Hochwald-Gymnasium Wadern

Notizen und Hausaufgaben

Mathe

Alexander Jacob

Schuljahr 2024/2025

1 VEKTOREN

1.1 SPURPUNKTE BERECHNEN

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

$$\mathbf{g}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

zu g:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 6\lambda \\ 7 + 4\lambda \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 7 + 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{12}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|-9{,}5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 + 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6{,}\overline{3} \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

Spurpunkt: $S_{12}(2|0|6{,}\overline{3})$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **g** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 \neq 2$ ↯

Es gibt keinen Spurpunkt von g in der x_2-x_3-Ebene.

zu h:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3+\mu \\ 3\mu \\ -5+2\mu \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt von **h** in der x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = -5 + 2\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{12}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

Spurpunkt: $S_{12}(-0{,}5|7{,}5|0)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **h** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3\mu \Leftrightarrow \mu = 0$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1.1.7}$$

Spurpunkt: $S_{12}(-3|0|-5)$

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Punkt von **h** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = -3 + \mu \Leftrightarrow \mu = 3$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|9|1)$

b) Von einer Geraden sind die Spurpunkte $S_{12}(2|3|0)$ und $S_{23}(0|-1|1)$ bekannt. Bestimmen Sie den Spurpunkt S_{13}.

Zweipunktegleichung einer Geraden:

$$\mathbf{g} : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) \tag{1.1.9}$$

Mit den eingesetzten Punkten S_{12} und S_{23} in 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{g} : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 3-4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Punkt von **g** in der x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{13}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

Spurpunkt: $S_{12}(0{,}5|0|0{,}75)$

1.2 PYRAMIDE

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge des in der x_1-x_2-Ebene liegenden Quadrates ABCD beträgt 80 m, die Pyramide hat eine Höhe von 60 m.

Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Schattenpunkt S' der Pyramidenspitze S liegt in der x_1-x_2-Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von S'.

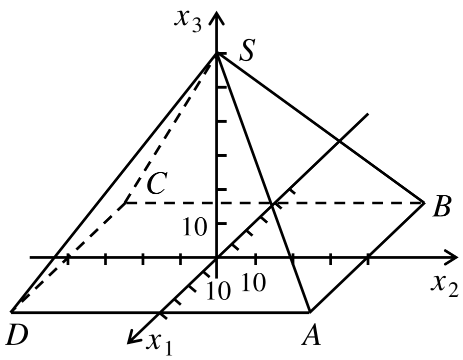

Abbildung 1.1: Skizze der Pyramide.

Vektor der auf Punkt S fallenden Sonnenstrahlen:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

Bedingung für Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Punkt in der x_1-x_2-Ebene: $0 = 60 - 3\lambda \Leftrightarrow 60 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 20$

Schattenpunkt: $S'(40|80|0)$

1.3 SCHATTEN EINER PLAKATWAND

Vor einem Haus steht eine Plakatwand, die 3 m breit und 6 m hoch ist. Ein Punkt der Wand ist $A(6|2|6)$. Auf die Plakatwand fällt paralleles Sonnenlicht. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und beschreiben Sie den Verlauf des Schattens an der Hauswand und auf dem Boden.

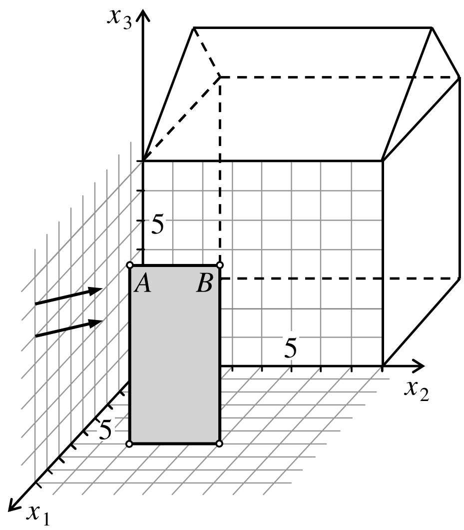

Abbildung 1.2: Skizze der Plakatwand mit Hauswand.

Geraden in Richtung des Sonneneinfalls:

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda \\ 2 + \lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \qquad (1.3.1)$$

$$\mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\mu \\ 5 + \mu \\ 6 - \mu \end{pmatrix} \qquad (1.3.2)$$

Gesucht sind jeweils die Spurpunkte von **g** und **h** mit der x_2-x_3-Ebene (= Hauswand).

Bedingung für Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

Für g gilt: Punkt von **g** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 - 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{\mathrm{A23}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

Spurpunkt: $S_{23}(0|4|4)$

Für h gilt: Punkt von **h** in der x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 6 + -3\mu \Leftrightarrow \mu = 2$

Ortsvektor des Spurpunkts:

$$\overrightarrow{s_{\mathrm{B23}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1.3.4}$$

Spurpunkt: $S_{\mathrm{B23}}(0|7|4)$

Der Schatten der Plakatwand fällt also zum Teil auf die Hauswand bis auf eine Höhe von 4 m mit einer Breite von 3 m. Der andere Teil des Schattens fällt demnach auf den Boden vor der Hauswand zwischen den Punkten A_0, B_0, S_{A0} und S_{B0}. Für diese Punkte gilt, dass sie senkrecht unter den Punkten A, B, S_{A23} und S_{B23} auf der x_1-x_2-Ebene liegen. Es gilt: $A_0 = (6|2|0)$, $B_0 = (6|5|0)$, $S_{A0} = (0|4|0)$ und $S_{B0} = (0|7|0)$.

1.4 LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN

Untersuchen Sie die Geraden **g** und **h** auf ihre gegenseitige Lage. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\mathbf{g} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{h} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

- *Test auf Parallelität*
  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4\lambda - 3\mu = 7 \\ 3\lambda - 5\mu = 2 \\ -2\lambda - 1\mu = 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \qquad (1.4.2)$$

$$\text{Lösung:} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot \text{(III)} - \text{(I)}: \quad -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ \text{Einsetzen in (III)}: \quad 2 - \mu = 3 \Leftrightarrow \mu = -1 \\ \text{Probe in (I)}: \quad -4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 7 \checkmark \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist für $\lambda = -1$ und $\mu = -1$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*
  λ in g eingesetzt gibt:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (1.4.3)$$

Die Geraden scheiden sich im Punkt $S(-7|6|3)$.

1.5 FLUGZEUGCRASH

Ein Passagierflugzeug F_1 befindet sich im Punkt $A(10|30|2)$ und fliegt geradlinig in Richtung des Punktes $B(40|90|2)$. Ein Sportflugzeug F_2 befindet sich zum gleichen Zeitpunkt im Punkt $C(70|90|11)$ und nimmt Kurs auf den Punkt $D(70|110|8)$ (alle Angaben in km).

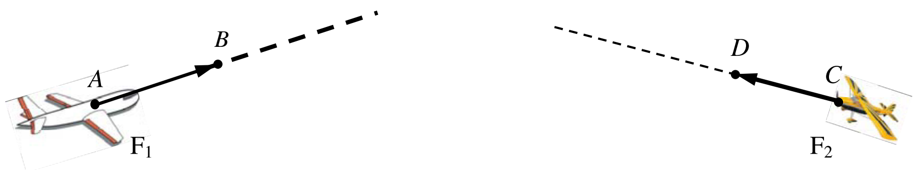

Abbildung 1.3: Skizze der Flugzeuge.

a) Begründen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge auf Kollisionskurs befinden.

zu $\mathbf{F}_1$: Mit den eingesetzten Punkten A und B in die Zweipunktegleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{F_1} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.1}$$

zu $\mathbf{F}_2$: Mit den eingesetzten Punkten C und D in die Zweipunktegleichung 1.1.9 ergibt sich:

$$\mathbf{F_2} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1.5.2}$$

- *Test auf Parallelität*
  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, daher sind die Geraden nicht parallel.

- *Lageentscheidung (Gleichsetzungsverfahren)*

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 30\lambda = 60 \\ 60\lambda - 20\mu = 60 \\ -3\mu = 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} \tag{1.5.3}$$

$$\text{Lösung:} \quad \begin{matrix} \text{(I) nach } \lambda: & 30\lambda = 60 \Leftrightarrow \lambda = 2 \\ \text{(III) nach } \mu: & 3\mu = 9 \Leftrightarrow \mu = 3 \\ \text{Probe in (II)}: & 60 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 60 \checkmark \end{matrix}$$

  Das Gleichungssystem ist für $\lambda = 2$ und $\mu = 3$ erfüllt, somit gibt es einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*
  λ in F_1 eingesetzt gibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.5.4}$$

  Die Flugzeuge kollidieren im Punkt $S(70|150|2)$.

b) Prüfen Sie, ob es tatsächlich zum Crash kommt, wenn sich F_1 mit der Geschwindigkeit 800 km/h, F_2 mit 350 km/h bewegt.

Verbindungsvektor zwischen A und S:

$$\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 70-10 \\ 150-30 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.5}$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen A und S:

$$\left|\overrightarrow{f_1}\right| = \sqrt{60^2 + 120^2 + 0^2} = 134{,}16\,\mathrm{km} \tag{1.5.6}$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$\frac{134{,}16\,\mathrm{km}}{800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 0{,}1677\,\mathrm{h} \tag{1.5.7}$$

Verbindungsvektor zwischen C und S:

$$t_1 = \overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} 70-70 \\ 150-90 \\ 2-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -9 \end{pmatrix} \tag{1.5.8}$$

Länge des Verbindungsvektors zwischen C und S:

$$\left|\overrightarrow{f_2}\right| = \sqrt{0^2 + 60^2 + (-9)^2} = 60{,}67\,\mathrm{km} \tag{1.5.9}$$

Zeit bis zum Eintreffen:

$$t_2 = \frac{60{,}67\,\mathrm{km}}{350\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 0{,}1733\,\mathrm{h} \tag{1.5.10}$$

Es kommt vermutlich zum Crash, weil beide Flugzeuge zu einem sehr ähnlichen Zeitpunkt im Punkt S eintreffen werden.