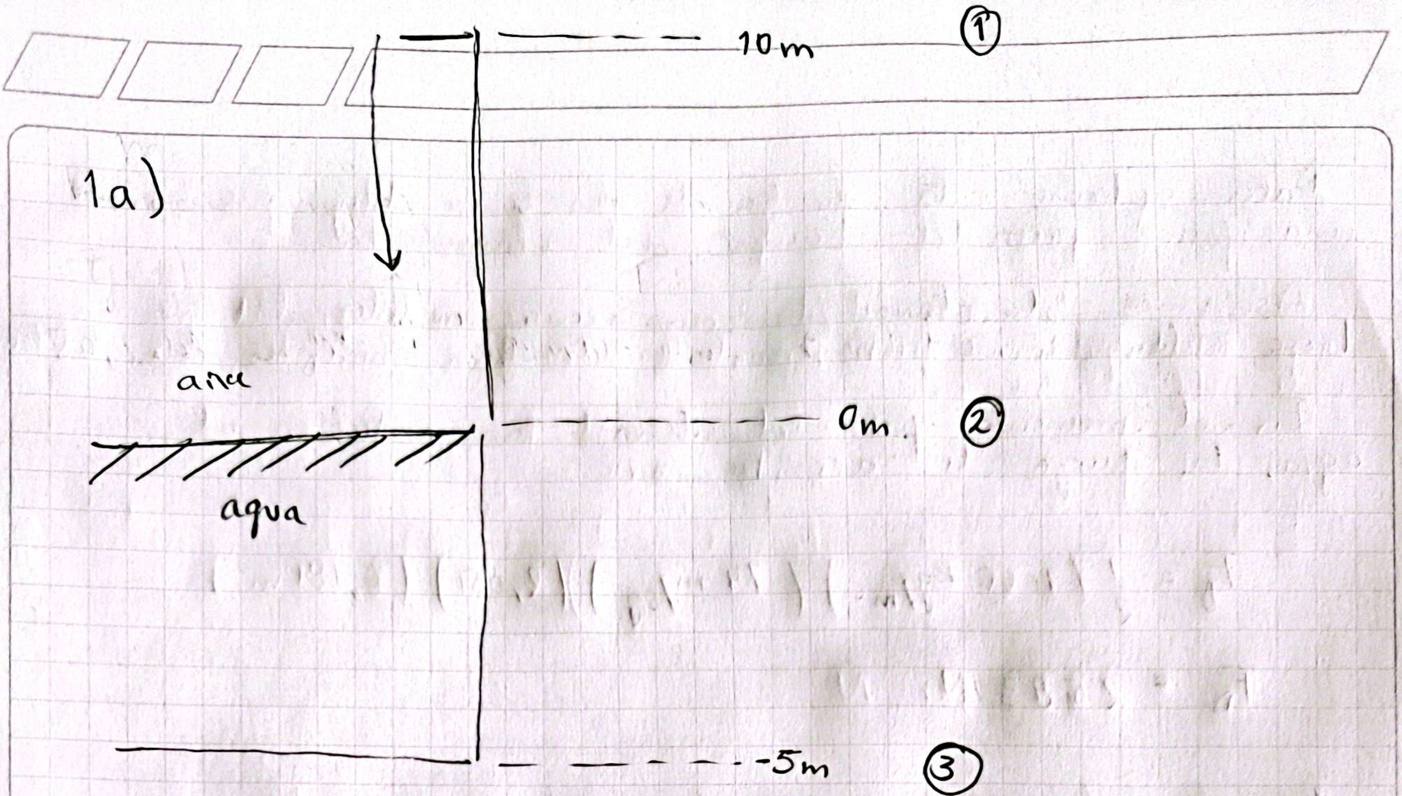


Cuando el clavadista va de 1 a 2,

Consideramos la conservación de la energía, con la presencia de fuerzas conservativas (no fricción con el aire)

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$V_1 = T_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

$$= 196 \ m^2/sg^2$$

Cuando el clavadista va de 2 a 3, es necesario considerar la resistencia que ejerce el agua sobre el movimiento del clavadista, ya que es eso lo que amortigua la caída

Para ello, tenemos la fuerza de resistencia en el fluido.

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$$

donde ρ es la densidad, v la velocidad del objeto respecto al fluido, A es el área transversal del objeto, C_D el coeficiente de resistencia.

Primavera

Para aplicar esta fuerza de resistencia hay que asumir una forma para el cuerpo del clavadista.

Asumimos el clavadista como una paralelepipedo de base rectangular, cuya base es de 60×30 cm. Su C_D es de 2,05

En el momento que el clavadista entra en el agua, la fuerza de arrastre es:

$$F_D = \frac{1}{2}(1000\ Kg/m^3)(14\ m/sg)(2{,}05)(0{,}18\ m^2)$$

$$F_D = 2583\ N$$

La desaceleración que implica esta fuerza sobre el clavadista (asumiendo un peso de 60 Kg),

$$a = \frac{F_D}{m} = \frac{2583\ N}{60\ Kg} = 43{,}05\ m/sg^2$$

Considerando que la taza de desaceleración bajo el agua es constante, la velocidad es:

$$0 = v_f^2 = v_0^2 + 2ad$$

donde $v_f = 0$, $v_0 = 14\ m/sg$. Despejando la distancia,

$$2ad = -v_0^2 \Rightarrow d = \frac{-v_0^2}{2a}$$

por lo tanto, la profundidad a la que se hunde el clavadista es de:

$$d = \frac{-(196\ m/sg)}{2(43{,}05\ m/sg^2)} = 2{,}2764\ m$$

Por lo tanto, los 5m reglamentarios son una profundidad segura para el clavadista.

1)

b)

Para calcular la velocidad a la cual llega a la superficie, necesitamos el empuje, el peso y la resistencia del agua. Siendo estas las fuerzas que actuan sobre el corcho.

* El empuje

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 6{,}54 \times 10^{-5}\ m^3$$

$$F_{Em} = \rho_{agua} \cdot V \cdot g \Longrightarrow 0{,}642N$$

9,81 m/s^2

1000 kg/m^3 densidad del agua

* Peso del corcho

$$F_{peso} = \rho_{corcho} \cdot V \cdot g \Rightarrow 0{,}154N$$

240 kg/m^3 densidad del corcho

* Fuerza neta

$$F_{neta} = F_{em} - F_{peso} \Rightarrow 0{,}488N$$

* Aceleración

Segunda ley de Newton

$$a = \frac{F_{neta}}{masa} \Rightarrow a = \frac{F_{neta}}{\rho_{corcho} \cdot V} \approx 31{,}1\, m/s^2$$

Por lo cual, ya que el corcho parte del reposo y asciende 5 metros:

$$v = \sqrt{2ah} \approx 17{,}6\, m/s$$

1)

c)

La presión en el fondo de la fosa

$$P_{fondo} = P_{atm} + \rho g h$$

$P_{atm} = 101325\ Pa$ $\quad h = 5\ m$

$\rho = 1000\ Kg/m^3$ $\quad g = 9,81\ m/s^2$

La presión en la superficie

$$P_{superficie} = P_{atm}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el fondo y la superficie

$$P_{fondo} + \frac{1}{2}\rho v^2_{fondo} + \rho g h = P_{superficie} + \frac{1}{2}\rho v^2_{superficie}$$

Ya que la velocidad en el fondo $= 0$ (inicia en reposo)

$$P_{fondo} + \rho g h = P_{superficie} + \frac{1}{2}\rho v^2_{superficie}$$

despejando v superficie

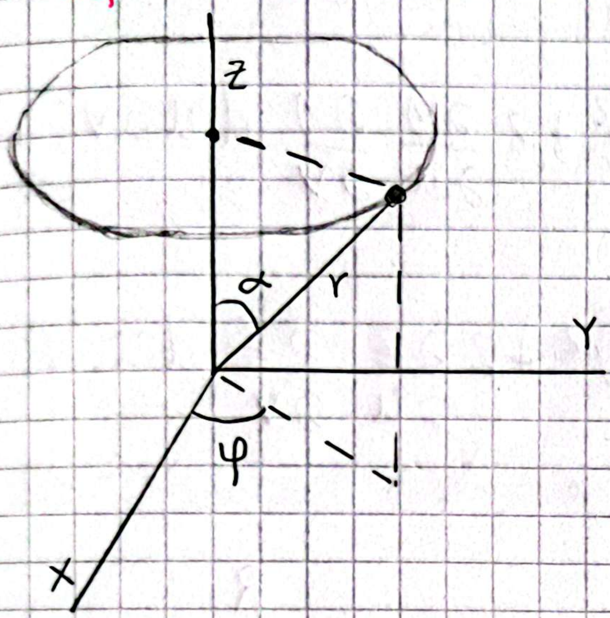
$$P_{atm} + \rho g h + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2_{superficie}$$

$$v^2_{superficie} = 4gh$$

$$v_{superficie} \approx 14\ m/s$$

2)

a)



La ecuación de una superficie cónica de ángulo α es:

$$\begin{cases} x = r \sin\alpha \cos\varphi \\ y = r \sin\alpha \sin\varphi \\ z = r \cos\alpha \end{cases}$$

La longitud de la línea que une dos puntos A y B y que está contenida en dicha superficie es:

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

donde:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \; ; \; dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \; ;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv .$$

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,du\,dv;$$

$$dy^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 dv^2 + 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,du\,dv;$$

$$dz^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 dv^2 + 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,du\,dv.$$

por lo cual:

$$L = \int_A^B \Bigg\{ \overbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]}^{P} du^2 + \overbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}^{R} dv^2$$

$$+\, 2 \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]}_{Q} \Bigg\}^{1/2}$$

$$\Rightarrow L = \int_A^B \sqrt{P + R\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2Q\frac{dv}{du}}\; du$$

$$\Rightarrow L = \int_A^B \sqrt{P + R\dot{v}^2 + 2Q\dot{v}}\; du$$

Para esta superficie (superficie cónica)

$u = r$ y $v = \varphi$

$$P = \sin^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\alpha \sin^2\varphi + \cos^2\alpha = 1$$

$$R = r^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha + r^2 \cos^2\varphi \sin^2\alpha = r^2 \sin^2\alpha$$

$$Q = -\sin\alpha \cos\varphi \cdot r \sin\alpha \sin\varphi + \sin\alpha \sin\varphi \cdot r \sin\alpha \cos\varphi = 0$$

Por lo cual, la longitud de la línea que une dos puntos A y B de la superficie cónica y que esté contenida en dicha superficie es:

$$L = \int_A^B \underbrace{\sqrt{1 + r^2 \sin^2\alpha \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}_{f(r,\dot{\varphi})} \, dr$$

ya que la función integrando, $f(r, \dot{\varphi})$ no depende de φ explícitamente, la ecuación de Euler-Lagrange se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial \dot\varphi} = \frac{r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi}{\sqrt{1 + r^2\sin^2\alpha\, \dot\varphi^2}} = C_1$$

despejando $\dot\varphi$ e integrando en toda la expresión respecto a r:

$$\varphi = C_1 \int \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^4\alpha - C_1^2 r^2 \sin\alpha}}\, dr + C_2$$

Resolvemos la integral haciendo el cambio de variable,

$s = r\sin\alpha / C_1$

$$\int \frac{dr}{r\sin\alpha\sqrt{\frac{r^2\sin^2\alpha}{C_1^2} - 1}} = \frac{1}{\sin\alpha}\int \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$$

haciendo el cambio, $s = \sec t$, $s = 1/\cos t$, $ds = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\int dt = \frac{1}{\sin\alpha}\, t$$

deshaciendo los cambios

$$\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arcsec}(S)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arcsec}\left(\frac{r\sin\alpha}{C_1}\right) - C_2$$

despejando r

$$r = \frac{C_1}{\sin\alpha\cos(\varphi\sin\alpha + C_2)}$$

Por ejemplo, para una geodésica que pase por los puntos $P_1(\varphi_1 = 0, r_1)$ y $P_2(\varphi_2, r_2)$ las constantes C_1 y C_2 son:

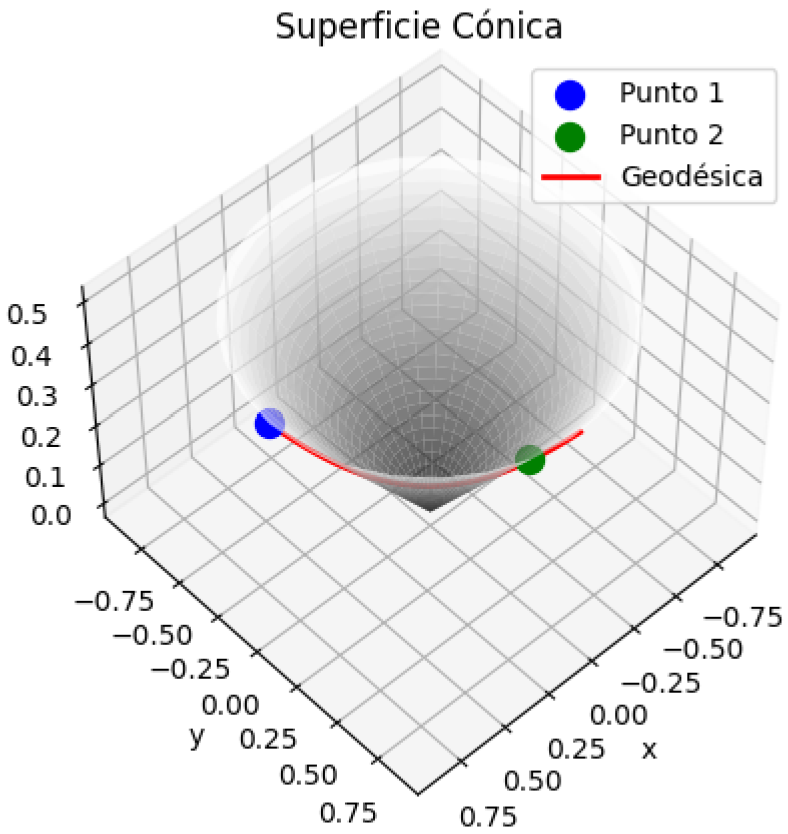
$$r_1 = \frac{C_1}{\sin\alpha\cos C_2} \quad ; \quad r_2 = \frac{C_1}{\sin\alpha\cos(\varphi_2\sin\alpha + C_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos(\varphi_2\sin\alpha + C_2)}{\cos C_2} \Rightarrow \tan C_2 = \frac{\cos\varphi_2\sin\alpha - \frac{r_1}{r_2}}{\sin(\varphi_2\sin\alpha)}$$

$$C_1 = r_1\sin\alpha\cdot\cos C_2.$$

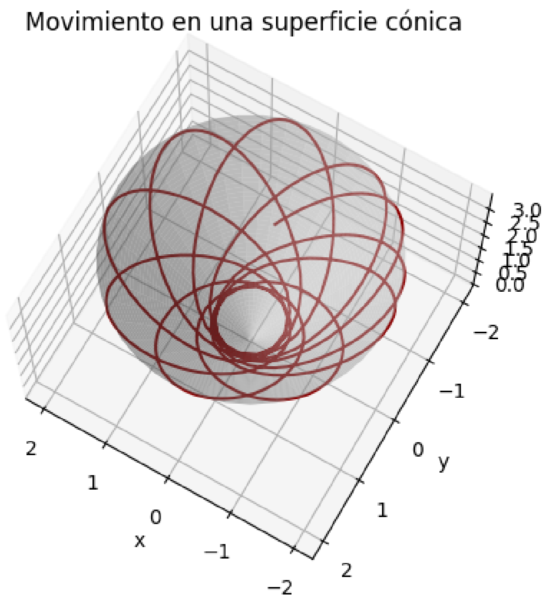
Ejemplo de la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie (geodésica) del cono invertido

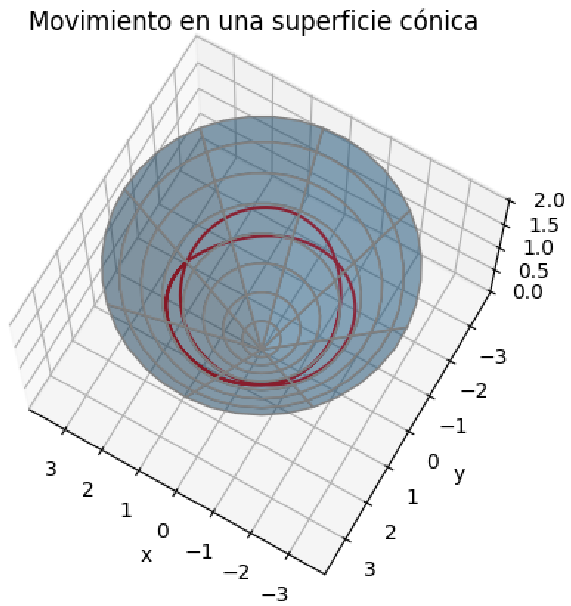
- Ángulo del cono, a= 60°
- Punto P_1: r_1=1, φ_1=0
- Punto P_2: r_2=1, φ_2= 90°



2)

b) Reproduzca las trayectorias que se muestran en el enlace.

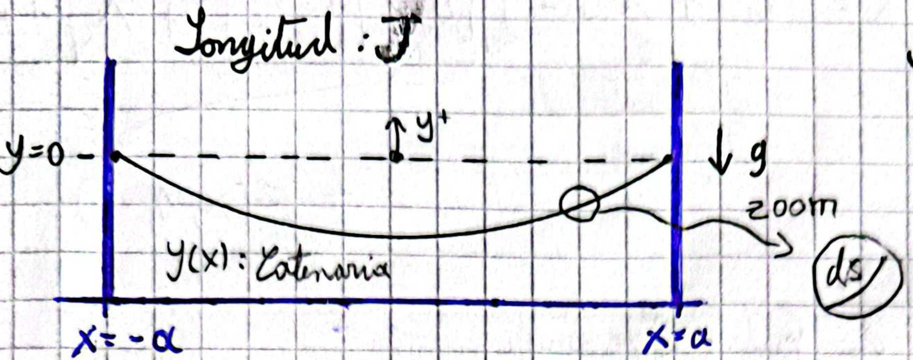




Para ver mejor los gráficos o revisar el código:

https://colab.research.google.com/drive/12V3w6S-JhqNNs4BKiNXkVNuwbTDzNFlL?usp=sharing

3)



$J > 2a$

$$dU = (\overbrace{\mu ds}^{\text{Masa}})gy$$

$$\Rightarrow U = \int_{\text{cuerda}} \mu g y \, ds \quad (i)$$

* Asumiendo que el cable es uniforme con una densidad lineal constante "μ".

- La longitud del cable esta dada por:

$$J = \int_{\text{cuerda}} ds = \underbrace{\int_{-a}^{a} \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx}_{J}$$

Recordando (i)

$$U = \int_{-a}^{a} \mu g y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Objetivo: Minimizar U con la restricción de que la longitud de la cuerda tiene que ser igual a J.

Para solucionar un problema variacional con restricciones

se construye $K = U_g + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Multiplicador de} \\ \text{Lagrange}}}{\lambda} J = \int_{-a}^{a} \underbrace{\left[\mu g y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \lambda \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]}_{\equiv F(x,y,y')} dx,$

(i) La ecuación de Euler-Lagrange:

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, pero ya que F no depende explícitamente de X, se emplea la identidad de Beltrami:

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a la identidad de Beltrami:

$$\Rightarrow F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$$

$$\Rightarrow \mu g y \sqrt{1+(y')^2} + \lambda \sqrt{1+(y')^2} - \mu g y \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{\lambda (y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\mu g y (1+(y')^2)}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{\lambda (1+(y')^2)}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{\mu g y (y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{\lambda (y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\mu g y + \lambda}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1 \longrightarrow \frac{(\mu g y + \lambda)^2}{1+(y')^2} = C_1^2$$

$$\Rightarrow (\mu g y + \lambda)^2 = C_1^2 \left[1 + (y')^2 \right]$$

$$\Rightarrow (\mu g y + \lambda)^2 = C_1^2 + C_1^2 (y')^2$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{(\mu g y + \lambda)^2}{C_1^2} - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{(\mu g y + \lambda)^2}{C_1^2} - 1}} = \int dx$$

$$\boxed{\cosh u = \frac{\mu g y + \lambda}{C_1}} \xrightarrow[\text{diferenciando}]{} \boxed{dy = \frac{C_1 \sinh u}{\mu g} du}$$

$$\Rightarrow \int \frac{C_1 \cancel{\sinh u} / \mu g}{\cancel{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}} du = x + C_2 \Rightarrow \frac{C_1}{\mu g} u = x + C_2$$

$$\boxed{\therefore u = \cosh^{-1}\left(\frac{\mu g y + \lambda}{C_1} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{\mu g} \cosh^{-1}\left(\frac{\mu g y + \lambda}{C_1} \right) = x + C_2$$

DD MM AA

despejando y obtenemos:

$$y = \frac{c_1}{\mu g} \cosh\left[\frac{\mu g}{c_1}(x + c_2)\right] - \frac{\lambda}{\mu g} \quad (\text{Eq } 1)$$

ahora para encontrar c_1, c_2, λ,

en $x = -a$, $y = 0$

$$0 = \frac{c_1}{\mu g} \cosh\left[\frac{\mu g}{c_1}(-a + c_2)\right] - \frac{\lambda}{\mu g}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu g} = \frac{c_1}{\mu g} \cosh\left[\frac{\mu g}{c_1}(-a + c_2)\right] \quad (ii)$$

en $x = a$, $y = 0$

$$0 = \frac{c_1}{\mu g} \cosh\left[\frac{\mu g}{c_1}(+a + c_2)\right] - \frac{\lambda}{\mu g}$$

$$\frac{\lambda}{\mu g} = \frac{c_1}{\mu g} \cosh\left[\frac{\mu g}{c_1}(a + c_2)\right] \quad (iii)$$

Recordando las identidades trigonométricas hiperbólicas

$\cosh(9) = \cosh(-9)$

y al comparar (ii) con (iii), para que esto se cumpla, $C_2 = 0$

$$\therefore \underbrace{\frac{C_1}{\mu g}\cosh\left(\frac{-\mu g a}{C_1}\right) = \frac{\lambda}{\mu g} ; \frac{C_1}{\mu g}\cosh\left(\frac{\mu g a}{C_1}\right) = \frac{\lambda}{\mu g}}_{}$$

$$\lambda = C_1 \cosh\left(\frac{\mu g a}{C_1}\right)$$

Reemplazando λ en (Eq 1)

$$y = \frac{C_1}{\mu g}\left[\cosh\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right) - \cosh\left(\frac{\mu g a}{C_1}\right)\right]$$

Por último para encontrar C_1

$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right)$ y vamos a reemplazarlo en

J

$$J=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow J=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right)}\,dx$$

$$\therefore\ J=\frac{2C_1}{\mu g}\sinh\left(\frac{\mu g a}{C_1}\right)$$

donde de esta ecuación obtendríamos C_1

$$\Rightarrow \underbrace{y=\frac{C_1}{\mu g}\left[\cosh\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right)-\cosh\left(\frac{\mu g a}{C_1}\right)\right]}_{\text{Ecuación de la Catenaria}}$$