

HOCHWALD-GYMNASIUM WADERN

NOTIZEN UND HAUSAUFGABEN

Mathe

Alexander Jacob

Schuljahr 2024/2025

1	Vektoren	1
1.1	Spurpunkte berechnen	1
1.2	Schatten einer Plakatwand	3
1.3	Lageuntersuchung von Geraden	4

1 | VEKTOREN

1.1 SPURPUNKTE BERECHNEN

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

zu \mathbf{g} :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 6\lambda \\ 7 + 4\lambda \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 7 + 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|-9,5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 + 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6,\bar{3} \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

Spurpunkt: $S_{13}(2|0|6,\bar{3})$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 \neq 2 \nmid$

Es gibt keinen Spurpunkt von g in der x_2 - x_3 -Ebene.

zu **h**:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 + \mu \\ 3\mu \\ -5 + 2\mu \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **h** in der x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = -5 + 2\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{12} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

Spurpunkt: $S_{12}(-0,5|7,5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **h** in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3\mu \Leftrightarrow \mu = 0$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Spurpunkt: $S_{13}(-3|0|-5)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **h** in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = -3 + \mu \Leftrightarrow \mu = 3$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|9|1)$

b) Von einer Geraden sind die Spurpunkte $S_{12}(2|3|0)$ und $S_{23}(0|-1|1)$ bekannt. Bestimmen Sie den Spurpunkt S_{13} .

Zweipunktegleichung einer Geraden:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (1.1.9)$$

Mit den eingesetzten Punkten S_{12} und S_{23} in 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ 3 - 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von \mathbf{g} in der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\vec{s}_{13} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,75 \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

Spurpunkt: $S_{12}(0,5|0|0,75)$

1.2 SCHATTEN EINER PLAKATWAND

Vor einem Haus steht eine Plakatwand, die 3 m breit und 6 m hoch ist. Ein Punkt der Wand ist $A(6|2|6)$. Auf die Plakatwand fällt paralleles Sonnenlicht. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und beschreiben Sie den Verlauf des Schattens an der Hauswand und auf dem Boden.

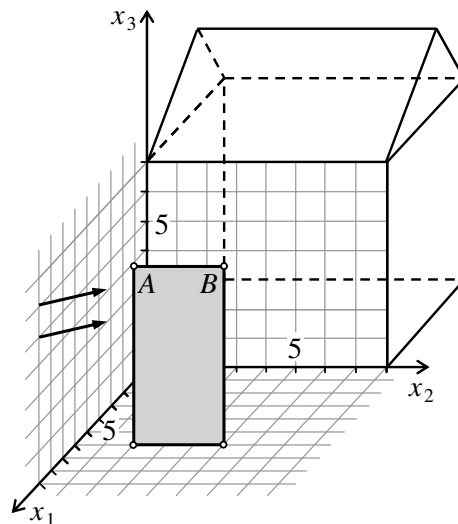


Abbildung 1.1: Skizze der Plakatwand mit Hauswand.

Geraden in Richtung des Sonneneinfalls:

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda \\ 2 + \lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\mu \\ 5 + \mu \\ 6 - \mu \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

Gesucht sind jeweils die Spurpunkte von \mathbf{g} und \mathbf{h} mit der x_2 - x_3 -Ebene (= Hauswand).

Bedingung für Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

Für \mathbf{g} gilt: Punkt von \mathbf{g} in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 + -3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{A23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|4|4)$

Für \mathbf{h} gilt: Punkt von \mathbf{h} in der x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 - 3\mu \Leftrightarrow \mu = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{B23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

Spurpunkt: $S_{B23}(0|7|4)$

Der Schatten der Plakatwand fällt also zum Teil auf die Hauswand bis auf eine Höhe von 4 m mit einer Breite von 3 m. Der andere Teil des Schattens fällt demnach auf den Boden vor der Hauswand zwischen den Punkten A_0 , B_0 , S_{A0} und S_{B0} . Für diese Punkte gilt, dass sie senkrecht unter den Punkten A , B , S_{A23} und S_{B23} auf der x_1 - x_2 -Ebene liegen. Es gilt: $A_0 = (6|2|0)$, $B_0 = (6|5|0)$, $S_{A0} = (0|4|0)$ und $S_{B0} = (0|7|0)$.

1.3 LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN

Untersuchen Sie die Geraden \mathbf{g} und \mathbf{h} auf ihre gegenseitige Lage. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

- *Test auf Parallelität*

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda - 3\mu = 7 & \text{(I)} \\ 3\lambda - 5\mu = 2 & \text{(II)} \\ -2\lambda - \mu = 3 & \text{(III)} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$$3 \cdot \text{(III)} - \text{(I)} : -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Lösung: Einsetzen in (III) : $2 - \mu = 3 \Leftrightarrow \mu = -1$

Probe in (I) : $-4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 7 \checkmark$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = -1$ und $\mu = -1$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*

λ in g eingesetzt gibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Die Geraden scheiden sich im Punkt $S(-7|6|3)$.