Kalkulus Oblig 1. Alexander Gilstedt.

1

a) $x \in [0, 2\pi\rangle$

$$3\cos^2 x - \frac{3}{4}\cos x = 2\cos^2 x - \frac{1}{8}$$

$$\cos^2 x - \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{8} = 0$$

Setter $\cos x = u$

$$u^2 - \frac{3}{4}u + \frac{1}{8} = 0$$

Bruker andregradsformelen for å løse

$$\frac{-\left(-\frac{3}{4}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8}}}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}}{2} =$$

$$\frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2} \qquad u_1 = \frac{1}{2} \wedge u_2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \wedge \cos x = \frac{1}{4}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$

Gir: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$

$\cos x = \frac{1}{4}$

Gir: $x_3 = 1,32$ , $x_4 = 4,97$

$x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$, $x_3 = 1,32$, $x_4 = 4,97$

b)

$x \in [0, 2\pi\rangle$

$\cos(2x) - 5\sin x = 3$

$\cos(2x)$ kan skrives som $1 - 2\sin^2 x$

$1 - 2\sin^2 x - 5\sin x = 3$

$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

$-2u^2 - 5u - 2 = 0$

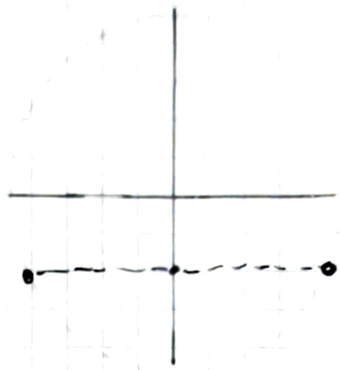
Løser andregradsformelen

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{-4} = \frac{5 \pm 3}{-4} \qquad U_1 = -2 \;,\; U_2 = -\frac{1}{2}$$

$\sin x = -2$ // finnes ikke

$\sin x = -\frac{1}{2}$



$$\underline{\underline{x_1 = \frac{7\pi}{6} \qquad x_2 = \frac{11\pi}{6}}}$$

2

$\vec{v} = 2i + 2j$

Vektorens lengde:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2^2) + (2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{8}}}$$

Vinkel med positiv x-akse ($\varphi$)

$$\cos\varphi = \frac{x}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ gir: } \frac{\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\varnothing = \frac{y}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ gir: } \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4}$$

Ser da at vinkelen må væ:

$$\underline{\varphi = \frac{\pi}{4} \; (45^\circ)}$$

3 $P(2,1)$ $Q(6,3)$ $R(-2,3)$ $S(-4,2)$

$\vec{PQ} = [6-2,\ 3-1] = [4,2]$

$\vec{RS} = [-4-(-2),\ 2-3] = [-2,-1]$

for at vektorene skal være paralelle må

$\vec{PQ} = k \cdot \vec{RS}$

$-2 \cdot [-2,-1] = [4,2] \Leftrightarrow \vec{PQ} = k \cdot \vec{RS}$

<u>vektorene er paralelle</u>

4 $v = i + 4j + k$ $w = 4i + tj + 3k$

for at vektorene skal stå normalt på hverandre må skalarproduktet $(v \cdot w) = 0$.

$v$ og $w$ ligger i $\mathbb{R}^3$.

Skalarproduktet er da gitt ved: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

$1 \cdot 4 + 4 \cdot t + 3 \cdot 1 = 0$

$4 + 4t + 3 = 0$

$4t = -7$

$t = -\frac{7}{4}$

$t$ må være $-\frac{7}{4}$ for at $v$ og $w$ står vinkelrett på hverandre.

4

5

$v = 2j + k \qquad w = i - 2j + 3k$

Det kan lengttes kryssprodukt mellom vektorene.
Resultant-vektoren vil stå vinkelrett på
de to vektorene v og w

$$\vec{v} \times w = (y_1 z_2 - y_2 z_1)i + (x_2 z_1 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$v \times w = (2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1) \cdot i + ( \cdot \quad 1 \cdot 3) \cdot j + (0(-2) - 1 \cdot 1)k$$

$$v \times w = (6 + 2) \cdot i + (1 - 0) \cdot j + (0 - 1) \cdot k$$

$$v \times w = 8i + j - k$$

$$n = \underline{8i + j - k}$$

6 $\quad z = 3 - \sqrt{3}\,i \qquad w = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

a) $z \cdot w = (3 - \sqrt{3}i) \cdot (-2 + 2\sqrt{3}i)$

Definisjon sier: $(ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$

$$= (3 \cdot -2 - (-\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}) + (3 \cdot 2\sqrt{3} + -\sqrt{3} \cdot -2) \cdot i$$

$$= (-6 + 6) + (8\sqrt{3}) \cdot i$$

$$= 0 + 8\sqrt{3} \cdot i$$

$$= \underline{\underline{8\sqrt{3} \cdot i}}$$

6) $Z = 3 - \sqrt{3}\,i \qquad w = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$$\frac{Z}{w} = \frac{Z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$$

$$\frac{Z}{w} = \frac{(3-\sqrt{3}\,i)\cdot(-2-2\sqrt{3}\,i)}{(-2+2\sqrt{3}\,i)\cdot(-2-2\sqrt{3}\,i)} = \frac{(3-\sqrt{3}\,i)\cdot(-2-2\sqrt{3}\,i)}{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{-6 - 6\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i - 6}{16} = \frac{-12 - 4\sqrt{3}i}{16}$$

$$= \frac{-12}{16} - \frac{4\sqrt{3}\,i}{16} = \underline{\underline{-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}}$$

7 $Z = e^{\frac{5\pi}{6} i}$, Skal på formen $Z = a + bi$

$a = r\cos\varphi$

$b = r\sin\varphi$

Ser av uttrykket på eksponentialform at $\underline{r = 1}$

$$a = 1 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$b = 1 \cdot \sin\frac{5\pi}{3} = 1 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i}}$$

8

$Z = \sqrt{6} - \sqrt{2}\,i$

Benytter pytagoras for å finne r

$r^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow r = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = r = \sqrt{6+2} = \sqrt{8}$

$\underline{r = \sqrt{8}}$

Vinkelen finnes slik:

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\frac{11\pi}{6}} \wedge -\frac{11\pi}{6}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \underline{-\frac{1}{2}}$

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6} \wedge -\frac{11\pi}{6}$

Ser av dette at vinkelen må ligge i 4. kvadrant

og $\varphi = -\frac{11\pi}{6}$

$Z = \underline{\underline{\sqrt{8} \cdot e^{-i\frac{11\pi}{6}}}}$

9 a)

$Z = 9e^{\frac{5\pi}{6}i}$ $W = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$

$Z \cdot W = 9e^{\frac{5\pi}{6}i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{6}i}$

$= 9 \cdot 3 \cdot e^{\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)i}$

$= \underline{27e^{\pi i}}$

$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$27\cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$27 \cdot -1 + i \cdot 0$

$= \underline{-27}$

b) $Z = 9e^{\frac{5\pi}{6}i}$ $W = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$

$$\frac{Z}{W} = \frac{9e^{\frac{5\pi}{6}i}}{3e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{9}{3} \cdot e^{\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)i} = \underline{3e^{\frac{4\pi}{6}i}} = \underline{\underline{3e^{\frac{2\pi}{3}i}}}$$

10

$$Z = \frac{(1-2i)^2}{3-i}$$

Utfører divisjonen:

$$\frac{(1-2i)^2 \cdot (3+i)}{(3-i) \cdot (3+i)} = \frac{(1^2-4i+4i^2) \cdot (3+i)}{(3^2)+(1)^2}$$

$$= \frac{(1-4i-4) \cdot (3+i)}{(3^2)+(1)^2} = \frac{(-4i-3) \cdot (3+i)}{9+1}$$

$$= \frac{-12i-4i^2-9-3i}{10} = \frac{-12i+4-9-3i}{10}$$

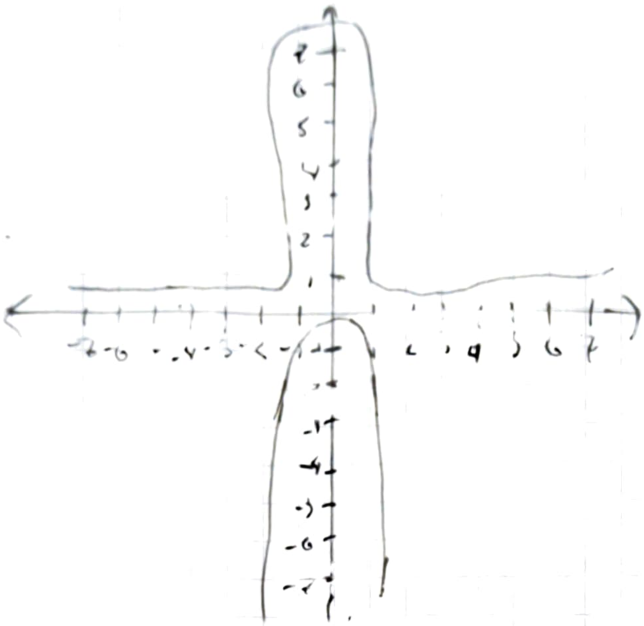
$$= \frac{-15i-5}{10} = \frac{-15i}{10} - \frac{5}{10} = -\frac{3}{2}i - \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

Realdel: $-\frac{1}{2}$, Imaginærdel: $-\frac{3}{2}i$

11

$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Skisse av grafen



Definisjonsmengde: Grafen er ikke definert når nevneren er lik 1. eller -1.

$1^2 - 1 = 0 \wedge (-1)^2 - 1 = 0.$

$D_f \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 0 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$

Verdimengde: Regner først ut hva den ikke kan være, ved å finne grenseverdi

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^{2\prime}}{x^2-1^{\prime}} \quad \frac{2x}{2x} = \frac{-2}{-2} = \underline{1}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{2\prime}}{(x^2-1)^{\prime}} = \frac{2x}{2x} = \underline{1}$

Verdimengden er derfor alle reele tall bortsett fra 1.

$V_f \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$

12

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$$

$\downarrow$

Både teller og nevner går mot 0.

Bruker L. Hôpitals regel

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)'}{(2x^2-3x+1)'} = \frac{2}{4x-3} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

13

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{-6x^3 + 2x^2 - 8x + 1}{2x^3 - 3}$

$$\frac{-\frac{6x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3}{x^3}} = \frac{-6 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{3}{x^3}}$$

Leddene x blir vesentlig store, og resultatet av brøkene i uttrykket blir dermed lik 0.

$$\frac{-6+0-0+0}{2-0} = -\frac{6}{2} = \underline{\underline{-3}}$$

b) $\lim_{x \to 0} \left( \frac{x^2 + 2x}{x} \cdot \cos x \right)$

setter inn 0.

$$\frac{0^2 + 2 \cdot 0}{0} \cdot \cos 0 = \frac{0}{0} \cdot 1 = \frac{0}{0}.$$

faktoriserer:

$$\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} \cdot \cos x = (x+2) \cdot \cos x$$

setter inn:

$$(0+2) \cdot \cos 0 = 0+2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

c) $\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{3x^2-2}{x-1} \right)$

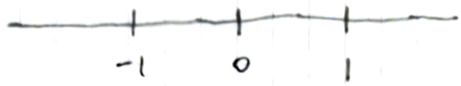
Setter alt på felles brøkstrek

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2-3x^2-2}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2-3x^2-2'}{x-1'} \right)$$

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{2x-6x}{1} \right) \quad \frac{2\cdot 1-6\cdot 1}{1} = \frac{-4}{1} = \underline{\underline{-4}}$$

14

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<-1 \\ 2, & x=-1 \\ 3-x, & x>-1 \end{cases}$$




finner grenseverdien når grafen nærmer seg fra venstre. $(x<-1)$

$$\lim_{x \to -1} x^2+1 = (-1)^2+1 = 1+1 = \underline{2}$$

finner grenseverdien når grafen nærmer seg fra høyre $x>-1$

$$\lim_{x \to -1} 3-x = 3-(-1) = 3+1 = \underline{4}$$

I punktet $x=-1$ ser vi at funksjonsverdien er $\underline{2}$.

(De tre verdiene e ikke like)

Grenseverdien når funksjonen nærmer seg fra høyre e ikke lik funksjonsverdien i punktet.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) \neq f(-1)$$

<u>$f(x)$ er ikke kontinuerlig for $x=-1$</u>

15 $\cos x - x = 0$ har minst en løsning i intervallet $[0,2]$

Hvis vi ser på likningen som en funksjon $f(x) = 0$. kan vi regne ut funksjonsverdiene til øvre og nedre grense i intervallet.

$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = \underline{1}$

$f(2) = \cos(2) - 2 = -0.42 - 2 = -\underline{2.42}$

Vi ser at $f(0)$ og $f(2)$ har forskjellig fortegn. Vi vet da at grafen må skjære x-aksen et sted i intervallet slik at $f(x) = 0$

Likningen har dermed minst 1. løsning i intervallet $\underline{[0,2]}$

16 $y = f(x) = x^2 - 8x + 12 \qquad D_f = \langle \leftarrow, 4]$

a) Hvis funksjonen er strengt voksende / avtagende i intervallet $(x_1 < x_2) \Rightarrow$ at enten $f(x_1) > f(x_2)$ eller at $f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) = -\infty^2 - 8 \cdot \infty + 12 = 0 + 0 + 12 = 12$
$f(x_2) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = 16 - 32 + 12 = -4$

$f(x_1) > f(x_2)$, strengt avtagende,

må ha en inves funksjon.

16(a)

$y = f(x) = x^2 - 8x + 12 \quad Df = \langle \leftarrow, 4]$

$y = (x^2 - 8x) + 12$

$y = (x^2 - 8x + 16 - 16) + 12$

$y = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 12$

$y = (x^2 - 8x + 16) - 4$

Løser med hensyn
på $x$ ved å
lage et fullt kvadrat.

$y = (x-4)^2 - 4$

$(x-4)^2 = y + 4$

$x - 4 = \pm\sqrt{y+4}$

$x = \pm\sqrt{y+4} + 4$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y+4} + 4$

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+4} + 4$

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4} + 4}}$$

$\longrightarrow$

6)

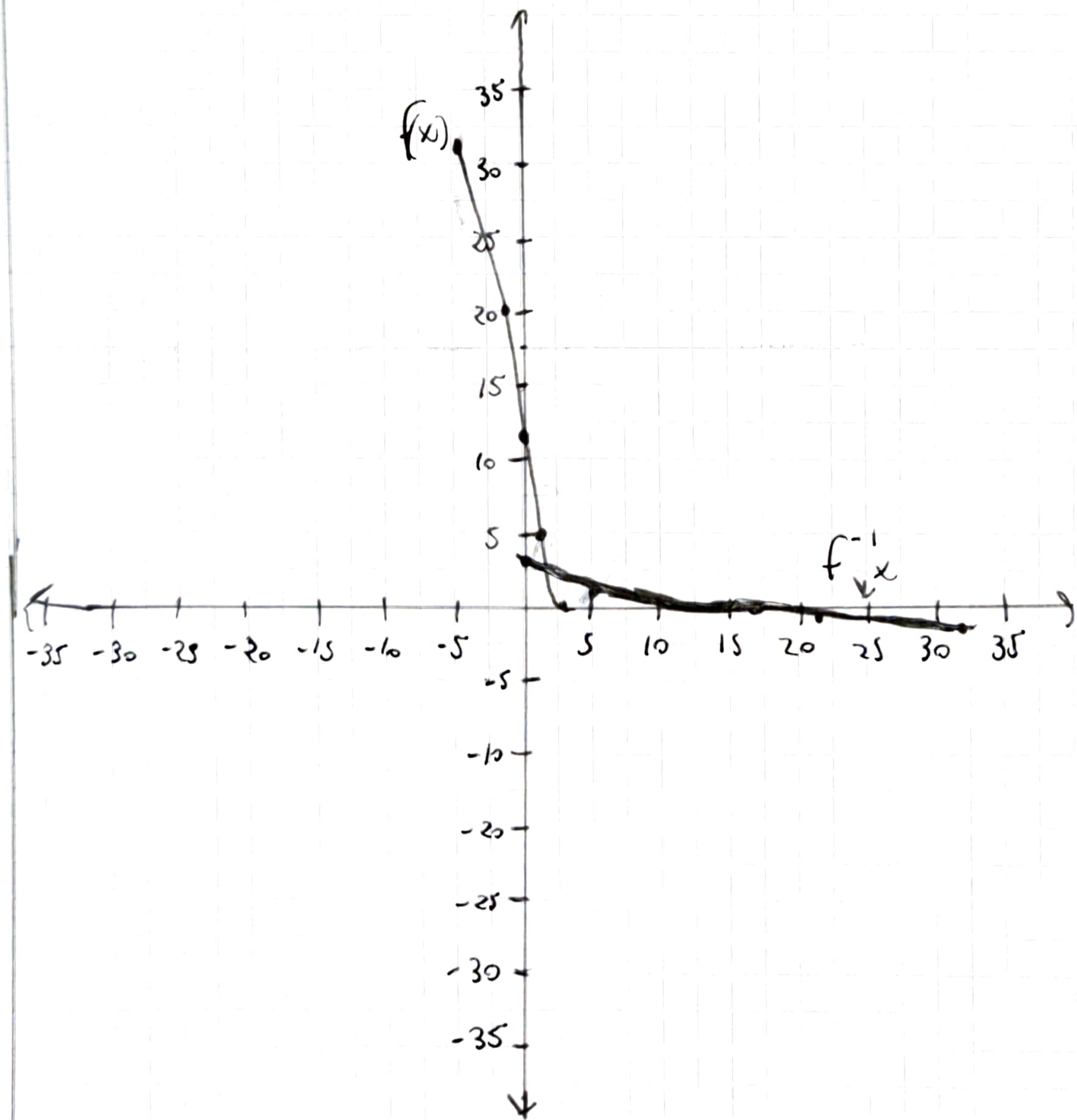
Verditabeller:

$f(x) = x^2 - 8x + 12$

| x | y |
|---|---|
| -2 | 32 |
| -1 | 21 |
| 0 | 12 |
| 1 | 5 |
| 2 | 0 |

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4} + 4$

| x | y |
|---|---|
| 32 | -2 |
| 21 | -1 |
| 12 | 0 |
| 5 | 1 |
| 0 | 2 |



16c)

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4} + 4$

$D_{f^{-1}}$ må være $V_f$

(Definisjonsmengden til $f^{-1}(x)$ må samme til verdimengden til $f(x)$)

$f(x) = x^2 - 8x + 12$ , $D_f: \langle \leftarrow, 4]$

$f(x)_{maks} = \infty$

$f(x)_{min} = f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = 16 - 32 + 12 = -4$

$V_f: [-4, \rightarrow \rangle$

$\underline{\underline{f^{-1}(x) \text{ sin definisjonsmengde er da } D_f: [-4, \rightarrow \rangle}}$

17 a) $\ln \frac{(x+1)^4 \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

$\ln \frac{(x+1)^4 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$ (Forkorter)

$\ln((x+1)^{4-\frac{1}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}})$

$\ln((x+1)^{\frac{12}{3}-\frac{1}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}})$

$\ln((x+1)^{\frac{11}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}})$ ↓ ($\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$)

$\ln (x+1)^{\frac{11}{3}} + \ln (x-1)^{\frac{1}{2}}$

Bruker regneregler for logaritmer og får

$$\underline{\underline{\frac{11}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)}}$$

b) $\sqrt[4]{e^{-\ln x^4}}$

$\left(e^{-\ln x^4}\right)^{\frac{1}{4}}$

$e^{-\frac{\ln x^4}{4}}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$e^{\frac{-4\ln x}{4}}$

$e^{-\ln x}$

$\left(e^{\ln x}\right)^{-1}$ (motsatt av overnevnte regel)

$\left(\cancel{e}^{\cancel{\ln}\, x}\right)^{-1}$

$$\underline{x^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

18 $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

Symetrisk om y-aksen $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$

Symetrisk om origo $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{-x-2}{-x+2}$$

Ser av utrykket at det hverken er $f(x)$ eller $-f(x)$. $\Rightarrow$ Ingen symetri om y-aksen eller origo

19 $y = f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2+2}$

Vertikal:

Vi ser at nevneren aldri kan bli null (definert for alle x) og grafen har dermed ingen vertikal asymptote.

Horisontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3+1}{x^2+2} = \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2+0}{0+0}$$

Ingen horisontal asymptote, (nevner blir 0)

Skrå asymptote:

Teller er en grad høyere enn nevner :)

f(x) har en skrå asymptote.

$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+2}$

$(2x^3+1) : (x^2+2) = \underline{2x}$ rest: $\underline{-4x+1}$

$-(2x^3+4x)$

$\underline{-4x+1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \underline{2x}$

f(x) har en skrå asymptote i $\underline{\underline{y=2x}}$

20 $y = f(x) = \frac{4x^3-8x^2}{(x-1)^2}$ $x \neq 1$

Vertikal asymptote:

Nevner: er lik null når $\underline{x=1}$

Teller: $4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 = \underline{-4}$

-4 er forskjellig fra 0.

$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ $VA = \underline{x=1}$

Horisontal asymptote (r)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3-8x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^3-8x^2}{x^2-2x+1} \left(:x^3\right) = \frac{4-\frac{8}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{4}{(0)}$$

Nevner går mot 0 når $x \to \pm\infty$, vi har ingen horisontal asymptote.

Skrå asymptote.

Grad av teller er en høyere enn nevner: det finnes en skråasymptote.

$$4x^3-8x^2+0x+0 : x^2-2x+1 = \underline{4x} \quad \text{rest}: \underline{-4x}$$

$$-\left(4x^3-8x^2+4x\right)$$

$$\underline{-4x}$$

<u>Funksjonen har dermed en vertikal asymptote i $x=1$, og skråasymptote i $y=4x$</u>