Питання 1

Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в m-рядках та n-стовпцях.

Матрицю позначають:A=(a i j),де a i j-елементи матриці; перший індекс вказує на номер рядка ,другий-на номер стовпця,на перетині яких стоїть даний елемент

Питання 2

1-Розмір матриці визначає кількість рядків і стовпців, які вона містить.

2-Квадратна матриця — це матриця з однаковою кількістю рядків і стовпців

Питання 3

Квадратну матрицю A розміром $n \times n$, у якої всі елементи $a_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$, та $a_{ij} \neq 0$, якщо $i = j$, називають **діагональною матрицею**, тобто діагональна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Питання 4

Одинична матриця — квадратна матриця розміру n з одиницями на головній діагоналі та нулями у всіх інших елементах.

Зазвичай позначається як I, іноді з індексом, що вказує розмірність I_n
Одинична матриця належить до:

*діагональних,
*ортогональних,

*додатноозначених,
*ортогонально-проекційних матриць
*та бінарних матриць.

Питання 5

1.Ви́роджена ма́триця- квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю

-Властивості

- Рядки і стовпці виродженої матриці лінійно залежні.
- Ранг матриці менший за розмірність матриці.
- У виродженої матриці немає оберненої матриці (хоча є псевдообернена матриця).
- Якщо матриця розміру n×n — вироджена, то система рівнянь має ненульові розв'язки. Множина цих розв'язків позначається і є лінійним підпростором n-вимірного простору, відмінним від **0**.
- Матриця є виродженою тоді і тільки тоді якщо серед її власних значень є нулі.

2.Неви́роджена ма́триця- квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю

-Властивості

- Рядки і стовпці невиродженої матриці лінійно незалежні.
- Ранг матриці дорівнює розмірності матриці.
- У невиродженої матриці є обернена матриця. Це еквівалентно тому, що лінійний оператор, який задається матрицею **A** є біекцією векторного простору.
- Якщо матриця — невироджена, то система рівняннь має тільки нульовий розв'язок.
- Матриця є невиродженою тоді і тільки тоді якщо всі її власні значення є ненульовими.

Питання 6

ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Означення. Визначником другого порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

називається число $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$

Означення. Визначником третього порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ називається число

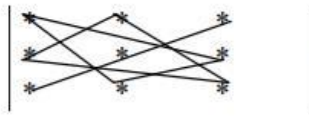
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3$$

У визначнику можна визначити дві діагоналі. Головну діагональ визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}. Побічну діагональ цього визначника складають елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}.

Для обчислення визначника третього порядку існує правило трикутників. Визначник є сумою 6-и добутків, з яких три беруться зі знаком „+” і три – зі знаком „–”. Зі знаком „+” береться добуток елементів головної діагоналі і добуток елементів, які знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними головній діагоналі

 зі знаком „+”.

- Зі знаком „–” береться добуток елементів побічної діагоналі і добутки елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі



зі знаком „–”

ПРИКЛАД:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-8)\cdot 1+5\cdot 2\cdot 9+6\cdot 3\cdot(-3)-(-3)\cdot(-8)\cdot 9-6\cdot 5\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1= = -8+90-54-216-30-6=-224$$

Нехай дана система лінійних рівнянь другого порядку

$$\alpha_{11}x+\alpha_{12}y=\beta_1$$
$$\alpha_{21}x+\alpha_{22}y=\beta_2$$

Головним визначником системи називається визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta\neq 0$, для розв'язання системи існують формули Крамера. Домножимо перше рівняння системи на α_{22}, а друге рівняння - на α_{12} і віднімемо з першого рівняння друге. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком рівнянь системи, в цьому рівнянні залишається одна змінна *x*

$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})x=\beta_1\alpha_{22}-\beta_2\alpha_{12}$

Згадуючи означення визначника другого порядку, це рівняння можна записати так:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Повернемось до початкової системи: домножимо перше рівняння на α_{12}, друге – на α_{11} і віднімемо від другого рівняння перше. Одержимо рівняння, в якому лише одна змінна *y*.
$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})y= \alpha_{11}\beta_2- \alpha_{21}\beta_1$
Або

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Оскільки

$\Delta= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$ то з одержаних рівнянь знаходимо єдиний розв'язок початкової системи:

$$x= \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Позначаючи

$\Delta_x= \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}$, остаточно отримаємо

$x= \Delta_x/\Delta$, $y= \Delta_y/\Delta$.
Ці формули є формулами Крамера для системи лінійних рівнянь другого порядку.
Перейдемо до систем лінійних рівнянь третього порядку:

$$\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z=\beta_1$$
$$\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z=\beta_2$$
$$\alpha_{31}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=\beta_3$$

Аналогічно системам другого порядку, головним визначником системи називається визначник

$$\Delta= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{23} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

- Покажемо, що при $\Delta\neq0$ для розв'язування системи третього порядку також існують формули Крамера.

Домножимо перше рівняння системи на число $(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})$, друге рівняння домножимо на $(\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})$, третє рівняння – на $(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{33})$ і всі рівняння додамо. При цьому одержимо рівняння, що є наслідком системи і містить лише одну змінну *x*.

$$\alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{31}\alpha_{13}\alpha_{22})x=$$
$$\beta_1\alpha_{22}\alpha_{33}-\beta_1\alpha_{23}\alpha_{32}+\beta_2\alpha_{13}\alpha_{32}-\beta_2\alpha_{12}\alpha_{33}+\beta_3\alpha_{12}\alpha_{23}-\beta_3\alpha_{13}\alpha_{22}$$

Згадуючи означення визначника третього порядку, перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Покладемо

$\Delta_x = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{23} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ і при $\Delta \neq 0$ одержуємо $x = \Delta_x/\Delta$.

Проводячи аналогічні міркування для змінних *y* і *z* одержимо $y = \Delta_y/\Delta$ $z = \Delta_z/\Delta$, де

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Таким чином, якщо головний визначник Δ системи лінійних рівнянь третього порядку не дорівнює 0, система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера

- $x = \Delta_x/\Delta$ $\quad y = \Delta_y/\Delta$ $\quad z = \Delta_z/\Delta$

Проводячи аналогічні міркування для змінних *y* і *z* одержимо $y=\Delta_y/\Delta$ $z=\Delta_z/\Delta$, де

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33}\end{vmatrix} \quad \Delta_z=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3\end{vmatrix}$$

Таким чином, якщо головний визначник Δ системи лінійних рівнянь третього порядку не дорівнює 0, система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера
$x=\Delta_x/\Delta$ $y=\Delta_y/\Delta$ $z=\Delta_z/\Delta$
Нехай дана система лінійних рівнянь *n*-го порядку

$$\begin{array}{c}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{13}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{23}x_n=\beta_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{31}x_1+\alpha_{23}x_2+\ldots+\alpha_{33}x_n=\beta_n\end{array}$$

- Для розв'язування подібних систем також існують формули Кроамера. Для того, щоб записати ці формули, потрібно ввести поняття визначника *n*-го порядку.

Питання 7

- ***Алгебраїчне доповнення*** *$A[j,k]$ – це мінор $M[j,k]$, взятий зі знаком "плюс" , якщо $j+k$ – парне число і зі знаком "мінус" – якщо непарне*
- $\bar{A}_{jk}=(-1)^{j+k}\cdot M_{jk}$
- ***Матриця алгебраїчнихбдоповнень*** *- це матрия складена з визначників $A[j,k], j,k=1..n.$*
- *Знаки мінорів спрощено можна подати у вигляді схем*
- $$M_3=\begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$$ $$M_4=\begin{pmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{pmatrix}$$ $$M_5=\begin{pmatrix}+ & - & + & - & +\\ - & + & - & + & -\\ + & - & + & - & +\\ - & + & - & + & -\\ + & - & + & - & +\end{pmatrix}$$

- *Визначник будь-якого порядку n, згідно правила Лапласа, можна записати у вигляді суми по парних добутків елементів рядків (стовпців) на їх алгебраїчні доповнення.*
  $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in},$
- $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$
- ***Алгебраїчне доповнення*** *$A[j,k]$, як і мінор, це визначник на одиницю меншого порядку ніж головний визначник. Тому для обчислення визначника n порядку потрібно обчислити n визначників $n-1$ порядку.*
  На практиці визначники матриць через алгебраїчні доповнення розписують до тих пір, поки не отримають мінори 3 порядку, які знаходять за правилом Саррюса або трикутників.
  Практична реалізація для матриць більших 4 порядку складна, але реалізація таких алгоритмів на мові програмування через рекурентні формули значно спрощує обчислення.
  В навчанні переважно оперують з матрицями максимум $4,5$ порядку. Якщо маємо розріджені матриці (багато елементів нульових) то визначник за рядком (стовпцем), який містить найбільшу кількість нульових елементів k зводиться до знаходження кількох $(n-k)$ визначників на 1 меншого порядку від основного. Тому з допомогою елементарних перетворень спочатку перетворюють визначник, щоб отримати найбільше нульових елементів, а вже потім розписують його через алгебраїчні доповнення. Щоб Вас не навантажувати зайвою теорією перейдемо до практичної реалізації.

Питання 8

- ***№8***
- ***Мінором $M[j,k]$ визначника є визначник***, *одержаний з даного викреслюванням рядка та стовпця, які стоять на перетині до елемента $a[j,k]$.*
- $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
- ***Мінори*** *є визначниками на одиницю меншого порядку ніж матриця для якої їх шукають.*
  Визначник n порядку має кількість n^*n мінорів (рівно кількості елементів матриці).
  Для матриці 2^*2 мінорами будуть протилежні елементи по діагоналі

Питання 9

Властивості визначників

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється: $\Delta A = \Delta A^T$
2. Визначник змінить знак на протилежний, якщо переставити місцями декілька рядків (стовпців)
3. Визначник дорівнює 0, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють 0

4. Визначник, в якому є два однакових рядка (стовпця) дорівнює 0
5. Спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна вивести за знак визначника
6. Визначник, який містить два пропорційних рядка (стовпця) дорівнює 0
7. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких у відповідному рядку (стовпці) розташовані перші доданки, а у другому – другі, інші рядки (стовпці) в обох визначниках однакові і такі ж як у вихідному визначнику
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) попередньо помножені на одне й те саме число
9. Якщо у визначнику під головною діагоналлю всі елементи – нулі, то визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі

Питання 10

Система трьох рівнянь (3 площини) з трьома невідомими (тривимірність простору). Розв'язком є точка перетину площин.

Питання 11

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Нехай дано **систему лінійних рівнянь** виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn}$ і $b_1, b_2, \dots, b_n$ є заданими, а вектор $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — називається **розв'язком системи** (1).

Якщо **визначник** даної системи не дорівнює нулю ($\Delta = |A| = |a_{ij}| \neq 0$), то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,n} \quad (2)$$

де Δ_i — допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його i-го стовпця, стовпцем вільних членів системи.

Отже:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулами (2).
2. Якщо $\Delta = 0$, то система (1) або має безліч розв'язків, або вона є несумісною, тобто розв'язків немає.

Складемо **алгоритм розв'язання системи** трьох рівнянь з трьома невідомими за **методом Крамера**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3)$$

1. Для даної системи складаємо та **обчислюємо визначник**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

2. Аналогічним чином обчислюємо **допомміжні визначники**:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Використовуючи формулу (2) знаходимо розв'язок системи (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Зауваження: метод Крамера доцільно використовувати, коли кількість рівнянь та невідомих системи $n \le 3$. Даний метод можна застосовувати і для великих значень n, але він потребує більшої кількості розрахунків. У випадку, коли $n > 3$ доцільно використовувати **метод Гаусса**, основна ідея якого полягає у приведенні матриці до трикутної форми.

Метод Гаусса. Розв'язок системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гаусса (метод послідовного виключення змінних) знаходиться за два етапи. На першому етапі вихідну систему рівнянь зводять до рівносильної їй системи трикутної форми — прямий хід методу Гаусса. На другому етапі, використовуючи систему трикутної форми, знаходимо значення невідомих величин (обернений хід методу Гаусса).

Прямий хід методу Гаусса: Нехай дано систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Нехай $a_{11} \neq 0$ (ведучий елемент), цього можна досягнути перестановкою рівнянь. Поділивши коефіцієнти першого рівняння системи (1) на a_{11} отримаємо:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \quad (2)$$

де $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ $(j > 1)$; $d_1 = b_1/a_{11}$.

Користуючись рівнянням (2), легко виключити із другого рівняння системи (1) невідому x_1. Для цього достатньо від другого рівняння системи (1) відняти рівняння (2), помножене на a_{21}; від третього рівняння системи (1) , відняти рівняння (2), помножене на a_{31}, і так далі.

Таким чином, ми отримуємо систему трикутної форми, яка має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + c_{n-1n}x_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n \end{cases} \quad (3)$$

Обернений хід методу Гаусса: Цей етап полягає у знаходженні значень невідомих із системи, яку ми отримали на попередньому кроці. Його називають оберненим ходом тому, що спочатку з останнього рівняння знаходимо x_n:

$$x_n = d_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Потім, підставляємо цю величину у $(n-1)$-ше рівняння — знаходимо x_{n-1}:

$$x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1n}x_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

Далі підставляємо x_n і x_{n-1} в $(n-2)$-ге рівняння системи (3) — знаходимо x_{n-2} . Продовжуючи даний процес далі, знайдемо шуканий розв'язок системи (1). Очевидно, що даний процес визначений однією формулою:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right) \quad (4)$$

Питання 12

Система лінійних рівнянь з невідомими коефіцієнтами при яких є елементами матриці А, а вільними членами є числа Коефіцієнти системи (1) утворюють основну матрицю системи
Визначник цієї матриці називають основним визначником системи (4) і позначають |A| або Δ(A) або просто Δ.

Питання 13

Основні Властивості визначника

1)	Транспонування не змінює значення визначника.
2)	Якщо всі елементи рядка (або стовпця) визначника дорівнюють нулю, тоді визначник дорівнює нулю.
3)	Якщо визначник має два однакові рядки (або стовпці), тоді він дорівнює нулю.
4)	Якщо визначник має два пропорційні рядки (або стовпці), тоді він дорівнює нулю.
5)	Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (або стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.
6)	Спільний множник рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника.
7)	Якщо до рядка (або стовпця) визначника додати його інший рядок (або стовпець), помножений на довільне число, то значення визначника не зміниться.
8)	Якщо всі елементи рядка (або стовпця) визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то цей визначник дорівнює сумі визначників, які визначаються цими доданками.

Питання 14

- Методи розв’язування систем лінійних рівнянь
- **Метод Гауса**
- **Ме́тод Крамера**
- **Матричний метод**

Питання 15

- **Метод Крамера** (правило **Крамера**) — спосіб **розв'язання** квадратних **систем** лінійних алгебраїчних рівнянь із ненульовим визначником основної матриці (при цьому для таких рівнянь **розв**'язок існує і є єдиним).

- Задана система N лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з N невідомими коефіцієнтами при яких є елементи матриці $A(a_{ij})$, а вільними членами є числа $b_1, b_2, ..., b_N$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases}$$

  Перший індекс i біля коефіцієнтів a_{ij} вказує, в якому рівнянні знаходиться коефіцієнт, а другий j при якому із невідомих він знаходиться.
  Якщо визначник матриці A не дорівнює нулю

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0$$

  то система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок.
  Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається така впорядкована сукупність N чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, яка при $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_N = \lambda_N$ перетворює кожне з рівнянь системи в правильну рівність.
  Якщо праві частини всіх рівнянь системи дорівнюють нулю, то систему рівнянь називають однорідною. У випадку коли деякі з них відмінні від нуля – неоднорідною $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \ldots, k).$
  Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь має хоч один розв'язок, то вона називається сумісною, в іншому випадку – несумісною.

- Якщо **розв'язок** системи **єдиний**, то **система лінійних рівнянь називається визначеною**. У випадку, коли розв'язок сумісної системи не єдиний, систему рівнянь називають невизначеною.
  Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними (або рівносильними), якщо всі розв'язки однієї системи є розв'язками другої, і навпаки. Еквівалентні (або рівносильні) системи отримуємо з допомогою еквівалентних перетворень.

-

Питання 16

- 16)Метод Гауса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в послідовному виключенні змінних і перетворенні системи рівнянь

- $$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{cases}$$

Питання 17

Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь

1) додавання до обох частин рівняння відповідних частин другого, помножених на одне число;

2) переставлення рівнянь місцями;

3) виключення з подальшого розгляду рівнянь, що є тотожностями для всіх значень невідомих змінних.

Питання 18

Поняття вектора

1) ***Скалярною величиною*** або скаляром називається величина, яка характеризується за вибраною одиницею вимірювання лише число:

- Довжина відрізка
- Температура
- Маса

2) ***Векторною величиною*** або вектором називається величина, яка визначається числовою характеристикою і напрямом у просторі. Будь-яка впорядкована пара точок A, B простору визначає напрямлений відрізок, вектор, тобто відрізок який має певну довжину і напрям.

3) Напрямом вектора вважається напрям від його початку до його кінця.

4) Вектор початок якого збігається з його кінцем називається нульовим.

5) Два вектори називають колінеарними, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих.

6) Якщо 2 колінеарних вектори мають один і той же напрям, то вони називаються спів направленими.

7) 2 вектори A та B називають рівними, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями та розмір.

Питання 19

- *Вектором називається напрямлений відрізок. Позначати вектори будемо , ... Якщо, скажімо, точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо .Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається нульовим вектором.*
- *Вектор вважається заданим, коли відома його довжина , і напрям щодо деякої осі.*
- *Два вектори і називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.*
- *Вектори і вважаються рівними, коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.*
- *З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають вільними.*

Питання 20

- Колінеарні та компланарні вектори(20)
- 1)Колінеарність:
- 2)Компланарність:

Теорема **(Умова колінеарності векторів).** Два вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b},$$

де λ — скаляр, причому $\lambda \neq 0$.

Теорема **(Умова компланарності векторів).** Три вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших. Наприклад,

$$c = \lambda_1 a + \lambda_2 b,$$

де λ_1, λ_2 — два скаляри, причому хоча б один із них не дорівнює нулю.

Питання 21

Скалярний добуток векторів

На площині	**У просторі**
$\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
Властивості скалярного множення векторів Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і числа k: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2) $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	
Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos(\vec{a}; \vec{b})$	
Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.	
Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні	
$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$	

Питання 22

Геометрична інтерпретація. **Скалярним добутком** двох векторів $\boxed{a}$ і $\boxed{b}$ буде скалярна величина, яка дорівнює добутку модулів цих векторів помноженому на косинус кута між ними:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = |\boxed{a}| \cdot |\boxed{b}| \cos \alpha$$

Алгебраїчна інтерпретація. **Скалярним добутком** двох векторів $\boxed{a}$ і $\boxed{b}$ буде скалярна величина, яка дорівнює сумі попарного добутку відповідних координат векторів $\boxed{a}$ і $\boxed{b}$.

Формули скалярного добутку векторів заданих координатами

Формули скалярного добутку векторів заданих координатами

У випадку плоскої задачі скалярний добуток векторів $\boxed{a} = \{a_x ; a_y\}$ і $\boxed{b} = \{b_x ; b_y\}$ можна знайти скориставшись наступною формулою:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Формула скалярного добутку векторів для просторових задач

У випадку просторової задачі скалярний добуток векторів $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ і $\boxed{b} = \{b_x ; b_y ; b_z\}$ можна знайти скориставшись наступною формулою:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Формула скалярного добутку n -вимірних векторів

У випадку n-вимірного простору скалярний добуток векторів $\boxed{a} = \{a_1 ; a_2 ; ... ; a_n\}$ і $\boxed{b} = \{b_1 ; b_2 ; ... ; b_n\}$ можна знайти скориставшись наступною формулою:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$$

Властивості скалярного добутку векторів

1. Скалярний добуток вектора самого на себе завжди більше або дорівнює нулю:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} \geq 0$$

2. Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектор дорівнює нульовому вектору:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a} = 0$$

3. Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{a} = |\boxed{a}|^2$$

4. Операція скалярного добутку комутативна:

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} = \boxed{b} \cdot \boxed{a}$$

5. Якщо скалярний добуток двох не нульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори ортогональні:

$$\boxed{a} \neq 0, \boxed{b} \neq 0, \boxed{a} \cdot \boxed{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a} \perp \boxed{b}$$

6. $(\alpha\boxed{a}) \cdot \boxed{b} = \alpha(\boxed{a} \cdot \boxed{b})$
7. Операція скалярного добутку дистрибутивна:

$$(\boxed{a} + \boxed{b}) \cdot \boxed{c} = \boxed{a} \cdot \boxed{c} + \boxed{b} \cdot \boxed{c}$$

Питання 23

(Умова перпендикулярності двох векторів)

Вектори a та b перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:

Умова перпендикулярності двох векторів

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

Тобто

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Питання 24

Кут між векторами

Кутом між двома векторами, відкладеними від однієї точки, називається найкоротший кут, на який потрібно повернути один з векторів навколо свого початку до положення співнаправленості з іншим вектором.

Косинус кута між векторами дорівнює скалярному добутку векторів, поділеному на добуток модулів векторів.

Питання 25

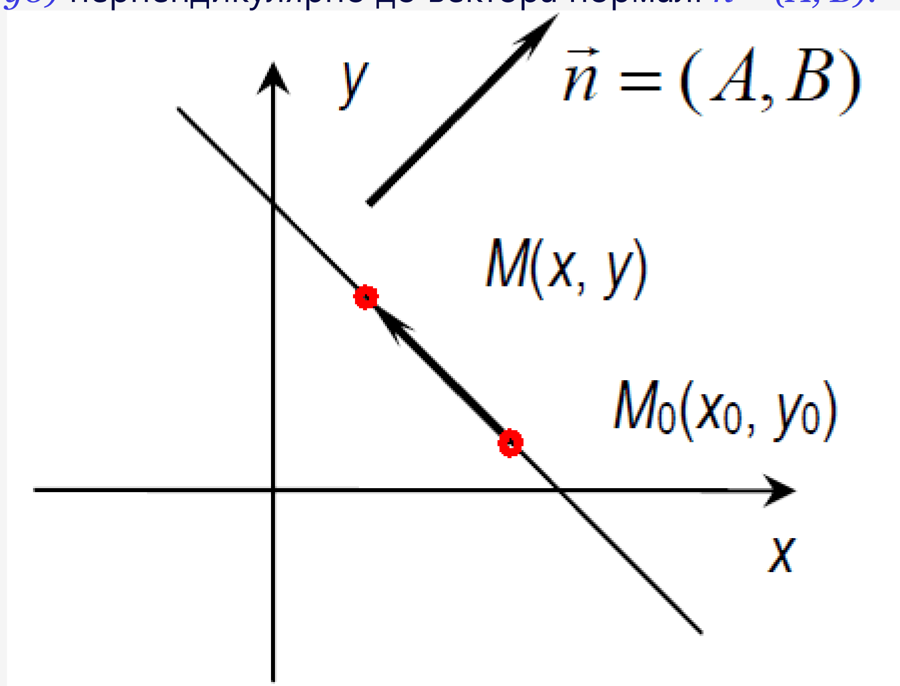
Канонічне рівняння прямої	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$	$M_0(x_0,y_0)$ $\vec{s}=(l,m)$	точка, напрямний вектор
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$	дві точки прямої
Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a, b	відрізки на координатних осях
Параметричні рівняння прямої; векторне рівняння прямої	$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt. \end{cases}$ $t\in R$; $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$	$M_0(x_0,y_0)$, $\vec{s}=(l,m)$	точка, напрямний вектор
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$	k, b	кутовий коефіцієнт, відрізок на осі Oy
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом “з точкою”	$y-y_0=k(x-x_0)$	$M_0(x_0,y_0)$, k	точка прямої, кутовий коефіцієнт
Рівняння прямої, що проходить через задану точку	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ о	= $M_0(x_0,y_0)$, $\vec{n}=(A,B)$	точка прямої, нормальний вектор

перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$ (Загальне рівняння прямої“з точкою”)			
Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$	$\vec{n} = (A, B)$	нормальний вектор

Питання 26

- **Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора**

- Нехай пряма проходить через задану точку *Mo(xo, yo)* перпендикулярно до вектора нормалі *n = (A, B).*



- Візьмемо будь-яку точку *M(x, y)* прямої і запишемо **умову перпендикулярності векторів** *MoM* $\overrightarrow{M_0M} = (x - x0\ , y - y0);$ та *n (* $\vec{n} = (A, B)$ *)* у векторній формі $\left(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}\right) = 0$

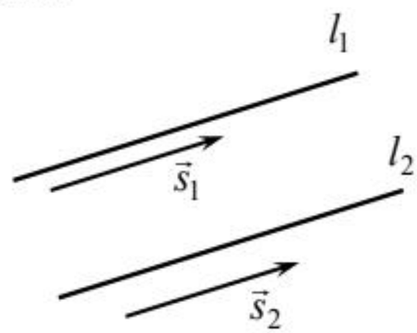
  та координатній

- $A(x - xo) + B(y - yo) = o.$

- Рівняння описує пряму, що проходить через задану точку $Mo(xo, yo)$ перпендикулярно до заданого вектора $n = (A,B)$.
-

Питання 27

Якщо прямі паралельні, то їх напрямні вектори колінеарні, звідки маємо **умову паралельності прямих**:



$$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (11)$$

Питання 28

Питання №28

для того щоб дві прямі були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх кутові коефіцієнти були оберненими числами, з протилежними знаками.

Умова перпендикулярності прямих: $k^{/} = -\dfrac{1}{k}$.

Питання 29

Поняття функції, область визначення.

Функцією називають змінну y, якщо по деякому правилу або закону

кожному значенню змінної x, що належить множині дійсних чисел

D, відповідає одне певне значення **y**, що належить множині дійсних чисел

E .

Пишуть

y = f (x),

де x – незалежна змінна або аргумент,

y – залежна змінна або функція.

Множину значень x, для яких функція

y= f (x)

має зміст називають

областю визначення функції і позначають

D(f)

.**Всі значення, які може**

приймати функція (змінна y) при всіх x з області визначення функції

називають областю значень функції і позначають

E(f).

Питання 30

Існує чотири основних способи задання функції:

1. **Аналітичний спосіб**

Спосіб задання полягає в написанні формули.

2. **Табличний спосіб**

Цей метод полягає у тому, що відповідність між множиною значень змінної *x* і функції *y* задається у вигляді таблиці. В таблиці вказуються значення функції y_1, y_2,…,y_{n-1}, y_n для заданих значень аргументу x_1, x_2,…,x_{n-1}, x_n. Загальний випадок для функції виду :

x	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n

y	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

3. **Графічний спосіб**

Функція задається за допомогою графіка функції. Значення на осі абсцис відповідають значенням аргумента функції *x*, а на осі ординат значенням самої функції *y*.

4. **Словесний спосіб**

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що закон, за яким залежно від х обчислюється значення у, виражається словами. Цей спосіб використовується під час розв'язування задач, в яких розглядаються взаємопов'язані величини.

Питання 31

31 **Теорема (про границю суми, добутку і частки).**

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці $x0$, то в цій точці існують також границі функцій $f\ x \pm \varphi\ x$, $f\ x * \varphi\ x$, $f\ x : \varphi\ x$, (остання за умови, що $\lim\ x \to x0\ \varphi\ x \neq 0$)і справедливі формули

$\lim\ x \to x0\ f\ x \pm \varphi\ x = \lim\ x \to x0\ f\ x \pm \lim\ x \to x0\ \varphi\ x$;

$\lim\ x \to x0\ f\ x\ \varphi\ x = \lim\ x \to x0\ f\ x \pm \lim\ x \to x0\ \varphi\ x$;

$\lim\ x \to x0\ f\ x\ \varphi\ x = \lim\ x \to x0\ f\ x\ \lim\ x \to x0\ \varphi\ x$.

Питання 32

Поняття похідної функції

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $x = (a, b)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту

$\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Функція в точці x_0 дістане відповідний приріст:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x + \Delta x) - f(x_0)$$

Означення: Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приростуцієї функції до приросту аргументу Δx , коли приріст аргумента прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідну позначають: $f'(x_0),\ \ y'(x_0),\ \ \frac{df(x_0)}{dx},\ \ \frac{dy}{dx}$

Питання 33

33. Диференційованість функції. Зв’язок між диференційованістю і неперервністю функції.

Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається диференційовною на проміжку, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції в точці встановлює наступна теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовною в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Обернене твердження неправильне: існують неперервні функції, які в деяких точках не є диференційовними (наприклад $y = \sqrt[3]{x}$).

Питання 34

34. Похідні сталої, суми, добутку, частки двох функцій.

Теорема. (Про похідну сталої). Якщо $y = f(x) = C$, де C=const – стале

число, то похідна сталої дорівнює нулю.

$$f'(x) = C' = 0$$

Теорема. (Про диференціювання суми, різниці, добутку і частки функцій). Якщо $U = U(x)$ і $V = V(x)$ диференційовні в точці x, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $V(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці і справедливі формули.

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Похідна добутку n функцій обчислюється за формулою:

$$(u_1 u_2 \dots u_n)' = u_1' u_2 \dots u_n + u_1 u_2' \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n'$$

Питання 35

ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

Складеною функцією зазвичай називають функцію від функції.

- Якщо змінна *у* є функцією від u: у = f(u), а u в свою чергу – функцією від x; u = φ(x), то у є складеною функцією від x, тобто у = f(φ (x)).
- Функцію $f(u)$ називають *зовнішньою*,

а $\varphi(x)$ - *внутрішньою* функцією, або проміжною змінною.

Якщо функція ф(x) має похідну в точці x_o, а функція f(u) – похідну в точці u_o = ф(x_o), то складена функція y = f(ф(x)) також має похідну в точці x_o, причому $\boxed{y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)}$.

- Похідна складеної функції y = f(φ(x)) дорівнює добутку похідної даної функції y = f(u) по проміжному аргументу u (позначено $f'(u)$) на похідну проміжного аргументу u=φ(x) по незалежному аргументу x (позначено φ′(x)).

Формули диференціювання складних функцій

Вважаємо, що $u = \varphi(x)$, тоді:

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;
2. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}, \quad a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
6. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
7. $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
8. $\left(e^u\right)' = e^u u'$;
9. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
10. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
11. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$.

- Щоб запобігти помилок, необхідно в виразі складеної функції побачити композицію двох функцій. Складені функції легше розпізнавати на перших порах за допомогою кольору.

<u>Приклад 1</u> $y= (\sin x)^5 y=\sin^5 x$

$y^{/}=(\sin x)^5=u^5 u=\sin x$

$y^{/}= (u^5)^{/}\cdot(\sin x)^{/} = (5u^4)\cdot(\cos x)=5\sin^4 x\cos x$

<u>Приклад 2</u> $y=\sin 3x=\sin u \qquad u=3x$

$y^{/}=(\sin u)^{/}\cdot(3x)^{/}= \cos U\cdot 3=3\cos 3x$

Розглянемо декілька прикладів знаходження похідної складеної функції без введення проміжного аргументу «u»

1. $y = (2x^3-5x^2-7)^8$

$y^{/}= 8(2x^3-5x^2-7)^7\cdot(2x^3-5x^2-7)^{/}= 8(2x^3-5x^2-7)^7\cdot(6x^2-10x)$.

2. $y = \cos (x^3 +4x-1)$

$y^{/} = (\cos (x^3+4x-1))^{/}= -\sin(x^3+4x-1) \cdot(x^3+4x-1)^{/}= -\sin (x^3+4x-1) \cdot (3x^2+4)$.

3. $y = e^{\sin x}$

$y^{/} = (e^{\sin x})^{/} = e^{\sin x} \cdot (\sin x)^{/} = e^{\sin x} \cdot \cos x$.

4. $y= 2^{\cos x-3x}$

$y^{l} = (2^{\cos x-3x})^{/} = 2^{\cos x-3x} \cdot (\cos x-3x)^{/} = 2^{\cos x-3x} \cdot (-\sin x - 3)$.

Похідну складеної функції не так важко і шукати, головне пам'ятайте, що правила ті самі, тільки уявляйте, що аргумент це також функція, і ві д неї потрібно брати похідну.

Питання 36

Теорема (необхідна умова екстремуму функції):

У точці екстремуму диференційованої функції похідна її дорівнює нулю: $f'(x_2)=0$.

Наслідок.

Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Дійсно, якщо в точці x_0 екстремуму функції f(x) існує похідна $f'(x_0)$,

то, в силу даної теореми, ця похідна дорівнює нулю.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної».

З тих обставин, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція f(x) має екстремум при $x=x_0$.

Наприклад,

нехай $f(x) = x^3$. Тоді $f'(x)= 3x^2$ і $f'(0)= 0$, однак значення $f(0)= 0$ не є екстремумом даної функції .

Отже, не для всякого критичного значення аргументу функції f(x) має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

***Теорема* (достатня умова екстремуму функції):**

Нехай функція f(x) неперервна на деякому інтервалі, в якому знаходиться критична точка x_0, і диференційовна у всіх точках цього інтервалу (крім, може бути, самої точки x_0). Якщо при переході через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «-», то при $x = x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак «-» на «+», то функція має у цій точці мінімум.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$f(x)= x^3 – 3x + 2$

1.Областю визначення функції є множина дійсних чисел , тобто $x \in R$.

2. Знайдемо похідну функції:

$f'(x)= (x^3 – 3x + 2)' = 3x^2 – 3$;

3. Знаходимо критичні точки : $f'(x) = 0$

$3x^2 – 3 = 0$;

$3(x^2 – 1) = 0$;

$(x^2 – 1) = 0$;

$(x – 1)(x + 1) = 0$;

$x_1 = - 1$;$x_2 = 1$.

4. Відмічаємо ці критичні точки на числовій прямій :

f ′(x) + - +

_______________-1__________________1__________________

f(x) ↑ ↓ ↑

5. Дослідимо знак похідної $f'(x) = 3x^2 – 3$ на кожному із отриманих інтервалів:

$f'(-2)>0$; $f'(0) < 0$; $f'(2) > 0$.

6. Точка x = - 1 − точка максимума, так як при переході через неї похідна змінює знак з «+ » на «−» ; точка x = 1 − точка мінімума, так як при переході через неї похідна змінює знак з «−» на «+ »:

$y_{max}= y(-1) = 4$;

$y_{min} = y(1) = 0$.

Відповідь: x = - 1 − точка максимуму x = 1 − точка мінімуму , y_{max}= y(-1) = 4;

y_{min} = y(1) = 0.

У деяких випадках точки екстремуму функції можна знайти за допомогою її другої похідної.

Питання 37

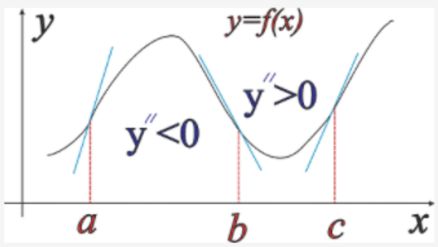
Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

Дослідження функції не обходиться без встановлення інтервалів опуклості та вгнутості, причому їх можуть розділяти як точки перегину, так і критичні точки II роду. Все залежить від ряду правил, які Вам прийдеться запам'ятати із наведеного теоретичного матеріалу.

Крива y=f(x) називається опуклою на інтервалі $x \in \Omega$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива y=f(x) називається вгнутою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.



На рисунку вище крива опукла на інтервалі $(a;b)$ та вгнута на $(b;c)$, в точці $x=b$ - функція має перегин.

Опуклість і вгнутість кривої, яка є графіком функції $y=f(x)$ характеризується знаком її другої похідної: **якщо в деякому інтервалі друга похідна менша нуля $f''(x)<0$ то крива опукла на цьому інтервалі , а якщо більша $f''(x)>0$ то крива вгнута на цьому інтервалі.**

Інтервали опуклості і вгнутості можуть відділятися один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна не існує. Ці точки називаються критичними точками II роду.

Якщо при переході через критичну точку II роду друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то графік функції має точку перегину $(x_0, f(x_0))$.

Схема знаходження точо перегину графіка функції

1) знайти область визначення функції;
2) знайти критичні точки II роду x_i функції $y=f(x)$;

3) дослідити знак другої похідної $y=f''(x)$ в інтервалах, на які критичні точки ділять область визначення функції $D(f)$. Якщо критична точка x_0 поділяє інтервали, де друга похідна $f''(x)$ справа і зліва має різні знаки, то x_0 **є абсцисою точки перегину графіка функції;**
4) обчислити значення функції (ординати) $y(x_0)$ в точках перегину.

Приклади. **Знайти точки перегину і інтервали опуклості та вгнутості графіків функцій.** (Дубовик В.П., Юрик І.І. "Вища математика. Збірник задач")

I) (5.827) $y=x^4-4x^3-18x^2+2x-1$

Розв'язування: 1) Область визначення полінома вся дійсна множина $D(y): x\in R$

2) Знаходимо критичні точки функції II роду

$$y'=4x^3-12x^2-36x+2.$$

$$y''=12x^2-24x-36.$$

Прирівнюємо другу похідну до нуля

$$12x^2-24x-36=0 \ /12.$$

$x^2-2x-3=0.$

Квадратне рівняння матиме наступні корені

$x=-1;\ x=3.$

Вони розбивають область визначення на 3 інтервали опуклості або вгнутості

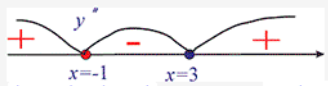
$(-\infty;-1), (-1;3), (3;+\infty).$

3) Визначаємо знак похідної підстановкою значень з інтервалів

$$y''(-2)=12\left((-2)^2-2\cdot(-2)-3\right)=12\cdot 5=60>0.$$

$$y''(0)=-36<0.$$

$$y''(4)=12\cdot\left(4^2-2\cdot 4-3\right)=60>0.$$



З аналізу знаків слідує, що функція вгнута на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ та опукла при $x\in(-1;3)$. Точки $x=-1;\ x=3$ **є точками перегину**, оскільки друга похідна в них змінює знак.

4) Обчислюємо значення функції

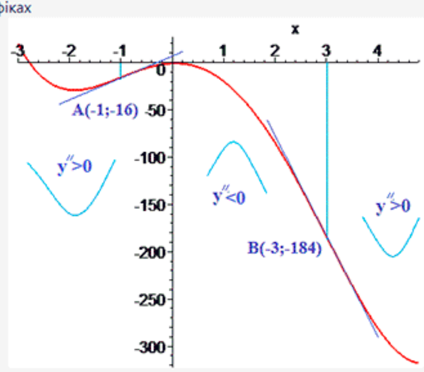
$$y(-2)=1+4-18-2-1=-16.$$

$$y(3)=3^4-4\cdot 3^3-18\cdot 3^2+2\cdot 3-1=$$

$$=81-108-162+6-1=-184.$$

$A(-1;-16),\ B(3;-184)$ **– точки прегину.**

Щоб матеріал Вам добре запам'ятався, до цього завдання і наступних наведу графіки функцій із знайденими критичними точкамию. Це допоможе уявити, як точки перегину виглядають на реальних графіках



Питання 38

38. Асимптоти графіка функції.

x=a – вертикальна асимптота (якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$)

y=kx+b – похила асимптота (якщо $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$)

y=b – горизонтальна асимптота (якщо k=0)

Питання 39

Схема дослідження функції і побудова її графіка

1) Знайти область визначення функції;

2) Знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями (корені функції);

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) Знайти точки розриву та дослідити їх;

5) Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) Знайти асимптоти кривої;

8) Побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.