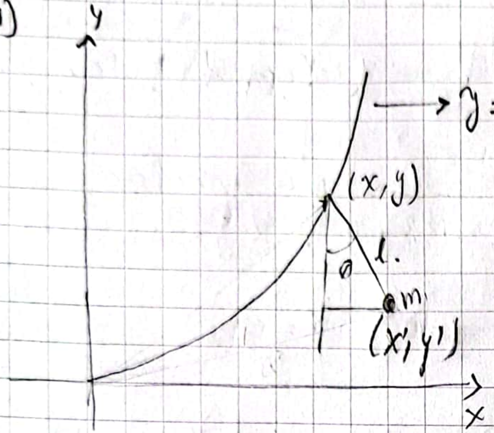
Mecánica Lagrangiana

Problemas viernes.

1)



$\longrightarrow y = ax^2$. Encontrar el hamiltoniano.

$$x' = l\,\text{sen}\,\theta + x,$$
$$y' = y - l\cos\theta$$
$$= ax^2 - l\cos\theta$$

} Coordenadas generalizadas.

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = T - V$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - mgh.$$

$$\dot{x}'^2 = \left(l\cos\theta\,\dot\theta + \dot x,\ 2ax\dot x + l\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta\right)^2$$

$$= l^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + \dot x^2 + 2l\cos\theta\,\dot\theta\,\dot x$$
$$+ 4a^2x^2\dot x^2 + l^2\text{sen}^2\theta\,\dot\theta^2 + 4ax\dot x\,l\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta$$

$$= l^2\dot\theta^2\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{\to 1} + \dot x^2(1 + 4a^2x^2)$$
$$+ 2l\dot x\dot\theta(\cos\theta + 4ax\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot\theta^2 + \dot x^2(1+4a^2x^2) + 2l\dot x\dot\theta(\cos\theta + 4ax\,\text{sen}\,\theta)\right)$$
$$- mg(ax^2 - l\cos\theta)$$

momentos conjugados:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m \left(2\dot{x} (1 + 4a^2 x^2) + 2l\dot{\theta} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \right)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m \left(2l^2\dot{\theta} + 2l\dot{x} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \right)$$

Resolviendo el sistema,

$$\left[\frac{2p_x}{m} - 2l\dot{\theta} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \right] \frac{1}{2(1+4a^2x^2)} = \dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)} - \frac{l\dot{\theta} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta)}{(1+4a^2x^2)} \longrightarrow ①$$

$$\left[\frac{2p_\theta}{m} - 2l\dot{x} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \right] \frac{1}{2l^2} = \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} - \frac{\dot{x}}{l} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \longrightarrow ②$$

Reemplazando ② en ①,

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)} - \frac{l(\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta)}{(1+4a^2x^2)} \left[\frac{p_\theta}{ml^2} - \frac{\dot{x}}{l} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta) \right]$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)} - \frac{p_\theta (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta)}{ml(1+4a^2x^2)} + \frac{\dot{x} (\cos\theta + 2ax \,\mathrm{sen}\theta)^2}{(1+4a^2x^2)}$$

$$\dot{x}\left(1-\frac{(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)^2}{(1+4a^2x^2)}\right)=\frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)}-\frac{p_\theta(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)}{m\ell(1+4a^2x^2)}$$

$$\Rightarrow \dot{x}\left(\frac{(1+4a^2x^2)-(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)^2}{(1+4a^2x^2)}\right)=\frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)}-\frac{p_\theta(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)}{m\ell(1+4a^2x^2)}$$

$$\Rightarrow \dot{x}=\left[\frac{p_x}{m}-\frac{p_\theta}{m\ell}(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)\right]\frac{1}{(1+4a^2x^2)-(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)^2}$$

Reemplazando $\dot{x}$ en (2),

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m\ell^2}-\frac{(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)}{\ell}\left[\frac{p_x}{m}-\frac{p_\theta}{m\ell}(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)\right]\left[\frac{1}{(1+4a^2x^2)-(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m\ell^2}-\frac{(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)}{\ell(1+4a^2x^2-(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)^2)}\left[\frac{p_x}{m}-\frac{p_\theta}{m\ell}(\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta)\right]$$

El Hamiltoniano es:

$$H(p_\theta,p_x,\theta,x)=p_\theta\dot{\theta}+p_x\dot{x}-\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta},x,\dot{x})$$

llamando:

$A=(1+4a^2x^2)$ $\qquad \Rightarrow \dot{x}=\left[\frac{p_x}{m}-\frac{p_\theta B}{m\ell}\right]\frac{1}{A-B^2}$

$B=\cos\theta+2ax\,\text{sen}\,\theta$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m\ell^2}-\frac{B}{\ell(A-B^2)}\left[\frac{p_x}{m}-\frac{p_\theta B}{m\ell}\right]$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{p_\theta B}{l(A-B^2)}\left[\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta}{ml}B\right]$$

$$+ \frac{p_x}{A-B^2}\left[\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta}{ml}B\right]$$

$$- \frac{1}{2}m\left\{\left[\frac{p_\theta}{m} - \frac{B}{A-B^2}\left(\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta}{ml}B\right)\right]^2\right.$$

$$+ A\left[\left(\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta}{ml}B\right)\left(\frac{1}{A-B^2}\right)\right]^2$$

$$\left. + 2lB\left[\left(\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta}{ml}B\right)\left(\frac{1}{A-B^2}\right)\right]\left[\frac{p_\theta}{ml^2} - \frac{B}{l(A-B^2)}\left(\frac{p_x}{m} - \frac{p_\theta B}{ml}\right)\right]\right\}$$

$$+ mg(ax^2 - l\cos\theta)$$

problemas de los viernes.

2)

$$H = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$$

a) Hallar el lagrangeano $\mathcal{L}$

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = p\dot{q} - H$$

$\Rightarrow$ sabiendo que: $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$,

$$\dot{q} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t \Rightarrow p = \dot{q}m + A\cos\gamma t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left(\dot{q}m + A\cos\gamma t\right)\dot{q} - \left(\frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2\right)$$

$$\mathcal{L} = \dot{q}^2 m + \dot{q}A\cos\gamma t - \frac{p^2}{2m} + A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) - \frac{1}{2}kq^2$$

$$\mathcal{L} = \dot{q}^2 m + \dot{q}A\cos\gamma t + \frac{(\dot{q}m + A\cos\gamma t)^2}{2m} + \qquad \dot{q}^2m^2 + A^2\cos^2\gamma t + 2A\cos\gamma t\, m$$

$$+ A\left(\frac{(\dot{q}m + A\cos\gamma t)}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) - \frac{1}{2}kq^2$$

b) lagrangeano equivalente $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{L} = \dot{q}^2 m + \frac{\dot{q}^2}{2} + \dot{q}A\cos\gamma t - \frac{1}{2}kq^2 + \dot{q}A\cos\gamma t + A^2\cos^2\gamma t + 2A\cos\gamma t$$

$$+ \frac{A^2}{m}\cos^2\gamma t + A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$$

Buscando que el lagrangiano sea de la forma:

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{L}} = \dot{q}^2 m + \frac{\dot{q}^2}{2} + \dot{q} A \cos\gamma t - \frac{1}{2} k q^2$$

$$\frac{dF(q,t)}{dt} = \dot{q} A\cos\gamma t + A^2\cos^2\gamma t + 2A\cos\gamma t + \frac{A^2}{m}\cos^2\gamma t + A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t.$$

$$\frac{dF(q,t)}{dt} = A\cos\gamma t(\dot{q} + 2) + A^2\cos^2\gamma t\left(1 + \frac{1}{m}\right) + A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$$

c) Calcular Hamiltoniano asociado a $\tilde{\mathcal{L}}$

Para encontrar el $\tilde{H}$, primero verificamos que el lagrangiano $\mathcal{L}$ cumpla con un principio variacional tal que:

$$\delta\int_t \mathcal{L}\, dt = \delta\int_t \tilde{\mathcal{L}}\, dt + \delta\int_t \frac{dF}{dt}\, dt = 0.$$

tal que:

$$\delta\int \frac{dF}{dt}\, dt = \delta F(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \Rightarrow \delta\int \tilde{\mathcal{L}}\, dt = 0.$$

Pero $\frac{dF}{dt}$ no es integrable, por lo tanto no se cumple:

$$\delta\int \tilde{\mathcal{L}}\, dt = 0.$$

Así, no se cumplen las ecuaciones de euler-lagrange, y no se puede encontrar un $\tilde{H}$.

3) $H = q + te^{p}$

$Q = q + e^{p}, \quad P = p$

desarrollo:

Primero a mostrar que es una transformación canónica

$$\{Q,Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^{p}) - (e^{p})(1) = 0$$

$$\{P,P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$$

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (1)(1) - (e^{p})(0) = 1$$

$\therefore$ Es una transformación canónica

$$\{Q,Q\} = 0, \{P,P\} = 0, \{Q,P\} = 1.$$

Encontrar la función generatriz:

Se propone $F_2(q, P)$ donde:

$$\boxed{p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}} \quad a)$$

nuestra transformación canónica es

$$\underbrace{Q = q + e^{p}}_{b)} \quad , \quad \underbrace{P = p}_{c)}$$

reemplazando c) en b)

$$\underbrace{Q = q + e^{P}}_{d)}$$

y si recordamos a) la función generatriz que satisface estas condiciones:

$$\underbrace{F_2 = qP + e^{P}}_{\uparrow}$$

ya que precisamente F_2 cumple con a)

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \underbrace{P}_{c} \checkmark \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \underbrace{q + e^{P}}_{d)}$$

$\therefore$ $F_2 = qP + e^{P}$ es la función generatriz de esta transformación canónica.

Encontrar el nuevo Hamiltoniano:

El original:

$$\mathcal{H} = q + e^p$$

la transformación canónica

$$Q = q + e^P \quad , \quad P = p$$

$$\Rightarrow \quad q = Q - e^P \quad , \quad P = p$$

$$\therefore \quad \mathcal{H} = q + e^p = (Q - e^P) + e^P$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = Q \; \} \text{ El nuevo Hamiltoniano}$$

Resolver el nuevo hamiltoniano

$\dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P}$	$\dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q}$
$\dot{Q} = 0$	$\dot{P} = -1$
$Q = C_1$	$P = -t + C_2$
$Q(t) = C_1$	$P(t) = C_2 - t$

Esto representa cómo evoluciona el sistema con el tiempo en las nuevas coordenadas. En estas coordenadas Q permanece constante en el tiempo y P decrece linealmente con el tiempo.

4)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(qp^3 + \frac{q}{p}\right)$$

Ec de Movimiento:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \dot{p} \qquad // \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\Rightarrow \dot{p} = \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{p} \qquad | \qquad \dot{q} = \frac{3}{2}qp^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{p}}$$

Encontrar una transformación canonica tal que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$$

del Hamiltoniano original al compararlo con este

a) $qp^3 = P^2$, b) $\frac{q}{p} = Q^2$

$$\Rightarrow q = \frac{P^2}{p^3}$$

reemplazando a) en b)

$$\frac{\frac{P^2}{p^3}}{\frac{p}{1}} = Q^2 \Rightarrow \frac{P^2}{p^4} = Q^2$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{P}{Q}} \quad c)$$

reemplazando c) en d)

$$q = \frac{P^2}{\left(\sqrt{\frac{P}{Q}}\right)^3} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} Q^2$$

tenemos finalmente que:

$$q = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} Q^2 \quad y \quad p = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}$$

$$\therefore \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(q p^3 + \frac{q}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} Q^2\right)\left(\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}\right)^3 + \frac{\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} Q^2}{\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$$

faltaría probar que es una transformación canónica

para esto se debe cumplir:

$$\{q, P\} = 1, \quad \{q, q\} = 0 \quad y \quad \{P, P\} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{1}{2}\frac{Q^{3/2}}{\sqrt{P}} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\sqrt{P}}{Q^{3/2}}(Q^2 - 2Q)$$

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{1}{2\sqrt{P}\sqrt{Q}} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{P}}{Q^{3/2}}$$

Sabiendo esto resulta facil demostrar que en efecto se cumple que

$$q = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}Q^2 \quad y \quad p = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}$$

cumple con:

$$\{q, p\} = 1 \ , \ \{q, q\} = 0 \ y \ \{p, p\} = 0$$

por lo cual es canonico.

Por ultimo:

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$

$$\dot{P} = \frac{-\partial H}{\partial Q} \quad , \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

$$\dot{P} = -P \qquad \dot{Q} = Q$$