Conjuntos, Relaciones y Funciones

Capítulo 1: Fundamentos de la Teoría de Conjuntos

1.1. El Concepto de Conjunto: Definiciones y Notación

En el corazón de la matemática moderna yace un concepto de una simplicidad y potencia extraordinarias: el conjunto. De manera informal, un conjunto se define como una colección de objetos, a los que se les denomina sus elementos.[1] La propiedad fundamental que distingue a un conjunto es la capacidad de decidir, para cualquier objeto dado, si pertenece o no a la colección.[1] Esta aparente simplicidad es engañosa, pues sobre esta base se erige la totalidad del edificio matemático. La teoría de conjuntos no es simplemente un tema de estudio aislado; funciona como el lenguaje universal, la

lingua franca que permite a las diversas ramas de la matemática —desde el álgebra hasta la topología— expresar sus ideas y construir sus objetos de estudio sobre una base común y rigurosa.

La relación más básica entre un objeto y un conjunto es la de pertenencia. Si un objeto x es un elemento de un conjunto A, se dice que x pertenece a A y se denota como $x \in A$. En caso contrario, se escribe $x \notin A$.[1] Un conjunto está completamente determinado por sus elementos; dos conjuntos son considerados iguales si y solo si poseen exactamente los mismos elementos.[1]

Para describir un conjunto, se emplean principalmente dos métodos:

1. **Por Extensión (o Enumeración):** Este método consiste en listar explícitamente todos los elementos del conjunto entre llaves. Por ejemplo, $A=\{1,3,101,7\}$ es el conjunto cuyos únicos elementos son los números 1, 3, 101 y 7.[1] Al utilizar esta notación, es crucial entender dos principios: la irrelevancia del orden y de la repetición. El conjunto $\{7,101,1,3\}$ es idéntico al conjunto A, así como lo es $\{1,1,3,7,101\}$, ya que lo único que define al conjunto es la colección de sus elementos únicos, no cómo se presenta.[1]
2. **Por Comprensión:** Cuando un conjunto es infinito o contiene una gran cantidad de elementos, su descripción por extensión resulta impráctica o imposible. En estos casos, se recurre a la descripción por comprensión, que consiste en enunciar una propiedad que todos los elementos del conjunto deben satisfacer.[1] Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede escribir como $P=\{x \in N : x \text{ es par}\}$. Esta notación se lee: "el conjunto de los elementos x en el conjunto de los números naturales (N) tales que x es par". La especificación de un conjunto de referencia (en este caso, N) es fundamental para evitar ambigüedades y paradojas lógicas.[1]

1.2. Relaciones Fundamentales: Pertenencia, Inclusión e Igualdad

Una vez establecido el concepto de conjunto, es vital distinguir con precisión las relaciones fundamentales que pueden existir entre conjuntos y sus elementos. La confusión entre la pertenencia de un elemento y la inclusión de un subconjunto es una fuente común de errores conceptuales.

La **pertenencia** ($ \in $) es una relación entre un objeto y un conjunto. Por ejemplo, en el conjunto $C=\{1,2,\{2\}\}$, el número 2 es un elemento, por lo que $2\in C$. Sin embargo, el conjunto $\{2\}$ también es un elemento de C, así que $\{2\}\in C$.

La **inclusión** ($ \subseteq $), por otro lado, es una relación entre dos conjuntos. Se dice que un conjunto B es un subconjunto de un conjunto A, o que B está incluido en A, si todo elemento de B es también un elemento de A. Formalmente, esto se expresa con una implicación lógica: $B\subseteq A\Leftrightarrow\forall x,(x\in B\Rightarrow x\in A)$.[1] Siguiendo con el ejemplo anterior, el conjunto

$\{2\}$ es un subconjunto de C porque su único elemento, el número 2, también es un elemento de C. Por lo tanto, $\{2\}\subseteq C$. Nótese que el objeto $\{2\}$ satisface ambas relaciones con C: es tanto un elemento como un subconjunto.

La **igualdad** de conjuntos se define a partir de la inclusión. Dos conjuntos A y B son iguales, denotado $A=B$, si y solo si se contienen mutuamente. Es decir, $A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$.[1] Esta definición, conocida como el principio de doble inclusión, es una herramienta de demostración fundamental en la teoría de conjuntos y refuerza la idea de que un conjunto está determinado de manera única por sus elementos.

1.3. Conjuntos Notables: El Conjunto Vacío y el Conjunto de Partes

Dentro del universo de los conjuntos, dos construcciones merecen una atención especial por su rol fundamental: el conjunto vacío y el conjunto de partes.

El Conjunto Vacío ($\varnothing$)
Se define como el conjunto que no contiene ningún elemento.1 Su unicidad está garantizada por el principio de extensionalidad: si existieran dos conjuntos vacíos, ambos tendrían los mismos elementos (ninguno) y, por lo tanto, serían iguales. El conjunto vacío posee una propiedad crucial: es subconjunto de cualquier otro conjunto. La demostración de esta afirmación (
$\forall A,\varnothing\subseteq A$) se basa en la lógica de la implicación: para probar que $\varnothing\subseteq A$, debemos verificar que la proposición $\forall x,(x\in\varnothing\Rightarrow x\in A)$ es verdadera. Dado que el antecedente, $x\in\varnothing$, es siempre falso (ningún elemento pertenece al conjunto vacío), la implicación es verdadera por vacuidad, independientemente del conjunto A.[1]

El Conjunto de Partes (P(A))
Dado un conjunto A, su conjunto de partes, denotado como P(A), es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Formalmente, $P(A)=\{B:B\subseteq A\}$.1 Por ejemplo, si $A=\{a,b\}$, su conjunto de partes es $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.[1] Para cualquier conjunto

A, siempre se cumple que $\varnothing\in P(A)$ y $A\in P(A)$.[1]

La operación de conjunto de partes es más que una simple definición; es un motor generador de complejidad. Partiendo del conjunto más simple posible, el conjunto vacío $\varnothing$, la aplicación iterativa de la operación de conjunto de partes genera una jerarquía infinita de conjuntos de creciente complejidad:

- $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$
- $P(P(\varnothing))=P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
- $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
  Este proceso constructivo, conocido como la construcción de von Neumann de los números ordinales, revela una idea profunda: las operaciones más básicas de la teoría de conjuntos contienen en sí mismas el potencial para generar la totalidad del universo matemático, construyendo los sistemas numéricos y estructuras más complejas a partir de la "nada" conceptual del conjunto vacío.

1.4. Álgebra de Conjuntos: Operaciones y Propiedades

Las operaciones entre conjuntos permiten combinar y modificar conjuntos para crear otros nuevos, formando una estructura algebraica rica y coherente. Suponiendo que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto referencial U, las operaciones fundamentales son [1]:

- **Unión ($A\cup B$):** El conjunto de elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos. $A\cup B=\{x\in U:x\in A\vee x\in B\}$.
- **Intersección ($A\cap B$):** El conjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B. $A\cap B=\{x\in U:x\in A\wedge x\in B\}$.
- **Complemento (Ac):** El conjunto de elementos en el conjunto referencial U que no pertenecen a A. $Ac=\{x\in U:x\in /A\}$.
- **Diferencia (A−B):** El conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B. $A-B=\{x\in U:x\in A\wedge x\in /B\}$. Se puede demostrar que $A-B=A\cap Bc$.[1]
- **Diferencia Simétrica ($A\triangle B$):** El conjunto de elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$.[1]

Estas operaciones obedecen a un conjunto de leyes algebraicas que estructuran el conjunto de partes P(U) como un retículo distributivo y complementado, conocido como álgebra de Boole. La siguiente tabla resume las propiedades más importantes, destacando la dualidad entre la unión y la intersección.[1]

Propiedad	Fórmula para Unión	Fórmula para Intersección
Conmutatividad	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Asociatividad	$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$
Idempotencia	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Leyes de Identidad	$A\cup \varnothing=A$	$A\cap U=A$
Leyes de Absorción	$A\cup (A\cap B)=A$	$A\cap (A\cup B)=A$
Leyes Distributivas	$A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$	$A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$

La estructura revelada por esta tabla es notable. La existencia de dos leyes distributivas simétricas es una característica que diferencia al álgebra de conjuntos de la aritmética de los números reales, donde la multiplicación distribuye sobre la adición, pero no viceversa.

1.5. Conexión con la Lógica: Leyes de De Morgan y Tablas de Verdad

La profunda conexión entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional se manifiesta de manera explícita en las **Leyes de De Morgan**. Estas leyes describen cómo la operación de complemento interactúa con la unión y la intersección [1]:

1. $(A\cup B)c=Ac\cap Bc$
2. $(A\cap B)c=Ac\cup Bc$

Estas identidades no son meras curiosidades algebraicas; son el reflejo directo de sus contrapartes en la lógica. La afirmación de que un elemento x pertenece a un conjunto se puede tratar como una proposición lógica que puede ser verdadera o falsa. Bajo esta correspondencia, la unión de conjuntos se corresponde con el conector lógico "o" ($\vee$), la intersección con "y" ($\wedge$), y el complemento con la negación ($\neg$).[1]

Esta conexión permite utilizar una herramienta de la lógica, las **tablas de verdad**, para demostrar rigurosamente identidades de conjuntos. Para verificar una igualdad como $(A\cup B)c=Ac\cap Bc$, se construye una tabla que considera todas las combinaciones posibles de pertenencia de un elemento genérico x a los conjuntos A y B. Se evalúa la pertenencia de x a cada lado de la igualdad para cada caso. Si las columnas resultantes son idénticas, la igualdad es válida para cualquier elemento x y, por lo tanto, los conjuntos son iguales.[1]

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$x \in (A \cup B)c$	$x \in Ac$	$x \in Bc$	$x \in Ac \cap Bc$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Como las columnas para $(A \cup B)c$ y $Ac \cap Bc$ son idénticas, la ley de De Morgan queda demostrada. La razón por la que este método es válido es profunda: tanto el álgebra de conjuntos (específicamente, el conjunto de partes P(U) con las operaciones $\cup, \cap$,c) como la lógica proposicional (con los conectores $\vee, \wedge, \neg$) son modelos de la misma estructura matemática abstracta: un **álgebra de Boole**. Esta identidad estructural (isomorfismo) es lo que garantiza que las verdades en un sistema se traducen directamente en verdades en el otro.

1.6. El Producto Cartesiano: Puente hacia las Relaciones

Para extender el estudio de los conjuntos a las interacciones entre ellos, se introduce una operación fundamental: el producto cartesiano. Dados dos conjuntos A y B, su producto cartesiano, denotado A×B, es el conjunto de todos los **pares ordenados** (a,b) donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.[1] Formalmente:

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

A diferencia de los conjuntos, en un par ordenado el orden es crucial; si A y B son conjuntos no vacíos y distintos, entonces A×B偃=B×A.1 Por ejemplo, si $A=\{1,2\}$ y $B=\{a,b\}$, entonces $A \times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$, mientras que $B \times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$. El concepto se generaliza a n conjuntos para formar n-uplas ordenadas: $A1 \times A2 \times \cdots \times An$.[1]

El producto cartesiano no es simplemente otra operación; es el acto constructivo que crea el "espacio" o "universo" dentro del cual se pueden definir formalmente las conexiones y correspondencias entre conjuntos. Sirve como el puente conceptual indispensable que nos lleva desde el estudio de los conjuntos como entidades aisladas al estudio de las relaciones y funciones.

Capítulo 2: El Universo de las Relaciones Matemáticas

2.1. Definición Formal y Representación de Relaciones

Una vez construido el espacio del producto cartesiano, el concepto de relación puede definirse con precisión matemática. Una **relación** R de un conjunto A (el dominio) en un conjunto B (el codominio) es, formalmente, cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.[1] Es decir,

$R \subseteq A \times B$. Si el par ordenado (a,b) pertenece al conjunto R, se dice que "a está relacionado con b" y se denota como aRb.[1]

Esta definición abstracta abarca una vasta gama de conceptos intuitivos de relación, desde "ser menor que" entre números hasta "ser hijo de" entre personas. La formalización permite un estudio riguroso de sus propiedades. Para visualizar y analizar las relaciones, se utilizan diversas representaciones:

- **Grafos Dirigidos:** Para relaciones en conjuntos finitos, un grafo dirigido es una herramienta visual poderosa. Los elementos del conjunto se representan como vértices (nodos) y una flecha se dibuja del vértice a al vértice b si y solo si aRb.[1]
- **Gráficos Cartesianos:** Para relaciones en conjuntos de números reales, como $R \times R$, la relación se puede representar como una región en el plano cartesiano. Por ejemplo, la relación $x2+y2 \le 1$ corresponde al círculo unitario y su interior.[1]

2.2. Propiedades Fundamentales de las Relaciones en un Conjunto

Cuando el dominio y el codominio de una relación son el mismo conjunto ($R \subseteq A \times A$), se habla de una "relación en A". Estas relaciones pueden poseer propiedades estructurales clave que determinan su naturaleza y utilidad. Las cuatro propiedades más importantes son [1]:

1. **Reflexividad:** Una relación R en A es reflexiva si todo elemento está relacionado consigo mismo. Formalmente, $\forall a \in A, (a,a) \in R$ (o aRa). En un grafo dirigido, esto corresponde a un bucle en cada vértice.[1]
2. **Simetría:** Una relación R en A es simétrica si siempre que a está relacionado con b, b también está relacionado con a. Formalmente, $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. En un grafo, por cada flecha de a a b, existe una flecha de b a a.[1]
3. **Antisimetría:** Una relación R en A es antisimétrica si no puede haber dos elementos distintos que estén relacionados mutuamente. Formalmente, $\forall a,b \in A, \Rightarrow a=b$. En un grafo, no pueden existir flechas en ambas direcciones entre dos vértices distintos.[1]
4. **Transitividad:** Una relación R en A es transitiva si siempre que a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c. Formalmente, $\forall a,b,c \in A, \Rightarrow (a,c) \in R$. En un grafo, si existe un camino de a a c pasando por b, debe existir una flecha directa de a a c.[1]

Estas propiedades son independientes entre sí. Una relación puede poseer cualquier combinación de ellas, dando lugar a una rica taxonomía de estructuras relacionales. Por ejemplo, la relación de igualdad (=) es reflexiva, simétrica y transitiva. La relación "menor o igual que" ($\le$) en los números reales es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La relación "tiene el mismo color" es reflexiva, simétrica y transitiva. La relación "es padre de" no posee ninguna de estas propiedades. Esta combinatoria de propiedades permite clasificar las relaciones en tipos fundamentales con aplicaciones radicalmente diferentes.

2.3. Relaciones de Equivalencia: El Concepto de Clasificación

Una **relación de equivalencia** es una de las estructuras más importantes en matemáticas. Se define como una relación en un conjunto A que es simultáneamente **reflexiva, simétrica y transitiva**.[1] El propósito de una relación de equivalencia es agrupar elementos que son "iguales" o "similares" con respecto a una cierta propiedad.

Ejemplos canónicos ilustran su poder:

- **Igualdad:** La relación de igualdad en cualquier conjunto es el ejemplo más simple de una relación de equivalencia.[1]
- **Congruencia Módulo n:** En el conjunto de los números enteros Z, la relación $a \sim b \iff (a-b)$ es divisible por n es una relación de equivalencia. Agrupa a todos los enteros que dejan el mismo resto al ser divididos por n.[1]
- **Construcción de los Números Racionales:** En el conjunto $Z \times (Z - \{0\})$, la relación $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ es una relación de equivalencia. Esta relación identifica todas las fracciones que representan el mismo valor numérico (e.g., $(1,2) \sim (2,4)$).[1]

2.4. Clases de Equivalencia, Conjunto Cociente y Particiones

Dada una relación de equivalencia ~ en un conjunto A, la **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$, denotada por [a] o $\bar{a}$, es el subconjunto de A que contiene a todos los elementos relacionados con a: $[a] = \{x \in A : x \sim a\}$.[1]

Las clases de equivalencia poseen una propiedad fundamental que se deriva directamente de las propiedades de la relación: dos clases de equivalencia son o bien idénticas o bien completamente disjuntas. Es decir, para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple que $[a] = [b]$ o $[a] \cap [b] = \varnothing$.[1] Esta propiedad garantiza que las clases de equivalencia no se solapan parcialmente.

El conjunto de todas las clases de equivalencia distintas se denomina **conjunto cociente**, denotado A/~. Este conjunto forma una **partición** de A, que es una colección de subconjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, cuya unión es el conjunto original A.[1]

2.5. La Correspondencia Biunívoca entre Relaciones de Equivalencia y Particiones

Existe un teorema fundamental que establece una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en un conjunto A y el conjunto de todas las particiones de A [1]:

1. A toda relación de equivalencia en A le corresponde una única partición de A, formada por sus clases de equivalencia.
2. A toda partición de A le corresponde una única relación de equivalencia, definida por la regla: a~b si y solo si a y b pertenecen al mismo subconjunto de la partición.

Esta correspondencia es mucho más que una simple clasificación; es el motor formal de la abstracción en matemáticas. Permite crear nuevos objetos matemáticos a partir de otros existentes. La relación de equivalencia proporciona la *regla* para considerar elementos distintos como "el mismo" (por ejemplo, la regla ad=bc para las fracciones). La partición agrupa físicamente estos elementos equivalentes en clases. Finalmente, el conjunto cociente —el conjunto de estas clases— *es* el nuevo conjunto de objetos abstractos (por ejemplo, el conjunto de los números racionales Q). Este proceso de "identificar" o "pegar" elementos equivalentes es una de las herramientas constructivas más poderosas de la matemática.

2.6. Relaciones de Orden: Estructuras Jerárquicas

En contraste con las relaciones de equivalencia que agrupan elementos como "iguales", las relaciones de orden establecen una jerarquía o una estructura de precedencia. Una **relación de orden** en un conjunto A se define como una relación que es **reflexiva, antisimétrica y transitiva**.[1]

Ejemplos clave ilustran los diferentes tipos de jerarquías que pueden surgir:

- La relación "menor o igual que" (≤) en el conjunto de los números reales R es una relación de orden. Es un **orden total** porque para cualesquiera dos números reales x,y, siempre se cumple que x≤y o y≤x; es decir, cualquier par de elementos es comparable.[1]
- La relación de inclusión (⊆) en el conjunto de partes P(A) es una relación de orden. Generalmente es un **orden parcial**, ya que pueden existir subconjuntos no comparables. Por ejemplo, en P({1,2,3}), los conjuntos {1,2} y {2,3} no son comparables, pues ninguno está contenido en el otro.[1]
- La relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales N ("a divide a b") es también un orden parcial. Por ejemplo, 3 y 5 no son comparables, ya que ni 3 divide a 5 ni 5 divide a 3.[1]

Capítulo 3: Funciones como Correspondencias Unívocas

3.1. Definición de Función como Relación Especializada

Dentro del vasto universo de las relaciones, las funciones ocupan un lugar central. Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B, denotada $f:A\to B$, es una relación que satisface una condición adicional muy estricta: a cada elemento del conjunto de partida A le corresponde **uno y solo un** elemento del conjunto de llegada B.[1]

Formalmente, una relación $f\subseteq A\times B$ es una función si cumple dos condiciones:

1. **Condición de Existencia:** Para todo $x\in A$, existe algún $y\in B$ tal que $(x,y)\in f$. (Todo elemento del dominio debe tener una imagen).
2. **Condición de Unicidad:** Si $(x,y)\in f$ y $(x,z)\in f$, entonces necesariamente $y=z$. (La imagen de cada elemento debe ser única).

Esta restricción es fundamental. Mientras que una relación general puede ser "uno a muchos" o "muchos a muchos", una función está limitada a ser "muchos a uno" o "uno a uno". Esta transición de una correspondencia general a una función es la encarnación matemática del paso de un proceso no determinista a uno **determinista**: para cualquier entrada válida, la salida está unívocamente determinada. Por esta razón, las funciones son el modelo matemático por excelencia para algoritmos, transformaciones y procesos en todas las ciencias. La notación estándar $y=f(x)$ captura esta dependencia unívoca.[1]

3.2. Dominio, Codominio e Imagen: Delimitando el Mapeo

Para describir completamente una función, se deben especificar tres componentes:

- **Dominio:** El conjunto de partida A, que contiene todos los posibles valores de entrada para la función.[1]
- **Codominio:** El conjunto de llegada B, que contiene todos los posibles valores de salida.[1]
- **Imagen (Im(f)):** El subconjunto del codominio que consiste en todos los valores que la función realmente produce. Formalmente, $Im(f)=\{y\in B:\exists x\in A \text{ tal que } f(x)=y\}$.[1]

Es crucial entender que la imagen no tiene por qué ser igual al codominio. Por ejemplo, para la función $f:R\to R$ definida por $f(x)=x2$, el dominio y el codominio son ambos el conjunto de los números reales, pero su imagen es $Im(f)=[0,\infty)$, un subconjunto propio del codominio.[1]

3.3. Taxonomía de las Funciones: Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

Las funciones se pueden clasificar según la naturaleza de su mapeo, lo que responde a preguntas fundamentales sobre el proceso que modelan. Las tres categorías principales son [1]:

- **Función Inyectiva (uno a uno):** Una función es inyectiva si a elementos distintos del dominio les corresponden elementos distintos del codominio. Formalmente, $f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$. Una función inyectiva nunca mapea dos entradas diferentes a la misma salida. Esto modela un proceso reversible sin pérdida de información.
- **Función Sobreyectiva (o suprayectiva):** Una función es sobreyectiva si su imagen es igual a su codominio ($Im(f)=B$). Esto significa que todo elemento del codominio es la imagen de al menos un elemento del dominio. Modela un proceso que puede alcanzar cualquier resultado posible en el conjunto de llegada.
- **Función Biyectiva:** Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. En una biyección, cada elemento del dominio se corresponde con un único elemento del codominio, y viceversa. Esto establece una correspondencia perfecta, uno a uno, entre los dos conjuntos.

La siguiente tabla resume estas propiedades, incluyendo su interpretación gráfica en el plano cartesiano, conocida como el "Test de la Línea Horizontal".[1]

Propiedad	Definición Formal	Interpretación Gráfica (Flechas)	Interpretación Gráfica (Test de la Línea Horizontal)
Inyectiva	$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$	A cada elemento del codominio le llega *a lo sumo* una flecha.	Toda línea horizontal corta el gráfico *a lo sumo* una vez.
Sobreyectiva	$\forall y\in B, \exists x\in A: f(x)=y$	A cada elemento del codominio le llega *al menos* una flecha.	Toda línea horizontal corta el gráfico *al menos* una vez.
Biyectiva	Inyectiva y Sobreyectiva	A cada elemento del codominio le llega *exactamente* una flecha.	Toda línea horizontal corta el gráfico *exactamente* una vez.

3.4. Operaciones con Funciones: Composición

Así como los conjuntos, las funciones pueden ser combinadas para crear nuevas funciones. La operación más importante es la **composición**. Dadas dos funciones $f:A\to B$ y $g:B\to C$, donde el codominio de f coincide con el dominio de g, su composición, denotada $g\circ f$, es una nueva función de A a C definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.[1] La composición es asociativa, es decir,

$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.[1]

Las propiedades de inyectividad y sobreyectividad se comportan de manera predecible bajo la composición:

- Si f y g son inyectivas, entonces $g\circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g\circ f$ es sobreyectiva.
- Como consecuencia, si f y g son biyectivas, entonces $g\circ f$ es biyectiva.[1]

3.5. La Función Inversa y el Rol Fundamental de la Biyectividad

El concepto de "deshacer" o "invertir" una función es fundamental en matemáticas. Una función $f:A\to B$ se dice que es **inversible** si existe una función $g:B\to A$ tal que $g\circ f=id_A$ (la función identidad en A) y $f\circ g=id_B$ (la función identidad en B). Si tal función g existe, es única y se denomina la **función inversa** de f, denotada f^{-1}.[1]

El teorema central que conecta la estructura de una función con su invertibilidad es el siguiente: **una función $f:A\to B$ es inversible si y solo si es biyectiva**.[1]

La lógica detrás de este teorema revela la esencia de cada propiedad:

- Para que una inversa sea posible, al "revertir" el mapeo no debe haber ambigüedad. Si la función original f no fuera **inyectiva**, un elemento del codominio podría provenir de múltiples elementos del dominio, y la inversa no sabría a cuál regresar.
- Para que la inversa sea una función definida en todo B, debe poder actuar sobre cada elemento de B. Si la función original f no fuera **sobreyectiva**, habría elementos en el codominio que no son imagen de nada, y la inversa no estaría definida para ellos.

Por lo tanto, solo cuando se cumplen ambas condiciones —es decir, cuando la función es biyectiva— existe una correspondencia perfecta y simétrica entre los dos conjuntos. Esta simetría garantiza que el proceso de mapeo puede ser invertido de manera completa y unívoca, dando lugar a una función inversa bien definida. La biyectividad no es una condición arbitraria, sino la expresión matemática de un mapeo perfectamente reversible.