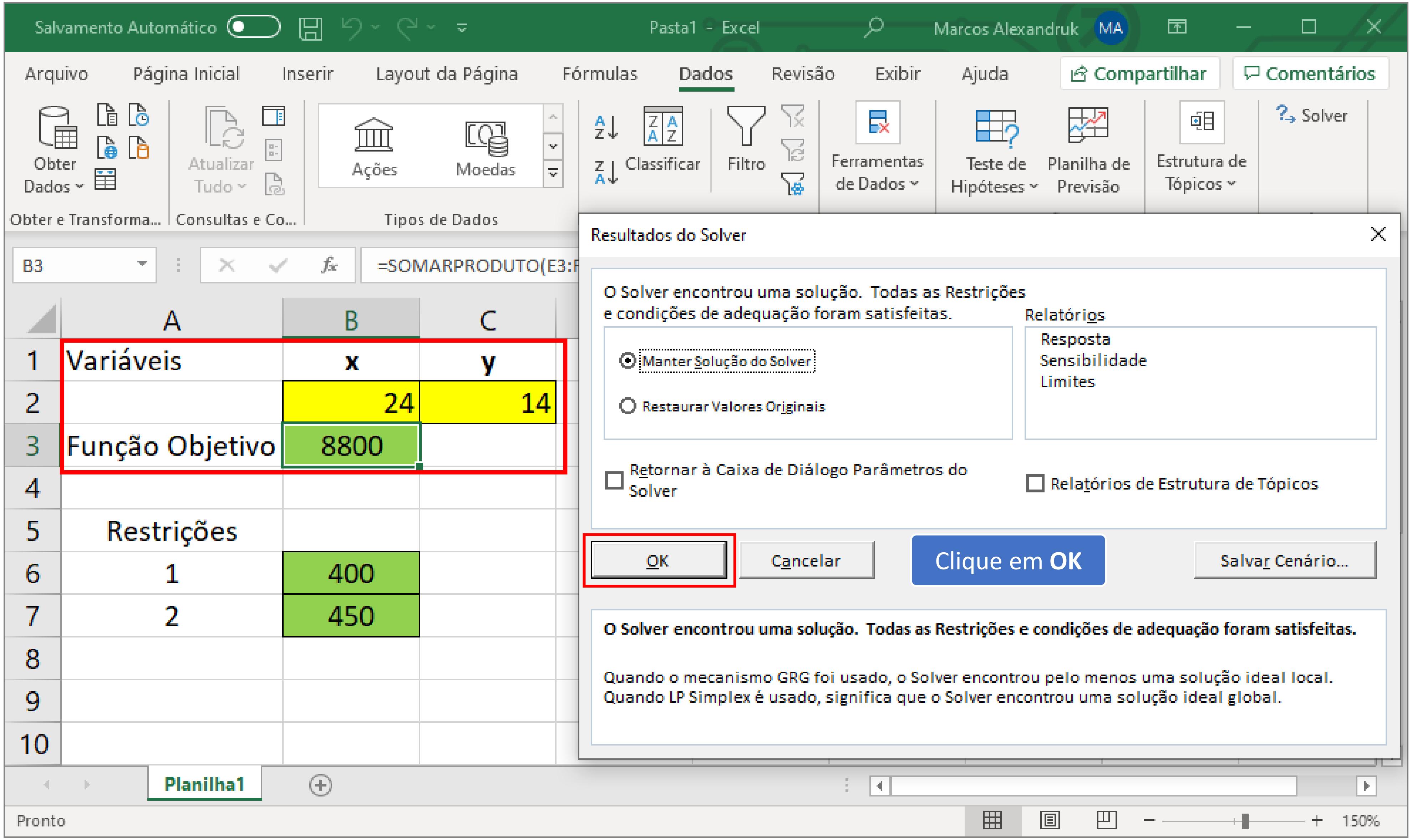
Salvamento Automático
Pasta1 - Excel
Marcos Alexandruk
Arquivo
Página Inicial
Inserir
Layout da Página
Fórmulas
Dados
Revisão
Exibir
Ajuda
Compartilhar
Comentários
Obter Dados
Atualizar Tudo
Ações
Moedas
Classificar
Filtro
Ferramentas de Dados
Teste de Hipóteses
Planilha de Previsão
Estrutura de Tópicos
Solver
Obter e Transforma...
Consultas e Co...
Tipos de Dados
Classificar e Filtrar
Previsão
Análise
H7
=SOMARPRODUTO(E3:F3;$B$2:$C$2)
Variáveis
x
y
Função Objetivo
0
Restrições
1
0
2
0
5
20
<=
400
10
15
<=
450
Adicionar Restrição
Referência de Célula:
$B$7
<=
Restrição:
=$H$7
OK
Adicionar
Cancelar
Adicione a segunda restrição
Planilha1
Aponte
150%



Clique em **Resolver**

Pesquisa Operacional

Solução



Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Método Simplex Tabular

O método Simplex

O método Simplex é uma sequência de cálculos "simples" que leva à solução de um problema de programação linear.

Rotina de cálculo do Simplex:

1. Monta-se um tableau inicial que corresponde à origem;
2. O primeiro tableau é transformado em um segundo, que apresenta uma solução melhorada, por meio de uma série de cálculos;
3. O procedimento é repetido até que se chegue a um tableau que apresente a solução ótima;
4. A cada tableau existe um teste para verificar se a solução ótima foi atingida.

O método Simplex

Exemplo:

Maximizar 80x + 60y

Sujeito a

$4x + 6y \leq 24$

$4x + 2y \leq 16$

$x \geq 0; y \geq 0$

Devemos primeiro transformar as inequações em equações com a ajuda das variáveis de folga s_1 e s_2:

$z - 80x - 60y - 0s_1 - 0s_2 = 0$

Sujeito a

$4x + 6y + 1s_1 + 0s_2 = 24$

$4x + 2y + 0s_1 + 1s_2 = 16$

Nota: Variáveis de folga são frequentemente designadas pela letra **s** de **slack** (folga em inglês).

O método Simplex (1º tableau)

A solução ótima será encontrada quando todos os valores dessa linha forem **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	-80	-60	0	0	0
0	4	6	1	0	24
0	4	2	0	1	16

O método Simplex (1º tableau)

Escolher o maior valor (absoluto) entre **x** e **y**

z	x	y	s1	s2	b
1	-80	-60	0	0	0
0	4	6	1	0	24
0	4	2	0	1	16

O método Simplex (1º tableau)

Variável que **entra**

z	x	y	s1	s2	b
1	-80	-60	0	0	0
0	4	6	1	0	24
0	4	2	0	1	16

24 / 4 = 6

16 / 4 = 4

Elemento **pivô**

Escolher o **menor valor positivo**

O método Simplex (1º tableau)

: 4

0	4	2	0	1	16
0	1	1/2	0	1/4	4

NLP
(Nova Linha Pivô)

Elemento **pivô**

x 80

	0	1	1/2	0	1/4	4
	0	80	40	0	20	320
1ª linha	1	-80	-60	0	0	0
nova 1ª linha	1	0	-20	0	20	320

soma

x (-4)

	0	1	1/2	0	1/4	4
	0	-4	-2	0	-1	-16
2ª linha	0	4	6	1	0	24
nova 2ª linha	0	0	4	1	-1	8

soma

O método Simplex (2º tableau)

A solução ótima será encontrada quando todos os valores dessa linha forem **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	0	-20	0	20	320
0	0	4	1	-1	8
0	1	1/2	0	1/4	4

O método Simplex (2º tableau)

Variável que **entra**

z	x	y	s1	s2	b
1	0	-20	0	20	320
0	0	4	1	-1	8
0	1	1/2	0	1/4	4

8 / 4 = 2

4 / 1/2 = 8

Elemento **pivô**

Escolher o **menor valor positivo**

O método Simplex (2º tableau)

: 4	0	0	4	1	-1	8	
	0	0	1	1/4	-1/4	2	**NLP** (Nova Linha Pivô)

Elemento **pivô**

x 20	0	0	1	1/4	-1/4	2	
	0	0	20	5	-5	40	soma
1ª linha	1	0	-20	0	20	320	
nova 1ª linha	1	0	0	5	15	360	

x (-1/2)	0	0	1	1/4	-1/4	2	
	0	0	-1/2	-1/8	1/8	-1	soma
3ª linha	0	1	1/2	0	1/4	4	
nova 3ª linha	0	1	0	-1/8	3/8	3	

O método Simplex (3º tableau)

Solução ótima encontrada. Todos os valores dessa linha são **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	0	0	5	15	360
0	0	1	1/4	-1/4	2
0	1	0	-1/8	3/8	3

Solução ótima:
z = 360
x = 3
Y = 2

Exercício

O método Simplex

Exemplo:

Maximizar 180x + 320y

Sujeito a

$5x + 20y \leq 400$

$10x + 15y \leq 450$

$x \geq 0; y \geq 0$

Devemos primeiro transformar as inequações em equações com a ajuda das variáveis de folga s_1 e s_2:

$z - 180x - 320y - 0s_1 - 0s_2 = 0$

Sujeito a

$5x + 20y + 1s_1 + 0s_2 = 400$

$10x + 15y + 0s_1 + 1s_2 = 450$

Nota: Variáveis de folga são frequentemente designadas pela letra **s** de **slack** (folga em inglês).

O método Simplex (1º tableau)

A solução ótima será encontrada quando todos os valores dessa linha forem **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	-180	-320	0	0	0
0	5	20	1	0	400
0	10	15	0	1	450

O método Simplex (1º tableau)

Escolher o maior valor (absoluto) entre **x** e **y**

z	x	y	s1	s2	b
1	-180	-320	0	0	0
0	5	20	1	0	400
0	10	15	0	1	450

O método Simplex (1º tableau)

Variável que **entra**

z	x	y	s1	s2	b
1	-180	-320	0	0	0
0	5	20	1	0	400
0	10	15	0	1	450

400 / 20 = 20

450 / 15 = 30

Elemento **pivô**

Escolher o **menor valor positivo**

O método Simplex (1º tableau)

: 20	0	5	20	1	0	400
	0	1/4	1	1/20	0	20

Elemento **pivô**

NLP (Nova Linha Pivô)

x 320	0	1/4	1	1/20	0	20
	0	80	320	16	0	6400
1ª linha	1	-180	-320	0	0	0
nova 1ª linha	1	-100	0	16	0	6400

soma

x (-15)	0	1/4	1	1/20	0	20
	0	-15/4	-15	-15/20	0	-300
3ª linha	0	10	15	0	1	450
nova 3ª linha	0	25/4	0	-15/20 = (-3/4)	1	150

soma

O método Simplex (2º tableau)

A solução ótima será encontrada quando todos os valores dessa linha forem **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	-100	0	16	0	6400
0	1/4	1	1/20	0	20
0	25/4	0	-3/4	1	150

O método Simplex (2º tableau)

Variável que **entra**

z	x	y	s1	s2	b
1	-100	0	16	0	6400
0	1/4	1	1/20	0	20
0	25/4	0	-3/4	1	150

20 / (1/4) = 80

150 / (25/4)= 24

Escolher o **menor valor positivo**

Elemento **pivô**

O método Simplex (2º tableau)

: 25/4	0	25/4	0	-3/4	1	150
NLP (Nova Linha Pivô)	0	1	0	-12/100 = -3/25	4/25	24

Elemento **pivô**

x 100	0	1	0	-3/25	4/25	24
	0	100	0	-300/25 = -12	400/25 = 16	2400
1ª linha	1	-100	0	16	0	6400
nova 1ª linha	1	0	0	4	16	8800

soma

x (-1/4)	0	1	0	-3/25	4/25	24
	0	-1/4	0	3/100	-4/100	-6
2ª linha	0	1/4	1	1/20	0	20
nova 2ª linha	0	0	1	8/100	-4/100	14

soma

O método Simplex (3º tableau)

Solução ótima encontrada. Todos os valores dessa linha são **positivos**.

z	x	y	s1	s2	b
1	0	0	4	16	8800
0	0	1	8/100	4/100	14
0	1	0	-3/25	-4/25	24

Solução ótima:
z = 8800
x = 24
Y = 14

Prof. MSc. Marcos Alexandruk

E-mail: alexandruk@uni9.pro.br

https://github.com/alexandruk/pesquisaoperacional/

Transporte

Transporte

O problema de transporte básico é aquele que se quer **determinar**, dentre as diversas maneiras de distribuição de um produto, a qual resultará **o menor custo de transporte entre os setores produtivos e seus respectivos centros de distribuição**. Fazendo-se a hipótese de que "o custo unitário de transporte de cada fábrica para cada destino é constante, independe da quantidade transportada" (LACHTHERMARCHER, 2009, p.148).

Transporte

Matematicamente se deseja a minimização do custo total, a qual é dada por:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Onde:

x_{ij} é a quantidade de itens transportados da fábrica *i* para o destino *j* (variáveis de decisão)

c_{ij} é o custo unitário de transporte da fábrica *i* para o destino *j* (constantes)

m é número de fábricas

n é o número de destinos

Custo de transporte por unidade

Caso 1: capacidade de produção igual à demanda

Centro Consumidor	Recife (1)	Salvador (2)	Manaus (3)	Capacidade
Fábrica				
Rio de Janeiro (1)	25	20	30	**1500**
São Paulo (2)	30	25	25	**2000**
Belo Horizonte (3)	20	15	23	**1500**
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	

Variáveis de Decisão

x_{11} - Rio de Janeiro → Recife
x_{12} - Rio de Janeiro → Salvador
x_{13} - Rio de Janeiro → Manaus
x_{21} - São Paulo → Recife
x_{22} - São Paulo → Salvador
x_{23} - São Paulo → Manaus
x_{31} - Belo Horizonte → Recife
x_{32} - Belo Horizonte → Salvador
x_{33} - Belo Horizonte → Manaus

Função objetivo

$$\text{MIN } 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 30x_{21} + 25x_{22} + 25x_{23} + 20x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33}$$

Restrições Produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1500$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1500$$

Restrições Demanda

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$$

Custo de transporte por unidade

Caso 2: capacidade de produção maior que a demanda

Centro Consumidor	Recife (1)	Salvador (2)	Manaus (3)	Capacidade
Fábrica				
Rio de Janeiro (1)	25	20	30	**2000**
São Paulo (2)	30	25	25	**3000**
Belo Horizonte (3)	20	15	23	**1500**
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	

Custo de transporte por unidade

Caso 2: capacidade de produção maior que a demanda

Centro Consumidor	Recife (1)	Salvador (2)	Manaus (3)	Dummy (4)	Capacidade
Fábrica					
Rio de Janeiro (1)	25	20	30		**2000**
São Paulo (2)	30	25	25		**3000**
Belo Horizonte (3)	20	15	23		**1500**
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	**1500**	