5. Ecuaciones lineales, matrices y determinantes

En este capítulo estudiaremos cómo resolver eficientemente sistemas de ecuaciones lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen naturalmente en una inmensa cantidad de contextos, no solo en las teorías de las ciencias exactas, sino también en otras ramas que van desde la Biología hasta la Economía.
La resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se puede mecanizar mediante el uso de la teoría de matrices y de determinantes, que son herramientas muy potentes del Álgebra Lineal. En particular, en este marco se puede desarrollar software eficiente para resolver sistemas lineales muy complejos.

5.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Comencemos identificando y clasificando los posibles sistemas de ecuaciones lineales y mecanizando su resolución.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es un sistema de ecuaciones lineales.
- Cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a la existencia de su/s solución/es.

5.1.1 ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Vimos en el capítulo 2 que una ecuación que involucra las variables x, y se dice *lineal* si es de la forma $ax + by = c$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esto es: cada variable aparece multiplicada por un número real, estos términos sumados y esta suma igualada a otro número real. La misma idea vale para ecuaciones de tres variables x, y, z. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 43 Una *ecuación lineal* en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una relación de la forma:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. A las variables $x_1, \ldots, x_n$ también se las llama las *incógnitas* de la ecuación y a los números $a_1, \ldots, a_n$ que aparecen multiplicando a las variables se los llama *coeficientes* de la ecuación.

Cuando hablamos de *resolver* una ecuación lineal estamos intentando encontrar números $c_1, \ldots, c_n$ que verifiquen la ecuación; es decir, que al reemplazar x_i con c_i se obtenga la igualdad $a_1c_1 + \cdots + a_nc_n = b$. En este caso, decimos que $c_1, \ldots, c_n$ *son solución de la ecuación*. Cabe destacar que *importa* el orden en el que escribimos los c_i, ya que no es lo mismo reemplazarlos en cualquier variable (pues los a_i no son en general iguales). Por este motivo conviene escribirlo como una n-upla $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ y decir que *el vector* $(c_1, \ldots, c_n)$ *es solución de la ecuación*. Por ejemplo, la ecuación implícita de un plano es una ecuación lineal que nos dice qué puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecen al plano (estos puntos son la solución de dicha ecuación implícita).

Como su nombre lo indica, un *sistema de ecuaciones lineales* es una colección de ecuaciones lineales *que nos interesa resolver simultáneamente*. Vale decir, estamos buscando vectores $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen *varias ecuaciones al mismo tiempo*. Por ejemplo, la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$ es precisamente un *sistema de dos ecuaciones lineales*, y los puntos de la recta son exactamente los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que son solución de *ambas ecuaciones simultáneamente*. Definamos este concepto en general.

Definición 44 Un *sistema de m ecuaciones lineales en las variables* $x_1, \ldots, x_n$ es una colección de m ecuaciones lineales que queremos resolver simultáneamente. Se escribe:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Nuevamente, nos referimos a las variables $x_1, \ldots, x_n$ como las *incógnitas* del sistema y a los números a_{ij} como los coeficientes del sistema. Los números b_i se llaman los *coeficientes libres del sistema* (son los que no acompañan a ninguna variable).

Pero, ¿qué es esta notación con tantos subíndices? Aunque no lo parezca a primera vista, es la manera más sencilla de escribir un sistema de ecuaciones lineales de manera general. En efecto, cuando teníamos una sola ecuación en n variables podíamos simplemente escribir:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

donde el subíndice i en el número a_i indicaba que dicho número se encontraba multiplicando a la variable x_i. Si ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones, entonces la variable x_i va a estar multiplicada por un número a_i en la primera ecuación y por un número b_i en la segunda ecuación. En este caso, podemos escribir el sistema como:

$$\begin{cases} a_1x_1 & + & \cdots & + & a_nx_n & = & d_1 \\ b_1x_1 & + & \cdots & + & b_nx_n & = & d_2 \end{cases}$$

Si hubiera tres ecuaciones podríamos usar a_i, b_i, c_i. ¿Pero qué haríamos si hubiera cincuenta ecuaciones? Como no alcanzan las letras del abecedario, deberíamos utilizar otros símbolos para representar a los coeficientes. Pero aún cuando hiciéramos esto, ¿cómo podemos especificarle al lector que el símbolo @ corresponde a los coeficientes de la ecuación 37 (ó cualquiera de ellas)? La manera más sencilla, entonces, es no utilizar distintas letras (o símbolos) para los coeficientes de cada ecuación, sino usar la misma letra (o símbolo) para todas las ecuaciones pero agregando un nuevo subíndice numérico que aclare cuál es la ecuación a la que pertenece dicho coeficiente. Por lo tanto, cuando escribimos a_{36} estamos diciendo que este es el número que multiplica a x_6 en la ecuación número 3. En general, el primer subíndice de a_{ij} indica el número de ecuación a la que nos estamos refiriendo y el segundo subíndice indica a qué variable está multiplicando. Por lo tanto, el coeficiente a_{ij} es el número que multiplica a x_j en la i-ésima ecuación. Observemos que, por este motivo, el subíndice i se mueve entre 1 y m y el subíndice j, entre 1 y n.

5.1.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Como habrán notado, ¡ya estuvimos resolviendo sistemas de ecuaciones lineales! Las ecuaciones implícitas de las rectas y los planos forman un sistema de ecuaciones lineales (a veces de una sola ecuación), cuya solución son precisamente los puntos de la recta o el plano correspondiente. Además, cuando buscamos la intersección entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano, lo que estamos haciendo es armarnos un sistema de ecuaciones lineales cuya solución, justamente, sean los puntos que se hallan en la intersección. El procedimiento que estudiamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales en capítulos anteriores, consistía en *despejar* una incógnita de una ecuación y reemplazarla en la ecuación siguiente, donde con la nueva información, podíamos despejar otra incógnita para seguir reemplazando en las siguientes ecuaciones. Existen otras “estrategias” que ahora vamos a analizar. Todas estas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales se dice que son “a mano” o “por la fuerza bruta”, ya que uno ataca el problema de la manera que se le ocurre (que puede no ser necesariamiente eficiente). En el siguiente apartado, vamos a simplificar los procedimientos para resolver este tipo de ecuaciones y hacerlos eficientes.

Vamos a mostrar las diferentes maneras de encarar la búsqueda de la solución por medio de un ejemplo. Supongamos que tenemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Si utilizamos la estrategia que usamos en la primera parte del, podemos despejar x de la primera ecuación y obtener $x = 5 - 2y$. Reemplazando esta nueva información en la segunda ecuación obtenemos $2(5 - 2y) - 3y = -1$; es decir, $10 - 7y = -1$. Por lo tanto, depejando y se tiene $y = \frac{11}{7}$ y, reemplazando esta información en $x = 5 - 2y$, obtenemos $x = \frac{13}{7}$. Concluimos que el sistema tiene una única solución: el vector $(\frac{13}{7}, \frac{11}{7})$. Este método se suele llamar *método de sustitución*.

Abordemos ahora el problema de otra manera. Como la variable x aparece en ambas ecuaciones (podría no aparecer en alguna), al despejarla en ambas ecuaciones simultáneamente, obtenemos:

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = \frac{-1+3y}{2} \end{cases}$$

Este es el mismo sistema (sólo hemos reordenado los términos). Como la primera ecuación nos dice que x es igual a una “cosa” y la segunda que x es igual a otra “cosa”, entonces en particular, las “cosas” deberían ser iguales entre sí. Por lo tanto, debe suceder que $5 - 2y = \frac{-1+3y}{2}$. Si pasamos el 2 del denominador de la fracción de la derecha multiplicando a la izquierda, tenemos $10 - 4y = -1 + 3y$. Al mover los números para un lado y las “y’s” para el otro, tenemos $11 = 7y$; de donde $y = \frac{11}{7}$, como habíamos hallado con el otro método. Nuevamente, al reemplazar esta información en $x = 5 - 2y$ o en $x = \frac{-1+3y}{2}$, nos da $x = \frac{13}{7}$. Este método se suele llamar *método de igualación*.

Finalmente, veamos una última estrategia de resolución. Es probable que no sea la primera en la que pensemos, pero, sin embargo, es la más importante para nuestro propósito, ya que la usaremos para desarrollar una manera mecánica de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Comencemos nuevamente con nuestro sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Esta estrategia se basa en la siguiente observación trivial: si $a = 5$ y $b = 7$, entonces $a + b = 5 + 7 = 12$. Siguiendo esta idea, dado que $x + 2y = 5$ y que $2x - 3y = -1$, entonces si sumamos $x + 2y$ con $2x - 3y$ nos dará $5 + (-1) = 4$. Es decir:

$$(x + 2y) + (2x - 3y) = 4$$

Pero $(x+2y)+(2x-3y) = 3x-y$, por lo cual, sumando la primera ecuación del sistema con la segunda obtenemos una nueva ecuación $3x - y = 4$. ¿Y qué relación tiene esta ecuación con las originales? Igual al caso donde $a = 5$ y $b = 7$ forzaban a que $a + b = 12$, lo que dice $x + 2y = 5$ y $2x - 3y = -1$ es que, necesariamente, $3x - y = 4$. Es decir, *si* $x + 2y = 5$ *y* $2x - 3y = -1$, entonces, $3x - y = 4$. ¿Por qué nos interesa tener esta información? Porque al "sumar dos ecuaciones" obtenemos una nueva ecuación *que es válida* y que puede tener un formato más sencillo para poder despejar las variables. Por ejemplo, despejando y de esta última ecuación hallada, tenemos $y = 3x - 4$, que es mucho más ameno que despejar y de las ecuaciones originales (donde aparecen necesariamente fracciones). Pero hay algo más que podemos hacer para obtener todavía una ecuación más sencilla. Y, nuevamente, está basada en una observación trivial: si $a = 5$ entonces $2a = 2{,}5 = 10$. En este caso, como $x + 2y = 5$ entonces $2(x + 2y) = 2{,}5 = 10$; es decir, $2x + 4y = 10$. Otra vez, hallamos otra ecuación que sigue siendo válida para cualquier solución de la ecuación original (en el sentido de que si un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema, entonces también debe verificar esta nueva ecuación que construimos a partir de las originales). *Tengamos en cuanta, de todas formas, que esto es cierto si estamos multiplicando a una ecuación por un número distinto de* 0 (multiplicar una ecuación por 0 a ambos lados, simplemente, "mata" la ecuación). Al igual que el caso de la suma de ecuaciones, multiplicar una ecuación por un número no nulo puede simplificar la ecuación y hacernos más fácil la tarea de despejar variables: por ejemplo, la ecuación $\frac{3}{10}x + \frac{5}{6}y = -2$ puede simplificarse mucho al multiplicarla por 30. Pero, en definitiva, es una combinación de ambas operaciones (sumar ecuaciones y multiplicarlas por un número no nulo) que nos va a ayudar a resolver el sistema de manera más directa. En efecto, comencemos multiplicando la primera ecuación por -2 para obtener $-2x - 4y = -10$. Ya dijimos que esta ecuación tiene que ser cierta (ya que las originales lo eran). Y ahora, sumemos esta nueva ecuación con la segunda ecuación original:

$$(-2x - 4y) + (2x - 3y) = -10 - 1$$

Es decir, $-7y = -11$ (los términos que contienen a la variable x se cancelaron en la suma). De aquí, despejamos muy sencillamente que $y = \frac{11}{7}$. ¿Qué es lo que hicimos? Primero multiplicamos por -2 la primera ecuación para hacer que aparezca un -2 multiplicando a la x. Esto lo hicimos con la intención de que, al sumarle luego la segunda ecuación, la variable x desaparezca (ya que aparece acompañada de un 2 en dicha ecuación). De esta manera, hemos despejado y, *operando con las ecuaciones*. ¿Se les ocurre qué operaciones podríamos aplicarle a las ecuaciones del sistema para eliminar la variable y en lugar de la x? Una posibilidad es multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2.Así, la variable y aparece con coeficiente 6 en la primera nueva ecuación y con coeficiente -6 en la segunda. Al sumarlas, se cancelarán y podremos despejar x. Este método se lo suele llamar *método de eliminación* y será el que utilizaremos para mecanizar el proceso de resolución de ecuaciones. A continuación, lo desarrollaremos más en detalle.

Como vimos más arriba, si tenemos un sistema de ecuaciones lineales y hacemos algunas operaciones sobre sus ecuaciones (multiplicarlas por algún número y sumarlas o restarlas entre sí) obtenemos nuevas ecuaciones que *son válidas*.

Importante Cualquier ecuación que se pueda obtener de las ecuaciones de un sistema con las operaciones recién descriptas, es una ecuación válida, en el sentido que las soluciones de la ecuación original deben verificar también estas nuevas ecuaciones. ■

Si empezamos a armar nuevas ecuaciones, que en principio serán más sencillas que resolver que las originales, tendremos muchas ecuaciones que se irán agregando (las originales más las nuevas que vamos armando). La pregunta es ¿son necesarias considerar todas? Si revisamos el ejemplo que resolvimos utilizando el método de eliminación, luego de armar la nueva ecuación, la sumamos a la segunda ecuación del sistema original (para poder despejar y) y, luego, usamos la primera ecuación para reemplazar por $y = \frac{11}{7}$ y despejar x. Observemos que no volvimos a usar la segunda ecuación después de hacer la suma de ecuaciones. Es decir, terminamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -7y = -11 \end{cases}$$

En general, esto es lo que vamos hacer: ir *reemplazando* las "viejas" ecuaciones por "nuevas" ecuaciones más sencillas, de manera de transformar el sistema original que teníamos en otro sistema (con nuevas ecuaciones), y que este nuevo sistema *tenga la misma cantidad de ecuaciones (o menor) y, además, que las soluciones de este nuevo sistema sean las mismas que las del sistema original*. Cuando dos sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas soluciones se dice que son *equivalentes*. Por la misma definición, es igual resolver cualquiera de los dos sistemas (ambos dan idénticas soluciones). Lo que vamos a hacer, entonces, es ir construyendo sistemas equivalentes al original que sean más sencillos de resolver. En resumen:

- Dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen las mismas soluciones se llaman equivalentes (podemos elegir cualquiera de los dos para resolver).
- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo deja un sistema equivalente al original (en el sentido que *reeplazamos* una ecuación por la ecuación que se obtiene de la original multiplicando a ambos lados por el mismo número no nulo).
- Sumar dos ecuaciones y reemplazar alguna de las ecuaciones originales que sumamos por dicha suma deja un sistema equivalente al original (por ejemplo, si sumamos las ecuaciones i y j, podemos reemplazar la ecuación i por esta nueva ecuación obtenida de la suma entre las ecuaciones i y j).

¿Se les ocurre alguna otra operación entre ecuaciones que no altere las soluciones? Hay una que es tan obvia que a veces se nos puede pasar:

- ¡Intercambiar la posición de dos filas en el sistema de ecuaciones deja un sistema equivalente!

Es decir, al escribir la ecuación i en el lugar donde estaba escrita la ecuación j y escribir la ecuación j donde estaba escrita la ecuación i, deja un sistema equivalente (así como el sistema no cambia si lo escribimos en la computadora, en una hoja de papel o pizarrón). Esta operación natural será sumamente útil a la hora de mecanizar el proceso de resolución en los próximos apartados.

Observación 19 *Destacamos que dos sistemas equivalentes no tienen porqué tener las misma cantidad de ecuaciones. Por ejemplo, si a un sistema le agregamos una ecuación que resulte de la suma de dos ecuaciones anteriores, entonces, el nuevo sistema sigue siendo equivalente al original (pues la ecuación que agregamos se deduce de los anteriores, por lo que no es realmente una nueva restricción) pero tiene una ecuación más* *que el original. Cuando nosotros hablamos de conseguir sistemas equivalentes "que tengan la misma cantidad de ecuaciones que el original" pensamos en* simplificar *el procedimiento para resolver el sistema (por eso* reemplazamos *ecuaciones y no solo las* agregamos*). Algo mejor aún que mantener la cantidad de ecuaciones original es* reducir *dicha cantidad. ¡Y esto se puede hacer en muchos casos! Por ejemplo, consideren el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -x+3y=4 \\ -5x+4y=13 \end{cases}$$

Multipliquemos la primera ecuación por -1 *y la segunda ecuación por* 3*:*

$$\begin{cases} -2x-5y=1 \\ -3x+9y=12 \\ -5x+4y=13 \end{cases}$$

Ahora, reemplacemos la segunda ecuación por la suma de las primeras dos:

$$\begin{cases} -2x-5y=1 \\ -5x+4y=13 \\ -5x+4y=13 \end{cases}$$

¡Hemos obtenido una ecuación que ya teníamos! Y esto lo hicimos "operando" con las primeras dos ecuaciones. Esto nos indica que la tercera ecuación en realidad no era una nueva restricción del sistema, sino que ya estaba contemplada en las dos primeras ecuaciones. En este sentido, la tercera ecuación original "está de más" y podríamos removerla. Para pensarlo más analíticamente, podemos seguir haciendo operaciones entre las ecuaciones para "eliminarla". En efecto, multipliquemos ahora la segunda ecuación por -1*:*

$$\begin{cases} -2x-5y=1 \\ 5x-4y=-13 \\ -5x+4y=13 \end{cases}$$

Si ahora reemplazamos la última ecuación por la suma de las ecuaciones 2 y 3, obtenemos:

$$\begin{cases} -2x-5y=1 \\ 5x-4y=-13 \\ 0=0 \end{cases}$$

Aquí vemos que, efectivamente, podemos hacer desaparecer la última ecuación (notar que una ecuación de la forma @=@, donde @ representa cualquier fórmula *no indica ningún tipo de restricción, ya que* siempre algo es igual a sí mismo*). En este caso, podemos olvidarnos de esta expresión* $0=0$ *y quedarnos con el sistema:*

$$\begin{cases} -2x-5y=1 \\ 5x-4y=-13 \end{cases}$$

Un tipo importante de sistemas de ecuaciones lineales son los que tienen todas sus ecuaciones igualadas a 0.

Definición 45 Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es *homogéneo* si todas las ecuaciones del sistema se encuentran igualadas a cero.

Estos sistemas están relacionados con las soluciones de *todos* los sistemas de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneos). No entraremos en detalle de esta relación aquí. Simplemente mencionaremos que los sistemas lineales homogéneos siempre tienen al $(0, 0, \ldots, 0)$ como solución.

5.1.3 Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Cuando buscábamos intersecciones entre subespacios lineales, en algunas ocasiones los objetos estudiados no se cortaban: plano paralelos, plano y recta paralelos, rectas paralelas o alabeadas. Desde el punto de vista algebraico, lo que sucedía con los sistemas de ecuaciones lineales que se armaron para buscar la intersección, es que al resolverlos, nos devolvían una inconsistencia que era indicativa de que *no había solución simultánea para las ecuaciones del sistema*. La primera clasificación entre sistemas de ecuaciones lineales es si tienen o no solución. Un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se llama un *sistema incompatible*. Por supuesto, la expresión proviene del hecho de que las ecuaciones que forman parte del sistema son incompatibles entre ellas (no "compatibilizan" en ningún punto). Por el contrario, los sistemas que admiten *al menos* una solución se llaman entonces *sistemas compatibles*. Vimos también que cuando buscamos la intersección de un plano y una recta no paralelos entonces la intersección es un punto solo. En este caso, algebraicamente despejamos todas las variables y obtenemos el punto en cuestión. Por otro lado, cuando buscamos la intersección de dos planos no paralelos, dicha intersección es necesariamente una recta (y, algebraicamente, obtenemos una ecuación vectorial para esa recta). En particular, había infinitos puntos en la intersección (todos los puntos de la recta). Desde el punto de vista algebraico, esto quería decir que había infinitos puntos que eran solución del sistema de ecuaciones lineales que armamos para estudiar la intersección (que consistía en las ecuaciones implícitas de los planos involucrados). Por lo tanto, hay una clasificación más específica para los sistemas compatibles: *tienen una única solución o tienen infinitas soluciones*. En el primer caso, los sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución se llaman sistemas compatibles *determinados*, y los que tienen infinitas, sistemas compatibles *indeterminados*. Por supuesto, el término "determinado" proviene del hecho que la solución a dicho sistema está completamente determinada: hay una sola. Por el contrario, un sistema compatible indeterminado tiene solución (pues es compatible) pero no está unívocamente determinada: hay infinitas. A continuación, resumimos esta clasificación.

Definición 46 Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

- **Compatible determinado:** si tiene una *única* solución.
- **Compatible indeterminado:** si tiene *infinitas* soluciones.
- **Incompatible:** si *no* tiene soluciones.

Observación 20 *Por lo visto a partir de la definición 45, los sistemas homogéneos no pueden ser incompatibles: o tienen como única posible solución el vector nulo, o tiene infinitas soluciones*

La única manera de clasificar un sistema es resolverlo. Y ya tenemos mucha experiencia resolviendo sistemas de ecuaciones: la que adquirimos en el capítulo 2.
En los siguientes ejemplos vamos a mostrarles cómo clasificar y hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones. Si bien en estos casos no se está representando rectas o planos, el procedimiento algebraico es el mismo, por lo que podrán seguir los razonamientos y entender los resultados.

■ **Ejemplos 47** Vamos a clasificar distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales (en compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles).

1. Consideremos el sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$
De la segunda ecuación podemos despejar $x = 2z - y$. Al reemplazar en la primera ecuación, obtenemos $-5y + 6z = 2$, de donde $y = -\frac{2-6z}{5}$. Podemos actualizar el despeje original de x con esta nueva información: $x = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$. Finalmente, reemplazamos los despejes de x e y en la última ecuación para obtener $-\frac{12}{5}z + \frac{4}{5} = 1$. Despejamos z y conseguimos $z = -\frac{1}{12}$. Al reemplazar esta información en los despejes de x e y, obtenemos $x = \frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el único vector solución de este sistema es $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$. Concluimos que el sistema es compatible determinado.
2. Consideremos ahora el sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$
Este sistema es homogéneo, por lo que seguro es compatible. Debemos determinar si es determinado (única solución $(0, 0, 0)$) o indeterminado. De la tercera ecuación, despejamos $z = -2x$. Al reemplazar esta información en la segunda: $5x + y = 0$, de donde $y = -5x$. Finalmente, si reemplazamos estos despejes en la primera ecuación: $x - (-5x) + 3(-2x) = 0$; es decir, $0 = 0$. Como no hay más restricciones para imponer, entonces la variable x queda libre, por lo que un vector de la forma $(x, -5x, -2x)$ es solución del sistema, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(1, -5, -2)$ verifica las tres ecuaciones. El sistema es compatible indeterminado.
3. Consideremos finalmente el sistema:
$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = -4. \end{cases}$$
De la primera ecuación, $x = 1 - 2z$ y, de la segunda, $y = 1 + z$. Si reemplazamos esta información en la tercera ecuación, hallamos $2 + 2z = 6$, de donde $z = 2$. Por lo tanto, $x = -3$ e $y = 3$. Debemos verificar que el vector $(-3, 3, 2)$ es solución también de la última ecuación; pero $2(-3) - 3{,}3 + 2 = -13 \neq 4$. Por lo tanto, el sistema es incompatible.

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.1?

- Introducimos los sistemas de ecuaciones lineales y estudiamos métodos “a mano” para resolverlos de manera directa.
- Definimos lo que significa que dos sistemas sean equivalentes (que tengan las mismas soluciones) y vimos algunas operaciones que se pueden realizar sobre las ecuaciones de un sistema para obtener otros sistemas equivalentes al original.
- Clasificamos los sistemas de ecuaciones lineales en compatibles determinados (poseen una única solución), compatibles indeterminados (poseen infinitas soluciones) e incompatibles (no poseen solución).

■

5.2 Matrices

Vamos ahora a estudiar cómo mecanizar el problema de clasificar y/o resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Las matrices de coeficientes reales.
- Cómo utilizar matrices para clasificar y resolver sistemas de ecuaciones lineales usando el método de triangulación.

5.2.1 ¿Qué es una matriz?

A grandes rasgos, una matriz es un "arreglo rectangular de números" como en el siguiente caso:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \sqrt{2} & -5 \\ -12 & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este arreglo tiene tres filas y cuatro columnas. En cada cruzamiento entre una fila y una columna hay un número, que se llama *entrada* (no pueden quedar "huecos" vacíos). Por lo tanto, una matriz de n filas y m columnas siempre tiene nm entradas. En este caso, tenemos 12 entradas. La manera de especificar una entrada determinada es dando su ubicación en el arreglo, es decir, a qué fila y columna pertenece. En este ejemplo, la entrada $1-2$ (primera fila, segunda columna) es el número 4 y la entrada $3-3$ (tercera fila, tercera columna), es el número 0. Si recordamos lo visto en el apartado anterior, esta manera de especificar una entrada en una matriz es la misma que utilizamos para especificar un coeficiente en un sistema de ecuaciones lineales. Esto, por supuesto, no es casualidad. Entonces, ¿cómo podemos escribir genéricamente una matriz de n filas y m columnas? De la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1m-1} & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Aquí, el símbolo a_{ij} representa la entrada $i-j$; es decir, el número en la i-ésima fila y j-ésima columna (como hacíamos para los coeficientes de los sistemas lineales). Como hay n filas y m columnas entonces i toma los valores entre el 1 y el n, y j los valores entre 1 y m. Una matriz de n filas y m columas se llama, abreviadamente, una *matriz de* $n \times m$. En este libro solo estudiaremos matrices donde las entradas son número reales. El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con entradas reales se nota $\mathbb{R}^{n\times m}$ y comenzaremos a escribir $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ para decir que *A es una matriz de n filas y m columnas.*

Ejemplo 48 Al pensarlas como "arreglos rectangulares", las matrices pueden tener muchas formas. El ejemplo que dimos antes el resultado es un rectángulo "acostado"; es decir, de más columnas que filas. Pero podemos tener una matriz con la forma de un rectángulo "parado": por ejemplo, la siguiente matriz de 4 filas y 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

También, una matriz puede tener una única fila (o una única columna). En el primer caso, la matriz se parece a un vector (sin las comas entre los coeficientes); y en el segundo caso, a un vector parado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la derecha se encuentra en $\mathbb{R}^{1\times 5}$ y la de la derecha en $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Finalmente, un tipo especial de matriz es la *matriz cuadrada*: las que tienen igual cantidad de filas que de columnas. Más adelante veremos que este tipo de matrices son muy importantes en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales. ■

Analicen qué representan las matrices de $\mathbb{R}^{1\times 1}$

5.2.2 ¿Cómo se relacionan las matrices con los sistemas lineales?

De forma muy sugerente, la especificación de entradas de una matriz es la misma que la de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, por lo que no debería sorprendernos que lo que haremos será ubicar a los coeficientes del sistema en una matriz (respetando su ubicación como coeficiente) y trabajar directamente (y solamente) con la matriz. Retomemos el ejemplo utilizado en el apartado anterior para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

En esa ocasión, multiplicamos la primera ecuación por -2 y, después, la sumamos a la segunda ecuación para obtener una ecuación que no tuviera la incógnita x (la *eliminamos*). Si lo pensamos gráficamente sucede lo siguiente: después de multiplicar la primera ecuación por -2 obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Ahora bien, cuando sumamos, lo que hacemos es sumar los coeficientes correspondientes a las x, por un lado, primero, a los correspondientes a las y, por otro, y a los coeficientes libres, por otro.

$$\begin{array}{ccccccc} & -2x & + & (-4)y & = & -10 \\ + & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2x & + & (-3)y & = & -1 \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 0x & + & (-7)y & = & -11 \end{array}.$$

Cabe destacar que, en realidad, en este esquema geométrico de la suma de las ecuaciones, *no estamos realmente utilizando las incógnitas x e y, solo los coeficientes que las acompañan*. Esto se debe a que, dentro de cada ecuación, hemos escrito a los términos que contienen la variable x “a la izquierda” y los que contienen a las variable y “a la derecha”; por lo cual se podría simplemente decir: “sumemos entre sí los términos que se encuentran en la columna de la izquierda (en cada ecuación) y entre sí lo que se encuentran en la columna de la derecha (en cada ecuación)”. De la misma forma, si tuviéramos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas x, y, z. A cada ecuación, la vamos a escribir de manera que el término de las x lo ubicaremos siempre primero (de izquierda a derecha), seguido del de las y y, por último, el de las z. Entonces, cuando sumemos las ecuaciones, alcanza con sumar el primero coeficiente de la primera ecuación con el primero de la segunda (y el resultado va a ser el coeficiente que acompañe a la incógnita x en la nueva ecuación), el segundo coeficiente de la primera ecuación con el segundo de la segunda (que será el coeficiente que acompañe al de las y en la nueva ecuación) y el tercero de la primera con el tercero de la segunda (el coeficiente que acompañe a z). Por supuesto, "del otro lado del igual" sumamos los coeficientes libres entre sí. Por ejemplo, si queremos sumar las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} -x+3y-4z=1 \\ 2x-2y+z=-2 \end{cases}$$

podemos olvidarnos de las variables y escribir:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -1 & + & 3 & + & (-4) & = & 1 \\ + & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2 & + & (-2) & + & 1 & = & -2 \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & + & 1 & + & (-3) & = & -1 \end{array},$$

de donde obtenemos que la nueva ecuación es $x+y-3z=-1$. Esta manera de ver la suma de ecuaciones pone en evidencia la relación entre los sistemas lineales y las matrices: para resolver un sistema lineal podemos utilizar el método de eliminación (que consiste en multiplicar las ecuaciones por números no nulos y sumar las ecuaciones entre sí); y si acomodamos las variables en orden, no necesitamos representar las incóngnitas para hacer estas operaciones, nos alcanza con los coeficientes. Por lo tanto, podemos condensar la información de un sistema de ecuaciones lineales en una matriz, la *matriz de los coeficientes del sistema*, y trabajar más cómodamente solo con estos números. Veamos esto en un ejemplo. Consideremos nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

Aquí tenemos a la variable x ubicada en la primera posición (empezando desde la izquierda) de todas las ecuaciones. Al considerar todas las ecuaciones al mismo tiempo podemos decir que *las x están en la primera columna del sistema*. Por otro lado, las y quedan necesariamente en la segunda ecuación del sistema, y los coeficientes libres en una tercera columna (del otro lado del igual). Por lo tanto, podemos asignarle a este sistema la siguiente matriz *ampliada*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Aquí, la barra $|$ que separa la segunda y tercera columna de la matriz está marcando que la columna a la derecha corresponde a los coeficientes "del otro lado del igual"; es decir, los que no son coeficientes de ninguna incóngnita. Esta matriz se llama la *matriz ampliada asociada al sistema*. El término "ampliada" proviene del hecho de que es una matriz con los coeficientes del sistema *y además* con los coeficientes libres (que se anotan del otro lado de la barra). La matriz sin los coeficientes libres es lo que se conoce como *matriz asociada al sistema* (a secas). Más adelante, veremos que la información pertinente del sistema está contenida en la matriz del sistema. ¿Cómo se lee la matriz ampliada en relación con el sistema de ecuaciones lineales original? Pues como lo armamos:

- Cada fila corresponde a cada ecuación del sistema: está formada por los coeficientes que acompañan a las incógnitas (y los coeficientes libres en el caso de la ampliada).
- Las entradas en la misma columna corresponden a los coeficientes *de la misma incógnita*.

- La barra vertical nos está diciendo que las entradas a la derecha de la barra son los que corresponden a los coeficientes libres del sistema.

Por ejemplo, si nos dan la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 0 \\ 11 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

entonces estamos pensando en el sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 11x - y = -2. \end{cases}$$

De esta manera, podemos ir de la teoría de sistema de ecuaciones lineales a la teoría de matrices, y viceversa. Pero ¿para qué quisimos lograr esto? Porque de esta manera, *las operaciones entre las ecuaciones se transforman en operaciones entre las filas de la matriz*. En efecto, multiplicar una ecuación por un número real no nulo equivale a multiplicar la fila correspondiente a dicha ecuación por este número (donde multiplicar una fila por un número consiste simplemente en multiplicar por dicho número cada entrada *de esa fila únicamente*), y sumar dos ecuaciones corresponde a sumar las dos filas correspondientes a esas ecuaciones (sumando las entradas en la misma columna entre esas dos filas). De esta manera, queda mecanizado el método de eliminación. Partamos una vez más de la ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Cuando resolvemos por eliminación este sistema, primero multiplicamos por -2 la primera ecuación. En este contexto, debemos multiplicar por -2 la primera fila. Así, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Finalmente, sumamos las dos ecuaciones resultantes y reemplazamos la segunda ecuación por la suma de las dos ecuaciones que teníamos. En este caso, dicha operación entre ecuaciones corresponde a sumar ambas filas y reemplazar la fila 2 por esta suma. De esta manera, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

En función de los trabajado en el apartado anterior sobre sistemas de ecuaciones equivalentes, esta matriz corresponde a un sistema de ecuaciones lineales que es *equivalente al original*. Observemos, de hecho, que la ecuación que se desprende de la segunda fila de la matriz es precisamente $-7y = -11$, como habíamos despejado originalmente. Por lo tanto, el sistema asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ -7y = -11 \end{cases}$$

que ya vimos que es más fácil de resolver. El procedimiento utilizado recién se puede notar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{multiplicar fila 1 por 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazar fila 2 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, al hacer *operaciones de filas* en la matriz asociada a un sistema, encontramos otro sistema equivalente al original. Para terminar con este apartado, vamos a mostrar cómo se puede llevar "hasta el final" esta metodología de hacer operaciones en las filas de una matriz para resolver completamente el sistema original. Retomemos donde dejamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

Ahora, multipliquemos la segunda fila por $-\frac{1}{7}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right)$$

Mutipliquemos ahora la segunda fila por 4:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right)$$

y a continuación reemplacemos la primera fila por la suma de ambas filas:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -\frac{26}{7} \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right)$$

Finalmente, multiplicamos la primera fila por $-\frac{1}{2}$ y, la segunda, por $\frac{1}{4}$, para obtener:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right)$$

Pero, ¿cuál es el sistema asociado a esta matriz? Simplemente, es el siguiente:

$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Es decir, ¡usando operaciones de fila en la matriz ampliada asociada al sistema hemos resuelto completamente el sistema! La notación del procedimiento que hicimos fue la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{multiplicar fila 1 por 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazar fila 2 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{mult. fila 2 por } -\frac{1}{7}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{mult. fila 2 por 4}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 41 & \frac{44}{7} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reempl. fila 1 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -\frac{26}{7} \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{y fila 2 por } \frac{1}{4}]{\text{mult. fila 1 por } -\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right).$$

En el siguiente apartado veremos que en este procedimiento hemos hecho un montón de cuentas y pasos de más de los que realmente necesitamos (en este ejemplo concreto, con cuatro pasos puede obtenerse la matriz final). Lo hicimos de esta manera para poner en evidencia las ideas que existen detrás de este método de resolución.

5.2.3 Triangulación de matrices

En este apartado, se establecerán las bases de la mecanización de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando matrices. A este proceso se denomina *triangulación* de la matriz.

Más arriba vimos que la idea para resolver un sistema de ecuaciones lineales era contruir la matriz asociada al sistema y realizar operaciones entre las filas hasta hallar una matriz que represente un sistema de ecuaciones equivalente, más sencillo para resolver. Pero ¿qué tanto más sencillo? Al final del apartado anterior, vimos cómo obtener una matriz con unos "1" en la diagonal, lo que traducido al campo de las ecuaciones, daba directamente las soluciones. Esta es, obviamente, la ecuación más útil pero a veces, lograr que una matriz tenga esta forma implica muchos cómputos. Existe una situación intermedia en la que no hay que hacer tantas operaciones de fila pero, sin embargo, la matriz que obtenemos nos provee un sistema fácil de terminar de resolver. Para ver cuál es, consideren el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ -y + 5z = -13 \\ 3z = -9 \end{cases}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas x, y, z. Tiene la peculiaridad que, en la segunda ecuación, no aparece la variable x (o, en realidad, el coeficiente a_{21} que acompaña a la variable x en la segunda ecuación es 0) y en la tercera ecuación no aparecen ni la variable x ni la y (los coeficientes a_{31} y a_{32} son 0). Notemos que este sistema puede resolverse por sustitución de manera directa. En efecto, de la última ecuación simplemente podemos despejar $z = -3$ y reemplazar esto en la segunda ecuación para obtener $-y + 5(-3) = -13$, de donde podemos despejar $y = 2$. Finalmente, al reemplazar por $z = -3$ e $y = 2$ en la primera ecuación, obtenemos $2x - 6 - 6 = 4$, de donde $x = 8$. ¿Cómo es la matriz (no ampliada) asociada a un sistema de esta forma? En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos que *debajo de la diagonal formada por las entradas* a_{11}, a_{22}, a_{33} *hay solo ceros*. Esta diagonal (de arriba a la izquierda a abajo a la derecha), se llama *diagonal principal de la matriz*. Una matriz de esta forma se denomina *matriz triangular*, pues debajo de la diagonal queda gráficamente un triángulo de ceros. Llevamos nuestra matriz del sistema a una matriz triangular, en consecuencia obtenemos un sistema que es muy directo de resolver (como explicamos recién mediante el método de sustitución). Por este motivo el método de resolución que vamos a desarrollar se llama *triangulación*: porque vamos a "triangular" la matriz es decir, llevarla a una matriz triangular.

5.2.4 ¿Cuáles son las operaciones que podemos hacer con las filas de una matriz?

Antes de empezar a triangular matrices debemos tener en claro cuáles son las operaciones que podemos aplicar a las filas de una matriz de manera tal que, los sistemas asociados a las nuevas matrices, sigan siendo equivalentes al sistema original. Ya vimos que es posible multiplicar una matriz por un número no nulo y reemplazar una fila por la suma de otras filas. Vamos a hacer bien precisas y más generales estas operaciones y, además, incluir la posibilidad de intercambiar ecuaciones. Estas operaciones se llaman *operaciones elementales de fila*:

Importante Sea A una matriz de n filas y m columnas y llamemos $F_1, \ldots, F_n$ las n filas de A (F_1 es la primer fila, F_2 la segunda, etc). Las siguientes operaciones en las filas de A no cambian la equivalencia del sistema de ecuaciones lineales asociado:

1. *Intercambiar dos filas.* Para cualquier elección de $1 \leq i, j \leq n$, cambiamos la matriz A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B está la fila F_j de A y en la fila j de B está la fila F_i de A.
2. *Multiplicar una fila por un número* no nulo. Para cualquier número $\lambda \in \mathbb{R}$ **distinto de cero** y cualquier elección de $1 \leq i \leq n$, cambiamos la matriz A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B aparece la fila F_i de A multiplicada por λ.
3. *Cambiar una fila por ella misma más un múltiplo de otra fila.* Para cualquier elección de $1 \leq i, j \leq n$ y cualquier número $\lambda \in \mathbb{R}$, cambiamos A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B está la fila que se arma haciendo la cuenta $F_i + \lambda F_j$ (es decir, donde antes estaba la fila F_i en A ahora aparece dicha fila pero sumado λ veces la fila j de A).

■

Algunos comentarios importantes. En primer lugar, la primera operación que definimos sobre intercambiar dos filas de la matriz, que no veníamos utilizando, es la que traduce a este contexto la idea de "intercambiar la posición de las ecuaciones" en el sistema de ecuaciones. En segundo lugar, ya vimos que multiplicar una ecuación por un número *no nulo* no alteraba la ecuación. Esto es precisamente lo que dice la segunda operación. Finalmente, la tercera operación válida para operar con las filas de una matriz es un poco diferente a lo que veníamos haciendo. El motivo es que la escribimos de una manera más general (para poder ahorrarnos cuentas a futuro). Vamos a explicar esto: lo que dice la tercera operación es que podemos *reemplazar una fila por "ella misma" sumada a un "múltiplo de otra fila"*. Si repasan el sistema que resolvimos al final del apartado anterior, habíamos comenzado multiplicando la primera fila por -2 para lograr que apareza un -2 en la entrada a_{11} con el objetivo de que, al sumar luego las filas F_1 y F_2, se eliminara la entrada en la posición a_{21} (que era un 2). Pero cabe destacar que, en realidad, no nos importa poner un -2 en el lugar a_{11} para que quede allí; solo lo ponemos temporalmente para poder eliminar el 2 de a_{21} (fíjense de hecho que al final del proceso con la matriz terminamos multiplicando la fila 1 por $-\frac{1}{2}$ para volver a obtener el 1 que teníamos en a_{11} al principio). Justamente, la tercera operación que acabamos de definir nos permite la eliminación del a_{21} sin modificar la fila F_1. En efecto, lo que podemos hacer es *reemplazar la fila F_2 por ella misma más -2 veces la fila F_1*. Tengamos en cuenta que esta operación solo afecta la fila F_2. Es decir, estamos reemplazando F_2 por $F_2 - 2F_1$. De esta manera, condensamos dos pasos en uno solo. Esta operación es la más importante de las tres, ya que es la que nos permitirá eliminar entradas para llegar a triangular la matriz).

Para simplificar la escritura del proceso de triangulación de una matriz, vamos a escribir las diferentes operaciones de la siguiente manera:

- Intercambiar las filas F_i y F_j, se nota $F_i \times F_j$.
- Multiplicar la fila F_i por λ, se nota λF_i.
- Reemplazar la fila F_i por $F_i + \lambda F_j$, se nota $F_i \to F_i + \lambda F_j$.

Veamos con un ejemplo el proceso de triangulación de una matriz. Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora, interpreten las operaciones que le vamos haciendo a la matriz para triangularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + (-1)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Y hemos llegado a una matriz triangulada.

A continuación, explicaremos en detalle el procedimiento que hicimos. Recuerden que el objetivo es lograr ceros debajo de la diagonal principal. En primer lugar, conseguimos los ceros de la primera columna (debajo de la entrada a_{11}), luego, ceros de la segunda columna (debajo de la entrada a_{22}) y así, en adelante. Empezamos buscando poner un 0 en la posición a_{21}; para esto, alcanza con restarle a la fila F_2 la fila F_1 (ya que las entradas en la columna 1 son 1 para las dos filas). Por lo tanto, le sumamos a la fila F_2 la fila F_1 multiplicada por -1 (esta es la manera de restar: sumar multiplicando por -1). Observemos que el resto de las filas quedan iguales: solo modificamos la fila F_2. A continuación, y siguiendo nuestro plan, necesitamos conseguir un 0 en el lugar a_{31}, donde hay un -2. Entonces, podemos sumarle a la fila F_3 el doble de la fila F_1: $F_3 \to F_3 + 2F_1$ pues $2F_1$ tiene un 2 en el primer lugar y sumado al -2 del primer lugar de F_3 nos da el 0 buscado. Bien, hemos conseguido ceros debajo de la primera columna. Ahora debemos buscar el cero debajo de la segunda columna (hay uno solo que ubicar, el del lugar a_{32}). Pero antes de hacer esto, nosotros hicimos un par de operaciones que nos facilitarán las cuentas por venir. En efecto, la siguiente operación llevada a cabo es multiplicar la fila F_2 por $\frac{1}{2}$. El objetivo es simplificar los números de la matriz: como *todas* las entradas de la fila F_3 eran múltiplos de 2 podemos dividir todos por 2 y obtener números más pequeños. Además de este ajuste, también hacemos el intercambio de filas F_2 y F_3. El objetivo de este intercambio es dejar un 1 en la posición a_{22}, de manera tal que nos permita que la última operación, que ubica un 0 en la posición a_{32}, sea $F_3 \to F_3 + 3F_1$. Cabe destacar que si hubiéramos querido conseguir un cero en dicha posición sin intercambiar las filas, tendríamos que haber utilizado la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$

Al intercambiar filas, evitamos hacer cuentas con fracciones. Finalmente, conseguimos un 0 en la posición a_{32} al reemplazar la última fila por ella misma más tres veces la segunda (observemos que tener un 1 en la posición a_{22} hace que esta operación sea directa y no involucre fracciones). Tengamos en cuenta que, si bien ya obtuvimos la matriz triangulada, podemos multiplicar la fila 3 por $\frac{1}{14}$ para obtener una matriz con unos (1) en la diagonal (para la que sería mucho más fácil de resolver el sistema lineal asociado).

En los ejemplos presentados, triangulamos matrices de 2×2 y 3×3, que son casos de matrices cuadradas. El proceso de triangulación puede llevarse a cabo para cualquier tipo de matriz (aunque no sea cuadrada), pero el concepto de qué significa una matriz triangular que no sea cuadrada quizá no esté claro aún. Por esta razón, a continuación, precisaremos las nociones de triangulación.

Definición 47 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- La diagonal determinada por las entradas a_{11}, a_{22}, etc... se llama *diagonal principal* de la matriz.
- A se dice *triangular* si solo hay ceros debajo de la diagonal principal; es decir, las entradas a_{ij} son 0 para $i > j$.

Observación 21 *La diagonal principal es la diagonal que empieza en la entrada que está en la primera fila y en la primera columna, y que se mueve hacia la derecha y hacia abajo en cada paso. Si la matriz no es cuadrada, no va a terminar en la esquina inferior derecha: si A tiene más filas que columnas, la diagonal se "choca con el piso de la matriz"; si tiene más columnas que filas, se "choca con el paréntesis derecho de la matriz".*

Es importante tener en cuenta que consideramos que una matriz es triangular si tiene los ceros debajo de la diagonal *independientemente de las entradas que tenga en la diagonal o arriba de ella* (podría tener ceros (0) en la diagonal principal, o arriba de ella). Cerramos este apartado, dando ejemplos de triangulación de varios tipos de matrices.

■ **Ejemplos 49** Las siguientes matrices están trianguladas:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ dada por:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
2. $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ dada por:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ dada por:
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & \sqrt{2} & \pi & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.2?

- Definimos una matriz con entradas reales.
- Analizamos cómo asociar una matriz a un sistema de ecuaciones lineales: la matriz de coeficientes del sistema.
- Estudiamos cómo triangular una matriz: llevarla a una matriz triangular (con ceros debajo de la diagonal principal) utilizando las operaciones de filas permitidas (que no alteran la equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a estas matrices).

■

5.3 Resolución y clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver y clasificar sistema de ecuaciones lineales, retomemos los aspectos teóricos que acabamos de desarrollar. Veremos que, para clasificar un sistema, no necesitamos calcular las soluciones: al terminar el proceso de triangulación de la matriz, será posible determinar de qué tipo se trata.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo resolver y clasificar sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de triangulación.
- Cómo resolver sistemas con parámetros.

■

5.3.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

A continuación, mostraremos cómo se resuelven algunos sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de triangulación. Comencemos por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada asociado al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Luego, triangulamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema asociado a esta matriz triangulada es:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ -3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 7x_3 = 4 \end{cases}$$

De la última ecuación podemos despejar $x_3 = \frac{4}{7}$. Si reemplazamos esta igualdad en la segunda ecuación, obtenemos $-3x_2 + 7(\frac{4}{7}) = 0$; donde podemos despejar $x_2 = \frac{4}{3}$. Finalmente, reemplazando en la primera ecuación los valores hallados para x_2 y x_3, obtenemos $x_1 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{4}{7} = -1$; donde $x_1 = -1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{7} = \frac{31}{21}$. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es $(\frac{31}{21}, \frac{4}{3}, \frac{4}{7})$.

Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada asociado al sistema y triangulamos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, armamos el sistema asociado a esta matriz triangulada:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

La última ecuación nos dice $x_3 = 1$. Al reemplazar esta información en la segunda ecuación hallamos que $-2x_2 + 3 + x_4 = 4$, donde podemos despejar $x_4 = 2x_2 + 1$. Esto nos dice que x_4 depende de x_2 (por lo que si conocemos x_2, el valor de x_4 quedará determinado de manera unívoca). Finalmente, reemplacemos toda la información que tenemos en la primera ecuación (es decir, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2x_2 + 1$) para obtener $x_1 + 3x_2 - 1 = -2$. De aquí, podemos despejar $x_1 = -3x_2 - 2$. Lo que hemos conseguido hasta aquí es que $x_3 = 1$, y que tanto x_1 y x_4 dependen de x_2 de cierta manera. Y como no tenemos más ecuaciones que fuercen a x_2 a ser algún número en particular, esto quiere decir que no hay restricciones sobre esta variable. Es decir, *para cualquier $x_2 \in \mathbb{R}$, mientras que $x_1 = -3x_2 - 2$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2x_2 + 1$, el vector (x_1, x_2, x_3, x_4) será solución del sistema*. Vale decir, los vectores que son solución son de la forma $(-3x_2 - 2, x_2, 1, 2x_2 + 1)$ para cualquier $x_2 \in \mathbb{R}$. Notemos que podemos reescribir a un vector de esta forma como $x_2(-3, 1, 0, 2) + (-2, 0, 1, 1)$, como hacíamos en el capítulo 2 al buscar la ecuación vectorial de una recta a partir de su ecuación implícita. En general, escribiremos la solución de un sistema compatible indeterminado de esta manera. Formalmente, el conjunto de soluciones del sistema es entonces $\{\lambda(-3, 1, 0, 2) + (-2, 0, 1, 1) \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Por supuesto, se trata de una recta en $\mathbb{R}^4$.

Veamos otro ejemplo. Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

Armemos la matriz asociada y triangulemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Aquí obtenemos una contradicción en la ecuación asociada a la última fila: $0 = -1$. Por lo tanto, el sistema original es incompatible.

Resolver sistemas de ecuaciones homogéneos es un poco más sencillo que sistemas no homogéneos porque *no hace falta ampliar la matriz con una columna de términos independientes*. Esto se debe a que ninguna operación elemental de filas altera una columna de ceros "0", y pueden chequearlo ustedes mismos. Veamos entonces como resolver un sistema homogéneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Armamos la matriz (no ampliada) asociada y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación podemos despejar $x_3 = -2x_2 - 3x_4$; y al reemplazar esta igualdad en la primera ecuación obtenemos $x_1 + x_2 + (-2x_2 - 3x_4) + x_4 = 0$. Es decir, $x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$. Al despejar, por ejemplo, $x_1 = x_2 + 2x_4$, tenemos que x_1 y x_3 dependen de x_2 y x_4, y estas últimas incógnitas no tiene restricciones. Por lo tanto, los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son solución del sistema son de la forma $(x_2 + 2x_4, x_2, -2x_2 - 3x_4, x_4)$ con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Este vector lo escribimos como $x_2(1, 1, -2, 0) + x_4(2, 0, -3, 1)$, por lo que el conjunto de soluciones es $\{\lambda(1, 1, -2, 0) + \mu(2, 0, -3, 1) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Observemos que, geométricamente, los vectores que son solución pertenecen a un plano que pasa por el origen.

Finalmente, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Y resolvemos por triangulación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - \frac{1}{2}F_2]{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + \frac{5}{2}F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este modo, hemos arribado a una matriz triangular. Vemos que la última ecuación ha desaparecido (poniendo en evidencia que era una ecuación que se deducía de las otras, por lo que no introducía nuevas restricciones al sistema). El sistema asociado a esta última matriz (que sabemos que es equivalente al original) es:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar que la única solución es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

5.3.2 Clasificando sistemas de ecuaciones lineales

Solo consideraremos sistemas de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas.

Supongamos que tenemos un sistema S, que armamos la matriz asociada (ampliada) al sistema y que la triangulamos.

Trabajemos con el siguiente ejemplo de matriz triangulada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Por lo que el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = 4 \\ 5y + 2z = 2 \\ -8z = -7 \end{cases}$$

Anteriormente, arribamos a sistemas como este último y observamos que es posible ir despejando las variables "de abajo hacia arriba" (primero z, después y y finalmente x) de manera de obtener una única solución al sistema. Estamos en condiciones de hacerlo porque *las entradas en la diagonal principal de la matriz son no nulas*. Esto nos permite "pasar dividiendo" cada uno de los coeficientes que multiplican a las incógnitas (si fuesen 0, no podríamos hacer dicha división). Tengamos en cuenta que *no importa cuáles son los términos independientes del sistema*; este despeje *siempre* se puede hacer. Esto nos indica que la información sobre si el sistema es compatible determinado está contenida en la matriz *no ampliada* del sistema. Con lo visto recién podemos arribar a la primera conclusión.

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y, al triangular la matriz no ampliada asociada al sistema, todos los términos de la diagonal principal son no nulos, entonces el sistema es compatible determinado (independientemente de cuales sean los coeficientes independientes). ■

De esta manera, es posible clasificar (en parte) un sistema sin necesidad de calcular las soluciones del mismo: triangulamos la matriz asociada al sistema y vemos si aparece algún 0 en la diagonal principal. Si no aparece ninguno, el sistema es compatible determinado. Veamos entonces qué podemos decir si aparece un 0 en dicha diagonal. Supongamos que la matriz triangulada asume alguna de las siguientes formas:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \qquad A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \qquad A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 5 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

Aquí hemos puesto coeficientes independientes genéricos $a, b, c \in \mathbb{R}$. A_1 tiene un 0 en la primera entrada de la diagonal (coeficiente a_{11}), A_2 tiene un 0 en la segunda entrada de la diagonal a_{22} y A_3 en la última a_{33}. Observemos qué sucede en cada caso y analicemos en primer lugar, el caso de A_3. Aquí, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ 5y + 2z = b \\ 0 = c \end{cases}$$

Notemos que caben dos posibilidades:

- Si $c = 0$, entonces, la última fila desaparece y nos queda una matriz con una fila menos. En este caso, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ 5y + 2z = b \end{cases}$$

Si despejamos z de la segunda ecuación obtenemos $z = \frac{b-5y}{2}$; y al reemplazar con esta información en la primera ecuación obtenemos $2x + 7y - \frac{b-5y}{2} = a$. Al reordenar, $2x + \frac{19y}{2} = a + \frac{b}{2}$. A partir de esto, podemos despejar x y hallar $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} - \frac{19y}{4}$. Y ya no nos quedan más ecuaciones para despejar y. Es decir, hemos hallado que z depende de y y que x depende de y, pero *no hay restricciones para* y. Por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{R}$ podemos armarnos una solución de la forma $(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} - \frac{19y}{4}, y, \frac{b-5y}{2})$, entonces, hay infinitas soluciones.

- Si $c \neq 0$, entonces, llegamos a una contradicción, lo que nos indica que el sistema no tiene ninguna solución. Por lo tanto, es incompatible.

Veamos que sucede con el caso de A_2. Tengamos en cuenta que podemos "seguir triangulando" la matriz A_2 para obtener un sistema mucho más sencillo que el que nos da directamente. En efecto, haciendo el reemplazo $F_3 \to F_3 - 3F_2$, obtenemos:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-3b \end{array}\right)$$

Aquí nuevamente caben dos posibilidades:

- Si $c - 3b = 0$, entonces, desaparece la última fila y el sistema asociado queda:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ z = b \end{cases}$$

  Al reemplazar por $z = b$ en la primera ecuación, obtenemos $2x + 7y - b = a$, a partir de la cual tenemos $x = \frac{-7y+a+b}{2}$. Nuevamente, y queda a libre elección y el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $c - 3b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible.

Finalmente, en el caso de A_1, también podemos seguir triangulando y simplificar la matriz haciendo :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{array}\right)$$

Otra vez, analizamos las dos posibilidades.

- Si $c - b + 2a = 0$, nuevamente perdemos una ecuación y nos quedará una variable libre. Entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $c - b + 2a \neq 0$, el sistema es incompatible.

Por lo tanto, concluimos lo siguiente:

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y, al triangular la matriz no ampliada asociada al sistema, algún término de la diagonal principal es nulo, entonces el sistema es compatible indeterminado o incompatible. Para saber de cuál de los dos casos se trata, debemos analizar el sistema teniendo en cuenta los coeficientes independientes. ■

Por supuesto que, si el sistema original es homogéneo, entonces nunca puede darse una situación de un sistema incompatible. En este caso, la clasificación es mucho más sencilla.

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales *homogéneo* de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y triangulamos su matriz asociada, se pueden presentar las siguientes situaciones:

- Si ninguna entrada de la diagonal principal es nula, entonces, el sistema es compatible determinado.
- Si alguna entrada de la diagonal principal es nula, entonces, el sistema es compatible indeterminado.

5.3.3 Sistemas con parámetros

Los sistemas con parámetros son sistemas lineales donde no se conocen todos los coeficientes del sistema; esto es, uno o más coeficientes no están determinados, ya que son variables. Veamos cómo resolver y clasificar sistemas con parámetros por medio de varios ejemplos. Comencemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$. Los coeficientes a_{12}, a_{32} y a_{33} son desconocidos, aunque sabemos que son todos iguales (son iguales a cierto número real k). Para resolver el sistema, seguimos los mismos pasos que aprendimos: en primer lugar, armamos la matriz asociada al sistema (que en este caso no hace falta ampliarla pues el mismo es homogéneo) y, en segundo lugar, triangulamos. Al parámetro k lo tratamos como un número real más:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & k & k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -2k & -1 \\ 0 & -k & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & k-2 \\ 0 & -2k & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & k-2 \\ 0 & 0 & -2k+3 \end{pmatrix}$$

De esta manera hemos arribado a una matriz triangulada. Como vimos en el apartado anterior, si ninguna entrada en la diagonal es nula entonces el sistema es compatible determinado, *independientemente del resto de las entradas de la matriz*. Las únicas maneras de que se anule una entrada de la diagonal es que $-k = 0$, que anula la entrada a_{22}, o que $-2k + 3 = 0$, que anula la entrada a_{33}. En el primer caso, $k = 0$, y en el segundo, $k = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, *ya podemos concluir que, salvo para los casos $k = 0$ y $k = \frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado*. Observemos que no nos importa que en $k = 2$ se anula la entrada a_{23}, pues no está en la diagonal y, por lo tanto, no va a influir en el tipo de sistema. Con este procedimiento, hemos reducido el problema: ya sabemos el tipo de sistema para todo los valores reales que puede tener k a excepción de estos dos valores puntuales. Como el sistema es además homogéneo, sabemos que para los casos $k = 0$ y $k = \frac{3}{2}$ el sistema es compatible indeterminado. Tengamos en cuenta que, simplemente triangulando la matriz, ya podemos clasificar completamente el sistema para cada posible $k \in \mathbb{R}$. Hallemos las soluciones para cada k. Como el sistema es homogéneo, para los casos en los que el sistema queda compatible determinado, sabemos que la única solución es $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Solo nos resta exhibir las soluciones para los k que lo hacen indeterminado.

- Si $k = 0$ entonces el sistema original sería:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 &= 0 \end{cases}$$

de donde rápidamente podemos despejar que $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$. Como x_2 no aparece en las ecuaciones quiere decir que no hay restricciones para esa variable. Por ende, las soluciones de este sistema es el conjunto $\{\lambda(0, 1, 0) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Notemos que, en este caso, el sistema original con $k = 0$ nos quedó muy fácil de resolver. Pero esto no tiene porqué ser siempre así. Por eso, hay una manera más eficiente de encarar el problema de resolver el sistema para un k determinado. Observemos que, cuando triangulamos el sistema original, "arrastramos" el k por todas las cuentas, ya que como no sabíamos qué número era, lo tratamos como un número genérico. Esto quiere decir que *la triangulación que hicimos con el parámetro k desconocido vale para cualquier $k \in \mathbb{R}$*. Por lo tanto, si reemplazamos el k por un valor determinado a en el sistema y después lo triangulamos, vamos a obtener exactamente la misma matriz que obtuvimos al triangular con el k, solo que en lugar de k aparecerá a. Con esto queremos decir que, para resolver el sistema con $k = 0$, podemos trabajar con la matriz que obtenemos al reemplazar el valor k por 0 en la triangulación. En este caso, la matriz triangulada quedaría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y el sistema asociado:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

A partir de esto, podemos hallar el conjunto de soluciones como hicimos anteriormente.

- Si $k = \frac{3}{2}$ entonces el sistema original queda:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= 0 \end{cases}$$

mientras que la matriz obtenida al reemplazar el valor de k en la matriz triangulada nos deja:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo sistema asociado es:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{cases}$$

A partir de esto último queda en evidencia la conveniencia de evaluar el k en la matriz triangulada en lugar del sistema original. La segunda ecuación nos dice $x_3 = -3x_2$, y al reemplazar en la primera ecuación, hallamos que $x_1 = -\frac{9}{2}x_2$. Las soluciones en este caso son $\{t(-\frac{9}{2}, 1, -3) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Sigamos ahora con otro ejemplo. Resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

Cabe destacar que en este sistema, el parámetro k aparece de varias maneras (sólo, restado por 2 y elevado al cuadrado). Armamos la matriz ampliada y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema ya quedó triangulado sin necesidad de más operaciones. La diagonal se anula en $k = 1$ y $k = -1$, por lo cual, para todo $k \in \mathbb{R}$ distinto de estos valores, el sistema será compatible determinado. Como este sistema no es homogéneo, no sabemos a priori si para los casos $k = 1$ y $k = -1$, el sistema resulta compatible indeterminado o incompatible. Debemos analizar cada caso por separado.

- Si $k = -1$ entonces al reemplazar en la matriz triangulada obtenemos:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

  cuyo sistema asociado es:

  $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_3 = 1 \end{cases}$$

  De aquí despejamos $x_3 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 = \frac{1}{2} + x_2$. Por lo tanto, las soluciones son de la forma $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2} + x_2, x_2, -\frac{1}{2}) = x_2(1, 1, 0) + (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, con $x_2 \in \mathbb{R}$. Es decir, son el conjunto $\{t(1, 1, 0) + (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$.

- Si $k = 1$ la matriz queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Tengamos en cuenta que la última ecuación del sistema asociado es $0 = 1$, lo cual es un absurdo. Esto quiere decir que, en este caso, el sistema es incompatible.

A veces podemos encontrar parámetros en los coeficientes independientes. Por ejemplo, resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 = k + 2 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 2 \\ -4x_3 + k^2x_4 = -3k - 2 \end{cases}$$

Armamos y triangulamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 1 & k & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & k^2 & -3k-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -4 & k^2 & -3k-2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_4\to F_4-F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & -2k-2 \end{array}\right)$$

Este sistema solo puede anularse en la entrada a_{44} si $k=1$ o $k=-1$. Analizamos ambos casos.

- Si $k=-1$,la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Como el término independiente $-2k-2$ se anula también en -1 el resultado es que se ha anulado una ecuación, pero no hemos creado ninguna inconsistencia. Es fácil ver ahora que el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k=1$ la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

  En este caso, el término $-2k-2$ no se anula en $k=1$ por lo que obtenemos una inconsistencia $0=-4$ en la última ecuación y el sistema resulta incompatible.

Finalmente, supongamos que queremos clasificar un sistema con dos parámetros como el siguiente:

$$\begin{cases} (a+1)x+y+z &= 1 \\ x+(a+1)y+z &= b \\ x+y+(a+1)z &= b^2 \end{cases}$$

Cabe destacar que será necesario considerar todas las posibilidades para $a,b\in\mathbb{R}$ por separado y ver cómo interactuan entre sí en cada caso. Armamos entonces la matriz (ampliada) asociada al sistema y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1\updownarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3-(a+1)F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & -a & -a^2-2a & 1-(a+1)b^2 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & 0 & -a^2-3a & 1-(a+1)b^2+b-b^2 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & 0 & -a(a+3) & 1-(a+2)b^2+b \end{array}\right)$$

La diagonal se anula en $a = 0$ (en dos lugares) y $a = -3$, por lo cual ya sabemos que si a no es ninguno de esos números, entonces, el sistema es compatible determinado. Con esto ya hemos reducido drásticamente el problema a tres posibilidades para el número a. Para b aún estamos considerando todas las posibles opciones. Estudiemos los distintos casos para a.

- Si $a = 0$ queda:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b^2+b \end{array}\right)$$
Para que el sistema sea compatible debe suceder (al mismo tiempo) $b - b^2 = 0$ y $-2b^2 + b + 1 = 0$. Como $b - b^2 = (1-b)b$ y $-2b^2 + b + 1 = -2(b + \frac{1}{2})(b-1)$, entonces, el sistema es compatible solo si $b = 1$. Como nos queda una única ecuación (no nula) y tres incógnitas, en este caso, el sistema es (compatible) indeterminado.
- Si $a = -3$ queda:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b+1 \end{array}\right)$$
Para que el sistema sea compatible debe suceder $b^2 + b + 1 = 0$. Pero $b^2 + b + 1 > 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, en este caso, el sistema es incompatible para todo b.

Arribamos a nuestra respuesta:

- El sistema es compatible determinado cuando $a \neq 0, -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.
- El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$ y $b = 1$.
- El sistema es incompatible cuando $a = 0$ y $b \neq 1$, y cuando $a = -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Cuando estudiemos "Determinantes", veremos una manera más directa y mecánica de clasificar sistemas con parámetros.

¿Qué hicimos en el apartado 5.3?

- Estudiamos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de triangulación.
- Vimos cómo clasificar sistemas de ecuaciones lineales, evaluando la existencia de entradas nulas en la diagonal principal de la matriz triangulada.
- Resolvimos sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

5.4 La teoría de matrices

El conjunto de matrices posee operaciones de suma y multiplicación de matrices y dichas operaciones son también muy útiles a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo sumar matrices y multiplicarlas por números reales.
- Cómo multiplicar matrices entre sí e interpretar matricialmente los sistemas de ecuaciones.
- Cómo calcular la inversa de una matriz inversible y resolver sistemas utilizando la matriz inversa.
- El rango de una matriz.

5.4.1 Operaciones con matrices

Así como los vectores de $\mathbb{R}^n$ se pueden sumar entre sí y multiplicar por escalares $\lambda \in \mathbb{R}$, las matrices también. Y la definición es prácticamente la misma: lo hacemos "coordenada a coordenada".

Definición 48 Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos la *suma entre A y B* y la *multiplicación de A por λ* de la siguiente manera:

$$\bullet\ A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz $A + B$ vuelve a ser una matriz de n filas por m columnas y la entrada ij de esta matriz es la suma de la entrada ij de la matriz A con la entrada ij de la matriz B. Por otro lado, la matriz λA también vuelve a ser una matriz en $\mathbb{R}^{n\times m}$ cuya entrada ij es la entrada ij de A multiplicada por λ. *Es importante remarcar que dos matrices se pueden sumar solo si tienen el mismo tamaño.*

Ejemplos 50

- La suma de las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3+3 & -1-1 \\ -5+0 & 0+1 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

- El producto de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ por el número $\lambda = 7$ es:

$$7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 & 7{,}3 \\ 7(-5) & 7{,}8 \\ 7{,}1 & 7{,}3 \\ 7(-2) & 7{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ -35 & 56 \\ 7 & 21 \\ -14 & 7 \end{pmatrix}$$

■

Vimos en el capítulo 3, que los subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$ consistían en conjuntos de vectores con la propiedad que establece que la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar daban como resultado vectores del mismo conjunto. Acabamos de verificar que el conjunto de matrices de $n \times m$ también posee operaciones de suma y producto por escalar. ¿Habrá subconjuntos de matrices que tengan las mismas propiedades de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$? ¡La respuesta es sí! Las matrices de $\mathbb{R}^{n\times m}$ también poseen subespacios *en este mismo sentido. En realidad, un* espacio vectorial genérico *es un conjunto de objetos (no necesariamente vectores de $\mathbb{R}^n$) con las operaciones de "suma de objetos" y "multiplicación de un objeto por un escalar" que, además, cumplen ciertas propiedades. Por ejemplo, tomando a las matrices como objetos y las operaciones que acabamos de definir, se puede mostrar que $\mathbb{R}^{n\times m}$ es un espacio vectorial. Si bien en esta cursada solo estudiamos espacios vectoriales definidos para el caso en el cual los objetos son vectores de $\mathbb{R}^n$, la teoría es inmensamente más rica.*

Así como existe un vector nulo en $\mathbb{R}^n$, también existe una *matriz nula* en $\mathbb{R}^{n\times m}$ para cada n y m fijos. Esta matriz se nota $\mathbf{0}$, y sus entradas son todas 0. Las propiedades de las operaciones de matrices recién introducidas son las mismas que las de las operaciones para vectores. Las enunciamos a continuación para matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ y $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$
5. $\mathbf{0} + A = A$
6. $1A = A$
7. $A + (-1)A = \mathbf{0}$
8. $0A = \mathbf{0}$

Les proponemos corroborar estas propiedades para matrices elegidas al azar (por ejemplo, las matrices en $\mathbb{R}^{2\times 3}$ del ejemplo anterior).

5.4.2 Producto de matrices

En este apartado, vamos a definir una manera de multiplicar matrices entre sí, de forma que el resultado de la multiplicación sea nuevamente una matriz. Por un lado, si bien esta operación guarda alguna correlación con el producto entre números reales, no comparte la mayoría de las propiedades de la multiplicación que conocemos. Por ejemplo, no cualesquiera dos matrices pueden ser multiplicadas entre sí (existen ciertas restricciones de tamaño para poder multiplicar dos matrices). Por otro lado, la matriz que resulta de la multiplicación, no tiene en general el mismo tamaño que ninguna de ellas. Por último, el producto de matrices no es conmutativo. Por esta razón, tendremos especial cuidado al trabajar con la multiplicación de matrices.

Comencemos estableciendo cuál es la condición necesaria para poder multiplicar una matriz A con una matriz B. Lo único que necesitamos es que *la cantidad de columnas de A se igual a la cantidad de filas de B*, es decir: que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, para algunos $n, m, r \in \mathbb{N}$. A partir de la definición de multiplicación de matrices, esta condición es necesaria.

Definición 49 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Llamemos a_{ij} a las entradas de A y b_{ij} a las entradas de B. Entonces, el *producto de A con B* es la matriz $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, cuya entrada en el lugar ij es el número $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$.

Esto puede parecer muy complicado a primera vista pero en realidad no lo es. Lo explicaremos en detalle. En primer lugar, lo que nos dice la definición es que el resultado de multiplicar una matriz de tamaño $n \times m$ por una de tamaño $m \times r$, es una matriz de tamaño $n \times r$. Es decir, *tiene la misma cantidad de filas que A y la misma cantidad de columnas que B*. ¿Cómo se arma entonces esta matriz de $n \times r$? Progresivamente, primero completando las entradas de la primera fila, luego de la segunda, y así hasta la última fila. Llamamos c_{ij} a las entradas de la matriz $A \cdot B$ ¿Cómo averiguamos cuál es la entrada c_{ij}? Si vemos la formula de la definición, observamos que es una combinación de algunas entradas de A y algunas entradas de B. Pero, ¿qué entradas? y ¿qué combinación? Pues, el primer subíndice de c_{ij} nos indica que consideremos la i-ésima fila de A y, el segundo subíndice, la j-ésima columna de B; y la combinación es simplemente multiplicar la primera entrada de la fila i de A con la primera entrada de la columna j de B, la segunda entrada de la fila i de A con la segunda entrada de la columna j de B, y así hasta multiplicar la última entrada de la fila i de A con la última entrada de la columna j de B (las filas de A y las columnas de B tienen el mismo largo: m). Una vez que hicimos estas multiplicaciones por separado, las sumamos todas para obtener un único número: ese número es c_{ij}. Veamos un ejemplo.
Supongamos que queremos calcular el producto $A \cdot B$ entre las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación se puede llevar a cabo ya que A tiene tres columnas y B tiene tres filas. Vamos armando las entradas c_{ij} de $A \cdot B$. Como A tiene dos filas y B dos columnas, entonces $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Debemos calcular c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22}. ¿Qué entrada es c_{11}? Consideramos la primera fila de A $(1 \quad 3 \quad -2)$ y la primera fila de B $(-5 \quad -1 \quad 2)$. Y ahora, multiplicamos lugar a lugar estas filas/columnas:

$$\begin{array}{ccc} (1 & 3 & -2) \\ (-5 & -1 & 2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (-5) & 3(-1) & (-2)2 \end{array}$$

Finalmente, sumamos todos estos números: $-5 - 3 - 4 = -12$. Por lo tanto, $c_{11} = -12$. Vamos a calcular c_{12}: tomemos la primera fila de A $(1 \quad 3 \quad -2)$ y la segunda columna de B $(2 \quad 7 \quad 1)$, y multiplicamos sus entradas lugar a lugar:

$$\begin{array}{ccc} (1 & 3 & -2) \\ (2 & 7 & 1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 21 & -2 \end{array}$$

Por lo tanto, $c_{12} = 2+21-2 = 21$. Al aplicar el mismo procedimiento, para c_{21} consideramos la segunda fila de A $(4 \quad 0 \quad 5)$ y la primera columna de B $(-5 \quad -1 \quad 2)$ y tenemos $c_{21} = 4(-5)+0(-1)+5{,}2 = -10$. Finalmente, $c_{22} = 4{,}2+0{,}7+5{,}1 = 13$. Entonces hemos calculado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -12 & 21 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$$

¿Pueden darse cuenta qué estamos haciendo al multiplicar lugar a lugar las entradas de las filas de A con las columnas de B y después sumarlas? ¿No les recuerda a una operación que hicimos anteriormente con vectores? ¡Sí, el producto escalar de vectores! Si consideramos a las filas y columnas como vectores, entonces, la cuenta que estamos haciendo es el producto escalar entre una fila/vector de A y una columna/vector de B. Es decir, en la entrada c_{ij} de $A \cdot B$ va el producto escalar entre la fila i de A y la columna j de B (considerando a estas filas y columnas como vectores). En el ejemplo anterior, $c_{11} = (1,3,-2)\cdot(-5,-1,2)$, $c_{12} = (1,3,-2)\cdot(2,7,1)$, $c_{21} = (4,0,5)\cdot(-5,-1,2)$ y $c_{22} = (4,0,5)\cdot(2,7,1)$. Esta es otra manera de recordar cómo se calculan las entradas de la matriz producto.

Ejemplos 51

- El producto entre las matrices $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -3 & 25 \\ -20 & 0 & 32 \\ 14 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

- El producto entre las matrices $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 5 & 16 \\ 22 & 3 & -9 & -32 \end{pmatrix}$$

■

Como comentamos al comienzo del apartado, el producto de matrices no tiene las mismas propiedades que el producto de números reales que conocemos. En primer lugar, no siempre podemos hacer el producto entre dos matrices cualesquiera (la cantidad de columnas de la primera matriz debe coincidir con la cantidad de filas de la segunda). En particular, esto nos indica que el producto de matrices *no es conmutativo*. Es decir, no es cierto que $A \cdot B = B \cdot A$ pues $B \cdot A$ podría no ser posible de calcular al no cumplirse los requisitos de la cantidad de columnas de B con las de A. Por ejemplo, si $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, entonces el producto $A \cdot B$ se puede llevar a cabo pero el producto $B \cdot A$ no. Pero este no es el único motivo por el que no es conmutativo el producto: puede suceder que tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ sean operaciones válidas pero ¡podrían no ser matrices del mismo tamaño! (mucho menos iguales). Por ejemplo, si $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, entonces, tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$, son válidas. Pero $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \cdot A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Hay además otro motivo por el cual el producto no es conmutativo: podría suceder que $A \cdot B$ y $B \cdot A$ sean operaciones válidas y que den lugar a matrices del mismo tamaño, pero que de todas formas $A \cdot B \neq B \cdot A$. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más allá de esto, el producto de matrices sí posee la propiedad distributiva respecto de la suma. Es decir, para $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se tiene:

- $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
- $C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$

Es importante remarcar que, cuando hacemos la distribución de C dentro del paréntesis, *nos aseguramos de ubicar a C del mismo lado que estaba fuera del paréntesis*. Es decir, si C esta a la derecha del paréntesis (como en la primera ecuación de arriba), entonces cuando distribuimos C queda multiplicando a A y B *a la derecha*. Esto por supuesto es fundamental tenerlo presente ya que, como vimos recién, el producto no es conmutativo. Por este motivo consideramos dos formulas de distribución (para C multiplicando a derecha y a izquierda por separado).

Para las matrices $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, de distinto tamaño, estudien los resultados de las multiplicaciones $A\cdot B$ y $B\cdot A$.

5.4.3 Matrices cuadradas

Un tipo muy especial de matrices son las matrices cuadradas: aquellas que tienen igual cantidad de filas y de columnas. Dada esta coincidencia, a una matriz cuadrada de n filas por n columnas se la suele llamar simplemente *matriz cuadrada de tamaño n*. Una de las ventajas de trabajar con matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es que pueden ser siempre multiplicadas entre sí; y, además, el resultado vuelve a ser una matriz de tamaño n. Entonces cuando se trabaja con matrices cuadradas, se presenta una situación más parecida a trabajar con números, en el sentido que todas las operaciones entre matrices vuelven a dar matrices del mismo conjunto. Otra ventaja de estas matrices es que admiten un elemento neutro para la multiplicación (el equivalente al 1 en los números reales). Esta matriz se llama *matriz identidad* y es la matriz *cuadrada* que tiene todas sus entradas 0 salvo en la diagonal principal, que tiene todos 1. A continuación, la definimos con mayor precisión.

Definición 50 La *matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$*, también llamada *matriz identidad de $n\times n$*, es la siguiente matriz I_n de n filas y n columnas:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una matriz identidad de tamaño n. Las primeras cuatros son:

$$I_1 = 1 \in \mathbb{R} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

En general, no especificaremos el tamaño de la matriz identidad que estamos considerando con el subíndice "n" correspondiente y solamente escribiremos I para respresentarla (el tamaño que tiene quedará claro del contexto en el que estemos trabajando). Pueden chequear fácilmente que, si $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $A \cdot I = A$, y que $I \cdot A = A$ para toda matriz cuadrada de tamaño n. En particular, la matriz identidad conmuta con todas las matrices de $n \times n$.

5.4.4 Matrices inversibles

Todos los números reales, a excepción del 0, tienen un inverso multiplicativo; esto es, para todo $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$. Como sabemos que este número y es único, lo solemos escribir x^{-1} $\left(\text{o} \frac{1}{x}\right)$. En la teoría de matrices sucede algo parecido, aunque *no para todas las matrices*. Para algunas matrices cuadradas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe otra matriz del mismo tamaño $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I$. Se las conoce como *matrices inversibles* y tienen propiedades muy útiles.

Definición 51 Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *inversible* si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I$ y $B \cdot A = I$.

Importante Las matrices inversibles son siempre matrices cuadradas. ■

Que una matriz sea inversible nos brinda mucha información sobre el sistema de ecuaciones lineales asociado. Por ejemplo, indica que es compatible determinado. También, en algunos casos, permite resolver ecuaciones matriciales de manera muy efectiva. Ambas situaciones las estudiaremos en los siguientes apartados.

Recién afirmamos que no todas las matrices cuadradas no nulas son inversibles. Por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

no tiene inversa. En efecto, una inversa para A debería ser otra matriz B tal que $A \cdot B = I$. Al no conocer B, podemos escribir genéricamente $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Por lo tanto, $A \cdot B = I$ quiere decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos el producto entre A y B tenemos que es $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es decir, siempre la segunda fila de $A \cdot B$ es nula (cualquiera sea B). En particular, ningún producto de A por otra matriz va a dar como resultado un 1 en la posición a_{22}. Por lo tanto, no hay manera de multiplicar a A por otra matriz y obtener la identidad. Esto muestra que A no tiene inversa.

Veamos cómo calcular la inversa de una matriz inversible. Supongamos que queremos encontrar la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

En principio no tenemos porqué saber si A es o no inversible. El procedimiento que vamos a llevar a cabo nos devolverá la inversa de A (si existe) o nos avisará que A no es inversible. A partir de la matriz A, construirnos una matriz *ampliada* donde agregamos la identidad del otro lado de la barra. Es decir, consideramos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, utilizaremos las operaciones de filas que conocemos para llevar la matriz original a la matriz identidad del lado izquierdo de la barra (aplicando las mismas operaciones a la matriz identidad del lado derecho de la barra). *Las* *operaciones de filas que transforman una matriz A en la matriz identidad son exactamente las operaciones de fila que debemos hacerle a la matriz identidad para tranformarla en la inversa de A.* Por este motivo, ampliamos la matriz original con la identidad: en lugar de tener que ir anotando las operaciones que le vamos a hacer a A para transformarla en la identidad (para después aplicárselas a I), ¡hacemos todo al mismo tiempo! A continuación, les mostramos de qué modo.

En primer lugar, hay que llevar la matriz A a la matriz identidad, al igual que al triangular. De hecho, comenzaremos triangulando la matriz (poniendo ceros debajo de la diagonal) y, luego, agregaremos ceros arriba de la diagonal. Empezamos triangulando la parte derecha de la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tengamos presente, cómo hemos aplicado las operaciones de fila a toda la matriz ampliada (también a la identidad de la derecha).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Aquí ya tenemos la matriz A triangulada. Ahora buscamos los ceros arriba de la diagonal. Para facilitar las cuentas, nos conviene multiplicar la última fila por $\frac{1}{8}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Así como usábamos la entrada a_{11} para generar los 0 debajo de la diagonal principal en la primera columna, ahora utilizaremos la entrada a_{33} para generar los ceros arriba de la diagonal principal en la tercera columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_3]{F_2 \to F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Finalmente, hemos alcanzado la identidad en el lado izquierdo de la matriz ampliada. Lograr esta transformación nos muestra que la matriz A es inversible. Y la inversa es precisamente la matriz que aparece del lado derecho de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

La manera de saber si hemos llevado a cabo bien las cuentas es chequear si efectivamente esta matriz es la inversa de A; es decir, chequear que el producto de A por esta matriz da la identidad de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Vayamos a otro ejemplo de este procedimiento para una matriz que no es inversible. Consideremos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Armamos entonces la matriz ampliada y empezamos a triangular la matriz B dentro de esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Pero aquí debemos deternernos. *Si durante el procedimiento aparece una fila de ceros quiere decir que la matriz* no es inversible. La explicación de este fenómeno la brindaremos más adelante, cuando veamos el *rango de una matriz*. En conclusión, este procedimiento de ampliar la matriz con la matriz identidad y triangular la matriz original, devolverá la inversa de la matriz (si existe), o producirá una fila de ceros durante la triangulación (que indica que la matriz no era inversible en primer lugar).

Experimento 27 Este experimento explica porqué funciona el procedimiento para hallar la inversa que explicamos recién. Lo aplicamos sobre el primer ejemplo que vimos. La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si uno no tiene más información o herramientas, la manera más directa y "a mano" de encarar el problema de hallar la inversa de una matriz es considerar una matriz genérica:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

y tratar de ver cómo tienen que ser sus entradas para que resulte la inversa de A. Es decir, queremos ver quiénes tienen que ser $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ para que $A \cdot B = I$. Al resolver la cuenta, buscamos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les proponemos que calculen el producto de matrices de la izquierda, de manera de obtener una igualdad entre dos matrices (la de la izquierda, llena de letras, y a la derecha, la identidad). Como dos matrices son iguales si sus entradas son iguales, entonces igualando entrada a entrada vamos a obtener un sistema de 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Por ejemplo, la ecuación correspondiente a la igualación de las entradas a_{11} es $a + 2d - g = 1$, y la correspondiente a la igualación de las entradas a_{32} es $b + h = 0$. Analicemos con detenimiento este sistema.

Si bien parece muy grande, en realidad, las únicas ecuaciones que utilizan las incógnitas a, d, g son las tres ecuaciones correspondientes a la igualación de las entradas de la primera columna de $A \cdot B$. Lo mismo sucede con las incógnitas b, e, h (sólo aparecen en las tres ecuaciones correspondientes a la igualación de las entradas de la segunda columna de $A \cdot B$) y con c, f, i (tres ecuaciones correspondientes a la tercera columna). Por lo tanto, este sistema podemos pensarlo como *tres sistemas separados de tres ecuaciones y tres incógnitas cada uno* en lugar de concebirlo como un gran sistema de 9×9. Pero hay algo más: veamos los tres sistemas que acabamos de separar. ¿Cómo són las matrices asociadas a estos sistemas? ¿Pueden darse cuenta ahora por qué funciona el razonamiento? (no es tan directo, requiere pensarlo). ■

Importante No debe confundirse la escritura de la matriz inversa con la de la matriz transpuesta.

Definición 52 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se dice *transpuesta* cuando resulta de intercambiar las filas con las columnas de otra matriz. Es decir $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Se escribe A^t.

■

Veamos algunos ejemplos:

■ **Ejemplos 52**

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

■

5.4.5 Rango de una matriz

En Matemática es muy común asignarle números a objetos que nos brinden información sobre los mismos. Por ejemplo, la norma de un vector es un número que le asignamos a cada vector y que nos informa sobre su longitud. Un caso muy importante en la teoría de matrices, tan importante que le dedicamos el próximo apartado entero, es el *determinante* de una matriz, que nos dice, entre otras cosas, si las matriz es o no inversible (sin tener que pasar por el cálculo de la inversa que estudiamos recientemente). En este apartado, vamos a introducir otro de este tipo de números: el *rango* de una matriz.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ -x + 3y + 4 = 0 \\ -5x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

Veamos qué sucede al tratar de resolverlo por el método de triangulación. La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta matriz tiene una ecuación menos que el sistema original. Pero, ¿qué nos indica esta fila de ceros en la matriz (respecto de la matriz en sí)? Pensemos a las filas de la matriz original como vectores. En este caso, vectores de $\mathbb{R}^3$. Los llamamos $\vec{v}_1 = (2, 5, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 4)$ y $\vec{v}_3 = (-5, 4, 13)$. Ahora bien, volvamos a realizar la triangulación de la matriz pero llevando cuenta de las operaciones que estamos haciendo implícitamente entre estos vectores (representado a la derecha de cada matriz).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{matrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 + (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) \end{matrix}$$

Las operaciones que figuran a la derecha de las matrices van mostrando cómo fueron cambiando las filas, vistas como vectores, a lo largo de la triangulación. En la matriz triangulada, la interpretación de lo que está en la fila 2 es que $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = (0, 11, 7)$. Y, en particular, la fila 3 dice $\vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 + (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = (0, 0, 0)$. Es decir:

$$\vec{v}_3 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$$

Si "despejamos" el vector $\vec{v}_3$ en esta ecuación obtenemos que:

$$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

¡Entonces $\vec{v}_3$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$! Cuando triangulamos una matriz y se anula una fila lo que está sucediendo es que la fila que se anuló es "combinación lineal de las otras filas" (viendo a las filas como vectores). Y la anulación de una fila de una matriz asociada a un sistema nos indica que la ecuación correspondiente a dicha fila desaparece (puede removerse sin alterar las soluciones del sistema); es decir, la ecuación removida es "combinación lineal de las otras ecuaciones" del sistema.

Observemos que saber cuántas filas de la matriz son independientes es de gran utilidad. Este número es lo que se conoce como *rango* de una matriz.

Definición 53 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. El *rango* de A es la cantidad de filas de A linealmente independientes. Se nota $rg(A)$.

Notemos que $rg(A)$ es un número entero positivo (que solo es cero para la matriz nula). En el ejemplo que vimos recién, el rango de la matriz asociada al sistema es 2. Veamos algunos otros ejemplos.

Ejemplos 53

- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es 1 (sus filas son múltiplos).
- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es 2 (sus filas son linealmente independientes).
- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ es 3. (Las filas 1, 2 y 4 son linealmente independientes entre sí.)

■

Cuando una matriz tiene una fila que es combinación lineal de las otras, dicha combinación podemos encontrarla utilizando el procedimiento antes descripto (de nombrar a las filas $v_1, \ldots, v_n$ y seguir las operaciones que vamos realizando en la triangulación al costado de la matriz). Lo importante de las operaciones elementales de filas es que *no alteran el rango de la matriz*. Es decir, el rango de una matriz antes y después de hacerle una operación elemental de fila es el mismo. Se lo dejamos para mostrar en el próximo experimento.

Experimento 28 Muestren que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces los siguientes conjuntos también son linealmente independientes.

1. $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.
2. $\{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ distinto de cero.
3. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

¿Cuál es la manera de calcular el rango de una matriz? Notemos que, para conocer el rango, solo nos interesa saber *cuántas* filas linealmente independientes tiene, no cuáles son ni cuál es la combinación lineal que las relaciona. Por lo tanto, *para calcular el rango de una matriz nos alcanza con triangular la matriz y, cuando obtengamos una matriz triangular, contar cuántas filas no nulas nos quedan.*

Ejemplos 54

- Calculemos el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  Como las dos filas de la matriz triangulada son linealmente independientes, entonces $rg(A) = 2$.

- Calculemos el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_5 \to F_5 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_2]{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_5 \to F_5 - F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \times F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $rg(B) = 3$.

■

La cantidad de filas linealmente independientes de una matriz cualquiera de $\mathbb{R}^{n\times m}$ es igual a la cantidad de columnas linealmente independientes de la misma. Por esta razón, el rango puede definirse también como la cantidad de columnas linealmente independientes.

El rango de matrices cuadradas

El rango es un dato especialmente útil cuando trabajamos con matrices cuadradas. Recordemos que, para hallar la inversa de una matriz de $n \times n$ (si la tuviere), debíamos triangular la matriz hasta convertirla en la identidad $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pero acabamos de ver que las operaciones de filas que utilizamos para triangular no alteran el rango de la matriz. Como el proceso termina en la matriz identidad de $n \times n$, cuyo rango es n, concluimos que, *si una matriz de $n \times n$ es inversible, entonces su rango debe ser necesariamente n*. De igual manera, *si una matriz de $n \times n$ tiene rango n entonces es necesariamente inversible*. Para chequear que esto último es válido observemos que, al tener rango n, todas las filas son linealmente independientes. Por lo tanto, triangulando nunca se nos anulará ninguna fila y podremos alcanzar una matriz triangular con entradas no nulas en la diagonal principal. A partir de aquí, no es difícil continuar la triangulación "de la parte de arriba de la matriz" y poner unos (1) en la diagonal, de manera de obtener la matriz identidad. El estudiante puede hacer un ejemplo concreto, con una matriz de 3×3 por ejemplo, para convencerse que *siempre que llegue a una matriz cuadrada triangular sin entradas nulas en la diagonal puede seguir triangulando hasta obtener la identidad*.

El rango es entonces una excelente manera de determinar si una matriz cuadrada es o no inversible *sin tener que hacer muchas cuentas*. Por ejemplo, la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

no puede ser inversible, pues la última fila es -2 veces la primera (por lo que el rango de la matriz no es 3; en este caso, es 2). La matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tampoco es inversible, pues las últimas dos filas son combinación lineal de la primera (son idénticas de hecho). En este caso, el rango es 1. La matriz:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 12 & 7 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 (la segunda fila es combinación lineal de las otras dos filas), por lo que tampoco puede ser inversible.

Como último resultado sobre el rango, mencionamos una propiedades que nos puede resultar útil a la hora de calcularlo: *el rango de una matriz no se altera si la multiplicamos por otra matriz que es inversible (a derecha o izquierda)*. Es decir, si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y B es inversible, entonces, $rg(A \cdot B) = rg(A)$ y $rg(B \cdot A) = rg(A)$. Esto no es cierto si la matriz B no es inversible. Por ejemplo, si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, entonces, $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En este caso, $rg(A) = 2$ pero $rg(A \cdot B) = 1$ (B no es inversible: su rango es 1).

Estudien qué sucede con el rango de la matriz A^n si A es una matriz inversible. Tengan en cuenta que A^n representa la potencia n-ésima de la matriz A.

5.4.6 Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

La teoría de matrices tiene muchas aplicaciones y puede utilizarse en el Álgebra para interpretar muchas situaciones. Aquí hemos visto cómo podemos utilizar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero podemos también "enmarcar" la teoría de sistemas de ecuaciones lineales dentro de la teoría de matrices. En consecuencia, retomemos el sistema que consideramos al principio del capítulo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Este sistema puede representarse a nivel matricial (haciendo uso del producto de matrices) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En efecto, la matriz de coeficientes es de 2×2 y podemos definir una "matriz de las incógnitas $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$" de 2×1 de manera tal que sea posible llevar a cabo la multiplicación. El resultado será una matriz de 2×1. Si realizamos el producto, vemos que en el lugar $1 - 1$ de la misma irá la entrada $x + 2y$ y, en el lugar $2 - 1$, la entrada $2x - 3y$. Como este sistema tiene la primera expresión igualada a 5 y la segunda, a -1, entonces podemos simplemente igualar el producto a "la matriz de términos independientes $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$". Y esto es precisamente lo que dice la ecuación de más arriba. Esta ecuación se conoce como *ecuación matricial de un sistema de ecuaciones lineales*. Esto siempre se puede hacer. Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

se representa matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

está representando al siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 11x - y = -2. \end{cases}$$

Dada esta identificación, podemos considerar a los sistemas de ecuaciones lineales como *ecuaciones con matrices*. Interpretar un sistema de ecuaciones de esta manera es, en general, muy conveniente dado que, por un lado, convierte un sistema de varias ecuaciones en una única ecuación y, por otro, nos deja a disposición las herramientas algebraicas que posee la teoría de matrices. Muchas veces, esto nos permitirá usar razonamientos parecidos a los utilizados cuando resolvemos ecuaciones en los reales. En efecto, si tenemos que resolver la ecuación $5x = 3$, entonces "pasamos dividiendo" el 5 para hallar $x = \frac{3}{5}$. Esto es posible porque *podemos dividir por* 5; es decir, 5 tiene inverso. Consideremos ahora una ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Si la matriz A es inversible*, entonces, podemos multiplicar a izquierda, a ambos lados de la igualdad, por la inversa A^{-1} de A, de forma de obtener:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como $A^{-1} \cdot A = I$, entonces obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, ¡despejamos la solución como hacíamos en el caso de las ecuaciones reales! Esto nos dice, por un lado, que si la matriz asociada al sistema es cuadrada e inversible, entonces el sistema es compatible determinado (pues tiene una única solución que debe ser $A^{-1}B$) y, por otro lado, que podemos hallar dicha solución calculando la inversa A^{-1} de la matriz y multiplicando a izquierda a la matriz B de términos independientes por esta inversa. Esto nos ahorra el tener que triangular y despejar "a mano" las soluciones del sistema.

■ **Ejemplo 55** Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$

La forma matricial de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Llamemos A a esta matriz. Triangulemos A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aquí vemos que el $rg(A) = 3$, por lo que es inversible. La inversa de A es $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, por lo que la solución del sistema es:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.4?

- Estudiamos las operaciones básicas entre matrices: la suma y el producto por escalar.
- Introducimos la multiplicación de matrices y vimos sus propiedades más importantes. Particularmente, no es conmutativa.
- Estudiamos las matrices cuadradas e introducimos la matriz identidad.
- Definimos qué significa que una matriz cuadrada sea inversible y aprendimos a calcular la inversa de una matriz inversible (o detectar si la matriz no es inversible).
- Definimos el rango de una matriz y vimos su relación con la inversibilidad de la matriz (en el caso que sean cuadradas).
- Vimos cómo escribir matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y, además, aprendimos a resolver un sistema cuadrado cuya matriz asociada es inversible.

■

5.5 Determinantes

A una matriz cuadrada podemos asociarle un número llamado el *determinante* de la matriz. Esta magnitud es una de las herramientas más importantes de la teoría de matrices y nos provee muchísima información sobre estas.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es el determinante de una matriz y cómo calcularlo.
- Las propiedades del determinante.
- Cómo utilizar la información que nos provee el determinante para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

■

5.5.1 ¿Qué es el determinante?

En el apartado anterior, vimos que toda matriz tiene asociado un número llamado *rango* del que podemos extraer información de la matriz. El determinante es otro tipo de número que nos da información sobre las *matrices cuadradas*. La característica principal (que utilizaremos con más frecuencia) es la siguiente: una matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante es un número distinto de 0. En próxima unidad estudiaremos otras características del determinante.

Importante En este apartado, todas las matrices son cuadradas. ■

El determinante se calcula a partir de una fórmula que involucra sumas y multiplicaciones de las entradas de la matriz. Esta fórmula no es, en principio, ni sencilla ni natural, pero veremos que, de todas formas, es fácil de calcular recordando unos pocos procedimientos. Comenzaremos definiéndolo para las matrices más pequeñas primero.

5.5.2 El determinante de una matriz de 2×2

Al tener en cuenta que queremos que el determinante sea distinto de cero exactamente para las matrices inversibles, ¿podemos deducir cuál debería ser este número en el caso de matrices de 2×2? Consideremos una matriz genérica $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Cuando estudiamos rango de matrices cuadradas, vimos que una matriz de $n \times n$ es inversible sí, y solo sí, su rango es n. Por lo tanto, A será inversible si tiene rango 2. Veamos, entonces, cuándo tiene A rango 2. Supongamos primero que $a \neq 0$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{c}{a} F_1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} b \end{pmatrix}$$

Para que $rg(A) = 2$ no tiene que anularse la segunda fila. Es decir, $rg(A) = 2$ sí, y solo sí, $d - \frac{c}{a} b \neq 0$. Notemos que $d - \frac{c}{a} b = \frac{ad-bc}{a}$; y un cociente es 0 si el numerador es cero. Concluimos que $rg(A) = 2$ sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Hemos visto que una matriz (para la cual la entrada a_{11} es no nula) es inversible sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Justamente, buscábamos un número que caracterice de esta forma la inversibilidad de matrices. Veremos en breve que, precisamente, $ab - bc$ es el determinante de una matriz de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Qué sucede en caso que la entradad $1 - 1$ sea 0? Pues hay dos opciones.

- Si $c \neq 0$ entonces, para triangular, podemos primero intercambiar las filas y después proceder de idéntica manera:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{a}{c} F_1} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{a}{c} d \end{pmatrix}.$$
Luego, A es inversible sí, y solo sí, $b - \frac{a}{c} d \neq 0$. Pero $b - \frac{a}{c} d = \frac{bc-ad}{c}$, por lo que es cero sí, y solo sí, $bc - ad = 0$. A su vez, $bc - ad = 0$ sí, y solo sí, $ad - bc = 0$. Por lo tanto, para matrices con $a = 0$ pero $c \neq 0$, la misma fórmula $ad - bc$ determina la invertibilidad de la matriz.
- Si $c = 0$, entonces es fácil ver que la matriz no puede tener rango 2, por lo que no es inversible en este caso. Pero $ad - bc = 0d - b0 = 0$, por lo que la misma fórmula es coherente con lo que buscamos de ella.

Vimos entonces que, para cualquier matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se tiene que A es inversible sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Este número es lo que llamamos el *determinante de la matriz* A.

Definición 54 El determinante de una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es el número $\det(A) = ad - bc$. También se nota $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$.

Observemos que la fórmula del determinante para matrices de 2×2 surge de hacer el mismo "movimiento elemental" que hacíamos para calcular el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$. Lo transcribimos en la Figura 5.1 nuevamente para rápida referencia.

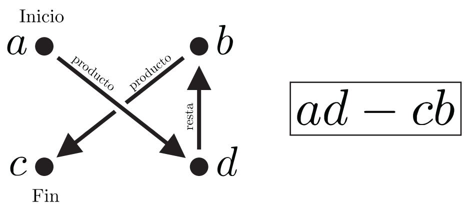

Figura 5.1: Movimiento elemental para calcular el determinante de una matriz de 2×2.

Estudien cómo se define el determinante de una matriz de dimensión 1×1 *para que verifique que la matriz es inversible, sí y solo sí, dicho número no es nulo.*

5.5.3 El determinante de una matriz de 3×3

En general, hay varias maneras de definir el determinante de una matriz. Por supuesto, todas ellas dan lugar al mismo número (el determinante de una matriz es único). En este libro estudiaremos la que se llama *desarrollo por filas o columnas* y consiste en reducir el problema de calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ al de calcular varios determinantes de matrices de $(n-1) \times (n-1)$. En el caso de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, veremos que podemos expresarlo como una combinación de determinantes de "submatrices" de A de tamaño 2×2 (para las cuales ya sabemos calcularlo). ¿Cómo es este procedimiento? Lo mostramos en un ejemplo para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que primero tenemos que saber es que *a cada entrada de la matriz le corresponde un "signo",* $+$ *o* $-$*, dependiendo de su ubicación*. Esto es lo que debemos considerar mientras hacemos la cuenta del determinante. La distribución de los signos en una matriz de 3×3 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

¿En qué consiste entonces la fórmula del determinante de una matriz de 3×3? Pues primero debemos elegir *al azar* una fila o una columna de A. Supongamos que elegimos la fila F_1. Ahora, vamos a ir recorriendo las entradas de la fila (en alguna dirección que elijamos); por ejemplo, de izquierda a derecha. Comenzamos: la primera entrada es 2. El signo asociado a esta entrada es $+$. Este signo indica que **no** debemos cambiarle el signo al número. Lo que hacemos, a continuación, es "tachar" la fila y la columna en la que está ubicada nuestra entrada actual: en este caso, como estamos en la posición a_{11}, debemos tachar la primera fila y la primera columna. Observemos que, al hacer esto, queda naturalmente una matriz de 2×2 en la esquina inferior derecha. En nuestro ejemplo, se trata de $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Lo que hacemos, entonces, es *multiplicar el número* 2 *de la entrada* a_{11} *(que en este caso no fue modificado por el signo que le corresponde a la ubicación) por el determinante de esta submatriz menor* $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \ldots$$

Ahora pasamos a la segunda entrada de la fila F_1. En este caso, se trata de un -3. El signo que le corresponde a esta ubicación es $-$. Esto nos dice que *debemos cambiarle el signo a dicha entrada*. Por lo cual, consideraremos el número 3 para este paso. Ahora, nuevamente, tachamos la fila y la columna a la que pertenece la entrada. Es decir, tachamos la fila 1 y la columna 2. Nuevamente, obtenemos una submatriz de A de tamaño 2×2: aquella que se forma al quedarnos con las entradas de la matriz que no tachamos (en el mismo orden que aparecen). En nuestro ejemplo, es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, multiplicamos el número 3 que teníamos en la entrada a_{12} (le habíamos cambiado el signo por orden del $-$ que le corresponde a dicha ubicación) por el determinante de esta matriz de 2×2, y sumamos este resultado a la cuenta que ya teníamos antes:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \ldots$$

El último que paso que falta es idéntico a los anteriores. Consideramos la entrada siguiente de la fila, la a_{13}, que es el número 5 y no le alteramos el signo pues el que le corresponde a dicha ubicación es $+$. Tachamos la primera fila y la tercera columna y nos queda la submatriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. Multiplicamos 5 por el determinante de esta matriz y sumamos el resultado al cálculo que veníamos haciendo:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Como terminamos de recorrer toda la fila que habíamos elegido, entonces esto concluye el procedimiento. Notemos que el determinante de A quedó expresado como suma (de múltiplos) de determinantes de tamaño más pequeño. Solo nos resta calcular estos determinantes:

- $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right| = 3(-1) - 0{,}7 = -3$
- $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right| = 1(-1) - 0(-2) = -1$
- $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 1{,}7 - 3(-2) = 13$

Concluimos entonces que:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 2(-3) + 3(-1) + 5{,}13 = 56$$

Observemos que hicimos varias elecciones arbitrarias en este procedimiento: elegimos libremente una fila (también podríamos haber optado por una columna) para recorrer y, también, en qué sentido recorrerla. La elección que hicimos se llama *desarrollar el determinante por la primera fila*. Pero podríamos haber elegido cualquier otra fila o columna. Esta libertad está justificada pues *el mismo procedimiento, realizado para cualquier otra fila y/o columna y para cualquier recorrido de la misma en cualquier dirección, da el mismo resultado*. Como ejemplo, veamos qué sucedería si hubiéramos desarrollado el determinante por la columna 3 recorriéndola de abajo hacia arriba. En primer término, consideramos la entrada a_{33}, que es -1. Como el signo que le corresponde a esta posición es $+$, mantenemos el -1. Al tachar la fila 3 y columna 3 nos queda la submatriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, por lo que:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \ldots$$

Ahora subimos al lugar a_{23}, que tiene un 0. Aquí el signo que le corresponde es $-$, por lo que habría que cambiarle el signo a la entrada. Pero, como es un 0, no hay que hacer nada. La submatriz que obtenemos al tachar es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$, por lo cual:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \ldots$$

Finalmente, a la entrada 5 no hay que cambiarle el signo y la submatriz queda $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. Concluimos entonces que:

$$\det(A) = (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=9} + 0\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}_{=20} + 5\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}_{=13} = (-1)9 + 5{,}13 = 56.$$

Les proponemos hacer otros ejemplos (eligiendo otras filas o columnas) para ver que siempre se obtiene el mismo número. En general, hay elecciones de filas o columnas que hacen las cuentas más sencillas. En efecto, notemos en este último desarrollo que hicimos (por la última columna) que, cuando estábamos en la posición a_{23}, tuvimos que hacer $0\left|\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 0$. Es decir, como la entrada a_{23} es nula entonces el término correspondiente que le corresponde al determinante en el desarrollo es 0. En conclusión, *si estamos desarrollando el determinante por alguna fila o columna y en uno de los pasos la entrada es* 0*, ¡entonces podemos saltearla y seguir con la próxima entrada (no nula)!* En el ejemplo anterior, simplemente podríamos haber calculado:

$$\det(A) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 56$$

Concluimos, entonces, que, *nos conviene siempre desarrollar un determinante por una fila o columna que tenga muchas entradas nulas*. En el ejemplo anterior, también podríamos haber desarrollado por la segunda fila (que tiene un 0 en la posición a_{23}). Como una observación fundamental de este hecho, observemos que es muy sencillo (casi inmediato) calcular el determinante de las matrices triangulares. Les proponemos descubrirlo en el siguiente experimento.

Experimento 29 Supongan que tienen una matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

¿Por qué fila o columna conviene desarrollar el determinante? ¿Cuál es el resultado que obtienen? ¿Qué pueden concluir del determinante de las matrices de esta forma? ■

5.5.4 El determinante de una matriz de $n \times n$

Vamos ahora a generalizar lo hecho para el caso 3×3. El procedimiento es exactamente el mismo: elegimos una fila (o columna), la recorremos en cualquier dirección y vamos multiplicando cada entrada de esa fila (o columna), modificada por el signo que le corresponde dada su ubicación, por el determinante de la matriz de un tamaño más pequeño que obtenemos al tachar la fila y columna a la que pertenece la entrada en cuestión. La asignación del signo en el caso general es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \cdots & \mp \\ + & - & + & \cdots & \pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pm & \mp & \pm & \cdots & \pm \end{pmatrix}$$

Aquí, el símbolo $\pm$ indica que irá un $+$ o un $-$: será un $+$ si el signo anterior en la fila es un $-$ y será un $-$ si el signo anterior es un $+$ (lo mismo se puede decir del signo siguiente de la columna; por este motivo, el signo de la posición a_{2n} aparece como $\mp$, en lugar de $\pm$, para remarcar que es el signo opuesto). Observemos que, en cada fila o columna, los signos van alternándose. ¿Cómo recordar esta distribución? El lugar a_{11} siempre tiene un $+$, a partir de ahí ya sea que nos movamos sobre la fila o sobre la columna los signos se alternan.

Otra manera de saber qué signo va en cada lugar es la siguiente *regla*: el signo que va en la posición a_{ij} es "$+$" si $i+j$ es un número par y es "$-$" si $i+j$ es un número impar. Por ejemplo, a la posición a_{32} le corresponde un "$-$" pues $3+2=5$ es impar. La posición a_{13} le corresponde un "$+$" pues $1+3=4$ es par. Tengamos en cuenta que a las entradas de la diagonal siempre le corresponden el signo $+$.

Antes de mostrar la fórmula general del determinante, hagamos un ejemplo para una matriz de tamaño 4×4. Supongamos que queremos calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Al igual que el caso de matrices de 3×3, nos conviene desarrollar por una fila o columna que tenga la mayor cantidad de entradas nulas. Por ejemplo, podemos elegir la segunda fila. Entonces:

$$\det(A) \;=\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio} \\ \text{de signo}}}{3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \;-\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio} \\ \text{de signo}}}{4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \;+\; 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

El determinante de A nos queda entonces en función de determinantes de matrices de 3×3. Los calculamos:

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-8) - 13 - 2(-1) = -27$
- $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2{,}13 - 2 = 24$
- $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 4 = -6$

En el primer determinante desarrollamos por la primera fila y, en los últimos dos, por la primera columna (que poseía un cero en la posición $3-1$). Por lo tanto, hemos hallado que:

$$\det(A) = 3(-27) - 4{,}24 - 6 = -183$$

Hasta aquí vimos que, cuanto más grande la matriz, más difícil es calcular su determinante. Por ejemplo, en una matriz de 5×5, el procedimiento descompone el determinante en suma de múltiplos de varios determinantes de 4×4, y tendremos que calcular estos determinantes de 4×4 descomponiendo cada uno en suma de múltiplos de determinantes de 3×3 (que a su vez se descomponen en suma de múltiplos de determinantes de 2×2). Más adelante, estudiaremos algunas propiedades del determinante que nos permitirán simplificar el cálculo del mismo sin tener que hacer todas estas cuentas.

¿Cómo se define, en general, el determinante de una matriz de $n\times n$? Supogamos, que tenemos $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y llamemos A_{ij} a la submatriz de A de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al sacar la fila i y la columna j de A

(y dejar el resto de las filas y columnas en su ubicación original). Es decir:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aquí, los a_{ij} son las entradas de la matriz A. Entonces, eligiendo la fila 1 para desarrollar, el determinante de A es el número:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) + \cdots \pm a_{1n}\det(A_{1n})$$

El símbolo $\pm$ al final dice que el signo $+$ o $-$ será determinado por el tamaño de la matriz: si n es impar, entonces, será un $+$ y si n es par será un $-$. Esto se debe simplemente a que estamos modificando cada entrada de la primera fila teniendo en cuenta el signo que le corresponde por su ubicación. Una manera más formal de decirlo es que la entrada a_{ij} aparece multiplicada por $(-1)^{i+j}$. Por supuesto, podemos desarrollar por cualquier fila o columna y obtendremos el mismo resultado. En general, si desarrollamos por la fila k entonces el determinante es la suma de los términos $(-1)^{k+j}a_{kj}A_{kj}$ para todos los j entre 1 y n. Es decir:

$$\det(A) = (-1)^{k+1}a_{k1}\det(A_{11}) + (-1)^{k+2}a_{k2}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{k+n}a_{kn}\det(A_{kn})$$

Escriban la fórmula del determinante si se lo desarrolla por la columna k.

Observación 22 *Notemos que el determinante de la matriz identidad (de cualquier tamaño) es* 1. *También, al igual que el resultado del Experimento 29, el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas de la diagonal.*

5.5.5 Propiedades del determinante

Vamos a estudiar algunas propiedades del determinante. Esto nos permitirá, en general, simplificar el cálculo de este número y, a veces, evitarlo completamente. Queremos estudiar *¿cómo cambia el determinante luego de una operación elemental de fila?*

Vimos que el rango de una matriz no se altera al hacer una operación elemental de fila (o columna). En el caso del determinante, sí se altera y es posible decir exactamente de qué manera.

- *Intercambio de filas:* Si B es la matriz que se obtiene de A al intercambiar las posición de dos filas, entonces, $\det(B) = -\det(A)$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- *Multiplicación de fila por un real no nulo:* Si B es la matriz que se obtiene de A al multiplicar una fila por un $\lambda \neq 0$, entonces, $\det(B) = \lambda \det(A)$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- *Suma a una fila un múltiplo de otra:* Si B es la matriz que se obtiene de A al sumar a una fila un múltiplo de otra, entonces $\det(B) = \det(A)$; vale decir, en este caso *el determinante no cambia*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Las mismas propiedades valen si intercambiamos la palabra "fila" por "columna" en los items anteriores.

Calculen el determinante de la matriz λA para $\lambda \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que todas las entradas de la matriz λA están multiplicadas por λ..

Estas operaciones pueden utilizarse para simplificar el cálculo del determinante. Por ejemplo, consideren la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Esta matriz tiene números muy grandes y va a ser incómodo hacer cuentas con estos números. Observemos que las entradas de la primera fila son todos múltiplos de 7. Por lo tanto, podemos utilizar la segunda propiedad enunciada arriba para escribir:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7{,}2 & 7{,}3 & 7{,}6 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix}$$

Ahora, como restar a una fila un múltiplo de otra no altera el determinante, entonces podemos hacer las operaciones $F_2 \to F_2 - 16F_1$ y $F_3 \to F_3 - 9F_1$ y obtener:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix}$$

Este último determinante es más sencillo de calcular; podemos desarrollar por la primera columna y obtener:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -12 & -16 \end{vmatrix} = 2(-64 - 72) = -272$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7(-272) = -1904$$

Tengamos en cuenta que, en el ejemplo recién visto, apuntamos a conseguir ceros en la primera columna para poder desarrollar por allí y ahorrarnos cuentas (al solo tener que calcular un determinante de 2×2). Una posible estrategia para calcular el determinante de una matriz puede ser la siguiente: triangular la matriz (utilizando las operaciones elementales de filas) *llevando la cuenta de cómo va cambiando el determinante según la operación que utilicemos*. Como el determinante de una matriz triangular es, simplemente, el producto de las entradas en la diagonal, solo debemos multiplicar este último determinante por los factores que fueron alterando el determinante original mientras hacíamos las operaciones de filas. Por ejemplo, en el ejemplo anterior habíamos visto que:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, a la última matriz que obtuvimos del ejemplo anterior, podemos hacerle $F_3 \to F_3 + 3F_2$ y obtener el determinante de una matriz triangular (nuevamente, esta operación no cambia el determinante que teníamos):

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -34 \end{vmatrix} = 7{,}2{,}4.(-34) = -1904$$

Ejemplifiquemos cómo fueron los pasos que hicimos para tener presente cómo y cuándo fue cambiando el determinante original. Notaremos con A_i a las matrices que vamos obteniendo en cada paso de la triangulación. Observemos que "sacar el factor 7" de la primera fila de la matriz original equivale a multiplicar por $\frac{1}{7}$ la primer fila de dicha matriz:

$$A \xrightarrow{\frac{1}{7}F_1} A_1 \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 9F_1]{F_2 \to F_2 - 16F_1} A_2 \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} A_3$$

Como A_3 está triangulada, entonces su determinante es el producto de sus entradas en la diagonal. ¿Cómo se relacionan el determinante que buscamos (el de A) con el de A_3? Analizamos los pasos que hicimos para triangular A. El primer paso consistió en multiplicar F_1 por $\frac{1}{7}$. Esto quiere decir, precisamente, que la primera fila de A es 7 veces la primera fila de A_1. Por lo tanto, $\det(A) = 7\det(A_1)$, según nos dice la propiedad del determinante respecto de esta operación elemental. Por otro lado, a partir de A_1, las operaciones siguientes que hicimos no alteran el determinante. Por lo tanto, $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3)$. Concluimos que $\det(A) = 7\det(A_1) = 7\det(A_3)$. Como el determinante de A_3 es $2{,}4.(-34) = -272$, entonces, $\det(A) = -1904$.

Hagamos un ejemplo más de cómo calcular el determinante triangulando la matriz. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -15 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

La triangulamos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -15 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -15 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}}_{A_1} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -11 & -33 \\ 0 & -20 & -28 \end{pmatrix}}_{A_2} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}F_3]{-\frac{1}{11}F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A_3} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 5F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_{A_4}$$

Hemos llegado, entonces, a una matriz triangulada y es sencillo ver que su determinante es -8. Analicemos cómo fue cambiando el determinante durante las operaciones de la triangulación. Veremos que es conveniente empezar desde atrás.

- Como la operación $A_3 \to A_4$ no altera el determinante, entonces, $\det(A_4) = \det(A_3)$.
- Como A_2 se obtiene de A_3 al multiplicar la fila F_2 por -11 y la fila F_3 por -4, entonces, $\det(A_2) = (-11)(-4)\det(A_3)$.
- Como las operaciones en $A_1 \to A_2$ no alteran el determinante, entonces, $\det(A_2) = \det(A_1)$.
- Como en $A \to A_1$ intercambiamos filas, entonces, $\det(A) = -\det(A_1)$.

"Desandando" toda esta información de abajo hacia arriba, obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det(A_1) = -\det(A_2) = -(-11)(-4)\det(A_3) \\ &= -(-11)(-4)\det(A_4) = -(-11)(-4)(-8) = 352 \end{aligned}$$

Experimento 30 Analicen las siguientes preguntas respecto del determinante:

1. ¿Cuál es el determinante de una matriz que tiene una fila (o columna) de ceros?
2. ¿Cúal es el determinante de una matriz que tiene dos filas (o dos columnas) iguales?
3. ¿Cuál es el determinante de una matriz de $n \times n$ que tiene rango menor a n?

■

Desde un comienzo precisamos que la propiedad que más nos importa del determinante es que el mismo establece cuándo una matriz es inversible. Lo dejamos anunciado:

Proposición 23 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible sí, y solo sí, $\det(A) \neq 0$.

Esto ya lo trabajamos para matrices de 2×2. Una manera de convencerse que también es válido para matrices de cualquier tamaño es la siguiente: en el apartado anterior vimos que, si triangulamos una matriz, entonces el determinante de la matriz triangulada es modificado por algunos cambios de signo y por productos por números reales *no nulos*. Observemos que estas modificaciones no afectan si el determinante es o no 0; es decir, si el determinante de la matriz original es no nulo, entonces el de la matriz triangulada también; y viceversa. Sabemos que el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas de la diagonal y, cuando estudiamos rango, vimos que una matriz es inversible sí, y solo sí, cuando la triangulamos, no le quedan entradas nulas en la diagonal. Por lo tanto, ¡una matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante es no nulo!

■ **Ejemplo 56** ¿Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ es inversible $\begin{pmatrix} 4+k & k & 7 \\ 3 & k & 6 \\ 3-k & 0 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$? La matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante no es 0. Calculamos el determinante (desarrollando por la columna 2):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4+k & k & 7 \\ 3 & k & 6 \\ 3-k & 0 & k \end{vmatrix} &= -k(3k-6(3-k))+k((4+k)k-7(3-k)) \\ &= -k(9k-18)+k(k^2+11k-21) = k(-9k+18+k^2+11k-21) \\ &= k(k^2+2k-3) = k(k-1)(k+3).\end{aligned}$$

Este determinante se anula para $k=0$, $k=1$ y $k=-3$. Esto quiere decir que la matriz es inversible para todo k distinto de esos valores. ■

La última propiedad que vamos a estudiar del determinante es cómo se comporta respecto de la multiplicación de matrices.

Proposición 24 Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B)$.

Es decir, "el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de dichas matrices". Esto tiene muchas consecuencias que les dejamos para que averigüen en el siguiente experimento.

Experimento 31 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Usando la Proposición 24, respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el determinante de A^k, la potencia k-ésima de A? Aquí $k \in \mathbb{N}$.
2. Si A es inversible, ¿cuál es el determinante de A^{-1}? Recuerden que $AA^{-1} = I$.
3. Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no es inversible, ¿qué pueden decir de $A\cdot B$ y de $B\cdot A$?
4. Si $A\cdot B$ es inversible, ¿qué pueden decir de A y de B?

■

5.5.6 Utilizando el determinante para clasificar sistemas lineales

Ya sabemos que un sistema de ecuaciones lineales con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado sí, y solo sí, su matriz asociada es inversible. Podemos entonces concluir que *un sistema de ecuaciones lineales con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado sí, y solo sí, su matriz asociada tiene determinante no nulo*. Por lo tanto, para clasificar un sistema, el determinante nos indica de manera directa si es o no compatible determinado. En caso que el determinante sea nulo, tendremos que estudiarlo de otra manera para determinar si se trata de un sistema compatible indeterminado o un sistema incompatible.
El determinante es espacialemente útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales *con parámetros*. En efecto, consideremos nuevamente el sistema de la página 135:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 &= 0 \end{cases}$$

En lugar de triangular este sistema y analizar para qué valor de k se anula alguna entrada de la diagonal, podemos directamente calcular el determinante (por la segunda columna, por ejemplo):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & k & k \end{pmatrix} = -k(2k-2)-k(1-2) = -k(2k-2-1) = -k(2k-3).$$

El número $-k(2k-3)$ se anula para los valores $k=0$ y $k=-\frac{3}{2}$. Por lo tanto, para los valores de k distintos de 0 y $-\frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado. Observemos qué sencillo fue hallar estos valores de k, sin necesidad de triangular la matriz con el k como entrada. Por supuesto, debemos aún analizar los casos $k = 0$ y $k = -\frac{3}{2}$ por separado para determinar si en esos casos el sistema es incompatible o compatible indeterminado.

Hagamos un último ejemplo. Clasifiquemos nuevamente el sistema con dos parámetros de la página 138 utilizando determinantes:

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z &= 1 \\ x + (a+1)y + z &= b \\ x + y + (a+1)z &= b^2 \end{cases}$$

Ya sabemos que, para que el sistema sea compatible determinado, depende solo de la matriz (no ampliada) asociada al sistema. Por lo tanto, calculamos el determinante (desarrollando por la primera fila):

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} &= (a+1)((a+1)^2-1) - ((a+1)-1) + (1-(a+1)) \\ &= (a+1)(a^2+2a) - 2a = a(a+1)(a+2) - 2a \\ &= a((a+1)(a+2)-2) = a(a^2+3a) = a^2(a+3) \end{aligned}$$

El determinante de la matriz asociada se anula, entonces, en $a = 0$ y $a = -3$, por lo que ya podemos concluir que para los valores de a distintos de estos dos, el sistema es compatible determinado. Por último, nos resta analizar los casos $a = 0$ y $a = -3$ reemplazando en la matriz ampliada asociada:

Caso $k = 0$ Caso $k = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b^2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{array}\right)$$

En el primer caso, las tres ecuaciones asociadas a la matriz son la misma ecuación. Por lo tanto, para que el sistema no sea incompatible, lo que está del otro lado de la igualdad (los coeficientes independientes) deben ser iguales. Es decir, para que el sistema sea compatible indeterminado debe suceder $1 = b = b^2$, cuya única solución es $b = 1$. Para $b \neq 1$, el sistema es incompatible. En el segundo caso, ya no es tan inmediato darse cuenta quien tiene que ser b para que el sistema no sea incompatible. Debemos triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b - b^2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 + 2b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b - b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 + b + 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema será compatible indeterminado sí, y solo sí, $b^2 + b + 1 = 0$. Pero como este número siempre es mayor a cero (cualquiera sea el $b \in \mathbb{R}$), entonces el sistema es incompatible siempre. De esta manera, arribamos a las mismas conclusiones que en nuestra resolución original (de la página 139), solo que haciendo menos cuentas.

¿Qué hicimos en el apartado 5.5?

- Definimos el determinante de una matriz cuadrada.
- Aprendimos a calcular el determinante de una matriz mediante el desarrollo por filas o columnas.
- Estudiamos las propiedades básicas del determinante: su relación con las operaciones elementales de filas (o columnas) y su relación con la inversibilidad de la matriz.
- Utilizamos el determinante para clasificar y resolver sistemas de ecuaciones lineales (con y sin parámetro).

■