Hochwald-Gymnasium Wadern

Notizen und Hausaufgaben

Mathe

Alexander Jacob

Schuljahr 2024/2025

1 VEKTOREN

1.1 SPURPUNKTE BERECHNEN

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

$$\mathbf{g}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

zu g:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+6\lambda \\ 7+4\lambda \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 7 + 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{12}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|-9{,}5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 + 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6{,}\overline{3} \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|0|6{,}\overline{3})$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **g** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 \neq 2$ ↯

Es gibt keinen Spurpunkt von g in der x_2-x_3-Ebene.

zu h:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3+\mu \\ 3\mu \\ -5+2\mu \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **h** in der x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = -5+2\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{12}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

Spurpunkt: $S_{12}(-0{,}5|7{,}5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **h** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3\mu \Leftrightarrow \mu = 0$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1.1.7}$$

Spurpunkt: $S_{12}(-3|0|-5)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **h** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = -3+\mu \Leftrightarrow \mu = 3$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|9|1)$

b) Von einer Geraden sind die Spurpunkte $S_{12}(2|3|0)$ und $S_{23}(0|-1|1)$ bekannt. Bestimmen Sie den Spurpunkt S_{13}.

Zweipunktegleichung einer Geraden:

$$\mathbf{g}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) \tag{1.1.9}$$

Mit den eingesetzten Punkten S_{12} und S_{23} in 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{g}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 3-4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

Spurpunkt: $S_{12}(0{,}5|0|0{,}75)$

1.2 PYRAMIDE

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge des in der x_1-x_2-Ebene liegenden Quadrates ABCD beträgt 80 m, die Pyramide hat eine Höhe von 60 m.

Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Schattenpunkt S' der Pyramidenspitze S liegt in der x_1-x_2-Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von S'.

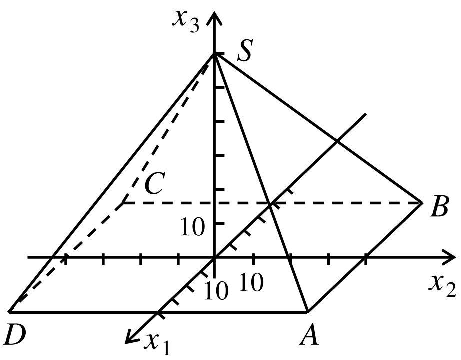


Abbildung 1.1: Skizze der Pyramide.

Vektor der auf Punkt S fallenden Sonnenstrahlen:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt in der x_1-x_2-Ebene: $0 = 60 - 3\lambda \Leftrightarrow 60 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 20$

Schattenpunkt: $S'(40|80|0)$

1.3 SCHATTEN EINER PLAKATWAND

Vor einem Haus steht eine Plakatwand, die 3 m breit und 6 m hoch ist. Ein Punkt der Wand ist $A(6|2|6)$. Auf die Plakatwand fällt paralleles Sonnenlicht. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und beschreiben Sie den Verlauf des Schattens an der Hauswand und auf dem Boden.

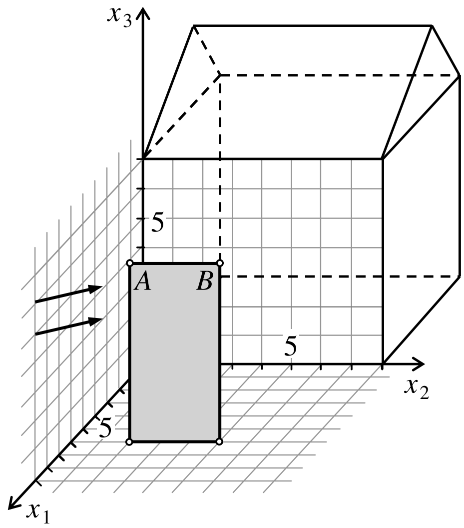


Abbildung 1.2: Skizze der Plakatwand mit Hauswand.

Geraden in Richtung des Sonneneinfalls:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3\lambda \\ 2+\lambda \\ 6-\lambda \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

$$\mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3\mu \\ 5+\mu \\ 6-\mu \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

Gesucht sind jeweils die Spurpunkte von **g** und **h** mit der x_2-x_3-Ebene (= Hauswand).

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Für g gilt: Punkt von **g** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 - 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{\mathrm{A23}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|4|4)$

Für h gilt: Punkt von **h** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 + -3\mu \Leftrightarrow \mu = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{\mathrm{B23}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1.3.4}$$

Spurpunkt: $S_{\mathrm{B23}}(0|7|4)$

Der Schatten der Plakatwand fällt also zum Teil auf die Hauswand bis auf eine Höhe von 4 m mit einer Breite von 3 m. Der andere Teil des Schattens fällt demnach auf den Boden vor der Hauswand zwischen den Punkten A_0, B_0, S_{A0} und S_{B0}. Für diese Punkte gilt, dass sie senkrecht unter den Punkten A, B, S_{A23} und S_{B23} auf der x_1-x_2-Ebene liegen. Es gilt: $A_0 = (6|2|0)$, $B_0 = (6|5|0)$, $S_{A0} = (0|4|0)$ und $S_{B0} = (0|7|0)$.

1.4 LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN

Untersuchen Sie die Geraden **g** und **h** auf ihre gegenseitige Lage. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

- *Test auf Parallelität*
  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4\lambda - 3\mu = 7 \\ 3\lambda - 5\mu = 2 \\ -2\lambda - 1\mu = 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \qquad (1.4.2)$$

$$\text{Lösung:} \quad \begin{array}{ll} 3 \cdot \text{(III)} - \text{(I)}: & -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ \text{Einsetzen in (III)}: & 2 - \mu = 3 \Leftrightarrow \mu = -1 \\ \text{Probe in (I)}: & -4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 7 \checkmark \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = -1$ und $\mu = -1$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*
  λ in g eingesetzt gibt:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (1.4.3)$$

Die Geraden scheiden sich im Punkt $S(-7|6|3)$.

1.5 FLUGZEUGCRASH

Ein Passagierflugzeug F_1 befindet sich im Punkt $A(10|30|2)$ und fliegt geradlinig in Richtung des Punktes $B(40|90|2)$. Ein Sportflugzeug F_2 befindet sich zum gleichen Zeitpunkt im Punkt $C(70|90|11)$ und nimmt Kurs auf den Punkt $D(70|110|8)$ (alle Angaben in km).

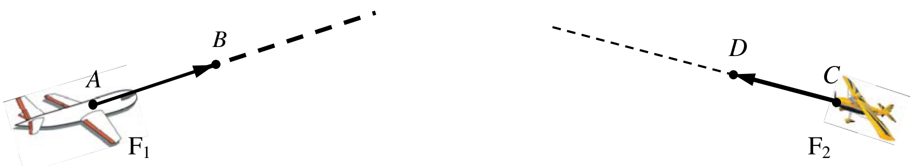


Abbildung 1.3: Skizze der Flugzeuge.

a) Begründen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge auf Kollisionskurs befinden.

zu $\mathbf{F}_1$: Mit den eingesetzten Punkten A und B in die Zweipunktegleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{F_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.1}$$

zu $\mathbf{F}_2$: Mit den eingesetzten Punkten C und D in die Zweipunktegleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{F_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.5.2}$$

- *Test auf Parallelität*
  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 30\lambda = 60 \\ 60\lambda - 20\mu = 60 \\ -3\mu = 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \tag{1.5.3}$$

$$\text{Lösung:} \quad \begin{matrix} \text{(I) nach } \lambda: & 30\lambda = 60 \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ \text{(III) nach } \mu: & 3\mu = 9 \Leftrightarrow \mu = 3 \\ \text{Probe in (II)}: & 60 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 60\checkmark \end{matrix}$$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = 2$ und $\mu = 3$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*
  λ in F_1 eingesetzt gibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.5.4}$$

Die Flugzeuge fliegen beide durch den Punkt $S(70|150|2)$.

b) Prüfen Sie, ob es tatsächlich zum Crash kommt, wenn sich F_1 mit der Geschwindigkeit 800 km/h, F_2 mit 350 km/h bewegt.

Verbindungsvektor zwischen A und S:

$$\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 70-10 \\ 150-30 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.5}$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen A und S:

$$\left|\overrightarrow{f_1}\right| = \sqrt{60^2 + 120^2 + 0^2} \approx 134{,}16\,\text{km} \tag{1.5.6}$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$\frac{134{,}16\,\text{km}}{800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}1677\,\text{h} \tag{1.5.7}$$

Verbindungsvektor zwischen C und S:

$$\overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} 70-70 \\ 150-90 \\ 2-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -9 \end{pmatrix} \tag{1.5.8}$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen C und S:

$$\left|\overrightarrow{f_2}\right| = \sqrt{0^2 + 60^2 + (-9)^2} \approx 60{,}67\,\text{km} \tag{1.5.9}$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$t_2 = \frac{60{,}67\,\text{km}}{350\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}1733\,\text{h} \tag{1.5.10}$$

Es kommt vermutlich zum Crash, weil beide Flugzeuge zu einem sehr ähnlichen Zeitpunkt im Punkt S eintreffen werden.

1.6 RATHAUS (ABITURAUFGABE)

Ein Rathaus besteht aus einem Quader mit aufgesetztem Walmdach (siehe 1.4; Maße in Meter).

Gegeben sind die Punkte $D(0|0|15)$, $E(8|0|15)$, $F(8|20|15)$, $G(0|20|15)$ und $T(4|17|21)$.

Neben dem Rathaus steht im Punkt $F_1(4|37|0)$ ein 13 m hoher senkrechter Fahnenmast mit der Spitze F_2.

Der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ -11 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung des einfallenden Sonnenlichts an.

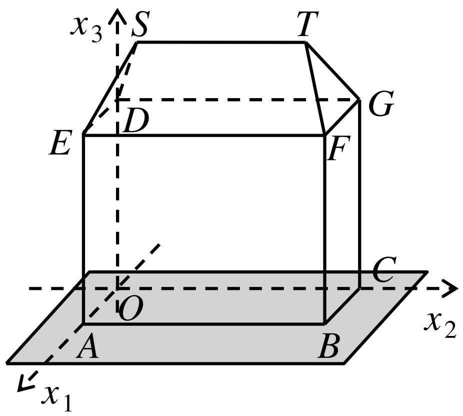


Abbildung 1.4: Skizze des Rathauses.

a) Zeigen Sie, dass der Schatten des Mastes $\overline{F_1F_2}$ eine Rathauswand trifft.

Geradengleichung Schattenspitze:

$$\mathbf{g}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 37 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\lambda \\ 37-17\lambda \\ 13-11\lambda \end{pmatrix} \tag{1.6.1}$$

Da der Fahnenmast in positiver x_2-Richtung zum Rathaus steht, kann der Schatten nur auf die Wand $BCGF$ fallen.

Bedingung für Spurpunkt auf Wand (= Ebene): $x_2 = 20$

Punkt in Wand von **g**: $x_2 = 20 = 37 - 17\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$

Einsetzen von λ in **g**:

$$\overrightarrow{f_2'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.6.2}$$

Die Spitze des Rathausmastes liegt also in $F_2'(5|20|2)$ und damit auf der Rathauswand.

b) Berechnen Sie die gesamte Länge des Schattens.

An der Kante zwischen Haus und Boden macht der Schatten senkrecht unter seiner Spitze einen Knick im Punkt $K(5|20|0)$. Für die Länge dieses Schattenabschnitts gilt intuitiv: $\overline{F_2'K} = 2\,\text{m}$.

Die Strecke des Schattenabschnitts $\overline{F_1K}$ ergibt sich wie folgt:

$$\overrightarrow{f_1k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.6.3}$$

$$\overline{F_1K} = \left|\overrightarrow{f_1k}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 17^2 + 0^2} \approx 17{,}0\,\mathrm{m} \tag{1.6.4}$$

Insgesamt ergibt sich also für den Schatten eine Länge von $\overline{F_2'K} + \overline{F_1K} = 19\,\mathrm{m}$.

1.7 EBENENGLEICHUNGEN

Geben Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C an.

a) $A(2|-4|0)$, $B(-3|1|4)$ und $C(5|0|1)$

$$e : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.7.1}$$

b) $A(1|-2|5)$, $B(-5|4|3)$ und $C(0|0|1)$

$$e : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{1.7.2}$$

1.8 SEITENFLÄCHEN EINES QUADERS

Bestimmen Sie jeweils eine Parametergleichung der Ebene, in der die Seitenflächen $ABFE$ bzw. $BCGF$ des Quaders liegen.

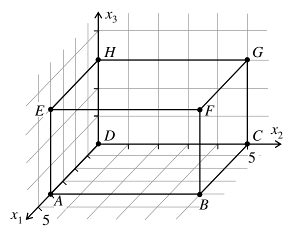


Abbildung 1.5: Skizze des Quaders.

Seitenfläche $ABFE$**:** $A(4|0|0)$, $B(4|5|0)$, $F(4|5|3)$, $E(4|0|3)$

Stützvektor zum Punkt A und Richtungsvektoren zu B und E geben:

$$e : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \, [0;1] \qquad (1.8.1)$$

Seitenfläche $BCGF$**:** $B(4|5|0)$, $C(0|5|0)$, $F(0|5|3)$, $F(4|5|3)$

Stützvektor zum Punkt C und Richtungsvektoren zu B und G geben:

$$e : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \, [0;1] \qquad (1.8.2)$$

1.9 EBENEN EINER PYRAMIDE

Gegeben ist eine Pyramide mit einem Quadrat der Seitenlänge 4 als Grundfläche sowie dem Punkt $S(2|2|4)$ als Spitze.

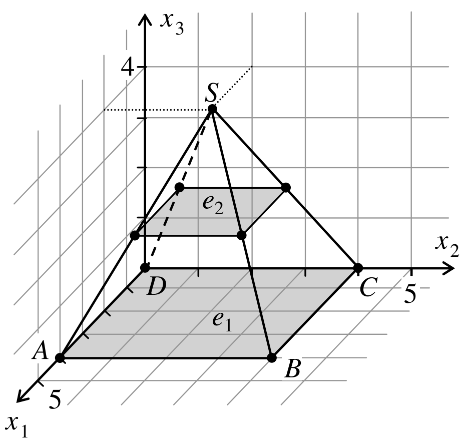


Abbildung 1.6: Skizze der Pyramide.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene e_1, in der die Bodenfläche liegt.

Entnehmen Sie die notwendigen Informationen aus der Zeichnung.

Mit $D = O$ als Aufpunkt der Ebene ergibt sich für die Ebenengleichung:

$$e: \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in [0; 4] \tag{1.9.1}$$

b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene e_2, in der die Mittenfläche liegt.

Für den Mittelpunkt zwischen D und S gilt:

$$D_m = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{d} + \overrightarrow{s}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.9.2}$$

Aus der Symmetrie der Pyramide ergibt sich, dass jeder Mittelpunkt einen Abstand von 1 LE zur Spitze in x_1- bzw. x_2-Richtung besitzt. Daher gilt für die Ebenengleichung:

$$e: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in [0; 2] \tag{1.9.3}$$

1.10 SPIEGEL IM MUSEUM

In der Ecke eines großen Museumsraumes wurde für eine Kunstinstallation entsprechend der Abbildung 1.7 ein dreieckiger Spiegel eingebaut.

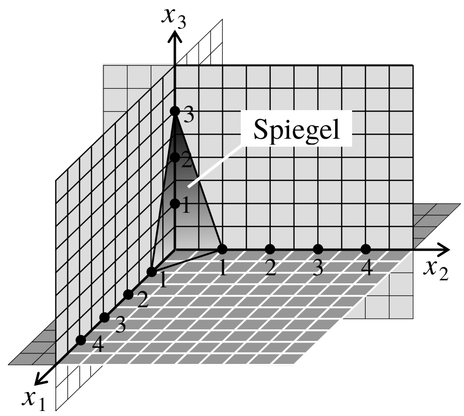


Abbildung 1.7: Skizze des Museumsraumes.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene e auf, in der der Spiegel liegt. Entnehmen Sie die notwendigen Informationen aus der Abbildung.

$$e : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda + \mu \leq 1 \tag{1.10.1}$$

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(\frac{1}{3}|\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$ auf der Spiegelfläche liegt.

$$\begin{pmatrix} 0{,}\overline{3} \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.10.2}$$

Um die Bedingung für die x_1-Koordinate zu erfüllen, muss intuitiv gelten:

$$x_1 = 0, \overrightarrow{3} = 0 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}\overline{3}. \tag{1.10.3}$$

Um die Bedingung für die x_2-Koordinate zu erfüllen, muss intuitiv gelten:

$$x_2 = 0{,}5 = 0 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \Leftrightarrow \mu = 0{,}5. \tag{1.10.4}$$

Einsetzen von λ und μ gibt für die x_3-Koordinate:

$$x_3 = 3 + \frac{1}{3} \cdot (-3) + 0{,}5 \cdot (-3) = 0{,}5\checkmark \tag{1.10.5}$$

Die notwendige Bedingung $\lambda + \mu \leq 1$ ist ebenfalls erfüllt, denn

$$0{,}\overline{3} + 0{,}5 = 0{,}8\overline{3} \leq 1 \tag{1.10.6}$$

□

1.11 EBENENGLEICHUNGEN

Geben Sie eine Gleichung der beschriebenen Ebene in Koordinatenform an.

a) e_1 ist eine Parallelebene zur x_1-x_2-Ebene durch den Punkt $P(1|2|3)$.

$$e_1 : x_3 = 3 \Leftrightarrow x_3 - 3 = 0 \tag{1.11.1}$$

b) e_2 ist eine Parallelebene zur x_2-x_3-Ebene durch den Punkt $Q(5|-2|-1)$.

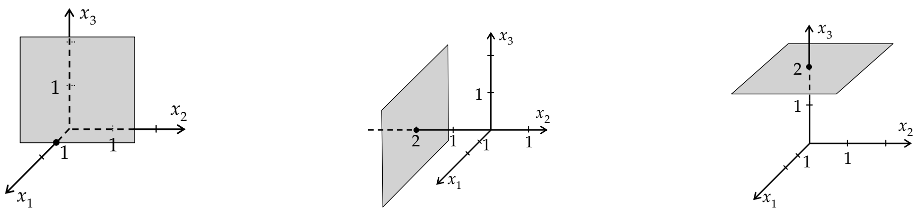
$$e_2 : x_1 = 5 \Leftrightarrow x_1 - 5 = 0 \tag{1.11.2}$$

a) e_3 ist eine Parallelebene zur x_1-x_3-Ebene durch den Punkt $R(-1|-3|-2)$.

$$e_1 : x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 + 3 = 0 \tag{1.11.3}$$

1.12 NOCH MEHR EBENENGLEICHUNGEN

Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebenen an, die durch die markierten Flächen ausschnittsweise dargestellt sind.



a) b) c)

a) Fläche ist senkrecht zur x_1-Achse.

$$e_1 : x_1 - 1 = 0 \tag{1.12.1}$$

b) Fläche ist senkrecht zur x_2-Achse.

$$e_2 : x_2 + 2 = 0 \tag{1.12.2}$$

c) Fläche ist senkrecht zur x_3-Achse.

$$e_3 : x_3 - 2 = 0 \tag{1.12.3}$$

1.13 ACHSENABSCHNITTSFORM

Wandeln Sie die Gleichungen der Ebenen in die Achsenabschnittsform um.

a) $e_a : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

$$e_a : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \tag{1.13.1}$$

b) $e_b : 4x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 12$

$$e_b : \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{\frac{2}{3}} = 1 \tag{1.13.2}$$

c) $e_c : 3x_1 - 2x_3 = 6$

$$e_c : \frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{3} = 1 \tag{1.13.3}$$

d) $e_d : 3x_1 - 6 = 0$

$$e_d : \frac{x_1}{2} = 1 \tag{1.13.4}$$

1.14 GERADEN UND EBENEN

Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene e ist. Untersuchen Sie, ob die Gerade g vollständig in der Ebene verläuft oder ob beide echt parallel sind.

a)

$$e : \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 15 = 0 \quad ; \quad g : \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1.14.1}$$

Parallelität prüfen:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 50 - 14 - 36 = 0\checkmark \tag{1.14.2}$$

Lageentscheidung:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 15 = 20 - 35 + 15 = 0 \tag{1.14.3}$$

Die Gerade verläuft vollständig in der Ebene.

b)

$$e : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 3 = 0 \quad ; \quad g : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1.14.4}$$

Parallelität prüfen:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \checkmark \tag{1.14.5}$$

Lageentscheidung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 = 3 + 2 + 3 = 8 \tag{1.14.6}$$

Die Gerade verläuft echt parallel zur Ebene.

c)

$$e : \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad ; \quad g : \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1.14.7}$$

ANG

$$e : \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 33 = 0 \tag{1.14.8}$$

Parallelität prüfen:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 - 12 + 12 = 0 \checkmark \tag{1.14.9}$$

Lageentscheidung:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 33 = 65 - 42 + 10 + 33 = 66 \tag{1.14.10}$$

Die Gerade verläuft echt parallel zur Ebene.

1.15 GERADENSCHAR

Gegeben sind die Ebene $e : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ sowie die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \tag{1.15.1}$$

Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar g_a in Abhängigkeit von a.

Skalarprodukt der Vektoren für Parallelität:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = a - 6 \tag{1.15.2}$$

Für $a = 6$ sind die Geraden parallel.

Prüfen nach Identität ($\vec{a}$ in e):

$$4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 5 = 9 \neq 0 \tag{1.15.3}$$

Die Gerade g_6 ist echt parallel zu e.

1.16 PARALLELITÄT VON EBENEN

Zeigen Sie, dass die Ebenen e_1 und e_2 parallel sind. Untersuchen Sie weiter, ob die beiden Ebenen identisch oder echt parallel sind.

$$e_1 : 2x_1 - x_2 - 5 = 0 \quad ; \quad e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.16.1}$$

Normalenvektoren:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16.2}$$

$$\vec{n_2} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16.3}$$

Die Ebenen sind nicht parallel, weil ihre Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind.

1.17 PARAMETER UND EBENEN 1. TEIL

Gegeben sind die Ebenen e_1 und e_2:

$$e_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} - 3 = 0 \tag{1.17.1}$$

und

$$\overrightarrow{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{1.17.2}$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen senkrecht aufeinander stehen.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_S der beiden Ebenen.

1.18 PARAMETER UND EBENEN 2. TEIL

Gegeben ist die Ebenenschar e_k und die Geradenschar g_k mit

$$e_k : kx_1 + x_2 - x_3 - 2k = 0 \tag{1.18.1}$$

und

$$g_k : \overrightarrow{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } k, \mu \in \mathbb{R}. \tag{1.18.2}$$

a) Ermitteln Sie die Werte für k, für die die Geraden g_k parallel zur zugehörigen Ebene e_k verlaufen.

b) Prüfen Sie, ob dabei echte Parallelität vorliegt, oder ob die entsprechende Gerade vollständig in der zugehörigen Ebene verläuft.