

HOCHWALD-GYMNASIUM WADERN

NOTIZEN UND HAUSAUFGABEN

Mathe

Alexander Jacob

Schuljahr 2024/2025

1	Vektoren	1
1.1	Spurpunkte berechnen	1
1.2	Pyramide	3
1.3	Schatten einer Plakatwand	4
1.4	Lageuntersuchung von Geraden	5
1.5	Flugzeugcrash	6
1.6	Rathaus (Abituraufgabe)	8

1 | VEKTOREN

1.1 SPURPUNKTE BERECHNEN

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

zu \mathbf{g} :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 6\lambda \\ 7 + 4\lambda \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 7 + 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|-9,5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 + 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6,\bar{3} \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

Spurpunkt: $S_{13}(2|0|6,\bar{3})$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \nmid$

Es gibt keinen Spurpunkt von g in der x_2 - x_3 -Ebene.

zu **h**:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 + \mu \\ 3\mu \\ -5 + 2\mu \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **h** in der x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = -5 + 2\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{12} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

Spurpunkt: $S_{12}(-0,5|7,5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **h** in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3\mu \Leftrightarrow \mu = 0$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Spurpunkt: $S_{13}(-3|0|-5)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **h** in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = -3 + \mu \Leftrightarrow \mu = 3$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|9|1)$

b) Von einer Geraden sind die Spurpunkte $S_{12}(2|3|0)$ und $S_{23}(0|-1|1)$ bekannt. Bestimmen Sie den Spurpunkt S_{13} .

Zweipunktegleichung einer Geraden:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (1.1.9)$$

Mit den eingesetzten Punkten S_{12} und S_{23} in 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ 3 - 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,75 \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

Spurpunkt: $S_{12}(0,5|0|0,75)$

1.2 PYRAMIDE

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge des in der x_1 - x_2 -Ebene liegenden Quadrates ABCD beträgt 80 m, die Pyramide hat eine Höhe von 60 m.

Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Schattenpunkt S' der Pyramidenspitze S liegt in der x_1 - x_2 -Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von S' .

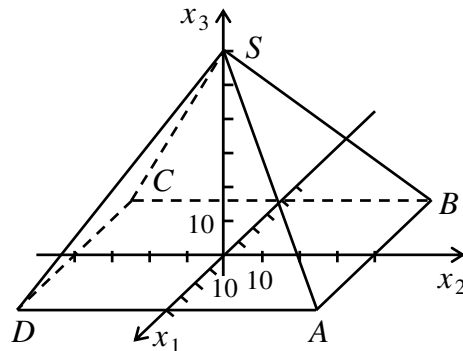


Abbildung 1.1: Skizze der Pyramide.

Vektor der auf Punkt S fallenden Sonnenstrahlen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

Punkt in der x_1 - x_2 -Ebene: $0 = 60 - 3\lambda \Leftrightarrow 60 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 20$

Schattenpunkt: $S'(40|80|0)$

1.3 SCHATTEN EINER PLAKATWAND

Vor einem Haus steht eine Plakatwand, die 3 m breit und 6 m hoch ist. Ein Punkt der Wand ist $A(6|2|6)$. Auf die Plakatwand fällt paralleles Sonnenlicht. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und beschreiben Sie den Verlauf des Schattens an der Hauswand und auf dem Boden.

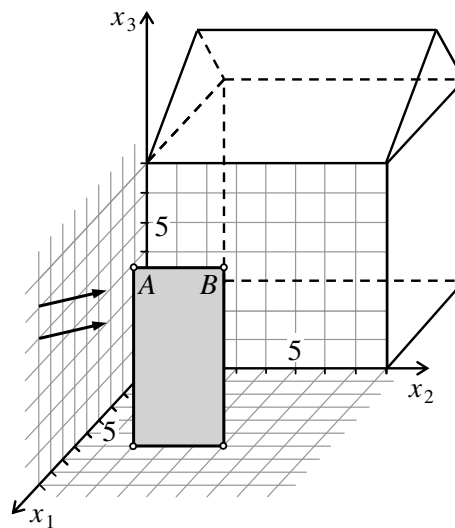


Abbildung 1.2: Skizze der Plakatwand mit Hauswand.

Geraden in Richtung des Sonneneinfalls:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda \\ 2 + \lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\mu \\ 5 + \mu \\ 6 - \mu \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

Gesucht sind jeweils die Spurpunkte von \mathbf{g} und \mathbf{h} mit der x_2 - x_3 -Ebene (= Hauswand).

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Für g gilt: Punkt von **g** in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 - 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{A23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|4|4)$

Für h gilt: Punkt von **h** in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 + -3\mu \Leftrightarrow \mu = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{B23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

Spurpunkt: $S_{B23}(0|7|4)$

Der Schatten der Plakatwand fällt also zum Teil auf die Hauswand bis auf eine Höhe von 4m mit einer Breite von 3m. Der andere Teil des Schattens fällt demnach auf den Boden vor der Hauswand zwischen den Punkten A_0 , B_0 , S_{A0} und S_{B0} . Für diese Punkte gilt, dass sie senkrecht unter den Punkten A , B , S_{A23} und S_{B23} auf der x_1 - x_2 -Ebene liegen. Es gilt: $A_0 = (6|2|0)$, $B_0 = (6|5|0)$, $S_{A0} = (0|4|0)$ und $S_{B0} = (0|7|0)$.

1.4 LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN

Untersuchen Sie die Geraden **g** und **h** auf ihre gegenseitige Lage. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

- *Test auf Parallelität*

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -4\lambda - 3\mu = 7 & \text{(I)} \\ 3\lambda - 5\mu = 2 & \text{(II)} \\ -2\lambda - 1\mu = 3 & \text{(III)} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

$$3 \cdot \text{(III)} - \text{(I)} : -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$\text{Lösung: Einsetzen in (III)} : 2 - \mu = 3 \Leftrightarrow \mu = -1$$

$$\text{Probe in (I)} : -4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 7 \checkmark$$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = -1$ und $\mu = -1$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*

λ in g eingesetzt gibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

Die Geraden scheiden sich im Punkt $S(-7|6|3)$.

1.5 FLUGZEUGCRASH

Ein Passagierflugzeug F_1 befindet sich im Punkt $A(10|30|2)$ und fliegt geradlinig in Richtung des Punktes $B(40|90|2)$. Ein Sportflugzeug F_2 befindet sich zum gleichen Zeitpunkt im Punkt $C(70|90|11)$ und nimmt Kurs auf den Punkt $D(70|110|8)$ (alle Angaben in km).



Abbildung 1.3: Skizze der Flugzeuge.

- a) Begründen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge auf Kollisionskurs befinden.

zu F_1 : Mit den eingesetzten Punkten A und B in die Zweipunktgleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$F_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

zu F_2 : Mit den eingesetzten Punkten C und D in die Zweipunktgleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$F_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (1.5.2)$$

- *Test auf Parallelität*

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 30\lambda = 60 & \text{(I)} \\ 60\lambda - 20\mu = 60 & \text{(II)} \\ -3\mu = 9 & \text{(III)} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\text{(I) nach } \lambda : 30\lambda = 60 \iff \lambda = 2$$

$$\text{Lösung: (III) nach } \mu : 3\mu = 9 \iff \mu = 3$$

$$\text{Probe in (II) : } 60 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 60 \checkmark$$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = 2$ und $\mu = 3$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*

λ in F_1 eingesetzt gibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.5.4)$$

Die Flugzeuge fliegen beide durch den Punkt $S(70|150|2)$.

b) Prüfen Sie, ob es tatsächlich zum Crash kommt, wenn sich F_1 mit der Geschwindigkeit 800 km/h, F_2 mit 350 km/h bewegt.

Verbindungsvektor zwischen A und S :

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 70 - 10 \\ 150 - 30 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.5)$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen A und S :

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{60^2 + 120^2 + 0^2} \approx 134,16 \text{ km} \quad (1.5.6)$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$\frac{134,16 \text{ km}}{800 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0,1677 \text{ h} \quad (1.5.7)$$

Verbindungsvektor zwischen C und S :

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 70 - 70 \\ 150 - 90 \\ 2 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -9 \end{pmatrix} \quad (1.5.8)$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen C und S :

$$|\vec{f}_2| = \sqrt{0^2 + 60^2 + (-9)^2} \approx 60,67 \text{ km} \quad (1.5.9)$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$t_2 = \frac{60,67 \text{ km}}{350 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0,1733 \text{ h} \quad (1.5.10)$$

Es kommt vermutlich zum Crash, weil beide Flugzeuge zu einem sehr ähnlichen Zeitpunkt im Punkt S eintreffen werden.

1.6 RATHAUS (ABITURAUFGABE)

Ein Rathaus besteht aus einem Quader mit aufgesetztem Walmdach (siehe 1.4; Maße in Meter).

Gegeben sind die Punkte $D(0|0|15)$, $E(8|0|15)$, $F(8|20|15)$, $G(0|20|15)$ und $T(4|17|21)$.

Neben dem Rathaus steht im Punkt $F_1(4|37|0)$ ein 13 m hoher senkrechter Fahnenmast mit der Spitze F_2 .

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ -11 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung des einfallenden Sonnenlichts an.

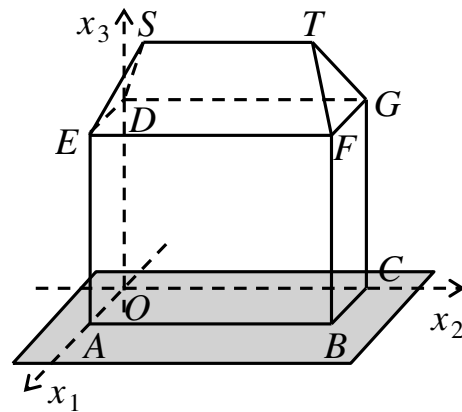


Abbildung 1.4: Skizze des Rathauses.

- a) Zeigen Sie, dass der Schatten des Mastes $\overline{F_1 F_2}$ eine Rathauswand trifft.

Geradengleichung Schattenspitze:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 37 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda \\ 37 - 17\lambda \\ 13 - 11\lambda \end{pmatrix} \quad (1.6.1)$$

Da der Fahnenmast in positiver x_2 -Richtung zum Rathaus steht, kann der Schatten nur auf die Wand $BCGF$ fallen.

Bedingung für Spurpunkt auf Wand (= Ebene): $x_2 = 20$

Punkt in Wand von \mathbf{g} : $x_2 = 20 = 37 - 17\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$

Einsetzen von λ in \mathbf{g} :

$$\vec{f'_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.6.2)$$

Die Spitze des Rathausmastes liegt also in $F'_2(5|20|2)$ und damit auf der Rathauswand.

- b) Berechnen Sie die gesamte Länge des Schattens.

An der Kante zwischen Haus und Boden macht der Schatten senkrecht unter seiner Spitze einen Knick im Punkt $K(5|20|0)$. Für die Länge dieses Schattenabschnitts gilt intuitiv: $\overline{F'_2 K} = 2 \text{ m}$.

Die Strecke des Schattenabschnitts $\overline{F_1K}$ ergibt sich wie folgt:

$$\overrightarrow{f_1k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.3)$$

$$\overline{F_1K} = |f_1k| = \sqrt{(-1)^2 + 17^2 + 0^2} \approx 17,0 \text{ m} \quad (1.6.4)$$

Insgesamt ergibt sich also für den Schatten eine Länge von $\overline{F_2'K} + \overline{F_1K} = 19 \text{ m}$.