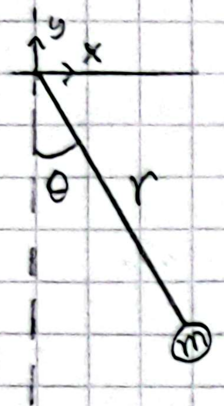
DD MM AA

1)



$$\dot{r} = a$$

$$x = r \operatorname{sen}\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y = -r\cos\theta \qquad \dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$U = -mgr\cos\theta$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta$$

y para encontrar la función de energía, ya que el lagrangiano no depende explícitamente de t

$$E = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

$$\Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} - L$$

$$\Rightarrow E = mr^2\dot{\theta}^2 + m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta$$

pero ya que $\dot{r} = a$

$$E = \frac{1}{2}m(a^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta$$

2) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{q}^2 - Kq^2)e^{\frac{\alpha}{m}t}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -Kqe^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t} + \alpha\dot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$e^{\frac{\alpha}{m}t}(m\ddot{q} + \alpha\dot{q} + Kq) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{q} + \frac{\alpha}{m}\dot{q} + \frac{K}{m}q = 0} \quad \text{Ec. 1}$$

La "Eq. 1" lleva a pensar en una situación física en la cual tengo un oscilador armónico con fricción, ya que es una ecuación diferencial de segundo orden con un término de fricción lineal $\frac{\alpha}{m}\dot{q}$ y un término restaurador $\frac{k}{m}q$.

Si consideramos la transformación de coordenadas

$$Q = e^{\frac{\alpha}{2m}t} q.$$

tenemos:

$$q = \frac{Q}{e^{\frac{\alpha}{2m}t}}$$

y

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{e^{\frac{\alpha}{2m}t}} + Q \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2m}t}}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{e^{\frac{\alpha}{2m}t}} - \frac{Q\alpha}{2m\, e^{\frac{\alpha}{2m}t}}$$

Recordando que

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(m\dot{q}^2-Kq^2)e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

Reemplazamos:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}e^{-\frac{\alpha}{2m}t}-\frac{Q\alpha}{2m}e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\right)^2-K\left(\frac{Q}{e^{\frac{\alpha}{2m}t}}\right)^2\right]e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}^2e^{-\frac{\alpha}{m}t}+\frac{Q^2\alpha^2}{4m^2}e^{-\frac{\alpha}{m}t}-\frac{Q\dot{Q}}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)\right.$$
$$\left.-KQ^2e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right]e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}^2+\frac{Q^2\alpha^2}{4m^2}-\frac{Q\dot{Q}}{m}\right)-KQ^2\right]$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q}=\frac{Q\alpha^2}{4m}-\frac{\dot{Q}}{2}-KQ$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}}=m\dot{Q}-\frac{Q}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}}\right)=m\ddot{Q}-\frac{\dot{Q}}{2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{Q} - \frac{\dot{Q}}{2} - \frac{Q\alpha^2}{4m} + \frac{\dot{Q}}{2} + kQ = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m\ddot{Q} + \left(k - \frac{\alpha^2}{4m}\right)Q = 0}$$

Ecuación de Movimiento.

Ahora para responder a la pregunta de si existe alguna cantidad conservada.

Si observamos el lagrangiano transformado podemos ver que no depende explícitamente del tiempo por lo cual la función energía se conserva (es una constante).

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - \mathcal{L} = cte$$

$$E = m\dot{Q}^2 - \frac{\dot{Q}Q}{2} - \frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}^2 + \frac{Q^2\alpha^2}{4m^2} - \frac{Q\dot{Q}}{m}\right) - kQ^2\right] = cte$$

3) $V(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$, $\vec{F}$ es un vector constante.

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \vec{F}\cdot\vec{r}.$$

→ Simetría bajo traslaciones en el espacio.

$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{a}$

el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \vec{F}\cdot(\vec{r}+\vec{a}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \vec{F}\cdot\vec{r} + \vec{F}\cdot\vec{a}$$

pero ya que $\vec{F}$ es un vector constante.

$\vec{F}\cdot\vec{a}$ no afecta las ecuaciones de movimiento

por lo cual el Lagrangiano queda invariante,

ahora si consideramos el caso especial

$\vec{F} = \vec{0}$ el momento lineal se conserva

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}.$$

Scanned with CamScanner

→ Simetría bajo traslaciones en el tiempo:
ya que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el sistema es invariante bajo traslaciones temporales, esto lleva a que la función energía se conserva. $E = cte$

→ Simetría bajo rotaciones:
El lagrangiano en general no es invariante bajo rotaciones, ya que $\vec{F} \cdot \vec{r}$ no es escalar bajo rotaciones. Sin embargo, si $\vec{F}$ es paralelo a un eje específico, entonces el sistema será invariante bajo rotaciones alrededor de ese eje, lo cual lleva a la conservación del momento angular alrededor de ese eje.

4) partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ sujeta al potencial $V(\mathbf{r},\mathbf{v}) = U(r) + \mathbf{n}\cdot\mathbf{l}$ donde $\mathbf{r}$ es el radio vector medido desde el origen del sistema de referencia, $\mathbf{l}$ es el momento angular con respecto a ese origen y $\mathbf{n}$ es un vector fijo en el espacio y $U(r)$ es una función escalar.

Encontrar la fuerza ejercida sobre la partícula:

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla(U(r) + \mathbf{n}\cdot\mathbf{l})$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r) - \nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{l})$$

Dado que $U(r)$ solo depende de la magnitud $r = |\mathbf{r}|$, el gradiente es:

$$\nabla U(r) = \frac{dU}{dr}\hat{r}$$

ahora para el gradiente:

$\Rightarrow \nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{l})$

Recordar

$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}}$; $\nabla(a\times b) = (\nabla a)\times b + (\nabla b)\times a$

$\Rightarrow \nabla(m\,\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}))$

$\Rightarrow m\nabla(\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}))$

ya que $\mathbf{n}$ es un vector fijo

$\Rightarrow m\nabla(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{n}$

$\Rightarrow m[\cancel{(\nabla\mathbf{r})\times\dot{\mathbf{r}}}^{\,0} + (\nabla\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}]\cdot\mathbf{n}$

El gradiente de $\mathbf{r}$ con respecto a sí mismo es la identidad

$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I}\times\dot{\mathbf{r}} = 0$

$\Rightarrow m[\cancel{(\nabla\dot{\mathbf{r}})}^{\,0}\times\mathbf{r}]\cdot\mathbf{n}$

Pero dado que $\dot{\mathbf{r}}$ no depende de $\mathbf{r}$, su gradiente es igual a 0

Por lo cual la fuerza es igual a

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

Ecuaciones de movimiento en cartesianos

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

Esta expresión se descompone en las componentes cartesianas de

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Cantidades Conservadas.

Sabemos que el momento angular $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ puede ser conservado si no hay torques externos que lo modifiquen.

Si el vector $\mathbf{n}$ es fijo y no depende del tiempo,

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$ sugiere que podría haber una cantidad conservada,

el momento angular proyectado sobre $\mathbf{n}$.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = cte.$$

(5)

$h = l - r$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta \end{cases}$$

$$\dot{r}_1^2 = (\dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta)^2$$

$$= \dot{r}^2\cos^2\theta \cancel{- 2\dot{r}\dot{\theta}r\cos\theta\sin\theta} + \dot{\theta}^2r^2\sin^2\theta + \dot{r}^2\sin^2\theta$$
$$\cancel{+ 2\dot{r}\dot{\theta}r\sin\theta\cos\theta} + \dot{\theta}^2r^2\cos^2\theta$$

$$\dot{r}_1^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2r^2 \quad , \quad \dot{r}_2^2 = h$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2r^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2 g(l-r)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m_1\dot{r} + m_2\dot{r} \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m_1\ddot{r} + m_2\ddot{r} = \ddot{r}(m_1+m_2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = m_1\dot{\theta}^2 r + m_2 g$$

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{m_1\dot{\theta}^2 r + m_2 g}{(m_1+m_2)}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m_1\dot{\theta}r^2 \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m_1\ddot{\theta} + 2m_1\dot{\theta}r\dot{r}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -2\dot{\theta}\dot{r}r}$$

b.) Para este sistema θ es una coordenada cíclica de modo que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$.

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(m_1r^2\dot{\theta})}_{\text{constante}} = 0 \qquad \underbrace{\text{momento conjugado de la coordenada } \theta}_{\text{Cantidad conservada.}}$$

$$E = \left(\dot{r}^2(m_1+m_2) + m_1\dot{\theta}^2r^2 - \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + \dot{\theta}r^2) - \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g(l-r)\right)$$

$$E = \frac{2\dot{r}^2m_1}{2} + \frac{2\dot{r}^2m_2}{2} + m_1\dot{\theta}^2r^2 - \frac{m_1\dot{r}^2}{2} - \frac{m_1\dot{\theta}r^2}{2} - \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + mg(l-r)$$

$$E = \frac{\dot{r}^2m_1}{2} + \frac{\dot{r}^2m_2}{2} + \frac{m_1\dot{\theta}^2r^2}{2} + mg(l-r)$$

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2}(m_1 + m_2) + \frac{m_1 \dot{\theta}^2 r^2}{2} + mg(l - r) = T + V = cte$$

La energia tambien es una cantidad conservada

c) Posición de equilibrio del sistema.

$$\ddot{r} = 0 \longrightarrow m_1 r_{eq} \dot{\theta}^2 = -m_2 g$$

$$r_{eq.} = -\frac{m_2 g}{m_1 \dot{\theta}^2}$$

Debido a que $\ddot{\theta} = 0$

$$0 = -2\dot{r}r\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = cte$$

cualquier punto esta en equilibrio siempre y cuando $\dot{\theta} = cte$

d)

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 - mg(l - a)$$

$$E_i = -mg(l - a)$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 V_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{f2}^2 - m_2 g l$$

$$E_i = E_f$$

$$-mg(l - a) = \frac{1}{2} m_1 V_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{f2}^2 - m_2 g l$$

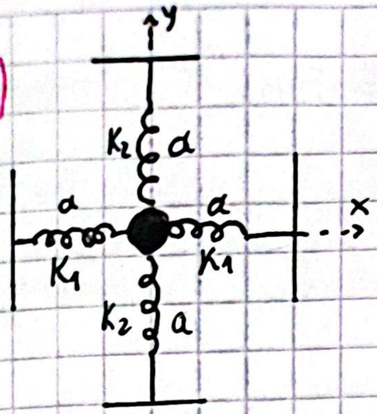
cuerda ideal $\rightarrow$ las velocidades son iguales para las dos masas

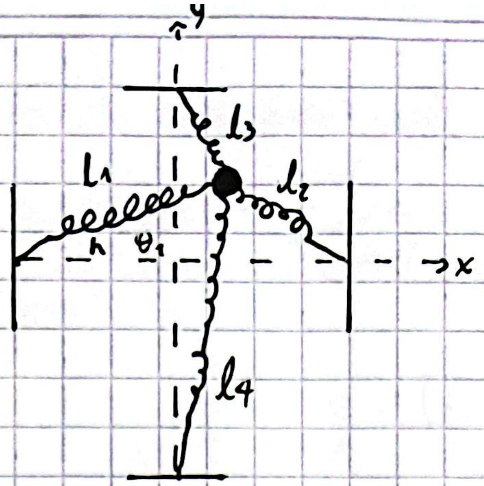
$$-mg(l - a) = \frac{1}{2} V_f^2 (m_1 + m_2) - m_2 g l$$

$$\boxed{V_f = \sqrt{\frac{2 m_2 g a}{m_1 + m_2}}}$$

Velocidad de la masa m_2 (y m_1) cuando $a = 0$.

6)





Encontrar las ecuaciones de Movimiento

$$F = ma$$

Identificando las fuerzas restauradoras en los ejes "x" y "y" (ley de Hooke)

En "x"

$$F_x = -K_1(x-a)$$

En "y"

$$F_y = -K_2(y-a)$$

Por lo cual obtenemos

$$F_x = m a_x$$

$$\Rightarrow -K_1(x-a) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + w_1^2(x-a) = 0$$

$$\begin{cases} F_y = m a_y \\ \Rightarrow -K_2(y-a) = m\ddot{y} \\ \Rightarrow \ddot{y} + w_2^2(y-a) \end{cases}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}$$

Por lo cual las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{x} + \omega_1^2 (x-a) = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 (y-a) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = A_x \cos(\omega_1 t + \phi_x) + a$$

$$\Rightarrow y(t) = A_y \cos(\omega_2 t + \phi_y) + a$$

donde ϕ_y y ϕ_x son las fases iniciales,

A_x y A_y las amplitudes y

$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$ es la frecuencia angular en la dirección x

$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}$ es la frecuencia angular en la dirección y

Scanned with CamScanner

Ecuaciones de movimiento para ángulos pequeños:

Consideremos que la masa oscila muy cerca a las posiciones de equilibrio, entonces definimos:

$$\xi = x - a \qquad y \qquad \eta = y - a$$

donde ξ y η son las desviaciones muy pequeñas que tiene la masa respecto a la posición de equilibrio.

Entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{\xi} + w_1^2 \xi = 0$$

$$\ddot{\eta} + w_2^2 \eta = 0$$

Caso $K_1 = K_2$

ya que $K_1 = K_2 = K$

$$\Rightarrow w_1^2 = w_2^2 = w^2$$

las frecuencias angulares son las mismas, esto implica que las oscilaciones en las direcciones x y y están sincronizadas. las trayectorias resultantes pueden ser círculos o elipses con una simetría particular.

Caso $K_1 \neq K_2$

$$\Rightarrow \omega_1^2 \neq \omega_2^2$$

Hay un desacoplamiento entre las oscilaciones en las dos direcciones, esto rompe la simetría y en general da trayectorias más complejas.

El lagrangiano de este problema es:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\left[K_1(x-a)^2 + K_2(y-a)^2\right]$$

ya que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \mathcal{L} = cte$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{K_1}{2}(x-a)^2 + \frac{K_2}{2}(y-a)^2$$

$$E_x = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{K_1}{2}(x-a)^2$$

Recordando que $P_x = m\dot{x} \Rightarrow P_x^2 = m^2\dot{x}^2$

$$E_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{K_1}{2}(x-a)^2$$

DD MM AA

$$E_y = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{K_2}{2}(y-a)^2$$

Recordando que $P_y = m\dot{y} \Rightarrow P_y^2 = m^2\dot{y}^2$

$$E_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{K_2}{2}(y-a)^2$$

Definición general del momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

donde $\vec{r} = (x, y, 0)$

$$\vec{P} = (P_x, P_y, 0)$$

$$\therefore \vec{L} = \hat{k}(xP_y - yP_x)$$

$$\Rightarrow L_z = xP_y - yP_x$$

probar que es una cantidad conservada

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(xP_y - yP_x)$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \dot{x}P_y + x\dot{P}_y - \dot{y}P_x - y\dot{P}_x$$

Recordemos

$$\dot{P}_x = F_x \Rightarrow F_x = -K_1(x-a) \qquad P_x = m\dot{x}$$

$$\dot{P}_y = F_y \Rightarrow F_y = -K_2(y-a) \qquad P_y = m\dot{y}$$

$$\therefore \frac{dL_z}{dt} = \dot{x}P_y + x(-K_2(y-a)) - \dot{y}P_x - y(-K_1(x-a))$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = m\dot{x}\dot{y} - K_2x(y-a) - m\dot{x}\dot{y} + K_1y(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = K_1y(x-a) - K_2x(y-a)$$

L_z es una cantidad conservada si $K_1 = K_2$.

Encontrar K:

El Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{K_1(x-a)^2}{2} + \frac{K_2(y-a)^2}{2}$$

DD MM AA

de las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{P_x}{m} \qquad \dot{P}_x = -K_1(x-a)$$

$$\dot{y} = \frac{P_y}{m} \qquad \dot{P}_y = -K_2(y-a)$$

propongo para encontrar una constante correlacional:

$$K = f(x, y, P_x, P_y)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial K}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial K}{\partial P_x}\dot{P}_x + \frac{\partial K}{\partial P_y}\dot{P}_y$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial x}\left(\frac{P_x}{m}\right) + \frac{\partial K}{\partial y}\left(\frac{P_y}{m}\right) + \frac{\partial K}{\partial P_x}\left(-K_1(x-a)\right) + \frac{\partial K}{\partial P_y}\left(-K_2(y-a)\right)$$

Para que esto sea una constante de movimiento

$$\frac{dK}{dt} = 0$$ y esto se cumple si

$$f(x, y, P_x, P_y) = \omega_1 x \omega_2 y + P_x P_y$$