VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

.UBAECONÓMICAS

TUGAD

2025

ES PRECISO TENER EN CLARO…

- Es posible **repetirlo indefinidamente** bajo las mismas condiciones
- no podemos **predecir** el resultado, pero se conoce el conjunto de todos los resultados posibles

Experimento aleatorio

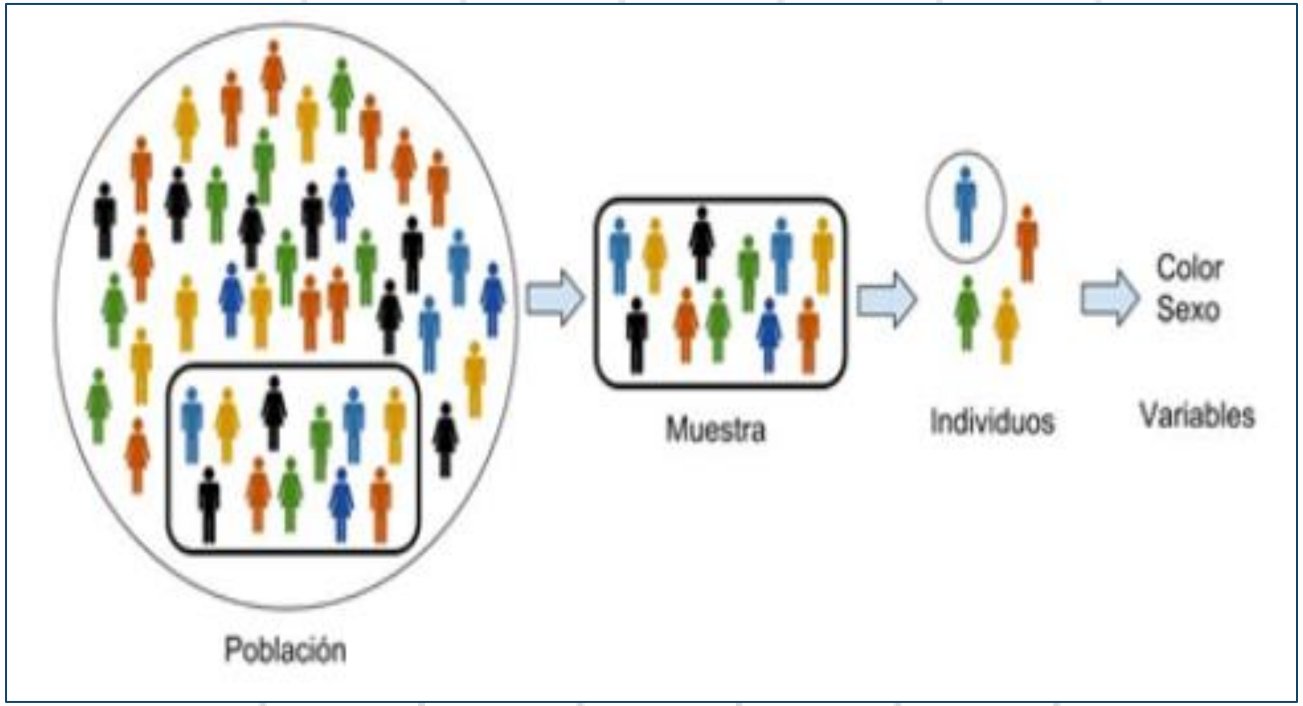
Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Lo indicamos con la letra S. Si este conjunto es finito, con n elementos, escribimos $S = \{s_1; s_2; \ldots ; s_n\}$, pero también S podría ser un conjunto infinito.

Espacio de resultados

Son ciertos subconjuntos de S, que indicaremos, por lo general, con las letras mayúsculas A, B, etc. A veces nos puede convenir identificarlos como A_1, A_2, etc.

Suceso o Evento

Y TAMBIÉN ...



EN RESUMEN:

El problema se asocia a un grupo grande de objetos (en este caso, personas) acerca de los cuales van a hacerse inferencias. Este grupo de objetos se llama *población*.

Ciertas características de los miembros de la población son de particular interés. El valor de cada una de esas características puede cambiar de objeto a objeto dentro de la población. Estas características se llaman *variables aleatorias:* variables porque cambian de valor; aleatorias porque su comportamiento depende del azar y es impredecible.

La población es demasiado grande para ser estudiada en su totalidad. Por tanto, debemos hacer inferencias sobre la población basadas en lo observado estudiando sólo una porción, o *muestra,* de objetos de la población.

AHORA, SÍ: DEFINICIONES

- Característica que se observa o mide sobre un individuo, que debe poder *transformarse* en un número.
- *Aleatoria* porque no se puede predecir su valor.

Definición conceptual

Si S es el espacio de resultados de un experimento aleatorio se denomina **variable aleatoria** a la función que a cada elemento de S le asigna un número real. Si se llama X a la variable aleatoria

$$X: S \longrightarrow R \quad \text{tal que} \quad \text{si} \quad s \in S \quad \text{entonces } X(s) \in R$$

Definición formal

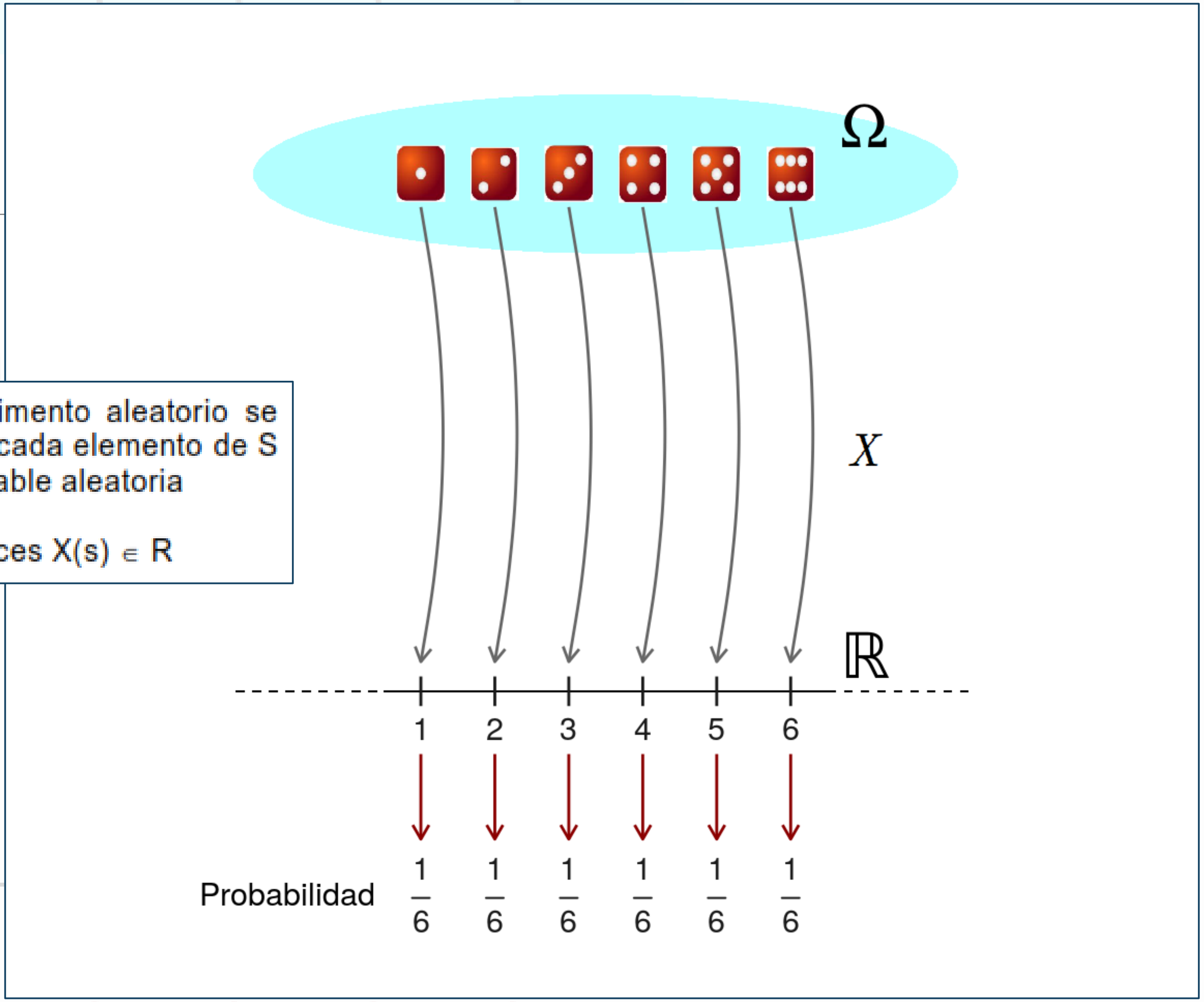
Definición de Recorrido

Se llama **recorrido** de una variable aleatoria X al conjunto de todos los valores que puede tomar X.

VOLVAMOS…

Si S es el espacio de resultados de un experimento aleatorio se denomina **variable aleatoria** a la función que a cada elemento de S le asigna un número real. Si se llama X a la variable aleatoria

$$X: S \longrightarrow R \quad \text{tal que} \quad \text{si} \quad s \in S \quad \text{entonces } X(s) \in R$$



CLASIFICACIÓN de las V.A.

DISCRETAS

Sólo pueden tomar una cantidad finita o infinita numerable de valores posibles

Idea de conteo

Incluyen a la variables Categóricas (nominales y ordinales)

CONTINUAS

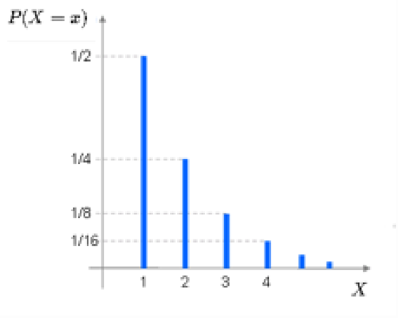
Pueden tomar infinitos valores en un intervalo de números reales

Idea de medición o cálculo

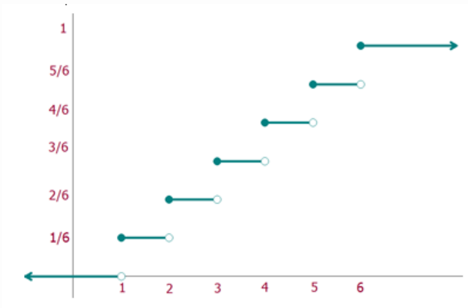
CLASIFICACIÓN de las V.A.

DISCRETAS

Función de Probabilidad Puntual

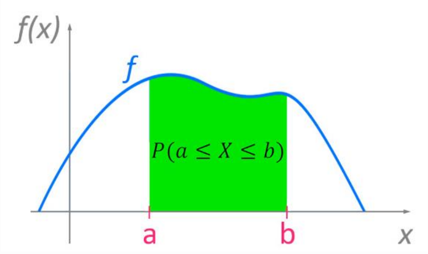


Función de Distribución

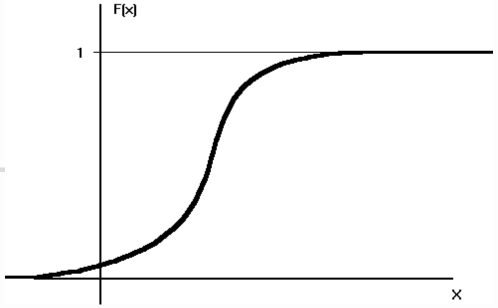


CONTINUAS

Función de Densidad de Probabilidad



Función de Distribución



VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Función de Probabilidad Puntual

Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es

$$R_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$$

se llama **función de probabilidad de X** a la función:

$$p: R_X \longrightarrow R$$

tal que a cada valor del recorrido de X le asigna su probabilidad:

$$p(x_i) = P(X = x_i) \qquad \forall\, x_i \in R_X$$

Función de Distribución

Se llama **función de distribución** de una variable aleatoria X, a la función F_X tal que:

$$F_X: R \longrightarrow R$$

para cada número real t es $F_X(t) = P(X \leq t)$

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD PUNTUAL

Propiedades

Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es Rx, la función de probabilidad de X tiene las siguientes propiedades:

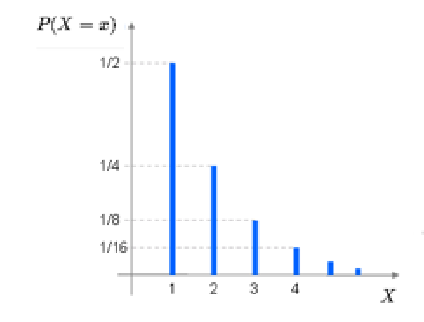
1) $p(x_i) \geq 0 \qquad \forall\, x_i \in R_X$

2) $\sum_{x_i \varepsilon R_X} p(x_i) = 1$

Representaciones

- Tabla con R_X y $p(x_i)$
- Gráfico de barras ("puntos flotando")

Valores x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4



Se llama **función de distribución** de una variable aleatoria X, a la función Fx tal que:

$$F_X: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

para cada número real t es $F_X(t) = P(X \leq t)$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Cálculo

Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es $R_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$, la función de distribución de X se calcula por:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{x_i \leq t} p(x_i)$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria discreta

- La función de distribución es una función no decreciente:

  si $a < b$ es $F_X(a) \leq F_X(b)$

- El gráfico de la función de distribución es una función escalonada, que presenta los saltos en los puntos cuyas abscisas x_i pertenecen al recorrido de X. Es constante entre dos puntos consecutivos del recorrido de X. La magnitud de cada salto es $p(x_i)$

- La función de distribución varía entre 0 y 1:

  $0 \leq F_X(t) \leq 1 \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$

- Se pueden calcular probabilidades utilizando la función de distribución:

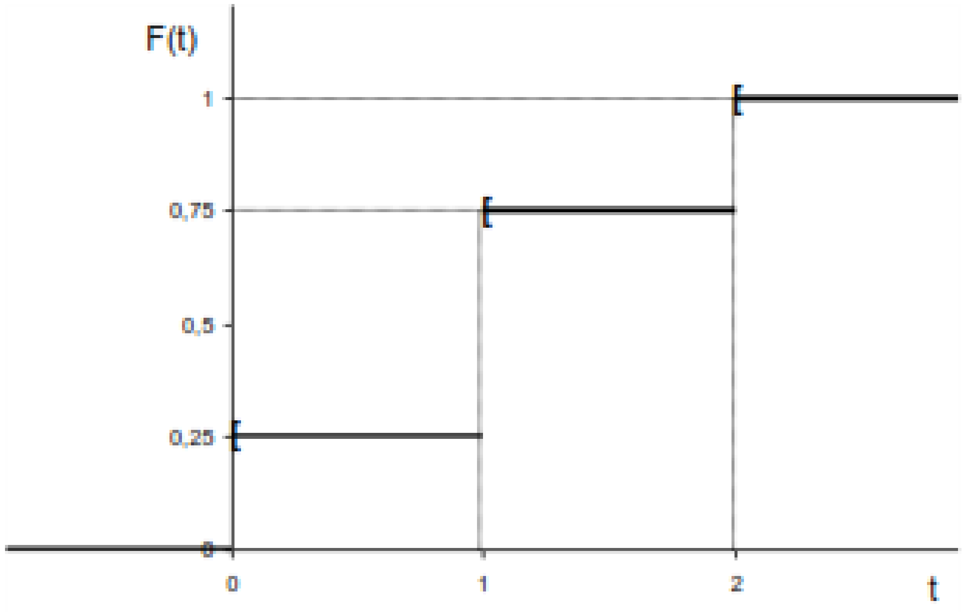
  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Representaciones

- Definición de F_x para cada intervalo de t en $\mathbb{R}$
- Gráfica continua a derecha (“escalera”)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1/4 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 3/4 & \text{si} \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 2 \end{cases}$$



ESPERANZA DE UNA V.A. DISCRETA

Definición

Fórmula de cálculo

Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es

$$R_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$$

y su función de probabilidad es $p(x_i) = P(X = x_i) \quad \forall\, x_i \in R_X$

se define **media de X o esperanza de X** y se indica E(X) a:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i \cdot p(x_i)$$

ESPERANZA DE UNA V.A. DISCRETA

Propiedades

Si X e Y son variables aleatorias y c es un número real (constante), entonces:

1) $E(c) = c$
2) $E(c\,X) = c\,E(X)$
3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4) Si $X_1; X_2; \ldots; X_n$ son variables aleatorias entonces:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

5) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces:

$$E(X\,.\,Y) = E(X)\,.\,E(Y)$$

VARIANZA DE UNA V.A. DISCRETA

Definición

Si X es una variable aleatoria, se llama **Varianza de X** a:

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Frecuentemente se la indica como σ^2.

Fórmula de cálculo

Si X es una variable aleatoria cualquiera, entonces:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1 2 3 4 5 6

VARIANZA DE UNA V.A. DISCRETA

Propiedades

Si X e Y son variables aleatorias y c es un número real (constante), entonces:

1) $\mathrm{Var}(c) = 0$
2) $\mathrm{Var}(c\,X) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$
3) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

4) Si $X_1; X_2; \ldots; X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$