PROBABILIDAD

.UBAECONÓMICAS

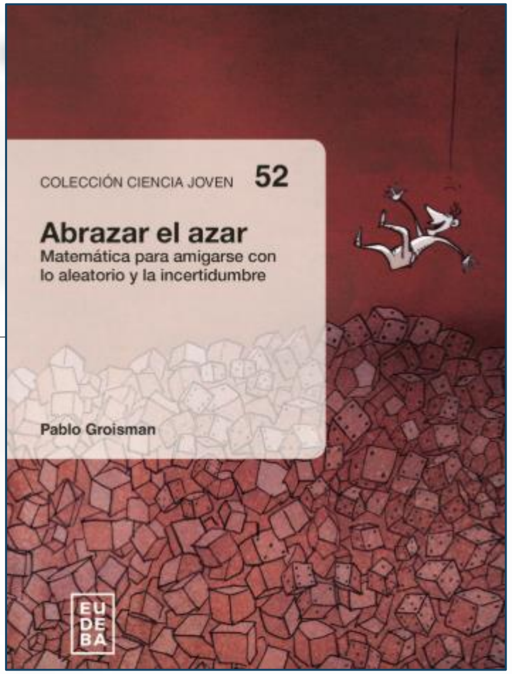
TUGAD

2025

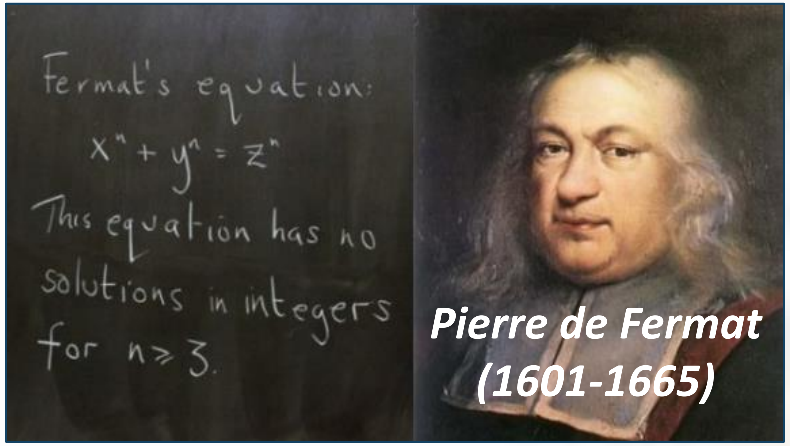
¿POR QUÉ ESTUDIAR PROBABILIDAD?

Figura 1.2: Relación básica entre la probabilidad y la estadística inferencial.

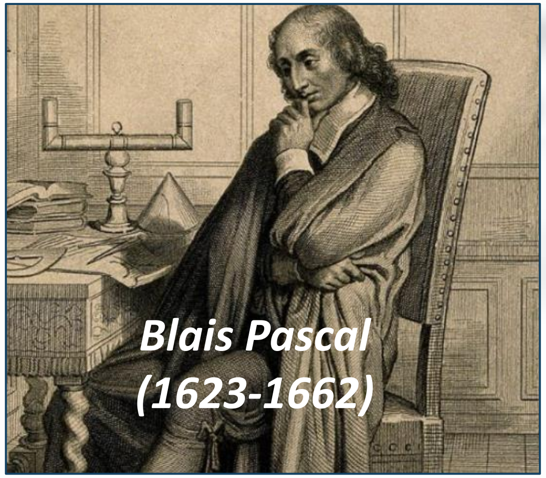
Lectura sugerida para ampliar el tema



UN POCO DE HISTORIA



Pierre de Fermat (1601-1665)



Blais Pascal (1623-1662)

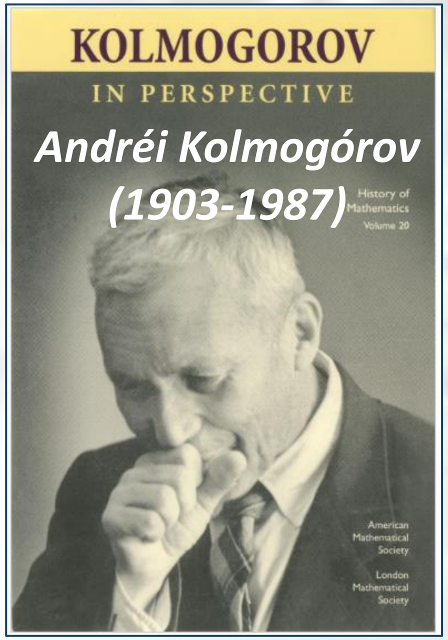
Colaboraron en la **resolución del "problema de los puntos"**, que consiste en cómo repartir las apuestas si un juego se interrumpe antes de terminar.

Sentaron las bases de la **teoría de la probabilidad moderna**.

Usaron **razonamiento combinatorio y cálculo de expectativas** para analizar juegos de azar.

UN POCO DE HISTORIA

INTUICIÓN → FORMALIZACIÓN



Padre de la teoría moderna de la probabilidad

Formalizó la probabilidad mediante un enfoque axiomático en 1933, usando teoría de conjuntos y medidas.

Sentó las bases de la probabilidad tal como la conocemos hoy.

ALGUNAS DEFINICIONES

- Es posible **repetirlo indefinidamente** bajo las mismas condiciones
- no podemos **predecir** el resultado, pero se conoce el conjunto de todos los resultados posibles

Experimento aleatorio

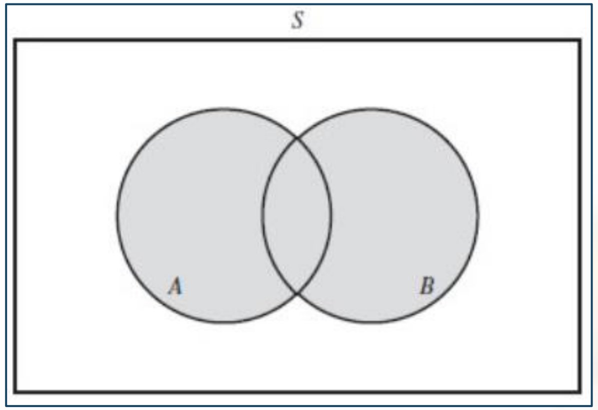
Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Lo indicamos con la letra S. Si este conjunto es finito, con n elementos, escribimos $S = \{s_1; s_2; \ldots ; s_n\}$, pero también S podría ser un conjunto infinito.

Espacio de resultados

Son ciertos subconjuntos de S, que indicaremos, por lo general, con las letras mayúsculas A, B, etc. A veces nos puede convenir identificarlos como A_1, A_2, etc.

Suceso o Evento

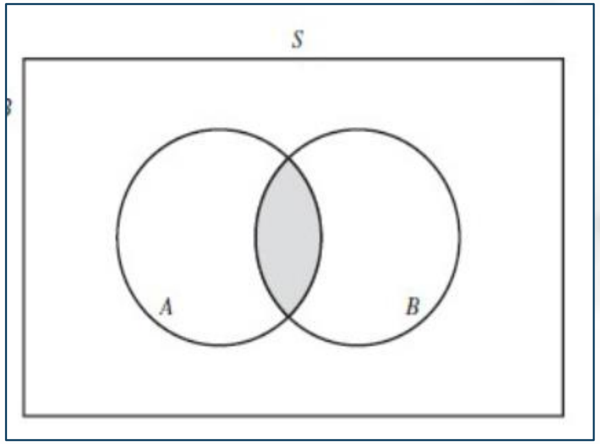
ALGO SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS…



Suceso Unión

A ∪ B

Implica que ocurra A, o que ocurra B, o que ocurran A y B a la vez

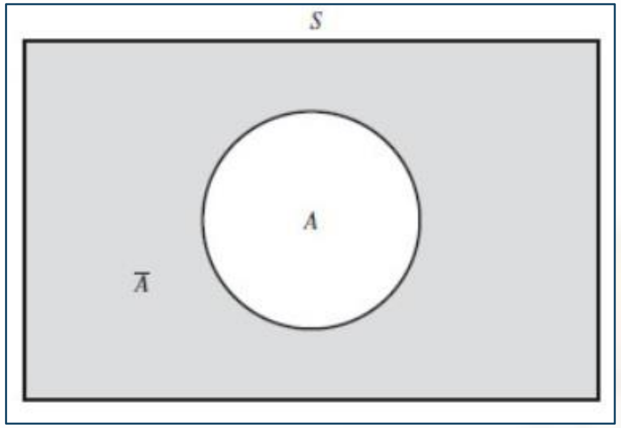


Suceso Intersección

A ∩ B

Implica que ocurran A y B simultáneamente

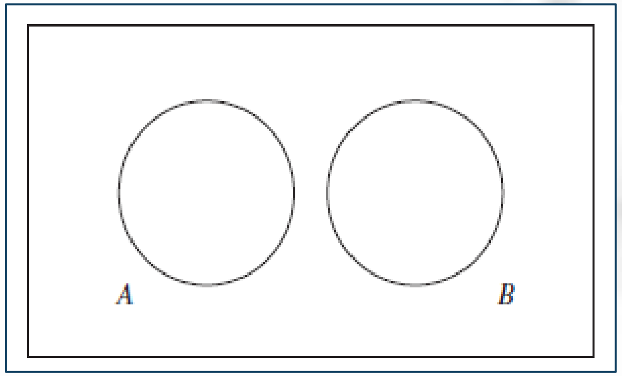
ALGO SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS…



Suceso Complementario

$\overline{A}=A^c$

Implica que no ocurra A



Sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles

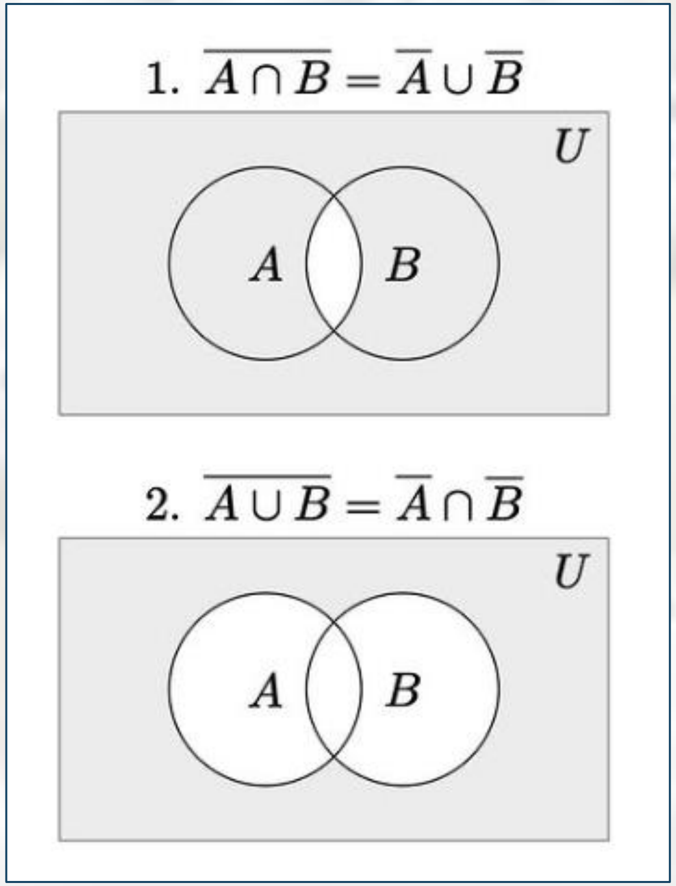
$A \cap B = \emptyset$

Implica que A y B no ocurren simultáneamente

ALGO (más) SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS…

Leyes de De Morgan

Fácilmente demostrables a partir de los diagramas de Venn



Augusto De Morgan* *(1806-1871)

RETOMAMOS:

INTUICIÓN → FORMALIZACIÓN

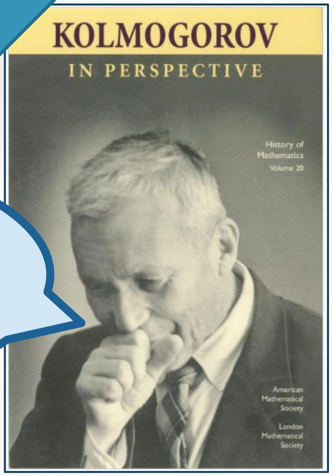
n_A / n = proporción de veces que ocurre A

la experiencia muestra que cuando n es grande esta proporción se parece a un número. A ese número lo llamamos **probabilidad de A = P(A)**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = P(A)$$

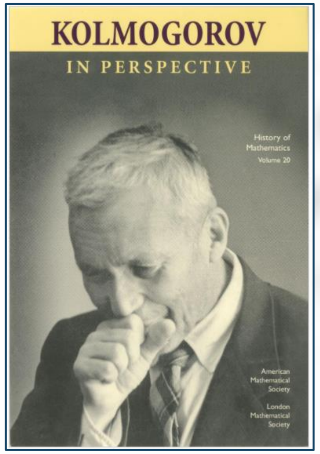
Definición FRECUENTISTA

Definición AXIOMÁTICA



DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Axiomas



Sea S el espacio de resultados de un experimento aleatorio. A cada suceso A se le asigna un número real que se llama **probabilidad del suceso A**, y se indica con **P(A)**, que cumple las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes es

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. Si A_1; A_2; ...; A_n; ... son sucesos mutuamente excluyentes de a pares entonces:

   $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Se demuestran a partir de los axiomas

1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A') = 1 - P(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
4. Si A y B son sucesos cualesquiera es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

¿CÓMO CALCULAMOS PROBABILIDADES?

Regla de Laplace

En un experimento aleatorio con un número finito de resultados posibles, si todos estos resultados son igualmente probables, la probabilidad de que ocurra un suceso A se puede calcular por:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables a A}}{\text{número de resultados posibles}}$$

SOLO SI **S** ES EQUIPROBABLE

Definición CLÁSICA

¿Y SI NO HAY EQUIPROBABILIDAD?

Resumen de cálculo de probabilidades

- Si S es finito y todos sus resultados son igualmente probables, la probabilidad de un suceso A, se puede calcular por la fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables a A}}{\text{número de resultados posibles}}$$

- Si se conocen algunas relaciones entre las probabilidades de algunos sucesos, o algunas probabilidades, se pueden usar los axiomas y las propiedades de la probabilidad.
- En caso contrario, se toma una muestra y **se estima** la probabilidad mediante la frecuencia relativa.

¡HAY REGLAS!

REGLAS (¡recordemos!)

1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A') = 1 - P(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
4. Si A y B son sucesos cualesquiera es

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de un espacio muestral S, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$P(A) + P(A') = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Definición

Si B es un suceso tal que P(B) > 0, se llama probabilidad **condicional del suceso A dado B** a:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A/B)$	si $P(B) > 0$
$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$	si $P(A) > 0$

Regla del producto

TEOREMA DE BAYES

Definición

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k$ una partición del espacio muestral *S* y sea *B* un suceso cualquiera tal que *P(B) > 0*,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Dem:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Regla del producto

Teorema de Probabilidad Total

El Teorema de Bayes describe cómo es posible "revisar" la probabilidad inicial de un evento o probabilidad a priori ($P(A_j)$) para reflejar la información adicional que nos provee la ocurrencia de un evento relacionado. La probabilidad revisada se denomina probabilidad a posteriori.

TEOREMA DE BAYES

Definición

Probabilidad a priori

Probabilidad condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)}$$

Probabilidad a posteriori

Probabilidad total

El Teorema de Bayes describe cómo es posible "revisar" la probabilidad inicial de un evento o probabilidad a priori ($P(A_i)$) para reflejar la información adicional que nos provee la ocurrencia de un evento relacionado. La probabilidad revisada se denomina probabilidad a posteriori.

SUCESOS INDEPENDIENTES

Definición

Los eventos A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$