

Primera asignación: Péndulo Compuesto

Alonso Montagut^{*}

Angie Sandoval^{**}

Alexandra Peña^{***}

Universidad Industrial de Santander

01 de agosto del 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	3
2.1. Mecánica Lagrangiana	3
2.2. Soluciones numéricas	5
3. Resultados	6
3.1. Ecuaciones de Movimiento	6
3.2. Comportamiento caótico	7
3.3. Ángulos grandes	8
3.3.1. Condiciones iniciales iguales	8
3.3.2. Ángulos distintos	8
3.3.3. Longitudes de varillas distintas	9
3.3.4. Masas distintas	9
3.3.5. Resorte atado a media altura de las varillas	10
3.3.6. Condiciones iniciales iguales	11
3.3.7. Ángulos distintos	11
3.3.8. Longitudes de varillas distintas	12
3.3.9. Masas distintas	12
3.4. Aproximación para ángulos pequeños	13
3.4.1. Condiciones iniciales iguales	13
3.4.2. Ángulos distintos	14
3.4.3. Longitudes de varillas distintas	14

^{*}Código: 2211077

^{**}Código: 2210728

^{***}Código: 2210721

3.4.4. Masas distintas	15
3.4.5. Resorte atado a media altura de las varillas	15
3.4.6. Condiciones iniciales iguales	16
3.4.7. Ángulos distintos	16
3.4.8. Longitudes de varillas distintas	17
3.4.9. Masas distintas	17
3.5. Análisis mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT)	18
4. Conclusiones	19

Resumen

Desde Galileo, los físicos han considerado los péndulos como sistemas físicos interesantes. Hoy en día son todavía estudiados, sobretodo como parte de la formación del estudiante cuando este se involucra con la mecánica analítica. Así, en el presente reporte se muestra como, siendo aplicación del estudio de la mecánica lagrangiana, se analizó un sistema con dos péndulos coplanares, con masas puntuales colgadas cada una de una varilla de sin masa, acoplados por un resorte que une ambas masas entre sí. Se obtuvo las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange: dos ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, acopladas y no integrables.

Para hallar soluciones, se planteó un método de Runge-Kutta de cuarto orden, tal que fue posible variar las condiciones iniciales y obtener resultados para ángulos iniciales diferentes, longitudes de varillas diferentes, masas distintas y distintas ubicaciones del resorte. Además, se hicieron aproximaciones para pequeños ángulos, obteniendo las ecuaciones de movimiento lineales. Se encontró que al ser masas iguales, longitudes iguales, resorte conectado a las masas, el sistema se comporta de manera similar a un péndulo simple. Esto mismo se repite en el caso de ángulos pequeños para todas las modificaciones. En el caso general, cuando las condiciones son diferentes entre sí, se hace notar la presencia del resorte modificando las amplitudes de oscilaciones a través de la transferencia de energía. Aparte, se planteó una discusión sobre el comportamiento caótico del sistema, concluyendo que sí se aprecia caos dado por la no-linealidad de las ecuaciones, las interacciones entre los péndulos a través del resorte y los cambios en las condiciones iniciales.

1. Introducción

El péndulo es ese sistema que siempre está presente en la vida de un físico. Desde que se tiene registro, Galileo fue el primero en estudiar este sistema, llegando incluso a diseñar el primer reloj con péndulo [1]. Puede ser el ejemplo más simple de un libro o la representación de las vibraciones en un sistema complejo. La forma más sencilla de un péndulo es aquella masa que cuelga de una cuerda y se deja oscilar libremente [2]. De allí se hacen sus respectivas idealizaciones para simplificar el análisis del sistema: no fricción con el aire, cuerda inextensible, masa puntual. O en caso tal, sus variaciones: péndulos acoplados, con amortiguamiento, forzados, etc,. Es precisamente por esta sencillez propiciada por simplificaciones y la cantidad de posibles variaciones que los osciladores son sistemas llenos de riqueza para un estudiante que aprende la mecánica analítica.

Dentro de las variaciones que presenta un péndulo simple, se destacan los osciladores acoplados: múltiples péndulos cuyas oscilaciones están relacionadas por ejemplo, a través de cuerdas o resortes

que los conectan entre sí [3]. En particular, se estudió un sistema con dos péndulos coplanares con masas puntuales que cuelgan cada uno de una varilla sin masa de longitud l , acoplados desde las masas a través resorte sin masa de constante k , con la finalidad de encontrar las ecuaciones de movimiento aplicando la mecánica lagrangiana y hallar soluciones numéricas, para luego aplicar cambios en las condiciones del sistema: aproximaciones de ángulos pequeños, masas y longitudes de varillas diferentes. Además, analizar su comportamiento en términos de un espectro de potencias de Fourier y generar una discusión sobre el comportamiento caótico del sistema.

Para ello, el reporte se organiza de la siguiente forma: En la sección 2, la metodología para encontrar y solucionar las ecuaciones de movimiento. En la sección 3, los resultados obtenidos y la discusión de los cambios aplicados para el análisis del sistema. Finalmente, las conclusiones respectivas en la sección 4.

2. Metodología

2.1. Mecánica Lagrangiana

Para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema, se usó mecánica lagrangiana, es decir, definir una función mediante la energía cinética y la energía potencial del sistema en la forma $L = T - U$ para luego encontrar las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para esto, primero se hace un análisis los grados de libertad del sistema: dos masas cada una con sus tres coordenadas, cuatro restricciones sobre el movimiento de las masas dadas por las dos varillas de longitud fija, el resorte y el confinamiento del movimiento sobre el plano (x,y). En otras palabras, $3(2) - 4 = 2$. Así, se define un sistema de coordenadas cartesianas como se ve en la figura 1, tal que se reescriben en términos de las dos coordenadas generalizadas θ y α :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin(\theta), & y_1 &= -l_1 \cos(\theta). \\ x_2 &= D + l_2 \sin(\alpha), & y_2 &= -l_2 \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Con esto, ya es posible escribir la energía cinética traslacional. Se descarta una energía cinética rotacional puesto que la varilla tiene una longitud fija y se considera sin masa, por lo tanto no hay variaciones en los l ni un momento de inercia presente. Para cada masa, quedan:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\alpha}^2, \quad (1)$$

También, la energía potencial del sistema contiene términos gravitacionales debidos a las masas colgantes y elásticos debidos a la presencia del resorte:

$$U = m_1 g l_1 \cos(\theta) + m_2 g l_2 \cos(\alpha) + U_e, \quad (2)$$

Donde U_e corresponde a la energía potencial asociada al resorte que une las masas. De manera general, se considera un desplazamiento del resorte respecto a su posición de equilibrio con términos en ambas coordenadas cartesianas:

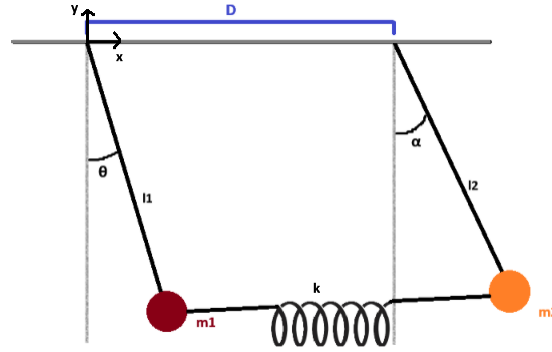


Figura 1: Sistema con péndulos coplanarios acoplados por las masas a través de un resorte sin masa de constante k .

$$U_e = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2, \quad (3)$$

Tal que, lo que se deslaza el resorte en cada coordenada es:

$$\begin{aligned} \Delta x &= D - (D + l_2 \sin \alpha - l_1 \sin \theta) = D - (x_2 - x_1), \\ \Delta y &= -l_2 \cos \alpha + l_1 \cos \theta = y_2 - y_1, \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía potencial elástica es:

$$U_e = \frac{1}{2}k(l_1 \sin \theta - l_2 \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2}k(-l_2 \cos \alpha + l_1 \cos \theta)^2,$$

Así, expandiendo los cuadrados y simplificando, queda la expresión como:

$$U_e = \frac{1}{2}k(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\theta - \alpha)).$$

Con esto, se puede escribir el lagrangiano del sistema. Para posteriormente, aplicarle las ecuaciones de Euler-Lagrange y encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\alpha}^2 - m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2}k(l_1^2 + l_2^2) + kl_1l_2 \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Puesto que en el lagrangiano no se encuentran coordenadas cíclicas, más no hay una dependencia explícita del tiempo, la única cantidad conservada es la energía total. Ya que el número de grados de libertad del sistema (2) es mayor al número de cantidades conservadas, las ecuaciones de movimiento resultantes son no integrables.

2.2. Soluciones numéricas

Para encontrar solución numérica a las ecuaciones de movimiento, se empleó el método de Runge-Kutta clásico (RK4), que consta de un proceso que parte de las condiciones iniciales para calcular soluciones a la ecuación a través de cuatro constantes, definidas de manera iterativa entre sí [4]. De tal manera que, usando python primero se establece una función que contenga las ecuaciones:

```
1 def sistema_ecuaciones(t, y):
2     theta, omega1, alpha, omega2 = y
3
4     # Ecuaciones del sistema
5     dtheta_dt = omega1
6     domega1_dt = -(g / l1) * np.sin(theta) - (k * l2 / (m1 * l1))
7                 * np.sin(theta - alpha)
8     dalpha_dt = omega2
9     domega2_dt = -(g / l2) * np.sin(alpha) + (k * l1 / (m2 * l2))
10                * np.sin(alpha - theta)
11
12     return np.array([dtheta_dt, domega1_dt, dalpha_dt, domega2_dt])
```

Luego, con las funciones definidas, se definen las cuatro constantes que establece el método de forma iterativa y las condiciones iniciales que tomará la función para, posteriormente, llamar a la función y obtener la solución:

```
1 def runge_kutta_4(sistema_ecuaciones, y0, t0, tf, h):
2     t = np.arange(t0, tf, h)
3     y = np.zeros((len(t), len(y0)))
4     y[0] = y0
5
6     for i in range(1, len(t)):
7         k1 = h * sistema_ecuaciones(t[i-1], y[i-1])
8         k2 = h * sistema_ecuaciones(t[i-1] + 0.5*h, y[i-1] + 0.5*k1)
9         k3 = h * sistema_ecuaciones(t[i-1] + 0.5*h, y[i-1] + 0.5*k2)
10        k4 = h * sistema_ecuaciones(t[i-1] + h, y[i-1] + k3)
11
12        y[i] = y[i-1] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6
13
14    return t, y
15
16 # Condiciones iniciales
17 theta0 = 0 # angulo inicial de theta (radianes)
18 omega1_0 = 0.0 # velocidad angular inicial de theta (rad/s)
19 alpha0 = np.pi / 4 # angulo inicial de alpha (radianes)
20 omega2_0 = 0.0 # velocidad angular inicial de alpha (rad/s)
21 y0 = [theta0, omega1_0, alpha0, omega2_0]
22
23 t0 = 0
24 tf = 25
25 h = 0.001
26
27 # Solucionamos el sistema
28 t, y = runge_kutta_4(sistema_ecuaciones, y0, t0, tf, h)
```

3. Resultados

Para una clara comprensión de los distintos casos, vamos a dividirlos en: todas las condiciones iniciales de los péndulos son iguales, ángulos distintos, longitudes de varillas distintas, masas distintas y el resorte atado a media altura de las varillas, para todos los casos la constante k del resorte es de $20N/m$ y los péndulos parten del reposo.

3.1. Ecuaciones de Movimiento

De las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen dos ecuaciones de movimiento, una por cada coordenada generalizada. Así, la ecuación para θ es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \Rightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l_1} \sin \theta - \frac{kl_2}{m_1 l_1} \sin(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Donde se aprecia la no-linealidad de las ecuaciones gracias a las funciones trigonométricas, además de ser una ecuación de segundo orden con dos variables independientes por tener la presencia de α en la igualdad correspondiente a $\ddot{\theta}$. De igual forma, la ecuación para α es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0, \\ \Rightarrow \ddot{\alpha} &= -\frac{g}{l_2} \sin \alpha + \frac{kl_1}{m_2 l_2} \sin(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Nuevamente, una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que ofrece una expresión para la aceleración angular, mostrando cómo el sistema está acoplado entre θ y α . Ambas ecuaciones son no integrables, ya que no hay suficientes cantidades conservadas. Por lo tanto, no poseen solución analítica.

Para el caso de los ángulos pequeños, se reemplazan las aproximaciones en las ecuaciones de movimiento obtenidas previamente, tal que se obtienen:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l_1} \theta - \frac{kl_2}{m_1 l_1} (\theta - \alpha) \\ \ddot{\alpha} &= -\frac{g}{l_2} \alpha + \frac{kl_1}{m_2 l_2} (\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Mostrando unas ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. Claramente, la no-integrabilidad de las ecuaciones se mantiene. Sin embargo, la aproximación permitió convertir las ecuaciones en lineales, siendo posible ver mayor semejanza con las ecuaciones de un movimiento armónico simple.

3.2. Comportamiento caótico

El comportamiento caótico en un sistema aparece cuando las ecuaciones de movimiento no tienen soluciones periódicas y pequeñas variaciones en las condiciones iniciales resultan en trayectorias que divergen exponencialmente con el tiempo. El sistema de dos péndulos unidos a un resorte puede mostrar este tipo de comportamiento caótico bajo ciertas condiciones, debido a la no linealidad inherente en las ecuaciones de movimiento y la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Las condiciones consideradas para verificar este comportamiento fueron:

- (a) **No linealidad:** Las ecuaciones diferenciales del sistema para ángulos grandes son:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_1} \sin \theta + \frac{kl_2}{l_1} \sin(\theta - \alpha) \quad (4)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l_2} \sin(\alpha) + \frac{kl_1}{l_2} \sin(\theta - \alpha) \quad (5)$$

En estas ecuaciones, los términos con $\sin(\theta)$ y $\sin(\theta - \alpha)$ introducen una no linealidad significativa en el sistema. Esta no linealidad es la principal fuente de caos.

- (b) **Interacción entre los péndulos:** El acoplamiento entre las dos masas, debido a la fuerza del resorte, aumenta la complejidad del sistema. El resorte permite la transferencia de energía entre los péndulos, y esta transferencia puede no ser uniforme ni predecible, especialmente cuando las condiciones iniciales no están en equilibrio perfecto. La energía puede fluir de un péndulo al otro en patrones que dependen de las posiciones y velocidades angulares de ambos, lo que contribuye al caos, ya que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a grandes diferencias en la distribución de energía entre los péndulos.

- (c) **Condiciones iniciales:** Los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En este sistema, ángulos grandes (lejos del equilibrio vertical) tienden a generar comportamientos caóticos debido a la mayor influencia de los términos no lineales. Cuando ambos péndulos comienzan con ángulos similares y grandes, el acoplamiento a través del resorte puede amplificar las diferencias en sus movimientos, lo que puede llevar al caos.

Las velocidades iniciales también juegan un papel crucial en el caos del sistema, especialmente cuando son altas y significativamente diferentes entre los dos péndulos. Si uno de los péndulos comienza con una velocidad mucho mayor que el otro, se puede inducir un grado considerable de caos.

Además de las condiciones iniciales, la asimetría en parámetros como la longitud de las varillas pueden crear condiciones propicias para el caos, rompiendo la regularidad en la dinámica y favoreciendo comportamientos no periódicos.

Este sistema no muestra un caos significativo debido al acoplamiento entre los péndulos y el resorte. De hecho, siempre se observa una curva envolvente sobre las oscilaciones de los péndulos, la cual está influenciada por la constante k del resorte. Además, cuando se hace la aproximación

para ángulos pequeños, desaparecen los términos que hacen que las ecuaciones diferenciales sean no lineales, por lo que, en ese caso, el sistema no presenta un comportamiento caótico.

3.3. Ángulos grandes

3.3.1. Condiciones iniciales iguales

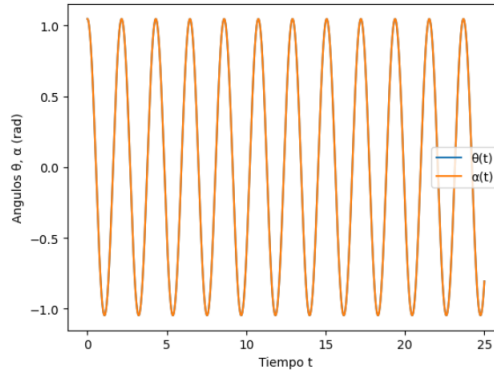


Figura 2: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1(\text{m})$, $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

Puesto que las condiciones iniciales para ambos péndulos son las mismas, la evolución de θ y α muestra el mismo comportamiento que el de un péndulo simple. Las masas de los péndulos permanecen siempre a la misma distancia, por lo cual el resorte no interviene en el movimiento de estos y no hay una transferencia de energía notable a través del resorte [2](#).

3.3.2. Ángulos distintos

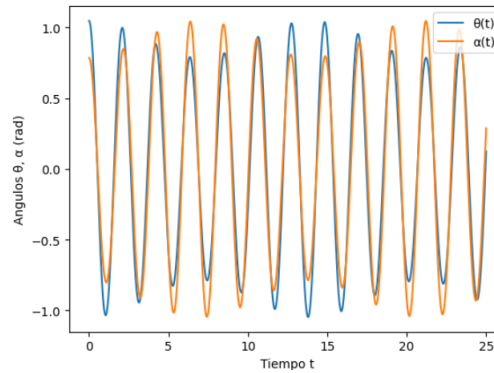


Figura 3: Condiciones iniciales $\theta = \pi/3$ (rad) y $\alpha = \pi/4$ (rad), $l_1 = l_2 = 1(\text{m})$ y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

Al tener ángulos distintos el resorte empieza a hacer notar su presencia, dadas las condiciones iniciales las masas de los resortes se encuentran en distintos instantes de tiempo a una distancia

diferente a D , produciendo que la fuerza restaurativa del resorte entre en acción y el cambio de los ángulos en el tiempo de como resultado la figura 3. Aquí, las amplitudes de los péndulos se van intercambiando, cuando un péndulo esta por tomar su mayor amplitud, el otro disminuye su apertura por la acción del resorte, seguido de lo cual se invierten los papeles y se repite esta acción de manera periódica. Es distinguible como el resorte permite que esta acción suceda, dando pie a una clara conservación de la energía entre ambas masas.

3.3.3. Longitudes de varillas distintas

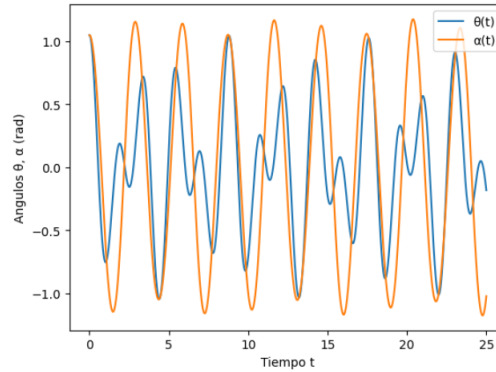


Figura 4: Condiciones iniciales $l_1 = 1$ (m) y $l_2 = 2$ (m), $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

En el caso de la figura 4, al ser longitudes distintas y los ángulos iguales el resorte estará a una distancia distinta de D entre las masas. El péndulo de mayor longitud es quien tenderá a dictar el movimiento por tener una mayor energía cinética y energía potencial gravitacional (1 y 2), y el péndulo de menor longitud se ve arrastrado por el otro en su trayectoria periódica.

3.3.4. Masas distintas

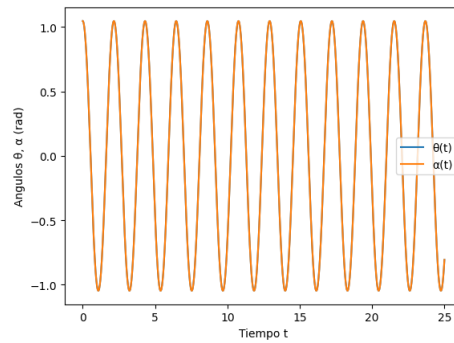


Figura 5: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg) y $m_2 = 40$ (kg).

Similar al caso en que se tenían todas las condiciones iniciales iguales, las masas permanecen siempre a la misma distancia y en la figura 5 es posible para ver la influencia de los ángulos cuando las masas difieren: es necesario que los ángulos sean distintos para notar cambios.

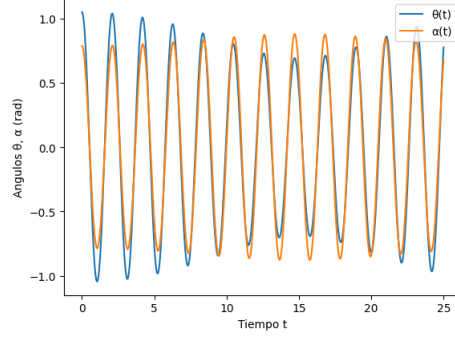


Figura 6: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \pi/3$ (rad) y $\alpha = \pi/4$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg) y $m_2 = 40$ (kg).

Similar a lo obtenido en el caso 2, se puede ver que las amplitudes de los péndulos se van intercambiando, cuando un péndulo intenta tomar una mayor amplitud, el otro disminuye su apertura por la acción del resorte, seguido de lo cual se invierten los papeles. Cuando uno alcanza cierta apertura, el otro la pierde. Además, si las masas son distintas, el tiempo que toman en cambiar de papeles es mayor y este tiempo sera cada vez mayor a medida que la diferencia de masas aumente.

3.3.5. Resorte atado a media altura de las varillas

Ya que el resorte esta atado a media altura de las varillas es necesario la energía potencial elástica 3, de manera que lo desplazado por el resorte en cada coordenada es:

$$\Delta x = D - \left(D + \frac{l_2}{2} \sin \alpha - \frac{l_1}{2} \sin \alpha \right),$$

$$\Delta y = -\frac{l_2}{2} \cos \alpha + \frac{l_1}{2} \cos \theta,$$

Por lo tanto, la energía potencial elástica es:

$$U_e = \frac{1}{2}k \left(\frac{l_1}{2} \sin \theta - \frac{l_2}{2} \sin \alpha \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(-\frac{l_2}{2} \cos \alpha + \frac{l_1}{2} \cos \theta \right)^2,$$

Así, simplificando, queda la expresión como:

$$U_e = \frac{1}{2}k \left(\frac{l_1^2}{4} + \frac{l_2^2}{4} - \frac{l_1 l_2}{2} \cos(\theta - \alpha) \right).$$

Reemplazando en el lagrangiano con este resultado y se obtiene las ecuaciones de movimiento del sistema, las cuales son:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_1} \sin \theta - \frac{kl_2}{4m_1l_1} \sin(\theta - \alpha),$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l_2} \sin \alpha + \frac{kl_1}{4m_2l_2} \sin(\theta - \alpha).$$

Nuevamente al repetir el análisis, todas las condiciones iniciales de los péndulos son iguales, ángulos distintos, longitudes de varillas distintas y masas distintas, para todos los casos la constante k del resorte es de $20N/m$ y los péndulos parten del reposo.

3.3.6. Condiciones iniciales iguales

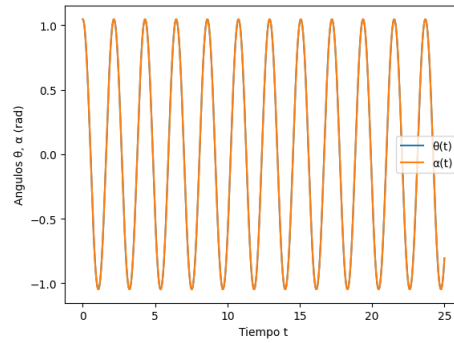


Figura 7: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1(m)$, $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

El análisis del caso 7 es análogo al detallado para 2.

3.3.7. Ángulos distintos

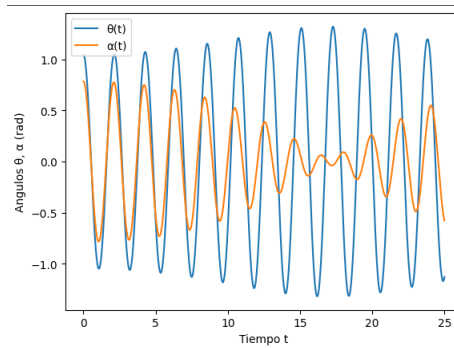


Figura 8: Condiciones iniciales $\theta = \pi/3$ (rad) y $\alpha = \pi/4$ (rad), $l_1 = l_2 = 1(m)$ y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

Como se detallo para el caso de ángulos distintos para el problema inicial 3, se presenta un resultado similar al caso 8, donde el resorte hace una diferencia en las oscilaciones y su fuerza restaurativa hace que uno de los péndulos pierda apertura mientras el otro la gana.

3.3.8. Longitudes de varillas distintas

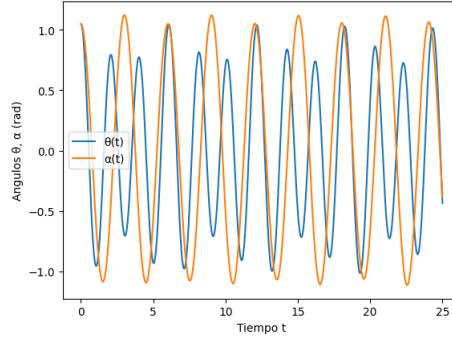


Figura 9: Condiciones iniciales $l_1 = 1$ (m) y $l_2 = 2$ (m), $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

Para dar explicación a el gráfico obtenido en el caso 9, es igual que para el 4: al ser longitudes distintas, aunque los ángulos sean iguales, ahora el resorte no estará a una distancia distinta de D entre las masas como en 4, sino entre las mitades de las varillas. El péndulo de mayor longitud es quien dictará el movimiento por tener una mayor energía cinética y energía potencial gravitacional (1 y 2).

3.3.9. Masas distintas

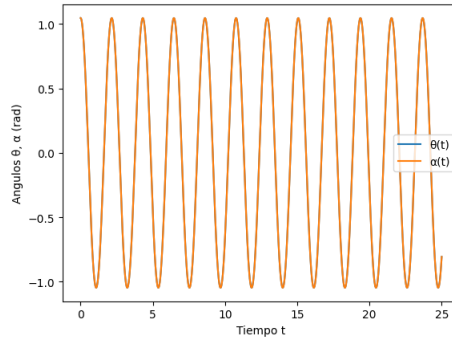


Figura 10: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/3$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg) y $m_2 = 40$ (kg).

Para el caso 5, se obtiene un resultado similar al 10. Nuevamente para poder ver la influencia de las masas en la variación de los ángulos en el tiempo es necesario que los ángulos difieran entre

si.

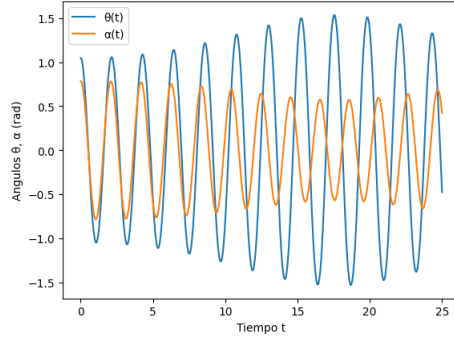


Figura 11: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \pi/3$ (rad) y $\alpha = \pi/4$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg) y $m_2 = 40$ (kg).

Al igual que en el gráfico 8, se observa que las amplitudes de los péndulos se alternan. Cuando un péndulo trata de alcanzar una mayor amplitud, el otro reduce su apertura debido a la influencia del resorte. Para este caso, el tiempo que tardan en intercambiar roles (aumentar o disminuir la apertura) es mayor, y este tiempo seguirá incrementándose a medida que la diferencia de masas se haga más grande, como en lo obtenido en 6. pero aquí igual que cuando comparamos 3 y 8, el proceso de perder y ganar apertura y viceversa es más evidente al comparar 11 y 6.

3.4. Aproximación para ángulos pequeños

3.4.1. Condiciones iniciales iguales

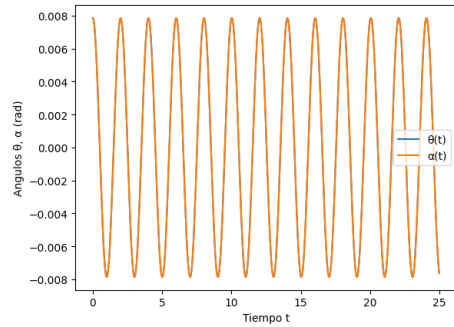


Figura 12: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/400$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

El comportamiento del sistema para ángulos pequeños con condiciones iniciales iguales y parámetros que cumplen una simetría de péndulos, el comportamiento que se observa es el mismo al descrito para ángulos grandes, donde se hace referencia al comportamiento de un péndulo simple, por lo que tenemos que los péndulos se van a mover al mismo tiempo y con la misma distancia inicial.

3.4.2. Ángulos distintos

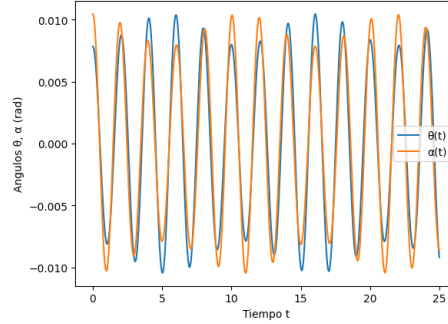


Figura 13: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $m_1 = m_2 = 10$ (kg), $\theta = \pi/400$ (rad) y $\alpha = \pi/300$ (rad).

Para el caso de ángulos pequeños como $\frac{\pi}{400}$, se observa un comportamiento similar al descrito previamente 8 y 3. El resorte empieza a mostrar su influencia, debido a las condiciones iniciales y que el resorte se encuentran en distintos momentos a distancias diferentes de D , activando la fuerza restaurativa del resorte. Aunque este efecto es menos pronunciado con ángulos pequeños, es notable cómo uno de los péndulos pierde parte de su amplitud mientras el otro la incrementa. Este proceso cíclico de intercambio de amplitud se mantiene, evidenciando la transferencia de energía entre los péndulos a través del resorte 13.

3.4.3. Longitudes de varillas distintas

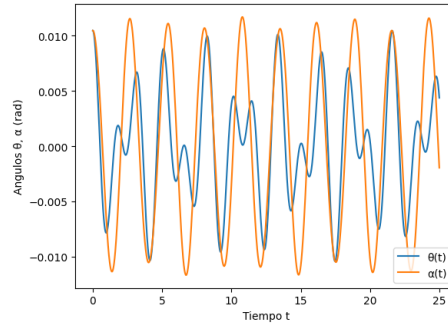


Figura 14: Condiciones iniciales $l_1 = 1$ (m) y $l_2 = 2$ (m), $\theta = \alpha = \pi/300$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

Como se explico en secciones anteriores (4 y 9), el tener diferentes longitudes para las varillas, a pesar de mantener las mismas condiciones iniciales y los demás parámetros sin variar, evidencia oscilaciones con cierta irregularidad que afecta mayormente al péndulo con menor longitud debido a que le de mayor longitud tiene mayor energía cinética y energía potencial gravitacional.

3.4.4. Masas distintas

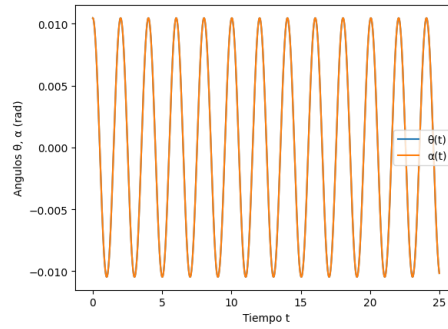


Figura 15: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/300$ (rad), $m_1 = 1$ (kg) y $m_2 = 100$ (kg).

De nuevo, variar únicamente las masas no altera las trayectorias de los péndulos, por lo que al inducir un pequeño cambio en los ángulos se tiene:

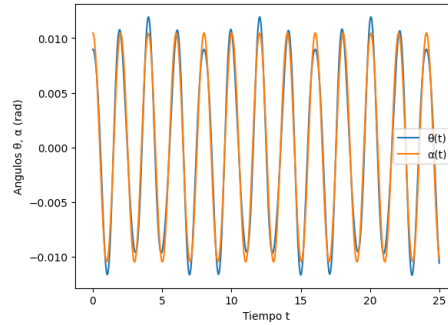


Figura 16: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \pi/350$ (rad), $\alpha = \pi/300$ (rad), $m_1 = 1$ (kg) y $m_2 = 100$ (kg).

Como se observa en la gráfica 16, variar las masas y las condiciones iniciales genera oscilaciones con cierta periodicidad, de nuevo, la energía se conserva gracias al resorte y a medida que avanza el sistema, se observa que las amplitudes de los péndulos varía, aumentando la amplitud de uno mientras a amplitud del otro disminuye.

3.4.5. Resorte atado a media altura de las varillas

De nuevo, es necesario corregir la energía potencial de las varillas ya que la referencia que tomamos es distinta, sin embargo, en la sección 3.3.5 se realizó esta corrección para el caso general de los ángulos grandes, por lo que para el caso de ángulos pequeños, la aproximación que tenemos es de la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_1}\theta - \frac{kl_2}{4m_1l_1}(\theta - \alpha),$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l_2}\alpha + \frac{kl_1}{4m_2l_2}(\theta - \alpha).$$

De nuevo, se realizara el análisis de los casos establecidos anteriormente a partir de las ecuaciones diferenciales establecidas.

3.4.6. Condiciones iniciales iguales

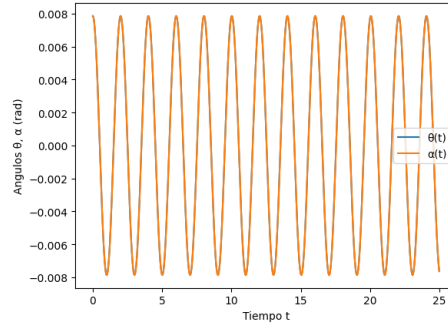


Figura 17: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/400$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

De nuevo, se observa el mismo comportamiento que en los casos analizados anteriormente, el comportamiento de un péndulo simple ya que los dos péndulos se sincronizan.

3.4.7. Ángulos distintos

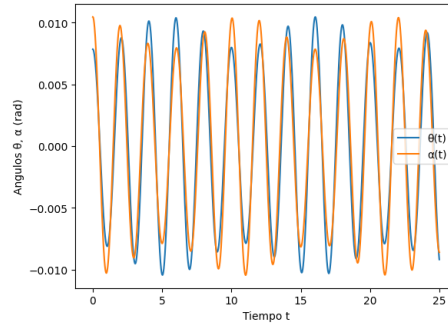


Figura 18: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $m_1 = m_2 = 10$ (kg), $\theta = \pi/400$ (rad) y $\alpha = \pi/300$ (rad).

En este caso, no se evidencia gran diferencia al análisis realizado para ángulos distintos con el resorte al final de los péndulos (en ángulos pequeños 13), por lo que no parece tener gran influencia el resorte en medio de las varillas o al final para ángulos pequeños.

3.4.8. Longitudes de varillas distintas

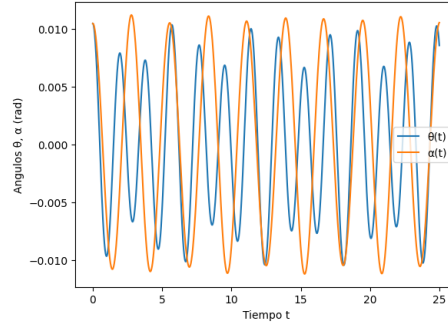


Figura 19: Condiciones iniciales $l_1 = 1$ (m) y $l_2 = 2$ (m), $\theta = \alpha = \pi/300$ (rad) y $m_1 = m_2 = 10$ (kg).

En este caso, tenemos un evidente cambio en la amplitud respecto al caso anterior ??, además de un cambio importante en la periodicidad de las oscilaciones, lo que se debe a que con el resorte en medio de las varillas genera oscilaciones mas pronunciadas a comparación del resorte al final de las varillas.

3.4.9. Masas distintas

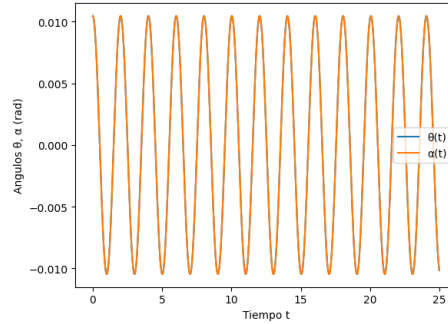


Figura 20: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = \alpha = \pi/300$ (rad), $m_1 = 1$ (kg) y $m_2 = 100$ (kg).

La variación de las masas tampoco afecta en este caso las trayectorias de los péndulos, no se observa compresión ni elongación en el resorte. Para poder ver la influencia de las masas en la variación de los ángulos en el tiempo es necesario que los ángulos difieran entre si, pero obtenemos

el mismo gráfico que 16, es decir que para ángulos pequeños no interesa si el resorte conecta las masas o la mitad de las varillas.

3.5. Análisis mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT)

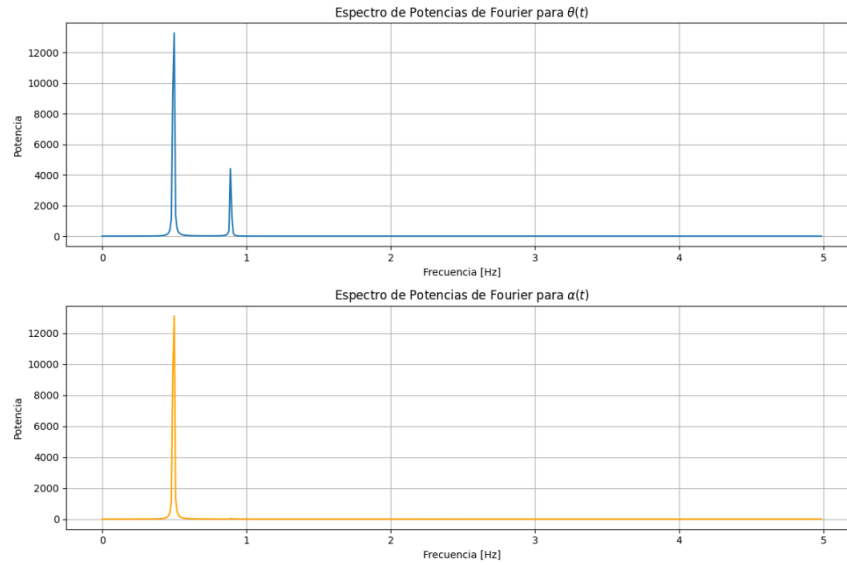


Figura 21: Condiciones iniciales $l_1 = l_2 = 1$ (m), $\theta = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $m_1 = 1$ (kg), $m_2 = 10$ (kg) y $k = 20$ (N/m).

De este gráfico 22 se puede ver las frecuencias dominantes en el movimiento de los péndulos (aproximadamente 0,5 (Hz)). Se tienen picos en el espectro de potencias, estos representan las frecuencias en las que el sistema tiene mayor energía, lo que nos indica modos normales o resonancias. En θ se pueden observar dos picos, esto indica la presencia de varias frecuencias dominantes. En este caso generadas por la diferencia entre masas y ángulos, si se modificaran más valores podríamos observar 1 o más picos tanto para θ como para α .

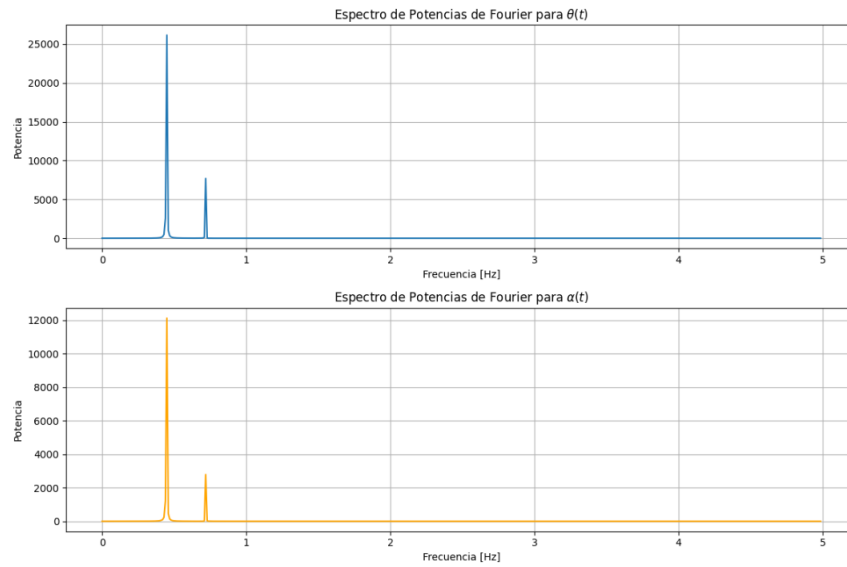


Figura 22: Condiciones iniciales $l_1 = 2$ (m), $l_2 = 1$ (m), $\theta = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $m_1 = 1$ (kg), $m_2 = 10$ (kg) y $k = 20$ (N/m).

4. Conclusiones

Para ángulos grandes, el atar el resorte a media altura, la energía potencial elástica del sistema cambia, lo que afecta las ecuaciones de movimiento. En este caso, las interacciones entre los péndulos y el resorte son más evidentes, especialmente cuando los ángulos y las masas son distintos. Este ajuste del resorte genera una dinámica más compleja y una mayor variación en las amplitudes de los péndulos, haciendo que el péndulo con la varilla más larga domine el movimiento debido a su mayor energía cinética y potencial. Cuando ambos péndulos tienen las mismas condiciones iniciales, es decir, mismas longitudes, masas y ángulos, el sistema se comporta de manera similar a un péndulo simple. Esto se debe a que el resorte no afecta el movimiento, ya que las masas o mitad de las varillas permanecen a una distancia constante entre sí. Para ángulos pequeños la posición del resorte (entre las masas o a media altura) puede o no tener un impacto en el comportamiento del sistema, para masas distintas no altera el comportamiento pero para longitudes de varillas distintas si hay una alteración por la posición del resorte.

Por otro lado, el análisis mediante la FFT revela las frecuencias dominantes en el movimiento de los péndulos. Estas frecuencias corresponden a los modos normales del sistema o resonancias, donde la energía del sistema es máxima. En la gráfica 22, se observan picos en el espectro de potencias, indicando la presencia de estas frecuencias predominantes, la aparición de uno o más picos adicionales en el espectro dependerá de los valores específicos de los parámetros del sistema (como longitudes de las varillas, masas, ángulos iniciales, y la constante del resorte). Esto implica que al ajustar estos parámetros, se podrían observar cambios en las frecuencias dominantes y la complejidad del espectro de potencias, reflejando la rica dinámica de los péndulos acoplados. Con

esto, se sugiere que la configuración física del sistema tiene un impacto significativo en la distribución de la energía entre los diferentes modos normales.

Así, se puede hablar del caos. El sistema es extremadamente sensible a las condiciones iniciales, una característica clásica de los sistemas caóticos. Pequeñas diferencias en los ángulos iniciales, velocidades angulares, o longitudes de las varillas pueden llevar a trayectorias de movimiento que divergen rápidamente con el tiempo, haciendo que el sistema sea impredecible a largo plazo. Esta sensibilidad aumenta cuando los ángulos iniciales son grandes o cuando existe una asimetría en los parámetros del sistema. La constante k del resorte juega un papel estabilizador, ya que dictamina la transferencia de energía, lo que sugiere que el resorte impone cierto control sobre el sistema, limitando el grado de caos que puede ocurrir. Esto indica que, aunque el sistema es caótico, su comportamiento está regulado por el resorte. Cuando se considera una aproximación para ángulos pequeños, los términos no lineales desaparecen de las ecuaciones de movimiento. Esto transforma el sistema en uno lineal, que no exhibe comportamiento caótico.

Referencias

- [1] Michael Blackman. “Galileo’s Pendulum: From the Rhythm of Time to the Making of Matter, Newton, Roger G. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 2004. 153 pages. 22,95ISBN0 – 674 – 01331 – X”. En: *World Patent Information* 27.1 (2005), págs. 67-67.
- [2] Francis Weston Sears et al. *Física universitaria*. Fondo Educativo Interamericano Naucalpan de Juárez, México, 1986.
- [3] EJ Moulton. “H. Goldstein, Classical mechanics”. En: (1952).
- [4] Richard Fitzpatrick. “Computational physics”. En: *Lecture notes, University of Texas at Austin* (2006).