∂t

1.- Hamiltoniano que depende de q_1, p_1 através de una función $f(q_1, p_1)$ de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(p_1, q_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots p_n)$$

ⓐ demuestre que $f(q_1, p_1)$ es una cte de mov.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\underbrace{\frac{\partial q_1}{\partial t}} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial t}} + \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

como el Hamiltoniano tiene esta forma, las coordenadas q_1 y p_1 solo dependen de f y ningún otro termino en el Hamiltoniano, por lo que podemos reescribir la expresión como.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

por lo que $\dfrac{df}{dt} = 0$ lo que implica que es una cte de mov.

1)

b) Para una partícula sometida al potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad , \text{ con } \vec{a} = a_z\hat{z} \text{ un vector constante}$$

El Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

Ec. de Hamilton

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad ; \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}} = -\nabla\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\underbrace{\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}}_{Eq1)} \quad ; \quad \underbrace{\dot{\vec{p}} = \frac{-\vec{a}}{r^3} + 3\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}\,\vec{r}}_{Eq2)}$$

—//—//—//—//—//—//—

El momento angular esta definido como

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

vamos a probar si es una cantidad que se conserva. La motivación parte del potencial al que esta sometida la partícula y que $\vec{a} = a_z\hat{z}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$$

$$= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

reemplazando con Eq 1) y Eq 2)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \left(-\frac{\vec{a}}{r^3} + \cancelto{0}{3\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}\,\vec{r}} \right)$$

$\boxed{\text{Recordar que } \vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left(-\frac{\vec{a}}{r^3}\right)$$

Recordar que

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{a} = (0, 0, a_z)$

$$\vec{r} \times \left(0, 0, \frac{-a_z}{r^3}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \frac{-a_z}{r^3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left(\frac{-\vec{a}}{r^3}\right) = \left(\frac{a_z}{r^3}\,y,\ \frac{-a_z}{r^3}\,x,\ 0\right)$$

Con esto podemos notar que el momento angular $\vec{L}_z$ se conserva.

$$L_z = x p_y - y p_x.$$

El Hamiltoniano se conserva, ya que

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

no depende explícitamente del tiempo por lo cual

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$$

2.- Sistema unidimensional con un hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2q^2}$$

(a) Muestre que $f_1 = pq - 2Ht$ es una constante de movimiento.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{\dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}}_{\dot{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}}_{[f, H]} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad f_1 = pq - p^2 t + \frac{t}{q^2}$$

$$[f, H] = \left(p + \frac{2t}{q^3}\right)(p) - (q - 2pt)\left(\frac{1}{q^3}\right)$$

$$= \left(p^2 - \cancel{\frac{2tp}{q^3}}\right) - \left(\frac{1}{q^2} - \cancel{\frac{2pt}{q^3}}\right)$$

$$[f, H] = p^2 - \frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{q^2} - p^2$$

$$\frac{df}{dt} = [f_1, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = \cancel{p^2} - \cancel{\frac{1}{q^2}} + \cancel{\frac{1}{q^2}} - \cancel{p^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = 0 \; \Big\} \text{ cte de movimiento}}$$

3)

a)

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \mathcal{H}\} = ?$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \mathcal{H}\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial r_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i}\right)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} r_i p_i$$

por lo cual las derivadas parciales son

$$* \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}(r_i p_i) = \sum_{i=1}^{3} p_i$$

$$* \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}(r_i p_i) = \sum_{i=1}^{3} r_i$$

$$* \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{p_i}{m}$$

$$* \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial r_i}$$

$$\therefore \{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \sum_{i=1}^{3}\left(p_i \frac{p_i}{m} - r_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \right)$$