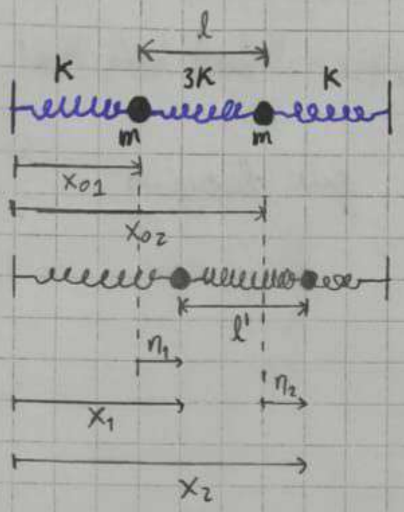
1)



Para pequeños desplazamientos:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{\eta}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k\eta_1^2 + \frac{3}{2} k(l' - l)^2 + \frac{1}{2} k\eta_2^2$$

Reescribiendo

$$l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$$

$$\therefore V = \frac{1}{2} k\eta_1^2 + \frac{3}{2} k(\eta_2^2 + \eta_1^2 - 2\eta_2\eta_1) + \frac{1}{2} k\eta_2^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{k}{2}\left[4\eta_1^2 + 4\eta_2^2 - 6\eta_2\eta_1\right]$$

$$\Rightarrow V = k\left[2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - 3\eta_2\eta_1\right]$$

$T_{11} = m$; $T_{22} = m$; $T_{12} = T_{21} = 0$

$V_{11} = 4k$; $V_{22} = 4k$; $V_{12} = V_{21} = -3k$

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4k - \omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (4k - \omega^2 m)(4k - \omega^2 m) - (-3k)(-3k) = 0$$

$$(4k - \omega^2 m)^2 = 9k^2$$

$$4k - \omega^2 m = \pm 3k$$

$$\sqrt{\frac{4k \mp 3k}{m}} = \omega$$

$$\therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

Día:____ Mes:____ Año:____

Si queremos comparar estos resultados con los obtenidos en clase primero quiero aclarar que el que se hizo en clase esta mal.

ya que en la parte final cuando hay que despejar w^2:

$$2K - w^2 m = \pm K,$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{2K \pm K}{m},$$

lo correcto es:

$$w^2 = \frac{2K \mp K}{m},$$

$$\therefore\ w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ; \quad w_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}.$$

Ahora bien... Si nos fijamos w_1 para el ejercicio en clase y para este son iguales, lo cual resulta encantador ya que a pesar de que el ejercicio tiene un resorte en el centro con una constante de restitución elastica 3 veces mayor que el de la clase, tienen el primer mismo modo, igual es de esperar, ya que este modo es equivalente a que las masas partan del equilibrio y sean desplazadas a la derecha la misma distancia (recordar distancia pequeña, oscilaciones pequeñas), las masas experimentarian la misma fuerza de restitución elastica y el resorte central no afecta el movimiento ya que el resorte central siempre esta en equilibrio.

y para w_2 tambien es de esperar que sean distintos, ya que para este, el resorte central si entra en juego.

y para la configuración de los modos normales:

$$\sum_j (V_{ij} - w_k^2 T_{ij}) a_j = 0$$

$i=1$: $(4K - w_1^2 m) a_1 + (-3K) a_2 = 0$ (Eq 1)

$i=2$: $(4K - w_2^2 m) a_1 + (-3K) a_2 = 0$ (Eq 2)

remplazando w_1^2 de la ecuación 1:

$$(4K - K) a_1 - 3K a_2 = 0$$

$$a_1 = a_2$$

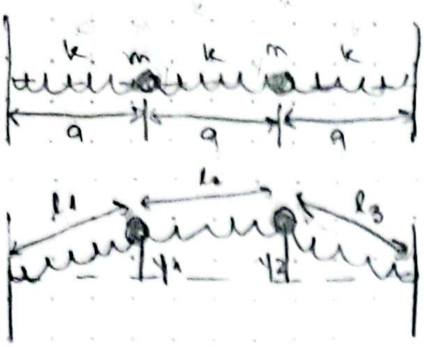
remplazando w_2^2 de la ecuación 2

$$(4K - 7K) a_1 - 3K a_2 = 0$$

$$-3K a_1 = 3K a_2$$

$$a_1 = -a_2$$

(2)



$t_0 \rightarrow$ tensión inicial de los resorte

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$$

$$T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 + y_1^2}$$

$$l_2 = \sqrt{a^2 + y_2^2}$$

$$l_3 = \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Tenemos que $y_i << a$ por lo que hacemos una expansión binomial y aproximamos hasta el segundo termino

$$l_1 = a\left(1 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2\right)^{1/2} \cong a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{a}\right)^2\right) = a + \frac{y_1^2}{2a}$$

$$l_2 = a\left(1 + \left(\frac{y_2}{a}\right)^2\right)^{1/2} \cong a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{a}\right)^2\right) = a + \frac{y_2^2}{2a}$$

$$l_3 = a\left(1 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{a^2}\right)^{1/2} \cong a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(y_2 - y_1)^2}{a^2}\right) = a + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a}$$

A las longitudes de los resorts fuera de su posición de equilibrio le restamos la longitud der los resorts en reposo, de modo que el desplazamiento de los resorts queda de la forma

$$\Delta l_1' = \frac{y_1^2}{2a}, \quad \Delta l_2' = \frac{y_2^2}{2a}, \quad \Delta l_3' = \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a}$$

Teniendo en cuenta la aproximación $y_i << a$ podemos decir que los desplazamientos son lo suficientemente pequeños para que la tensión sea constante (t_0)

$$V = \frac{1}{2} K \Delta l_i'^2 \longrightarrow V = \frac{1}{2} t_0 \Delta l_i'$$

$$V = \frac{1}{2a} t_0 \left(y_1^2 + y_2^2 + (y_2 - y_1)^2\right) = \frac{1}{2a} t_0 \left(\cancel{2} y_1^2 + \cancel{2} y_2^2 - \cancel{2} y_1 y_2\right)$$

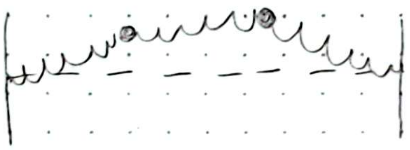
$$V = \frac{t_0}{a}\left(y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2\right)$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} - w^2 T_{11} & V_{12} - w^2 T_{12} \\ V_{21} - w^2 T_{21} & V_{22} - w^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$$

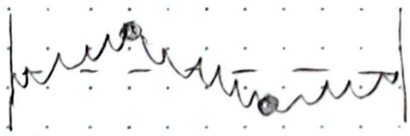
$$\begin{vmatrix} \frac{2t_0}{a} - w^2 m & -\frac{t_0}{a} - \cancel{w^2(0)} \\ -\frac{t_0}{a} - \cancel{w^2(0)} & \frac{2t_0}{a} - w^2 m \end{vmatrix} = \left(\frac{2t_0}{a} - w^2 m\right)^2 - \left(\frac{t_0}{a}\right)^2 = 0$$

$$\frac{2t_0}{a} - w^2 m = \pm \frac{t_0}{a}$$

$$w^2 = \frac{2t_0 \mp t_0}{ma} = \begin{cases} w_1^2 = \frac{t_0}{ma} \\ w_2^2 = \frac{3t_0}{ma} \end{cases}$$



modo 1, $w_1^2 = \frac{t_0}{ma}$ (1)



modo 2, $w_2^2 = \frac{3t_0}{ma}$ (2)

Para los modos normales se tiene

$$\left(\frac{2t_0}{a} - w_1^2 m\right) a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right) a_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\left(\frac{2t_0}{a} - w_2^2 m\right) a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right) a_2 = 0 \qquad (4)$$

Reemplazando (1) en 3

$$\left(\frac{2t_0}{a} - \frac{t_0}{\cancel{m}a}\cancel{m}\right) a_1 - \frac{t_0}{a} a_2 = \frac{t_0}{a} a_1 - \frac{t_0}{a} a_2 = 0$$

$$a_1 = a_2$$

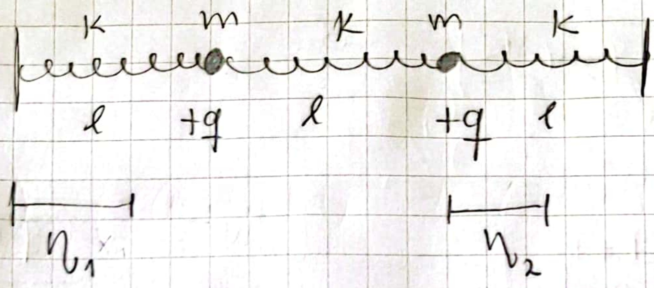
Reemplazando (2) en (4)

$$\left(\frac{2t_0}{a} - \frac{3t_0}{\cancel{m}a}\cancel{m}\right) a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right) a_2 = -\frac{t_0}{a} a_1 - \frac{t_0}{a} a_2 = 0$$

$$a_1 = -a_2$$

③

Hallar las frecuencias y las configuraciones de los modos normales para peq. oscilaciones.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}_2^2$$

$$V_r = \frac{1}{2} k \eta_1^2 + \frac{1}{2} k (\ell' - \ell)^2 + \frac{1}{2} k \eta_2^2$$

donde $\ell' = (x_2 - x_1) \Rightarrow \ell' - \ell = \eta_2 - \eta_1$

$$\Rightarrow V_r = \frac{1}{2} k \left(\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} k \left(2\eta_1^2 - 2\eta_1 \eta_2 + 2\eta_2^2 \right)$$

$$= k \left[\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_1 \eta_2 \right]$$

para el potencial electrico

$$V_e = \frac{\varepsilon q^2}{(\ell + (\eta_2 - \eta_1))^2}$$

Considerando que el potencial para pequeñas oscilaciones se puede expresar como

$$V(q_1, \dots, q_s) = V(q_0, \dots, q_{0s}) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right) \eta_i \eta_j + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \sum V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Por tanto, los términos del potencial eléctrico son:

$$V_{ii} = \frac{2\varepsilon}{\ell^3} q^2 \quad , \quad \underset{i \neq j}{V_{ij}} = -\frac{2\varepsilon}{\ell^3} q^2 .$$

Visto como matrices los potenciales serían:

$$v = v_r + v_e = \begin{pmatrix} 2k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3} & -\left(k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3}\right) & 2k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3} \end{pmatrix}$$

Para la ecuación de movimiento $(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$,

$$\det = |v - \omega^2 T| = 0 = \begin{vmatrix} 2k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3} - \omega^2 m & -\left(k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3}\right) & 2k + \frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3} - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

llamando $\frac{2\varepsilon q^2}{\ell^3} = d$

$$\Rightarrow \det = |v - \omega^2 T| = (2k + d - \omega^2 m)^2 - (k + d)^2 = 0 .$$

$$\Rightarrow 2k + d - \omega^2 m = \pm (d + k)$$

$$\omega^2 = \frac{2k + d \mp (k + d)}{m}.$$

Por lo tanto, las frecuencias son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k + d}{m}}$$

Para encontrar las configuraciones de los modos, se tiene las ecuaciones:

$$i=1)\quad (2k+d-\omega_1^2 m)a_1-(k+d)a_2=0.$$

$$i=2)\quad -(k+d)a_1+(2k+d-\omega_2^2 m)a_2=0.$$

Para $i=1$,

$$\left[2k+d-\left(\frac{k}{m}\right)m\right]a_1-(k+d)a_2=0.$$

$$(k+d)a_1+(k+d)a_2=0$$

$$\Rightarrow a_1=a_2$$

Para $i=2$,

$$-(k+d)a_1+\left[2k+d-\left(\frac{3k+2d}{m}\right)m\right]a_2=0.$$

$$-(k+d)a_1+\left[2k+d-3k+2d\right]a_2=0$$

$$-(k+d)a_1+\left[-k-d\right]a_2=0.$$

$$-(k+d)a_1-\left[k+d\right]a_2=0$$

$$-a_1=a_2$$