

Segunda asignación: Efectividad del apantallamiento de los electrones a la fuerza de Coulomb repulsiva generada por los núcleos atómicos (de oro) al bombardeo de protones

Alonso Montagut^{*}

Angie Sandoval^{**}

Alexandra Peña^{***}

Universidad Industrial de Santander

25 de octubre del 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	3
2.1. Mecánica Lagrangiana	3
2.1.1. Potencial de Coulomb	3
2.1.2. Potencial de Coulomb apantallado	3
2.2. Sección Transversal Diferencial	3
2.2.1. Sección transversal diferencial, potencial de Coulomb	4
2.2.2. Sección transversal diferencial, potencial de Coulomb apantallado	4
3. Resultados	5
3.1. Ecuaciones de Movimiento Potencial de Coulomb	5
3.2. Ecuaciones de Movimiento Potencial de Coulomb apantallado	5
3.3. Relación entre la sección transversal y el apantallamiento	6
3.4. Relación entre el ángulo de dispersión y la energía	7
3.5. Relación entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto	8

* Código: 2211077

** Código: 2210728

*** Código: 2210721

4. Conclusiones

10

Resumen

En esta asignación se estudia la dispersión de protones al ser bombardeados contra núcleos de átomos de oro, analizando la influencia del apantallamiento sobre el potencial de Coulomb. Para ello, se comparan dos modelos de potencial: el potencial de Coulomb puro y el potencial de Yukawa, que incluye un término exponencial para representar el efecto del apantallamiento. Utilizando la mecánica lagrangiana, se derivan las ecuaciones de movimiento para ambos potenciales, y se estudia la sección transversal diferencial como una medida de la probabilidad de dispersión de los protones en función del ángulo, bajo diferentes parámetros de impacto y energía.

Los resultados muestran que el apantallamiento reduce el alcance de las interacciones del potencial, siendo más pronunciado en ángulos grandes de dispersión. A medida que el parámetro de apantallamiento aumenta, la sección transversal diferencial disminuye, indicando que la interacción es menos efectiva a largas distancias. Además, se observa que el ángulo de dispersión tiende a reducirse con el incremento de la energía de los protones o del parámetro de impacto, acercándose al comportamiento de un potencial de Coulomb sin apantallamiento en ciertos límites.

1. Introducción

En mecánica clásica, la energía potencial se trata como uno de los fundamentos del análisis dinámico de los sistemas, ya que hace referencia a la energía almacenada por el sistema y la capacidad para adquirir energía cinética. Así, solo con la energía ya es posible tener nociones del comportamiento del sistema [1]. Es en este ámbito de analizar los sistemas físicos a través de la energía potencial, que se plantean dos potenciales conocidos: el potencial de Coulomb y el potencial de Yukawa. El primero, de la forma: $V = \frac{k}{r}$, que da lugar a la fuerza entre dos cargas eléctricas del mismo signo. El segundo, de la forma: $V = \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$, donde al término asociado a la exponencial se le conoce como el apantallamiento [2].

Es con estos potenciales que se estudiará la dispersión o *scattering*: desviación en la trayectoria de una partícula con energía positiva por interacción de un potencial cuando esta se encuentra bajo la influencia de un campo de fuerzas centrales. Específicamente, la dispersión de los protones sobre átomos de oro, asemejándolo al experimento de Rutherford gracias a las similitudes entre las secciones transversales para el apantallamiento y la dispersión de Rutherford. Así, buscando mostrar cómo el término apantallado afecta el alcance, el rango de interacción y la sección transversal con respecto al potencial de Coulomb a altas y bajas energías.

Para ello, el texto se organiza de la siguiente forma: En la sección 2, la metodología para encontrar expresiones y gráficas que permitirán el análisis. En la sección 3, los resultados obtenidos y la discusión de los cambios aplicados para el análisis de los potenciales. Finalmente, las conclusiones respectivas en la sección 4.

2. Metodología

2.1. Mecánica Lagrangiana

Se plantea un sistema similar al experimento de Rutherford: un núcleo de un átomo de oro y un protón que es lanzado hacia el núcleo. Se coloca el sistema de referencia sobre el núcleo de oro, y se mide la posición del protón como r desde el núcleo. Se considera que el potencial asociado a la interacción entre el protón y el núcleo puede ser uno de los dos potenciales que se van a analizar en la dispersión: Coulomb y Yukawa. Puesto que ya se tienen los potenciales, es intuitivo el uso de mecánica lagrangiana. Así, se definió la función lagrangiano de la forma $L = T - U$, donde T es la energía cinética en coordenadas polares. Con esto, es factible implementar las ecuaciones de Euler-Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento del protón en cada caso.

2.1.1. Potencial de Coulomb

Las energías cinética y potencial son:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \\U &= \frac{k}{r}, \\ \therefore \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}.\end{aligned}\tag{1}$$

2.1.2. Potencial de Coulomb apantallado

La energía cinética y potencial son:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \\U &= \frac{k}{r}e^{-\alpha r}, \\ \therefore \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}e^{-\alpha r}.\end{aligned}\tag{2}$$
$$\tag{3}$$

De tal forma que, cuando el término α se hace cero, se tiene el lagrangiano (y por ende, las ecuaciones de movimiento) del potencial de Coulomb. Así, a la exponencial se le conoce como el término de apantallamiento del potencial.

2.2. Sección Transversal Diferencial

La sección transversal diferencial es una cantidad que describe la probabilidad de que una partícula incidente sea desviada en un cierto ángulo como resultado de una interacción o colisión. Es una medida que aparece en el estudio de la dispersión de partículas, y se denota generalmente

como $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. La distancia mínima entre la trayectoria no perturbada de la partícula y el centro del potencial se conoce como el parámetro de impacto (b).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4)$$

2.2.1. Sección transversal diferencial, potencial de Coulomb

Se relaciona el ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto b y la V la velocidad de la partícula incidente o ya que $\frac{1}{2}mV^2 = E$, donde E es la energía cinética de la partícula incidente se llega a:

$$b = \frac{k}{V^2} \cot \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad b = \frac{K}{2E} \cot \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

$$\theta = 2 \cot^{-1} \left(\frac{bV^2}{k} \right), \quad \theta = 2 \cot^{-1} \left(\frac{b2E}{K} \right),$$

donde $k = Z_1 Z_2 e^2$, e = carga eléctrica elemental Z_1 = es el número atómico de la partícula incidente y Z_2 = es el número atómico de la partícula blanco o núcleo objetivo (el átomo con el cual está chocando la partícula incidente) y $K = mk$.

Ya conociendo la relación entre b y θ , solo queda remplazar y despejar en la expresión 4 para obtener:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{K}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}.$$

Siendo esta la expresión que determina la sección transversal diferencial para el potencial de Coulomb.

2.2.2. Sección transversal diferencial, potencial de Coulomb apantallado

El potencial de Coulomb apantallado (potencial de Yukawa), describe una fuerza central entre dos partículas, con una parte exponencial que introduce el apantallamiento o decaimiento respecto de la interacción entre partículas a distancias grandes, caracterizada por el parámetro α , la sección transversal diferencial que parte de este potencial se expresa como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{K}{4E} \right)^2 \frac{e^{-2\alpha r}}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (5)$$

El parámetro de apantallamiento α es una constante que aparece en el potencial de Yukawa y describe cómo varía el rango efectivo de la interacción: la resistencia de las partículas a acercarse a medida que aumenta la distancia r entre ellas, por lo que el término muestra cómo rápidamente decae la interacción entre partículas con relación a la distancia. Además, también posee relaciones entre el ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto b y la energía cinética E de la partícula incidente de las cuales es posible hacer la deducción de la expresión para la sección transversal:

$$b = \frac{Ke^{-\alpha r}}{2E} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (6)$$

$$\theta = 2 \cot^{-1}\left(\frac{2bE}{Ke^{-\alpha r}}\right). \quad (7)$$

3. Resultados

3.1. Ecuaciones de Movimiento Potencial de Coulomb

Del lagrangiano 1 se obtienen dos ecuaciones de movimiento, una por cada coordenada generalizada. Así, la ecuación para θ es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \implies mr^2 \dot{\theta} &= cte, \end{aligned}$$

y la ecuación para r es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0, \\ \implies m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r} \end{aligned}$$

3.2. Ecuaciones de Movimiento Potencial de Coulomb apantallado

Ahora, del lagrangiano 3 se obtienen dos ecuaciones de movimiento, nuevamente una por cada coordenada generalizada. Así, la ecuación para θ es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \implies mr^2 \dot{\theta} &= cte, \end{aligned}$$

y la ecuación para r es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0, \\ \implies m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + \frac{ke^{-\alpha r}}{r^2} \left[1 + \alpha r \right] \end{aligned}$$

3.3. Relación entre la sección transversal y el apantallamiento

Para analizar el comportamiento de este parámetro se gráfico la función (5) para distintos valores de α , como se presenta en la siguiente gráfica.

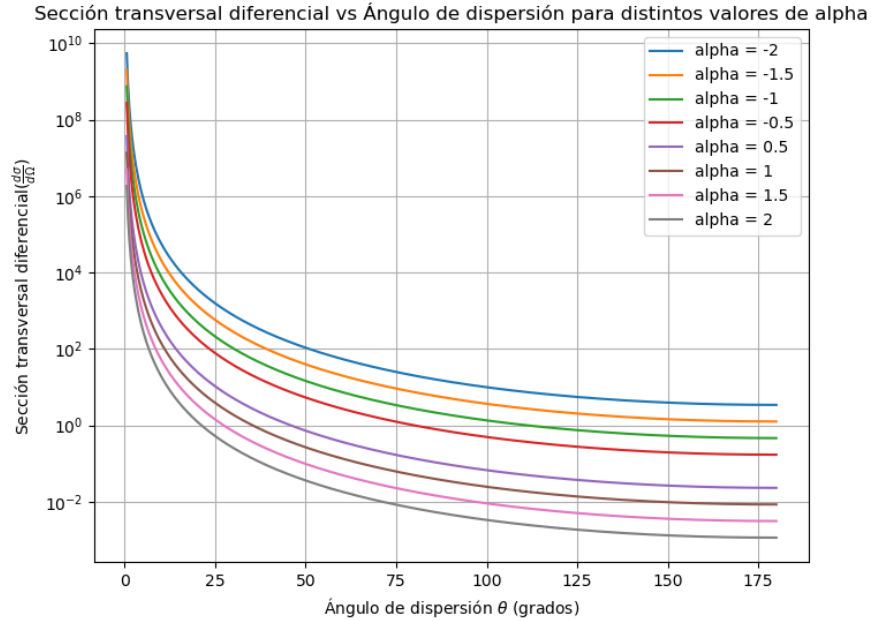


Figura 1: Sección transversal diferencial vs θ para distintos valores de α , $K = 1$

La sección transversal diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ disminuye conforme aumenta el ángulo de dispersión θ . Esto indica que es más probable que las partículas se dispersen en ángulos pequeños, y menos probable en ángulos grandes. El parámetro de apantallamiento α regula cómo el potencial de Yukawa decae con la distancia, influyendo directamente en la sección transversal diferencial.

A medida que α aumenta, la sección transversal diferencial disminuye a ángulos grandes, lo que refleja una interacción menos efectiva a largas distancias. En estos casos, la interacción solo es relevante cuando las partículas están muy cerca, mientras que a distancias grandes es prácticamente nula.

En el caso de un potencial de Coulomb puro (como el de dos partículas cargadas sin apantallamiento), la interacción decae como $\frac{1}{r}$, lo que implica un alcance largo, ya que la fuerza sigue siendo significativa incluso a grandes distancias. Sin embargo, al incluir el término de apantallamiento $e^{-\alpha r}$, la interacción decae rápidamente, transformándose en una de alcance corto. A medida que α aumenta, la interacción solo es relevante a distancias muy pequeñas.

3.4. Relación entre el ángulo de dispersión y la energía

El ángulo de dispersión, tal como se desprende de la ecuación 7, revela una relación directa entre la energía incidente E , el parámetro de impacto b , y la constante que regula el sistema K , además de los parámetros α y r . La ecuación sugiere que, a medida que la energía aumenta, el ángulo de dispersión disminuye gradualmente, viéndose este comportamiento acentuado para valores mayores de b y/o α . Además, el factor exponencial que involucra a r y α modula la dispersión de manera que las interacciones entre estos parámetros determinan la naturaleza del ángulo. En la Figura 2, se visualiza cómo varían estos ángulos para diferentes valores de b y α , destacando la influencia de cada uno en la dispersión observada. Asimismo, la relación inversa entre el ángulo de dispersión y α y/o la energía.

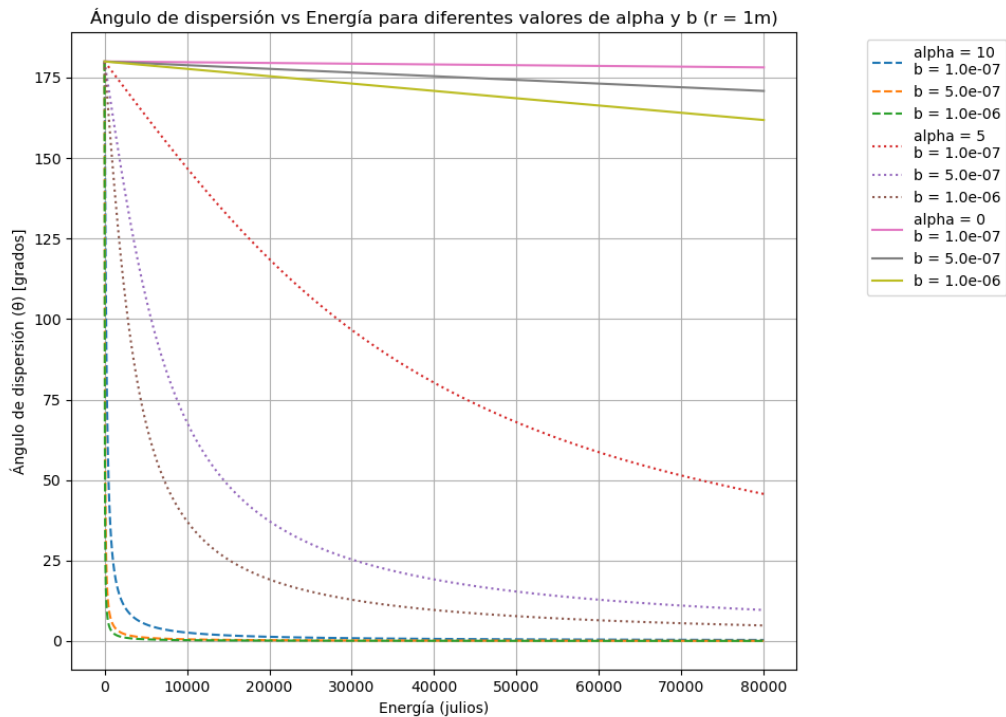


Figura 2: Gráfica de θ vs E para diferentes valores de α y b , $r = 1m$, $K = 1$.

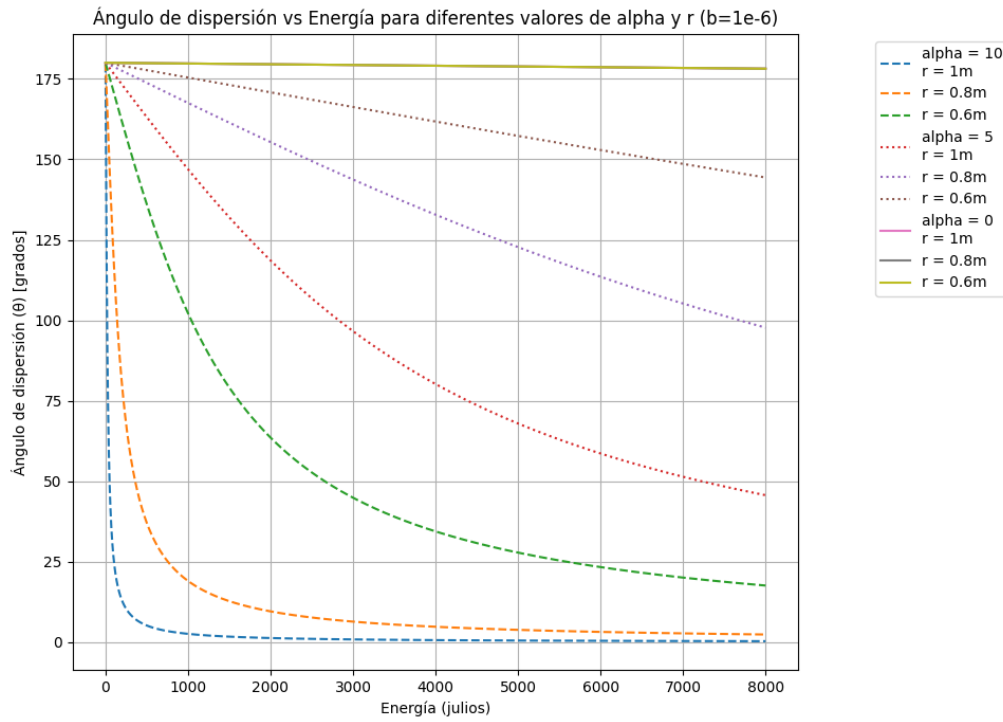


Figura 3: Gráfica de θ vs E para diferentes valores de α y r , $b = 1e - 6$, $K = 1$.

En la figura 3, a medida que $r \rightarrow 0$, la dependencia entre θ y la energía empiezan a comportarse muy similar al de Potencial de Coulomb sin importar que valor tenga el apantallamiento.

3.5. Relación entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto

De la ecuación 7, se da una variación conjunta entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto. La ecuación apunta a que sí el parámetro de impacto aumenta, el ángulo de dispersión disminuye gradualmente, un comportamiento que se ve acentuado para valores mayores de E y/o α . Además, el factor exponencial que involucra a r y α modula la dispersión de manera que las interacciones entre estos parámetros determinan la naturaleza del ángulo. En la figura 4, se visualiza cómo varían estos ángulos para diferentes valores de E y α , destacando la influencia de cada uno en la dispersión observada.

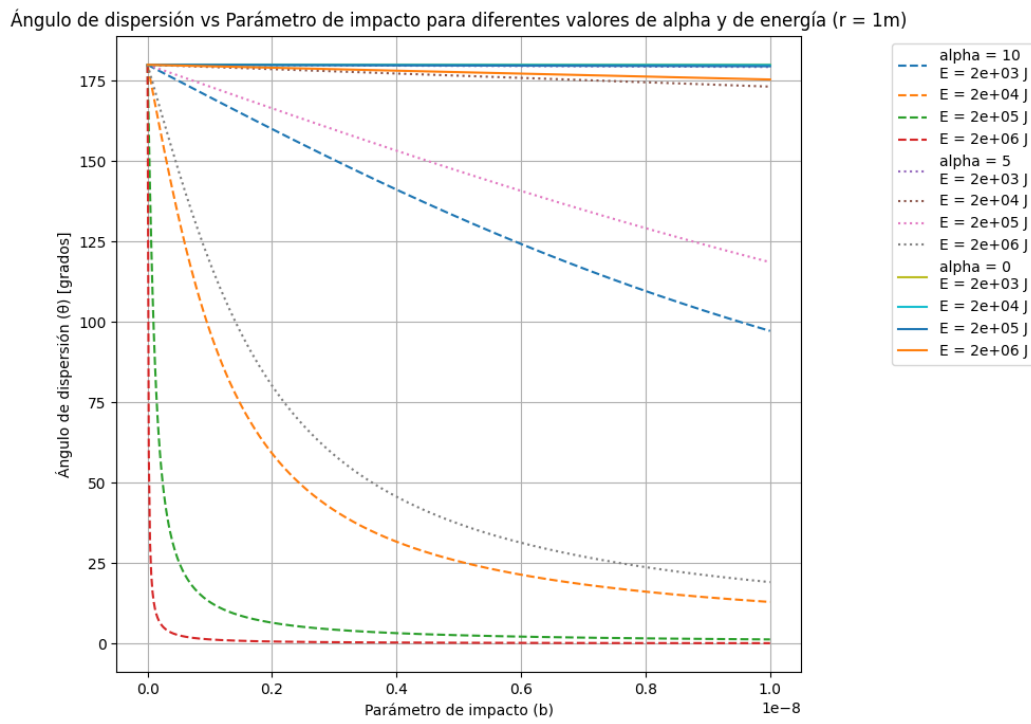


Figura 4: Gráfica de θ vs b para diferentes valores de α y E , $r = 1$, $K = 1$.

A medida que la energía aumenta, la correlación que se presenta entre θ y b , un comportamiento inverso, tiende a ser más proporcional como lo tiende a ser en el potencial de Coulomb puro.

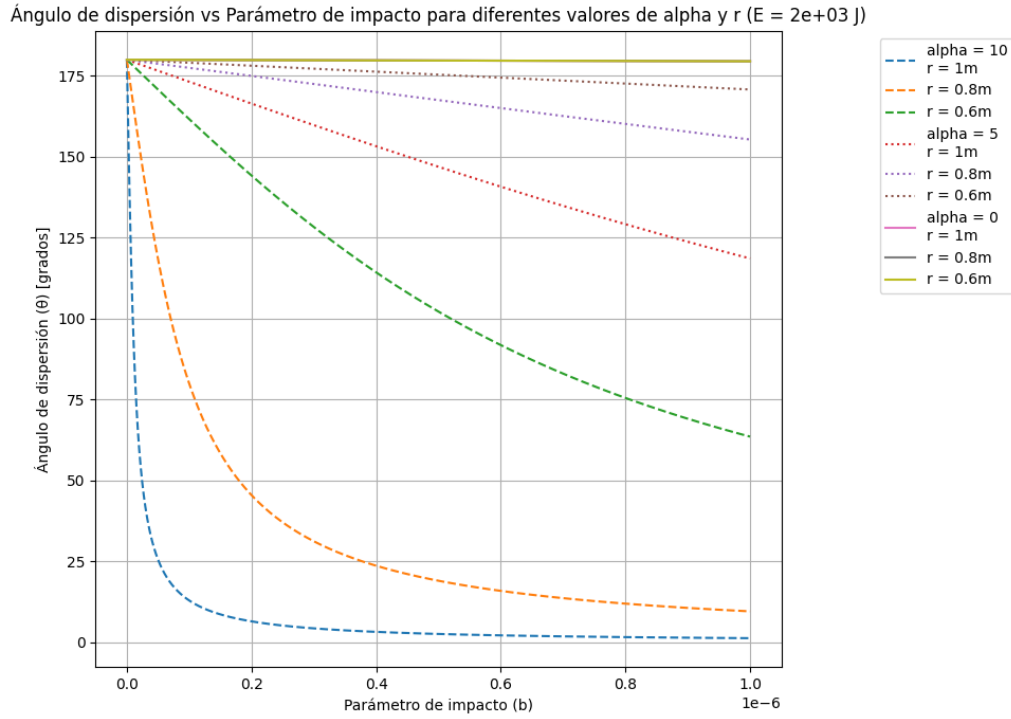


Figura 5: Gráfica de θ vs b para diferentes valores de α y r , $E = 2e + 03$, $K = 1$.

En el gráfico 5, a medida que $r \rightarrow 0$, el comportamiento entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto tienden a evolucionar como lo harían frente a un potencial de Coulomb ($\alpha = 0$) en donde no hay termino de apantallamiento.

4. Conclusiones

El parámetro de apantallamiento α juega un papel crucial en la dispersión de partículas, modificando el alcance de la interacción. A medida que α aumenta, el apantallamiento incrementa y la interacción entre las partículas se convierte en una de corto alcance. Esto se refleja en la disminución de la sección transversal diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, especialmente a pequeños ángulos de dispersión θ . Un mayor apantallamiento limita el alcance de la interacción, mientras que un menor apantallamiento (valores negativos o pequeños de α) extiende el rango de interacción, afectando notablemente la distribución angular de las partículas dispersadas.

Para valores de α y energía cada vez más altos el ángulo de dispersión tiende a cero, es decir, no se da una colisión ($\theta \approx 0$). A medida que r tiende a cero, sin importar que valor tenga α , distintos potenciales apantallados exhiben un ángulo de dispersión idénticos como bien se ve en la gráfica 3 y la gráfica 5. Por otro lado, cuando se tiene un r fijo y la energía aumenta para valores arbitrarios de b y α , el ángulo de dispersión tiende a ser el mismo, como se ve en la gráfica 4. Contrariamente, para un r fijo y valores de energía bajos, el ángulo de dispersión tiende a disminuir a medida que el

valor de α aumenta, como es visto en la figura [2](#).

Referencias

- [1] Charles Kittel y Walter D Knight. *Mecánica*. Vol. 1. Reverté, 1982.
- [2] M Cosenza. “M. Cosenza, Mecánica Clásica”. En: (2016).