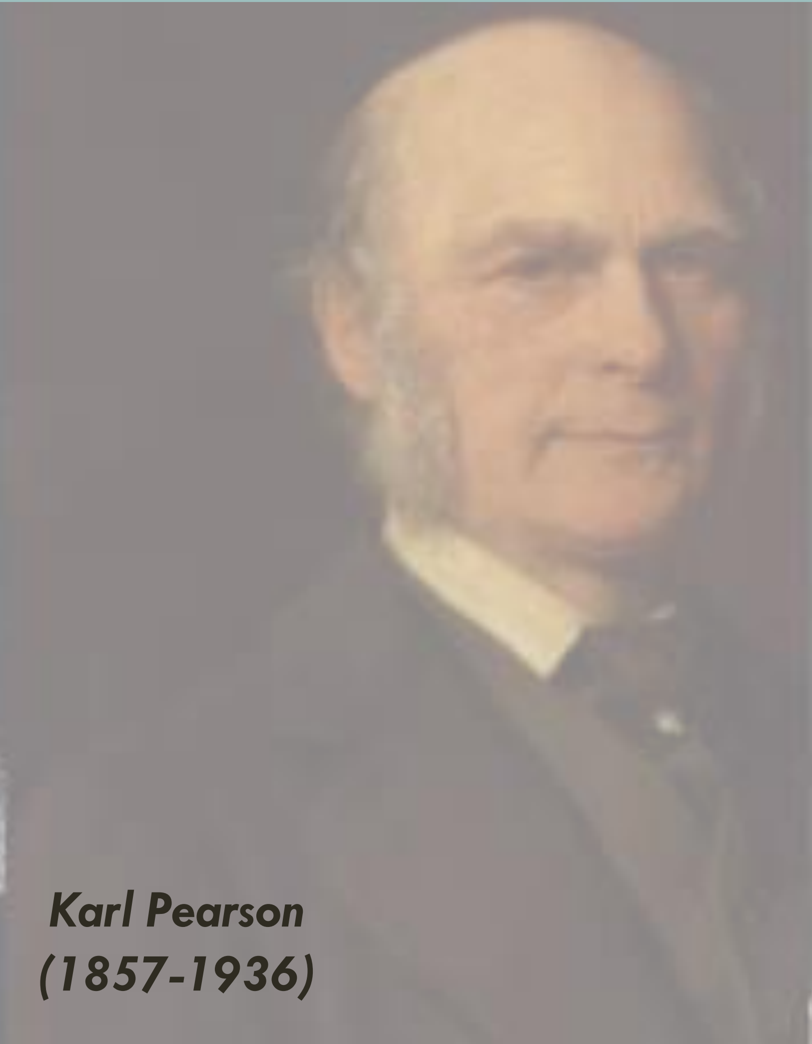
.UBAECONÓMICAS

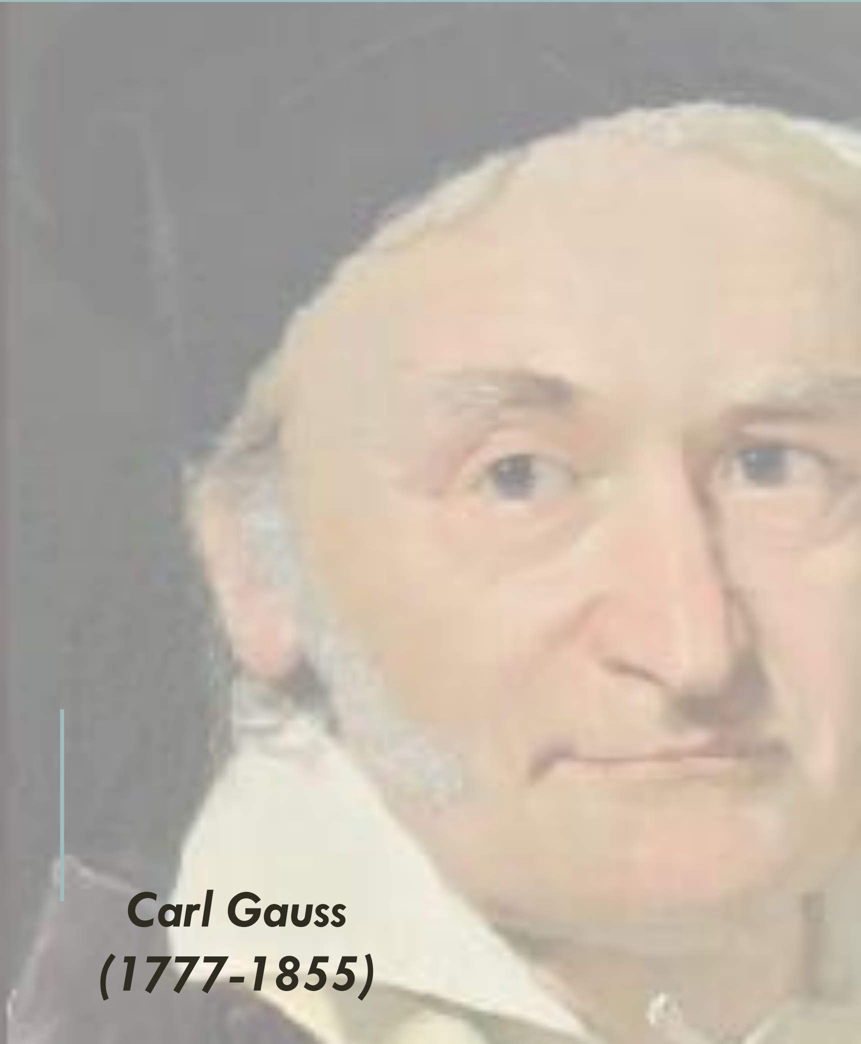
TUGAD
2025

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Jacob Bernoulli (1655-1705)



Karl Pearson (1857-1936)



Carl Gauss (1777-1855)

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

- Pueden tomar infinitos valores en un intervalo de números reales
- *Idea de medición o cálculo*

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

- Uniforme
- Normal
- Exponencial
- Ji-cuadrado, t de Student, F de Fisher

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

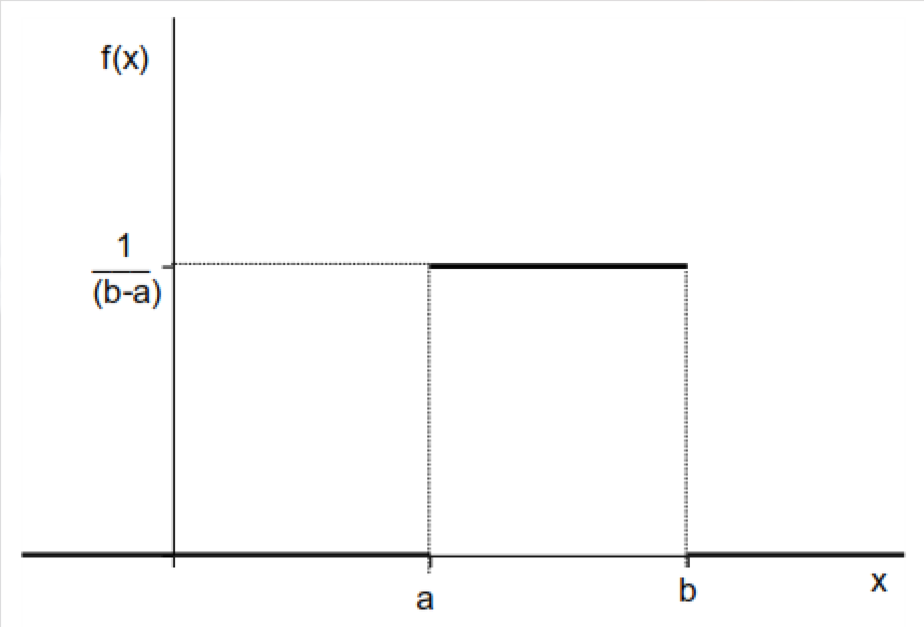
Notación $X \sim U\ (a, b)$

Recorrido $[a, b]$

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \forall\, x \in [a, b] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Representación gráfica



Esperanza y Varianza

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

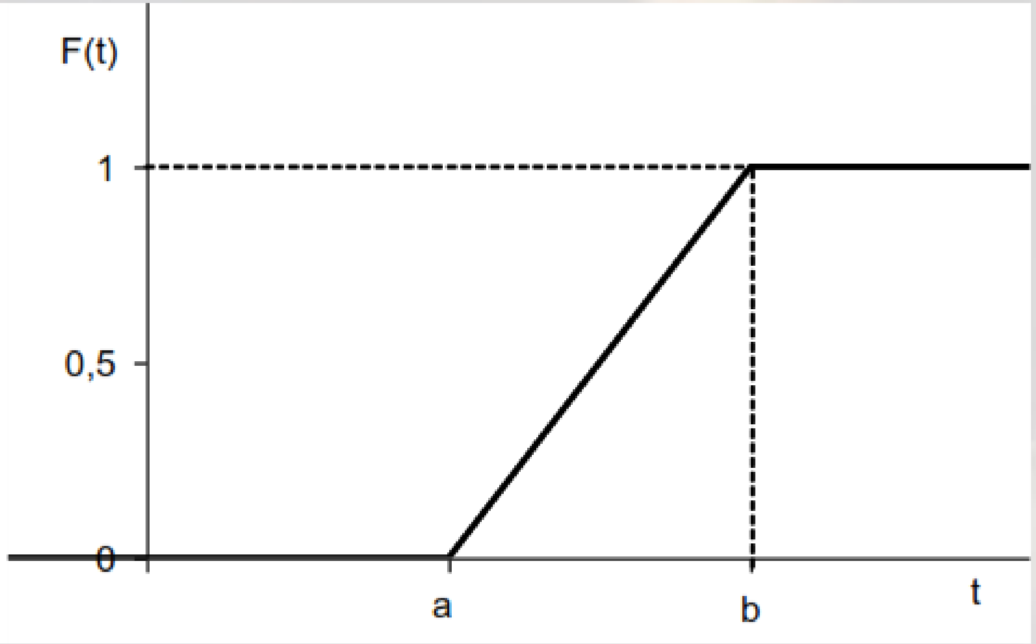
FARM. MARIA EUGENIA BONADIES

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Función de distribución

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \begin{cases} 0 & si\; t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & si\; a \leq t \leq b \\ 1 & si\; t > \mathrm{b} \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Representación gráfica



DISTRIBUCIÓN UNIFORME
EJEMPLO DE APLICACIÓN

La densidad de
probabilidad
es constante
en [a,b]

El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan concreto hacia una obra en construcción en una carretera, está distribuido uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos?

b) Idem a) si se sabe además que la duración del viaje es mayor a 55 minutos.

c) ¿Cuánto esperaría que dure el viaje?

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Notación

$X \sim N\ (\mu, \sigma)$

Recorrido

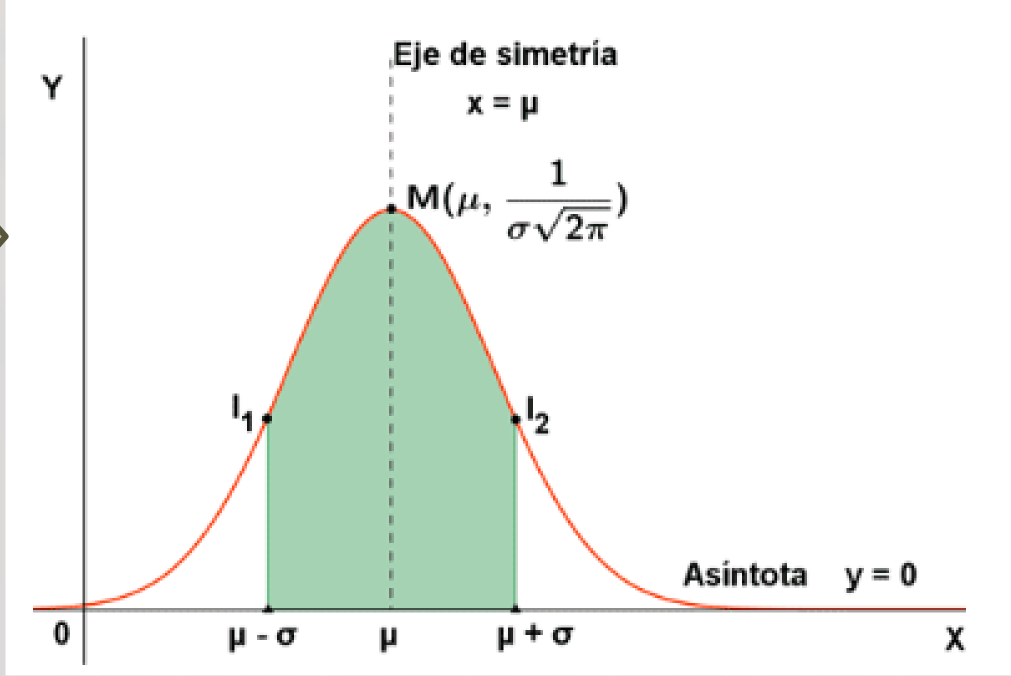
$\mathbb{R}$

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \mu \in \mathbb{R}\,, \sigma > 0$$

1. **Dominio o campo de existencia**: toda la recta real : (- ∞ , + ∞)
2. **Simetrías**: la función es simétrica respecto a la media x = μ
3. **Corte con los ejes**:
   a) No tiene puntos de corte con el eje X.
   b) Con el eje Y : $x = 0 \ \Rightarrow f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$
4. **Asíntotas**: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ por tanto el eje X es una asíntota
5. **Crecimiento y decrecimiento**: la función crece hasta x = μ y decrece hasta x = μ
6. **Máximos y mínimos** : la función f(x) presenta un máximo en x = μ
7. **Puntos de inflexión**: la función presenta dos puntos de inflexión I_1 e I_2 en **x = μ - σ** y en **x = μ + σ.**

Representación gráfica



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

¿Por qué?

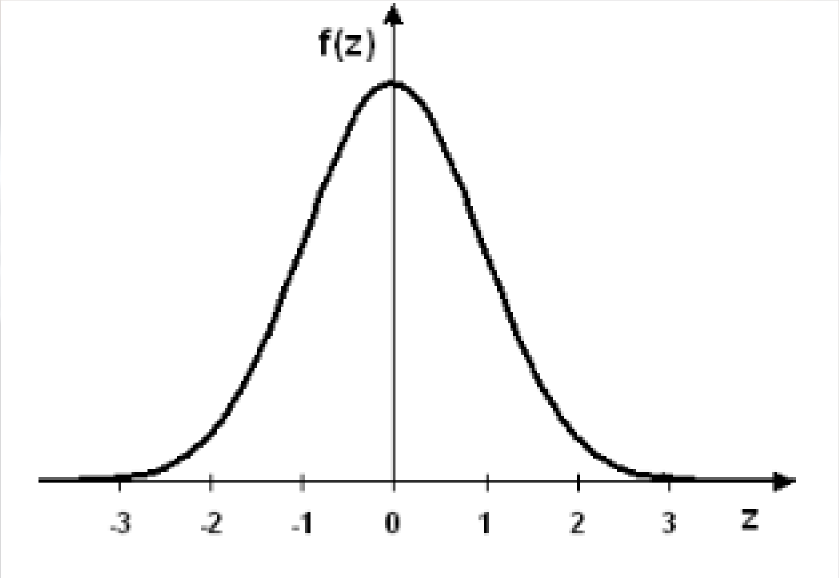
Notación $Z \sim N\ (0;1)$

Recorrido $\mathbb{R}$

Función de densidad de probabilidad

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}$$

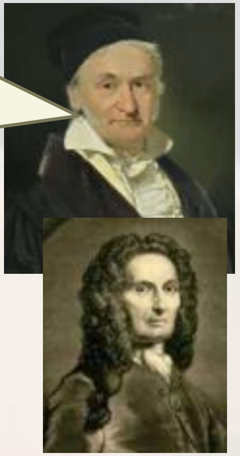
Representación gráfica



¡Notar diferencias y similitudes con la f(x)!

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

¡Porque hay tabla!

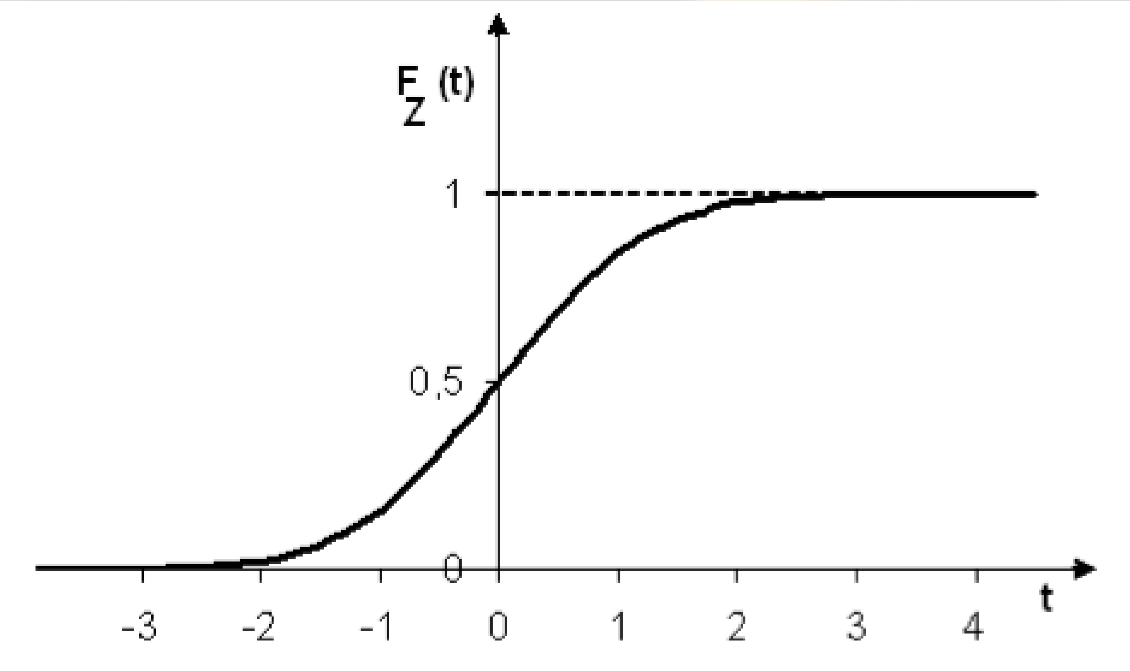


Función de distribución

$$P(Z \leq t) = F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} f(z)dz = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}$$

Representación gráfica

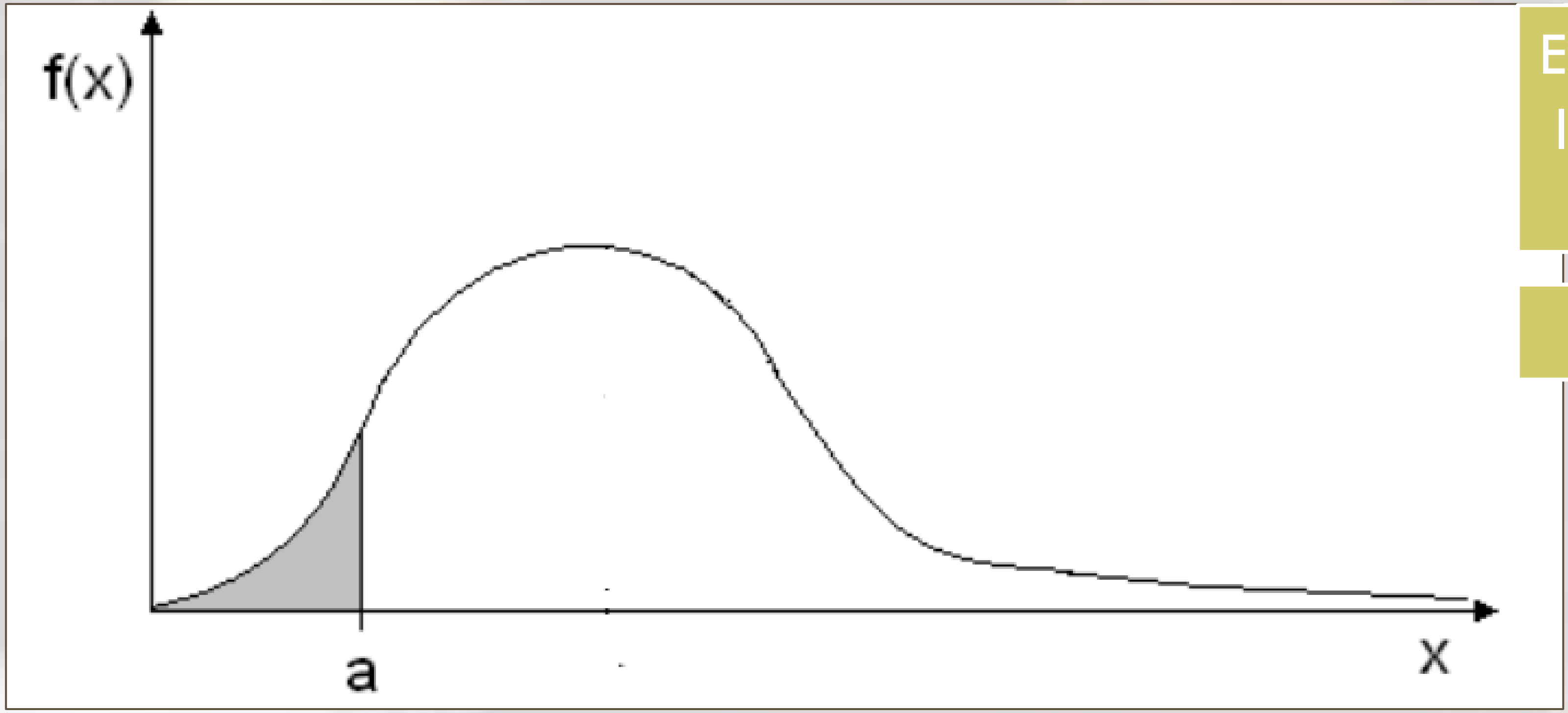


Esperanza y Varianza

$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$

RELACIÓN ENTRE PROBABILIDAD Y ÁREA BAJO LA CURVA DE LA F(X)



El área bajo la curva de la función de densidad, es una probabilidad

$$P(X \leq a) = F_X(a)$$

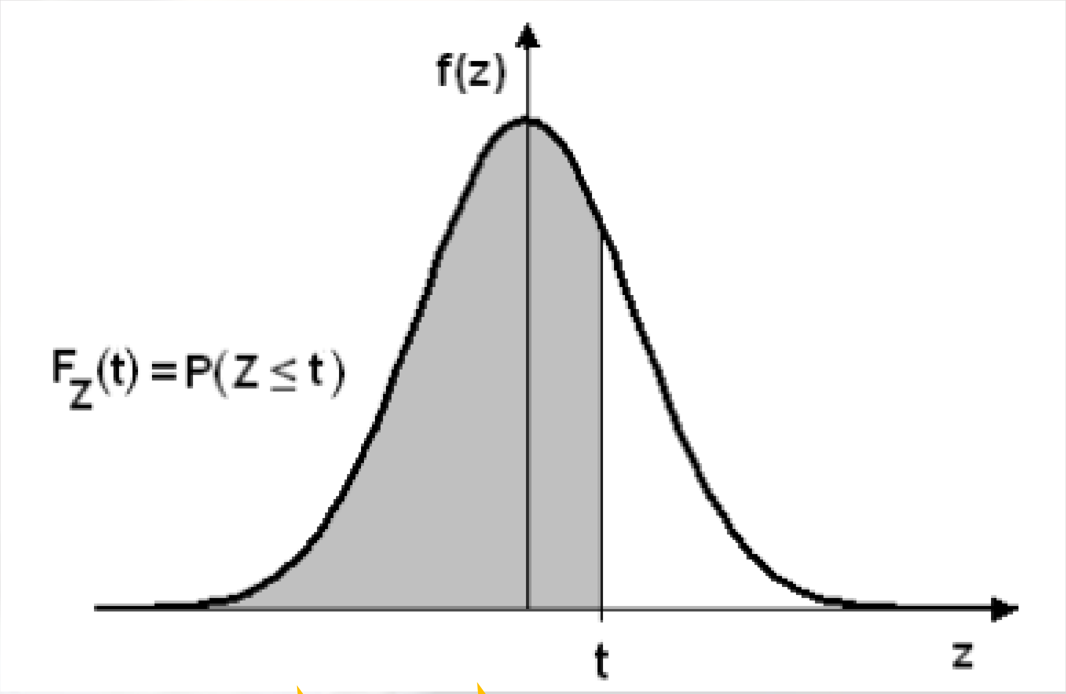
Lo vimos en el PPT de VA Continuas

FARM. MARIA EUGENIA BONADIES

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$\mu=0$
$\sigma=1$

El área bajo la curva de la función de densidad, es una probabilidad



Distribución Normal Estándarizada

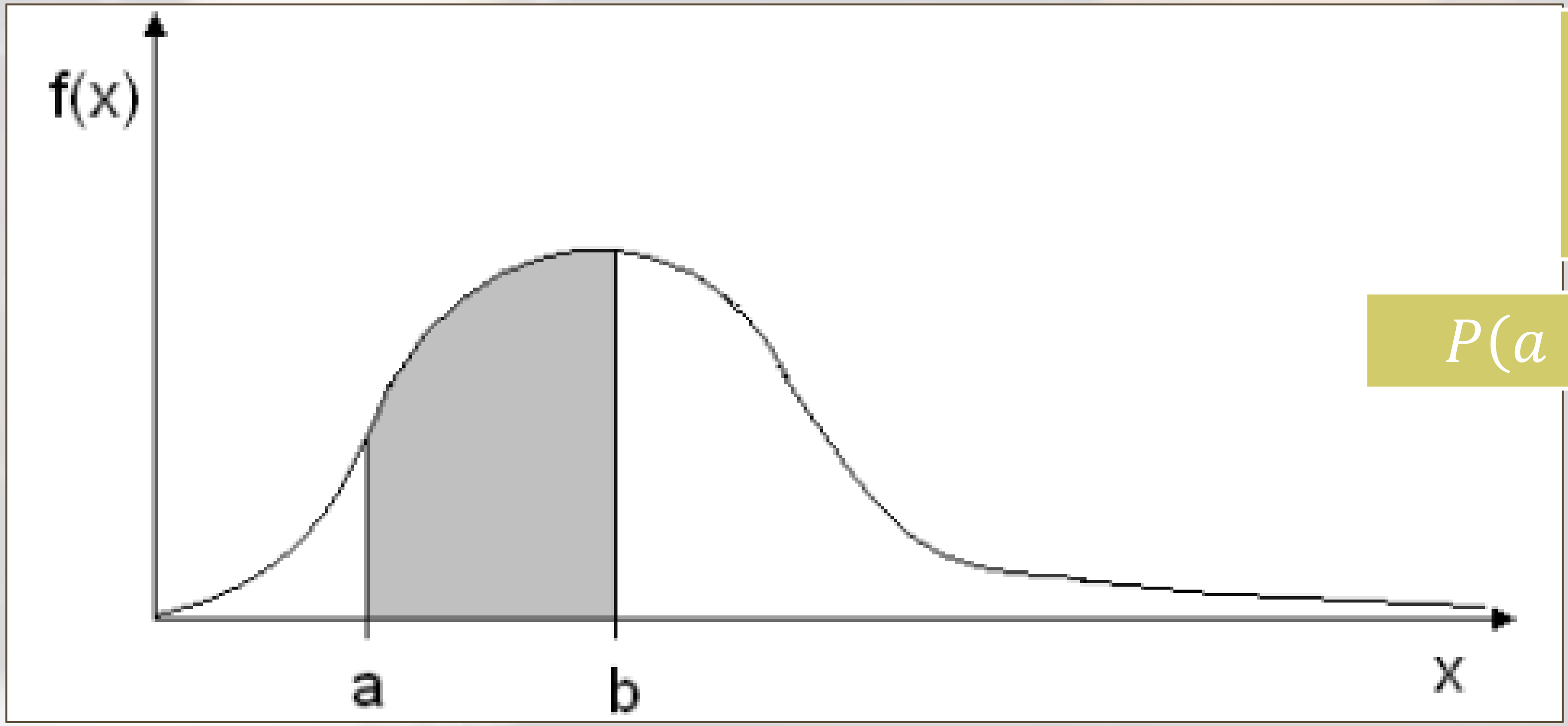
(Áreas acumuladas a izquierda)

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549

Distribución Normal Estándarizada - Fractiles

F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z
0,5	**0,000**	**0,6**	**0,253**	**0,7**	**0,524**	**0,8**	**0,842**	**0,9**	**1,282**
0,505	0,013	0,605	0,266	0,705	0,539	0,805	0,860	0,905	1,311
0,51	0,025	0,61	0,279	0,71	0,553	0,81	0,878	0,91	1,341
0,515	0,038	0,615	0,292	0,715	0,568	0,815	0,896	0,915	1,372
0,52	0,050	0,62	0,305	0,72	0,583	0,82	0,915	0,92	1,405
0,525	0,063	0,625	0,319	0,725	0,598	0,825	0,935	0,925	1,440

RELACIÓN ENTRE PROBABILIDAD Y ÁREA BAJO LA CURVA DE LA F(X)

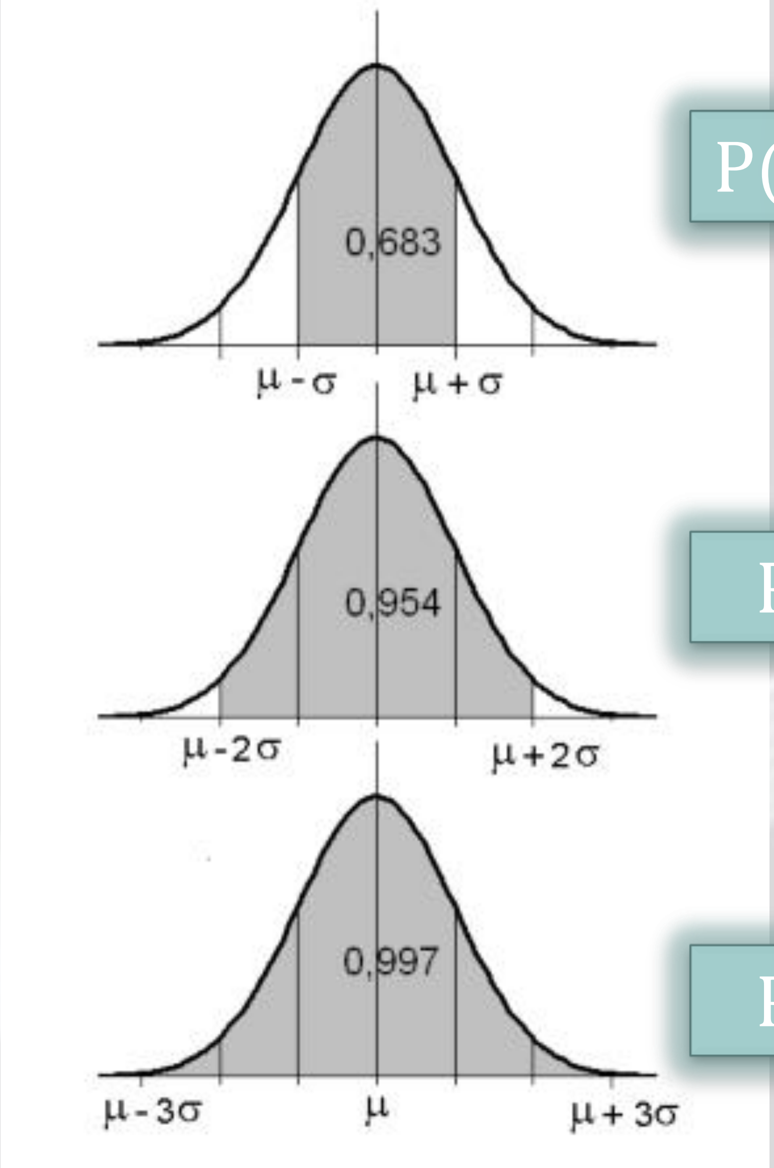


El área bajo la curva de la función de densidad, es una probabilidad

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Lo vimos en el PPT de VA Continuas

DISTRIBUCIÓN NORMAL



$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$$

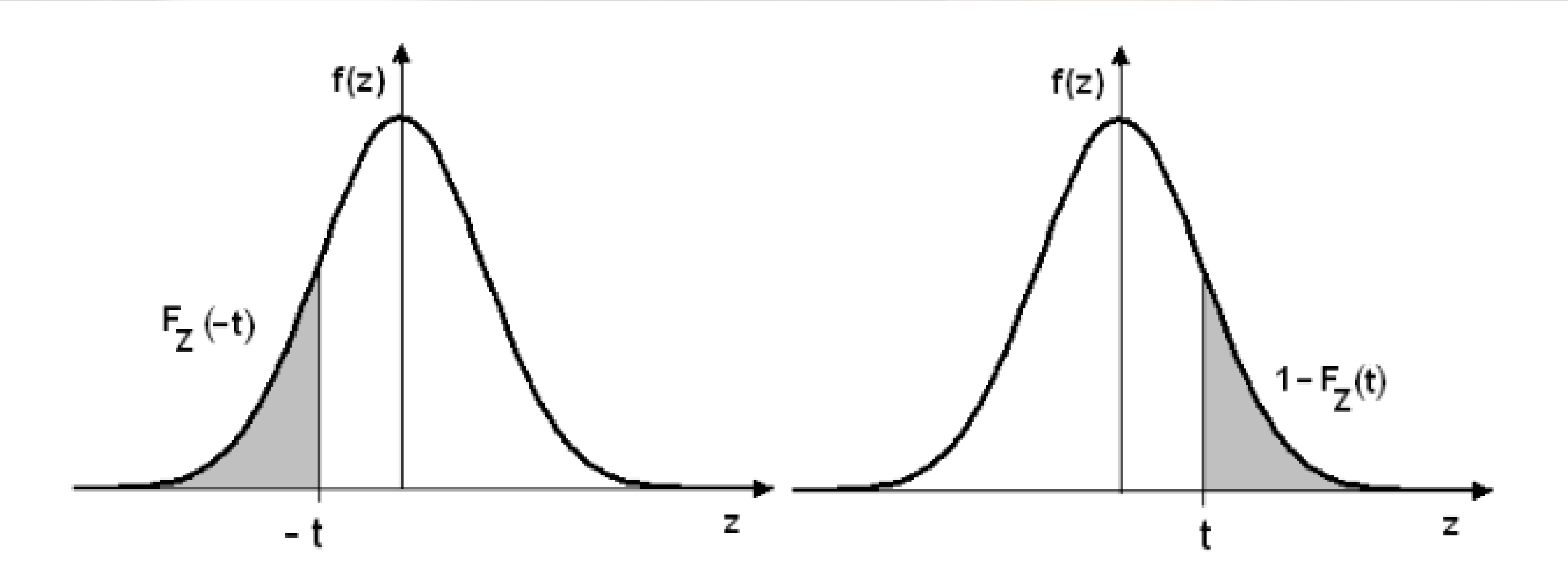
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$\mu=0$
$\sigma=1$

Propiedad de simetría de la curva



$$F_Z(-t) = 1 - F_Z(t)$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL Y NORMAL ESTÁNDAR

Si sólo trabajaremos con la $Z \sim N(0;1)$, ¿cómo hacemos con las $X \sim N(\mu, \sigma)$?

Propiedad

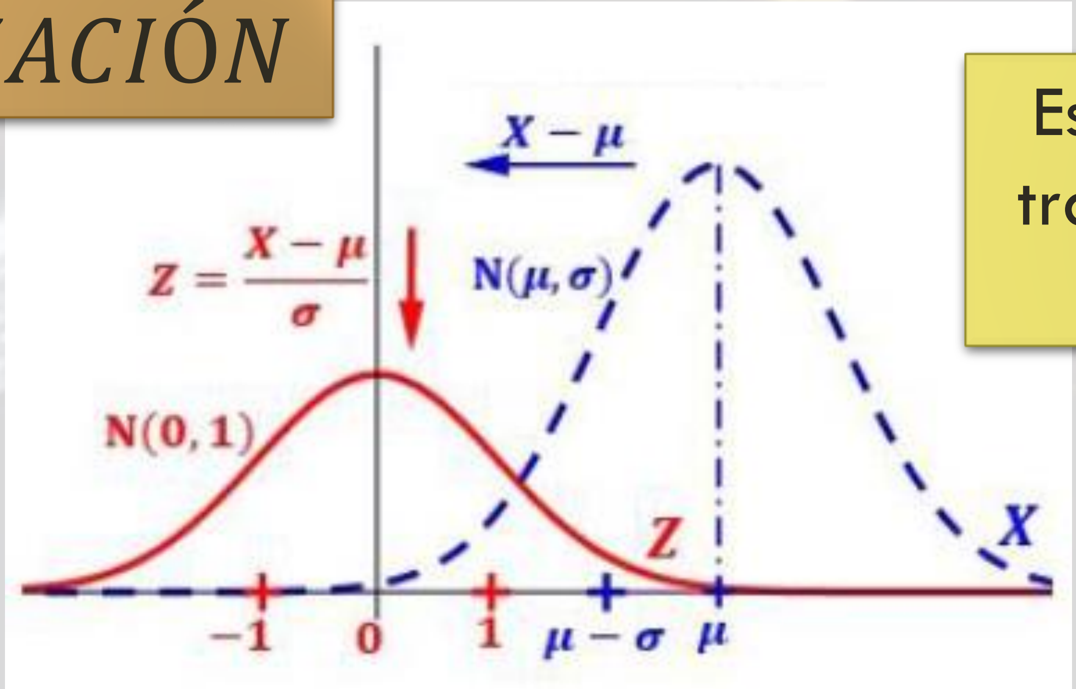
Si X ~ N(μ ; σ), la variable aleatoria :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1, es decir:

$$Z \sim N(0\,;1)$$

ESTANDARIZACIÓN



Estandarizar implica transformar la escala de medida

DISTRIBUCIÓN NORMAL
EJEMPLO DE APLICACIÓN

$$Sea\ X \sim N(\mu, \sigma)\ con\ \mu = 3\ y\ \sigma = 2.$$
$$Calcular:$$

a. $P(X \leq 2{,}5)$
b. $P(X \geq 5{,}2)$
c. $P(1 \leq X < 2{,}5)$
d. $P(X = 3)$
e. $P(X < 3 | X > 1)$
f. $P(X > 0{,}5 | X < 1)$
g. $P(2 < X < 3{,}25 \,\big|\, X > 1)$
h. $a / P(X < a) = 0{,}975$
i. $b / P(X > b) = 0{,}25$

Distribución Normal Estándarizada

(Áreas acumuladas a izquierda)

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549

Distribución Normal Estándarizada - Fractiles

F(z)	Z	F(z)	Z	F(z)	Z	F(z)	Z	F(z)	Z
0,5	**0,000**	**0,6**	**0,253**	**0,7**	**0,524**	**0,8**	**0,842**	**0,9**	**1,282**
0,505	0,013	0,605	0,266	0,705	0,539	0,805	0,860	0,905	1,311
0,51	0,025	0,61	0,279	0,71	0,553	0,81	0,878	0,91	1,341
0,515	0,038	0,615	0,292	0,715	0,568	0,815	0,896	0,915	1,372
0,52	0,050	0,62	0,305	0,72	0,583	0,82	0,915	0,92	1,405
0,525	0,063	0,625	0,319	0,725	0,598	0,825	0,935	0,925	1,440

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO DE APLICACIÓN

En una gran compañía, el volumen semanal de ventas por vendedor tiene una distribución normal con media \$ 10.000 y varianza 250.000 Si se selecciona aleatoriamente un vendedor

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su volumen de ventas esté entre \$9.500 y \$11.000 semanales?

b) Sabiendo que su volumen de ventas está por encima de los \$9.000, ¿Cuál es la probabilidad de que no supere los \$10.250?

c) Calcule el volumen de ventas mínimo que un vendedor puede garantizarse el 80% de las veces.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Notación

$X \sim Exp\ (\beta)$

$con\ \beta > 0$

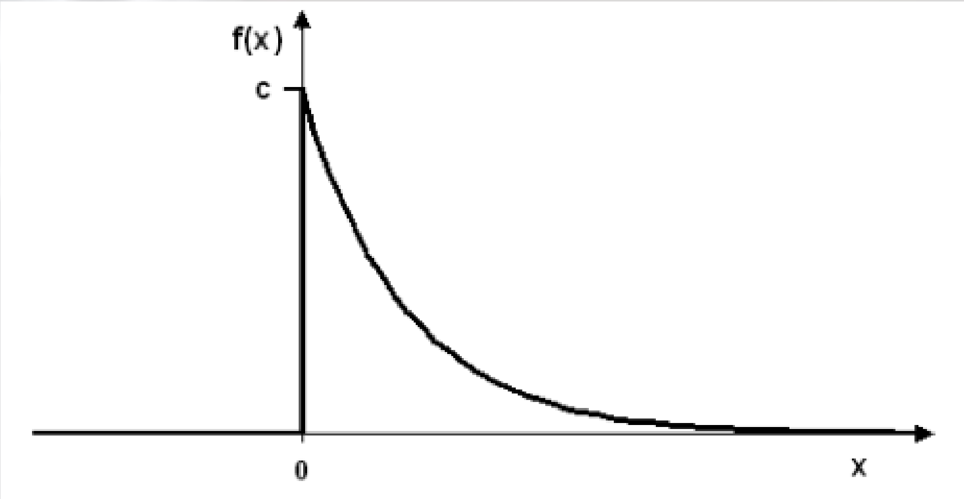
Recorrido

$\mathbb{R}_{\geq 0}$

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Representación gráfica



FARM. MARIA EUGENIA BONADIES

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Función de distribución

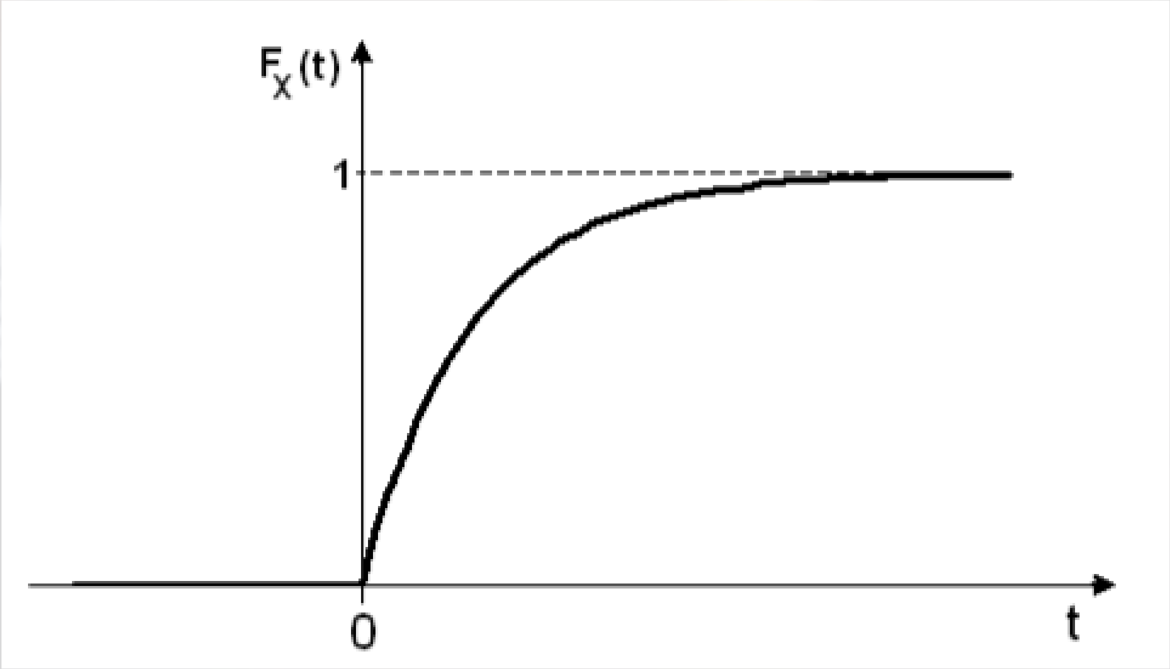
$$P(X \leq t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{\beta}} & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

Esperanza y Varianza

$$E(X) = \beta$$

$$Var(X) = \beta^2$$

Representación gráfica



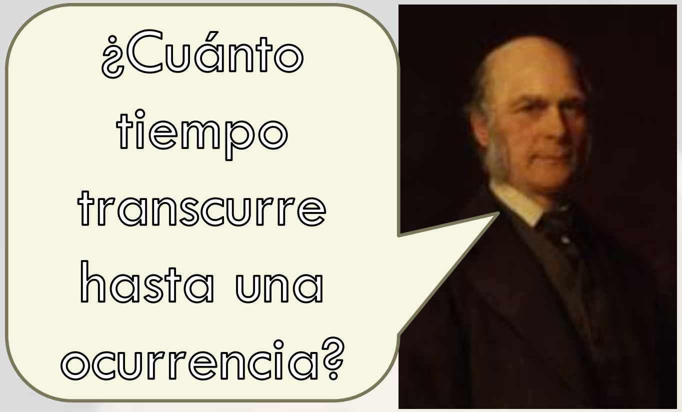
DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL
EJEMPLO DE APLICACIÓN

$Sea\ X \sim Exp(0,5), hallar$:

a. $P(X > 2)$
b. $P(1 < X < 2)$
c. $P(X \geq 2,5)$
d. $P(X < 2 | X > 0,75)$
e. $P(X > 1,75 | X < 2,1)$
f. $a / P(X < a) = 0,8$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

EJEMPLO DE APLICACIÓN

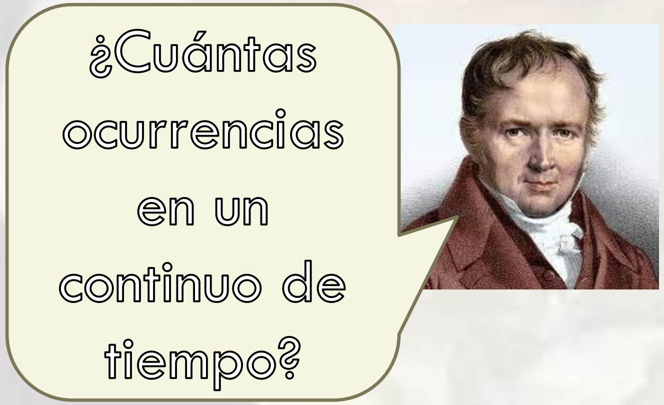


En una aerolínea el tiempo para atender a los pasajeros sin billete en el mostrador del aeropuerto sigue una distribución exponencial con una media de 5 minutos.

a) Encuentre la probabilidad de que el tiempo de atención sea menor que 2,5 minutos.

b) Encuentre la probabilidad de que el tiempo de atención sea mayor que 10 minutos.

c) Encuentre la probabilidad de que el tiempo de atención este comprendido entre los 4 y 7 minutos.



OPERACIONES CON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias normales independientes, entonces la variable aleatoria suma de ellas, $\sum_{i=1}^{n} X_i$, también es una variable aleatoria normal.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias normales independientes, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, entonces la variable aleatoria combinación lineal de las X_i, $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i$, también es una variable aleatoria normal

En resumen: "toda variable obtenida por transformación lineal de otra con distribución normal, tendrá distribución normal"