Resumen: Conceptos Clave - Unidad 1

Álgebra I - FCEyN

1. Conjuntos

Operaciones Básicas

- **Pertenencia**: Un objeto a es un elemento de un conjunto A. Se escribe $a \in A$.
- **Inclusión**: Un conjunto A es subconjunto de B si todo elemento de A es también elemento de B.

$$A \subseteq B \iff \forall x, (x \in A \implies x \in B)$$

- **Unión**: El conjunto de elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Intersección**: El conjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Complemento**: El conjunto de elementos que no pertenecen a A (respecto a un conjunto universal U).

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **Diferencia**: El conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$$

- **Diferencia Simétrica**: El conjunto de elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Otros Conceptos

- **Conjunto de Partes**: El conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- **Producto Cartesiano**: El conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

2. Relaciones

Una **relación** R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$, se escribe aRb.

Clasificación de Relaciones (en un conjunto A)

Sea R una relación en A (es decir, $R \subseteq A \times A$).

- **Reflexiva:** Todo elemento está relacionado consigo mismo.

$$\forall a \in A, (a, a) \in R$$

- **Simétrica:** Si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \implies (b, a) \in R$$

- **Antisimétrica:** Si a está relacionado con b y b con a, entonces a y b son el mismo elemento.

$$\forall a, b \in A, ((a, b) \in R \land (b, a) \in R) \implies a = b$$

- **Transitiva:** Si a está relacionado con b y b con c, entonces a está relacionado con c.

$$\forall a, b, c \in A, ((a, b) \in R \land (b, c) \in R) \implies (a, c) \in R$$

Tipos de Relaciones

- **Relación de Equivalencia:** Es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.
- **Relación de Orden:** Es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- **Clase de Equivalencia de** a: En una relación de equivalencia, es el conjunto de todos los elementos relacionados con a.

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

3. Funciones

Una **función** f de A en B ($f : A \to B$) es una relación que asigna a cada elemento de A (dominio) un **único** elemento de B (codominio).

Clasificación de Funciones

- **Inyectiva (uno a uno):** Elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

$$\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

- **Sobreyectiva (suryectiva):** Todo elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio. El rango es igual al codominio.

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

- **Biyectiva:** Es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Operaciones

- **Composición de Funciones**: Aplicar una función después de otra.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- **Función Inversa**: Si una función $f : A \to B$ es biyectiva, su inversa $f^{-1} : B \to A$ es la función que "deshace" la operación de f.

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$