.UBA ECONÓMICAS

TUGAD
2025

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Jacob Bernoulli
(1655-1705)

Simeon Denis Poisson
(1781-1840)

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- Sólo pueden tomar una cantidad finita o infinita numerable de valores posibles
- *Idea de conteo*

  Incluyen a la variables Categóricas (nominales y ordinales)

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

- de Bernoulli
- Binomial
- de Poisson
- Geométrica
- Hipergeométrica

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Experiencia de Bernoulli

Un **experimento de Bernoulli** es aquel cuyo espacio de resultados tiene dos únicos resultados posibles S = {E ; F}. Se llama:

$$p = P(E) \qquad y \qquad q = P(F) = 1 - p$$

Definición de V.A. de Bernoulli

Se llama **variable aleatoria de Bernoulli** de parámetro p a la variable X que vale 1 si, al realizar un experimento de Bernoulli, se obtiene éxito y vale 0 si se obtiene fracaso. El parámetro p es la probabilidad de éxito.

Recorrido

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{se obtiene E} \\ 0 & \text{si} \quad \text{se obtiene F} \end{cases}$$

Notación

$$X \sim Ber\ (p)$$

Función de Probabilidad Puntual

Valores x_i	0	1
$p(x_i)$	q = 1 - p	p

Esperanza y Varianza

$$E(X) = p \qquad Var(X) = p.(1 - p)$$

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI
EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Para cada experiencia aleatoria, definir la variable de Bernoulli e indicar su parámetro:

1. **Se tira una moneda equilibrada y se considera éxito si sale cara.**
2. **Se arroja un dado equilibrado y se considera éxito si sale el número 6.**
3. **Se elige al azar un empleado de cierta empresa, y se considera éxito si recibe un salario mayor a $k.**

https://youtu.be/yR_3iRjHzg4?si=xO6_0p1NFXe8INCE

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Definición de V.A. Binomial

Se llama **variable aleatoria Binomial** de parámetros m y p, al número de éxitos obtenidos en m repeticiones independientes de un experimento de Bernoulli en el que p es la probabilidad de éxito..

X = número de éxitos en **m** repeticiones **independientes** de un experimento de Bernoulli

Recorrido

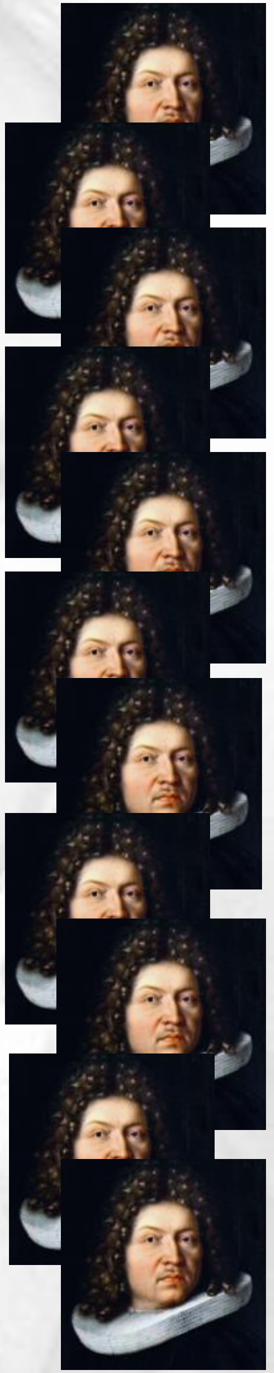
$R_X: \{0,1,2,\ldots,m\}$

Notación

$X \sim Bi\ (m,p)$

Supuestos o Condiciones del modelo Binomial

1. Dicotomía de resultados
2. Independencia entre m repeticiones
3. Estabilidad de la probabilidad de éxito p



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Función de Probabilidad Puntual

Si X es una variable aleatoria binomial $X \sim B(m\,;\,p)$, su recorrido es:

$$R_X = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,m\}$$

la **función de probabilidad de X** es la función:

$$p: R_X \longrightarrow R$$

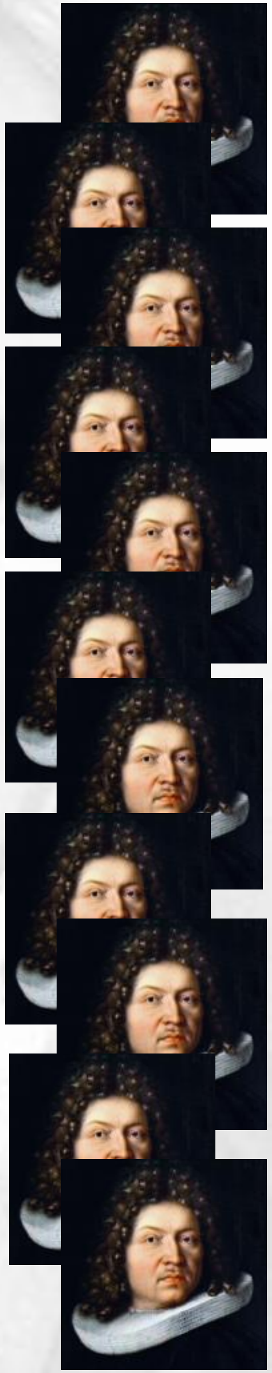
tal que a cada valor k del recorrido de X, $0 \leq k \leq m$, le asigna la probabilidad:

$$p(k) = p(X = k) = \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot q^{m-k}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

Esperanza y Varianza

$$E(X) = m.p \qquad Var(X) = m.p.(1-p)$$



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

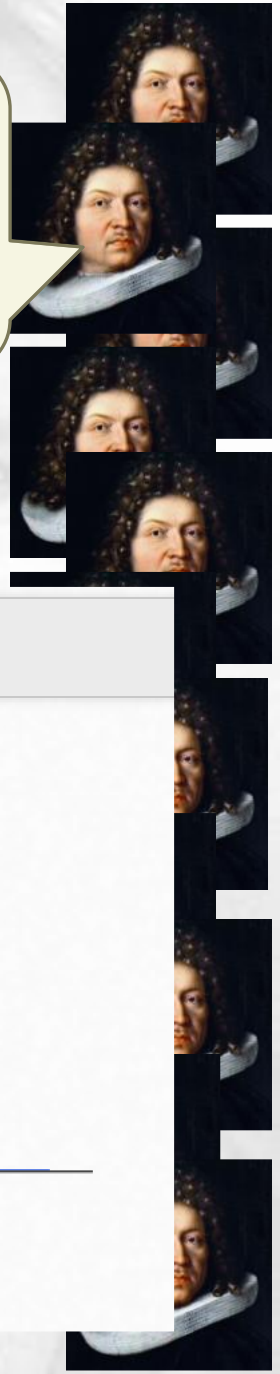
EJEMPLO INTRODUCTORIO

En una población, la probabilidad de que una persona sea fumadora vale 0,20.
Si se eligen tres individuos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sólo uno sea fumador?

https://youtu.be/yR_3iRjHzg4?si=xO6_0p1NFXe8INCE

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL
EJEMPLO INTRODUCTORIO

¿Cuántos éxitos en *m* repeticiones independientes?



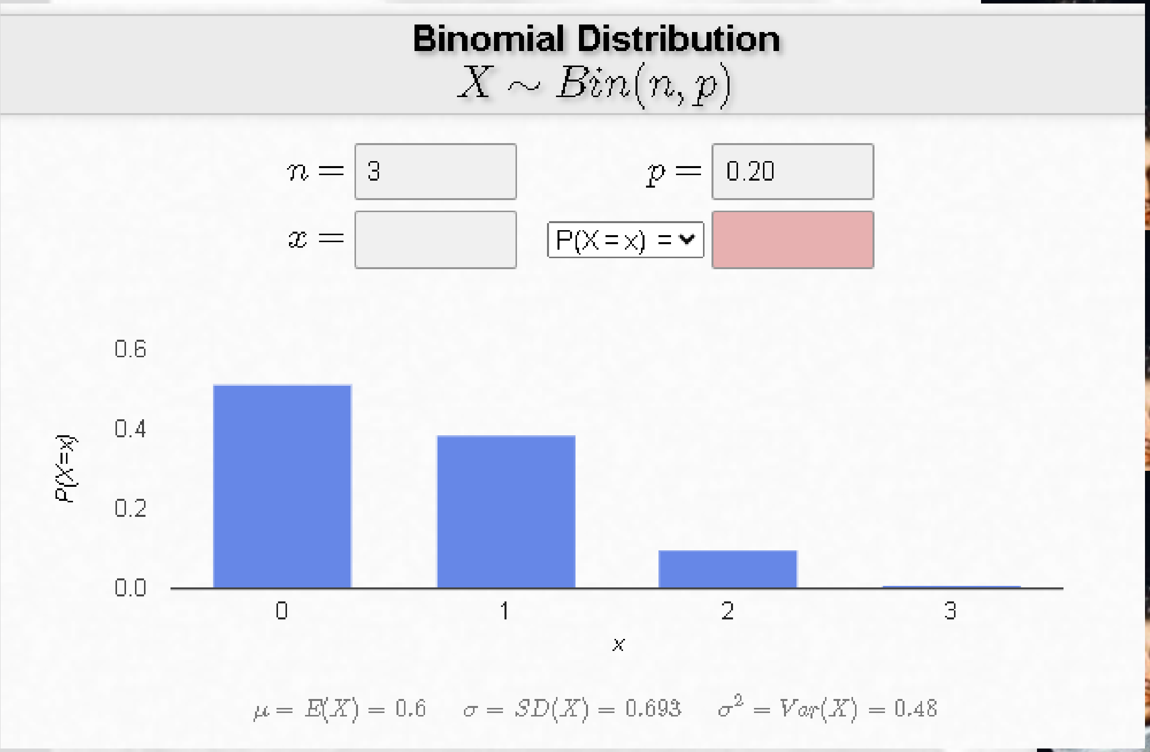
En una población, la probabilidad de que una persona sea fumadora vale 0,20.
Si se eligen tres individuos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sólo uno sea fumador?

$$p(k) = p(X = k) = \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot q^{m-k}$$

Función de probabilidad puntual

n = 3													
r	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,33**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**r**
0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250	**3**
1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750	**2**
2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750	**1**
3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250	**0**
r	**0,99**	**0,95**	**0,90**	**0,85**	**0,80**	**0,75**	**0,70**	**0,67**	**0,65**	**0,60**	**0,55**	**0,50**	**r**

Representación gráfica



DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Definición de V.A. de Poisson y Función de Probabilidad Puntual

Se dice que una variable X es una **variable aleatoria de Poisson** de parámetro λ si su recorrido es: $R_X = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$ y su función de probabilidad es:

$$p(k) = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{con } k = 0 ; 1 ; 2 ; \dots \text{ y } \quad \lambda > 0$$

Recorrido

$$R_X : \{0,1,2,3, \dots .\}$$

Notación

$$X \sim P\ (\lambda)$$

Esperanza y Varianza

$$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Supuestos o Condiciones del modelo de Poisson

1. Si se consideran dos intervalos disjuntos, el número de ocurrencias en uno de ellos es independiente del número de ocurrencias en el otro.
2. Las probabilidades de un determinado número de ocurrencias en dos intervalos que miden lo mismo son iguales.
3. Si el intervalo es pequeño:

   a) la probabilidad de una sola ocurrencia es proporcional a lo que mide el intervalo.

   b) la probabilidad de más de una ocurrencia es despreciable comparada con la probabilidad de una sola.
4. Teóricamente, debe ser posible que haya un número de ocurrencias tan grande como se quiera en el intervalo considerado.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

¿Cuántas ocurrencias en un continuo?

DISTINTOS MODELOS

TEMPORAL

Continuo acotado: ***tiempo***

La ***intensidad*** **(C)** es constante. Indica la cantidad de ocurrencias en la unidad de tiempo.

$$\lambda = C\,.\,t$$

ESPACIAL

Continuo acotado: ***volumen, área, masa***

La ***densidad*** ***(D)*** es constante. Indica la cantidad de ocurrencias por unidad de volumen o área.

$$\lambda = D\,.\,v$$

$$\lambda = D\,.\,a$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON
EJEMPLO INTRODUCTORIO

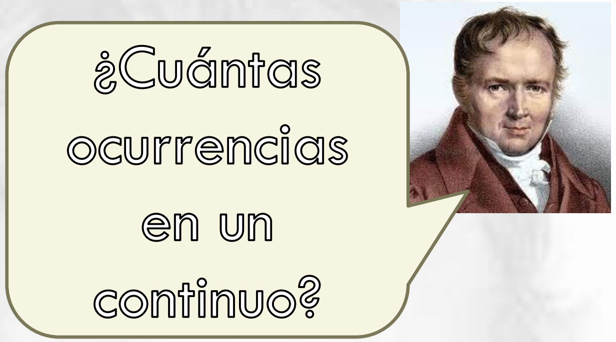
¿Cuántas ocurrencias en un continuo?

Una cadena de comida rápida vende, en promedio, tres combos cada cinco minutos.
Calcular:

a. **La probabilidad de vender más de diez combos en los próximos quince minutos.**
b. **El número esperado de combos vendidos en la próxima hora.**

https://youtu.be/GbtWNEe4k4Y?si=trApB6IlydHXtenC

DISTRIBUCIÓN DE POISSON
EJEMPLO INTRODUCTORIO



Una cadena de comida rápida vende, en promedio, tres combos cada cinco minutos.
Calcular:

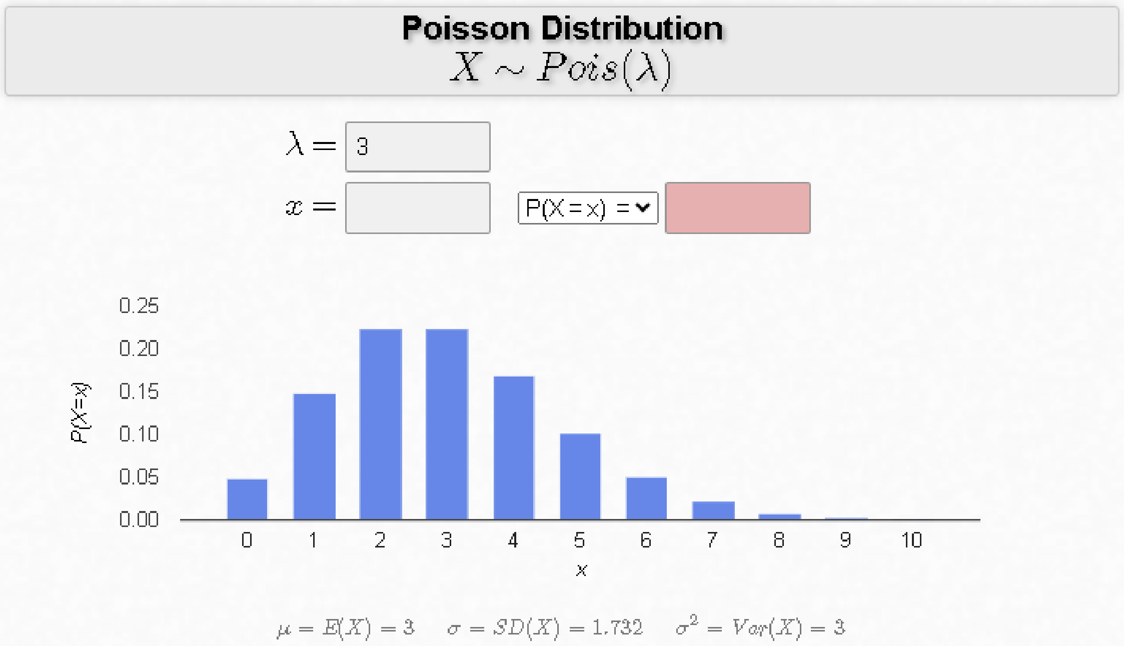
a. **La probabilidad de vender más de diez combos en los próximos quince minutos.**
b. **El número esperado de combos vendidos en la próxima hora.**

$$p(k) = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Función de probabilidad puntual

r - λ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0023	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0076	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0189	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000
5	0,0378	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001
6	0,0631	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0002
7	0,0901	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0005
8	0,1126	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0013
9	0,1251	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0029
10	0,1251	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0058
11	0,1137	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0106

Representación gráfica



DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Definición de V.A. Geométrica

La variable aleatoria X sigue una distribución geométrica, si cuenta el número de ensayos de Bernoulli a realizar hasta obtener el primer éxito.

Recorrido

$R_X: \{1,2, \dots, k\}$

Notación

$X \sim G\ (p)$

Supuestos o Condiciones

1. Dicotomía de resultados
2. Independencia entre k repeticiones
3. Estabilidad de la probabilidad de éxito p

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

¿Cuántos ensayos hasta obtener un éxito?

Función de Probabilidad Puntual

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p$$

Función de Distribución

$$F(x) = P(X_j \leq k) = \sum_{j=1}^{k-1} (1 - p)^{k-j} * p$$

Esperanza y Varianza

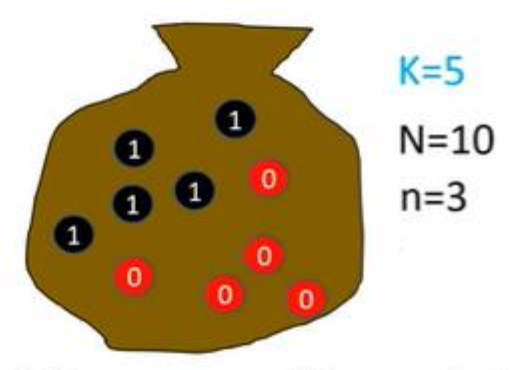
$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Abraham de Moivre (1667-1754)

Supuestos o Condiciones del modelo Hipergeométrico

1. La población finita a muestrear consta de N elementos, de los cuales M son éxitos y $N - M$ son no éxitos.
2. Dicotomía de resultados.
3. Se extrae una muestra **sin reposición** de tamaño n, de forma que cualquier subconjunto de ese tamaño tiene la misma probabilidad de ser elegido.



Notación

$$X \sim H\ (M, N, n)$$

Parámetros

M: Cantidad de éxitos en la población
N: Tamaño de la población
n: Tamaño de la muestra

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

¿Cuántos éxitos en n repeticiones NO independientes?

Función de Probabilidad Puntual

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$donde\ k = 0,1,2, \ldots , n \ \ y\ n \leq N$$

Esperanza y Varianza

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

$$Var(X) = n\frac{M}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA
EJEMPLO DE APLICACIÓN

¿Cuántos éxitos en *n* repeticiones NO independientes?

Un profesor universitario desea conocer el grado de compromiso de sus estudiantes. Para ello le pide a los 30 estudiantes que componen su curso que hagan cierta actividad. Como es un curso cumplidor y esforzado, 24 de ellos realizan la tarea asignada. Si el docente releva a 10 estudiantes al azar, calcular la probabilidad de que en dicho grupo haya:

a) 5 estudiantes que hayan cumplido la consigna

b) 3 que no la hayan cumplido

c) mínimo 4 con la labor realizada

d) ¿Cuántos estudiantes espera que hayan cumplido la consigna?

https://youtu.be/Gk-DRcISQDY?si=aTiO_R_Mg49pEhui

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA
EJEMPLO DE APLICACIÓN

¿Cuántos éxitos en *n* repeticiones NO independientes?

Un profesor universitario desea conocer el grado de compromiso de sus estudiantes. Para ello le pide a los 30 estudiantes que componen su curso que hagan cierta actividad. Como es un curso cumplidor y esforzado, 24 de ellos realizan la tarea asignada. Si el docente releva a 10 estudiantes al azar, calcular la probabilidad de que en dicho grupo haya:

a) 5 estudiantes que hayan cumplido la consigna

b) 3 que no la hayan cumplido

c) mínimo 4 con la labor realizada

d) ¿Cuántos estudiantes espera que hayan cumplido la consigna?

Representación gráfica