Kalkulus OBlig 3. Alexander Gilstedt.

1)

$$y = f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1.$$

a)

Skjæring med y aksen: der $x = 0$.

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = \underline{0}$$

<u>y-aksen: (0,0)</u>

Skjæring med x-aksen der $y = 0$.

$$\frac{4x}{(x-1)^2} = 0 \quad , \quad 4 \cdot x \cdot (x-1)^{-2} = 0$$

Se at x må være 0 for at likningen skal gå opp.

<u>X-aksen: (0,0)</u>

b) Erstatter x med $-x$ altså $f(-x)$ og ser hva utrykket blir.

$$f(-x) = \frac{4 \cdot (-x)}{(-x-1)^2} = \frac{-4x}{-1(x+1)^2} = -\frac{4x}{(x+1)^2}$$

Origo: $f(-x) \neq -f(x)$

y-aksen: $f(-x) \neq f(x)$

<u>Ingen Symetri, hverken om origo eller y-aksen</u>

c) $y = f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1$

Vertikal asymptote:

$\lim_{x \to 1} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{4 \cdot 1}{(1-1)^2} = \frac{4}{0}$ - Grenseverdien eksisterer ikke.

$f(x) \to \infty$, når $x \to 1$, $x = 1$ er en vertikal asymptote.

Horisontal asymptote

$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2 - 2x + 1} \quad | : x^2$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = \underline{0}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = \underline{0}$

$y = 0$ e en horisontal asymptote.

Vi har ingen skrå asymptoter, da telleren ikke er en grad høyere enn nevneren, omvendt.

d) Finner først de kritiske punktene, der $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\cdot(x-1)^2 - (4x\cdot(2(x-1)\cdot 1))}{((x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2-2x+1)-(8x^2-8x)}{(x-1)^4} = \frac{4x^2-8x+4-8x^2+8x}{(x-1)^4}$$

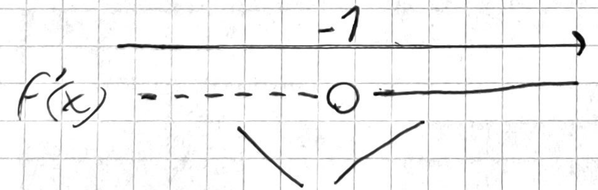
$$= \frac{-4x^2+4}{(x-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)}{(x-1)^4} = \frac{-4(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)^4}} = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \iff$

$$\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3} = 0$$

for at dette skal bli null, må telleren bli 0. Det gir $\underline{x = -1}$

Fortegnslinje: Tester med -2 og 0.



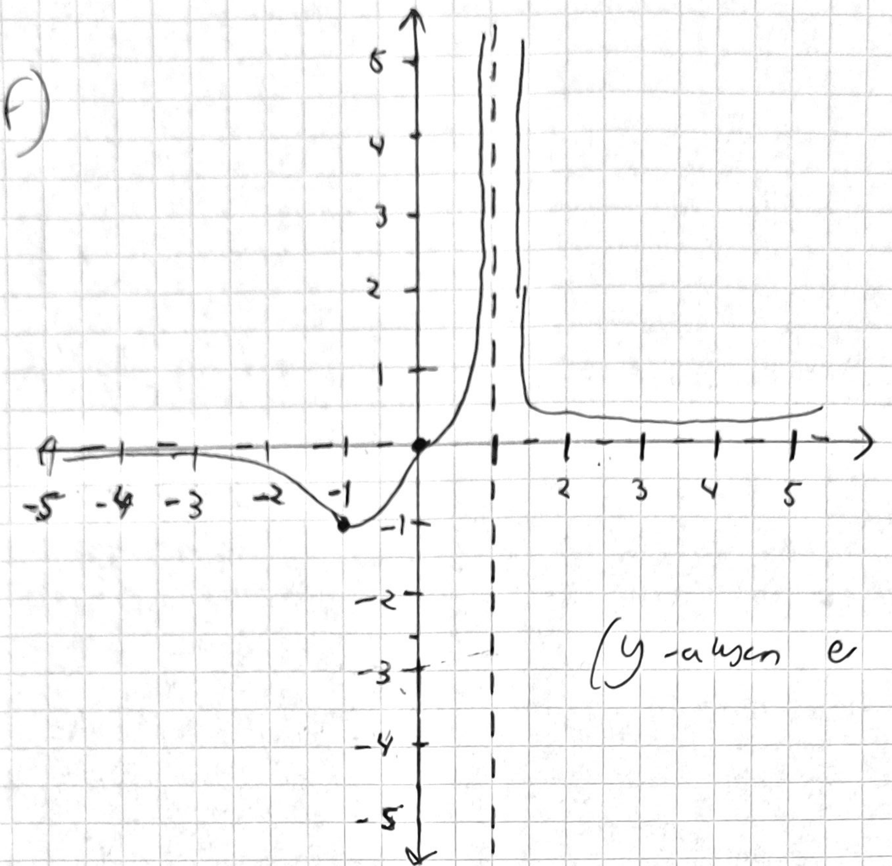
$$f(-1) = \frac{4\cdot -1}{(-1-1)^2} = \frac{-4}{4} = \underline{-1}$$

Bunnpunkt.

<u>Lokalt minimum i $(-1,-1)$</u>

(<u>Tegnet grafen, og ser at dette også</u> er et <u>globalt minimum</u>)

f)



(y-aksen e en asymptote)

2

$$y = f(x) = \frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1} \qquad D_f = [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

a) x-aksen: (der $y=0$)

$$\frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1} = 0$$ (der telleren er 0)

$\cos x = -1$

$x = \pi$ x-aksen: $(\pi, 0)$

y-aksen: der $x=0$

$$\cos(0) = 1 \rightarrow \frac{1+1}{2\cdot 1 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

y-aksen: $(0, 2)$

b) $y = f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}$ $\quad D_f = [0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Vertikale asymptoter:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1} = \frac{\cos\frac{\pi}{3} + 1}{2\cos\frac{\pi}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{0}$$

$$\lim_{x \to \frac{5\pi}{3}} \frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1} = \frac{\cos\frac{5\pi}{3} + 1}{2\cos\frac{5\pi}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{0}$$

$f(x) \to \infty$ når $x \to \frac{\pi}{3}$ $\wedge$ $x \to \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$ og $x = \frac{5\pi}{3}$ er vertikale asymptoter.

Horisontale asymptoter

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}$$

Det er ikke mulig å bestemme $\cos(\infty)$, og det eksisterer derfor ingen grenseverdi; dette gjelder også når $x \to -\infty$. Ingen horisontale asymptoter.

Skrå-asymptoter

Vi har ingen horisontal asymptote, og teller og nevner er av samme orden $\Leftrightarrow$ Ingen skrå asymptote

c) $y = f(x) = \frac{\cos x + 1}{2\cos x - 1}$ $\quad D_f = [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

finner først de kritiske punktene der $f'(x) = 0$

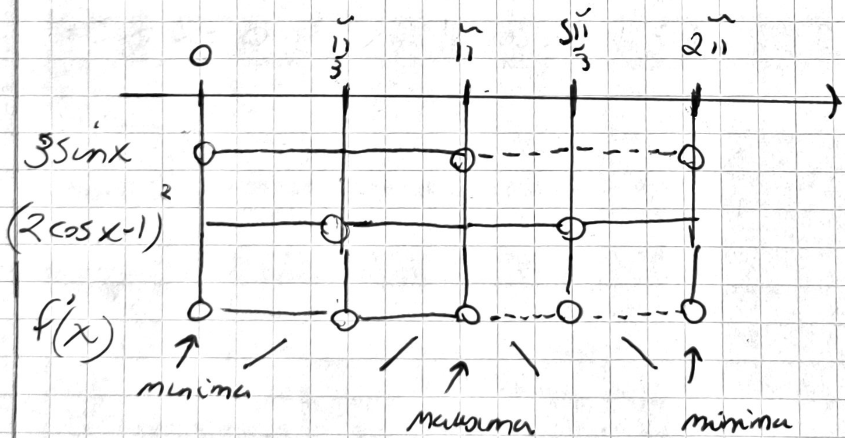
$$f'(x) = \frac{-\sin x(2\cos x - 1) + (\cos x + 1)\cdot(-2\sin x)}{(2\cos x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\cos x\sin x + \sin x - (-2\sin x\cos x - 2\sin x)}{(2\cos x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\cos x\sin x + \sin x + 2\sin\cos x + 3\sin x}{(2\cos x - 1)^2}$$

$f'(x) = \frac{3\sin x}{(2\cos x - 1)^2}$, $f'(x) = 0$ der telleren $= 0$. $\left(\frac{0}{1}\right)$

$3\sin x = 0$, $\sin x = 0$, $x = 0 \wedge x = \pi \wedge x = 2\pi$

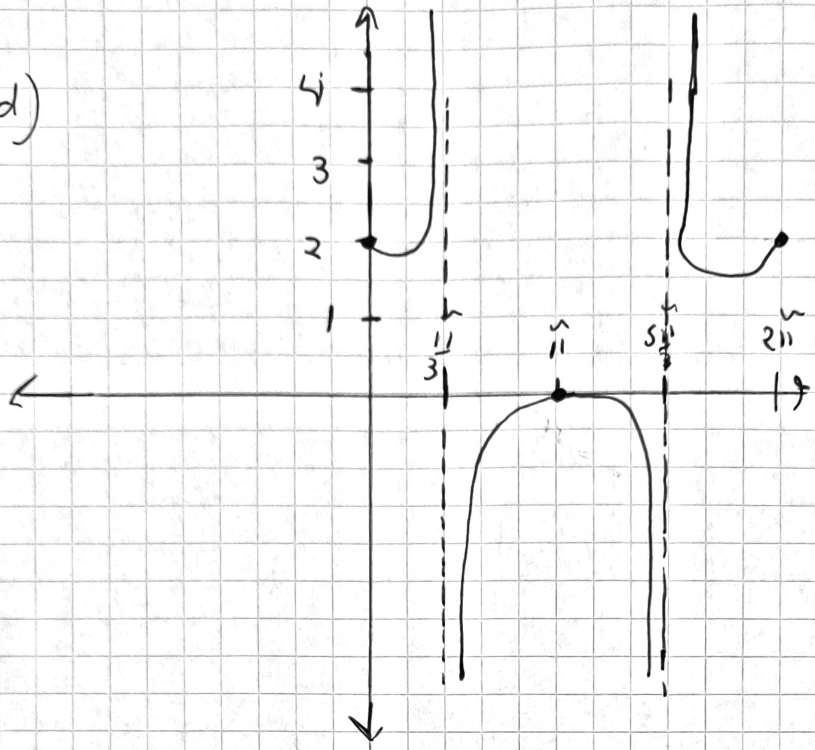


$f(0) = 2.$, $f(\pi) = 0$, $f(2\pi) = 2$

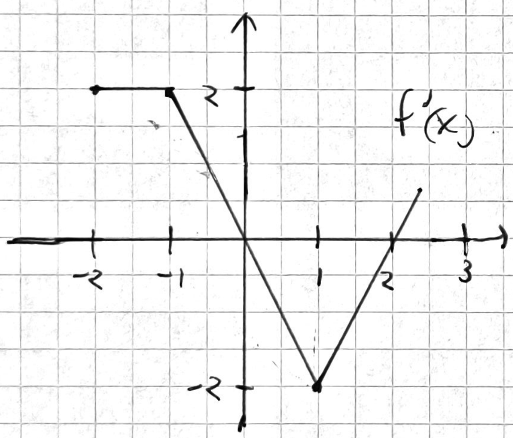
Lokale maksimum: $(\pi, 0)$

Lokale minimum: $(0, 2) \wedge (2\pi, 2)$

(De lokale minimumene er større enn maksima (=) ingen globale [illegible] maksima) d)



3



$f(x)$, $D_f: \langle -2, 3 \rangle$

a) (Stigningen er konstant $2 > x \leq 1$, $x \in \langle -2, -1]$)
funksjonen er voksende når $f'(x)$ er positiv.
dvs $x \in \langle -2, 0 \rangle$ og når $x \in [2, 3 \rangle$

funksjonen er avtagende når $f'(x)$ er negativ. dvs.

$x \in \langle 0, 2 \rangle$

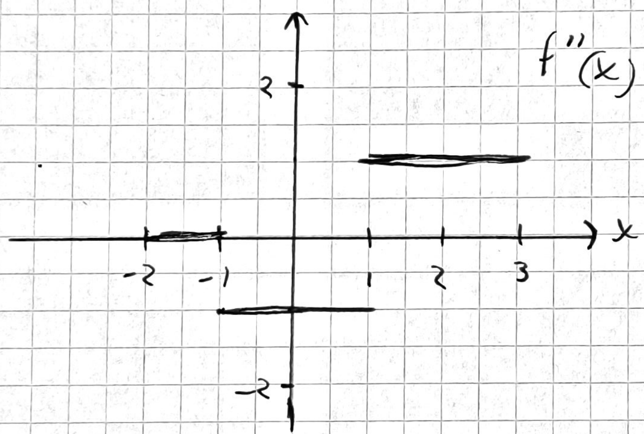
b) Lokale maksima eller minima finner vi der:

- $f'(x) = 0$
- $f'(x)$ = ikke definert. (knekkpunkt.)

Av grafen ser vi at $f'(x) = 0$ for to x-verdier.
Analyserer vi stigningen ser vi at

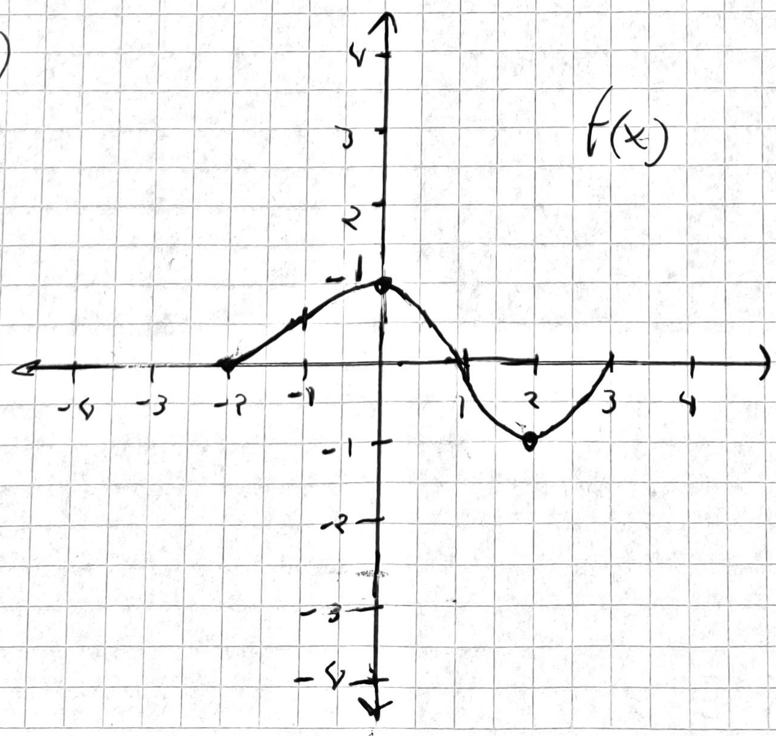
$x = 0$ er et lokalt maksima.
$x = 2$ er et lokalt minima.

c)

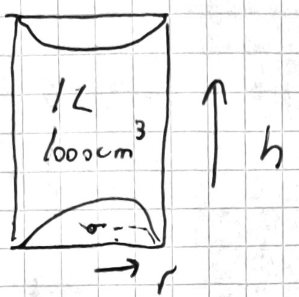


- Når stigningen til $f'(x)$ er 0 er $f''(x) = 0$
- Når $f'(x)$ synker er $f''(x)$ negativ
- Når $f'(x)$ øker er $f''(x)$ positiv.

d)



4



- Arealet av overflaten til sylinderen er gitt ved:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

finner deretter et uttrykk for h, ved hjelp av volumet.

$V = \pi r^2 \cdot h$, $1000 = \pi r^2 \cdot h$, Løses med hensyn på h.

$h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right)$

$A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot 1000}{\cancel{\pi} r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

finner kritiske punkter der $A'(r) = 0$

$A(r) = 2\pi r^2 + 2000 \cdot r^{-1}$

$A'(r) = 4\pi r + -2000^{-2}$

$A'(r) = 0$

→

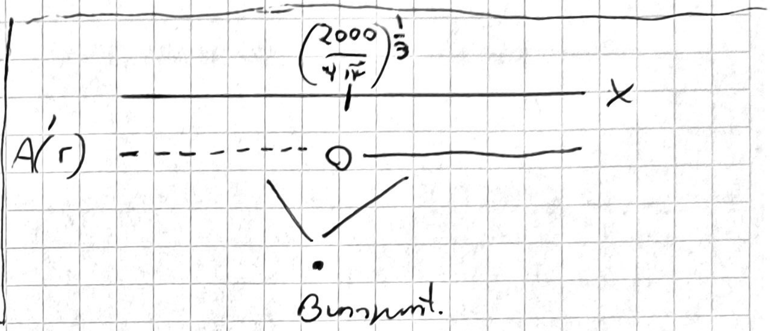
$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2$$

$$4\pi r^3 = 2000 \quad \Big| : 4\pi$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi}$$

$$r = \left(\frac{2000}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$



Kan da finne verdiene:

$$r = \left(\frac{2000}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}419 \approx \underline{5{,}42}$$

$$h = \frac{2000}{\pi r^2}, \quad h = \frac{2000}{\pi \cdot 5{,}42^2} = 10{,}8395 \approx \underline{10{,}84}$$

Radius = 5,42 cm, og høyde = 10,84 cm for at metallforbruket skal være minst mulig.

5

Tall 1: x

Tall 2: y

$x + y = 7 \quad (x, y > 0)$

$y = 7 - x$

Produktet av tallene som en funksjon av x.

$f(x) = x \cdot y, \quad f(x) = x(7-x) = -x^2 + 7x$

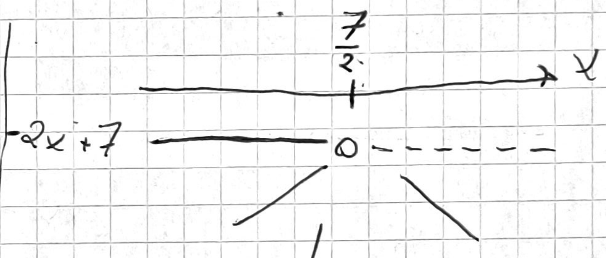
Finner kritiske punkter, der $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -2x + 7$

$-2x + 7 = 0$

$-2x = -7$

$x = \frac{7}{2}$



Dette er da et toppunkt.

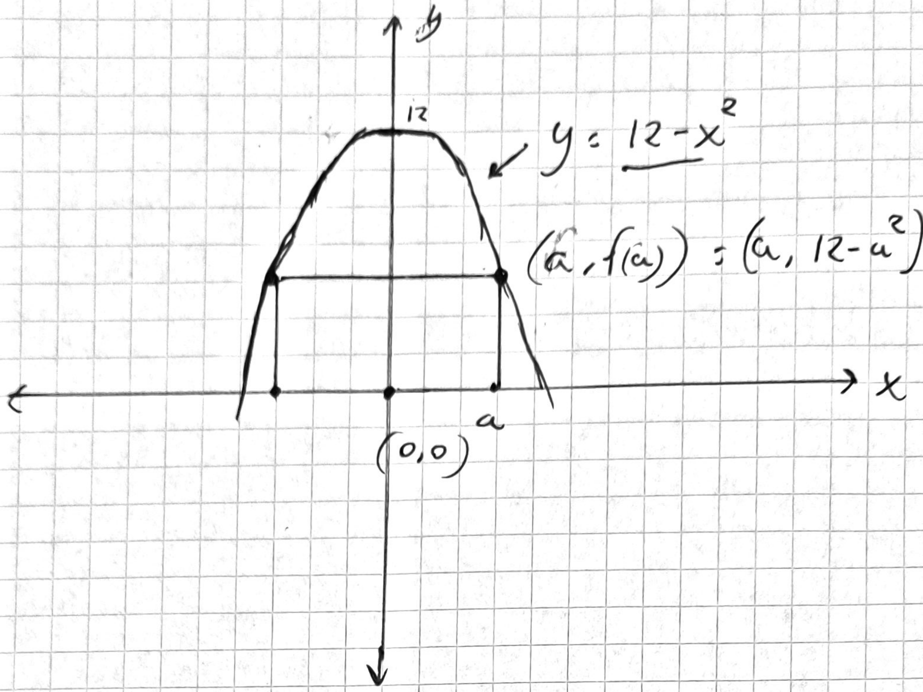
$x = \frac{7}{2}$:

$y = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 2}{2} - \frac{7}{2} = \frac{14}{2} - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$

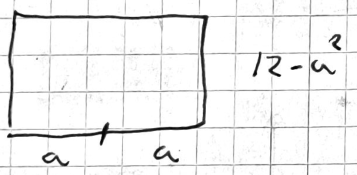
Den største verdien produktet kan ha er $\frac{49}{4}$

6 Eksempel (kan se slik ut)



Kaller et vilkårlig punkt på x-aksen for a.

Punktet på grafen blir da $12-a^2$



Danner dette rektangelet.

$A(a) = 2a \cdot (12-a^2)$

$A(a) = 24a - 2a^3$

Finner derivert, kritiske punkter der $A'(a) = 0$

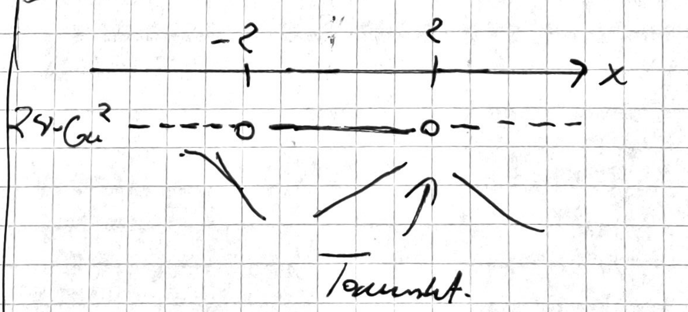
$A'(a) = 24 - 6a^2$

$24 - 6a^2 = 0$

$6a^2 = 24 \quad |:6$

$a^2 = 4$

$a = \pm 2$



Toppunkt.

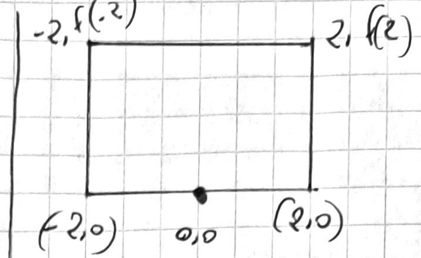
Størst verdi når $a = 2$

$A = L \cdot b$

$L = 2 \cdot 2 = 4$

$B = 12 - 2^2 = 12 - 4 = 8.$

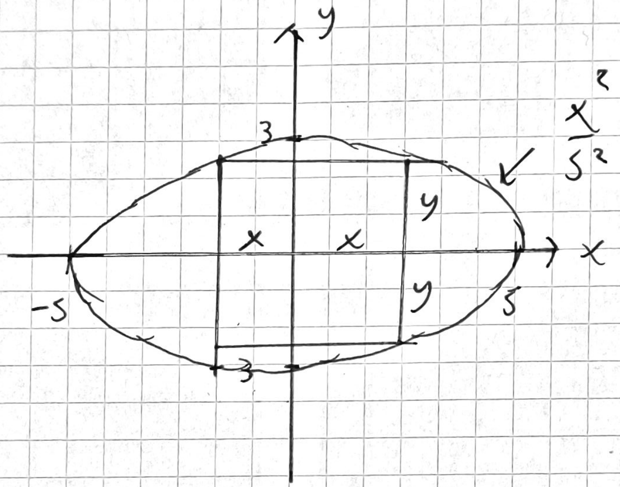
$A = 8 \cdot 4 = \underline{\underline{32}}$



$f(2) = 12 - 2^2 = 8.\ ,\ f(-2) = 8.$

$\underline{(-2,0), (2,0), (-2,8), (2,8)}$

7



$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

a) $A = (2x)(2y) = 4xy$

finner et uttrykk for y vha likningen for ellipsen.

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{x^2}{5^2} \quad | \cdot 3^2\ (9)$

$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right) \cdot 9$

$y = \pm\sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)}$

$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}$

$A = 4x \cdot y$

$A = 4x \cdot 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}$

$A(x) = 12x\left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

finner kritiske punkter

der $\underline{A'(x) = 0}$

→

$$A'(x) = 12\left(1\cdot\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot -\frac{2x}{25}\right)\right)$$

$$A'(x) = 12\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^2}{50}\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$A'(x) = 12\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)}}$$

$$A'(x)\ 12\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{25\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)}}$$

$$A'(x) = 12\left(\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}}\right) - \frac{x^2}{25\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}}}\right)$$ / Ganger inn 12.

$$A'(x)\ 12\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}} - \frac{12x^2}{25\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}}}$$

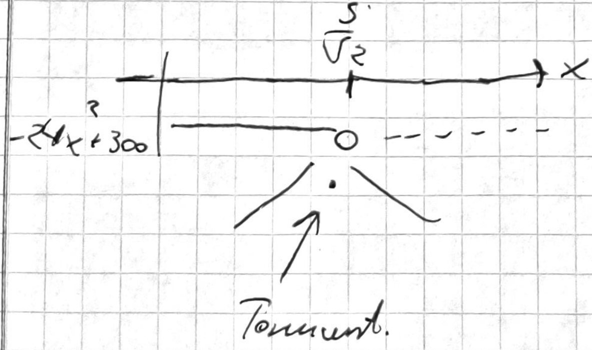
$$A'(x) = \frac{12\cdot 25\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right) - 12x^2}{25\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}}} = \frac{12(25-x^2)-12x^2}{25\sqrt{1-\frac{x^2}{5^2}}}$$

For at uttrykket skal bli null må telleren være lik med 0. (Trekker sammen)

$$-24x^2+300=0$$

$$24x^2=300$$

$$x=\sqrt{\frac{300}{24}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$



kan nå finne y, $\left(x = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

$y = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{5^2}}$

$y = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{10}}$

$y = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}{5^2}}$

$y = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$ $\quad y = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

Sidekantene blir uttrykt ved 2x og 2y.

$\underline{\underline{2x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 5\sqrt{2}}}$

$\underline{\underline{2y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{2}}}$

c)

Arealet: kjenner både x og y.

$A = 4xy$

$A = 4 \cdot \underline{5\sqrt{2}} \cdot \underline{3\sqrt{2}}$

$A = \underline{\underline{120}}$