4. Cónicas

En este capítulo estudiaremos una familia de curvas de $\mathbb{R}^2$, llamadas cónicas. *Su nombre proviene de que dichas curvas se obtienen al cortar un cono en el espacio con distintos tipos de planos. Los conjuntos de puntos que determinan estas curvas no forman espacios lineales (como rectas y planos que desarrollamos en el capítulo 2), sino que son* curvados. *En este sentido, no guardan relación con propiedades de la suma y producto por escalar de vectores. Además, las ecuaciones que las definen no son lineales (veremos que tienen las coordenadas elevadas al cuadrado). En la segunda parte del libro, retomaremos el estudio de espacio lineales.*

4.1 Curvas cónicas

Una *sección cónica* o *curva cónica* es una curva que se obtiene al intersecar un cono con un plano que no pasa por el vértice del cono. Según la inclinación del plano, se obtienen distintas curvas: elipse, circunferencia, parábola e hipérbola.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es un cono y qué ecuación lo define.
- Cuáles son las curvas cónicas.

4.1.1 ¿Qué es un cono?

Es el conjunto de puntos que se muestra en la Figura 4.1, lado izquierdo. Notemos que, a diferencia de lo que comúnmente se considera un cono (como un cono de helado), en nuestra definición, se contemplan dos “conos de helados” que se tocan por los vértices. Llamemos informalmente a las mitades del cono, *semicono superior* y *semicono inferior*. La manera algebraica de definir un cono es por medio de una ecuación. Los puntos de la curva cumplen que las coordenadas de sus puntos, al reemplazarse en la ecuación dan un resultado verdadero. Tal como adelantamos arriba, esta ecuación *no es lineal*, como las que vimos en los capítulos anteriores, sino que es *cuadrática*: aparecen las coordenadas elevadas al cuadrado.

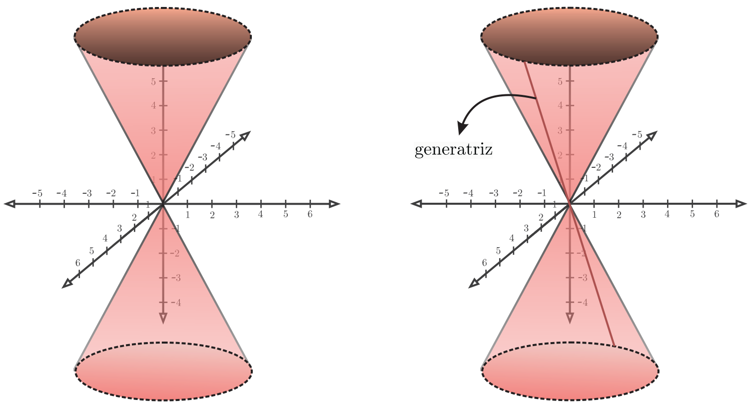

Figura 4.1: El cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Definición 37 Un *cono* en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

En lo que sigue, notaremos al cono con la letra C. O sea, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Cabe destacar que el punto $(0, 0, 0)$ pertenece al cono, y se lo llama *vértice del cono*. Observemos también que el cono contiene infinitas rectas (Figura 4.1, lado derecho). Justamente, es posible darse cuenta que el cono es, en realidad, la unión de estas infinitas rectas y que todas ellas se tocan solo en el vértice. Estas rectas reciben el nombre de *generatrices*.

4.1.2 Corte del cono con distintos planos planos

En el capítulo 2, cortamos dos planos no paralelos de $\mathbb{R}^3$ (es decir, los intersecamos), al hacer esto obtenemos una recta. Ahora veremos qué sucede al cortar el cono con distintos tipos de planos, obtendremos distintos tipos de curvas. ¿Qué tipos de planos utilizaremos para cortar? Consideremos todos los posibles planos pero *que no pasen por el vértice del cono*. Imaginemos que empezamos con un plano horizontal y vamos inclinándolo hasta hacerlo vertical; y vayamos viendo las curvas que vamos obteniendo al intersecar.

Por un lado, cortemos al cono con un *plano horizontal* (es decir, paralelo al plano xy). Si lo hacemos a la altura del vértice (vale decir, el plano $z = 0$), solo obtenemos el vértice del cono (esto no nos brinda mucha información). Entonces, cortemos con el plano Π que está a "altura" 1, es decir, el plano de ecuación $z = 1$. La manera de calcular la intersección entre C y Π es la misma que vimos antes. Los puntos en ambos objetos son los que verifican las ecuaciones de C y las ecuaciones de Π simultáneamente. Por lo tanto, buscamos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Al reemplazar la segunda ecuación en la primera, obtenemos $x^2 + y^2 - 1^2 = 0$ o, lo que es lo mismo, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Esta es la ecuación de una circunferencia de radio 1 contenida dentro del plano Π. Si ahora cortamos con el plano Π' de ecuación $z = 2$, obtenemos que los puntos de la intersección entre C y Π' verifican $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, que es la ecuación de una circunferencia de radio 2 pensada dentro del plano Π'. En general, al cortar con el plano Π_k de ecuación $z = k$ (con $k \in \mathbb{R}$ cualquiera), obtenemos una circunferencia de radio $|k|$ dentro de dicho plano (Figura 4.2). Si en cualquiera de estos ejemplos, identificamos el plano Π_k con $\mathbb{R}^2$, entonces, todos estos círculos son circunferencias centradas en el $(0, 0)$ de radio $|k|$. Como solo nos importa la forma de estas curvas cónicas, vamos a estudiar,en general, circunferencias no necesariamente centradas en el origen. *Las circunferencias, entonces, son un tipo de curvas cónicas.*

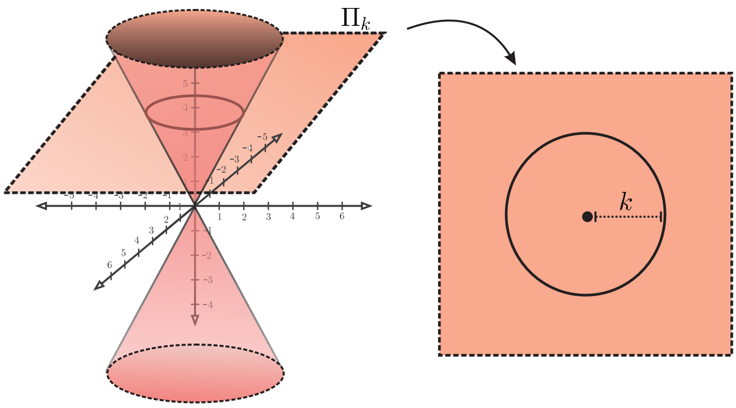

Figura 4.2: La circunferencia como una sección del cono.

Consideremos ahora un plano horizontal con altura positiva en el eje z, e inclinémoslo levemente de manera que *siga atravesando todas las generatrices de C y que lo haga solo del lado positivo de las z*; es decir, que corte solo el semicono superior de C. El conjunto de puntos que se halla en la intersección entre el cono y este plano forman una *elipse* (Figura 4.3). Las elipses admiten una ecuación que las hacen fácilmente identificables pero, en este caso (y en los que siguen), no haremos la deducción de la ecuación a partir del sistema de ecuaciones que determina la intersección, porque involucran una serie de pasos técnicos que no nos interesan considerar a esta altura. *Las elipses, entonces, son un tipo de curvas cónicas.*

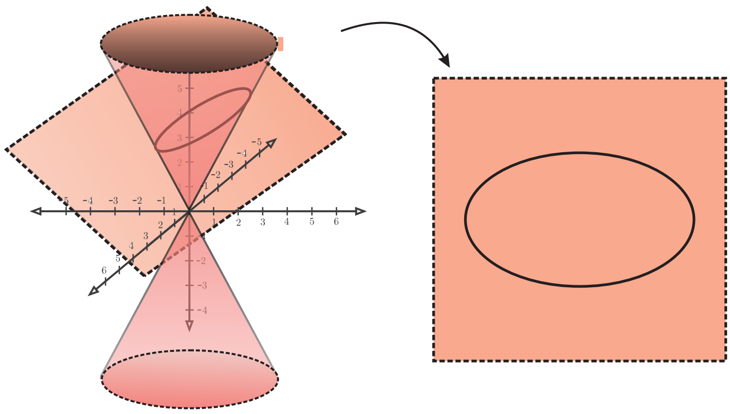

Figura 4.3: La elipse como una sección del cono.

Consideremos un plano que no pase por el vértice del cono y que sea paralelo a alguna directriz. La curva determinada por la intersección de un plano como este y el cono, es una *parábola* (Figura 4.4). Seguramente, la parábola es la cónica más familiar para el estudiante. En este libro la estudiaremos desde un punto de vista más amplio. *Entonces, decimos que las parábolas son un tipo de curvas cónicas.*

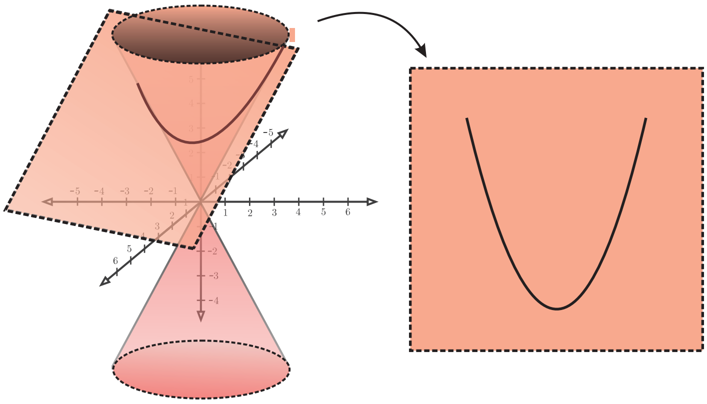

Figura 4.4: La parábola como una sección del cono.

Finalmente, cortemos el cono con un plano que no pase por su vértice y que interesecte a ambos semiconos del cono pero que no sea paralelo a ninguna generatriz. La curva que queda determinada por esta intersección, se llama *hipérbola* (Figura 4.5), y a diferencia de las otras cónicas que veremos, posee dos *ramas*. Esto implica que es una curva desconectada: para recorrerla completamente en algún momento debemos "saltar" hacia la otra rama. *Las hipérbolas son el último tipo de curvas cónicas.*

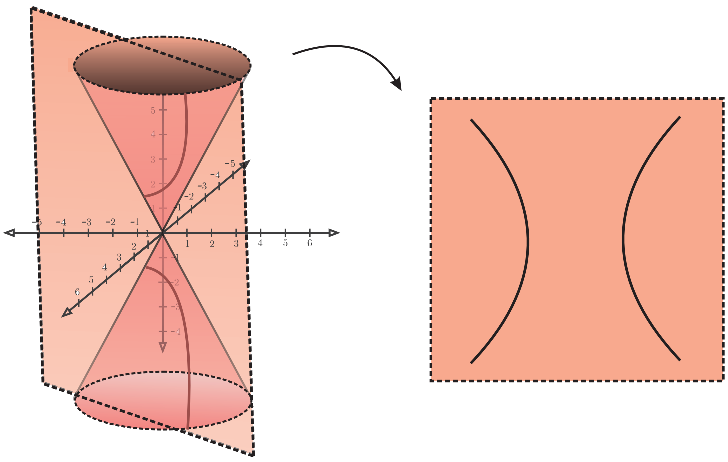

Figura 4.5: La hipérbola como una sección del cono.

4.2 La circunferencia

Vimos que una circunferencia se obtiene al cortar un cono con un plano horizontal. En este apartado vamos estudiar cómo definirla como *lugar geométrico* (es decir, como los puntos que verifican cierta propiedad de distancia respecto de otro/s punto/s o recta/s), y analizaremos en detalle las propiedades de estas curvas.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la circunferencia como *lugar geométrico* de puntos.
- Las propiedades principales de este tipo de curvas.

4.2.1 La circunferencia como lugar geométrico

La siguiente definición de *circunferencia* les resultará conocida.

Definición 38 Una *circunferencia* es un conjunto que consta todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que están a una distancia fija, r, de un punto dado P. El punto P recibe el nombre de *centro* de la circunferencia y la distancia r, el *radio*.

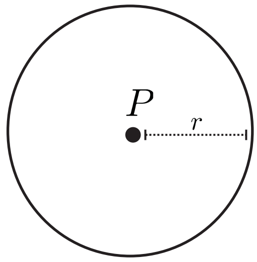

Figura 4.6: La circunferencia de centro P y radio r.

Esta manera de definir circunferencia se conoce como “dar la circunferencia como lugar geométrico”. Notemos que el radio r de una circunferencia *siempre* es un número positivo, ya que está representando una distancia, y no puede haber distancias negativas.

Veamos esta definición aplicada a un centro y un radio particulares:

■ **Ejemplo 39** Supongamos que queremos encontrar a todos los puntos del plano que están a una distancia de 4 unidades del punto $Q = (3, -1)$. Si llamamos $P = (x, y)$ a un punto cualquiera que se encuentra a una distancia de 4 unidades del punto Q, podemos plantear la siguiente igualdad:

$$d(Q, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 4.$$

Si elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado, resulta:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$

Es decir,

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

La expresión que obtuvimos es la que define el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a 4 unidades de distancia del punto $Q = (3, -1)$; es decir: la ecuación de la circunferencia de centro $Q = (3, -1)$ y radio $r = 4$. ■

A partir del ejemplo anterior, podemos pensar en escribir una fórmula que defina el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia r de un punto fijo llamado centro $Q = (x_0, y_0)$. El razonamiento es análogo al del ejemplo. Tomemos un punto genérico de la circunferencia $P = (x, y)$. Podemos plantear que la distancia entre el punto P y Q debe ser siempre igual a r. Es decir:

$$d(Q, P) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Cuando elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad resulta:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Esta es la *ecuación canónica de la circunferencia de centro* $Q = (x_0, y_0)$ *y radio* r.

En muchas situaciones nos encontraremos con ecuaciones distintas a la canónica que, sin embargo, describen circunferencias. Veamos esta fórmula $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, a pesar de no corresponderse a simple vista con las fórmulas que hemos trabajado hasta ahora los puntos que cumplen esta igualdad son los puntos de una circunferencia.

En la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1), restamos F en ambos miembros y completamos cuadrados en el primero obtenemos:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

y, por tanto,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Definiendo $G = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$, la última ecuación queda escrita como:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = G$$

Como esta última ecuación $0 \leq G$ (pues G es suma de cuadrados), entonces, podemos considerar $r = \sqrt{G}$, y obtener:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = r$$

Entonces hemos transformado la ecuación (1) en la ecuación canónica de un círculo de centro $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio r. Cuando ningún punto satisface la fórmula (1), por ejemplo como en el caso $x^2 + y^2 + 4 = 0$, para evitar tener que considerar diferentes casos, decimos que el vacío (que es el conjunto solución de la ecuación anterior) es un círculo degenerado.

Denominamos a las fórmulas de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ecuación general de una circunferencia.

Veamos un caso particular de esta ecuación:

■ **Ejemplo 40** Tomemos la siguiente fórmula $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Como lo hicimos antes, al completar cuadrados obtenemos $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 1$, pues lo único que tuvimos que hacer fue sumar en ambos miembros 1 y reordenar el primer miembro. Esta última expresión puede reescribirse $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$, con lo cual tenemos que esta ecuación describe una circunferencia de centro $(-1, 3)$ y radio $r = 1$. ■

¿Qué hicimos en el apartado 4.2?

- Estudiamos a la circunferencia como lugar geométrico de puntos, es decir, como el conjunto de puntos que distan de otro punto (el centro) en cierta magnitud (radio).
- Introdujimos las ecuaciones canónicas y generales de una circunferencia.

■

4.3 La elipse

Ya hemos mencionado que la elipse es la cónica que se obtiene cortando al cono con un plano que no pasa por su vértice y que corta a todas las generatrices. Al igual que la circunferencia, la elipse puede definirse como lugar geométrico.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la elipse como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las elipses: focos, semiejes, excentricidad, ecuación cartesiana.

Importante En este libro, solo trabajaremos con elipses cuyos focos se encuentran sobre una recta paralela al eje x o al eje y.

4.3.1 La elipse como lugar geométrico

Recuerden que la circunferencia tiene la propiedad definitoria de constar de los puntos del plano que distaban del centro en una magnitud determinada. Como lugar geométrico, la elipse tiene una propiedad similar pero en lugar de estar referida a su centro, está referida a dos puntos llamados *focos*. La propiedad definitoria es la siguiente:

Definición 39 Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos fijos. Una *elipse* E asociada a F_1 y F_2 es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de sus distancias a F_1 y F_2 es una magnitud constante. Es decir, hay un número real positivo $k \in \mathbb{R}$ fijo tal que $E = \{P \in \mathbb{R}^2 \,:\, d(P, F_1) + d(P, F_2) = k\}$.

Para comprender qué implica esta definición, busquemos el lugar geométrico de los puntos para los cuales la suma de sus distancias a $F_1 = (5, 0)$ y a $F_2 = (-5, 0)$ es igual a 26.

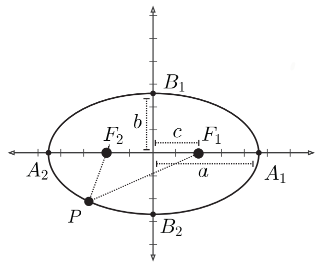

Figura 4.7: La elipse de focos F_1 y F_2.

Decimos que $P = (x, y)$, es un punto de dicho lugar geométrico. Entonces, tenemos que sumar las distancias de F_1 a P y de F_2 a P, es decir:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 26$$

Dado que la fórmula de la distancia entre dos puntos es $d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$, entonces para los puntos en cuestión tenemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} = 26$$

Lo cual, al "distribuir los cuadrados" nos da:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 26$$

Luego de despejar y "elevar al cuadrado", obtenemos:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} = 26 - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$(\sqrt{x^2-10x+25+y^2})^2=(26-\sqrt{x^2+10x+25+y^2})^2$$

$$x^2-10x+25+y^2=676-52\sqrt{x^2+10x+25+y^2}+x^2+10x+25+y^2$$

Al dejar solamente la raíz en el miembro derecho y, nuevamente, “elevando al cuadrado”:

$$x^2-10x+25+y^2-701-(x^2+10x+y^2)=-52\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$-2(10x+338)=-52\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$10x+338=26\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$

$$(10x+338)^2=(26\sqrt{x^2+10x+25+y^2})^2$$

$$100x^2+6760x+114244=(26\sqrt{x^2+10x+25+y^2})^2$$

$$100x^2+6760x+114244=676x^2+6760x+16900+676y^2$$

Al despejar las variables en el miembro izquierdo obtenemos:

$$-576x^2-676y^2=-97344$$

Al dividir ambos miembros por -97344 queda:

$$\frac{x}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

es decir,

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$$

4.3.2 La ecuación de la elipse

En el apartado anterior, vimos cómo podemos describir una elipse a través de una ecuación. Para esta deducción partimos de la definición de la elipse como lugar geométrico (tal como hicimos para la circunferencia) y llegamos a una fórmula.

Nuevamente, consideremos una elipse genérica *alrededor del origen* como hicimos en el apartado anterior (Figura 4.7), aunque no necesariamente con el semieje mayor sobre el eje x (podría estar sobre el eje y). Es decir, los focos equidistan del origen pero pueden estar sobre el eje x o el eje y. Además, sigamos representando a a y b como la longitud del semieje sobre el eje x y sobre el eje y, respectivamente (alguno de ellos será el mayor y el otro el menor). Entonces, *la ecuación canónica de la elipse de centro* $(0,0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Tengamos en cuenta cómo en la ecuación aparecen explícitamente las longitudes de los semiejes mayor y menor (sean cuales sean). Más aún, el valor a, que corresponde a la longitud del semieje sobre el eje x, aparece dividiendo la variable x y el valor b, que corresponde a la longitud del semieje sobre el eje y, a la variable y.

Entonces, en en el caso que vimos más arriba, $a = 13$ y $b = 12$. Es decir que, el lugar geométrico de los puntos para los cuales la suma de sus distancias al punto $F_1 = (5, 0)$ y al punto $F_2 = (-5, 0)$ es igual a 26 es la elipse de centro $(0, 0)$ con ecuación $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$.

A partir de este caso, es muy sencillo obtener la ecuación canónica de una elipse que no esté necesariamente centrada en el origen. En efecto, si "trasladamos" su centro a cualquier punto (x_0, y_0), siendo los ejes de la elipse paralelos a los ejes x e y respectivamente, la ecuación resulta:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

esta es llamada *ecuación canónica de la elipse de centro* (x_0, y_0).

Apliquemos esta última ecuación a algunos casos particulares:

Ejemplos 41

1. La elipse E_1 de focos $F_1 = (-3, 0)$ y $F_2 = (3, 0)$ y longitud de semieje mayor igual a 5 tiene su centro en el origen de coordenadas y puede verse en la Figura 4.8, lado izquierdo.
2. La elipse E_2 de focos $F_1 = (-1, 1)$ y $F_2 = (5, 1)$ y longitud de semieje mayor igual a 7 puede verse en la Figura 4.8, centro. El centro de esta elipse es el punto $(2, 1)$.
3. La elipse E_3 de focos $F_1 = (-6, -2)$ y $F_2 = (-6, 8)$ y longitud de semieje mayor igual a 10 puede verse en la Figura 4.8, lado derecho. El centro es el punto $(-6, 3)$ y el semieje mayor es perpendicular al eje y (a diferencia de los dos ejemplos anteriores).

■

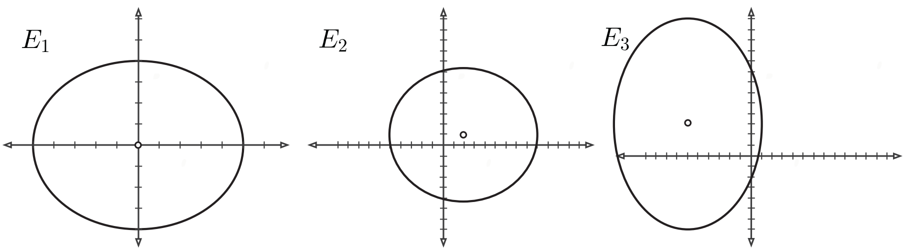

Figura 4.8: Las elipses de los Ejemplos 41.

Observación 13 *Cabe destacar que para definir una elipse, no alcanza con dar los focos. Además, debemos brindar algún otro parámetro (como, por ejemplo, la longitud del semieje mayor). Una manera sencilla de observar esto es considerar el caso $F_1 = F_2$ (en el que la elipse es realmente una circunferencia). En ese caso, saber los focos no determina la circunferencia: debemos especificar su radio.*

¿Cómo podemos hallar los elementos de la elipse a partir de sus focos y semieje mayor? Veamos cómo encontrar B_1, B_2, y por ende b, a partir de F_1, F_2 y a. Observermos la Figura 4.7. Como B_1 es un punto de la elipse entonces $d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a$. Pero, como $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2)$, se cumple que $2d(B_1, F_1) = 2a$; es decir, $d(B_1, F_1) = a$. Además, como el triángulo de vértices O,B_1 y F_1 es rectángulo, el Teorema de Pitágoras asegura que:

$$d(B_1, F_1)^2 = d(B_1, O)^2 + d(O, F_1)^2$$

Es decir, $a^2 = b^2 + c^2$. Concluimos que a es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos de longitud b y c. De esta igualdad podemos entonces calcular el valor de b. Entonces, B_1, B_2 serán los puntos que se encuentran sobre la recta perpendicular a la recta que contiene a F_1 y F_2 que están a distancia b del centro de la elipse (el punto medio entre F_1 y F_2).

Experimento 24

1. Vuelvan a ver los Ejemplos 41 e interpreten cómo fueron dibujadas las elipses E_1, E_2 y E_3, a partir de los focos y longitud del semieje mayor.
2. Supongan que les brindan como dato el centro de la elipse y la longitud de los semiejes mayor y menor. Hallen la ubicación de los focos.

■

4.3.3 Excentricidad de una elipse

Vimos en el párrafo anterior que $a^2 = b^2 + c^2$. En particular, tengamos en cuenta que $a > c$; por lo que $\frac{c}{a} < 1$. Este cociente tiene un nombre.

Definición 40 El cociente $\frac{c}{a}$ se denomina la *excentricidad* de la elipse. Se nota $e = \frac{c}{a}$.

Observemos que *la excentricidad de la elipse siempre es un número menor a* 1. ¿Qué nos dice la excentricidad de la elipse? Recordemos que c es la distancia de los focos al origen y a la longitud del semieje mayor (es decir, la distancia del punto donde la elipse corta al eje x al origen). Cuanto más cerca estén los focos de este punto de intersección más parecidos serán c y a y, por lo tanto, la excentricidad será más cercana a 1. Como resultado la elipse será más "chata" o "aplastada". Mientras que más lejos estén estas magnitudes, la excentricidad será más pequeña (acercándose a 0) y la elipse será más "redondeada". La situación extrema es, por supuesto, cuando $c = 0$, en cuyo caso los focos están *en* el origen, por lo cual la elipse es en realidad una circunferencia. La excentricidad mide entonces qué tan lejos está la elipse de ser una circunferencia, donde los valores más cercanos a 0 indican que es muy parecida, y los valores cercanos a 1 que no (Figura 4.9).

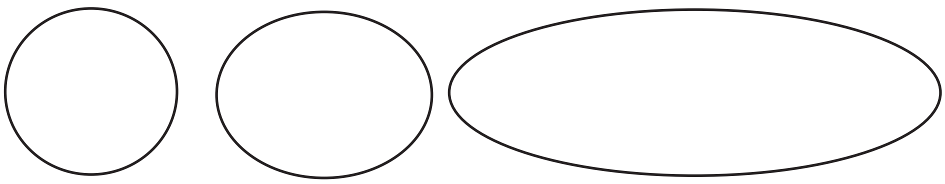

Figura 4.9: La excentricidad de la elipse.

■ **Ejemplos 42** Hallemos las excentricidades de las elipses del Ejemplo 41.

1. Para la elipse E_1 teníamos $a = 5$ y $c = d(F_1, O) = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$. La excentricidad de esta elipse es, entonces: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.
2. Para E_2, teníamos que el centro era $(2, 1)$, $a = 7$ y
$$c = d((2,1),(-1,1)) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-1)^2} = 3$$
Por lo tanto, la excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{7}$.

3. En E_3, la elipse tiene como centro al punto $(-6,3)$, $a=10$ y $c=d((-6,3),(-6,-2))=\sqrt{(-6-(-6))^2+(3-(-2))^2}=$ 5. La excentricidad en este caso es $e=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

¿Cuál de estas elipses es más achatada? ¿Cuál más redondeada? ■

Observación 14 *Recordando la observación de la página 103, vemos que el Experimento 24 establece que una elipse también queda determinada por las longitudes de los semiejes, siempre y cuando especifiquemos el punto medio entre ambos focos.*

■ **Ejemplos 43** Vamos a hallar las ecuaciones canónicas de las elipses del Ejemplo 41.

1. Según la fórmula hallada en el párrafo anterior, podemos construirnos la ecuación de una elipse si conocemos las longitudes de sus semiejes mayor y menor. En el caso de la elipse E_1, ya sabemos que $a=5$, por lo que solo nos resta hallar b. Pero vimos que siempre vale $a^2=b^2+c^2$, donde c es la distancia de los focos al centro de la elipse. En este caso, $c=3$; por lo tanto, $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=25-9=16$. Luego, concluimos que la ecuación canónica de la elipse E_1 es $1=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$. De todas formas, mostraremos cómo pueden obtenerse.
2. En el caso de E_2, tenemos que $a=7$ y $c=3$, por lo que $b^2=a^2-c^2=40$. Aquí tenemos otro centro: el $(2,1)$. Por lo tanto, la ecuación canónica de E_2 es:
$1=\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}$.
3. Finalmente, para E_3 se tiene $a=10$ y $c=4$, por lo que $b^2=a^2-c^2=84$. La ecuación es: $1=\frac{(x+6)^2}{10}+\frac{(y-3)^2}{84}$.

■

Otra manera de representar una elipse por medio de ecuaciones es lo que se conoce como *ecuación general de la elipse*. Esta tiene la forma $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma x+\delta y+\epsilon=0$, donde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$. Aquí, los coeficientes no guardan relación directa con los elementos de la elipse (como sí sucede en el caso de la ecuación canónica). Para hallar la ecuación general a partir de la ecuación canónica solo debemos desarrollar los términos que aparecen elevados al cuadrado y "pasar" todos los términos de un lado de la igualdad. Por ejemplo, consideremos la elipse de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}=1$. Al desarrollar, tenemos:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}= \\ &= \frac{x^2-4x+4}{49}+\frac{y^2-2y+1}{40}= \\ &= \frac{40x^2-160x+49y^2-98y+209}{1960}\end{aligned}$$

Al pasar, el 1960, multiplicando al otro lado de la igualdad, y luego ese mismo número restando nuevamente, obtenemos la ecuación general:

$$40x^2-160x+49y^2-98y+209-1960=0$$

El pasaje de la ecuación general a la canónica es un tanto más laborioso. Antes de hacer un ejemplo, comentemos el procedimiento que utilizaremos: se llama "completar cuadrados" y es el procedimiento inverso a desarrollar el cuadrado de la suma de dos términos. Si tenemos una expresión de la forma x^2+4x+4, es equivalente a $(x+2)^2$. Pero si tenemos la expresión x^2+4x, no podemos hacer lo mismo (ya que nos falta el término 4 sumado para poder escribir la igualdad con el cuadrado de una suma). En estos casos, haremos lo siguiente sumamos el 4 que necesitamos para poder armar el cuadrado de una suma y luego le restamos el mismo 4 para no cambiar la expresión (pues equivaldría a sumar 0). Con el 4 que agregamos, podemos ahora armar el cuadrado de $x+2$ y nos queda un

-4 suelto afuera. Es decir, escribiremos:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + (4 - 4) = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x + 2)^2 - 4$$

Este procedimiento es lo que se conoce como "completar cuadrados". Veamos ahora con un ejemplo cómo calcular la ecuación canónica a partir de la ecuación general. Consideremos la elipse de ecuación general $64x^2 + 100y^2 - 256x - 200y - 1244 = 0$. Como para la ecuación canónica vamos a buscar expresiones de la forma $(x - \alpha)^2$ e $(y - \beta)^2$, entonces completaremos cuadrados entre las x, por un lado, y las y, por el otro. Además, queremos que estas variables aparezcan con coeficiente 1. Por lo tanto, reescribimos la ecuación general de la elipse de la siguiente manera:

$$64(x^2 - 4x) + 100(y^2 - 2y) = 1244$$

Aquí agrupamos las x, por un lado, y las y, por otro lado. También sacamos factor común en cada grupo para dejar que los coeficientes de las variables x e y sean 1, y pasamos el término independiente 1244 hacia el otro lado de la igualdad (para que la fórmula se asemeje a la ecuación canónica de la elipse). Ahora, podemos completar cuadrados dentro de cada paréntesis:

- $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$
- $y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y - 1)^2 - 1$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1244 &= 64(x^2 - 4x) + 100(y^2 - 2y) = \\ &= 64((x - 2)^2 - 4) + 100((y - 1)^2 - 1) = \\ &= 64(x - 2)^2 - 256 + 100(y - 1)^2 - 100 \end{aligned}$$

De aquí, despejamos:

$$\begin{aligned} & 64(x - 2)^2 + 100(y - 1)^2 = 1600 \\ \Rightarrow\ & \frac{64(x - 2)^2 + 100(y - 1)^2}{1600} = 1 \\ \Rightarrow\ & \frac{64(x - 2)^2}{1600} + \frac{100(y - 1)^2}{1600} = 1 \\ \Rightarrow\ & \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación canónica de la elipse.

¿Qué hicimos en el apartado 4.3?

- Estudiamos a la elipse como lugar geométrico de puntos. Es decir, como el conjunto de puntos para los que la suma de las distancias a los focos de la elipse es constante.
- Definimos los semiejes mayor y menor de la elipse, y vimos que la constante antes citada es dos veces la longitud del semieje mayor.
- Definimos la excentricidad de la elipse.
- Introducimos la ecuación canónica y la ecuación general de una elipse.

4.4 La hipérbola

La hipérbola es la única cónica que no es *conexa*; ya que consta de dos ramas desconectadas. En este apartado la analizaremos en detalle.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la hipérbola como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las hipérbolas: focos, semiejes, excentricidad, asíntotas y ecuación canónica.

4.4.1 La hipérbola como lugar geométrico

Los elementos asociados a una hipérbola son los mismos que los asociados a una elipse (semiejes mayor y menor, focos, excentricidad). En particular, la hipérbola también se define a partir de dos focos.

Pero antes de entrar en esos detalles analicemos la siguiente situación: busquemos la ecuación que describa los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos $F_1 = (5, 0)$ y $F_2 = (-5, 0)$, es igual a 6. La idea es muy similar a la que desarrollamos para la elipse. Llamemos $P = (x, y)$, entonces:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 6$$

Al desarrollar la distancia y usar las coordenadas de los puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 6$$

Al despejar y tomar cuadrados en ambos miembros obtenemos:

$$(\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2})^2 = (6 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2$$

Es decir,

$$-20x - 36 = 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$(-10x - 18)^2 = (6\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$100x^2 + 360x + 324 = 36x^2 + 360x + 900 + 36y^2$$

al despejar:

$$64x^2 - 36y^2 = 576$$

Dividimos ambos miembros por 576, y obtenemos:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

4.4.2 La ecuación de la hipérbola

En el apartado anterior, desarrollamos una de las formas de presentar la ecuación de la hipérbola.

En primer lugar, consideremos una hipérbola genérica *centrada del origen*, como en el problema que acabamos de resolver. Podemos representar la situación con el gráfico siguiente:

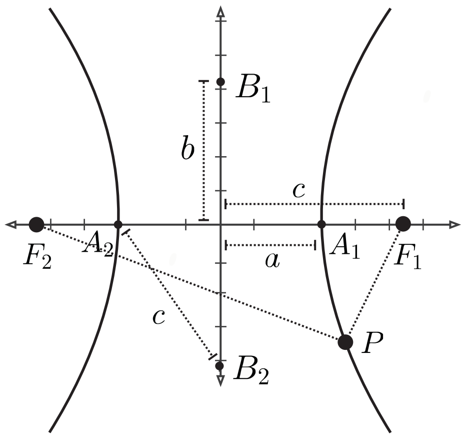

Figura 4.10: La hipérbola de focos F_1 y F_2.

Aquí, los focos F_1 y F_2 están ubicados sobre el eje de las x, equidistantes del origen de coordenadas $O = (0, 0)$, y las magnitudes a y b tienen un sentido menos claro que la elipse. Sin embargo, nos permiten relacionar la fórmula con la ubicación de los focos sobre el eje a partir de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la distancia del centro de la hipérbola a los focos. Entonces, la ecuación canónica de la hipérbola de centro $(0, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observemos como, al igual que en el caso de la elipse, las longitudes de los semiejes aparecen dividiendo precisamente a la variable correspondiente al eje sobre el que descansan. Si ahora la hipérbola tiene centro en un punto $C_0 = (x_0, y_0)$ y sus focos están sobre una recta paralela al eje x, entonces su ecuación es:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Por otro lado, si la hipérbola tiene centro en un punto $C_0 = (x_0, y_0)$ y sus focos están sobre una recta paralela al eje y, entonces su ecuación es:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1.$$

Importante En este libro, solo trabajaremos con hipérbolas cuyos focos se encuentran sobre una recta paralela al eje x o al eje y. ■

Apliquemos estas ecuaciones en algunos casos particulares:

■ **Ejemplos 44**

1. La hipérbola H_1 de focos $F_1 = (-5, 0)$ y $F_2 = (5, 0)$ y longitud de semieje mayor igual a 4 tiene su centro en el origen de coordenadas y puede verse en la Figura 4.11, lado izquierdo. Para esta hipérbola, los focos están sobre una recta paralela al eje x y con centro en el origen, tenemos $a = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$. Por lo tanto, la ecuación canónica de la misma es $1 = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$.
2. La hipérbola H_2 de focos $F_1 = (-3, 1)$ y $F_2 = (7, 1)$ y longitud de semieje mayor igual a 2 puede verse en

la Figura 4.11, centro. El centro de esta hipérbola es el punto $(2,1)$, y también tiene sus focos sobre una recta paralela al eje x. Como además $a = 2$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 2^2 = 21$, entonces la ecuación canónica es $1 = \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{21}$.

3. La hipérbola H_3 de focos $F_1 = (2,-6)$ y $F_2 = (2,4)$ y longitud de semieje mayor igual a 3 puede verse en la Figura 4.11, lado derecho. El centro es el punto $(2,-1)$ y el semieje mayor es perpendicular al eje y (a diferencia de los dos ejemplos anteriores). Como $a = 3$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 9 = 16$ entonces la ecuación canónica de H_3 es $1 = \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16}$.

■

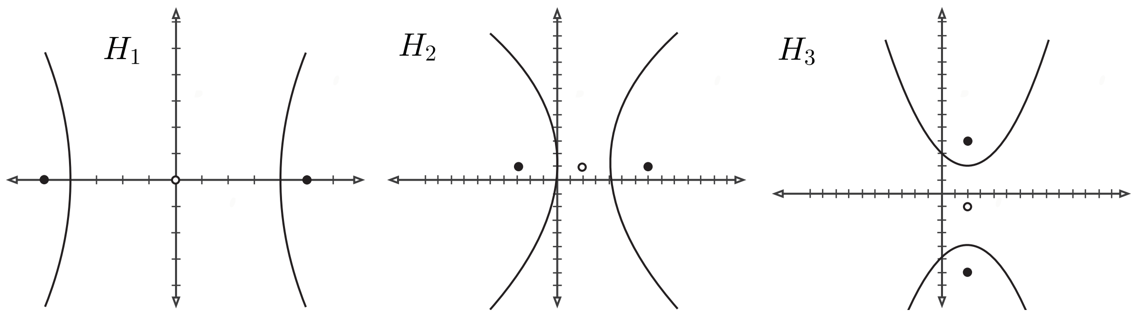

Figura 4.11: Las hipérbolas de los Ejemplos 44.

Al igual que en el caso de la elipse, podemos desarrollar los cuadrados de la ecuación canónica para obtener una expresión de la forma $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \epsilon = 0$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Pero a diferencia de la ecuación general de la elipse, *los signos de los coeficientes α y β serán necesariamente opuestos*. Esto se debe a que en la ecuación canónica de una elipse, uno de los paréntesis tiene signo positivo y el otro negativo. Esta característ́ca es, en particular, lo que nos indica si una ecuación general de la forma $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \epsilon = 0$, corresponde a una elipse o una hipérbola (sólo debemos comparar los signos de los coeficientes que multiplican a x y a y). Por ejemplo, ecuación general de la hipérbola de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ es $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$. Les presentamos un experimento para que, a través del mismo, muestren cómo obtener una ecuación de la otra.

Experimento 25 Utilicen el procedimiento de "completar cuadrados", deriven la ecuación general $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$ para la elipse de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$. ■

Observación 15 *Al igual que en la elipse, para definir una hipérbola no nos alcanza con brindar los focos: debemos dar algún otro parámetro (como longitud de algún semieje).*

4.4.3 La excentricidad de la hipérbola

Como la distancia c de los focos al centro de la hipérbola es mayor que a, entonces el cociente $\frac{c}{a}$ es mayor que 1. Esta es la noción de excentricidad en este caso.

Definición 41 El cociente $\frac{c}{a}$ se denomina la *excentricidad* de la hipérbola. Se nota también $e = \frac{c}{a}$.

Por lo tanto, *la excentricidad de la hipérbola siempre es un número mayor a* 1. ¿Cuál es la interpretación de la excentricidad en este caso? Pues también nos da información sobre la forma de la hipérbola: más "abierta" o más "cerrada". Por ejemplo, si e es muy grande entonces la hipérbola tiene sus curvas más cerradas, mientras que si e es más cercano a 1, tiene sus curvas más abiertas (Figura 4.12).

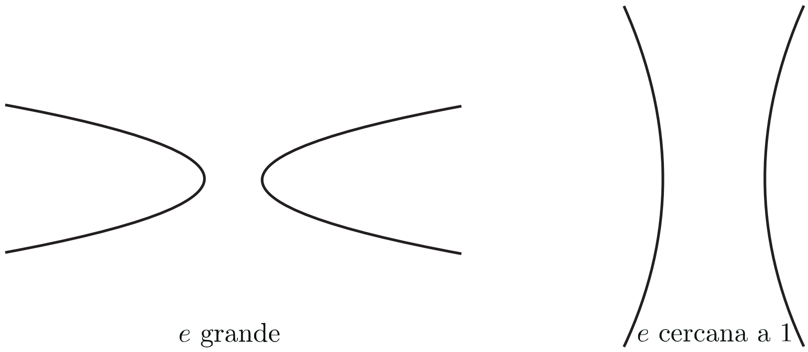

Figura 4.12: La excentricidad de la hipérbola.

Ejemplos 45 Vamos a hallar las excentricidades de las hipérbolas de los Ejemplos 44.

1. Para la hipérbola H_1, teníamos $a = 4$ y $c = d(F_1, O) = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$. La excentricidad de esta hipérbola es, entonces, $e = \frac{5}{4}$.
2. Para H_2, teníamos que el centro era $(2, 1)$, $a = 2$ y
$$c = d((-3, 1), (2, 1)) = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-1)^2} = 5$$
Por lo tanto, la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$.
3. En H_3, la hipérbola tiene como centro al punto $(2, -1)$, $a = 3$ y
$$c = d((2, -6), (2, -1)) = \sqrt{(2-2)^2 + (-6-(-1))^2} = 5$$
La excentricidad en este caso es $e = \frac{5}{3}$.

4.4.4 Asíntotas de la hipérbola

La hipérbolas son las únicas cónicas que tienen *asíntotas*. Recuerden que una asíntota de una curva es una recta a la que la curva se acerca indefinidamente. Ya que no presuponemos que el estudiante tenga conocimiento de la noción de límite, solo mencionaremos que las ramas de una hipérbola de centro (x_0, y_0) y longitud de semiejes a y b se acercan indefinidamente a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0)$ y $y = -\frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0)$, respectivamente (Figura 4.13). Aquí, $\pm\frac{b}{a}$ es la pendiente de la recta y $y_0 - \frac{b}{a}x_0$ es la ordenada al origen de la recta. También podemos representar estas rectas de manera implícita como hicimos en el capítulo 2:

- $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x_0 - y_0\}$
- $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -\frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x_0 - y_0\}$

Estas rectas son las *asíntotas de la hipérbola*.

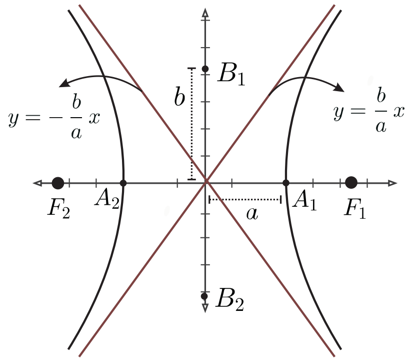

Figura 4.13: Las asíntotas de la hipérbola.

■ **Ejemplos 46** Hallemos las asíntotas de las hipérbolas de los Ejemplos 44.

1. Para H_1, de centro en el origen, teníamos $a = 4$ y $b = 3$. Por lo tanto, las asíntotas de H_1 son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$.
2. H_2 tiene su centro en $(2, 1)$ y $a = 2$ y $b = \sqrt{21}$. Por lo tanto, las asíntotas de H_2 son las rectas $y = \frac{\sqrt{21}}{2}x + (1 - \sqrt{21})$ e $y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x + (1 - \sqrt{21})$. De manera implícita: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{21}}{2}x - y = 1 - \sqrt{21}\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{21}}{2}x - y = 1 - \sqrt{21}\}$.
3. Finalmente, H_3 tiene su centro en $(2, -1)$ y $a = 3$ y $b = 4$. Sus asíntotas son $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{3}x - y = \frac{5}{3}\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{4}{3}x - y = \frac{5}{3}\}$.

■

¿Qué hicimos en el apartado 4.4?

- Estudiamos la hipérbola como lugar geométrico de puntos: es decir, como el conjunto de puntos para los que el módulo de la diferencia de las distancias a los focos de la hipérbola es constante.
- Definimos los semiejes mayor y menor de la hipérbola y vimos que la constante, antes citada, es dos veces la longitud del semieje mayor.
- Definimos la excentricidad de la hipérbola y las asíntotas, y aprendimos a calcularlas.
- Introducimos la ecuación canónica y la ecuación general de una hipérbola.

■

4.5 La parábola

La parábola es seguramente la curva cónica más conocida ya que este tipo de curvas, se estudian extensamente en la escuela secundaria. Por este motivo, solo introduciremos los elementos propios de esta curva que no suelen estudiarse allí.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la parábola como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las parábolas: foco, directriz y ecuación canónica.

■

4.5.1 La parábola como lugar geométrico

A diferencia de las cónicas ya estudiadas, donde la definición como lugar geométrico dependía parcialmente de la ubicación de dos focos, en la parábola depende de una recta L y un punto F no perteneciente a L. Veamos esto en una situación particular. Encontremos el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $F = (0, 2)$ y la recta l cuya ecuación es $y = -2$.

Para esto llamemos $P = (x, y)$ a un punto genérico del lugar geométrico en cuestión. A diferencia de las situaciones desarrolladas para elipse e hipérbola acá tenemos dos fórmulas para distancias: una para distancias entre dos puntos y otra para distancias entre un punto y una recta. Sin embargo, el punto a destacar es que ambas distancias deben ser iguales. En la situación que estamos analizando, la distancia de cualquier punto genérico (x, y) del plano a la recta de ecuación $y = -2$, es la distancia entre los puntos (x, y) y $(x, -2)$. Entonces:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-2))^2}$$

En esta ecuación, del lado izquierdo tenemos la distancia del foco $(0, 2)$ al punto genérico (x, y) y, del lado derecho, la distancia de ese mismo punto genérico al punto más cercano de la recta $y = -2$, que tiene coordenadas $(x, -2)$. Al elevar y desarrollar al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4$$

$$x^2 = 8y$$

Es decir, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $(0, 2)$ y de la recta $y = -2$ satisfacen la ecuación $x^2 = 8y$.

Definición 42 Sea $F \in \mathbb{R}^2$ y sea $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no pase por F. La parábola T asociada a F y L es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan del punto F y de la recta L. Es decir, $T = \{P \in \mathbb{R}^2 \,:\, d(P, F) = d(P, L)\}$.

Recordemos que $d(P, L)$, representa la distancia del punto P a la recta L (concepto que estudiamos en el capítulo 2). El punto F se llama *foco* de la parábola y la recta L, *directriz* de la parábola. El *vértice* de la parábola es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz.

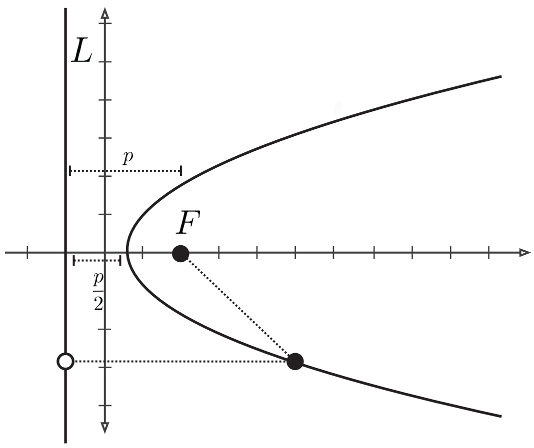

Figura 4.14: La parábola de foco F y directriz L.

Importante Al igual que para las otras cónicas, en este libro solo trabajaremos con parábolas cuya directriz sea paralela al eje x o al eje y. ■

Observación 16 *Como en el caso de la hipérbola, las parábolas tienen un* eje de simetría*, que consiste en la recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y el foco.*

4.5.2 Ecuación canónica de la parábola

La ecuación que conocemos de la parábola (con directriz horizontal) $y = ax^2 + bx + c$, se puede despejar para obtener:

$$ax^2 + bx - y + c = 0$$

y que se la conoce como la *ecuación general de la parábola*. Ya que esta ecuación es familiar, nos concentraremos en la ecuación canónica. Representemos, entonces, una parábola genérica asociada a F y L, de manera que L sea paralelo al eje y, que el foco esté sobre el semieje positivo de las x y que el vértice de la parábola sea el origen de coordenadas (Figura 4.14). Sea p la distancia del punto F a la recta L, de modo que F resulta ser el punto $(\frac{p}{2}, 0)$. Si $P = (x, y)$ es un punto de la parábola, entonces, debemos tener que $d(P, F) = d(P, L)$. Pero,

$$d(P,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \text{ y } d(P,d) = x + \frac{p}{2},$$

de donde:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado obtenemos:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2,$$

de donde:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

es decir;

$$x^2 + y^2 - x^2 = px + \frac{p^2}{4} + px - \frac{p^2}{4}.$$

Entonces, encontramos la ecuación $y^2 = 2px$ que se la conoce como *la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen*. Tengamos en cuenta que el parámetro p, que es la distancia entre el foco y la directriz, es el que lleva la propiedad definitoria de las características de la parábola. También, es posible observar, que podemos reescribir esta ecuación canónica como $x = \frac{1}{2p}y^2$, cuya forma es la misma de la ecuación que conocemos de la escuela secundaria, salvo el hecho que tiene intercambiadas las variables x e y (pues estamos considerando una parábola “acostada”).

Esta ecuación canónica con vértice en el origen corresponde entonces a una parábola con la directriz paralela al eje y y foco perteneciente al semieje positivo de las x. Las ecuaciones canónicas con vértice en el origen para casos más generales de directriz y foco son las siguientes:

- Si el foco esta a la “derecha” de la directriz (paralela al eje y) entonces la ecuación es $y^2 = 2px$.
- Si el foco esta a la “izquierda” de la directriz (paralela al eje y) entonces la ecuación es $y^2 = -2px$.
- Si el foco esta “arriba” de la directriz (paralela al eje x) entonces la ecuación es $x^2 = 2py$.
- Si el foco esta “abajo” de la directriz (paralela al eje x) entonces la ecuación es $x^2 = -2py$.

Observación 17 *La variable que aparece elevada al cuadrado es la que nos dice a qué eje es paralela la directriz.*

También, al igual que el caso de la circunferencia, la elipse o la hipérbola, si el vértice de la parábola no está en el origen de coordenadas, sino que está en el vértice (x_0, y_0), entonces la ecuación canónica es la misma que la ecuación para parábolas con vértice en el origen pero reemplazando x por $x - x_0$ e y por $y - y_0$, respectivamente. Por ejemplo, la ecuación canónica de una parábola con vértice (x_0, y_0), directriz paralela al eje x y foco en el semieje positivo de las y es:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Cabe destacar que, de esta ecuación, deducimos la ecuación general que conocemos de la parábola. En efecto, si desarrollamos esta ecuación obtenemos:

$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 2py - 2py_0$. Al reordenar los términos:,

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \left(\frac{x_0^2}{2p} - y_0\right).$$

Esta ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ mediante las identificaciones $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ y $c = \frac{x_0^2}{2p} - y_0$. Observemos que, al igual que las ecuaciones canónicas de la elipse y la hipérbola, la ecuación canónica de una parábola contiene la información de todos sus elementos. En efecto, aparecen las coordenadas del vértice (x_0, y_0) y el valor p nos permite deducir la ubicación del foco y la directriz. Por ejemplo, si la ecuación es $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, entonces sabemos que la directriz es paralela al eje x, por lo que el foco debe ser el punto $(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$ y la directriz debe ser la recta de ecuación $x = x_0 - \frac{p}{2}$ (miren la Figura 4.14).

Experimento 26 De manera análoga a como fue hecho en el apartado busquen los focos y la directriz a partir de las otras posibles ecuaciones canónicas de las parábolas:

- $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$.
- $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.
- $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

■

¿Cómo hacemos para obtener la ecuación canónica de una parábola? Lo mostramos en varios ejemplos. En primer lugar, supongamos que tenemos la parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$ y hallamos la ecuación canónica. Nuevamente, la idea es "completar cuadrados".

$$\begin{aligned} & y = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 6 \\ \Rightarrow \quad & y - 6 = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x \\ \Rightarrow \quad & y - 6 = \tfrac{1}{4}(x^2 - 8x) \end{aligned}$$

Completamos cuadrados dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} & y - 6 = \tfrac{1}{4}[(x^2 - 8x + 16) - 16] \\ \Rightarrow \quad & y - 6 = \tfrac{1}{4}[(x - 4)^2 - 16] \\ \Rightarrow \quad & y - 6 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 - 4 \\ \Rightarrow \quad & y - 6 + 4 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 \\ \Rightarrow \quad & y - 2 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 \\ \Rightarrow \quad & 4(y - 2) = (x - 4)^2 \end{aligned}$$

Hemos arribado, entonces, a la expresión canónica de la parábola. De aquí, inmediatamente vemos que el vértice es el punto $(4, 2)$. Sabemos que, como el valor 4 es el que multiplica a la expresión $(y - 2)$ (que no está elevada al cuadrado), entonces $2p = 4$. Luego, $p = 2$ y, por ende, $\frac{p}{2} = 1$ es la distancia entre el foco y el vértice y entre el vértice y la directriz. Como la variable que está elevada al cuadrado es la x entonces, sabemos que la directriz será paralela al eje x. Por lo tanto, para hallar las coordenadas del foco simplemente hacemos $F = (4, 2 + \frac{p}{2}) = (4, 2 + 1) = (4, 3)$ y la ecuación de la directriz nos queda, $y = 2 - \frac{p}{2} = 2 - 1 = 1$.

Ahora bien, supongamos que queremos hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es $F = (-6, -4)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $x = -2$. Sabemos que el vértice se encuentra en la recta perpendicular a la directriz que contiene al foco, a igual distancia del foco que de la directriz. Las rectas perpendiculares a $x = -2$ son las de la forma $y = \lambda$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Como queremos que pase por F entonces debe ser $y = -4$. Esta recta interseca a la directriz en $(-2, -4)$, por lo que el vértice es el punto medio entre $(-2, 4)$ y F; es decir, el vértice de la parábola es $(-4, -4)$. Para hallar p, utilizamos que la distancia del foco (o la directriz) al vértice es $\frac{p}{2}$. Como $d((-4, -4), (-6, -4)) = 2$ entonces, $p = 4$. Por lo tanto, $2p = 8$ y, como el foco está en el semieje negativo de las x, la ecuación canónica de esta parábola es $(y + 4)^2 = -8(x + 4)$.

Observación 18 *El pasaje de ecuación general a ecuación canónica, y viceversa, se realiza de idéntica manera al procedimiento desarrollado para circunferencias, elipses e hipérbolas.*

4.5.3 Excentricidad de la parábola (y del resto de las cónicas)

Anteriormente las excentricidades que medimos eran la razón entre la longitud de los semiejes y la distancia de los focos al origen (para una curva centrada en el origen de coordenadas). Por un lado, consideramos como el semieje de la parábola al segmento perpendicular a la directriz, que une la directriz con el origen de coordenadas (Figura 4.14). Ya vimos que la longitud de este segmento es $\frac{p}{2}$ (donde p es la distancia de la directriz al foco). Por otro lado, la distancia del foco al origen también es $\frac{p}{2}$. Por lo tanto, la excentricidad de la parábola es 1, cualquiera sea la parábola. Ahora podemos precisar un poco mejor qué mide realmente la excentricidad. Observen la Figura 4.15. Allí se muestra como va cambiando la forma de la curva a medida que aumenta la excentricidad. *La excentricidad mide como es la* curvatura *de la curva cónica, en relación a la de una circunferencia*. La única cónica con excentricidad 0 es la misma circunferencia, lo cual nos indica que es la curvatura “perfecta” (la curva siempre “va doblando” el mismo ángulo en cada paso cuando la recorremos). La excentricidad también nos permite clasificar las cónicas. En efecto, si es 0 entonces es una circunferencia. Si está estrictamente entre 0 y 1, entonces la curva es necesariamente una elipse. Si es exactamente 1 entonces es una parábola; y si es mayor estricto que 1, es una hipérbola.

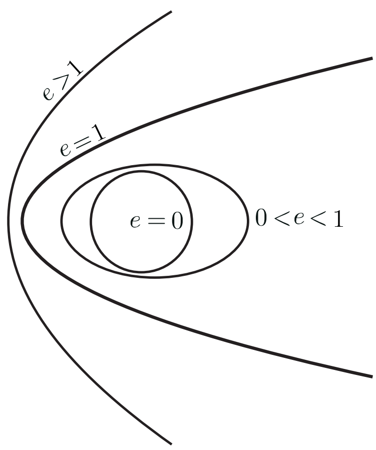

Figura 4.15: El cambio de las cónicas a medida que crece la excentricidad.

¿Qué hicimos en el apartado 4.5?

- Estudiamos a la parábola como lugar geométrico de puntos: o sea, como el conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto (el foco) y una recta (la directriz) dados.
- Introducimos las ecuaciones canónicas de una parábola general.