Capítulo 5

Recursión

§5.1. Sucesiones

5.1.1. Si A es un conjunto, una ***sucesión*** de elementos de A es una función $f : \mathbb{N} \to A$. Casi siempre que tenemos una tal sucesión y un número $n \in \mathbb{N}$, preferimos escribir f_n en lugar de $f(n)$ y llamamos a f_n la ***n-ésima componente*** de la sucesión en lugar de «el valor de f en n». Más aún, solemos escribir a una sucesión en la forma

$$(f_n)_{n\geq 1}$$

o, más explícitamente, listando las primeras de sus componentes

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots$$

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de números reales puede ser escrita en la forma

$$(2^n)_{n\geq 1}$$

o en la forma

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots \tag{1}$$

Es importante observar que esta última notación es solamente indicativa y no determina completamente a la sucesión. Así, la sucesión $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g_n = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 18x + 24)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene las mismas primeras cinco componentes que f y podríamos escribirla también en la forma (1). Para evitar ambigüedades, incluimos frecuentemente en la lista de las primeras componentes de una sucesión la expresión de tu componente general: escribimos, por ejemplo,

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^n, \dots$$

y

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots, \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 18x + 24), \dots$$

para referirnos a f y a g, respectivamente.

5.1.2. Una pequeña variación de la definición de sucesión que acabamos de dar es la siguiente. Si $n_0 \in \mathbb{Z}$ y A es un conjunto, una ***sucesión de elementos de A que empieza en n_0*** es una función $f : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} \to A$. Escribimos a una tal sucesión en la forma

$$(f_n)_{n \geq n_0}$$

o listando sus componentes empezando por la n_0-ésima,

$$f_{n_0}, f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \dots$$

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = 2^n$ es una sucesión de enteros

$$1, 2, 3, 4, \dots, 2^n, \dots$$

que empieza en la componente 0-ésima y la sucesión

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{360}, \frac{1}{840}, \frac{1}{1680}, \dots, \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}, \dots$$

empieza en su componente con índice 4.

§5.2. Definiciones por recursión

5.2.1. Muchas sucesiones se dan de manera explícita, como dimos los todos los ejemplos de sucesiones de la sección anterior, exhibiendo una *fórmula* que determine los valores de cada una de sus componentes. También es posible dar una sucesión de manera ***implícita*** o ***recursiva***. Veamos un ejemplo de qué significa esto: afirmamos que hay exactamente una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ que empieza en su componente 0-ésima, que tiene

$$a_0 = 1 \tag{2}$$

y tal que para cada $n \geq 1$ vale que

$$a_n = n \cdot a_{n-1}. \tag{3}$$

Observemos que no estamos diciendo con esto *cuál* es el valor de cada componente a_n de la sucesión, sino que estamos dando un *procedimiento* o *algoritmo* que permite calcular esas componentes:

- Así, es claro que la 0-ésima componente de la sucesión es $a_0 = 1$, porque eso es precisamente uno de los dos datos que tenemos sobre ella.
- De la componente a_1 sabemos, gracias a (3), que es igual a $1 \cdot a_0$. Como sabemos ya cuál es el valor de a_0, esto nos permite determinar de manera unívoca el valor de a_1: en efecto, es $a_1 = 1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1$.
- Podemos seguir de esta forma: de la componente a_2 de la sucesión sabemos que es igual a $2 \cdot a_1$ y como la componente a_1 está bien determinada por los datos que tenemos y vale 1, tenemos que $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$.
- Por supuesto, de manera similar vemos que $a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$, que $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$, etc.

Vemos así que los datos que tenemos sobre la sucesión implican que las primeras componentes de la sucesión son, necesariamente,

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$$

Más aún, debería ser intuitivamente claro que con este procedimiento podemos determinar de manera unívoca a partir de las ecuaciones (2) y (3) con las que empezamos *cualquier* componente de la sucesión: es por eso que hay exactamente una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisface esas dos ecuaciones.

5.2.2. Veamos otro ejemplo de una sucesión definida recursivamente. Afirmamos que hay exactamente una sucesión de números $(C_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$C_0 = 1 \tag{4}$$

y, para cada entero $n \geq 1$,

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}. \tag{5}$$

En efecto, claramente toda sucesión que satisfaga esas dos condiciones tiene necesariamente

$$C_0 = 1, \qquad C_1 = \frac{2(2 \cdot 1 - 1)}{1+1} C_0 = 1, \qquad C_2 = \frac{2(2 \cdot 2 - 1)}{2+1} C_1 = 2,$$
$$C_3 = \frac{2(2 \cdot 3 - 1)}{3+1} C_2 = 5, \qquad C_4 = \frac{2(2 \cdot 4 - 1)}{4+1} C_3 = 14, \qquad \text{etc.}$$

Es fácil ver de esta manera que las primeras componentes de una sucesión que cumple (4) y (5) necesariamente son

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1 430	4 862	16 796	58 786

Estos números se llaman ***números de Catalan***, por Eugène Charles Catalan, y aparecen en los más variados contextos. Hay libros enteros dedicados a estudiar esta sucesión de números, como los libros [Sta2015] y [Kos2009] de Richard Stanley y de Thomas Koshy.

5.2.3. La forma general de las definiciones recursivas de sucesiones del tipo de los dos ejemplos que acabamos de ver es la siguiente. Empezamos con un conjunto A, un elemento $\alpha \in A$ y una función $f : \mathbb{N}_0 \times A \to A$, y consideramos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$a_0 = \alpha \tag{6}$$

y

$$a_n = f(n, a_{n-1}) \tag{7}$$

para cada entero positivo n. Así,

- para obtener el ejemplo de la sucesión de 5.2.1, podemos tomar $A \coloneqq \mathbb{Z}$, $\alpha \coloneqq 1$ y $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a la función tal que $f(n, x) = n \cdot x$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{Z}$, mientras que
- en el ejemplo de 5.2.2 de los números de Catalan se obtiene eligiendo $A \coloneqq \mathbb{Q}$, $\alpha \coloneqq 1$ y como $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a la función que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{Q}$ tiene

$$f(n, x) = \frac{2(2n-1)}{n+1}x.$$

Aunque es intuitivamente claro, es sin embargo necesario verificar que una vez que A, α y f están fijos existe efectivamente una sucesión que satisface las condiciones (6) y (7) y que, más aún, existe una sola: esto es lo que justifica usar esas dos ecuaciones para definir la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$. De esto se ocupan las siguientes dos proposiciones.

5.2.4. Empecemos por la unicidad, que es la parte más sencilla:

Proposición. *Sea A un conjunto, sea α un elemento de A y sea $f : \mathbb{N}_0 \times A \to A$ una función. Existe a lo sumo una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de elementos de A tal que*

$$a_0 = \alpha, \qquad a_n = f(n, a_{n-1})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ son dos sucesiones de elementos de A tales que

$$a_0 = \alpha, \qquad b_0 = \alpha \tag{8}$$

y que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_n = f(n, a_{n-1}), \qquad b_n = f(n, b_{n-1}). \tag{9}$$

Tenemos que mostrar que en estas condiciones las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ son iguales: es decir, que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $a_n = b_n$. Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ llamemos $P(n)$ a la afirmación «$a_n = b_n$» y probemos que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$ procediendo por inducción.

- Que $P(0)$ vale es consecuencia inmediata de las igualdades de (8).
- Supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}_0$ y que $P(k)$ vale, de manera que $a_k = b_k$. En ese caso, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(k+1, a_k) && \text{porque vale la primera igualdad de (9)} \\ &= f(k+1, b_k) && \text{por la hipótesis inductiva} \\ &= b_{k+1} && \text{porque vale la segunda igualdad de (9).} \end{aligned}$$

  Vemos así que vale la afirmación $P(k+1)$

Esto completa la inducción y, por lo tanto, la prueba de la proposición. □

5.2.5. Nuestro siguiente resultado se ocupa de la cuestión de la existencia.

Proposición. *Sea A un conjunto, sea α un elemento de A y sea $f : \mathbb{N}_0 \times A \to A$ una función. Existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de elementos de A tal que*

$$a_0 = \alpha, \qquad a_n = f(n, a_{n-1})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Daremos dos demostraciones de esta proposición, basadas en ideas bastante diferentes. Las dos son de naturaleza técnica — se trata, por lejos, de los argumentos más difíciles que presentaremos en estas notas — así que el lector puede saltárselas sin mucha pérdida.

Primera demostración. Organizamos esta demostración en tres pasos.

Primer paso. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea $P(n)$ la afirmación

$$\text{existe una única función función } h_n : \{0, \dots, n\} \to A \text{ tal que } h_n(0) = \alpha \text{ y } h_n(i) = f(i, h_n(i-1)) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{10}$$

Nuestro primer objetivo es probar por inducción en n que esta afirmación vale cualquiera sea el elemento n de $\mathbb{N}_0$.

- Hay una función $h_0 : \{0\} \to A$ tal que $h_0(0) = \alpha$. Esta función satisface las condiciones y claramente es la única función $\{0\} \to A$ que las satisface: esto significa que vale la afirmación $P(0)$.
- Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que vale la afirmación $P(k)$, de manera que existe una única función $h_k : \{0, \dots, k\} \to A$ tal que

  $$h_k(0) = \alpha$$

  y

  $$h_k(i) = f(i, h_k(i-1)) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}.$$

  Definimos una función $g : \{0, \dots, k+1\} \to A$ de la siguiente manera: si $i \in \{0, \dots, k+1\}$, ponemos

  $$g(i) \coloneqq \begin{cases} h_k(i), & \text{si } 0 \le i \le k; \\ f(k+1, h_k(k)), & \text{si } i = k+1. \end{cases} \tag{11}$$

  Afirmamos que g satisface las condiciones de que

  $$g(0) = \alpha \tag{12}$$

  y

  $$g(i) = f(i, g(i-1)) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k+1\}. \tag{13}$$

  Que la primera se cumple es evidente, ya que $g(0) = h_k(0) = \alpha$. Por otro lado, si i es un elemento de $\{1, \dots, k+1\}$, entonces hay dos casos: o bien $i \le k$, y entonces

  $$g(i) = h_k(i) = f(i, h_k(i-1)) = f(i, g(i-1)),$$

  o bien $i = k+1$, y en ese caso

  $$g(i) = g(k+1) = f(k+1, h_k(k)) = f(k+1, g(k)) = f(i, g(i-1))$$

  por la forma en que definimos a g.

  Veamos ahora que la función $g : \{0, \dots, k+1\} \to A$ que definimos en (11) es, de hecho, la *única* función $\{0, \dots, k+1\} \to A$ que satisface las condiciones (12) y (13). Para verlo, supongamos que $g' : \{0, \ldots, k+1\} \to A$ es otra función con $g'(0) = \alpha$ y tal que $g'(i) = f(i, g'(i-1))$ para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, y mostremos que, de hecho, g y g' son la misma función. Si no lo son, entonces el conjunto

$$X \coloneqq \{i \in \{0, \ldots, k+1\} : g(i) \neq g'(i)\}$$

es no vacío y tiene, por lo tanto, un menor elemento $j \coloneqq \min X$. No puede ser que j sea igual a 0, ya que $g(0) = \alpha = g'(0)$, así que j es un elemento positivo de $\{0, \ldots, k+1\}$. Se sigue de eso que $j-1$ es un elemento de $\{0, \ldots, k+1\}$ que *no* pertenece al conjunto X, es decir, tal que $g(j-1) = g'(j-1)$: pero esto es absurdo, porque en ese caso tenemos que

$$g(j) = f(j, g(j-1)) = f(j, g'(j-1)) = g'(j),$$

contradiciendo el hecho de que j pertenece a X.

Hemos probado que la función g que definimos en (11) satisface las condiciones (12) y (13), y que es la única que las satisface: esto significa que podemos poner $h_{k+1} \coloneqq g$ para concluir que la afirmación $P(k+1)$ se cumple.

Esto completa la inducción y, por lo tanto, la prueba de que la afirmación $P(n)$ de (10) vale cualquiera sea para todo $n \in \mathbb{N}$.

SEGUNDO PASO. El segundo paso de la demostración consiste en mostrar que

si $n \in \mathbb{N}_0$, entonces la restricción de la función h_{n+1} al conjunto $\{0, \ldots, n\}$ es $h_{n+1}|_{\{0,\ldots,n\}} = h_n$ y, en particular, se tiene que $h_{n+1}(n) = h_n(n)$. (14)

Antes de eso, observemos que esta afirmación tiene sentido: el conjunto $\{0, \ldots, n\}$ está contenido en el dominio de la función h_{n+1} y podemos entonces considerar la restricción $h_{n+1}|_{\{0,\ldots,n\}}$, y esa restricción tiene el mismo dominio y codominio que h_n.

Para verificar (14), fijemos $n \in \mathbb{N}_0$ y llamemos q a la restricción $h_{n+1}|_{\{0,\ldots,n\}}$, que es una función $\{0, \ldots, n\} \to A$. Se tiene que

$$q(0) = h_{n+1}(0) = \alpha.$$

Por otro lado, si $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$q(k) = h_{n+1}(k) = f(k, h_{n+1}(k-1)) = f(k, q(k-1)).$$

Esto significa que q tiene las mismas propiedades que, de acuerdo a la afirmación $P(n)$, caracterizan unívocamente a la función h_n: se sigue de eso, entonces, que $q = h_n$, como queremos.

TERCER PASO. Estamos por fin en condiciones de definir una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ en A poniendo, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_n \coloneqq h_n(n).$$

Esto tiene sentido precisamente porque a esta altura tenemos determinada para cada $n \in \mathbb{N}_0$ una función h_n que tiene al número n en su dominio. Para concluir la prueba de la proposición es suficiente que mostremos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ satisface las condiciones del enunciado. Procedemos, como siempre, por inducción.

Observemos primero que claramente $a_0 = h_0(0) = \alpha$, porque h_0 hace que valga la afirmación $P(0)$. Por otro lado, supongamos que $k \in \mathbb{N}_0$ es tal que vale que $a_k = f(k, a_{k-1})$ y observemos que entonces

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= h_{k+1}(k+1) \\
&= f(k+1, h_{k+1}(k)) && \text{porque vale } P(k+1) \\
&= f(k+1, h_k(k)) && \text{gracias a (14)} \\
&= f(k+1, a_k).
\end{aligned}
$$

De acuerdo al principio de inducción, entonces, la sucesión a satisface las condiciones del enunciado. Esto completa la prueba de la proposición. □

Segunda demostración de la Proposición 5.2.5. Digamos que un subconjunto F de $\mathbb{N}_0 \times A$ es *bueno* si $(0, \alpha) \in F$ y cada todo elemento (n, a) de $\mathbb{N}_0$ vale que

$$(n, a) \in F) \implies (n+1, f(n+1, a)) \in F.$$

Hay subconjuntos buenos de $\mathbb{N}_0 \times A$, ya que $\mathbb{N}_0 \times A$ mismo es uno de ellos, así que podemos considerar la intersección de todos ellos: escribámosla $\mathscr{F}$. Mostremos que $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$.

- El par $(0, \alpha)$ pertenece a cada subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, así que pertenece a la intersección de todos los subconjuntos buenos de $\mathbb{N}_0 \times A$, es decir, a $\mathscr{F}$.
- Supongamos, por otro lado, que (n, a) es un elemento de $\mathscr{F}$. Si F es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, entonces F contiene a $\mathscr{F}$ y, por lo tanto, tenemos que $(n, a) \in F$: como F es bueno, esto nos dice que también $(n+1, f(n+1, a)) \in F$. Vemos así que el par $(n+1, f(n+1, a))$ pertenece a cada subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, así que también pertenece a la intersección $\mathscr{F}$ de todos ellos.

Más aún, el conjunto $\mathscr{F}$ tiene la siguiente propiedad:

ningún subconjunto propio *de $\mathscr{F}$ es bueno.* (15)

En efecto, si por el contrario hubiera un subconjunto propio F de $\mathscr{F}$ que es bueno, tendríamos al mismo tiempo que $\mathscr{F} \subseteq F$, ya que $\mathscr{F}$ está contenido en todo subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, y que $F \subsetneq \mathscr{F}$, lo que es absurdo.

El conjunto $\mathscr{F}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}_0 \times A$ y, por lo tanto, es una relación de $\mathbb{N}_0$ a A. Queremos probar que se trata, de hecho, de una *función* de $\mathbb{N}_0$ a A. Lo primero que tenemos que probar para ello es que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ existe $a \in A$ tal que $(n, a) \in \mathscr{F}$ o, equivalentemente, que el conjunto

$$S \coloneqq \{m \in \mathbb{N}_0 : \text{existe } a \in A \text{ tal que } (n, a) \in \mathscr{F}\}$$

coincide con $\mathbb{N}_0$. Es suficiente para ello que probemos que este conjunto S es inductivo.

- Como $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$ sabemos que el par $(0, \alpha)$ pertenece a $\mathscr{F}$ y, por lo tanto, que 0 pertenece al conjunto S.
- Sea ahora k un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $k \in S$, de manera que hay un elemento a en A tal que $(k, a) \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, esto implica que el par $(k+1, f(k+1, a))$ pertenece también a $\mathscr{F}$ y, en consecuencia, que $k+1$ es un elemento de S.

La segunda verificación que tenemos que hacer para establecer que $\mathscr{F}$ es una función de $\mathbb{N}_0$ a A es la de que vale

si $m \in \mathbb{N}_0$ y y, $y' \in A$ son tales que (m, y) y (m, y') pertenecen a $\mathscr{F}$, entonces $y = y'$.

Para ello consideraremos el conjunto

$$T \coloneqq \{m \in \mathbb{N}_0 : \text{siempre que } y, y' \in A \text{ son tales que } (m, y) \text{ y } (m, y') \in \mathscr{F} \text{ es } y = y'\}$$

y mostraremos que coincide con $\mathbb{N}$ probando que es inductivo.

- Primero veamos que 0 pertenece a T. Supongamos que y e y' son dos elementos de A tales que los pares $(0, y)$ y $(0, y')$ están en $\mathscr{F}$ y, para llegar a un absurdo, que $y \neq y'$. Claramente al menos uno de y e y' tiene que ser distinto de α, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que es $y' \neq \alpha$.

  Consideremos el conjunto $F \coloneqq \mathscr{F} \setminus \{(0, y')\}$, que es un subconjunto propio de $\mathscr{F}$. Mostraremos que F es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, y esto es imposible en vista de (15): esta contradicción proviene de haber supuesto que y e y' son distintos, así que deben ser iguales y, por lo tanto, 0 pertenece al conjunto T.

  Como $(0, \alpha)$ está en $\mathscr{F}$ y $(0, \alpha) \neq (0, y')$ porque $\alpha \neq y'$, es claro que $(0, \alpha)$ está en F. Por otro lado, si (n, a) es un elemento cualquiera de F, entonces también es un elemento de $\mathscr{F}$ y, como $\mathscr{F}$ es un conjunto bueno, tenemos que $(n+1, f(n+1, a)) \in \mathscr{F}$: como $n+1 \neq 0$, claramente es $(n+1, f(n+1, a)) \in \mathscr{F} \setminus \{(0, y')\} = F$. Esto prueba que F es un subconjunto bueno, como dijimos.
- Supongamos ahora que m es un elemento de T y mostremos que $m+1$ también lo es. Sean y e y' dos elementos de A tales que los pares $(m+1, y)$ y $(m+1, y')$ pertenecen a $\mathscr{F}$ y para

llegar a una contradicción supongamos que estos dos elementos y e y' son distintos. Por lo que ya probamos, sabemos que hay un elemento z de A tal que $(m,z) \in \mathscr{F}$ y esto implica, ya que $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, que $(m+1, f(m+1,z))$ pertenece a $\mathscr{F}$. Como y e y' son distintos, alguno de los dos tiene que ser distinto de $f(m+1,z)$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y' \neq f(m+1,z)$.

Consideremos el subconjunto $F \coloneqq \mathscr{F} \setminus \{(m+1,y')\}$ de $\mathscr{F}$, que es propio, y mostremos que es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$: de la misma forma que antes, esto contradice a nuestra observación (15), y esta contradicción prueba que $m+1$ pertenece al conjunto T.

Como el par $(0,\alpha)$ pertenece a $\mathscr{F}$ y es distinto de $(m+1,y)$, ya que $0 \neq m+1$, es claro que $(0,\alpha)$ pertenece a F. Sea, por otro lado, (n,a) un elemento cualquiera de F. Como (n,a) pertenece a $\mathscr{F}$, sabemos que $(n+1, f(n+1,a))$ es un elemento de $\mathscr{F}$. Este par ordenado es distinto de $(m+1,y')$:

- Si $n \neq m$, entonces $n+1 \neq m+1$, por supuesto, así que $(n+1, f(n+1,a)) \neq (m+1,y')$.
- Si en cambio $n = m$, entonces $(m,a) = (n,a) \in \mathscr{F}$ y $(m,z) \in F$, y como m pertenece a T tenemos que $a = z$ y, por lo tanto que

  $$(n+1, f(n+1,a)) = (m+1, f(m+1,z)) \neq (m+1,y'),$$

  ya que $f(m+1,z) \neq y'$.

En cualquier caso, entonces, tenemos que $(n+1, f(n,a)) \in F$. Esto prueba que F es bueno.

Juntando todo lo que hemos hecho, podemos concluir que el subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathbb{N}_0 \times A$ es una función $\mathbb{N}_0 \to A$. Veámosla como una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ el elemento a_n de A es el único tal que (n,a_n) pertenece a $\mathscr{F}$. Para terminar la prueba de la proposición mostraremos que esta sucesión satisfaces las condiciones descriptas en el enunciado. Como $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno de $\mathbb{N}_0 \times A$, sabemos que $(0,\alpha)$ pertenece a $\mathscr{F}$ y, por lo tanto, que $a_0 = \alpha$. Por otro lado, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces $n-1$ es uno de $\mathbb{N}_0$, y $(n-1, a_{n-1})$ es un elemento de $\mathscr{F}$: como $\mathscr{F}$ es un subconjunto bueno, esto implica que $(n, f(n,a_{n-1}))$ también lo es y, por lo tanto, que $a_n = f(n,a_{n-1})$. La proposición queda así probada. □

5.2.6. Observación. Una de las razones por las que demostrar en detalle la Proposición 5.2.5 es importante es que exactamente las mismas ideas permiten probar algo mucho menos intuitivo, el llamado *principio de recursión transfinita*, que extiende el resultado de esa proposición a las llamadas «sucesiones transfinitas». El primer uso de este principio de recursión transfinita fue hecho por Georg Cantor en 1872 en su estudio [Can1872] del problema de la descripción de los posibles conjuntos de convergencia de las series de Fourier. Cantor se dio cuenta inmediatamente que su uso de ese principio era *demasiado* informal, y con la intención de hacerlo preciso estudió con mayor generalidad la idea de recursión transfinita en [Can1897] y, de hecho, este trabajo es una de las motivaciones originales del desarrollo de la teoría formal de conjuntos.

La demostración del principio de recursión transfinita puede hacerse de exactamente la misma forma en que probamos la Proposición 5.2.5. La dificultad más grande reside en encontrar el reemplazo apropiado para el conjunto $\mathbb{N}_0$ que sirva para indexar las componentes de una «sucesión transfinita».

§5.3. Variaciones sobre la recursión

5.3.1. En la sección anterior vimos que es posible determinar una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de elementos de un conjunto A dando la componente inicial a_0 y describiendo cómo cada una de las demás componentes puede obtenerse a partir de la inmediatamente anterior. El punto clave que hace que esta idea funcione es que a pesar de que no damos una fórmula explícita para cada componente de la sucesión, la información que damos es de todas formas suficiente como para determinar unívocamente cada una de esas componentes.

Este idea admite muchas variaciones. Consideraremos en esta sección algunas.

Recurrencias de orden superior

5.3.2. Existe exactamente una sucesión $(F_n)_{n\geq 0}$ de elementos de $\mathbb{Z}$ tal que

$$F_0 = 0,$$
$$F_1 = 1$$

y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

para cada entero $n \geq 2$. En efecto, F_0 y F_1 quedan completamente determinados por las dos primeras condiciones y sus valores son 0 y 1, respectivamente. La tercera condición, por su parte, nos dice que $F_2 = F_1 + F_0$, así que la componente F_2 también está completamente determinada: su valor es $F_2 = 1 + 0 = 1$. Esa misma tercera condición nos dice que $F_3 = F_2 + F_1$ y, de acuerdo a lo que ya sabemos, es entonces $F_3 = 1 + 1 = 2$. Claramente podemos continuar de esta forma: cada una de las componentes de la sucesión $(F_n)_{n\geq 0}$ empezando por la segunda está determinada por las dos anteriores: es su suma. Así, las primeras componentes de la sucesión son

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ \ldots$$

Llamamos a esta sucesión la ***sucesión de números de Fibonacci***, por Fibonacci, nombre por el que es conocido[1] Leonardo de Pisa. Durante su infancia, Fibonacci acompañó a su padre, que era comerciante, en sus viajes por la costa del Mediterráneo, y allí aprendió los métodos de los árabes para hacer cálculos aritméticos. Años mas tarde, en 1202, escribió un libro titulado *Liber Abaci* («El libro del cálculo» en latín) en el que explica el sistema de numeración que hoy llamamos arábigo: esta obra tuvo un rol fundamental en convencer a los europeos — tanto a los comerciantes como a los matemáticos — de abandonar el sistema de numeración romano, que usaban hasta ese momento, y adoptar el arábigo, que seguimos usando hasta hoy. En ese libro, Fibonacci plantea y resuelve un problema sobre el crecimiento de una población de conejos, y es en ese contexto que estudia la sucesión de números que hoy lleva su nombre.

5.3.3. Decimos que la definición de la sucesión de los números de Fibonacci es por una recurrencia ***de orden dos***, porque cada una de las componentes de la sucesión — a partir de la segunda — depende del valor de las *dos* anteriores. Es fácil dar muchos ejemplos de sucesiones de esa forma.

Un ejemplo importante y estrechamente relacionado con el de los números de Fibonacci es la sucesión $(L_n)_{n\geq 0}$ de enteros que está determinada por las condiciones de que

$$L_0 = 2,$$
$$L_1 = 1$$

y

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

para cada entero $n \geq 2$. Las primeras componentes de esta sucesión son

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ 322,\ 521,\ 843,\ 1364,\ 2207,\ \ldots$$

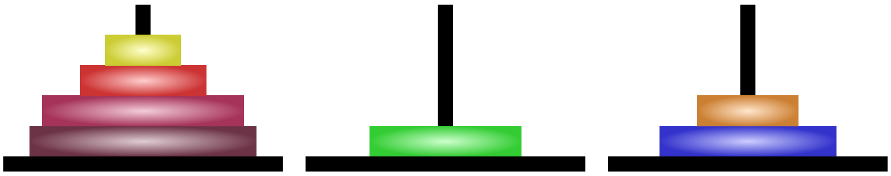
Notemos que la relación de recurrencia que define a esta sucesión es exactamente la misma que la que usamos para construir la sucesión de los números de Fibonacci: cada componente, desde la segunda en adelante, es suma de las dos que la preceden. La única diferencia entre las dos definiciones radica en los valores iniciales de la recursión.

Esta sucesión $(L_n)_{n\geq 0}$ es la de los ***números de Lucas***. El nombre recuerda a François Édouard Anatole Lucas, que estudió con gran detalle a los números de Fibonacci. Uno de sus intereses era el desarrollo de métodos para verificar si un número es primo o no: en 1857, a la edad de 15 años, empezó a probar un algoritmo — llamado hoy el «método de las secuencias de Lucas» — para decidir si el número

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

[1] El apellido de su padre era Bonacci: Fibonacci es una contracción de la frase latina *filius Bonacci*, que significa «hijo de Bonacci». Es de notar que este sobrenombre le fue puesto recién en 1838 por el historiador francés Guillaume Libri.

es primo y en 1879, 19 años después, concluyó que sí lo es. Él inventó el juego conocido como *La Torre de Hanoi*, con el que el autor de estas notas se entretenía cuando era niño durante los largos viajes en auto que hacía con sus padres por la Patagonia.



5.3.4. Podemos también dar definiciones por recursión de órdenes más altos. Así, hay exactamente una sucesión $(T_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$T_0 = T_1 = 0,$$
$$T_2 = 1$$

y

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

para cada $n \geq 3$. Calculando en orden, vemos que las primeras componentes de esta sucesión son

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ 24,\ 44,\ 81,\ 149,\ 274,\ 504,\ 927,\ 1705,\ 3136,\ \ldots$$

La recursión que define esta sucesión — a la que llamamos, un poco en broma, ***sucesión de numeros de tribonacci*** — es de orden *tres*: cada uno de las componentes, a partir de la tercera, se calcula a partir de las tres anteriores.

5.3.5. De manera similar, hay exactamente una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 3$$

y

$$a_n = a_{n-1}a_{n-4} + (-1)^n$$

para cada $n \geq 4$, y sus primeras componentes son, empezando por la 0-ésima,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 0,\ -1,\ -2,\ 1,\ 1,\ -2,\ 5,\ 4,\ 5,\ -11,\ -54,\ \ldots$$

Esta es una sucesión dada por una recursión de orden cuatro: para calcular cada componente necesitamos conocer las cuatro anteriores — aunque en realidad solo usemos dos de esas cuatro.

5.3.6. En general, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos considerar sucesiones dadas por relaciones de recursión de orden k: el siguiente resultado es el análogo de las Proposiciones 5.2.5 y 5.2.4 para esta situación:

Proposición. *Sea A un conjunto, sea $k \in \mathbb{N}$, sean $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ elementos de A y sea*

$$f : \mathbb{N} \times \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ factores}} \to A$$

una función. Existe una y una única sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de elementos de A que para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$a_n = \alpha_i \text{ si } 0 \leq n < k$$

y

$$a_n = f(n, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}) \text{ si } n \geq k.$$

Demostración. Consideremos el conjunto $B \coloneqq A \times \cdots \times A$, producto cartesiano de k factores iguales a A, y la función $F : \mathbb{N} \times B \to B$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada elemento $b = (x_0, \ldots, x_{k-1})$ de B tiene

$$F(n, b) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, f(n + k - 1, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})).$$

De acuerdo a la Proposición 5.2.5 hay exactamente una sucesión $(b_n)_{n\geq 0}$ de elementos de B tal que

$$b_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \tag{16}$$

y

$$b_n = F(n, b_{n-1}) \tag{17}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ la componente n-ésima b_n de esta sucesión es un elemento del conjunto B, así que la podemos escribir en la forma

$$b_n = (b_{n,0}, b_{n,1}, \ldots, b_{n,k-1})$$

con $b_{n,0}$, $b_{n,1}$, …, $b_{n,k-1}$ elementos de A bien determinados. Usando esta notación, la ecuaciones (16) dice que

$$b_{0,i} = \alpha_i \qquad \text{para cada } i \in \{0, \ldots, k-1\},$$

mientras que la ecuación (17) nos dice que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\begin{aligned}
(b_{n,0}, b_{n,1}, \ldots, b_{n,k-1}) &= b_n \\
&= F(n, b_{n-1}) \\
&= F(n, (b_{n-1,0}, b_{n-1,1}, \ldots, b_{n-1,k-1})) \\
&= (b_{n-1,1}, b_{n-2,2}, \ldots, b_{n-1,k-1}, f(n + k - 1, b_{n-1,0}, b_{n-1,1}, \ldots, b_{n-1,k-1})).
\end{aligned}$$

Mirando componente a componente esta igualdad podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$b_{n,i} = b_{n-1,i+1} \text{ para cada } i \in \{0, \dots, k-2\},$$
$$b_{n,k-1} = f(n+k-1, b_{n-1,0}, b_{n-1,1}, \dots, b_{n-1,k-1}).$$

De la primera de estas igualdades se deduce que si $n \in \mathbb{N}$ y $i \in \mathbb{N}_0$ son tales que $0 \le i < k$ es

$$b_{n,i} = b_{n+i,0}.$$

Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\ge 0}$ de elementos de A que para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene componente n-ésima dada por

$$a_n \coloneqq b_{n,0}.$$

Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$. Si $0 \le n < k$, entonces $a_n = b_{n,0} = b_{0,n} = \alpha_n$. Si en cambio $n \ge k$, entonces $a_n = b_{n,0} = b_{n-k+1,k-1}$ y esto es la última componente de

$$\begin{aligned} b_{n-k+1} &= F(n-k+1, b_{n-k}) \\ &= F(n-k+1, (b_{n-k,0}, b_{n-k,1}, \dots, b_{n-k,k-1})) \\ &= (b_{n-k,1}, \dots, b_{n-k,k-1}, f(n, b_{n-k,0}, b_{n-k,1}, \dots, b_{n-k,k-1})) \\ &= (b_{n-k,1}, \dots, b_{n-k,k-1}, f(n, b_{n-k,0}, b_{n-k+1,0}, \dots, b_{n-1,0})) \\ &= (b_{n-k,1}, \dots, b_{n-k,k-1}, f(n, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1})) \end{aligned}$$

así que $a_n = f(n, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1})$. Vemos así que la sucesión $(a_n)_{n\ge 1}$ satisface las condiciones descriptas en la proposición.

Para terminar la prueba de la proposición, supongamos que $(a'_n)_{n\ge 1}$ es otra sucesión de elementos de A que satisface esas condiciones. Claramente tenemos que $a'_i = a_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Por otro lado, si n es un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $n \ge k$ y vale que $a'_i = a_i$ para todo $i \in \{n-k, n-k+1, \dots, n-1\}$, entonces

$$a'_n = f(n, a'_{n-k}, a'_{n-k+1}, \dots, a'_{n-1}) = f(n, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}) = a_n.$$

Podemos así concluir que las sucesiones $(a_n)_{n\ge 1}$ y $(a'_n)_{n\ge 1}$ coinciden, y esto prueba la afirmación de unicidad de la proposición. □

Omitimos la demostración, porque es enteramente similar a las de aquellas dos proposiciones. Esta proposición nos permite justificar la buena definición de los ejemplos que consideramos arriba:

- La sucesión $(F_n)_{n\ge 0}$ de los números de Fibonacci se obtiene tomando $A = \mathbb{N}_0$, $k = 2$,

$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ y como $f : \mathbb{N} \times A \times A \to A$ a la función tal que $f(n, x, y) = x + y$ para cada $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times A \times A$.

- La sucesión $(L_n)_{n\geq 0}$ de los números de Lucas, por su parte, se obtiene con esa misma elección de A, k y f, pero con $\alpha_0 = 2$ y $\alpha_1 = 1$.
- La sucesión $(T_n)_{n\geq 0}$ de los números de tribonacci se obtiene tomando $A = \mathbb{N}$, $k = 3$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ y como $f : \mathbb{N} \times A \times A \times A \to A$ a la función tal que $f(n, x, y, z) = x + y + z$ cada vez que $n \in \mathbb{N}$ y x, y, $z \in A$.
- Finalmente, la sucesión del ejemplo 5.3.5 se obtiene tomando $A = \mathbb{Z}$, $k = 4$, $\alpha_i = i$ para cada $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $f : \mathbb{N} \times A \times A \times A \times A \to A$ a la función tal que

  $$f(n, x, y, z, w) = xw + (-1)^n$$

  cada vez que $n \in \mathbb{N}$ y x, y, z, $w \in A$.

5.3.7. Es posible definir sucesiones por recursiones más complicadas que las que se consideran en la Proposición 5.3.6. Veamos dos ejemplos

(a) Hay una sucesión $(t_n)_{n\geq 1}$ que tiene $t_1 = 1$ y que es tal que, para cada entero $n \geq 2$, satisface la relación

$$t_n = \begin{cases} 1 + t_{n/2}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ t_{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las primeras componentes de esta sucesión son

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots$$

(b) Hay una sucesión $(u_n)_{n\geq 0}$ tal que $u_1 = 0$ y

$$u_n = \sum_{m=0}^{n-1} m^2 u_m$$

para cada entero $n \geq 1$. Las primeras componentes de esta sucesión son

$$1,\ 5,\ 50,\ 850,\ 22100,\ 817700,\ 40885000,\ 2657525000,\ \ldots$$

En cada uno de estos dos ejemplos, la relación de recursión que determina cada componente de la sucesión no depende de un número fijo de componentes anteriores: en el primer ejemplo, t_n depende, cuando n es par, de $t_{n/2}$, mientras que en el segundo ejemplo para calcular u_n usando la relación de recurrencia necesitamos conocer *todas* las componentes anteriores, $u_0, \ldots, u_{n-1}$. De todas formas, es claro que en ambos casos las sucesiones consideradas están bien determinadas. Esto puede formalizarse en una proposición del mismo estilo que la Proposición 5.3.6, pero no lo haremos. Nos tomaremos, de todas formas, la libertad de usar estos y otros tipos de recursiones para definir sucesiones

5.3.8. Ejercicio. Sea A un conjunto y para cada $n \in \mathbb{N}_0$ escribamos $I_n := \{0, \dots, n\}$ y $\mathscr{F}_n$ al conjunto de todas las funciones $I_n \to A$. Supongamos que tenemos

- un elemento α de A y
- para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $F_n : \mathscr{F}_{n-1} \to A$.

Muestre que existe exactamente una función $f : \mathbb{N}_0 \to A$ tal que

- $f(0) = \alpha$ y
- para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(n) = F_n(f|_{I_{n-1}})$.

Esto nos da una generalización del principio de recursión de las Proposiciones 5.2.5 y 5.3.6. Por ejemplo, si A es $\mathbb{Z}$, α es 1 y para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n : \mathscr{F}_{n-1} \to \mathbb{N}_0$ es tal que

$$F_n(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(i) \qquad \text{para toda función } h : I_{n-1} \to \mathbb{Z},$$

entonces este resultado nos dice que hay una función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, esto es, una sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$f_0 = 1, \qquad f_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

§5.4. Manipulación de sucesiones definidas recursivamente

5.4.1. El principio de inducción es una herramienta natural para probar cosas sobre sucesiones que están definidas por recurrencia. El objetivo de esta sección es usar las sucesiones de los números de Fibonacci y de Catalan para ejemplificar esto.

Números de Fibonacci

5.4.2. Sea $(F_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de números de Fibonacci, de manera que

$$F_0 = 0,$$
$$F_1 = 1$$

y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{18}$$

para cada entero n tal que $n \geq 2$.

5.4.3. Si calculamos los primeros números de Fibonacci vemos que crecen con bastante rapidez. Nuestro primero resultado es que, de todas formas, podemos acotarlos por una exponencial.

Lema. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $F_n \leq 2^n$.*

Demostración. Procedemos por inducción, llamando $P(n)$ a la afirmación «$F_n \leq 2^n$». Es claro que $F_0 = 0 \leq 2^0$ y que $F_1 = 1 \leq 2^1$, así que $P(0)$ y $P(1)$ valen.

Supongamos, para establecer el paso inductivo, que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 2$ y que las afirmaciones $P(k-1)$ y $P(k-2)$ valen. Entonces

$$\begin{aligned} F_k &= F_{k-1} + F_{k-2} && \text{por (18)} \\ &\leq 2^{k-1} + 2^{k-2} && \text{por } P(k-1) \text{ y } P(k-2) \\ &\leq 2^{k-1} + 2^{k-1} && \text{ya que } 2^{k-2} \leq 2^2 \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k. \end{aligned}$$

Esto nos dice que, bajo la hipótesis inductiva, vale la afirmación $P(k)$ y, por lo tanto, completa la inducción. □

5.4.4. La suma de los primeros números de Fibonacci difiere ella misma de un número de Fibonacci en una unidad:

Lema. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.*

Demostración. Procedemos por inducción con respecto a n. Si $n = 1$, el lado izquierdo de la igualdad que queremos probar es $F_1 = 1$ y el derecho es $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$: vemos así que en ese caso la igualdad vale.

Supongamos ahora que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 2$ y que la igualdad del enunciado vale cuando n es $k-1$, esto es, que

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{k-1} = F_{k+1} - 1.$$

Usando esto, vemos que

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{k-1} + F_k = F_{k+1} - 1 + F_k = F_{k+2} - 1,$$

así que la igualdad del enunciado también vale cuando n es k. Esto completa la inducción y prueba el lema. □

5.4.5. La siguiente identidad es conocida como ***identidad de Cassini***, por Giovanni Domenico

Cassini — cuyo nombre no solo usamos para nombrar una identidad sino también una nave espacial que fue enviada en 1997 a fotografiar los anillos de Saturno.

Lema. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Demostración. Cuando $n = 1$, el lado izquierdo de la igualdad que queremos probar tiene valor $F_2F_0 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1$ y el derecho $(-1)^1 = -1$, así que la igualdad vale en ese caso.

Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que la igualdad del enunciado vale cuando n es k, es decir, tal que

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k, \tag{19}$$

y calculemos, usando la relación de recurrencia que define a los números de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 &= (F_k + F_{k+1})F_k - F_{k+1}(F_{k-1} + F_k) \\ &= F_k^2 + F_{k+1}F_k - F_{k+1}F_{k-1} - F_{k+1}F_k \\ &= F_k^2 - F_{k+1}F_k \end{aligned}$$

y esto es, de acuerdo a la hipótesis inductiva (19),

$$= (-1)^{k+1}.$$

Vemos así que bajo esa hipótesis la igualdad del enunciado también vale cuando n es $k+1$. El lema es consecuencia de esto y del principio de inducción. □

5.4.6. Las sumas de los productos de números de Fibonacci consecutivos tienen también una descripción directa en términos de números de Fibonacci:

Lema. *Para cada entero* $n \geq 2$ *se tiene que*

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{n-1}F_n = \begin{cases} F_n^2, & \text{si } n \text{ es par;} \\ F_n^2 - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de que vale la igualdad del enunciado. Cuando $n = 2$, a izquierda y a derecha en la igualdad del enunciado tenemos $F_1F_2 = 1 \cdot 1 = 1$ y $F_2^2 = 1^2 = 1$, respectivamente, así que esa igualdad vale en ese caso: en otras palabras, vale $P(2)$.

Supongamos ahora que k es un entero tal que $k \geq 2$ y que vale que

$$F_1F_2 + F_2F_2 + \cdots + F_{k-1}F_k = \begin{cases} F_k^2, & \text{si } k \text{ es par;} \\ F_k^2 - 1, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Tenemos entonces que

$$F_1F_2 + F_2F_2 + \cdots + F_kF_{k+1} = \begin{cases} F_k^2 + F_kF_{k+1}, & \text{si } k \text{ es par;} \\ F_k^2 - 1 + F_kF_{k+1}, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora bien, es

$$F_k^2 + F_kF_{k+1} = F_k(F_k + F_{k+1}) = F_kF_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

de acuerdo a la identidad de Cassini 5.4.5, así que

$$F_1F_2 + F_2F_2 + \cdots + F_kF_{k+1} = \begin{cases} F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}, & \text{si } k \text{ es par;} \\ F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} - 1, & \text{si } k \text{ es impar;} \end{cases}$$

y esto es lo mismo que

$$\begin{cases} F_{k+1}^2 - 1, & \text{si } k+1 \text{ es impar;} \\ F_{k+1}^2, & \text{si } k+1 \text{ es par.} \end{cases}$$

Hemos mostrado así que si $k \geq 2$, entonces la afirmación $P(k)$ implica la afirmación $P(k+1)$. El lema sigue de esto, gracias al principio de inducción. □

5.4.7. Hasta ahora describimos relaciones entre componentes *cercanas* de la sucesión de Fibonacci. La siguiente, por el contrario, establece una relación sencilla entre componentes alejadas:

Lema. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, entonces*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Notemos que esta afirmación involucra *dos* números natural m y n.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P(n)$ la afirmación

para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

Observemos que es evidente que $P(1)$ vale: es simplemente la afirmación de que para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $F_{m+1} = F_{m+1}$, ya que $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

Supongamos entonces, para hacer inducción, que $k \in \mathbb{N}$ y que vale la afirmación $P(k)$, de manera que para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $F_{k+m} = F_{k-1}F_m + F_kF_{m+1}$. Ahora bien, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$F_{(k+1)+m} = F_{k+(m+1)}$$

y, usando la hipótesis inductiva, vemos que esto es

$$
\begin{aligned}
&= F_{k-1}F_{m+1} + F_kF_{m+2} \\
&= F_{k-1}F_{m+1} + F_k(F_m + F_{m+1}) \\
&= F_kF_m + (F_{k-1} + F_k)F_{m+1} \\
&= F_kF_m + F_{k+1}F_{m+1}.
\end{aligned}
$$

Esto nos dice, precisamente, que vale la afirmación $P(k+1)$, y completa la prueba del lema, gracias al principio de inducción. □

5.4.8. Este lema tiene el siguiente corolario: las fórmulas que aparecen en él se llaman ***fórmulas de duplicación***, ya que permiten duplicar el índice.

Corolario. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n(2F_{n+1} - F_n)$$

y

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Demostración. Si en la identidad del Lema 5.4.7 ponemos $m = n$, vemos que

$$
\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\
&= F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \qquad (20) \\
&= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n-1} + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2,
\end{aligned}
$$

y esta es la primera de las igualdades del corolario. Volviendo a la igualdad (20), tenemos también que

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n(2F_{n+1} - F_n),$$

ya que $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, y esta es la segunda igualdad del enunciado. Finalmente, si ponemos $m = n+1$ en el Lema 5.4.7, este nos dice que

$$
\begin{aligned}
F_{2n+1} &= F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2} \\
&= F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_n + F_{n+1}) \\
&= (F_{n-1} + F_n)F_{n+1} + F_n^2 \\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2,
\end{aligned}
$$

que es la tercera de las igualdades del corolario. □

5.4.9. La siguiente identidad, a la que llamamos ***identidad de Catalan***, generaliza a la de Cassini:

Lema. *Si* $0 \leq r \leq n$*, entonces*

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r+1}F_r^2.$$

En efecto, la identidad de Cassini es el caso particular de esta en el que $r = 1$. La prueba de esta proposición es un poco más complicada que las de las anteriores: procederemos por inducción y para probar el paso inductivo haremos una inducción.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{N}_0$ sea $P(r)$ la afirmación

para cada entero $n \geq r$ *se tiene que* $F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r+1}F_r^2$.

Probaremos que para todo $r \in \mathbb{N}_0$ la afirmación $P(r)$ vale, procediendo por inducción con respecto a r: esto demostrará la proposición. Observemos que la validez de la afirmación $P(0)$ es evidente, así que bastará que nos ocupemos del paso inductivo.

Sea entonces $s \in \mathbb{N}_0$ y mostremos que $P(s) \implies P(s+1)$. Para ello, supongamos que $P(s)$ vale, es decir, que

$$\text{si } n \geq s, \text{ entonces } F_{n-s}F_{n+s} - F_n^2 = (-1)^{n-s+1}F_s^2, \tag{21}$$

y mostremos que entonces también vale $P(s+1)$, es decir, que se tiene que

$$\text{si } n \geq s+1, \text{ entonces } F_{n-s-1}F_{n+s+1} - F_n^2 = (-1)^{n-s+2}F_{s+1}^2. \tag{22}$$

Para hacer esto, procederemos por inducción: para cada entero $n \geq s+1$, llamemos $Q_s(n)$ a la afirmación

$$F_{n-s-1}F_{n+s+1} - F_n^2 = (-1)^{n-s+2}F_{s+1}^2$$

y mostremos que $Q_s(n)$ vale para todo entero $n \geq s+1$. Esto probará (22).

La afirmación $Q_s(s+1)$ vale, ya que lo que afirma es que

$$F_0F_{2(s+1)} - F_{s+1}^2 = (-1)^{s+1-s+2}F_{s+1}^2,$$

que es evidente. Supongamos entonces que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq s+1$ y que $Q_s(k)$ vale. Sumando y restando $F_{k+1+s}F_{k+1-s}$, vemos que

$$\begin{aligned} &F_{k+1-s-1}F_{k+1+s+1} - F_{k+1}^2 \\ &\qquad = F_{k+1-s-1}F_{k+1+s+1} - F_{k+1+s}F_{k+1-s} + \underbrace{F_{k+1+s}F_{k+1-s} - F_{k+1}^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Como $k+1 \geq s$ y estamos suponiendo que $P(s)$ vale —es decir, que vale (21)— podemos reemplazar la parte marcada, y ver que esto es

$$= F_{k+1-s-1}F_{k+1+s+1} - F_{k+1+s}F_{k+1-s} + (-1)^{k+1-s+1}F_s^2$$

y esto, reescribiendo $F_{k+1+s+1}$ usando la relación de recurrencia de los números de Fibonacci y simplificando un poco, es, a su vez,

$$\begin{aligned}
&= F_{k-s}(F_{k+1+s} + F_{k+s}) - F_{k+1+s}F_{k+1-s} + (-1)^{k-s}F_s^2 \\
&= (F_{k-s} - F_{k+1-s})F_{k+1+s} + F_{k-s}F_{k+s} + (-1)^{k-s}F_s^2 \\
&= -F_{k-s-1}F_{k+1+s} + \underbrace{F_{k-s}F_{k+s} + (-1)^{k-s}F_s^2}.
\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que $P(s)$ vale y $k \geq s$, reemplazando la parte marcada, vemos que esta última expresión es

$$= -F_{k-s-1}F_{k+1+s} + F_k^2$$

y, finalmente, como estamos suponiendo que $Q_s(k)$ vale, esto es

$$= (-1)^{k-s+1}F_{s+1}^2. \tag{24}$$

Con toda esta cadena de igualdades —que va de (23) a (24)— hemos probado que

$$F_{k+1-s-1}F_{k+1+s+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{(k+1)-(s+1)+1}F_{s+1}^2,$$

es decir, que vale $Q_s(k+1)$. Esto completa la prueba de la proposición. □

5.4.10. Todo lo que hemos probado hasta ahora sobre los números de Fibonacci estuvo basado pura y exclusivamente en el hecho de que satisfacen la relación de recurrencia que los define. En particular, hasta ahora no tenemos ninguna fórmula cerrada para calcular los números de Fibonacci, sino solamente un algoritmo para calcularlos. El siguiente resultado, conocido como la ***fórmula de Binet***, por Jacques Philippe Marie Binet, nos da una fórmula explícita:

Lema. *Sean* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *y* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *las dos raíces del polinomio* $X^2 - X - 1$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *se tiene que*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea $G_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}$. Lo que tenemos que probar es que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ es

$$F_n = G_n \tag{25}$$

y, como siempre, procedemos por inducción con respecto a n.

Como $G_0 = (1-1)/\sqrt{5} = 0$ y $G_1 = (\alpha - \beta)/\sqrt{5} = 1$, la igualdad (25) vale si n es 0 o 1. Para ver que vale el paso inductivo, supongamos que $k \in \mathbb{N}_0$ y que la igualdad (25) vale si n es k o $k+1$. En ese caso, tenemos que

$$\sqrt{5} \cdot F_{k+2} = \sqrt{5} \cdot F_{k+1} + \sqrt{5} \cdot F_k = \sqrt{5} \cdot G_{k+1} + \sqrt{5} \cdot G_k = (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) + (\alpha^k - \beta^k).$$

Calculando, vemos que $\alpha^2 = \alpha + 1$ y $\beta^2 = \beta + 1$, así que $\alpha^{k+2} = \alpha^{k+1} + \alpha^k$ y $\beta^{k+2} = \beta^{k+1} + \beta^k$, y entonces lo que tenemos es que

$$\sqrt{5} \cdot F_{k+2} = \alpha^{k+2} - \beta^{k+2},$$

es decir, que $F_{k+2} = G_{k+2}$ y, por lo tanto, la igualdad (25) vale si n es $k+2$. Esto prueba el lema. □

5.4.11. Un corolario bonito de este lema es el siguiente:

Corolario. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ el n-ésimo número de Fibonacci F_n es el entero más cercano a*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Demostración. Sea n un elemento de $\mathbb{N}_0$. El lema nos dice que si ponemos $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ y $\beta = (1-\sqrt{5})/2$, entonces $F_n = (\alpha^n - \beta^2)/\sqrt{5}$, así que $\alpha^n/\sqrt{5} - F_n = \beta^n/\sqrt{5}$. Ahora bien, como $\beta = -1/\alpha$ y $\alpha = 1 + \sqrt{5} > 1$, tenemos que $|\beta^n| = 1/|\alpha|^n \leq 1$ y, por lo tanto, $|\beta^n/\sqrt{5}| < 1/2$, ya que $\sqrt{5} > 2$. Esto nos dice que F_n y $\alpha^n/\sqrt{5}$ están a distancia menor que $1/2$ y, por lo tanto, que el entero F_n es el más cercano al número $\alpha^n/\sqrt{5}$. □

5.4.12. Ejercicio. Pruebe que, de hecho, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Números de Catalan

5.4.13. Recordemos de 5.2.2 que la sucesión $(C_n)_{n\geq 0}$ de los números de Catalan es tal que

$$C_0 = 1$$

y

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1} \tag{26}$$

para cada entero positivo n. Calculando, vemos que sus primeras componentes son

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796,\ \ldots \tag{27}$$

5.4.14. Una primera observación que podemos hacer es que la sucesión de números de Catalan está, como la de Fibonacci, acotada por una sucesión de crecimiento exponencial:

Lema. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$C_n \leq \frac{4^n}{n+1}.$$

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de que vale la desigualdad del enunciado. Como $C_0 = 1$ y $4^0/(0+1) = 1$, es claro que $P(0)$ vale. Por otro lado, si $k \in \mathbb{N}$ y suponemos que vale $P(k-1)$, entonces

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_n \leq \frac{2(2n-1)}{n+1} \frac{4^{n-1}}{n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{4^n}{n+1} \leq \frac{4^n}{n+1},$$

es decir, vale $P(k)$. El lema es consecuencia de esto y del principio de inducción. □

5.4.15. A partir de la definición por recursión de los números de Catalan es fácil obtener una fórmula explícita:

Lema. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ es*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

Demostración. Es inmediato que la igualdad del enunciado vale cuando $n = 0$. Veamos que si $k \in \mathbb{N}_0$ es tal que esa igualdad vale cuando n es k, entonces ella también vale cuando n es $k+1$: el lema seguirá entonces por inducción.

Sea entonces $k \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que

$$C_k = \frac{1}{k+2} \frac{(2k)!}{k!k!}.$$

En ese caso, en vista de la relación de recurrencia que define a los números de Catalan, tenemos que

$$C_{k+1} = \frac{2(2(k+1)-1)}{(k+1)+1} C_k$$

y esto, gracias a nuestra hipótesis inductiva, es

$$= \frac{2(2k+1)}{k+2} \frac{1}{k+1} \frac{(2k)!}{k!k!}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de este cociente por $k+1$, vemos que es

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(2k+1)}{k+2} \frac{1}{k+1} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+2} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!},
\end{aligned}$$

y esto completa la inducción. □

5.4.16. Del cálculo directo de los números de Catalan, como en (27), vemos que parecen ser todos enteros: esto no es obvio ni a partir de la relación de recurrencia (26) que los define ni a partir de la fórmula explícita para ellos que nos da el Lema 5.4.15. Un primer paso para probar que se trata efectivamente de números enteros es el siguiente resultado, que es fundamental en el estudio de los números de Catalan:

Lema. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, llamemos $P(n)$ a la afirmación de que vale la igualdad del enunciado. Es claro que $P(0)$ vale: el miembro izquierdo de la igualdad es $C_1 = 1$ y el derecho $\sum_{i=0}^{n} C_i C_{0-i} = C_0 C_0 = 1$.

Sea ahora $k \in \mathbb{N}_0$ y supongamos inductivamente que $P(k)$ vale. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(k+2)\sum_{i=0}^{k} C_i C_{k-i} &= \sum_{i=0}^{k}(k+2)C_i C_{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(i+1+k-i+1)C_i C_{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(i+1)C_i C_{k-i} + \sum_{i=0}^{k}(k-i+1)C_i C_{k-i} \\
&= C_0 C_k + \sum_{i=1}^{k}(i+1)C_i C_{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1}(k-i+1)C_i C_{k-i} + C_k C_0
\end{aligned}$$

y, usando la relación (26), vemos que esto es

$$= C_0C_k + \sum_{i=1}^{k} 2(2i-1)C_{i-1}C_{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} 2(2(k-i)-1)C_iC_{k-i-1} + C_kC_0.$$

Si cambiamos el índice i por $i-1$ en la primera de las dos sumas, podemos reescribir esto en la forma

$$C_0C_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2(2(i+1)-1)C_iC_{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} 2(2(k-i)-1)C_iC_{k-i-1} + C_kC_0$$

y, una vez hecho eso, juntar las dos sumas en una para obtener

$$2C_0C_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2\Big((2(i+1)-1) + (2(k-i)-1)\Big)C_iC_{k-1-i}.$$

Esto es lo mismo que

$$2C_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2\cdot 2k\cdot C_iC_{k-1-i} = 2C_k + 2\cdot 2k\sum_{i=0}^{k-1} C_iC_{k-1-i}$$

y, de acuerdo a la hipótesis inductiva, esto es igual a

$$2C_k + 2\cdot 2kC_k = 2(2(k+1)-1)C_k = (k+2)C_{k+1}.$$

Hemos probado de esta manera que

$$(k+2)\sum_{i=0}^{k} C_iC_{k-i} = (k+2)C_{k+1}$$

y, por lo tanto, que la afirmación $P(k+1)$ vale. El lema sigue por inducción. □

5.4.17. Una primera consecuencia del Lema 5.4.16 es que podríamos haber definido la sucesión $(C_n)_{n\geq 0}$ de los números de Catalan diciendo que

$$C_0 = 1$$

y que

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$. De hecho, esta definición es la más frecuente en la literatura.

5.4.18. Una segunda consecuencia de ese lema es que podemos ahora fácilmente verificar que todos los números de Catalan son enteros:

Lema. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ el n-ésimo número de Catalan C_n es un entero.*

Demostración. Esto sigue inductivamente del lema anterior. En efecto, C_0 es un entero y si $k \in \mathbb{N}_0$ y suponemos inductivamente que cada uno de los números $C_0, \dots, C_k$ es un entero, entonces el Lema 5.4.16 nos dice que

$$C_{k+1} = \sum_{i_0}^{k} C_i C_{k-i}$$

y claramente esto implica que C_{k+1} también es un entero. □

Un método rápido para calcular potencias

5.4.19. Fijemos un número real α no nulo y consideremos la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que

$$a_0 = 1$$

y

$$a_n = \alpha a_{n-1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato que

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $a_n = \alpha^n$.

En efecto, sigue inmediatamente de la definición de la sucesión que $a_0 = \alpha^0$, y si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $a_{k-1} = \alpha^{k-1}$, entonces claramente se tiene que $a_k = \alpha a_{k-1} = \alpha\alpha^{k-1} = \alpha^k$. Esto nos da un procedimiento — el obvio — para calcular las potencias de α: para calcular α^n empezamos con 1 y lo multiplicamos n veces por α. Es evidente que cuando llevamos a cabo esto hacemos $n-1$ multiplicaciones (sin contar la primera, en la que un factor es 1). Hay una forma mucho más eficiente para determinar α^n, basada en el siguiente resultado:

5.4.20. Lema. *Hay una única sucesión $(b_n)_{n \geq 0}$ con $b_0 = 1$ y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$b_n = \begin{cases} (b_{n/2})^2, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \alpha(b_{(n-1)/2})^2, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De hecho, si $(b_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión que satisface estas dos condiciones entonces $b_n = \alpha^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Veamos por inducción que si $(b_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión que satisface las dos condiciones del enunciado entonces $b_n = \alpha^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Es claro que $b_0 = \alpha^0$. Sea, por otro lado, $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $b_i = \alpha^i$ para todo entero i tal que $0 \leq i < k$. Consideramos ahora dos casos, de acuerdo a la paridad de k.

- Si k es par, entonces $k/2$ es un entero no negativo menor que k, la hipótesis inductiva nos dice que $b_{k/2} = \alpha^{k/2}$ y, por lo tanto,

$$b_k = (b_{k/2})^2 = (\alpha^{k/2})^2 = \alpha^k.$$

- Si en cambio k es impar, entonces $(k-1)/2$ es un entero no negativo menor que k y otra vez la hipótesis inductiva nos dice que $b_{(k-1)/2} = \alpha^{(k-1)/2}$. Usando esto, vemos que

$$b_k = \alpha(b_{(k-1)/2})^2 = \alpha(\alpha^{(k-1)/2})^2 = \alpha^k.$$

Así, en cualquier caso tenemos que $b_k = \alpha^k$ y esto completa la inducción.

Esto nos dice que a lo sumo hay una sucesión que satisface las dos condiciones del enunciado, a saber, la sucesión $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ de las potencias de α. Para completar la prueba del lema, entonces, es suficiente con mostrar que esta última sucesión satisface efectivamente aquellas dos condiciones: esto es inmediato. □

5.4.21. Este lema nos dice, por ejemplo, que

$$\alpha^{10} = b_{10} = b_5^2 = (\alpha b_2^2)^2 = (\alpha(b_1^2)^2)^2 = (\alpha(\alpha^2)^2)^2.$$

Esta expresión muestra que podemos calcular α^{10} haciendo cuatro productos: calculamos primero α^2, luego lo elevamos al cuadrado, multiplicamos por α el resultado y elevamos lo que obtenemos al cuadrado. Esto es menos que la mitad de las multiplicaciones que hacemos si calculamos α^{10} de la manera evidente. De manera similar, usando el lema vemos que

$$\alpha^{154} = (a((a(a((a^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2$$

y la expresión que aparece a la derecha en esta igualdad puede calcularse usando 10 productos: esto es considerablemente mejor que hacerlo con 154 productos! En general, el lema nos provee una forma rápida de calcular las potencias de α — en las Figuras 5.1 y 5.2 en la página siguiente damos una implementación de esto en Haskell y en Python.

Queremos ahora estimar la cantidad de trabajo que este algoritmo realiza. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea M_n la cantidad de multiplicaciones que realizamos cuando usamos el Lema 5.4.20 para calcular α^n. De acuerdo a las fórmulas que aparecen en el enunciado de ese lema, tenemos que

$$M_1 = 0$$

```haskell
potencia :: Num a => a -> Integer -> a
potencia a 0          = 1
potencia a n | even n = potencia a (n `div` 2) ^ 2
             | odd n  = a * potencia a ((n - 1) `div` 2) ^ 2
```

Figura 5.1. Un algoritmo rápido en HASKELL para calcular las potencias de un número. La expresión `potencia a n` se evalúa a `a ^ n`, asumiendo que `n` es un entero no negativo.

```python
def potencia(a, n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return potencia(a, n // 2) ** 2
    else:
        return a * potencia(a, (n - 1) // 2) ** 2
```

Figura 5.2. Un algoritmo rápido en PYTHON para calcular las potencias de un número. La expresión `potencia(a, n)` se evalúa a `a ** n`, asumiendo que `n` es un entero no negativo.

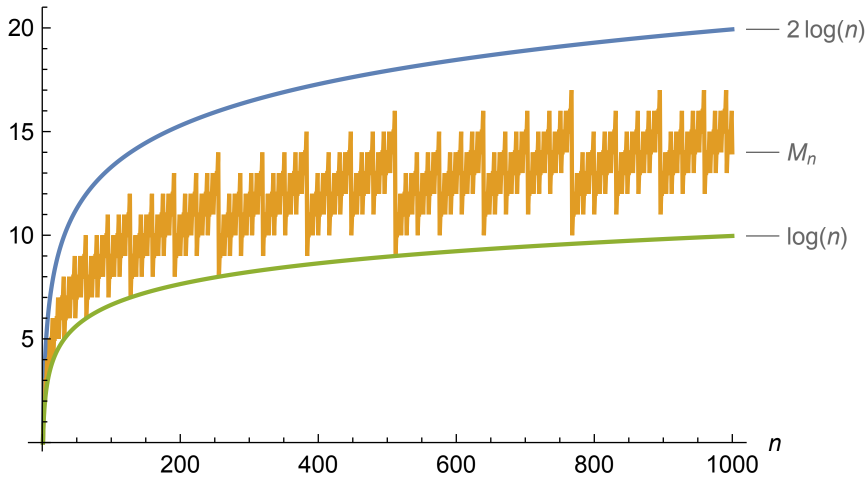


Figura 5.3. Un gráfico de la cantidad de multiplicaciones M_n que el algoritmo del Lema 5.4.20 hace al calcular α^n.

y para cada entero $n \geq 2$ que

$$M_n = \begin{cases} 1 + M_{n/2}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2 + M_{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las primeras componentes de la sucesión $(M_n)_{n\geq 1}$ son

$$0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 6,\ 7,\ 7,\ \ldots$$

Esta sucesión es bastante irregular —como puede verse en la Figura 5.3— pero podemos acotarla sin mucha dificultad.

5.4.22. Lema. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\log_2 n \leq M_n \leq 2\log_2 n$.

De acuerdo a esto, el algoritmo que se deduce del Lema 5.4.20 calcula $\alpha^{1\,000\,000}$ usando entre 20 y 40 multiplicaciones —ya que $\log_2 1\,000\,000 = 19{,}931\ldots$

Demostración. Cuando $n = 1$ la desigualdad es inmediata. Sea, por otro lado, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ y supongamos inductivamente que para todo entero i tal que $1 \leq i < k$ se tiene que $\log_2 n \leq M_n \leq 2\log_2 n$. Dependiendo de la paridad de k tenemos dos casos.

Si k es par, entonces

$$M_k = 1 + M_{k/2} \leq 1 + 2\log_2 \frac{k}{2} = 1 + 2\log_2 k - 2\log_2 2 \leq 2\log_2 k,$$

ya que $1 - 2\log_2 2 = -1 \leq 0$, y

$$M_k = 1 + M_{k/2} \geq 1 + \log_2 \frac{k}{2} = 1 + \log_2 k - \log_2 2 = \log_2 k.$$

Si en cambio k es impar, tenemos que

$$\begin{aligned} M_k &= 2 + M_{(k-1)/2} \leq 2 + 2\log_2 \frac{k-1}{2} = 2 + 2\log_2(k-1) - 2\log_2 2 \\ &= 2\log_2(k-1) \leq 2\log_2 k \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} M_k &= 2 + M_{(k-1)/2} \geq 2 + \log_2 \frac{k-1}{2} = 2 + \log_2(k-1) - \log_2 2 \\ &= 1 + \log_2(k-1) \geq \log_2 k, \end{aligned}$$

ya que para todo número real $x \geq 2$ se tiene que $1 + \log_2(x-1) \geq \log_2 x$.

Vemos así que en cualquier caso se tiene que $\log_2 k \leq M_k \leq 2\log_2 k$, y el lema sigue por inducción. □

§5.5. Ejercicios

Una cota inferior exponencial para los números de Fibonacci

5.5.1. El Lema 5.4.3 nos dice que la sucesión de números de Fibonacci está acotada componente a componente superiormente por la sucesión $(2^n)_{n\geq 1}$, que crece exponencialmente. También podemos acotarla inferiormente:

Ejercicio. Muestre que existe un número real $a > 1$ tal que para todo entero $n \geq 3$ se tiene que $F_n \geq a^n$.

Subsucesiones de la sucesión de los números de Fibonacci

5.5.2. Ejercicio.

(a) Para cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$F_{2n} = 3F_{2(n-1)} - F_{2(n-2)}$$

y

$$F_{2n+1} = 3F_{2(n-1)+1} - F_{2(n-2)+1}.$$

(b) Sea $d \in \{0, 1, 2\}$. Para cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$F_{3n+d} = 4F_{3(n-1)+d} + F_{3(n-2)+d}.$$

5.5.3. Ejercicio.

(a) Existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que para cada $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ y cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$F_{4n+d} = uF_{4(n-1)+d} - F_{4(n-2)+d}.$$

(b) Existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tal que para cada $d \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$F_{5n+d} = uF_{5(n-1)+d} + vF_{5(n-2)+d}.$$

Sumas de números de Fibonacci

5.5.4. El Lema 5.4.4 nos da el valor de la suma de los primeros números de Fibonacci. También podemos considerar la suma de los de índice par o impar:

Ejercicio. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

(a) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

(b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

5.5.5. Ejercicio. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sean

$$A_n = F_0 + F_3 + \cdots + F_{3n},$$
$$B_n = F_1 + F_4 + \cdots + F_{3n+1},$$
$$C_n = F_2 + F_5 + \cdots + F_{3n+2}.$$

Para cada entero $n \geq 3$ se tiene que

$$A_n = 5A_{n-1} - 3A_{n-2} - A_{n-3},$$

$$C_n = 5C_{n-1} - 3C_{n-2} - C_{n-3}$$

y para cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$B_n = 4B_{n-1} + B_{n-2}.$$

La sumas de los cuadrados de los números de Fibonacci

5.5.6. El Lema 5.4.6 nos dice que la suma de los productos de los primeros pares de números de Fibonacci consecutivos es esencialmente el cuadrado de un número de Fibonacci. El siguiente resultado nos da el valor de una suma de cuadrados de números de Fibonacci:

Ejercicio. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

Cocientes de números de Fibonacci

5.5.7. Ejercicio. Usando la identidad de Cassini 5.4.5 muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Deduzca de ello que la sucesión $(F_{2n}/F_{2n-1})_{n\geq1}$ es creciente, que la sucesión $(F_{2n+1}/F_{2n})_{n\geq1}$ es decreciente, que ambas tienen el mismo límite y que ese límite es el número $(1+\sqrt{5})/2$.

5.5.8. Ejercicio. Muestre que

$$\frac{F_3}{F_2} = 1 + 1, \qquad \frac{F_4}{F_3} = 1 + \cfrac{1}{1+1} \qquad \frac{F_5}{F_4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} \qquad \frac{F_6}{F_5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}$$

y que, más generalmente, para cada entero $n \geq 2$ se tiene que

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

con $n-2$ fracciones anidadas.

5.5.9. Ejercicio. Usando ahora la identidad de Catalan 5.4.9 estudie la sucesión de cocientes $(F_{n+r}/F_n)_{n\geq 1}$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

Números de Lucas

5.5.10. Recordemos que la sucesión $(L_n)_{n\geq 0}$ de números de Lucas es la sucesión tal que

$$L_0 = 2,$$
$$L_1 = 1$$

y

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

para cada entero $n \geq 2$.

5.5.11. Ejercicio.

(*a*) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.
(*b*) $L_{2n} = L_n^2 + 2(-1)^n$.
(*c*) $F_{2n} = L_n F_n$.
(*d*) $F_{3n} = F_n(L_{2n} + (-1)^n)$.
(*e*) $F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_m L_n + F_n L_m)$ y $F_{m-n} = \frac{1}{2}(-1)^n(F_m L_n - F_n L_m)$.
(*f*) $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$.
(*g*) $\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} L_j = 2^n F_{n+1} - 1$.

5.5.12. Ejercicio. Si $n, m \in \mathbb{N}_0$ son tales que $m \leq n$, entonces

$$F_{n+m} = L_m F_n - (-1)^m F_{n-m}.$$

Observe que esto da una relación de recurrencia de orden dos para la sucesión

$$F_d,\ F_{m+d},\ F_{2m+d},\ F_{3m+d},\ F_{4m+d},\ \ldots$$

cada vez que $0 \leq d < m$. Esto generaliza los resultados de los ejercicios 5.5.4 y 5.5.5.

La razón áurea

5.5.13. Ejercicio. Sea $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.

(*a*) Para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ y $\alpha^n = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$.

(*b*) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Esto significa que F_n es el entero más cercano a $\alpha^n/\sqrt{5}$.

Cálculo rápido de los números de Fibonacci

5.5.14. La razón por la que las fórmulas de duplicación del Corolario 5.4.8 son importantes es que nos permiten calcular números de Fibonacci muy rápidamente. Así, por ejemplo, nos dice que

$$F_{100} = F_{50}(2F_{51} - F_{50})$$

y entonces para calcular F_{100} es suficiente que determinemos primero F_{50} y F_{51}. También tenemos que

$$F_{51} = F_{26}^2 - F_{25}^2, \qquad F_{50} = F_{25}(2F_{26} - F_{25}),$$

así que basta que encontremos F_{25} y F_{26}. Por supuesto, podemos iterar este proceso y usando el corolario encontrar las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{lll}
F_{26} = F_{13}(2F_{14} - F_{13}), & F_{25} = F_{13}^2 - F_{12}^2, & F_{14} = F_7(2F_8 - F_7), \\
F_{13} = F_7^2 - F_6^2, & F_{12} = F_6(2F_7 - F_6), & F_8 = F_4(2F_5 - F_4), \\
F_7 = F_4^2 - F_3^2, & F_6 = F_3(2F_4 - F_3), & F_5 = F_3^2 - F_2^2, \\
F_4 = F_2(2F_3 - F_2), & F_3 = F_2^2 - F_1^2, & F_2 = F_1(2F_2 - F_1), \\
F_1 = F_1^2 - F_0^2. & &
\end{array}$$

Esto significa que para calcular F_{100} podemos ir calculando en orden cada uno de los números

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ F_5,\ F_6,\ F_7,\ F_8,\ F_{12},\ F_{13},\ F_{14},\ F_{25},\ F_{26},\ F_{50},\ F_{51},\ F_{100}.$$

usando las igualdades que obtuvimos. De esta forma, vemos que podemos calcular F_{100} determinando solamente 15 otros números de Fibonacci y realizando unas 40 operaciones aritméticas. Esta idea puede extenderse a un algoritmo general. Veamos cómo.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea P_n el par ordenado (F_n, F_{n+1}). La sucesiones de pares ordenados

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

está determinada por una relación de recurrencia que permite calcular cada P_n en términos de $P_{\lfloor n/2 \rfloor}$:

Ejercicio. Muestre que $P_0 = (0,1)$ y que si $n \geq 1$, el par $P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ es (a,b) y ponemos $c = a(2b-a)$ y $d = a^2 + b^2$, entonces

$$P_n = \begin{cases} (c,d), & \text{si } n \text{ es par;} \\ (d, c+d), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

5.5.15. Ejercicio. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ llamemos $T(n)$ al número de sumas, diferencias y multiplicaciones que hacemos usando esta relación de recurrencia para calcular el par ordenado P_n usando esta relación de recurrencia. Mirando las fórmulas, claramente tenemos que

$$T(0) = 0$$

y

$$T(n) = \begin{cases} 6 + T(\tfrac{1}{2}n), & \text{si } n \text{ es par;} \\ 7 + T(\tfrac{1}{2}(n-1)), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Muestre que $T(n) \leq 10 \log_2 n$ para todo $n \geq 3$.

Esto implica, por ejemplo, que si calculamos $F_{1\,000\,000}$ determinando primero el par ordenado $P_{1\,000\,000}$ y nos quedamos luego con su primera componente, hacemos como mucho 200 operaciones aritméticas. Observemos que $F_{1\,000\,000}$ es un número de 208 988 cifras decimales.

$$F_{1\,000\,000} = \underbrace{19532821287077577316\cdots\cdots68996526838242546875}_{208\,988 \text{ dígitos}}$$

Si lo calculamos usando la recurrencia de orden dos que usamos para definir originalmente a los números de Fibonacci realizaremos un millón de sumas.

Hay que notar que muchas de esas 200 operaciones aritméticas son multiplicaciones y, más aún, multiplicaciones de números de muchos dígitos, así que hay que tener cuidado al comparar con el millón de sumas: multiplicar lleva bastante más tiempo que sumar. Hay, de todas formas, algoritmos muy rápidos para multiplicar números enteros — mucho más rápidos que el algoritmo que aprendemos de niños — y que entonces la determinación de un número como $F_{1\,000\,000}$ es factible. Los más conocido son el algoritmo de Karatsuba, descubierto por Anatoly Karatsuba en 1960 [KO1962], y el algoritmo de Schönhage–Strassen, de Arnold Schönhage y Volker Strassen, publicado en 1971 [SS1971]. Una extraordinariamente buena discusión sobre estps algoritmos puede encontrarse en el libro [Knu1969] de Donald Knuth.

Usando la implementación dada en la Figura 5.4 en la página siguiente, que es una transcripción directa a Haskell de la recurrencia del Ejercicio 5.5.14, podemos calcular $F_{1\,000\,000}$ en todo su

```haskell
fibonacci :: Integer -> Integer
fibonacci n | n >= 0 = fst (fib n)

fib :: Integer -> (Integer, Integer)
fib 0         = (0, 1)
fib n
  | even n    = (c, d)
  | otherwise = (d, c + f)
  where (a, b) = fib (n `div` 2)
        c = a * (2 * b - a)
        d = a * a + b * b
```

Figura 5.4. Un algoritmo rápido en HASKELL para calcular números de Fibonacci, basado en la recurrencia del Ejercicio 5.5.14. La expresión `fib n` calcula el par ordenado P_n mientras que `fibonacci n` es la primera componente de ese par.

esplendor en 43 milisegundos.

Una cota inferior exponencial para los números de Catalan

5.5.16. Ejercicio. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_n \geq \dfrac{4^{n-1}}{n^2}$.

Un teorema de Zeckendorf

5.5.17. Ejercicio. Todo número natural puede escribirse como suma de números de Fibonacci distintos y no consecutivos. Por ejemplo,

$$278 = 1 + 2 + 8 + 34 + 233 = F_1 + F_3 + F_6 + F_9 + F_{13}.$$

Esta resultado —junto con la afirmación adicional de que esa escritura es única— es conocido como Teorema de Zeckendorf, por Edouard Zeckendorf, ya que este publicó ese resultado en su trabajo [Zec1972], aunque había sido encontrado antes por Cornelis Gerrit Lekkerkerker en 1952.

Capítulo 6

Divisibilidad

§6.1. La relación de divisibilidad

6.1.1. Si a y b son enteros, decimos que b ***divide*** a a, que b es un ***divisor*** de a y que a es un ***múltiplo*** de b, si existe un tercer entero c tal que $a = bc$ y en ese caso escribimos $b \mid a$. Obtenemos de esta forma una relación $\mid$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

6.1.2. Una primera observación que podemos hacer es la siguiente.

Proposición.
(*i*) *Para todo* $a \in \mathbb{Z}$ *se tiene que* $1 \mid a$ *y que* $a \mid 0$.
(*ii*) *Si* a *y* b *son dos enteros tales que* $b \mid a$, *entonces también* $(-b) \mid a$, $b \mid (-a)$ *y* $(-b) \mid (-a)$.

En vista de esta segunda afirmación normalmente nos concentramos en estudiar la divisibilidad entre enteros no negativos.

Demostración. (*i*) Si a es un elemento de $\mathbb{Z}$, entonces $a = 1 \cdot a$ y $0 = a \cdot 0$ y, por lo tanto, $a \mid a$ y $a \mid 0$, como queremos.

(*ii*) Sean a y b dos elementos de $\mathbb{Z}$ tales que $b \mid a$, de manera que existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Se sigue inmediatamente de eso que $a = (-b)c$, $(-a) = b(-c)$ y $(-a) = (-b)c$ y, por lo tanto, que $(-b) \mid a$, que $b \mid (-a)$ y que $(-b) \mid (-a)$. □

6.1.3. La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ no es una relación de orden porque no es anti-simétrica — por ejemplo, los números 3 y −3 se dividen mutuamente y son distintos. De todas formas, no está muy lejos de serlo y si la restringimos al conjunto $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_0$, entonces ese problema desaparece.