Capítulo 3

Funciones

§3.1. Funciones

3.1.1. Sean A y B dos conjuntos. Una relación $f \subseteq A \times B$ de A a B es una ***función*** de A a B si

- para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, y
- si $a \in A$ y $b, b' \in B$ son tales que los pares ordenados (a, b) y (a, b') están en f, entonces necesariamente $b = b'$.

En términos del grafo de la relación f, la primera de estas condiciones dice que de cada elemento de A sale *al menos* una flecha, mientras que la segunda que sale *a lo sumo* una: juntas, entonces, nos dicen que de cada elemento del dominio de la relación f sale *exactamente* una flecha. Observemos que ambas condiciones son sobre lo que sucede con los elementos del *dominio* de f: bien puede suceder que haya elementos del *codominio* de f, el conjunto B, a los que no llegue ninguna flecha en el grafo de f o elementos a los que llegue más de una. Así, por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces la relación $f \subseteq A \times B$ cuyo grafo es

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & a \\
2 \arrow[ur] & b \\
3 \arrow[ur] & c
\end{tikzcd}$$

es una función. En efecto, en este grafo de cada elemento de A sale exactamente una flecha.

3.1.2. Cuando una relación $f \subseteq A \times B$ de un conjunto A a otro B es una función, escribimos

$$f : A \to B.$$

Esta notación nos dice cuál es el dominio de f, cuál es su codominio, y deja en claro que se trata de una función.

Por otro lado, si $f : A \to B$ es una función de A a B y a es un elemento de A, sabemos que existe un elemento b en B y uno solo tal que $(a, b) \in f$: a ese elemento lo escribimos

$$f(a)$$

y lo llamamos el ***valor*** de f en a o la ***imagen*** de a por f. En otras palabras, cuando escribimos que

$$b = f(a)$$

estamos diciendo, ni más ni menos, que el par ordenado (a, b) pertenece a f.

3.1.3. Ejemplo. Sean A y B dos conjuntos y probemos que la relación identidad $I_A \subseteq A \times A$ es una función, a la que llamamos la ***función identidad*** de A. Para hacerlo, verificamos las dos condiciones de la definición 3.1.1.

- Si a es un elemento de A, entonces el par ordenado (a, a) pertenece a I_A.
- Supongamos que $a \in A$ y $b, b' \in A$ son tales que los pares ordenados (a, b) y (a, b') están en I_A. De la definición de I_A se sigue, claro, que $a = b$ y que $a = b'$ y, en particular, que $b = b'$.

Esto prueba lo que queremos.

3.1.4. Ejemplo. Sean A y B dos conjuntos, y sea b_0 es un elemento de B. La relación

$$f = \{(a, b_0) \in A \times B : a \in A\}$$

es una función $f : A \to B$, a la que llamamos la ***función constante*** de valor b. En efecto, si a es un elemento cualquiera de A, entonces el par (a, b_0) pertenece a b, así que la primera condición de la definición 3.1.1 se cumple. Por otro lado, si a es un elemento de A y b y b' son elementos de B tales que los pares ordenados (a, b) y (a, b') están en f, entonces claramente tiene que ser $b = b_0 = b'$. La segunda condición de la definición, por lo tanto, también se cumple.

3.1.5. Ejemplo. Sean A y B dos conjuntos y sea $R = \varnothing \subseteq A \times B$ la relación vacía de A a B. Nos preguntamos cuándo R es una función.

Supongamos primero que R es una función. De acuerdo a la primera condición de la definición 3.1.1, entonces, para todo elemento a de A existe un elemento b de B tal que el par ordenado (a, b) pertenece a R. Ahora bien, como el conjunto R es vacío, esto implica claramente que no puede haber en A ningún elemento, esto es, que el conjunto A tiene que ser vacío.

Esto nos da una condición necesaria para que la relación vacía de A a B sea una función: que A

sea vacío. También es una condición suficiente. En efecto, si A vacío, entonces las dos condiciones de la definición 3.1.1 se cumplen trivialmente. Podemos concluir, en definitiva, que

> *la relación vacía de A a B es una función si y solamente si el conjunto A es vacío.*

Notemos que cuando esa condición se cumple, el conjunto $A \times B$ es vacío, así que la única relación de A a B es la vacía.

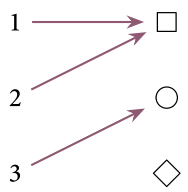
3.1.6. Ejemplo. Sean otra vez A y B dos conjuntos, consideremos ahora la relación total $R = A \times B$ de A a B. Si A es vacío, entonces esta relación R coincide con la relación vacía de A a B y vimos en el ejemplo anterior que se trata de una función. Supongamos entonces que el conjunto A no es vacío, de manera que hay algún elemento a en A.

La primera condición de la definición 3.1.1 nos dice que hay entonces un elemento b en B tal que $(a, b) \in R$ y, en particular, que el conjunto B no es vacío. Más aún, B tiene en este caso exactamente un elemento. En efecto, si por el contrario hubiera dos elementos distintos b y b' en B, tendríamos que (a, b) y (a, b') están los dos en R, contradiciendo la segunda condición de la definición 3.1.1. Vemos así que una condición necesaria para que R sea una función es que B tenga exactamente un elemento. Esta condición también es suficiente — dejamos la verificación de esto al lector.

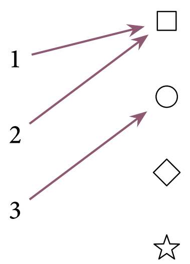
3.1.7. Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son dos funciones, entonces decimos que f y g son ***iguales*** si

- los dominios de f y de g coinciden, esto es, si $A = C$;
- los codominios de f y de g coinciden, esto es, si $B = D$; y
- f y g coinciden como conjuntos.

Es importante no olvidar que insistimos aquí en que los dominios y los codominios coincidan. Así, por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\square, \bigcirc, \diamondsuit\}$ y $C = \{\square, \bigcirc, \diamondsuit, \star\}$, entonces hay una función $f : A \to B$ cuyo grafo es



y hay una función $g : A \to B$ cuyo grafo es



y estas dos funciones son *distintas* porque sus codominios son diferentes. Notemos que sus dominios coinciden y que tanto f como g corresponden al conjunto

$$\{(1, \square), (2, \square), (3, \bigcirc)\}.$$

3.1.8. En la práctica, usamos casi siempre el siguiente criterio para comparar funciones:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. Dos funciones $f : A \to B$ y $g : A \to B$ son iguales si y solamente si para todo elemento a de A se tiene que $f(a) = g(a)$.*

Demostración. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ dos funciones. Que si f es igual a g entonces $f(a) = g(a)$ para todo elemento a de A es evidente, así que bastará que probemos la implicación recíproca a esta.

Supongamos que $f(a) = g(a)$ para todo elemento a de A. Para ver que $f = g$, como f y g tienen el mismo dominio y el mismo codominio, tenemos que probar que f y g coinciden como conjuntos. Ahora bien, si (a, b) es un elemento de f, entonces a es un elemento de A y $b = f(a)$: pero entonces la hipótesis nos dice que también $b = g(a)$ y, por lo tanto que $(a, b) \in g$. Esto prueba que $f \subseteq g$. Por supuesto, un razonamiento similar prueba que $g \subseteq f$ y, por lo tanto, que $f = g$, como queremos. $\square$

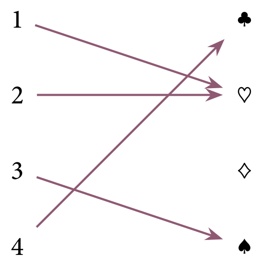
§3.2. Formas de describir funciones

3.2.1. Una función de un conjunto A a un conjunto B es una relación de A a B, así que no es otra cosa que un subconjunto de $A \times B$. Esto significa que para dar una función tenemos a nuestra disposición todas las formas que hay para describir conjuntos.

Así, podemos describir una función por enumeración. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, entonces podemos dar una función $f : A \to B$ dando el correspondiente subconjunto de $A \times B$ por enumeración, como

$$f = \{(1, \heartsuit), (2, \heartsuit), (3, \spadesuit), (4, \clubsuit)\}.$$

Por supuesto, como f es una relación, también podemos describirla dando su grafo, que en este case es el siguiente:



Muchas veces, en lugar de hacer alguna de estas dos cosas, tabulamos los elementos del conjunto f en una tabla como la siguiente:

a	$f(a)$
1	$\heartsuit$
2	$\heartsuit$
3	$\spadesuit$
4	$\clubsuit$

Cada fila de esta tabla describe uno de los pares ordenados del conjunto f.

Estas estrategias para describir una función solo se aplican si su dominio es un conjunto finito, por supuesto, ya que es exactamente en ese caso que tenemos que dar un número finito de pares ordenados al describirla.

3.2.2. También podemos dar una función por comprensión. Por ejemplo,

$$f \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2\}$$

es la descripción por comprensión de un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, esto es, de una relación de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$, y se trata de una función. Probémoslo.

- Si x es un elemento cualquiera de $\mathbb{Z}$, entonces claramente el par ordenado (x, x^2) pertenece a f, y esto nos dice que la primera condición de la definición 3.1.1 se cumple.
- Por otro lado, supongamos que x, y e y' son elementos de $\mathbb{Z}$ tales que los pares (x, y) y (x, y') pertenecen a f. Esto significa que $y = x^2$ y que $y' = x^2$: por supuesto, de estas dos igualdades podemos deducir que $y = y'$ y, en definitiva, que la segunda condición de la definición 3.1.1 también se cumple.

Para esta función f se tiene claramente que para todo elemento x de $\mathbb{Z}$ es

$$f(x) = x^2.$$

En efecto, lo que estamos afirmando es que para todo elemento x de $\mathbb{Z}$ el par ordenado (x, x^2) pertenece a f, y eso es evidente, dada la definición de f!

3.2.3. En la practica, casi siempre definimos las funciones como en el ejemplo que acabamos de ver, aunque usando una notación distinta para hacerlo. En lugar de describir a una función f de un conjunto A a un conjunto B por comprensión en la forma

$$f = \left\{(a, b) \in A \times B : b = E\right\}, \tag{1}$$

con E alguna expresión conveniente[1], escribimos

$$f : a \in A \mapsto E \in B. \tag{2}$$

Es importante tener siempre en mente que esto último significa *exactamente* lo mismo que la descripción por comprensión (1). Podemos leer la expresión escrita en (2) diciendo «la función f que a cada elemento a de A lo manda al elemento E de B».

Así, por ejemplo, a la función de 3.2.2 podemos describirla escribiendo

$$f : x \in \mathbb{Z} \mapsto x^2 \in \mathbb{Z},$$

y si escribimos

$$g : n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 - 10n \in \mathbb{Z}$$

nos estamos refiriendo a la función, a la que llamamos g, de dominio $\mathbb{N}$ y codominio $\mathbb{Z}$, dada por el conjunto

$$\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : m = n^2 - 10n\}.$$

De la misma forma, si escribimos

$$h : t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sen} t \in \mathbb{R}$$

estamos refiriéndonos a la función h de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dada por el conjunto de pares ordenados

$$\{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u = \operatorname{sen} t\}.$$

[1]No entraremos aquí en los detalles sobre qué significa exactamente «conveniente» en este contexto.

Algo que es muchas veces útil es que esta notación nos permite referirnos a una función sin necesidad de ponerle un nombre. Así, por ejemplo, podemos decir cosas como

las funciones $n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \mapsto n^3 \in \mathbb{N}$ son distintas.

Otra forma de dar por comprensión una función f de un conjunto a A a otro B es describir explícitamente el valor de f en cada elemento de su dominio. Así, podemos decir

sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la función que en cada elemento n de $\mathbb{N}$ toma el valor $f(n) = n^2 - 10n$.

La función a la que nos estamos refiriendo es, claramente, la determinada por el conjunto $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : m = n^2 - 10n\}$, que podemos escribir, como vimos, $n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 - 10n \in \mathbb{Z}$.

3.2.4. Recordemos que en 2.3.1 definimos la operación de relaciones: si A, B y C son tres conjuntos y R y S son una relación de A a B y una relación de B a C, respectivamente, entonces construimos allí una nueva relación $S \circ R$ de A a C, la composición de S con R. La segunda parte de la siguiente proposición nos dice que si las relaciones R y S son funciones, también lo es su composición.

Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(i) *La relación identidad $I_A \subseteq A \times A$ es una función.*

(ii) *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces la relación $g \circ f \subseteq A \times C$ es una función de A a C.*

Demostración. (i) Veamos que I_A es una función, verificando las dos condiciones de la definición 3.1.1.

- Si a es un elemento de A, entonces el par ordenado (a, a) pertenece a I_A.
- Supongamos que $a \in A$ y $b, b' \in A$ son tales que los pares ordenados (a, b) y (a, b') están en I_A. De la definición de I_A se sigue, claro, que $a = b$ y que $a = b'$ y, en particular, que $b = b'$.

(ii) Otra vez, para mostrar que la relación compuesta $g \circ f$ de A a C es una función verificamos las dos condiciones de la definición 3.1.1.

- Sea $a \in A$. Como f es una función, existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ y, por otro lado, como g es una función, existe un elemento $c \in C$ tal que $(b, c) \in g$. De acuerdo a la definición de la composición de relaciones, entonces, se tiene que $(a, c) \in g \circ f$.
- Sean $a \in A$ y $c, c' \in C$ tales que los pares ordenados (a, c) y (a, c') están en $g \circ f$. Esto significa que existen elementos b y b' en B tales que (a, b) y (a, b') están en f y (b, c) y

(b', c') están en g.

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr] & \\
 & & c \\
a \arrow[uur, bend left] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddr, bend right] & & \\
 & & c' \\
 & b' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Ahora bien, como f es una función, de que los pares (a, b) y (a, b') estén en f se deduce que $b = b'$. Tenemos entonces que los pares (b, c) y (b, c') están en g y, como g también es una función, vemos que $c = c'$.

Esto completa la prueba de la proposición. □

3.2.5. Si A, B y C son tres conjuntos y $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones, esta proposición nos dice que la composición $g \circ f : A \to C$ es también una función. Si a es un elemento de A, entonces tenemos la imagen de a por f, el elemento $b \coloneqq f(a)$ de B y, a su vez, tenemos la imagen de b por g, el elemento $c \coloneqq g(b)$. En otras palabras, tenemos que $(a, b) \in f$ y que $(b, c) \in g$, así que la definición de $g \circ f$ implica que $(a, c) \in g \circ f$. Vemos así que

$$(g \circ f)(a) = c = g(b) = g(f(a)).$$

3.2.6. La Proposición 2.3.4 nos dice que la composición de relaciones es una operación asociativa. Como la composición de funciones no es más que la composición de relaciones, vemos así que, en particular, la composición de funciones es una operación asociativa. Explícitamente, esto significa que si A, B, C y D son cuatro conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son tres funciones, entonces vale que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Casi siempre escribimos simplemente $h \circ g \circ f$ a la función $h \circ (g \circ g)$. Su valor en un elemento a de su dominio es $h(g(f(a)))$.

§3.3. Inyectividad, sobreyectividad, biyectividad

3.3.1. Sean A y B dos conjuntos y sea $f : A \to B$ una función de A a B. Decimos que

- f es ***inyectiva*** si cada vez que a y a' son dos elementos de A tales que $f(a) = f(a')$ se tiene que $a = a'$, que
- f es ***sobreyectiva*** si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, y que
- f es ***biyectiva*** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

En términos del grafo de la función f, la condición de inyectividad es que a cada elemento de b llegue *a lo sumo* una flecha desde un elemento de A, mientras que la de sobreyectividad que a cada elemento de B llegue *al menos* una flecha.

3.3.2. La definición que acabamos de dar nos dice que una función $f : A \to B$ es inyectiva si siempre que a y a' son elementos de su dominio A vale que

$$f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

Equivalentemente, la función f es inyectiva si siempre que a y a' son elementos de su dominio vale que

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a').$$

En efecto, esta implicación es la contrarrecíproca de la anterior, así que es equivalente a ella.

3.3.3. Ejemplo. Si A es un conjunto cualquiera, entonces la función identidad $I_A : A \to A$ es inyectiva, sobreyectiva y, por lo tanto, biyectiva.

3.3.4. Las tres propiedades descriptas en 3.3.1 se preservan al componerlas:

Proposición. *Sean A, B y C conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(*i*) *Si las funciones f y g son inyectivas, entonces la composición $g \circ f$ es inyectiva.*

(*ii*) *Si las funciones f y g son sobreyectivas, entonces la composición $g \circ f$ es sobreyectiva.*

(*iii*) *Si las funciones f y g son biyectivas, entonces la composición $g \circ f$ es biyectiva.*

Demostración. (*i*) Supongamos que las funciones f y g son inyectivas, y sean a y a' elementos de A tales que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, es decir, tales que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Como g es inyectiva, esto implica que $f(a) = f(a')$ y, a su vez, como f es inyectiva, esto implica que $a = a'$: vemos así que la composición $g \circ f$ es inyectiva.

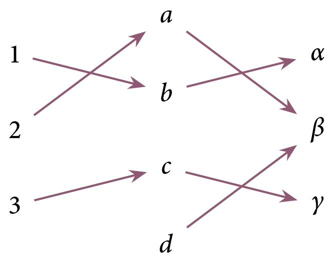
(*ii*) Supongamos ahora que las funciones f y g son sobreyectivas, y sea $c \in C$. Como g es sobreyectiva, hay un elemento b de B tal que $g(b) = c$ y, por otro lado, como f es sobreyectiva, hay un elemento a de A tal que $f(a) = b$. Tenemos entonces que

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

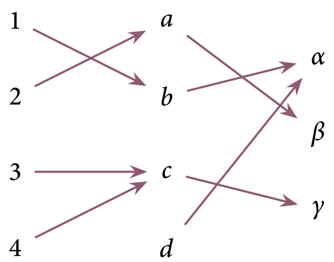
y esto nos dice que $g \circ f$ es sobreyectiva.

(*iii*) Supongamos finalmente que f y g son biyectivas. Como f y g son entonces inyectivas, la primera parte de esta proposición nos dice que la composición $g \circ f$ es inyectiva; por otro lado, como f y g son sobreyectivas, la segunda parte nos dice que esa composición es sobreyectiva. Vemos así que $g \circ f$ es biyectiva, como queremos. □

3.3.5. Las implicaciones recíprocas a las de la Proposición 3.3.4 son falsas. Así, por ejemplo, la composición indicada en el gráfico



es inyectiva, pero la segunda función no lo es. De manera similar, la composición



es ciertamente sobreyectiva pero la primera de las dos funciones que estamos componiendo no lo es. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado parcial:

3.3.6. Proposición. *Sean A, B y C conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(*i*) *Si la composición $g \circ f$ es inyectiva, entonces la función f es inyectiva.*

(*ii*) *Si la composición $g \circ f$ es sobreyectivas, entonces la función g es sobreyectiva.*

Demostración. (*i*) Probaremos la implicación contrarrecíproca, esto es, que

si f no es inyectiva, entonces la composición $g \circ f$ tampoco lo es.

Supongamos entonces que f no es inyectiva, de manera que hay elementos a y a' en A tales que $a \neq a'$ y $f(a) = f(a')$. Se tiene entonces que

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a'),$$

y, como $a \neq a'$, que la composición $g \circ f$ no es inyectiva.

(*ii*) Supongamos que la composición $g \circ f$ es una función sobreyectiva y sea $c \in C$. La hipótesis nos dice que existe $a \in A$ tal que $c = (g \circ f)(a)$, es decir, que $c = g(f(a))$. El elemento $b = f(a)$ de B es entonces tal que $g(b) = c$: esto muestra que la función g es sobreyectiva. □

§3.4. Funciones inversibles y funciones inversas

3.4.1. Sea $f : A \to B$ una función de un conjunto A a otro B. Decimos que f es ***inversible*** si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ y que $f \circ g = I_B$ y en ese caso decimos que g es una ***función inversa*** de f.

Notemos que en esta situación el dominio de g tiene que ser el codominio de f y el codominio de g tiene que ser el dominio de f: si no es ese el caso, ni siquiera podemos hablar de las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

3.4.2. Una observación importante es la siguiente:

Lema. *Si una función es inversible, entonces posee exactamente una función inversa.*

En vista de esto, cuando tengamos una función inversible podremos hablar de *la* función inversa y no solamente de *una* función inversa, ya que esta está bien determinada.

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función, y supongamos que f es inversible y que las funciones $g_1, g_2 : B \to A$ son funciones inversas de f, de manera que se tiene que

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f = I_A, \qquad f \circ g_1 = f \circ g_2 = I_B.$$

Usando estas igualdades, vemos que

$$g_1 = g_1 \circ I_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_A \circ g_2 = g_2.$$

Como g_1 y g_2 tienen el mismo dominio y el mismo codominio, esto prueba el lema. □

3.4.3. La siguiente proposición establece la conexión fundamental entre la condición de inversibilidad de una funciones y su biyectividad:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \to B$ es inversible si y solamente si es biyectiva. Cuando ese es el caso, la relación inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$ es una función y es, de hecho, la función inversa de f.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función y supongamos primero que f es inversible, de manera que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$. Como la composición $g \circ f$ es inyectiva, ya que es la función identidad de A, la Proposición 3.3.6(i) nos dice que f es inyectiva. De manera similar, como la composición $f \circ g$ es sobreyectiva, ya que es la función identidad de B, la Proposición 3.3.6(ii) nos dice que f es sobreyectiva. Vemos así que f es biyectiva.

Supongamos en segundo lugar que f es biyectiva y consideremos la relación inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$. Se trata de una función: para verlo, verificamos las dos condiciones de la definición 3.1.1.

- Si b es un elemento de B, entonces, como f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$, esto es, tal que el par ordenado (a, b) pertenece a f. Esto significa que el par ordenado (b, a) pertenece a la relación f^{-1}.
- Sean b un elemento de B y a, a' elementos de A tales que los pares ordenados (b, a) y (b, a') están en f^{-1}. Esto significa que los pares ordenados (a, b) y (a', b) están en f, es decir, que $f(a) = b$ y que $f(a') = b$. Pero entonces $f(a) = f(a')$ y, como f es inyectiva, tenemos necesariamente que $a = a'$.

Vemos así que, como dijimos, la relación f^{-1} es una función $f^{-1} : B \to A$. Mostremos que f^{-1} es una función inversa de f y, por lo tanto, que la función f es inversible.

- Sea a un elemento de A. Pongamos $b \coloneqq f(a)$, de manera que $(a, b) \in f$ y, por lo tanto, $(b, a) \in f^{-1}$, es decir, $f^{-1}(b) = a$. Usando esto, vemos que

  $$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = I_A(a)$$

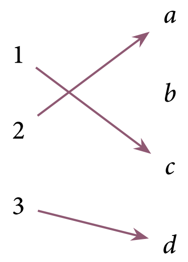
  y concluimos que las funciones $f^{-1} \circ f$ e I_A toman el mismo valor en cada elemento de su dominio común A: esto significa, precisamente, que $f^{-1} \circ f = I_A$.
- Sea ahora b un elemento de B y pongamos $a \coloneqq f^{-1}(b)$, de manera que $(b, a) \in f^{-1}$ y $(a, b) \in f$, es decir, $f(a) = b$. Tenemos que

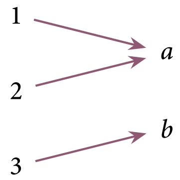
  $$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = I_B(b)$$

  y, en consecuencia, que $f \circ f^{-1} = I_B$.

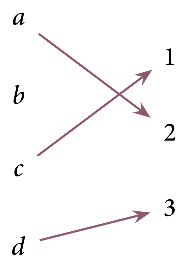
Esto completa la prueba de la proposición. □

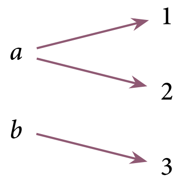
3.4.4. Es importante observar que si $f : A \to B$ es una función que no es biyectiva, entonces la relación inversa $f^{-1} : B \times A$ no es una función. Por ejemplo, las relaciones inversas de las funciones





son, respectivamente,





y ninguna de estas dos últimas es una función.

3.4.5. Ejercicio. Pruebe en detalle que una función $f : A \to B$ es biyectiva, si y solamente si la relación $f^{-1} \subseteq B \to A$ es una función de B a A.

3.4.6. Sabemos que la composición de dos funciones biyectivas biyectivas es ella misma biyectiva, y acabamos de probar que es entonces inversible. El siguiente resultado nos permite calcular su inversa.

Proposición. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones inversibles, de manera que poseen funciones inversas $f^{-1} : B \to A$ y $g^{-1} : C \to B$. La composición $g \circ f : A \to C$ es inversible y su función inversa es*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demostración. Como f y g son inversibles, la Proposición 3.4.3 nos dice que son biyectivas y la Proposición 3.3.4(*iii*), a su vez, que la composición $g \circ f$ es biyectiva. La primera de esas proposiciones, por lo tanto, implica que esta composición es inversible. Esto prueba la primera de las dos afirmaciones del enunciado. Para ver la segunda, es suficiente que mostremos que la función $h \coloneqq f^{-1} \circ g^{-1}$ es una función inversa de la función $k \coloneqq g \circ f$, y para ello tenemos que probar que $h \circ k = I_A$ y que $k \circ h = I_C$. Ahora bien, es

$$\begin{aligned} h \circ k &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (I_B \circ f) = f^{-1} \circ f = I_A \end{aligned}$$

y, de manera similar,

$$\begin{aligned} k \circ h &= (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (I_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = I_C, \end{aligned}$$

y esto prueba lo que queremos. □

§3.5. Ejercicios

Imagen y preimagen de subconjuntos por una función

3.5.1. Sean A y B dos conjuntos y sea $f : A \to B$ una función de A a B. Si X es un subconjunto de A, llamamos ***imagen*** de X por f al subconjunto

$$f[X] \coloneqq \{f(a) : a \in X\}$$

de B, de manera que si $b \in B$ se tiene que

$$b \in f[X] \iff \text{existe } a \in X \text{ tal que } f(a) = b.$$

De manera similar, si Y es un subconjunto de B, llamamos ***preimagen*** o ***imagen inversa*** de Y por f al subconjunto

$$f^{-1}[Y] \coloneqq \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

de A, y entonces para cada $a \in A$ se tiene que

$$a \in f^{-1}[Y] \iff f(a) \in Y.$$

3.5.2. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función.

(a) Para cada subconjunto $X \subseteq A$ se tiene que $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ y, más aún, si la función f es inyectiva, entonces $X = f^{-1}[f[X]]$. Esta última igualdad no vale siempre.

(b) Para cada subconjunto $Y \subseteq B$ se tiene que $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$ y, más aún, si la función f es sobreyectiva, entonces $f[f^{-1}[Y]] = Y$. Esta igualdad no vale siempre.
(c) Si X_1 y X_2 son subconjuntos de A tales que $X_1 \subseteq X_2$, entonces $f[X_1] \subseteq f[X_2]$.
(d) Si Y_1 e Y_2 son subconjuntos de B tales que $Y_1 \subseteq Y_2$, entonces $f^{-1}[Y_1] \subseteq f^{-1}[Y_2]$.

3.5.3. Ejercicio. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones.
(a) Si X es un subconjunto de A, entonces $(g \circ f)[X] = g[f[X]]$.
(b) Si Y es un subconjunto de B, entonces $(g \circ f)^{-1}[Y] = f^{-1}[g^{-1}[Y]]$.

3.5.4. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función.
(a) Si X_1 y X_2 son subconjuntos de A, entonces

$$f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$$

y

$$f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1] \cap f[X_2],$$

y, más aún, si la función f es inyectiva entonces de hecho se tiene que

$$f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2].$$

Esta igualdad no vale siempre, sin embargo. Además, se tiene que

$$f[X_1 - X_2] \supseteq f[X_1] - f[X_2]$$

(b) Si Y_1 e Y_2 son subconjuntos de B, entonces

$$f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[X_2],$$
$$f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$$

y

$$f^{-1}[Y_1 - Y_2] = f^{-1}[Y_1] - f^{-1}[Y_2].$$

3.5.5. Ejercicio. Si $f : A \to B$ es una función y X e Y son subconjuntos de A y de B, respectivamente, entonces se tiene que

$$X \subseteq f^{-1}(Y) \iff f(X) \subseteq Y$$

y vale que

$$f[X] \cap Y = f[X \cap f^{-1}[Y]], \qquad f[X] \cup Y \supseteq f[X \cup f^{-1}[Y]],$$

$$X \cap f^{-1}[Y] \subseteq f^{-1}[f[X] \cap Y], \qquad\qquad X \cup f^{-1}[Y] \subseteq f^{-1}[f[X] \cup Y].$$

Ninguna de las últimas tres inclusiones es en general una igualdad: encuentre ejemplos en los que sean estrictas y condiciones sobre f que garanticen las igualdades.

Restricción y correstricción de funciones

3.5.6. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función y recordemos que, como f es una relación de A a B, se trata de un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

- (a) Si C es un subconjunto de A, entonces el subconjunto $f \cap (C \times B)$ de $A \times B$ es una función de C a B. La llamamos la ***restricción*** de f a C y la escribimos $f|_C$.
- (b) Si D es un subconjunto de B tal que $D \supseteq f[A]$, entonces el subconjunto $f \cap (A \times D)$ de $A \times B$ es una función de A a D. La llamamos la ***correstricción*** de f a B y la escribimos $f|^D$.
- (c) Más generalmente, si C y D son subconjuntos de A y de B, respectivamente, y se tiene que $f[C] \subseteq D$, entonces la intersección $f \cap (C \times D)$ es una función de C a D, a la que escribimos $f|_C^D$.

3.5.7. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función. Muestre que si f es inyectiva, entonces la correstricción $f|^{f[A]} : A \to f[A]$ es biyectiva.

"Pegado" de funciones

3.5.8. Muchas veces necesitamos construir funciones $f : A \to B$ «por partes». El siguiente ejercicio es la forma más sencilla en la que podemos hacer eso.

Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos, y supongamos que A_1 y A_1 son dos subconjuntos de A tales que $A = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Muestre que si $f_1 : A_1 \to B$ y $f_2 : A_2 \to B$ son dos funciones, entonces hay exactamente una función $f : A \to B$ tal que $f|_{A_1} = f_1$ y $f|_{A_2} = f_2$.

3.5.9. Muchas veces necesitamos definir funciones por partes como en el ejercicio anterior pero los subconjuntos A_1 y A_2 que son dominio de las funciones f_1 y f_2 no son disjuntos. En general esto es imposible. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $B = \{\square, \bigcirc\}$ y las funciones $f_1 : A_1 \to B$ y $f_2 : A_2 \to B$ están dadas por las siguientes tablas

a	$f_1(a)$
1	$\square$
2	$\square$

a	$f_2(a)$
2	$\bigcirc$
3	$\bigcirc$

entonces es fácil verificar que no existe ninguna función $f : A \to B$ tal que $f|_{A_1} = f_1$ y $f|_{A_2} = f_2$.

Podemos, sin embargo, hacer lo que queremos si hacemos una hipótesis natural.

Ejercicio. Sean A_1, A_2 y B tres conjuntos y sean $f : A_1 \to B$ y $g : A_2 \to B$ dos funciones. Si las restricciones $f|_{A_1 \cap A_2}$ y $g|_{A_1 \cap A_2}$ coinciden, entonces existe una y sólo una función $h : A_1 \cup A_2 \to B$ tal que $h|_{A_1} = f$ y $h|_{A_2} = g$. En esta situación, decimos que la función h se obtiene por "pegado" de las funciones f y g.

3.5.10. Este último resultado puede generalizarse al caso en que tenemos más que dos partes descomponiendo el dominio de la función que queremos construir:

Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos, sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos de A tal que

$$A = \bigcup_{X \in \mathscr{F}} X,$$

y supongamos que para cada $X \in \mathscr{F}$ tenemos una función $f_X : X \to B$. Pruebe que si

$$\text{siempre que } X \text{ e } Y \text{ son dos elementos de } \mathscr{F} \text{ tenemos que } f_X|_{X \cap Y} = f_Y|_{X \cap Y} \tag{3}$$

entonces existe exactamente una función $F : A \to B$ tal que $F|_X = f_X$ para todo elemento X de $\mathscr{F}$.

Llamamos a la condición (3) la *condición de cociclo* o *de pegado*. Notemos que tiene sentido: si X e Y son dos elementos de $\mathscr{F}$, entonces $X \cap Y$ es un subconjunto tanto de X como de Y, así que podemos considerar las restricciones $f_X|_{X \cap Y}$ y $f_Y|_{X \cap Y}$ de las funciones $f_X : X \to B$ y $f_Y : Y \to B$ a $X \cap Y$.

Caracterizaciones alternativas de la inyectividad y la sobreyectividad

3.5.11. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función.

(*a*) La función f es inyectiva si y solamente si cada vez que $g_1 : C \to A$ y $g_2 : C \to A$ son funciones tales que $f \circ g_1 = g \circ f_2$ se tiene que $g_1 = g_2$.

(*b*) La función f es sobreyectiva si y solamente si cada vez que $g_1 : B \to C$ y $g_2 : B \to C$ son funciones tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ se tiene que $g_1 = g_2$.

3.5.12. Ejercicio. Si $f : A \to B$ es una función, entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

(*a*) La función f es inyectiva.

(*b*) Cada vez que X e Y son subconjuntos de A se tiene que $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

(*c*) Cada vez que X e Y son subconjuntos de A tales que $X \subseteq Y$ es $f[Y - X] = f[Y] - f[X]$.

Funciones inversas a izquierda y a derecha

3.5.13. Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que una función $g : B \to A$ es

- una ***inversa a izquierda*** de f si $g \circ f = I_A$, y
- una ***inversa a derecha*** de f si $f \circ g = I_B$.

Claramente una función $g : B \to A$ es una función inversa para f si y solamente si es a la vez una función inversa a izquierda para f y una función inversa a derecha para f.

3.5.14. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función.

(*a*) La función f posee una función inversa a izquierda si y solamente si f es inyectiva, pero en general no tiene una sola.

(*b*) La función f posee una inversa a derecha si y solamente si f es sobreyectiva, pero en general no tiene una sola.

(*c*) Si f posee una inversa a izquierda $g : B \to A$ y una inversa a derecha $h : B \to A$, entonces f es inversible y se tiene que $g = h = f^{-1}$.

Relaciones de equivalencia inducidas por funciones

3.5.15. Ejercicio. Sea $f : A \to B$ una función. La relación $R_f \subseteq A \times A$ en el conjunto A tal que si x e y son elementos de A entonces

$$x \; R_f \; y \iff f(x) = f(y)$$

es una relación de equivalencia. Llamamos a R_f la relación de equivalencia ***inducida*** por la función f.

3.5.16. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A. Hay una función $f : A \to A/R$ con codominio en el conjunto cociente de A por R tal que

$$f(a) = [a]$$

para cada $a \in A$, esta función es sobreyectiva, y la relación de equivalencia $R_f \subseteq A \times A$ inducida por f es precisamente la relación R con la que empezamos. Llamamos a la función f la ***proyección canónica*** de A al cociente A/R.

Observemos que este resultado nos dice que *toda* relación de equivalencia es la relación de equivalencia inducida por alguna función.

§3.6. Funciones definidas sobre un conjunto cociente

3.6.1. Terminaremos este capítulo probando el siguiente resultado, que tiene un rol verdaderamente fundamental.

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos, sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A y sea $f : A \to B$ una función. Si cada vez que a y a' son elementos de A se tiene que*

$$a \mathrel{R} a' \implies f(a) = f(a'),$$

entonces existe una y una sola función $F : A/R \to B$ con dominio en el conjunto cociente A/R de A por R tal que para cada $a \in A$ es

$$F([a]) = f(a).$$

Demostración. Supongamos que la hipótesis de la proposición se satisface y consideremos el conjunto

$$F \coloneqq \{([a], b) \in A/R \times B : a \in A, b = f(a)\}.$$

Se trata de un subconjunto de $A/R \times B$, así que es una relación del conjunto cociente A/R a B. Mostremos que es, de hecho una función.

- Sea α un elemento de A/R, de manera que existe un elemento a en A tal que α es la clase de equivalencia de a con respecto a la relación R, esto es, $\alpha = [a]$. De la definición de la relación F, entonces, es claro que $(c, f(a))$ es un elemento de F.
- Sean ahora α un elemento de A/R y b y b' dos elementos de B tales que los pares ordenados (α, b) y (α, b') pertenecen a F. Como (α, b) es un elemento de F, existe un elemento a en A tal que $\alpha = [a]$ y $b = f(a)$; de manera similar, como (α, b') es un elemento de F, hay un elemento a' tal que $\alpha = [a']$ y $b' = f(b')$. En particular, esto nos dice que $[a] = \alpha = [a']$, así que $a \mathrel{R} a'$ y, de acuerdo a la hipótesis, es también $b = f(a) = f(a') = b'$

Esto prueba que lo que tenemos es, como dijimos, una función $F : A/R \to B$. Más aún, si a es un elemento cualquiera de A, entonces de la definición misma de F es claro que el par ordenado $([a], f(a))$ está en F, así que tenemos que $F([a]) = f(a)$. Esto nos dice que la función F satisface la condición descripta en la proposición.

Para terminar de probar la proposición, entonces, tenemos que mostrar que F es la única función $A/R \to B$ que satisface esa condición. Sea para ello $G : A/R \to B$ otra función tal que $G([a]) = f(a)$ para todo elemento a de A. Si α es un elemento cualquiera de A/R, entonces existe un elemento a de A tal que $\alpha = [a]$, y tenemos en consecuencia que $G(\alpha) = G([a]) = f(a) = F([a]) = F(\alpha)$. Vemos así que F y G toman el mismo valor en cada elemento de su dominio común — como tienen el mismo codominio, esto nos dice que F y G son, de hecho, la misma función. □

Demos un ejemplo de aplicación de este resultado.

3.6.2. Ejemplo. En el Ejemplo 2.5.7 consideramos el conjunto $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación

$$R \coloneqq \{((x, y), (x', y')) \in A \times A : x + y' = x' + y\},$$

y mostramos que se trata de una relación de equivalencia. Consideremos ahora la función

$$f : (x, y) \in A \mapsto x - y \in \mathbb{Z}.$$

Esta función satisface la condición de la Proposición 3.6.1, esto es,

> *si (x, y) y (x', y') son elementos de A tales que $(x, y)\ R\ (x', y')$, entonces $f(x, y) = f(x', y')$.*

En efecto, si (x, y) y (x', y') son dos elementos del conjunto A tales que $(x, y)\ R\ (x', y')$, de manera que $x + y' = x' + y$, entonces tenemos que $f(x, y) = x - y = x' - y' = f(x', y')$. La proposición nos dice, entonces, que hay una y solo una función $F : A/R \to \mathbb{Z}$ tal que $F([x, y)]) = f(x, y)$ para todo elemento (x, y) de A.

Mostremos que esta función F es biyectiva.

- Supongamos que α y α' son dos elementos de A/R tales que $F(\alpha) = F(\alpha')$. Hay elementos (x, y) y (x', y') de A tales que $\alpha = [(x, y)]$ y $\alpha' = [(x', y')]$, y tenemos entonces que

  $$x - y = f(x, y) = F([(x, y)]) = F(\alpha) = F(\alpha') = F([(x', y')]) = f(x', y') = x' - y'.$$

  Esta igualdad implica que también $x + y' = x' + y$ y, por lo tanto, que $(x, y)\ R\ (x', y')$, así que $\alpha = [(x, y)] = [(x', y')] = \alpha'$. Podemos concluir de todo esto que la función F es inyectiva.

- Sea ahora z un elemento cualquiera de $\mathbb{Z}$. Si es $z \geq 0$, entonces el par ordenado $(z+1, 1)$ es un elemento de A y $z = (z+1)-1 = f(z+1, 1) = F([(z+1, 1)])$. Si, por el contrario, es $z < 0$, entonces el par ordenado $(1, 1-z)$ es un elemento de A y $z = 1-(1-z) = f(1, 1-z) = F([(1, 1-z)])$. En cualquier caso, el elemento z de $\mathbb{Z}$ está en la imagen de la función F. Esto prueba que esta función es sobreyectiva.

3.6.3. Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos, sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A, y sea $F : A/R \to B$ una función. Pruebe que la función $f : a \in A \mapsto F([a]) \in B$ satisface la condición de la Proposición 3.6.1, esto es, que cualesquiera sean a y a' en A vale que

$$a \, R \, a' \implies f(a) = f(a').$$

Esto muestra que la condición que aparece en esa proposición es necesaria para la conclusión de esta. Explícitamente, lo que tenemos es que

> *si $f : A \to B$ es una función tal que existe una función $F : A/R \to B$ con la propiedad de que $F([a]) = f(a)$ cualesquiera sea el elemento a de A, entonces la función f satisface la condición de la Proposición 3.6.1.*

3.6.4. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una partición de A. Hay exactamente una función $f : A \to \mathscr{F}$ tal que $a \in f(a)$ para todo $a \in A$ y se trata de una función sobreyectiva.