.UBA económicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Análisis Estadístico I

Probabilidad

Natalia SALABERRY

Introducción

Fenómeno

Determinístico

Si se sabe con certeza cuál será su comportamiento

(bajo las mismas condiciones produce siempre el mismo resultado)

Aleatorio

Cuando no podemos afirmar con certeza cuál será su comportamiento

INCERTIDUMBRE

Ejemplo

Seguro de vida → Pago del monto asegurado →

Se conoce que el pago se realizará cuando suceda el fallecimiento (determinístico)

No se sabe cuándo sucederá el evento (aleatorio)

Introducción

Nunca podrá obtenerse un 100% de seguridad sobre una proposición que se base en la inferencia estadística. Sin embargo, lo que hace que la Estadística sea una ciencia es que, unida a cada proposición, existe una medida de la **probabilidad** de ocurrencia de esta.

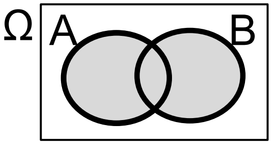
En Estadística la confiabilidad se mide en términos de probabilidad. Es decir, para cada inferencia estadística se identifica la probabilidad de que la inferencia sea correcta.

Espacio Muestral – Eventos

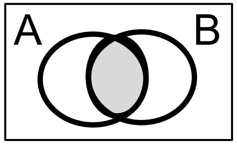
Espacio Muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar al realizar un experimento.
Evento simple: cada uno de los posibles resultados considerados individualmente. Es decir, cada uno de los elementos del espacio muestral.
Evento compuesto: conjunto de eventos simples.

Operaciones
Dados dos eventos A y B de un espacio muestral podemos definir nuevos eventos que se obtienen al aplicar las siguientes operaciones.

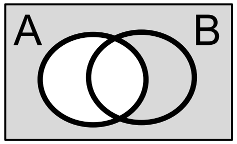
- **Unión:** $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ó } x \in B\}$



- **Intersección:** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \Omega \;/\; x \in A \;\boldsymbol{y}\; x \in B\}$



- **Complemento de A:** $\boldsymbol{A^c} = \{x \in \Omega \;/\; x \notin A\}$



Espacio Muestral – Eventos

Ejemplo: Si se tira un dado,

El espacio muestral son los posibles resultados $\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$

El evento A: "sale el numero 3" es un evento simple => $\mathbf{A} = \{\mathbf{3}\}$

El evento B: "sale el numero impar" es un evento compuesto => $\mathbf{B} = \{\mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

El evento C: "sale un numero par" es un evento compuesto => $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}$

Operaciones

Dados dos eventos A y B de un espacio muestral podemos definir nuevos eventos que se obtienen al aplicar las siguientes operaciones.

- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$ *ya que A está incluído en B*
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} = \{\mathbf{3}\}$ ya que 3 es el elemento en común entre A y B
- $\mathbf{A} \cup \boldsymbol{C} = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}$ todos los elementos de ambos
- $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{C} = \emptyset$ *ya que no hay elementos en común* => **Mutuamente excluyentes**
- $\mathbf{B} \cup \boldsymbol{C} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$ *es decir, todo el espacio muestral*
- $\mathbf{B} \cap \boldsymbol{C} = \emptyset$ *ya que no hay elementos en común* => **Mutuamente excluyentes**
- $\boldsymbol{A^c} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$
- $\boldsymbol{B^c} = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}$
- $\boldsymbol{C^c} = \{\mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

Definiciones de Probabilidad

Definición Clásica o De Laplace:

Si el espacio muestral es finito y sus elementos equiprobables (tienen la misma probabilidad de ocurrencia), entonces la probabilidad de un evento A es el cociente entre la cantidad de casos favorables del evento A y la cantidad de casos posibles.

$$P(A) = \frac{cantidad\ casos\ favorables\ de\ A}{cantidad\ de\ casos\ posibles\ (\boldsymbol{\Omega})}$$

Ejemplo:

Se tiran **dos dados**. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

1. Evento A: “Salen dos números iguales”
2. Evento B: “El segundo número es mayor estricto que el primero”
3. Evento C: “La suma de los dados es 6”

Definimos el espacio muestral:

$$\Omega = \left\{(a,b)/(a,b) \in \{1,2,3,4,5,6\}\right\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

El espacio muestral tiene 36 elementos => los resultados posibles son 36

Definiciones de Probabilidad

1. Evento A: "Salen dos números iguales"

$$A = \{(1{,}1), (2{,}2), (3{,}3), (4{,}4), (5{,}5), (6{,}6)\}$$

Entonces, los resultados favorables son 6.

Por lo tanto, la probabilidad de A es:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Rta: la probabilidad de obtener dos números iguales al tirar dos dados es 1/6

2. Evento B: "El segundo número es mayor estricto que el primero"

$$B = \left\{(a,b)/(a < b), (a,b) \in \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}\right\}$$

Veamos los pares que podemos formar siempre que se cumpla a<b:

$\{(1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6)\}$ => 5 casos favorables

$\{(2{,}3), (2{,}4), (2{,}5), (2{,}6)\}$ => 4 casos favorables

$\{(3{,}4), (3{,}5), (3{,}6)\}$ => 3 casos favorables

$\{(4{,}5), (4{,}6)\}$ => 2 casos favorables

$\{(5{,}6)\}$ => 1 caso favorable

Entonces tenemos 15 casos favorables => $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ Rta: la probabilidad de que el segundo número es mayor estricto que el primero es 5/12

Definiciones de Probabilidad

3. Evento C: "La suma de los dados es 6"

Para ver cuáles son los eventos de C podemos construir una tabla con todos los resultados posibles del siguiente modo:

D1/D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$C = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$=> los casos favorables son 5

Por lo tanto, la probabilidad de C es:

$$P(C) = \frac{5}{36}$$

Rta: la probabilidad de que la suma de los dados sea 6 es 5/36

Definiciones de Probabilidad

Ejemplo: En un grupo de 100 individuos, 30 son contadores, 20 administradores, 15 economistas, 8 actuarios, 5 profesionales de sistemas de información y 22 no tienen profesión. Para un individuo elegido al azar, calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

1. Evento A: "Tiene profesión"
2. Evento B: "No tiene profesión"
3. Evento C: "Es administrador"

$\Omega = \{100\}$ El espacio muestral tiene 100 individuos => los resultados posibles son 100

1. $P(A) = \frac{30+20+15+8+5}{100} = \frac{78}{100} = 0{,}78$ Rta: La probabilidad de elegir un individuo que tenga una profesión es 78%

2. $P(B) = \frac{22}{100} = 0{,}22$ Rta: La probabilidad de elegir un individuo que no tenga una profesión es 22%

3. $P(C) = \frac{20}{100} = 0{,}20$ Rta: La probabilidad de elegir un individuo que sea administrador es 20%

Definiciones de Probabilidad

Definición Frecuentista:

Sea N el número de veces que se observa un evento determinado y m el número de veces en que ocurre un resultado favorable al evento A. La probabilidad de ocurrencia del evento A es la frecuencia relativa observada cuando el número total de observaciones crece indefinidamente:

$$P(A) = \lim_{N \to +\infty} \frac{m}{N}$$

Ejemplo:

Consideremos los datos acerca de la distribución por grupos quinquenales de la población argentina en el año 2019, publicados por el INDEC. La población total fue de 44.938.712 de habitantes:

Edad	Frecuencia
0-4	3.726.162
5-9	3.743.931
10-14	3.542.513
15-19	3.508.965
20-24	3.548.389
25-29	3.522.333
30-34	3.287.553
35-39	3.141.871
40-44	3.027.334
45-49	2.579.461
50 y más	11.310.200

Definiciones de Probabilidad

Si elegimos al azar un habitante de Argentina:

- Evento A: La probabilidad de que tenga entre 20 y 24 años es:

$$P(A) = \frac{3548389}{44938712} = 0,08$$

- Evento B: La probabilidad de que tenga menos de 15 años es:

$$P(B) = \frac{3726162 + 3743931 + 3542513}{44938712} = \frac{11012606}{44938712} = 0,245$$

- Evento C: La probabilidad de que tenga entre 40 y 50 años es:

$$P(C) = \frac{3027334 + 2579461}{44938712} = \frac{5606795}{44938712} = 0,12$$

Definiciones de Probabilidad

Definición Axiomática:

Dado un espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$ llamamos medida de probabilidad a una función P que satisface:

- *Si A es un evento cualquiera del* $\boldsymbol{\Omega}$, *entonces* $P(A) \geq 0$.

- $P(\boldsymbol{\Omega}) = 1$ *La probabilidad del espacio muestral es 1*

- $Sean A_{1,\dots} A_n$ *una colección finita o infinita numerable de eventos mutuamente excluyentes* $(A_i \cap A_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j)$ *entonces*:

$$P\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} P(A_n)$$

Definiciones de Probabilidad

Definición Axiomática:

Consecuencias:

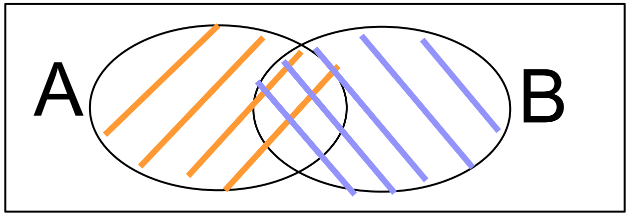
- Si B está incluido en A entonces P(B) ≤ P(A)
- **P(A^c)=1-P(A)**

  Demostración: sea A un evento del espacio muestral:

$$P(\boldsymbol{\Omega}) = 1$$
$$P(\mathrm{A} \cup A^c) = 1$$
$$= P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

- **P(Ø) $= \mathbf{0}$**

  Demostración: P(Ø) $= 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(\boldsymbol{\Omega}) = 1 - 1 = 0$



- **P(A ∪ $\boldsymbol{B}$)**=P(A) + P(B) –P(A∩B)

  Demostración:

A ∪ B=A ∪ (B-A)=A ∪ (B ∩ A^c) => P(A ∪ B)=P(A ∪ (B-A))=P(A) + P(B ∩ A^c) (1)

B= (B ∩ A) ∪ (B ∩ A^c) => P(B)= P(B ∩ A) ∪ P(B ∩ A^c) =>P(B ∩ A^c)=P(B) - P(B ∩ A) (2)

Entonces, reemplazando (2) en (1): P(A ∪ B)= P(A) + P(B) - P(B ∩ A)

Definiciones de Probabilidad

Ejemplo:

Se elige al azar un estudiante de una universidad. La probabilidad de que el/la estudiante seleccionado tenga tarjeta de crédito Visa es 0,5; la probabilidad de que tenga una MasterCard es 0,4 y la probabilidad de que tenga las dos es 0,25.

1. Calcular la probabilidad de que el/la estudiante seleccionado tenga al menos una de las dos tarjetas.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el/la estudiante no tenga ninguna de las dos tarjetas?
3. Calcular la probabilidad de que el/la estudiante tenga una tarjeta Visa pero no una MasterCard.

Definimos:

Evento A: “el/la estudiante tiene una tarjeta Visa” => $P(A)=0,5$

Evento B: “el/la estudiante tiene una tarjeta MasterCard” => $P(B)=0,4$

Definiciones de Probabilidad

1. Podemos representar el evento "el/la estudiante tiene al menos una de las dos tarjetas" como $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ya que tiene la tarjeta Visa **O** la tarjeta MasterCard **O** las dos.

Que tenga tarjeta Visa Y MasterCard corresponde a $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ y sabemos que P($\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$)=0,25
Entonces:
P($\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$)= P(A) + P(B) - P($\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$)=0,5 + 0,4 -0,25 = **0,65**
La probabilidad de que un estudiante tenga al menos una de las dos tarjetas es 0,65.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el/la estudiante no no tenga ninguna de las dos tarjetas?
Si el evento A lo definimos como "el/la estudiante tiene una tarjeta Visa" entonces $A^{\boldsymbol{c}}$= "el/la estudiante no tiene una tarjeta Visa"
Y lo mismo en el caso del evento B entonces $B^{\boldsymbol{c}}$= "el/la estudiante no tiene una tarjeta MasterCard"

Luego, queremos calcular "que no tenga una Y no tenga la otra":
P($A^{\boldsymbol{c}} \cap B^{\boldsymbol{c}}$)= 1- P($\mathrm{A} \cup B$)=1-0,65=**0,35**
La probabilidad de que un estudiante no tenga ninguna de las dos tarjetas es 0,35.

Definiciones de Probabilidad

3. El evento “el/la estudiante mno tiene una tarjeta Visa pero no una MasterCard" corresponde a $A \cap B^{c}$

Sabemos que A= (A ∩ B) ∪ ($A \cap B^{c}$)

=> P(A) = P (A ∩ B) + P($A \cap B^{c}$) => P($A \cap B^{c}$)= P(A) - P (A ∩ B) = 0,5 – 0,25 = 0,25

La probabilidad de que un estudiante tenga una tarjeta Visa pero no una MasterCard es 0,25

Probabilidad Conjunta

Definición

Sea un evento A que surge como resultado de la intersección de los eventos A_1, A_2,…, A_n, es decir: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$=A

La probabilidad conjunta de los eventos es:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A)$$

Ejemplo:

Consideremos el lanzamiento de un dado. La probabilidad del evento A = “el resultado está entre 2 y 4, ambos inclusive” está dada por:

$$P(A) = P(2)+P(3)+P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Definamos los siguientes eventos simples:

A_1 = “el resultado es mayor o igual a 2”,

A_2 = “ el resultado es menor o igual a 4”.

Claramente podemos ver qué A= $A_1 \cap A_2$.

De este modo, la probabilidad conjunta de los eventos A_1 y A_2 está dada por:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad Marginal

Definición

La Probabilidad Marginal es simplemente la probabilidad de ocurrencia de un evento A, sin pensar en la existencia de otro evento B que suceda de modo simultáneo con A.

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo anterior, la Probabilidad Marginal de cada uno de los eventos es:

A_1 = "el resultado es mayor o igual a 2"

P(A_1)= P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)= $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}= \frac{5}{6}$

A_2 = " el resultado es menor o igual a 4"

P(A_2)= P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$

Probabilidad Condicional

Definición

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral Ω. La probabilidad de que se produzca el evento A "condicionada a que" (o sabiendo que) ocurrió el evento B, P(A/B), es el cociente entre la probabilidad conjunta y la probabilidad del evento conocido:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ siendo } P(B)>0$$

Ejemplo:

Consideremos el lanzamiento de dos dados. El resultado del primero de ellos se denotará por d_1 y el resultado del segundo por d_2.

La probabilidad de que la suma de los dos dados sea 3, sabiendo que el resultado del primer dado fue 2 es:

$$P(d_1+d_2=3/d_1=2)=\frac{P(d_1+d_2=3\ \cap\ d_1=2)}{P(d_1=2)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

Ejemplo:

A los habitantes de una ciudad se les hizo una encuesta con el propósito de determinar la cantidad de lectores de las revistas A y B. Los resultados fueron los siguientes: el 7% lee la revista A, el 5% la revista B y el 1% ambas revistas.

1. Si se selecciona al azar un lector de la revista A, ¿cuál es la probabilidad que también lea la revista B?

2. Si se selecciona al azar un lector de la revista B, ¿ cuál es la probabilidad que también lea la revista A?

Definimos:

A: "encuestados que leen la revista A" => P(A) = 0,07

B: "encuestados que leen la revista B" => P(B)= 0,05

Además $\mathrm{P}(A \cap B)$=0,01

1. P(B/A) = $\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,07} = 0,143$ es la probabilidad de que un lector de la revista A también lea la revista B es 0,143

2. P(A/B) = $\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$ es la probabilidad de que un lector de la revista B también lea la revista A es 0,2

Independencia Estadística

Definición

Dos eventos A y B son estadísticamente independientes **si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro**, es decir, que:

$$P(A/B)=P(A)$$

Propiedad: A y B son dos eventos estadísticamente independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Esto es, la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales.

Ejemplo:

Se extraen dos bolillas al azar **con reposición** de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bolilla blanca y segundo una bolilla azul?

Definimos los eventos:

A : primero sale una bolilla blanca y B : segundo sale una bolilla azul.

Entonces $P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{3}{10} * \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$

Regla del Producto

Definición

Dado dos eventos A y B tales que P(B)>0 :

$$P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)$$

Si tenemos más eventos, A_1, A_2, A_3, tales que P(A_1)>0 y $P(A_1 \cap A_2)$ >0 :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3/A_1 \cap A_2) * P(A_2/A_1) * P(A_1)$$

Ejemplo:

Se extraen dos bolillas al azar **sin reposición** de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bolilla blanca y **segundo** una bolilla azul?

Definimos los eventos:

A : primero sale una bolilla blanca y

B : segundo sale una bolilla azul.

Entonces

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A) = \frac{7}{9} * \frac{3}{10} = \frac{21}{90}$$

Por lo tanto, utilizo la regla del producto cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento *se ve <u>afectada</u>* por la probabilidad de ocurrencia de otro evento

Ley de Probabilidad Total

Definición

Sea A_1, A_2,…, A_n sucesos mutuamente excluyentes ($A_i \cap A_j$=∅ para todo i≠j) y colectivamente exhaustivos (Ω= A_1 ∪ A_2 ∪ … ∪ A_n). Entonces para cualquier evento B:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

Luego:

$$P(B) = P(B/A_1) * P(A_1) + P(B/A_2) * P(A_2) + \cdots + P(B/A_n) * P(A_n)$$

Por lo tanto, utilizo la ley de probabilidad total cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento *DEPENDE de* la ocurrencia de cada uno de los otros eventos

Ejemplo:

Una cadena de venta de electrodomésticos vende 3 marcas de televisores. De sus ventas de televisores, el 50% son de la marca 1, el 30% de la marca 2 y el resto de la marca 3. Cada fabricante ofrece un año de garantía. Se sabe que el 25% de los televisores de marca 1 necesita reparación estando en garantía, mientras que los porcentajes correspondientes a las marcas 2 y 3 son 20% y 10% respectivamente.

Ley de Probabilidad Total

Definimos los eventos:

A_i: el televisor es de la marca i

B: el televisor necesita reparación estando en garantía

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elegido al azar haya comprado un televisor de la marca 1 que necesite reparación mientras está en garantía?

$P(A_1 \cap B)$ =$P(B/A_1)*P(A_1)$=0,25*0,5=0,125

Rta: la probabilidad de que un televisor que es de la marca 1 necesite reparación estando en garantía es 0,125

2. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elegido al azar tenga un televisor que requiera reparación mientras está en garantía?

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) =$$

$$P(B/A_1)*P(A_1) + P(B/A_2)*P(A_2) + P(B/A_3)*P(A_3)$$

$$= 0{,}25*0{,}5+0{,}2*0{,}3+0{,}1*0{,}2 = 0{,}205$$

Rta: la probabilidad de que un comprador tenga un televisor que necesite reparación estando en garantía es 0,205

Teorema de Bayes

Definición

Dado un suceso B y n eventos A_1, A,..., A_n mutuamente excluyentes ($A_i \cap A_j$=Ø para todo i≠j) y colectivamente exhaustivos ($\Omega= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$). Entonces la probabilidad de cualquiera de los eventos A_j condicionado al evento B puede calcularse como :

$$P(A_j/B)=\frac{P(B/A_j)*P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)*P(A_j)}$$

Ejemplo:

Una cadena de venta de electrodomésticos vende 3 marcas de televisores. De sus ventas de televisores, el 50% son de la marca 1, el 30% de la marca 2 y el resto de la marca 3. Cada fabricante ofrece un año de garantía. Se sabe que el 25% de los televisores de marca 1 necesita trabajo estando en garantía, mientras que los porcentajes correspondientes a las marcas 2 y 3 son 20% y 10% respectivamente.

Si un cliente vuelve con un televisor que necesite reparación estando en garantía, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca 1?¿Y de la marca 2? ¿Y de la marca 3?

Teorema de Bayes

$$P(A_1 /B)= \frac{P(B/A_1)*P(A_1)}{P(B/A_1)*P(A_1)+P(B/A_2)*P(A_2)+P(B/A_3)*P(A_3)} = \frac{0,25*0,5}{0,25*0,5+0,2*0,3+0,1*0,2} = 0,61$$

Rta: la probabilidad de que un comprador tenga un televisor que necesite reparación estando en garantía sea de la marca 1 es 0,61

$$P(A_2 /B)= \frac{P(B/A_2)*P(A_2)}{P(B/A_1)*P(A_1)+P(B/A_2)*P(A_2)+P(B/A_3)*P(A_3)} = \frac{0,2*0,3}{0,25*0,5+0,2*0,3+0,1*0,2} = 0,29$$

Rta: la probabilidad de que un comprador tenga un televisor que necesite reparación estando en garantía sea de la marca 2 es 0,29

$$P(A_3 /B)= \frac{P(B/A_3)*P(A_3)}{P(B/A_1)*P(A_1)+P(B/A_2)*P(A_2)+P(B/A_3)*P(A_3)} = \frac{0,1*0,2}{0,25*0,5+0,2*0,3+0,1*0,2} = 0,1$$

Rta: la probabilidad de que un comprador tenga un televisor que necesite reparación estando en garantía sea de la marca 3 es 0,1

Conclusión: resolvemos con Bayes porque <u>a posteriori</u> necesitamos conocer la probabilidad de que el televisor sea de una marca, pero <u>a priori</u> (sabiendo) que necesita reparación estando en garantía.

Ejemplo

Una fábrica de zapatillas produce en tres plantas distintas (llamémoslas E1, E2 y E3). Semanalmente cada una de ellas produce 500, 2000 y 1500 zapatillas respectivamente.

Se sabe que la planta E1 produce un 2% de zapatillas defectuosas, la E2 un 1,5% y la E3 un 3%.

Se toma una zapatilla al azar entre las 4000 producidas en una semana. Qué probabilidad hay de que:

1) La zapatilla sea defectuosa.
2) La zapatilla haya sido producida en la planta E1
3) La zapatilla haya sido producida en la planta E2 y sea defectuosa.
4) La zapatilla haya sido producida en la planta E3 o sea defectuosa.
5) La zapatilla sea defectuosa sabiendo que fue producida en la planta E1.

Ejemplo

Volcamos la información en una tabla de doble entrada y luego construimos las probabilidades

	E1	E2	E3	Total
Buena	490	1970	1455	3915
Defectuosa	10	30	45	85
Total	500	2000	1500	4000

Probabilidades conjuntas

	E1	E2	E3	Total
Buena	490/4000=0,1225	1970/4000=0,4925	1455/4000=0,3638	3915/4000=0,9788
Defectuosa	10/4000=0,0025	30/4000=0,0075	45/4000=0,0112	85/4000=0,0212
Total	500/4000=0,125	2000/4000=0,5	1500/4000=0,375	4000/4000=1

Probabilidades marginales

Ejemplo

Pero si prestamos atención, las probabilidades dadas en el enunciado son marginales y condicionales. Entonces, la representación directa y más adecuadas de estas es a través de un árbol

Siempre debemos definir los eventos

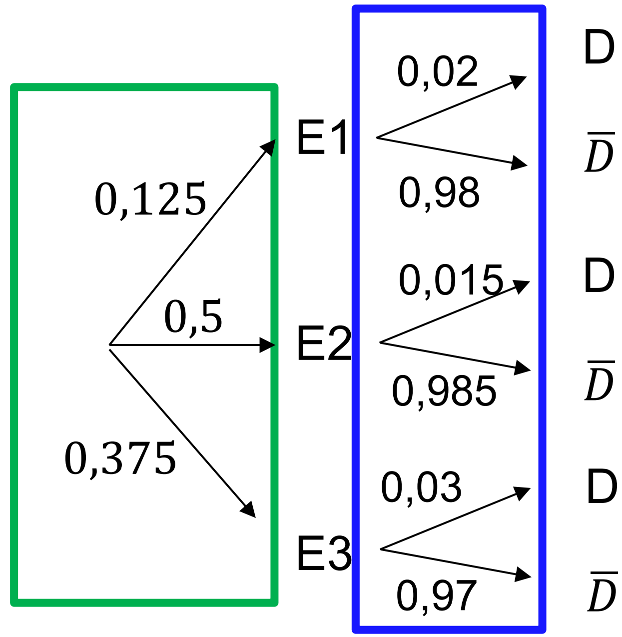
E1: planta E1

E2: planta E2

E3: planta E3

D: zapatilla defectuosa

$\bar{D}$: zapatilla no defectuosa



Probabilidades marginales

Probabilidades condicionales

$$P(E1) = \frac{500}{4000} = 0{,}125$$

$$P(E2) = \frac{2000}{4000} = 0{,}5$$

$$P(E3) = \frac{1500}{4000} = 0{,}375$$

Cada rama del árbol debe sumar 1

El hecho de tener probabilidades condicionales ya nos indica que no hay independencia entre los eventos.

Ejemplo

1) La zapatilla sea defectuosa.

Como el evento ser defectuosa depende de la planta, entonces aplico ley de probabilidad total

P(D) = P(D ∩ E1)+ P(D ∩ E2)+ P(D ∩ E3)=

$= P(D/E_1) * P(E_1) + P(D/E_2) * P(E_2) + P(D/E_3) * P(E_3) =$

= 0,02 * 0,125 + 0,015 * 0,5 + 0,03 * 0,375 = 0.02125

Rta: la probabilidad de que la zapatilla sea defectuosa es 2,125%

2) La zapatilla haya sido producida en la planta E1

Directamente es una probabilidad marginal

P(E1) = 0.125

Rta: la probabilidad de que la zapatilla haya sido producida en la planta E1 es 12,5 %

3) La zapatilla haya sido producida en la planta E2 y sea defectuosa.

Como no hay independencia entre los eventos, entonces aplico regla del producto

P(D ∩ E2) = $P(D/E_2) * P(E_2)$= 0,015 * 0,5= 0.0075 → probabilidad conjunta.

Rta: la probabilidad de que la zapatilla haya sido producida en la planta E2 y sea defectuosa es 0,75%

Ejemplo

4) La zapatilla haya sido producida en la planta E3 o sea defectuosa.

P(D U E3) = P(D) + P(E3) -P(D ∩ E3)

P(D) calculada en el punto 1 = 0.02125

P(D ∩ E3)= $P(D/E_3)*P(E_3)$= 0,03 * 0,375= 0,01125

P(D U E3) = 0.02125 + 0.375 – 0.01125 = 0.385

Rta: la probabilidad de que la zapatilla haya sido producida en la planta E3 o sea defectuosa es 38,5%

5) La zapatilla sea defectuosa sabiendo que fue producida en la planta E1.

P(D/E1) = 0.02 → probabilidad condicional

Rta: la probabilidad de que la zapatilla sabiendo que fue producida en la planta E1 es 2%

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo de las zapatillas, ahora nos preguntamos: ¿cuál es la probabilidad de que una zapatilla provenga de la planta E2, dado que la misma es defectuosa?

Ahora agregamos un dato y es que sabemos que la zapatilla es defectuosa (**a priori ó que el evento condicionante es el evento único**). Entonces a **posteriori** la probabilidad de que la zapatilla haya sido producida en la planta E2 sabiendo que resultó defectuosa, será distinta.

Entonces aplicamos Bayes

$$P(E_2/D)=\frac{P(E_2\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D/E_2)*P(E_2)}{P(D/E_1)*P(E_1)+P(D/E_2)*P(E_2)+P(D/E_3)*P(E_3)}$$

P(D) calculada en el punto 1 = 0.02125

$$=\frac{0{,}015*0{,}5}{0.02125}=0{,}352941176\approx 0{,}35$$

Rta: la probabilidad de que una zapatilla provenga de la planta E2, dado que la misma es defectuosa es 35%

Pueden resolver la práctica 1