

Kompakte stjerner

Alexander, Jim og Jostein

Mars 2020

Oppgave 1

a)

Vi har oppgitt strukturligningen

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\epsilon} \frac{dP}{dr} \right) = - \frac{4\pi G \epsilon(r)}{c^4}. \quad (1)$$

Det skal vises at ligning (1) kan skrives på den dimensjonsløse formen

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n. \quad (2)$$

Tilstandsligningen vi antar er

$$P = K \epsilon^\gamma, \quad (3)$$

der $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$.

I tillegg er de dimensjonsløse variablene vi skal benytte definert som

$$\epsilon = \epsilon_0 \theta^n, \quad (4)$$

$$r = a \xi, \quad (5)$$

der ϵ_0 er energitettheten i $r = 0$ og a er gitt ved

$$a^2 = \frac{(n+1) K c^4 \epsilon_0^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}. \quad (6)$$

Vi ser først på den ene faktoren i parentesen i ligning (1). Ved å sette inn tilstandsligningen (3), samt én av de nye koordinatene (4) får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{dP}{dr} &= \frac{1}{\epsilon_0 \theta^n} \frac{d}{dr} \left(K \epsilon_0^{1+\frac{1}{n}} \theta^{n+1} \right) \\ &= \frac{K \epsilon_0^{\frac{1}{n}}}{\theta^n} \frac{d}{dr} \theta^{n+1} \\ &= K \epsilon_0^{\frac{1}{n}} (n+1) \frac{d\theta}{dr}. \end{aligned} \quad (7)$$

Setter deretter faktoren (7) inn i ligning (1), og substituerer med den andre dimensjonsløse koordinaten (5). Da kan strukturligningen (1) bli omformet til den såkalte Lane-Emden likningen

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(a^4\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n.\end{aligned}\tag{8}$$

■

b)

Ligning (8) skal løses analytisk for $n = 0$. Det gjøres i det følgende

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -1 \\ \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\xi^2.\end{aligned}\tag{9}$$

Deretter integrerer man ligning (9) både en og to ganger. Detaljene vises i det følgende

$$\begin{aligned}\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} &= -\frac{1}{3}\xi^3 + C_1 \\ \frac{d\theta}{d\xi} &= -\frac{1}{3}\xi + \frac{C_1}{\xi^2} \\ \theta(\xi) &= -\frac{1}{6}\xi^2 - \frac{C_1}{\xi} + C_0.\end{aligned}\tag{10}$$

Integrasjonskonstantene finnes ved å bruke grensebetingelsene

$$\theta(0) = 1,\tag{11}$$

$$\theta'(0) = 0.\tag{12}$$

Dermed ender man med løsningen

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + 1.\tag{13}$$

c)

Ligning (8) skal løses analytisk for $n = 1$. Det gjøres ved å skrive $\theta = \frac{u}{\xi}$ og løse ligninga for $u(\xi)$. Det gir følgende omskriving av ligningen

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{u}{\xi} \right\} \right) = -u\xi.\tag{14}$$

Den ene faktoren i parentesen blir

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{u}{\xi} \right\} = \frac{\xi u' - u}{\xi^2}, \quad (15)$$

der u' brukes som $\frac{du}{d\xi}$. Innsatt i (14) får man

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (\xi u' - u) &= -u\xi \\ \Leftrightarrow u' + \xi u'' - u' &= -u\xi \\ \Leftrightarrow u'' + u &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Dette er en andre-ordens differensialligning som har oscillerende løsninger

$$u(\xi) = A \sin \xi + B \cos \xi. \quad (17)$$

Ved å substituere tilbake til θ blir løsningen på formen

$$\theta(\xi) = \frac{A}{\xi} \sin \xi + \frac{B}{\xi} \cos \xi. \quad (18)$$

Integrasjonskonstantene kan beregnes på tilsvarende måte som tidligere, ved å bruke de to grenseverdiene (11) og (12). Før dette gjøres er det nyttig å opplyse om følgende grenseverdier

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} &= 1, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0^\pm} \frac{\cos \xi}{\xi} &= \pm \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Ved å benytte seg av grensverdiene (19) blir det tydelig at $B = 0$ og $A = 1$, noe som gir en endelig løsning på Lane-Emden ligningen med $n = 1$ gitt ved

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (20)$$

Oppgave 2

a)

Tar man hensyn til generell relativitetsteori kan strukturligningen (1) skrives på formen

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Ved å innføre de dimensjonsløse parameterne

$$\bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c^2}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \alpha = \frac{r_s}{R}, \quad (22)$$

kan man omforme likningen til en enklere form. r_s er Schwarzschildradien til en stjerne med masse M og er definert slik

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (23)$$

Med $dx = \frac{dr}{R}$ får vi at

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{dP}{dx} = \frac{R}{\rho_0 c^2} \frac{dP}{dr}, \quad (24)$$

som gjør at vi kan sette inn for likning (21). Når vi nå antar at stjernen er en inkompressibel væske med tetthet ρ_0 vil energitettheten være $\epsilon(r) = \rho_0 c^2 = \epsilon_0$, massen vil være $m(r) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}$ og den totale massen til stjernen blir da $M = m(R)$. Inni hver av klammeparentesene får vi da

$$\begin{aligned} 1 + \frac{P}{\epsilon_0} &= 1 + \bar{P}, \\ 1 + \frac{4\pi r^3 P}{m(r)c^2} &= 1 + 3\bar{P}, \\ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} &= 1 - \frac{8G\pi\rho_0 r^2}{3c^2} = 1 - \alpha x^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Ved å sette inn for $m(r)$ og $\epsilon(r)$ også foran klammeparentesene får vi

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{1}{2}\alpha x [1 + \bar{P}] [1 + 3\bar{P}] [1 - \alpha x^2]^{-1}. \quad (26)$$

b)

Ved å dele på faktorene som inneholder \bar{P} og multiplisere med dx på begge sider av likning (26) kan man omforme likningen til

$$\frac{d\bar{P}}{(1 + \bar{P})(1 + 3\bar{P})} = -\frac{\alpha x}{2(1 - \alpha x^2)} dx. \quad (27)$$

Ved hjelp av delbrøksoppspalting får man separert venstresiden til to ledd

$$\frac{1}{(1 + \bar{P})(1 + 3\bar{P})} = \frac{A}{1 + \bar{P}} + \frac{B}{1 + 3\bar{P}}. \quad (28)$$

Løsingen av likningen gir at $A = -\frac{1}{2}$ og $B = \frac{3}{2}$. Integrering av venstresiden gir dermed

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d\bar{P}}{1 + \bar{P}} + \frac{3}{2} \int \frac{d\bar{P}}{1 + 3\bar{P}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + 3\bar{P}}{1 + \bar{P}} \right), \quad (29)$$

her uten integrasjonskonstant. For høyresiden ser vi at den antideriverte er

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(1 - \alpha x^2)}{4} \right) = \frac{-2\alpha x}{4(1 - \alpha x^2)} = -\frac{\alpha x}{2(1 - \alpha x^2)}. \quad (30)$$

Det betyr at

$$\ln \left(\frac{1 + 3\bar{P}}{1 + \bar{P}} \right) = \frac{1}{2} \ln (1 - \alpha x^2) + C, \quad (31)$$

der C er en integrasjonskonstant. Litt omforming på likningen gir at

$$\begin{aligned}\frac{1+3\bar{P}}{1+\bar{P}} &= D\sqrt{1-\alpha x^2} \\ \implies \bar{P}(x) &= \frac{D\sqrt{1-\alpha x^2}-1}{3-D\sqrt{1-\alpha x^2}},\end{aligned}\tag{32}$$

der D er en ny konstant inneholdt av C . Ved hjelp av randkravet $\bar{P}(0) = 1$ finner vi at

$$D = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}.\tag{33}$$

Innsettingen av konstanten, og litt omforming, gir til slutt likningen

$$\bar{P}(x) = \frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha x^2}}{\sqrt{1-\alpha x^2} - 3\sqrt{1-\alpha}}.\tag{34}$$

c)

Dersom $|\alpha| \ll 1$ kan man rekkeutvikle likning (34) ved å bruke approksimasjonen $\sqrt{1+\beta} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta$. Får da at

$$\begin{aligned}\bar{P}(x) &= \frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-\alpha x^2}}{\sqrt{1-\alpha x^2} - 3\sqrt{1-\alpha}} \\ &\approx \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha) - (1 - \frac{1}{2}\alpha x^2)}{(1 - \frac{1}{2}\alpha x^2) - 3(1 - \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{\frac{\alpha}{2}(1-x^2)}{2 - \frac{\alpha}{2}(3-x^2)} \\ &\approx \frac{\alpha}{4}(1-x^2),\end{aligned}\tag{35}$$

der vi i siste approksimasjon bruker at $\frac{\alpha}{2}(3-x^2) \approx 0$ ettersom x er et tall mellom 0 og 1 og $|\alpha|$ er som sagt mye mindre enn 1.

Oppgave 3

a)

Eulers metode er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\tag{36}$$

der h er skrittlengden. Hvis vi betegner den eksakte løsningen med $y(x_{n+1})$, og antar at $y(x_n) = y_n$, så er feilen i neste steg gitt ved

$$\tau_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}.\tag{37}$$

Dette kalles den lokale avbruddsfeilen. Ved å anta at $y(x)$ kan utvides som en Taylorrekke om punktet x_0 , $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, får vi ved Taylors teorem at

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}h^2 y''(s),\tag{38}$$

der $s \in (x_0, x_0 + h)$. Ved også å legge merke til at $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y(x_0) + hy'(x_0)$, får vi at

$$\tau_1 = y(x_0 + h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2 y''(s).\tag{39}$$

τ_1 er altså proporsjonal med h^2 .

b)

Den lokale feilen etter steg i er gitt ved uttrykket

$$\tau_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - hS(x_i, y_i, h, f), \quad (40)$$

der S er stegfunksjonen. I Eulers metode er denne gitt ved $S(x_i, y_i, h, f) = f(x_i, y_i)$. Den globale feilen, ϵ_n , er akkumulasjonen av den lokale feilen (40) i hvert steg. Det er antatt av stegfunksjonen S er Lipschitz-kontinuerlig. Under denne antagelsen kan man vise at den globale feilen i Eulers metode er proporsjonal med h , noe som betyr at Eulers metode er av første orden.

Den globale feilen i Eulers metode er definert som

$$\epsilon_n = y(x_n) - y_n. \quad (41)$$

Denne definisjonen medfører at

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \tau_1 - (y_n + hf(x_n, y_n)) \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \tau_1 - y_n - hf(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (42)$$

Ved å ta normen av ligning (42), og benytte trekantulikheten samt den antatte Lipschitz-betingelsen finner man at

$$\begin{aligned} \|\epsilon_{n+1}\| &\leq \|y(x_n) - y_n\| + \|hf(x_n, y(x_n)) - hf(x_n, y_n)\| + \|\tau_1\| \\ &\leq \|y(x_n) - y_n\| + hL\|y(x_n) - y_n\| + \|\tau_1\| \\ &\leq \|\epsilon_n\|(1 + hL) + \|\tau_1\|. \end{aligned} \quad (43)$$

Hvis vi nå antar at $\|y''(s)\| \leq M$, er det siste leddet i (43) begrenset, på formen

$$\|\tau_1\| \leq \frac{1}{2}h^2M. \quad (44)$$

Dette kan settes tilbake igjen i (43). Uten å ta med alle detaljer av løsningsmetoden finner man at rekursjonformelen har løsningen

$$\|\epsilon_n\| \leq (1 + hL)^n \|\epsilon_0\| + \frac{1}{2}h^2M \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL)^k. \quad (45)$$

Løsningen av den endelige geometriske rekken i siste ledd av uttrykk (45) er

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL)^k = \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL}. \quad (46)$$

Ved å benytte rekkeutviklingen til e^x innser man at $1 + x < e^x$ for $x > 0$. Dermed gir løsningen av den endelige geometriske rekken (46) ulikheten

$$\frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} < \frac{e^{hLn} - 1}{hL} = \frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{hL}, \quad (47)$$

der den siste likheten kommer av at $(x_n - x_0) = hn$. Helt til slutt kan dette resultatet settes tilbake inn i ligning (45). Hvis man samtidig antar at $\epsilon_0 = 0$, siden man bruker en eksakt startverdi, blir sluttresultatet gitt ved

$$\|\epsilon_n\| \leq \frac{1}{2}h^2M \frac{e^{L(x_n-x_0)} - 1}{hL} = \frac{M}{2L}(e^{L(x_n-x_0)} - 1)h. \quad (48)$$

Fra dette resultatet er det altså tydelig at den globale feilen er av orden $\mathcal{O}(h)$.

c)

Ved å innføre $\chi = \theta'$ i Lane-Emden likningen (8) får vi at

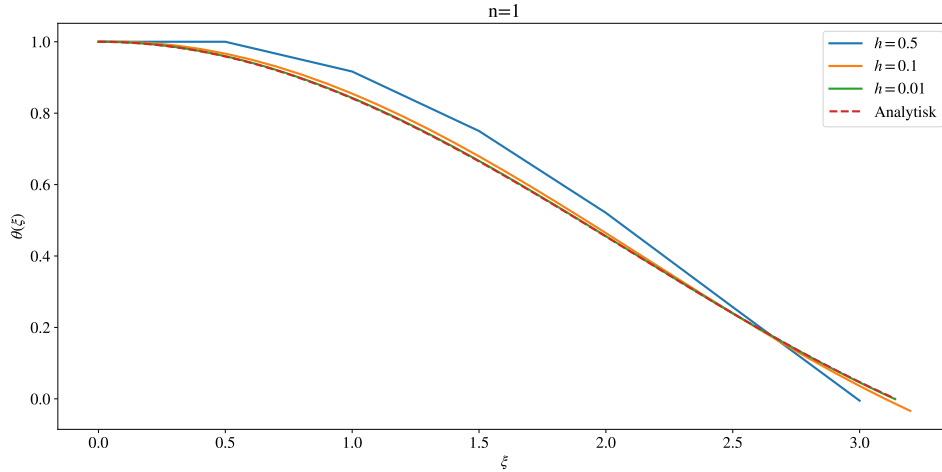
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(\xi^2\chi) &= -\theta^n\xi^2 \implies 2\xi\chi + \xi^2\frac{d\chi}{d\xi} = -\theta^n\xi^2 \\ \implies \chi' &= -\theta^n - \frac{2\chi}{\xi}. \end{aligned} \quad (49)$$

Det gir oss et likningssystem av første ordens differensialligninger

$$\frac{d\vec{\omega}}{d\xi} = f(\vec{\omega}) = f\begin{bmatrix} \theta \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^n - \frac{2\chi}{\xi} \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (50)$$

d)

Her er Lane-Emden ligningen (8) løst numerisk ved $n = 1$, ved hjelp av Eulers metode. Denne løsningen er sammenlignet med den analytiske løsningen, gitt ved ligning (20).



Figur 1: Analytisk løsning av Lane-Emden (20) ved $n = 1$ plottet sammen med den numeriske løsningen, ved hjelp av Eulers metode, for tre ulike steglengder h .

Basert kun på plottene i figur 1 er det ikke lett å argumentere for hva som er det optimale valget av steglengde h . I figuren ser man at en steglengde på $h = 0.5$ gir en løsning med markant

avvik fra den analytiske løsningen. Steglengden $h = 0.1$ gir et betydelig bedre resultat, men har fortsatt synlige avvik. Basert på dette kan en litt mindre steglengde, som $h = 0.01$, være optimal for dette problemet. Fra figuren ser vi at $h = 0.01$ gir god presisjon, noe som gjør det rimelig å anta at presisjonen er stadig økende med synkende steglengde. Man kunne naturligvis derfor senket verdien til h enda mer, og forvente enda bedre resultat, men det skal finnes en balansegang mellom presisjon og kompleksitet. Med enda mindre steglengde vil det gi tilsynelatende neglisjerbart annerledes resultat, men gi en vesentlig lengre kjøretid.

e)

Her er Lane-Emden ligningen (8) løst for det ikke-relativistiske og ultrarelativistiske tilfellet, for henholdsvis $n = 1.5$ og $n = 3$. I denne oppgaven er det oppgitt verdier for ξ_N , altså den siste ξ -en som tilfredsstiller at $\theta(\xi_N) = 0$, og for $\xi_N^2|\theta'(\xi_N)|$ for begge tilfellene. Ved å sammenligne verdiene vi får med ulike steglengder h og de oppgitte verdiene kan vi bestemme en passende steglengde.

Avvik fra oppgitt ξ_N .		
Steglengde, h	$n = 1.5$	$n = 3$
0.1	0.05375	0.19685
0.01	0.00375	0.01685
0.001	0.00075	0.00185
0.0001	0.00005	0.00015
0.00001	0.00000	0.00002

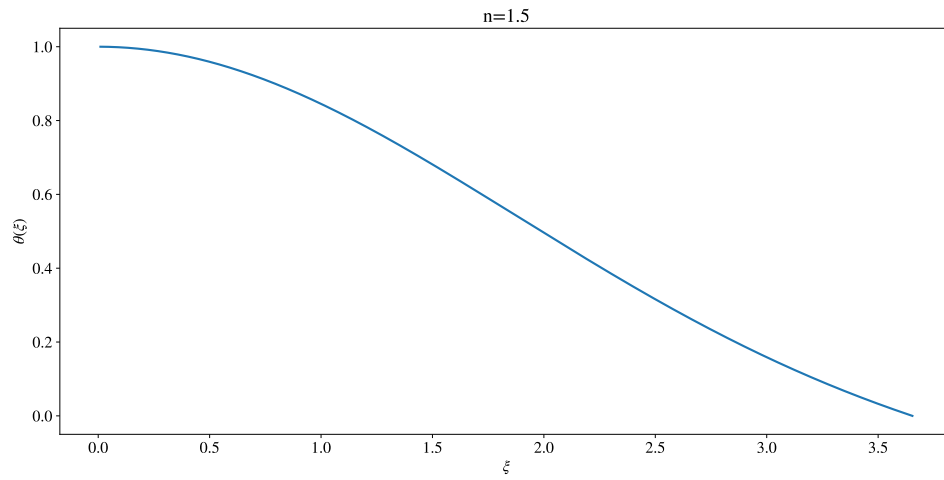
Tabell 1: Tabellen viser avvik fra oppgitt ξ_N for $n = 1.5$ og $n = 3$ avrundet til fem desimaler.

Vi ser at avviket er forholdsvis lite når $h = 10^{-4}$ og $h = 10^{-5}$, men kjøretiden for den siste verdien er betydelig lenger. Velger derfor $h = 10^{-4}$ som den optimale verdien i forhold til presisjon og kjøretid. Med denne steglengden viser tabell 2 verdiene vi får for $\xi_N^2|\theta'(\xi_N)|$, og at avviket også her er forholdsvis lite.

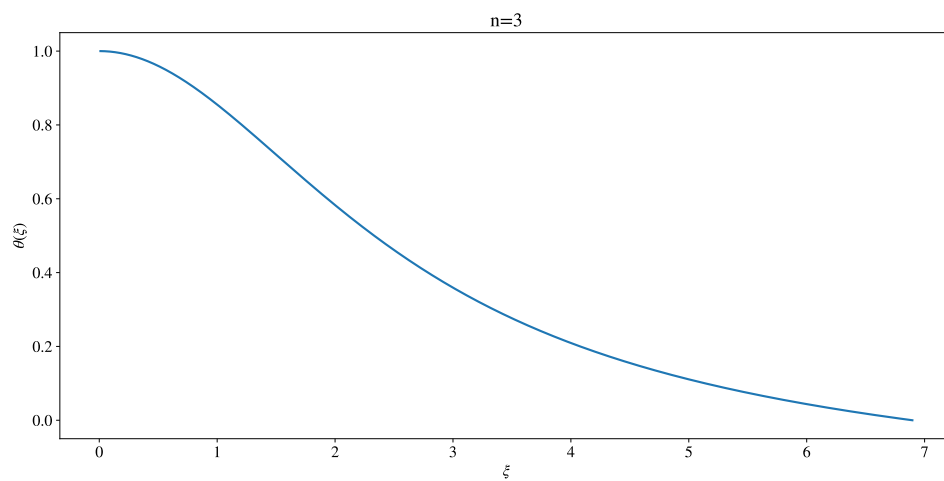
Verdier for $\xi_N^2 \theta'(\xi_N) $ med $h = 0.0001$.			
n	Oppgitt verdi	Beregnet verdi	Avvik
1.5	2.71406	2.71422	0.00016
3	2.01824	2.01817	0.00007

Tabell 2: Tabellen viser oppgitte og beregnede verdier for $\xi_N^2|\theta'(\xi_N)|$ og avviket. Dette er med en steglengde $h = 10^{-4}$. Alle verdier er avrundet til fem desimaler.

I figurene 2 og 3 vises plottene for den approksimerte $\theta(\xi)$ for både det ikke-relativistiske og ultrarelativistiske tilfellet med steglengde $h = 10^{-4}$.



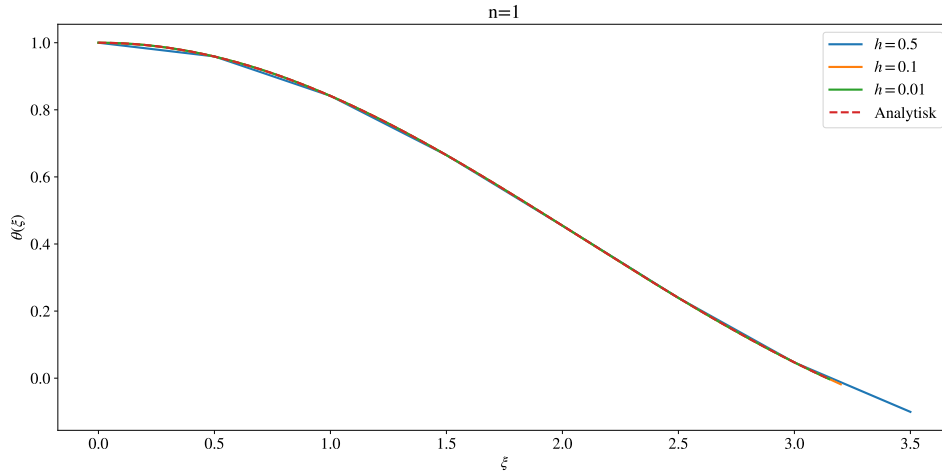
Figur 2: Numerisk løsning av Lane-Emden (8) ved $n = 1.5$ for $h = 10^{-4}$.



Figur 3: Numerisk løsning av Lane-Emden (8) ved $n = 3$ for $h = 10^{-4}$.

f)

Her skal det samme som ble gjort i oppgave 3d) gjøres, men ved bruk av fjerde ordens Runge-Kuttas metode (RK4), i stedet for Eulers metode.



Figur 4: Analytisk løsning av Lane-Emden (20) ved $n = 1$ plottet sammen med den numeriske løsningen, ved hjelp av RK4, for tre ulike steglengder h .

Ved å sammenligne figur 4 med figur 1 ser man at RK4 har høyere presisjon enn Eulers metode. Derfor burde det også her gi god nok presisjon med steglengde $h = 0.01$. Ettersom RK4 har høyere presisjon kunne man kanskje argumentert for at man kan bruke en større steglengde og få samme presisjon som ved Eulers metode, men forskjellen i kjøretid med $h = 0.1$ og $h = 0.01$ er marginal i forhold til forskjellen i kjøretid mellom $h = 10^{-4}$ og $h = 10^{-5}$. Konklusjonen er dermed at det ikke er stor nok gevinst i kjøretid sammenlignet med risiko for tap av presisjon. Henviser derfor til diskusjonen i 3d) og mener at $h = 0.01$ er en optimal steglengde, med tanken på balanse mellom presisjon og kompleksitet. Dessuten ser man av figur 6, som vi kommer til senere, at den globale feilen til RK4 vil flate ut for lave steglengder på grunn av datamaskinens aritmetiske presisjon.

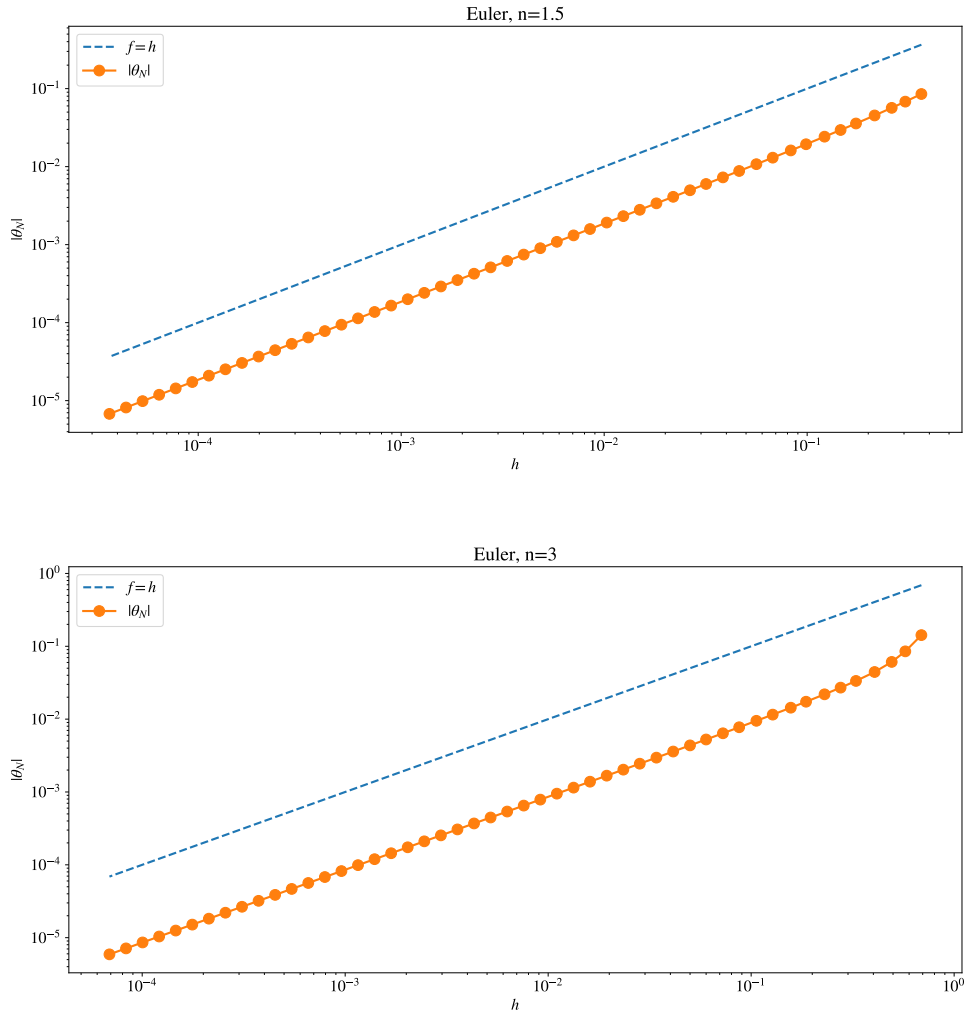
g)

Den globale feilen er

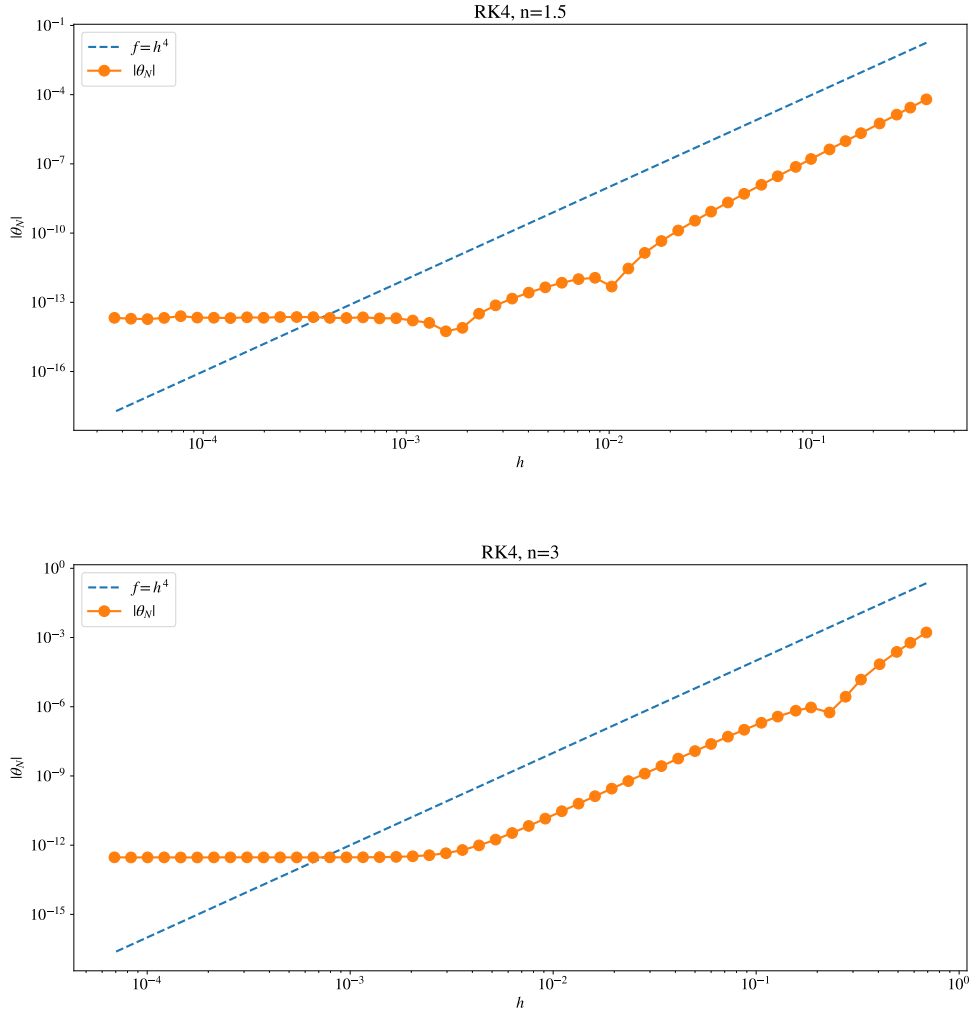
$$\epsilon_N = |\theta(\xi_N^-) - \theta_N| = |\theta_N|, \quad (51)$$

der ξ_N^- er den korrekte ξ_N , som vi kjenner verdien av.

Her blir den globale feilen, $|\theta_N|$, plottet som en funksjon av steglengden h , både for Eulers metode, i figur 5 og for RK4, i figur 6.



Figur 5: Global feil i Eulers metode, i det ikke-relativistiske og ultrarelativistiske tilfellet, plottet mot en diskret h -akse, med logaritmisk skala på begge aksene. h plottet i blått, som referanse.



Figur 6: Global feil i RK4, i det ikke-relativistiske og ultrarelativistiske tilfellet, plottet mot en diskret h -akse, med logaritmisk skala på begge aksene. h^4 plottet i blått, som referanse.

Ved å sammenligne feilen i metodene med funksjonene plottet i blått ser man hvordan ordenen til metodene manifesterer seg i plottene. I figur 5 ser man at $|\theta_N(h)|$ er parallell med funksjonen $f(h) = h$ noe som betyr at den globale feilen for Eulers metode går som $\mathcal{O}(h)$. På samme vis ser man av figur 6 at den globale feilen i RK4 går som $\mathcal{O}(h^4)$, ved sammenligning av $g(h) = h^4$. Utflatingen av grafene for RK4 ved lav steglengde kommer mest sannsynlig av datamaskinens begrensning i aritmetisk presisjon.

h)

Randkravene til ligning (26) er gitt som

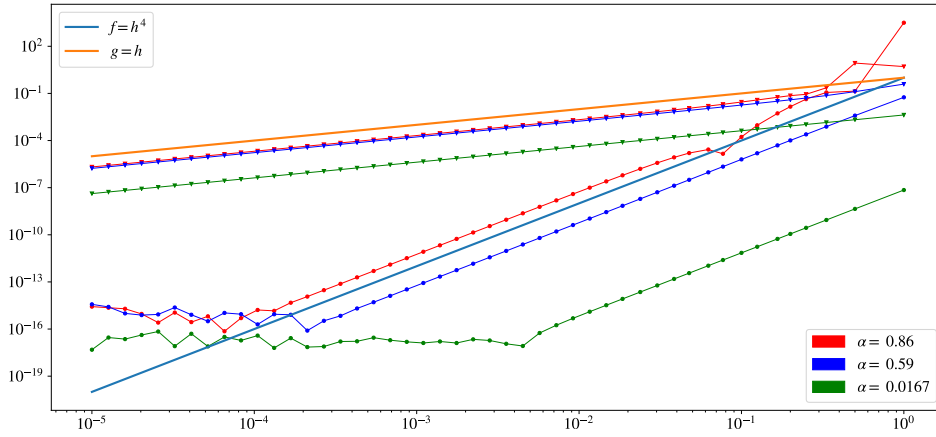
$$\bar{P}(0) = \frac{\sqrt{1-\alpha} - 1}{1 - 3\sqrt{1-\alpha}}, \quad (52)$$

$$\left. \frac{d\bar{P}}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (53)$$

Randkravet gitt av ligning (52) kan forklares direkte fra ligning (34). Ved å sette inn $x = 0$ i denne, som tidligere har blitt vist at er en løsning av ligning (26), får man randkravet gitt av uttrykk (52). Randkravet gitt av uttrykk (53) kan også forklares ved innsetting. Ved å sette $x = 0$ inn i ligning (26), er det trivielt at randkrav (53) er gjeldende.

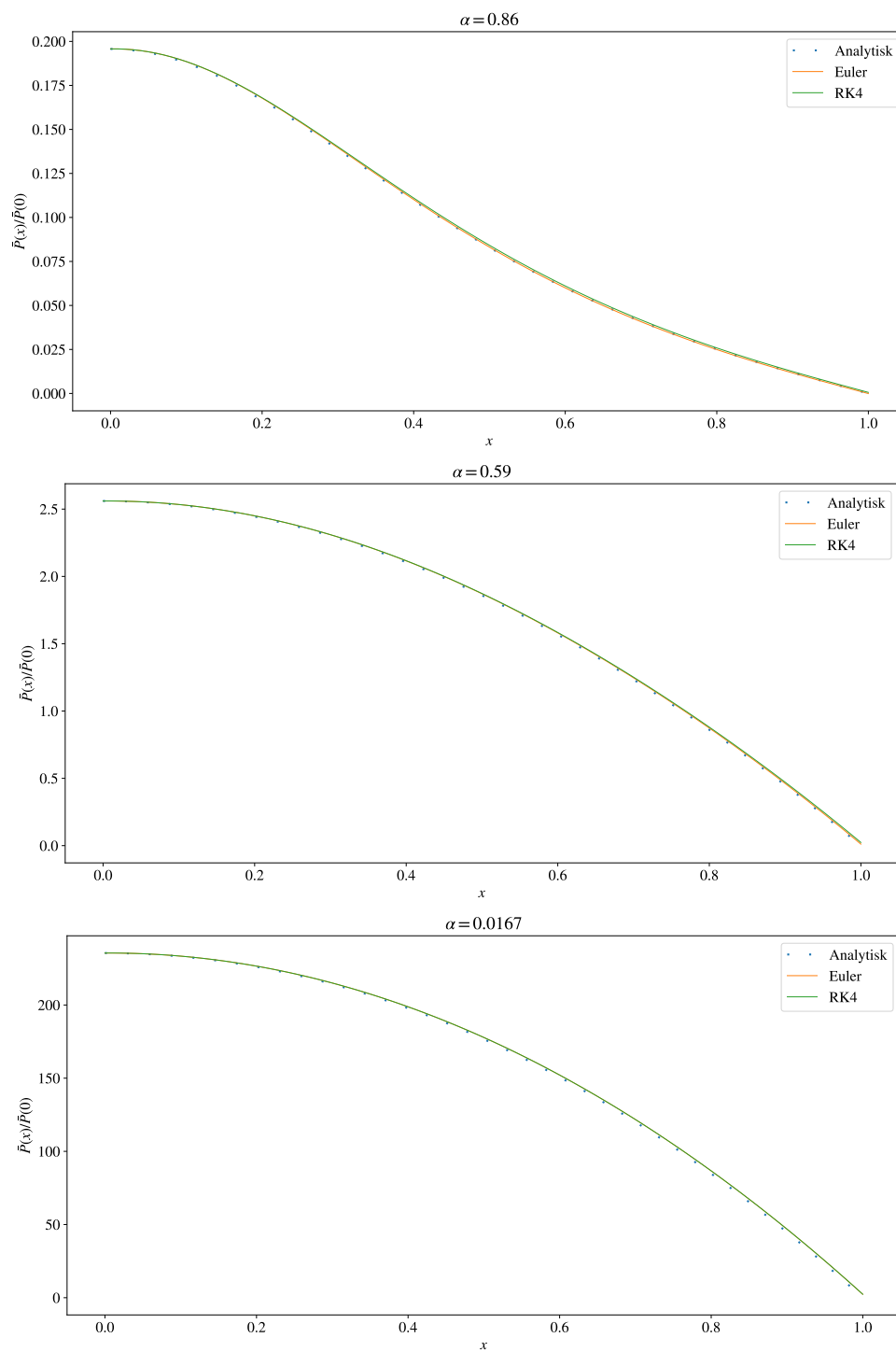
i)

Her har ligning (26) blitt løst numerisk ved hjelp av både RK4 og Eulers metode. Plottene finnes i figur 8. Nedenfor, i figur 7, er den globale feilen for Eulers metode og RK4 plottet mot steglengden, for de ulike α -verdiene.



Figur 7: Global feil i endepunktet for Eulers metode og RK4 anvendt på likning 26 med $\alpha = (0.86, 0.59, 0.0167)$ som funksjon av steglengde. Eulers metode er plottet med opp-ned trekant, mens RK4 er plottet med sirkler i datapunktene.

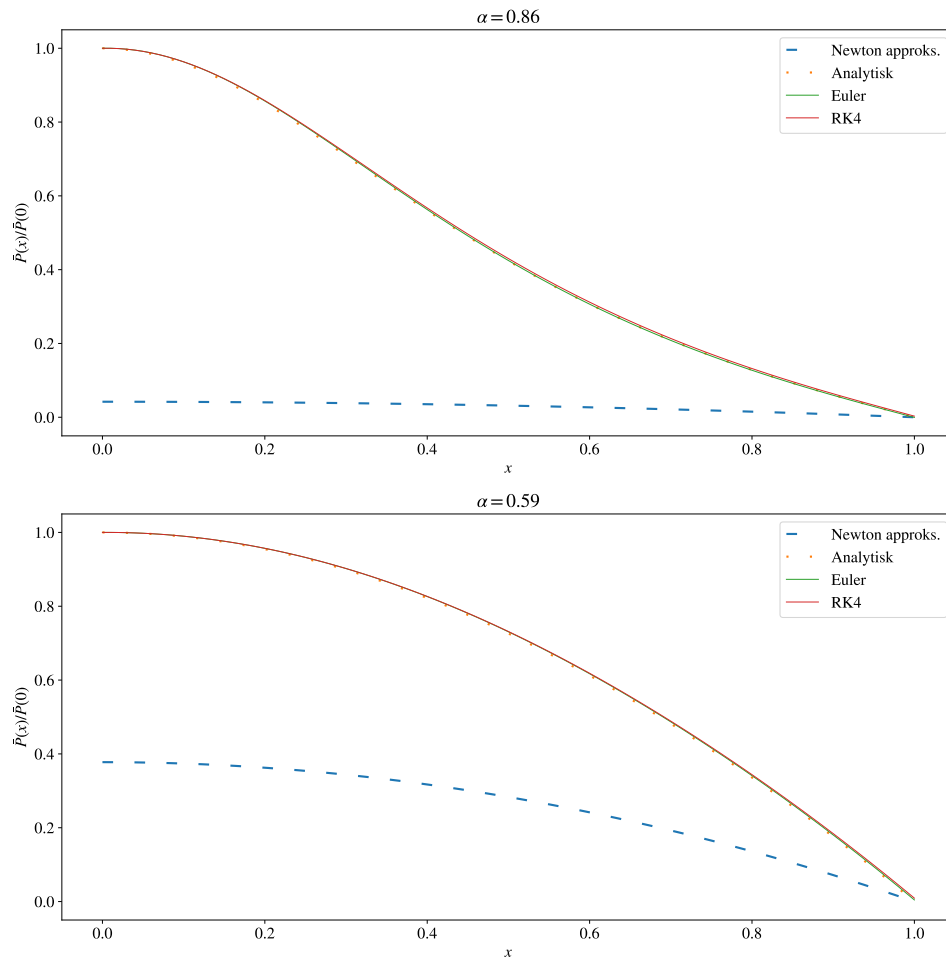
Figur 7 illustrerer tydelig ordenen til Euler og RK4. Utflatingen for RK4 ved lav steglengde skyldes, også her, mest sannsynlig datamaskinens begrensning i aritmetisk presisjon. For $\alpha = 0.0167$ kommer utflatingen allerede ved $h \sim 10^{-2}$. Dette er en av grunnene til at vi videre har brukt steglengden $h = 0.01$, eller $N = 100$ antall oppdelinger av integrasjonsintervallet i dette tilfellet. En annen grunn er at den globale feilen er såpass liten, og grafene i figur 8 ville vært umulig for det blotte øyet å skille fra hverandre med en mindre steglengde.



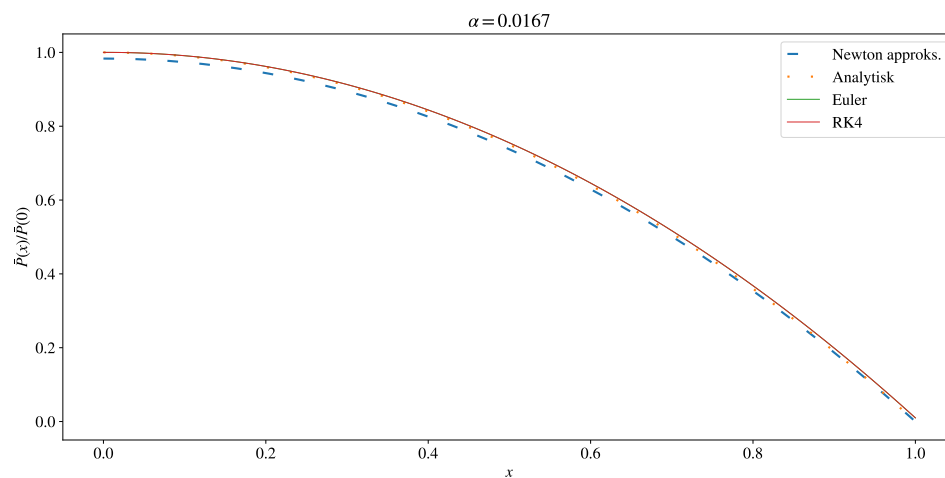
Figur 8: Eulers metode og RK4 anvendt på likning 26 med $\alpha = 0.86, 0.59, 0.0167$. Steglengden $h = 0.01$. Den analytiske løsningen er også plottet. Alle løsningene er normaliserte.

j)

Den Newtonske approksimasjonen (35) har her blitt plottet sammen med de numeriske løsningene fra oppgave (i). Plottene finnes i figur 9 og 10. De tyder på at den Newtonske approksimasjonen blir bedre for mindre α . Dette stemmer overens med utledningen av approksimasjonen, der det er antatt at α er liten.



Figur 9: Eulers metode og RK4 anvendt på likning 26 med $\alpha = (0.86, 0.59)$, sammen med den Newtonske approksimasjonen. Steglengden for de numeriske metodene er $h = 0.01$. Den analytiske løsningen er også plottet. Alle løsningene er normaliserte.



Figur 10: Eulers metode og RK4 anvendt på likning 26 med $\alpha = 0.0167$, sammen med den Newtonske approksimasjonen. Steglengden for de numeriske metodene er $h = 0.01$. Den analytiske løsningen er også plottet. Alle løsningene er normaliserte.