Estadística I

Variables Aleatorias Discretas

Natalia SALABERRY

Variable aleatoria

Definición Variable Aleatoria (VA)

Dado un espacio muestral -conformado por los valores que toma la variable bajo análisis- una variable aleatoria X es una función que asigna a cada elemento del espacio muestral un número real: $X: \Omega \rightarrow R$

La variable aleatoria puede ser de **dos tipos**

Discreta

Es un conjunto finito o infinito numerable de valores.

Ejemplos:

Cantidad de personas infectadas por COVID 19

Cantidad de fallos de un servidor o máquina

Cantidad de casos exitosos de un evento determinado

Continua

Es un intervalo de números reales.

Ejemplos:

Estatura de una persona

Tiempo de arribo a un lugar

Peso de un objeto

VA Discreta - Función de Probabilidad

Definición de Función de probabilidad

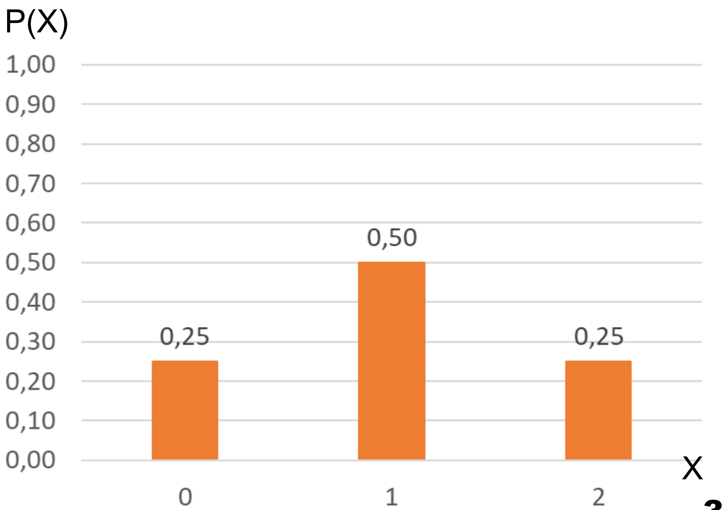
Sea X una variable aleatoria discreta, P(X=x) será su función de probabilidad si satisface las siguientes propiedades:

- P(x_i)≥0 para todo x_i ε X
- $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)$=1

Por lo tanto, la función de probabilidad nos indica como se distribuye la probabilidad total entre todos los valores que toma la variable aleatoria discreta - viene determinada por la probabilidad de los eventos asociados a cada valor de X-.

X=Número de caras al tiras dos monedas		P(X=x)
Cara, Cara	2	1/4
Cara, Seca	1	1/4
Seca, Cara	1	1/4
Seca, Seca	0	1/4
	4	

Valores posible de X	P(X=x)
0	0,25
1	0,50
2	0,25
	1



VA Discreta - Función de Probabilidad

Ejemplo

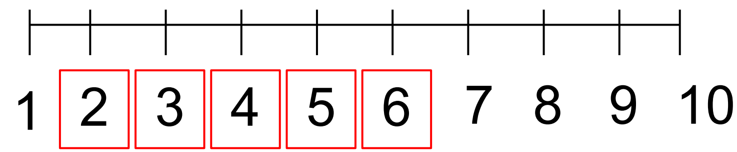
Consideremos la siguiente variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03

a) Compruebe que $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1$

$\sum_{i=1}^{10} P(x_i)$ = P(X=1)+P(X=2) +P(X=3) +P(X=4) +P(X=5) +P(X=6) +P(X=7) +P(X=8) +P(X=9) +P(X=10)=

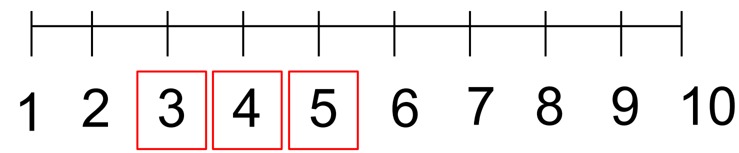
=0,05+0,06+0,07+0,1+0,2+0,18+0,17+0,1+0,04+0,03= 1



b) Calcule la probabilidad siguiente

P(2 ≤ x ≤ 6) = P(X=2) +P(X=3) +P(X=4) +P(X=5) +P(X=6)=

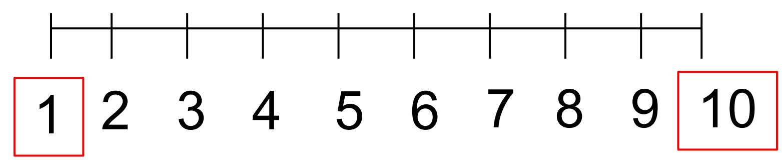
0,06+0,07+0,1+0,2+0,18= 0,61



c) Calcule la probabilidad siguiente

P(2 < x < 6) = P(X=3) +P(X=4) +P(X=5)=

0,07+0,1+0,2= 0,37



d) Calcule la probabilidad siguiente

P(x < 2) + P(x > 9) =P(X=1)+ P(X=10)= 0,05+0,03= 0,08

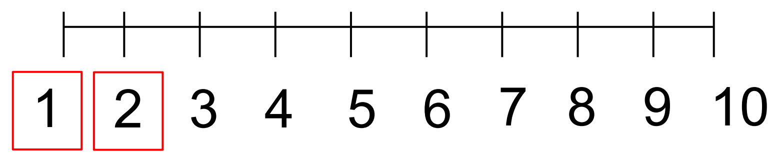
VA Discreta - Función de Probabilidad

Ejemplo

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03

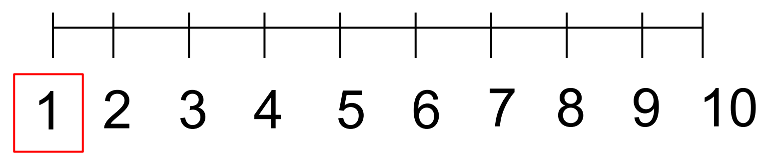
e) Calcule la probabilidad siguiente

$P(x \leq 2) = P(X=1)+P(X=2) = 0{,}05+0{,}06 = 0{,}11$



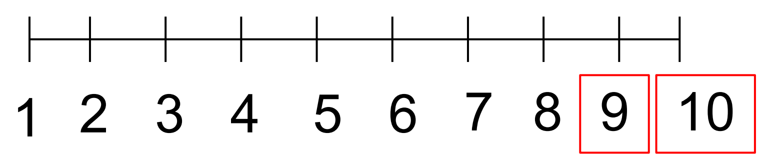
f) Calcule la probabilidad siguiente

$P(x < 2) = P(X=1) = 0{,}05$



g) Calcule la probabilidad siguiente

$P(x \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = 0{,}04+0{,}03 = 0{,}07$



VA Discreta - Función de Probabilidad Acumulada

Definición de Función de probabilidad Acumulada

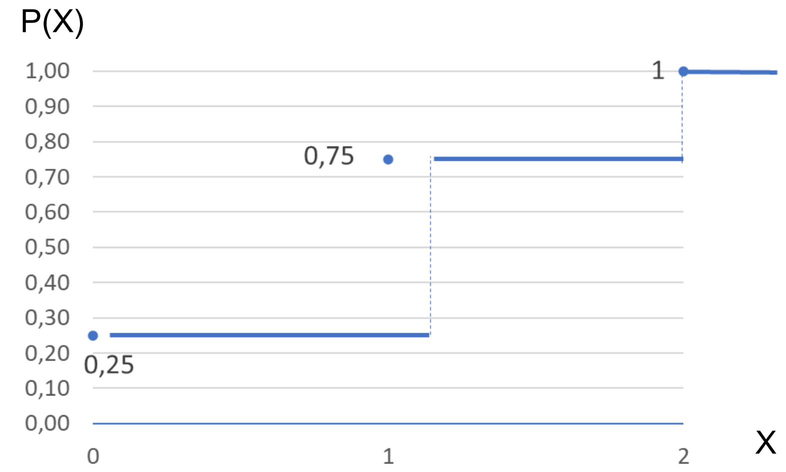
Sea X una variable aleatoria discreta, F(x)= P(X ≤ x) será su función de probabilidad acumulada. Entonces:

$$F(x)=P(X \leq x)=\sum_{i=1}^{X} P(x_i)$$

Por lo tanto, la función de probabilidad acumulada nos muestra como se acumulan las probabilidades de los eventos asociados a cada valor de X por debajo de un determinado valor de la misma.

Valores posible de X	P(X=x)	F(X)
0	0,25	0,25
1	0,50	0,75
2	0,25	1
	1	

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para } X < 0 \\ 0{,}25 & \text{para } 0 \leq X < 1 \\ 0{,}75 & \text{para } 1 \leq X < 2 \\ 1 & \text{para } X \geq 2 \end{cases}$$



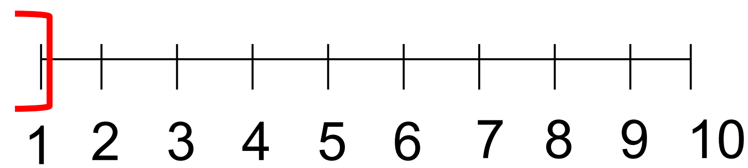
VA Discreta - Función de Probabilidad

Ejemplo

Consideremos la siguiente variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad

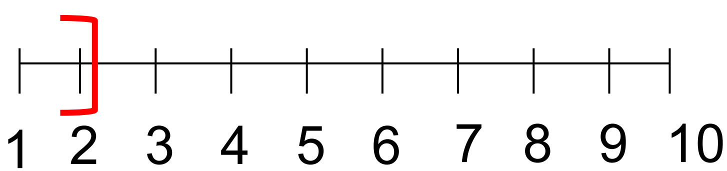
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03

a) Calcule la probabilidad siguiente



F(1)= $\sum_{i=1}^{1} P(x_i)$ =P(X ≤ 1)= P(X = 1)= 0,05

b) Calcule la probabilidad siguiente



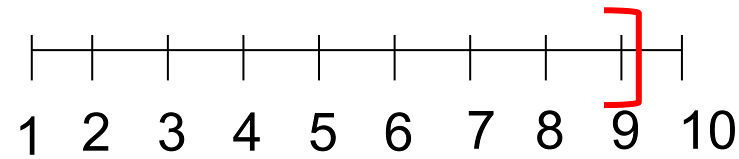
F(2)= $\sum_{i=1}^{2} P(x_i)$ =P(X ≤ 2)= P(X = 1) + P(X = 2) = 0,05+0,06= 0,11

VA Discreta - Función de Probabilidad o Distribución Acumulada

Ejemplo

Consideremos la siguiente variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03



c) Calcule la probabilidad siguiente

F(9) $=\sum_{i=1}^{9} P(x_i)=$ P(X=1)+P(X=2) +P(X=3) +P(X=4) +P(X=5) +P(X=6) +P(X=7) +P(X=8) +P(X=9) = 0,05+0,06+0,07+0,1+0,2+0,18+0,17+0,1+0,04= 0,97

Pero podemos pensar lo siguiente: sabemos que $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1$ y nos interesan los valores que toma la variable aleatoria menores igual a 9. Por lo tanto, no nos interesa cuando la variable aleatoria toma el valor 10. De esta manera podemos utilizar el complemento, entonces:

F(9)= $\mathbf{\sum_{i=1}^{9} P(x_i)}$ **=1-P(X=10)=1-0,03=0,97**

VA Discreta – Valor Esperado o Media

Definición de Valor Esperado o Media

Se X una variable aleatoria discreta, su Valor Esperado o Media se define como:

$$E(x)= \sum_{i=1}^{n} x_i * P(x_i)$$

Por lo tanto, este valor es un promedio ponderado de los valores de la variable aleatoria, es decir, ponderado por la probabilidad de ocurrencia de cada valor.

Valores posible de X	P(X=x)	F(X)	P(X=x) * X	
0	0,25	0,25	0	
1	0,50	0,75	0,5	
2	0,25	1	0,5	
	1		1	=E(X)

$E(x)= \sum_{i=0}^{2} x_i * P(x_i)$= 0*P(X=0)+ 1*P(X=1)+ 2*P(X=2)= 0 + 1*0,5 + 2*0,25 = 1

VA Discreta - Función de Probabilidad o Distribución Acumulada

Ejemplo

Consideremos la siguiente variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03

c) Calcule el valor esperado

E(x)= $\sum_{i=1}^{10} x_i * \mathrm{P}(x_i)$=

=1*P(X=1)+ 2*P(X=2)+ 3*P(X=3)+ 4*P(X=4)+5*P(X=5)+6*P(X=6)+ 7*P(X=7)+8*P(X=8)+9*P(X=9)+ 10*P(X=10)

= 1*0,05 + 2*0,06+3*0,07+4*0,1 +5*0,2+6*0,18+7*0,17+8*0,1+ 9*0,04+10*0,03

=5,51

x_i	**P(x_i)**	**X*P(x_i)**
1	0,05	1*0,05=0,05
2	0,06	2*0,06=0,12
3	0,07	3*0,07=0,21
4	0,1	4*0,1=0,4
5	0,2	5*0,2=1
6	0,18	6*0,18=1,08
7	0,17	7*0,17=1,19
8	0,1	8*0,1=0,8
9	0,04	9*0,04=0,36
10	0,03	10*0,03=0,3
Total	1	**5,51**

VA Discreta – Valor Esperado o Media

Propiedades del Valor

- El valor esperado de una constante es la misma constante

$$E(b) = b$$

Demostración:

$$E(b) = \sum_{i=1}^{n} b*\mathrm{P}(x_i) = b * \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i)}_{1} = b * 1 = b$$

- El valor esperado de una constante por la variable aleatoria discreta es igual a la constante por el valor esperado de la variable aleatoria:

$$E(a * X) = a * E(X)$$

Demostración:

$$E(a * X) = \sum_{i=1}^{n} a * x_i*\mathrm{P}(x_i) = a * \sum_{i=1}^{n} x_i*\mathrm{P}(x_i) = a * E(X)$$

VA Discreta – Valor Esperado o Media

Propiedades del Valor

- El valor esperado de la suma de una constante por la variable aleatoria discreta y una constante es igual a la constante por el valor esperado de la variable aleatoria más una constante

$$E(a * X + b) = a * E(X) + b$$

Demostración:

$$E(a * X + b) = \sum_{i=1}^{n}(a * x_i + b) * \mathrm{P}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(a * x_i * \mathrm{P}(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} b * \mathrm{P}(x_i) =$$

$$a * \sum_{i=1}^{n} x_i * \mathrm{P}(x_i) + b * \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i) = a * E(X) + b$$

VA Discreta – Valor Esperado o Media

Propiedades del Valor

- El valor esperado de la suma de dos variables aleatorias **independientes** es igual a la suma del valor esperado de cada variable aleatoria

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Demostración:

$$E(aX + bY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ax_i + by_j)*\mathrm{P}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ax_j * \mathrm{P}(x_i, y_j) + by_j*\mathrm{P}(x_i, y_j)$$

$$=$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j * \mathrm{P}(x_i, y_j) + b\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j*\mathrm{P}(x_i, y_j) =$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i * \mathrm{P}(x_i) + b\sum_{j=1}^{n} y_j * \mathrm{P}(y_j) = aE(X) + bE(Y)$$

VA Discreta – Varianza y Dispersión

Definición de Varianza

Se X una variable aleatoria discreta, su Varianza se define como:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^{2} * P(x_i)=E[X - E(X)]^{2}$$

Por lo tanto, su valor nos indica cuanto se alejan los valores de X respecto su media en <u>términos cuadráticos</u>

X	P(X)	E(X)=x*P(x)	X-E(X)	[X-E(X)]^2	[X-E(X)]^2 * P(x)
0	0,25	0	-1	1	0,25
1	0,5	0,5	0	0	0
2	0,25	0,5	1	1	0,25
	E(X)=	**1**		**V(X)=**	**0,5**

Ya que en la mayoria de los casos expresar una medida en términos cuadráticos no tiene sentido, se utiliza el concepto de **dispersión** que no es otra cosa que la raíz cuadrada de la varianza: $\mathrm{D(X)} = \sqrt{V(X)}$ Para el ejemplo: $\mathrm{D(X)} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$

De esta manera la dispersión nos indica cuanto se alejan los valores de X respecto de su media en la misma unidad de medida en que se encuentra expresada X.

VA Discreta - Función de Probabilidad o Distribución Acumulada

Ejemplo

Consideremos la siguiente variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P(X=x)	0,05	0,06	0,07	0,1	0,2	0,18	0,17	0,1	0,04	0,03

c) Calcule la varianza y dispersión

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^{2} * P(x_i)$
$=4{,}6099$

$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}6099}$
$= 2{,}1471$

X	**P(X=x)**	**X*P(X=x)**	**A=(x-E(X))^2**	**A*P(X=x)**
1	0,05	1*0,05=0,05	(1-5,51)^2=20,3401	1,017005
2	0,06	2*0,06=0,12	(2-5,51)^2=12,3201	0,739206
3	0,07	3*0,07=0,21	(3-5,51)^2=6,3001	0,441007
4	0,1	4*0,1=0,4	(4-5,51)^2=2,2801	0,22801
5	0,2	5*0,2=1	(5-5,51)^2=0,2601	0,05202
6	0,18	6*0,18=1,08	(6-5,51)^2=0,2401	0,043218
7	0,17	7*0,17=1,19	(7-5,51)^2=2,2201	0,377417
8	0,1	8*0,1=0,8	(8-5,51)^2=6,2001	0,62001
9	0,04	9*0,04=0,36	(9-5,51)^2=12,1801	0,487204
10	0,03	10*0,03=0,3	(10-5,51)^2=20,1601	0,604803
Total	1	5,51		**4,6099**

VA Discreta – Varianza y Dispersión

Propiedades de la Varianza

- La varianza de una variable aleatoria es igual al valor esperado de la variable al cuadrado menos el valor esperado de la variable al cuadrado.

V(X)= $\boldsymbol{E(X^2) - [E(X)]^2}$ **siendo la forma más utilizada**

Demostración:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] =$$
$$E(X^2) - E\big(2XE(X)\big) + E(E(X)^2) = E(X^2) - E(2)E(X)E\big(E(X)\big) + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Para nuestro ejemplo comparamos la equivalencia de fórmula:

X	P(X)	E(X)=x*P(x)	x^2	x^2*p(x)
0	0,25	0	0	0
1	0,5	0,5	1	0,5
2	0,25	0,5	4	1
	E(X)=	**1**		**1,5**

V(X)= $E(X^2) - [E(X)]^2$=1,5 - $[1]^2$=0,5 $\quad \mathrm{D(X)} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$

VA Discreta – Varianza y Dispersión

Propiedades de la Varianza

Para el otro ejemplo

X	P(X=x)	X*P(X=x)	X^2	X^2 * P(X=x)
1	0,05	1*0,05=0,05	1	0,05
2	0,06	2*0,06=0,12	4	0,24
3	0,07	3*0,07=0,21	9	0,63
4	0,1	4*0,1=0,4	16	1,6
5	0,2	5*0,2=1	25	5
6	0,18	6*0,18=1,08	36	6,48
7	0,17	7*0,17=1,19	49	8,33
8	0,1	8*0,1=0,8	64	6,4
9	0,04	9*0,04=0,36	81	3,24
10	0,03	10*0,03=0,3	100	3
Total	1	**5,51**		**34,97**

V(X)= $\boldsymbol{E(X^2) - [E(X)]^2} = 34{,}97 - (5{,}51^2) = 4{,}6099$

$\mathrm{D(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}6099} = 2{,}1471$

VA Discreta – Varianza y Dispersión

Propiedades de la Varianza

- La varianza de una constante es igual cero.

$$V(b) = 0$$

Demostración:

$$V(b) = E[b - E(b)]^2 = E[b - b]^2 = E[0]^2 = 0$$

- La varianza de una constante por la variable aleatoria es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable aleatoria.

$$V(a * X) = a^2 * V(X)$$

Demostración:

$$V(aX) = E[aX - E(aX)]^2 = E[aX - aE(X)]^2 = E[a(X - E(X))]^2$$
$$= a^2 E[X - E(X)]^2 = a^2 V(X)$$

- La varianza de un binomio (a*X + b) es igual a

$$V(a * X + b) = a^2 * V(X)$$

Demostración:

$$V(aX + b) = E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 = E[(aX + b) - aE(X) - b]^2$$
$$= E[a(X - E(X))]^2 = a^2 E[X - E(X)]^2 = a^2 V(X)$$

VA Discreta – Varianza y Dispersión

Propiedades de la Varianza

- La varianza de la suma de dos variables **aleatorias independientes** es igual a la suma de la varianza de cada variable aleatoria.

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

Demostración:

$$V(aX+bY)=E[(aX+bY)-E(aX+bY)]^{2}$$
$$=E[(aX+bY)-E(aX)-E(bY)]^{2}=E[(aX-E(aX))+(bY-E(bY))]^{2}$$
$$=E[(aX-aE(X))+(bY-bE(Y))]^{2}=E[a(X-E(X))+b(Y-E(Y))]^{2}$$
$$=E[(a(X-E(X))^2+2(a(X-E(X))\big(b(Y-E(Y)\big)+(b(Y-E(Y))^2]$$
$$=E[(a(X-E(X))^2]+2E[\big(a(X-E(X)\big)\big(b(Y-E(Y)\big)]+E[(b(Y-E(Y))^2]$$
$$=a^2E[(X-E(X))^2]+0+b^2E[(Y-E(Y))^2]=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

Nota: usando la independencia de X e Y:

$$E[\big(a(X-E(X)\big)\big(b(Y-E(Y)\big)]=0$$

VA Discreta –Coeficiente de Variación

Definición de Coeficiente de Variación
Sea X una variable aleatoria discreta, el coeficiente de variación se define como:

$$\mathrm{CV(X)} = \frac{D(X)}{E(X)}$$

Por lo tanto, su valor nos indica cual es la proporción de variación de los valores de la variable aleatoria respecto de su media.
Esta medida es más razonable de utilizar para valores esperados de magnitud muy diferente de variables aleatorias distintas con igual dispersión.

Ejemplo: para nuestros ejemplos, calculamos el CV

$$\mathrm{CV(X)} = \frac{D(X)}{E(X)} = \frac{0{,}707}{1} = 0{,}707$$

$$\mathrm{CV(X)} = \frac{D(X)}{E(X)} = \frac{2{,}1471}{5{,}51} = 0{,}39$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Según el comportamiento de la variable aleatoria discreta, su distribución de probabilidad adopta una forma determinada que podemos conocer.
A partir de ello, tenemos las siguientes distribuciones de probabilidad:

- **Binomial**: se caracteriza por determinar la probabilidad de éxito de la ocurrencia de un evento considerando que existe reposición de los elementos. Entonces la probabilidad de éxito se mantiene constante en cada ensayo.

- **Hipergeométrica**: se caracteriza por determinar la probabilidad de éxito de la ocurrencia de un evento sin que exista reposición de los elementos. Entonces la probabilidad de éxito no se mantiene constante en cada ensayo.

- **Poisson**: se caracteriza por determinar la probabilidad de la cantidad de éxitos de la ocurrencia de un evento a una tasa media (constante) de ocurrencia.

- **Geométrica**: se caracteriza por determinar la probabilidad de la cantidad de ensayos hasta alcanzar el éxito. Entonces la probabilidad de éxito se mantiene constante en cada ensayo y su dominio será desde 1 a infinito.

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Bernoulli

La distribución de Bernoulli esta asociada a eventos dicotómicos, es decir, fenómenos en los cuales el resultado puede tomar únicamente dos valores, “éxito” y “fracaso”. La variable aleatoria X Bernoulli se relaciona con este tipo de fenómenos. Asigna el valor 0 al evento “fracaso” y el valor 1 al evento “éxito”.

X ~ Bernoulli(p)

donde p (parámetro de la función) es la probabilidad de obtener un éxito. Entonces, P(x=1)=p -> P(x=0) = 1-p

Luego, la función de probabilidad viene dada por

$$\boldsymbol{P(X=k)=p^{k}*(1-p)^{n-k}}$$

Su Valor Esperado es $\mathbf{E}(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n} x_i * \mathrm{P}(x_i)$ =1*p(x=1)+0*P(x=0)=**p**

Su Varianza es $\boldsymbol{V(X)}=E(X^2)-E(X)^2=[1^2*\text{p(x=1)}+0^2*\text{P(x=0)}]-p^2=p-p^2=\boldsymbol{p(1-p)}$

Su Desvío es **D(X)=**$\sqrt{\boldsymbol{V(x)}}$

Recordemos

Factorial de un número

Permite calcular la cantidad de formas de ordenar n elementos distintos. Se calcula como:

n! = n*(n-1)*(n-2)……*1

El factorial de 1!=1 Por definición 0!=1

Por ejemplo:

5!=5*(5-1)*(5-2)*(5-3)*(5-4)=5*4*3*2*1=120

Números Combinatorio

Permite calcular la cantidad de formas de elegir k elementos de un conjunto de n elementos. Se calcula como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Por ejemplo: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6*2} = 10$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Binomial

Un experimento es binomial si satisface las siguientes condiciones:

- ✓ El experimento consiste en n pruebas, con n fijo.
- ✓ Las pruebas son idénticas y en cada prueba hay sólo dos resultados posibles: éxito y fracaso
- ✓ Las pruebas son independientes, es decir, el resultado de una prueba no influye sobre el de las otras.
- ✓ La probabilidad de éxito se mantiene constante en todas las pruebas.

Entonces, definimos la variable aleatoria X="cantidad de éxitos en las n repeticiones" que sigue una distribución binomial

X~Bi(n;p)

donde p=probabilidad de éxito y n=cantidad de ensayos, son los parámetros de la distribución

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Binomial

<u>Función de probabilidad</u>: dado que en este experimento se trata de encontrar k éxitos, entonces se incorpora al experimento Bernoulli definido anteriormente, las distintas formas de obtención de k éxitos en los n ensayos (combinatorio)

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}}$$

Función de probabilidad acumulada

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(X_j \leq \mathrm{k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

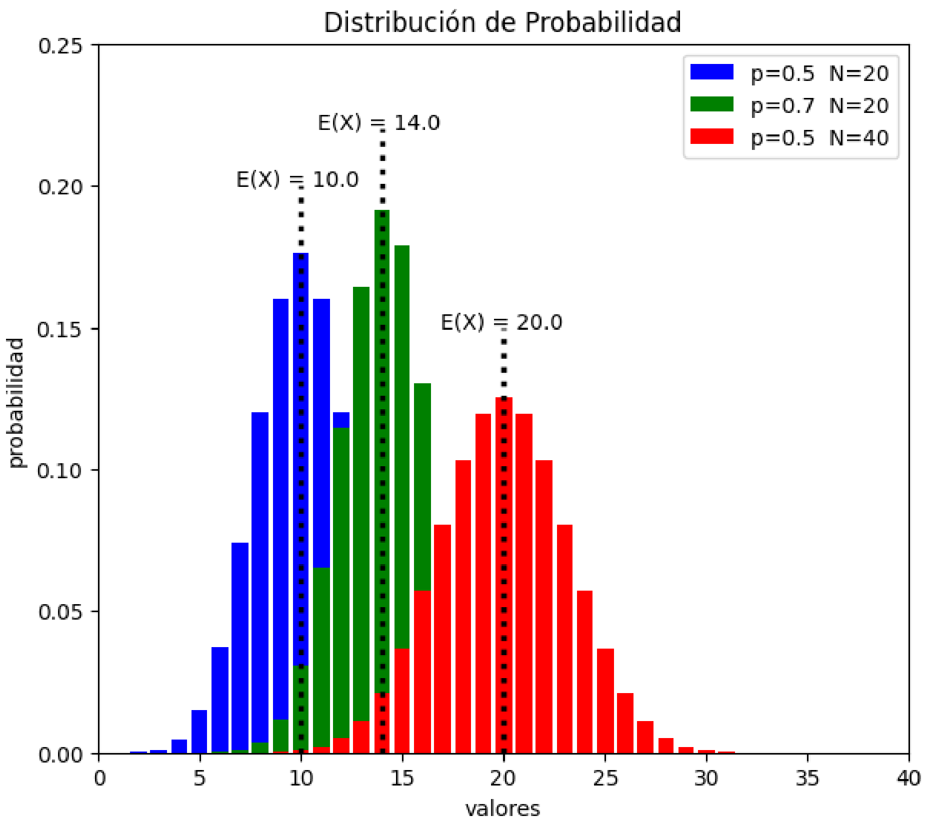
$$\boldsymbol{E(X)} = \mathrm{E}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{E}(x_1)}_{\mathrm{p}} + \underbrace{E(x_2)}_{\mathrm{p}} + \cdots + \underbrace{E(x_n)}_{\mathrm{p}}}_{\text{n veces p}} = \boldsymbol{n * p}$$

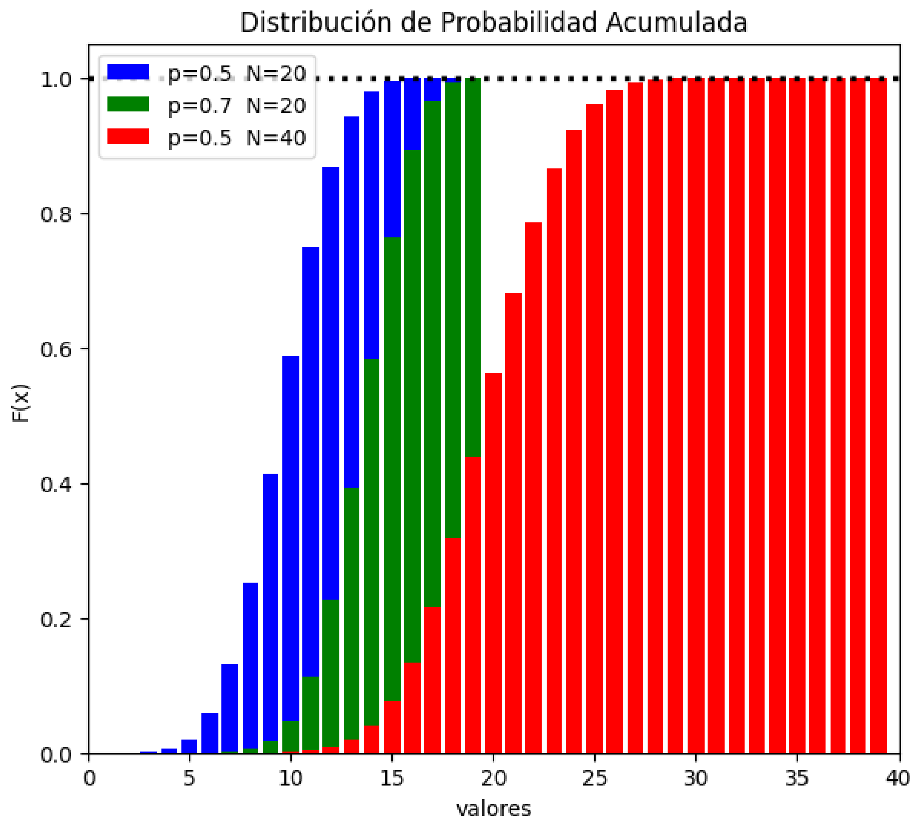
$$\mathbf{V(X)} = \mathrm{V}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{V}(x_1)}_{\mathrm{p(1\text{-}p)}} + \underbrace{V(x_2)}_{\mathrm{p(1\text{-}p)}} + \cdots + \underbrace{V(x_n)}_{\mathrm{p(1\text{-}p)}}}_{\text{n veces p(1-p)}} = \boldsymbol{n * p(1-p)}$$

$$\mathbf{D(X)} = \sqrt{\boldsymbol{V(x)}}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Binomial





- Dominio de **f(x)**: {0;+∞}
- Dominio de **X**: {0;n} cantidad

- Dominio de **F(x)**: {0;1}
- Dominio de **X**: {0;n} cantidad

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

De un conjunto de productos de cierto tipo se seleccionan **6** al azar. Si el **40%** de los productos son defectuosos, defina la variable aleatoria que permita determinar cual es la probabilidad de que no más de 4 de los 6 artículos seleccionados sean defectuosos.

Definimos la VA: X =“cantidad de artículos defectuosos de los 6 seleccionados”

Definimos la cantidad de X: n=6

Definimos la **probabilidad de éxito**: p=0,4

Entonces, X~Bi(6 ; 0,4)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}*p^k*(1-p)^{n-k}$$

Luego:

P(X≤4)= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)=

$$\binom{6}{0}*\ 0{,}4^0*(1-0{,}4)^{6-0}+\binom{6}{1}*\ 0{,}4^1*(1-0{,}4)^{6-1}$$
$$+\binom{6}{2}*\ 0{,}4^2*(1-0{,}4)^{6-2}+\binom{6}{3}*\ 0{,}4^3*(1-0{,}4)^{6-3}+$$
$$\binom{6}{4}*\ 0{,}4^4*(1-0{,}4)^{6-4}=$$
$$0{,}04666+0{,}18662+0{,}31104+0{,}27648+0{,}13824=0{,}95904$$

Rta: la probabilidad de que no más de 4 de los 6 artículos seleccionados sean defectuosos es 95,90%

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

Si en cambio utilizamos la tabla de la Binomial:

$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$

n = 6													
r	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	r
0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	6
1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938	5
2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344	4
3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125	3
4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344	2
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938	1
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156	0
r	0,99	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,67	0,65	0,60	0,55	0,50	r

$$0,0467 + 0,1866 + 0,3110 + 0,2765 + 0,1382 = 0,9590$$

La diferencia es que la tabla muestra solo 4 decimales

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Hipergeométrica

Un experimento es hipergeométrico si satisface las siguientes condiciones:

- ✓ Existe una población N de la cual se toma una muestra de k elementos.
- ✓ En N hay M éxitos y N-M fracasos.
- ✓ Las pruebas no son independientes, es decir, el resultado de una prueba influye sobre el de las otras, dado que no existe reposición.
- ✓ La probabilidad de éxito no se mantiene constante en todas las pruebas.

Entonces, definimos la variable aleatoria X="cantidad de éxitos en las n repeticiones" que sigue una distribución hipergeométrica

$$X \sim H(N;M;n)$$

donde N=cantidad de elementos en al población, M= cantidad de éxitos y n=cantidad de repeticiones, son los parámetros de la distribución

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Hipergeométrica

Función de probabilidad: como no hay independencia entre los ensayos, la probabilidad de ocurrencia de un éxito no es constante. Entonces, en este caso la proporción (o probabilidad) se construye como casos favorables (subconjunto de k éxitos $\binom{M}{k}$ por el subconjunto de n-k fracasos $\binom{N-M}{n-k}$) respecto de todos los subconjuntos que se pueden conformar en la población N que viene dado por $\binom{N}{n}$. De este modo, la función de probabilidad es:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

$$\mathit{Funci\acute{o}n\ de\ probabilidad\ acumulada}\ \mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(X_j \leq \mathrm{k}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

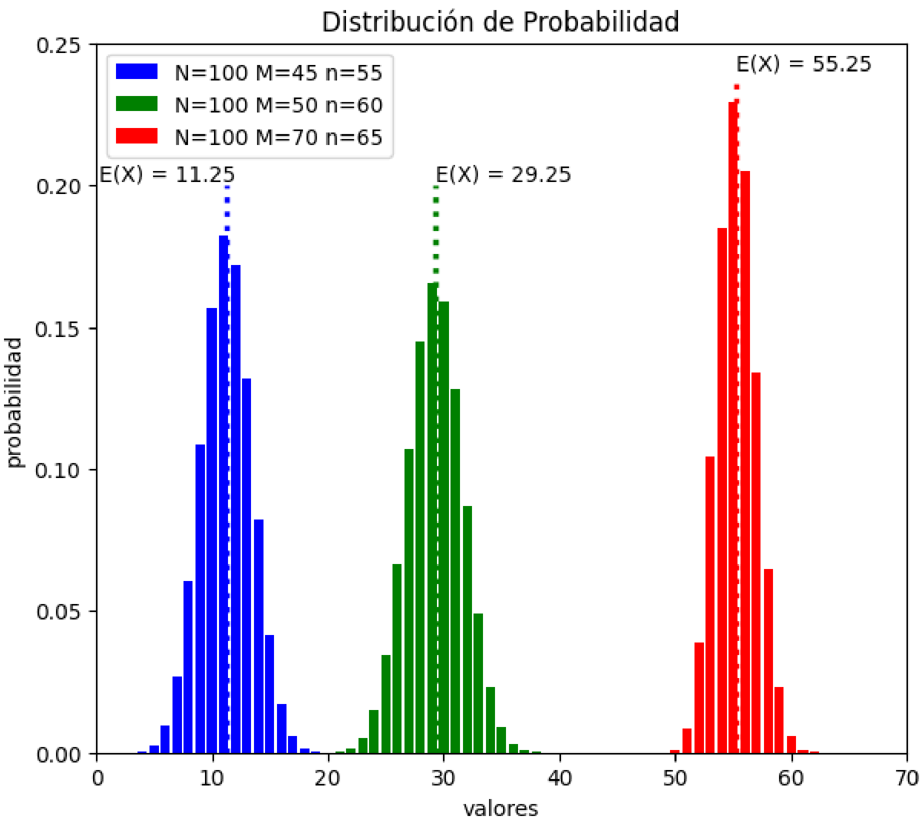
$$\boldsymbol{E(X)} = \mathrm{E}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{E}(x_1)}_{\mathrm{p}} + \underbrace{E(x_2)}_{\mathrm{p}} + \cdots + \underbrace{E(x_n)}_{\mathrm{p}}}_{\text{n veces p}} = n*p = \boldsymbol{n*\frac{M}{N}}$$

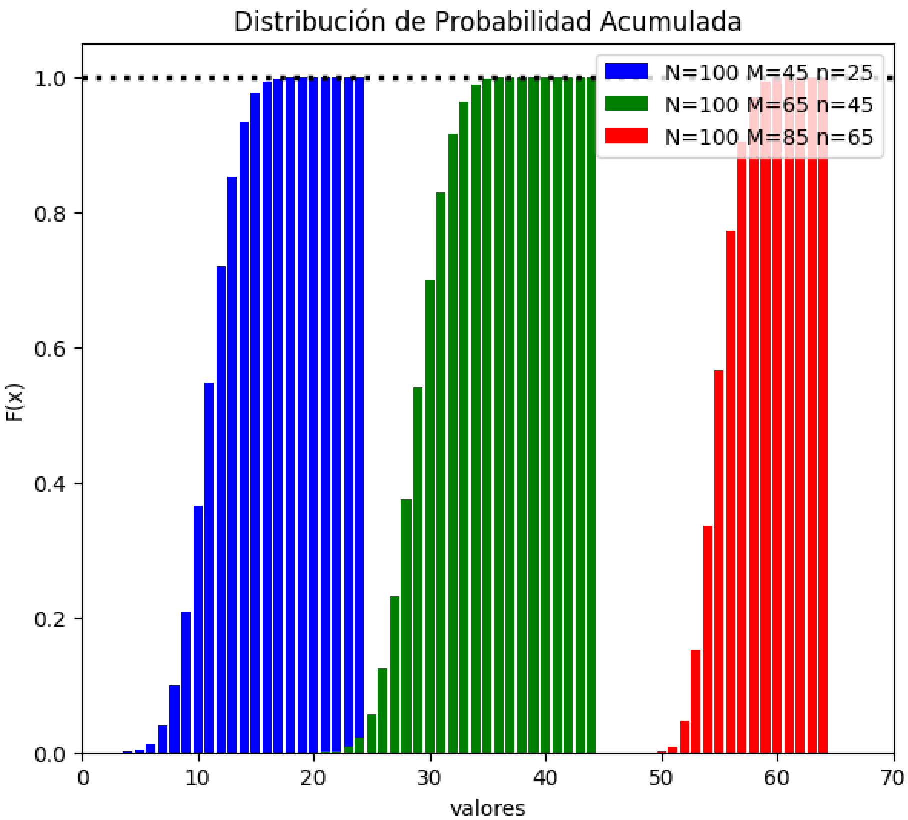
$$\mathbf{V(X)} = \mathrm{V}(x_1 + \cdots + x_n) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{V}(x_1)}_{\mathrm{p(1\text{-}p)}} + \cdots + \underbrace{V(x_n)}_{\mathrm{p(1\text{-}p)}}}_{\text{n veces p(1-p)}} = n*p(1-p) = \boldsymbol{n*\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$\mathbf{D(X)}=\sqrt{\boldsymbol{V(x)}}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Hipergeométrica





- Dominio de **f(x)**: {0;+∞}
- Dominio de **X**: {0;n} cantidad

- Dominio de **F(x)**: {0;1}
- Dominio de **X**: {0;n} cantidad

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

De un grupo de 7 personas, 3 saben alemán. Se elijen 4 para armar un equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 sepan alemán?

Definimos la VA: X =“cantidad de personas que saben alemán de los 4 seleccionadas”

Sabemos N=7, M=3, n=4, k=2

Luego: $$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{7-\mathbf{3}}{4-2}}{\binom{7}{4}}=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}=\frac{\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\,\frac{4!}{2!\,(4-2)!}}{\frac{7!}{4!\,(7-4)!}}=\frac{3*6}{35}=\frac{18}{35}$$

$$=0{,}514285714285\,71$$

Rta: la probabilidad de que 2 personas sepan alemán es 51,43%

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución de Poisson

Un experimento es Poisson si satisface las siguientes condiciones:

- ✓ El experimento ocurre a una **media** (siendo una constante) en el tiempo o espacio.
- ✓ Los eventos ocurren de manera independiente del tiempo o espacio
- ✓ La variable cuenta la cantidad de veces que ocurre un evento considerado exitoso en dicho intervalo

Entonces, definimos la variable aleatoria X="cantidad de casos exitosos en las n repeticiones" que sigue una distribución Poisson

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

donde λ =media, es el parámetro de la distribución

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución de Poisson

Es un caso especial de la distribución binomial.

$Cuando\ en\ la\ función\ de\ probabilidad\ binomial$

$P(X=k)=\binom{n}{k}*\ p^k*(1-p)^{n-k}, n\ tiende\ a\ infinito\ y\ p\ tiendo\ a\ 0, entonces$

E(X) = n*p= λ, es decir, una media constante. => p=$\frac{\lambda}{n}$ Luego:

$$P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}*\ \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\ =\left[\frac{n}{n}*\frac{n-1}{n}*\cdots*\frac{n-k+1}{n}\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Donde $\left[\frac{n}{n}*\frac{n-1}{n}*\cdots*\frac{n-k+1}{n}\right]\to 1\text{ con n}\to\infty$; $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\Rightarrow e^{-\lambda}; \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\to 1\text{ con n}\to\infty$

Luego, la función de probabilidad de Poisson es

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}*\lambda^k}{k!}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución de Poisson

$Función\ de\ probabilidad$:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{k}}{k!}}$$

$Función\ de\ probabilidad\ acumulada$:

$$F(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(X_j \leq \mathrm{k}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{k}}{k!}$$

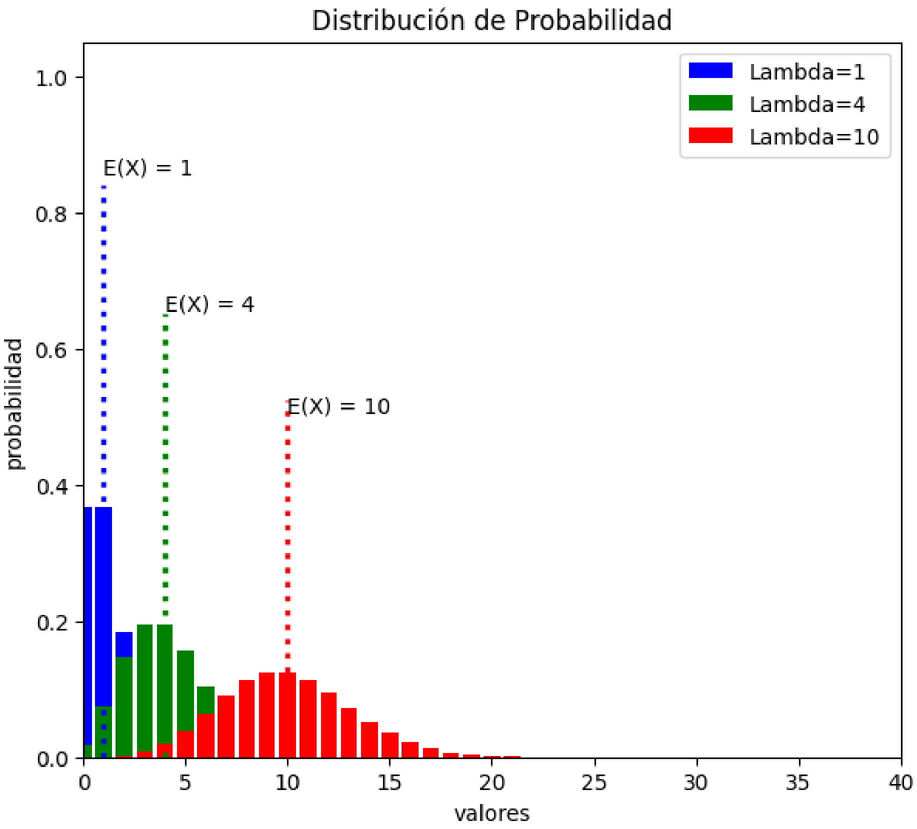
$$E(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{n} x_i * \mathrm{P}(x_i) = \boldsymbol{\lambda}$$

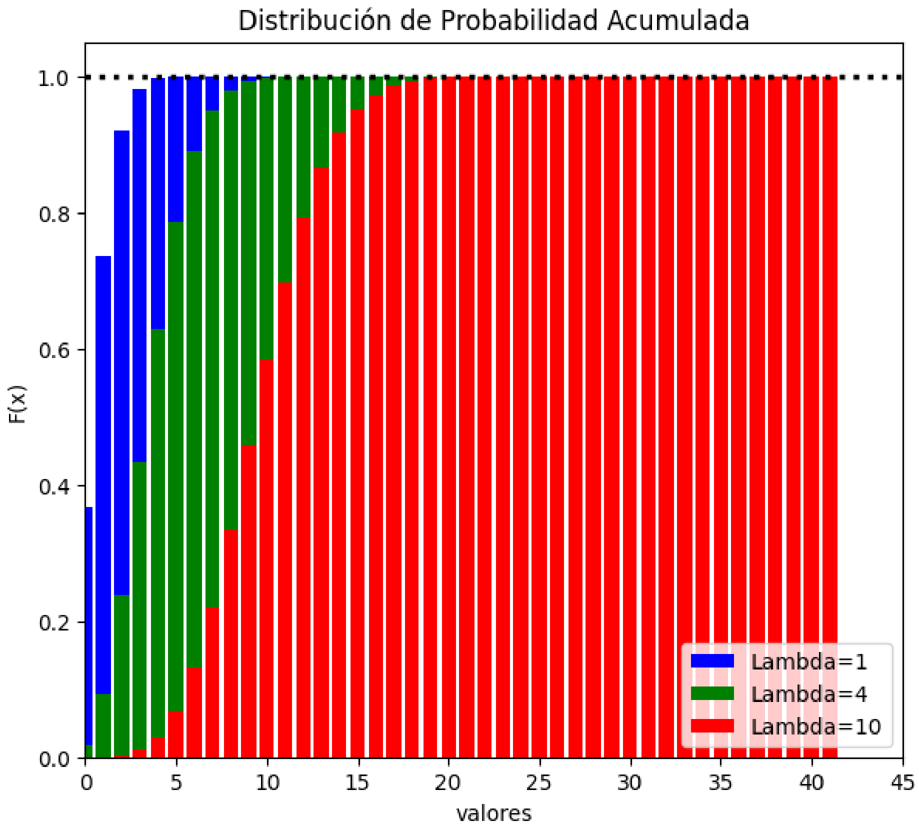
$$\mathrm{V}(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{n} [x_i - E(X)]^{2} * \mathrm{P}(x_i) = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathrm{D(X)} = \sqrt{V(x)}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Poisson





- Dominio de **f(x)**: {0;+∞}
- Dominio de **X**: {0; +∞} cantidad

- Dominio de **F(x)**: {0;1}
- Dominio de **X**: {0; +∞} cantidad

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

En un aeropuerto se acarrea un promedio de 8,5 equipajes por minuto. Determinar la probabilidad de que se transporte 5 unidades de equipaje en un minuto

Definimos la VA: X =“cantidad unidades de equipaje transportada por minuto”
Necesitamos el parámetro lambda, que es 8,5

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{k}}{k!}$$

P(X=5) = $\frac{e^{-8,5} * 8,5^{5}}{5!} = 0,07523$

Rta: la probabilidad de que se transporten 5 unidades de equipaje en un minuto es 7,52%

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

Si en cambio utilizamos la tabla de Poisson:

P(X=5) = 0,0752

r - λ	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
0	0,0067	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0337	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007
2	0,0842	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034
3	0,1404	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107
4	0,1755	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254
5	0,1755	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483
6	0,1462	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764

La diferencia es que la tabla muestra solo 4 decimales

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Geométrica

Definimos la variable aleatoria X="cantidad de ensayos hasta obtener un éxito" que sigue una distribución geométrica

X~G(p)

Donde p=probabilidad de éxito, es el parámetro de la distribución

Función de probabilidad: si repetimos en forma independiente un ensayo Bernulli con una probabilidad de éxito (p) constante, entonces

$$\boldsymbol{P(X = k) = (1 - p)^{\mathrm{k}-1} * p}$$

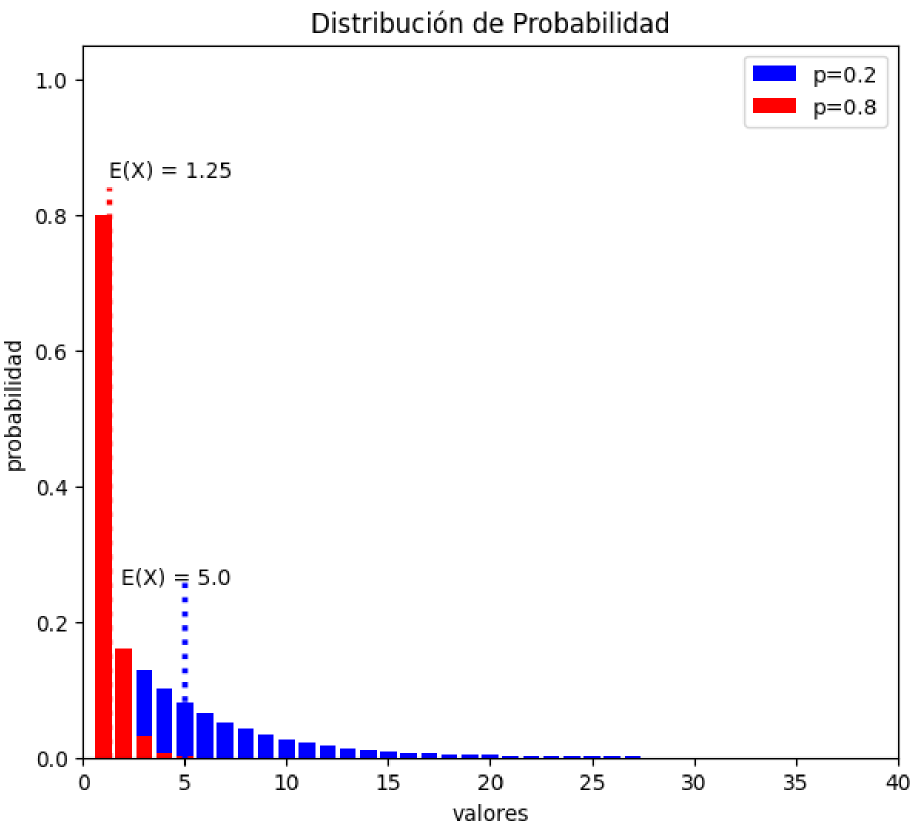
Función de probabilidad acumulada

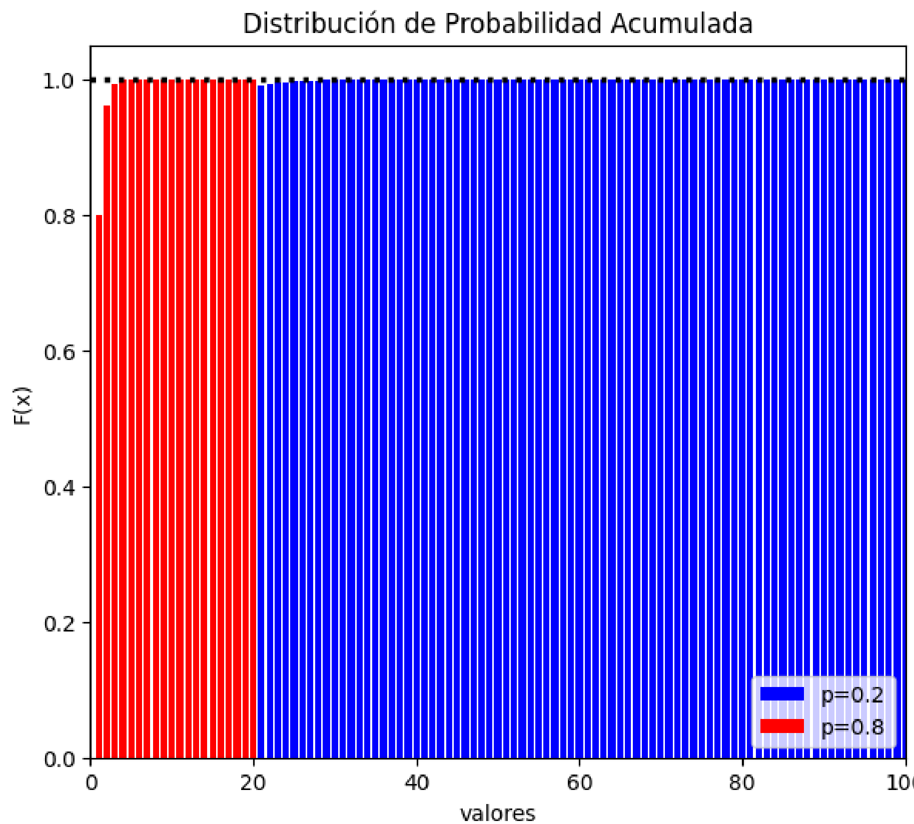
$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}\left(X_j \leq \mathrm{k}\right) = \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{\mathrm{k}-j} * p$$

$$\boldsymbol{E(X)} = \frac{1}{p} \qquad \mathbf{V(X)} = \frac{1-p}{p^2} \qquad \mathbf{D(X)}=\sqrt{\boldsymbol{V(x)}}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución Geométrica





- Dominio de **f(x)**: {0;+∞}
- Dominio de **X**: {1; +∞} éxitos

- Dominio de **F(x)**: {0;1}
- Dominio de **X**: {1; +∞} éxitos

Distribuciones discretas de probabilidad

Ejemplo

La probabilidad de que un vendedor de seguros venda una póliza es 0,05. Suponiendo que las ventas entre domicilios son independientes y como máximo de una unidad, calcular la probabilidad de que venda su primera póliza en la quinta visita. Luego, obtener el número medio de domicilios que visitar para realizar su primera venta.

Definimos la VA: X ="cantidad de visitas a domicilios"

Definimos la **probabilidad de éxito**: p=0,05

Entonces, X~G(0,05)

$$P(X = k) = (1 - p)^{\mathrm{k}-1} * p$$

P(X=5)= $0{,}05^{5-1} * 0{,}05 = 0{,}0407$

Rta: la probabilidad de que venda su primera póliza en la quinta visita es 4,07%

Luego

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

Rta: La cantidad de domicilios que deberá visitar en promedio para realizar su primera venta es 20

Pueden realizar la práctica 2