Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Computación

Asignatura: Cálculo Científico (6105)

Estudiante: Naranjo Sthory Alexanyer Antonio

Cédula de identidad: V – 26.498.600

Tarea 5: Métodos Iterativos para Sistemas Lineales

Respuesta #4

a)

Dada la función,

$$\boldsymbol{q(x) = \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle}$$

Recordemos que el gradiente de una función $g: R^n \longrightarrow R$, es un vector cuyos componentes se ven definidos de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\frac{\partial_g}{\partial_{x_i}}; i = 1, 2, 3, \dots, n.}$$

De esta manera, obtenemos la siguiente igualdad a desarrollar para el cálculo del gradiente de $q(x)$ en x,

$$\boldsymbol{\nabla q(x) = \nabla(\langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle)}$$

$$\boldsymbol{= \nabla(Ax^2 - 2bx)}$$

$$\boldsymbol{= 2Ax - 2b}$$

$$\boldsymbol{= 2(Ax - b).}$$

Por lo tanto,

$$\nabla \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}).$$

b)

Del inciso anterior, quedó demostrado que si A es simétrico, entonces el gradiente de la función $q(x) = \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle$ en x es,

$$\nabla \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}).$$

Ahora, supongamos que existe tal mínimo y que A es invertible.

Si x_0 es un local extremo de $q(x)$, entonces $Ax_0 - b = 0$, es decir, $x_0 = A^{-1}b$.

Como sabemos, hay un mínimo extremo local (único), que es por tanto el mínimo de $q(x)$.

Si sustituimos la expresión de x_0 en q, obtenemos por resultado lo siguiente,

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x_0}) = \langle \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle - \mathbf{2}\langle \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}).$$

Por lo tanto, queda demostrado que el mínimo de $q(x)$ es $-(b, A^{-1}b)$.

c)

Recordemos el algoritmo del método *Stepeest Descent:*

1) Seleccionamos un punto de inicio x_0, y los parámetros necesarios de convergencia $\varepsilon_g, \varepsilon_a$ y ε_r.
2) Calculamos $g(x_k) \equiv f(x_k)$. Si $||g(x_k)|| \leq \varepsilon_g$, entonces nos detenemos. De lo contrario, calculamos la dirección de búsqueda normalizada para $p_k = -g(x_k)/||g(x_k)||$.
3) Realiza la búsqueda de líneas para encontrar la longitud de paso α_k en la dirección de p_k.

4) Actualizamos el punto actual, $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$.
5) Evaluamos $f(x_{k+1})$. Si la condición $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r |f(x_k)|$ se satisface para dos iteraciones sucesivas, entonces nos detenemos. De lo contrario, asignamos los siguientes valores, $k = k + 1, x_{k+1} = x_k + 1$ y retornamos al paso número 2.

Aquí, $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r |f(x_k)|$ es una comprobación de las sucesivas reducciones de f. ε_a es la tolerancia absoluta en el cambio del valor de la función (usualmente pequeño $\approx 10^{-6}$) y ε_r es la tolerancia relativa (usualmente se fija en 0.01).

Si utilizamos una búsqueda de línea exacta, la dirección de descenso más pronunciada en cada iteración es *ortogonal* (*perpendicular*) a la anterior, es decir,

$$\boldsymbol{\frac{df(x_{k+1})}{d\alpha} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{\partial f(x_{k+1})}{\partial x_{k+1}} \frac{\partial x_{k+1}}{\partial \alpha} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \nabla^T f(x_{k+1}) p_k = 0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow -g^T(x_{k+1}) g(x_k) = 0.}$$

Por lo tanto, basándonos en la notación utilizada del ejercicio, se cumple que,

$$\boldsymbol{v^{(k)} \perp v^{(k+1)}.}$$