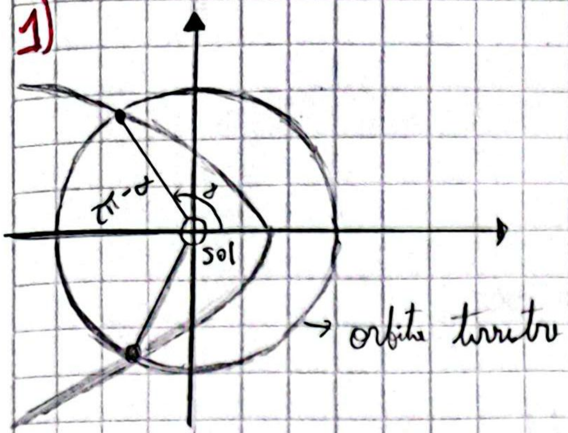
1)



La orbita del cometa es:

$$r = \frac{q}{1+\cos\theta}$$

donde

$$q = \frac{l^2}{\mu K}$$

$\Rightarrow l = \mu r^2 \dot{\theta} = cte \; ; \; \mu = \frac{m m_s}{m+m_s} \; ; \; K = G m m_s$

para calcular los puntos donde las orbitas se cruzan igualamos a r con el radio de la tierra.

$$R_T = \frac{q}{1+\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{q}{R_T} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{q}{RT} - 1\right)$$

por lo cual los puntos son

$$\theta_0 = 2\pi - \alpha \quad y \quad \theta_f = \alpha$$

Con la segunda ley de Kepler llegamos a que:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (Eq. 1)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} \rightarrow dA = \frac{l}{2\mu} dt \quad (Eq. 2)$$

reemplazando de Eq 2 en Eq 1

$$\Rightarrow \frac{l}{2\mu} dt = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\mu}{l} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\mu}{l} \frac{q^2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta$$

$$\Rightarrow t = \frac{\mu}{l} q^2 \int_{2\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} d\theta$$

$\therefore$

$$t=\underbrace{\frac{\mu q^2}{l}\left(\frac{\tan^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)+3\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{6}-\frac{\tan^3\left(\frac{2\pi-\alpha}{2}\right)+3\tan\left(\frac{2\pi-\alpha}{2}\right)}{6}\right)}_{\Psi}$$

por lo cual los días que puede permanecer como máximo dentro de la orbita terrestre es:

$$t=\frac{\Psi}{86400}$$

② $V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$

a) orbita de la particula $r = r(\theta)$

Para la particula con un potencial asociado, la energia total tiene la forma

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \underbrace{V(r)}_{\text{Potencial asociado}}$$

$r \rightarrow$ distancia radial de la particula desde el centro.
$\dot{\theta} \rightarrow$ vel angular

$$\underbrace{L}_{\text{momento angular}} = mr^2\dot{\theta} \text{ se conserva} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Energia centrifuga}} + V(r)$$

Potencial Efectivo $\quad V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$

Energia centrif. $+ V(r)$ $\quad V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$

Ec. de la orbita.

Para encontrar $r(\theta)$ usamos la ec. de la energia total

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{ef}(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2 \quad , \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$E = \frac{1}{2} m \left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)^2 + V_{ef}\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + V_{ef}(u) \quad , \quad V_{ef}(u) = \frac{L^2}{2m}u^2 + au + bu^2$$

Ec. diferencial $u(\theta)$

derivamos la energia con respecto a θ y usamos la condición de equilibrio de la energia, es decir, la energia se conserva.

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = E - V_{ef}(u)$$

$$V_{ef}(u) = \left(\frac{L^2}{2m} + b\right)u^2 + au$$

sustituyendo en la ec. de la energia

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = E - \left(\frac{L^2}{2m} + b\right)u^2 - au$$

Ec. de la orbita

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - \left(\frac{L^2}{2m} + b\right)u^2 - au\right]$$

la sol general para esta ec. es de la forma

$$u(\theta) = u_0(1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{excentricidad}}}{e}\cos(\theta)) \quad , \quad u_0 = \frac{a}{L^2}$$

en terminos de $r(\theta)$

$$\underbrace{r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}} \quad , \quad r_0 = \frac{L^2}{a}$$

Excentricidad	orbita
$e < 1$	eliptica
$e = 1$	parabolica
$e > 1$	hiperbolica.

Problemas de los viernes

3) Considere el potencial de Yukawa $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a}$ donde $k>0$, $a>0$ son constantes.

a) Encuentre la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_0.

De manera general, la condición de estabilidad se cumple para $n>-3$ para fuerzas como:

$$f(r) = -kr^n, \quad \text{con } k>0.$$

En este caso, tenemos una fuerza como:

$$F(r) = \frac{dV(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} e^{-r/a}\left(1 + r/a\right)$$

con $n=-2$, por lo tanto sí cumple. Ahora, la condición de estabilidad está dada por:

$$\frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$$

Es decir, si r_0 corresponde al valor mínimo del potencial efectivo $V_{ef(min)} = V_{ef}(r_0)$.

Un mínimo estará dado por $\left.\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right|_{r_0} > 0$

$$V_{ef} = V(r) + \frac{L}{2\mu r^2}$$

$$\left.\frac{d^2V(r)}{dr^2}\right|_{r_0} = \left.\frac{dF(r)}{dr}\right|_{r_0} = \frac{k}{r_0^3} e^{-r_0/a}\left(2\left(1+\frac{r_0}{a}\right) + \frac{r_0^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L}{2\mu r^2}\right) = \frac{-L}{\mu r^3}, \quad \left.\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{L}{2\mu r^2}\right)\right|_{r_0} = \frac{3L^2}{\mu r_0^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{k e^{-r_0/a}}{r_0^3}\left(2 + \frac{2r_0}{a} + \frac{r_0^2}{a^2}\right) + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$$

aplicando la condición de estabilidad,

$$\frac{3 f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{r_0 f'(r_0)}{f(r_0)} < 0$$

Reemplazando,

$$3 + \frac{r_0 k \left(\frac{1}{a^2 r_0} + \frac{2}{a r_0^2} + \frac{2}{r_0^3} \right)}{-k \left(\frac{1}{a r_0} + \frac{1}{r_0^2} \right)} < 0$$

Simplificando,

$$\frac{a^2}{r_0^2} + \frac{a}{r_0} - 1 > 0$$

b) Determine el periodo de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta órbita circular

Expandiendo el potencial en series de Taylor respecto al punto r_0:

$$V_{ef} = V_{ef}(r_0) + \left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\right|_0 (r - r_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r}\right|_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots$$

Tal que se comporta como un oscilador armónico simple gracias a las pequeñas oscilaciones.

con $r = r_0 + \eta$ con $\eta / r_0 \ll 1$.

Así, el término cuadrático de la expansión:

$$\frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r}\right|_{r_0} (r - r_0)^2 = \frac{1}{2} k \eta^2 \rightarrow \text{oscilador armónico.}$$

Permitiendo encontrar una expresión para k.
Considerando la ecuación del oscilador armónico simple:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$$

tal que: $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r}\right)} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\left.\partial_r^2 V_{ef}\right|_{r_0}}}$$

4) Una partícula con momento angular L describe la órbita $r = a(1+\cos\theta)$

a) Encuentre la fuerza central que produce esta órbita

La ecuación diferencial para la órbita:

$$\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}$$

donde $u = \frac{1}{r}$. La órbita en términos de u:

$$\frac{1}{u} = a(1+\cos\theta) \Rightarrow u = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$\frac{du}{d\theta} = +\frac{1}{a(1+\cos\theta)}a\sin\theta \quad , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}{(a(1+\cos\theta))^2}$$

reemplazando,

$$\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}+u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{L^2}{\mu}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{1}{r}\right] = F(r)$$