Capítulo 4

Inducción

§4.1. El principio de inducción

4.1.1. Decimos que un subconjunto S de $\mathbb{N}$ es ***inductivo*** si tiene las siguientes dos propiedades:

- $1 \in S$, y
- para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$k \in S \implies k+1 \in S.$$

Es evidente que el conjunto $\mathbb{N}$ es inductivo y una propiedad fundamental del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es que, de hecho, este es el único ejemplo:

Proposición. *Si S es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$, entonces $S = \mathbb{N}$.* □

Llamamos a este resultado el *principio de inducción*. Veamos por qué es cierto. Sea S un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ y supongamos que S no es igual a $\mathbb{N}$, de manera que la diferencia $T := \mathbb{N} \setminus S$ es un conjunto no vacío. Ahora bien, como T es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, posee un menor elemento m: es decir, existe un elemento $m \in T$ tal que para todo $n \in T$ se tiene que $m \leq n$. Como 1 pertenece a S, es $m \neq 1$ y, en consecuencia, el número $m-1$ pertenece a $\mathbb{N}$. Más aún, como $m-1$ es estrictamente menor que m, la forma en que elegimos a m implica que $m-1 \notin T$, es decir, que $m-1 \in S$. Usando esto y el hecho de que S es inductivo, entonces, podemos deducir que $m \in S$: esto es absurdo, ya que m pertenece a T. Esta contradicción provino de suponer que S es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ y todo esto prueba, en consecuencia, que $S = \mathbb{N}$, como queremos.

Este argumento es convincente pero adolece de un problema: depende de que sepamos que la afirmación

todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ *posee un menor elemento*

es cierta y — más allá de que es intuitivamente plausible — no sabemos que esto es así. El problema es que para poder establecer formalmente el principio de inducción necesitamos hacer antes un tratamiento formal de qué es el conjunto $\mathbb{N}$ y de sus propiedades básicas. En estas notas no haremos esto. Usaremos, de todas formas, con total libertad ese principio.

4.1.2. La razón por la que estamos interesados en el principio de inducción es que nos da un mecanismo muy efectivo para probar que un subconjunto de $\mathbb{N}$ coincide con $\mathbb{N}$. Vamos un ejemplo sencillo de por qué esto es útil.

Supongamos que queremos probar la siguiente afirmación:

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ se tiene que } 2^n + 3^n \leq 5^n. \tag{1}$$

Esto puede hacerse de muchas formas. Una de ellas consiste en considerar el subconjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} : 2^n + 3^n \leq 5^n\}$$

de $\mathbb{N}$ y probar que coincide con $\mathbb{N}$: claramente, esto es lo mismo que probar que la afirmación (1) vale. Para ver que S es igual a $\mathbb{N}$ es suficiente, de acuerdo al principio de inducción, con mostrar que se trata de un conjunto inductivo, es decir, que tiene las dos propiedades de la definición 4.1.1. Así, tenemos que probar que $1 \in S$ y que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$k \in S \implies k + 1 \in S. \tag{2}$$

La primera de estas dos cosas puede verificarse por un cálculo directo: en efecto, basta observar que $2^1 + 3^1 = 5 \leq 5^1$. Veamos la segunda. Para ello, supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $k \in S$, es decir, tal que

$$2^k + 3^k \leq 5^k. \tag{3}$$

Tenemos que

$$2^{k+1} + 3^{k+1} = 2^k \cdot 2 + 3^k \cdot 3$$

y, como $2 \leq 5$ y $3 \leq 5$, esto es

$$\leq 2^k \cdot 5 + 3^k \cdot 5 = (2^k + 3^k) \cdot 5 \tag{4}$$

Ahora bien, estamos suponiendo que k pertenece a S, así que vale la desigualdad (3), y entonces tenemos que el último miembro de la igualdad (4) es

$$\leq 5^k \cdot 5 = 5^{k+1}.$$

Esto nos dice, precisamente, que $k + 1$ pertenece a S. Hemos probado así que vale la segunda condición (2).

4.1.3. Demos otro ejemplo de este procedimiento: probemos que

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ se tiene que } 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5}$$

A la izquierda de la igualdad que aparece en esta afirmación tenemos la suma de los primeros n números naturales, del 1 hasta n. Como hicimos antes, consideramos el subconjunto

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

de $\mathbb{N}$, mostramos que es inductivo y entonces gracias al principio de inducción, podemos concluir que $S = \mathbb{N}$, que es precisamente lo que se afirma en (5).

La verificación de la primera condición de la definición 4.1.1 es, como en el ejemplo anterior, un simple cálculo directo: cuando $n = 1$, la suma de los primeros n números naturales es claramente igual a 1 y, por otro lado, es

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Esto muestra que $1 \in S$.

Probemos ahora que la segunda condición de 4.1.1 también se cumple. Supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $k \in S$, es decir, tal que

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{6}$$

La suma de los primeros $k + 1$ números naturales es

$$1 + \cdots + (k+1) = \underbrace{1 + \cdots + k} + (k+1)$$

Ahora bien, los primeros k sumandos de esta suma son precisamente los primeros k números naturales y estamos suponiendo que vale (6), así que

$$1 + \cdots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

y, observando que $k + 1$ es un factor común en los dos términos del miembro derecho de esta igualdad, podemos reescribirlo:

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Hemos probado que, bajo la hipótesis de que vale (6), se tiene que

$$1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

y esto nos permite concluir que

$$k \in S \implies k + 1 \in S.$$

Esto completa la prueba de que el conjunto S es inductivo y, como dijimos antes, de la afirmación (5).

4.1.4. En estos dos ejemplos el procedimiento que seguimos fue completamente similar. En efecto, en ambos casos tenemos un predicado $P(n)$ que depende de un número natural n y queremos probar que

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ vale } P(n). \tag{7}$$

En el primer ejemplo $P(n)$ es el predicado «$2^n + 3^n \leq 5^n$» mientras que en el segundo es «$1 + \cdots + n = n(n+1)/2$». Consideramos entonces el subconjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ de $\mathbb{N}$ y mostramos que se trata de un subconjunto inductivo, esto es, que $1 \in S$ y que para cada $k \in \mathbb{N}$ vale $k \in S \implies k+1 \in S$. En vista de la definición del conjunto S, esto es lo mismo que mostrar que

- la afirmación $P(1)$ vale, y que
- para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que si la afirmación $P(k)$ vale entonces también vale la afirmación $P(k+1)$.

Hecho esto, el principio de inducción nos permite concluir que $S = \mathbb{N}$, esto es, que vale (7), como queremos. En la próxima sección daremos varios ejemplos más de este procedimiento.

Una demostración hecha de esta forma es llamada una *prueba por inducción*. La parte en que probamos que vale la afirmación $P(1)$ es llamada el *paso inicial* o *caso base* de la inducción, mientras que la prueba de la implicación $P(k) \implies P(k+1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ es llamada el *paso inductivo*. Habitualmente, la prueba del paso inductivo procede de la siguiente forma: elegimos un número natural $k \in \mathbb{N}$ y suponemos que la afirmación $P(k)$ se cumple — esta hipótesis es la *hipótesis inductiva* — y de alguna manera, usando esa hipótesis inductiva, probamos que en ese caso también vale la afirmación $P(k+1)$.

§4.2. Algunos ejemplos de pruebas por inducción

Sumas geométricas

4.2.1. Fijemos un número $a \in \mathbb{R}$ distinto de 1 y mostremos que

$$\textit{para cada } n \in \mathbb{N} \textit{ se tiene que } 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}. \tag{8}$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es la suma de las primeras n potencias de a, desde la 0-ésima, $a^0 = 1$, hasta la $(n-1)$-ésima, a^{n-1}: la llamamos la ***suma geométrica*** de razón a. Para probar (8), para cada n llamamos $P(n)$ a la afirmación

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

y procedemos por inducción.

- Vemos que vale $P(1)$ calculando directamente: si $n = 1$, entonces por un lado es

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = 1$$

y, por otro, $(a^n - 1)/(a - 1) = 1$. Esto establece el caso base de la inducción.

- Veamos ahora el paso inductivo. Sea k un elemento de $\mathbb{N}$ y supongamos que vale $P(k)$, de manera que

$$1 + a + \cdots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1}.$$

Usando esto, podemos ver que

$$\begin{aligned} 1 + a + \cdots + a^k &= \left(1 + a + \cdots + a^{k-1}\right) + a^k = \frac{a^k - 1}{a - 1} + a^k \\ &= \frac{a^k - 1 + a^k(a-1)}{a - 1} = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}, \end{aligned}$$

y esto significa, precisamente, que vale la afirmación $P(k+1)$.

La inducción queda así completa y prueba, como queríamos, la afirmación (8).

La suma de los cuadrados de los primeros números naturales

4.2.2. Probemos que

$$\textit{para todo } n \textit{ de } \mathbb{N} \textit{ vale que } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$ llamemos $P(n)$ a la afirmación de que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

y probemos que $P(n)$ vale cualquiera sea n por inducción.

- Cuando $n = 1$ el lado izquierdo de la igualdad de la afirmación $P(1)$ es $1^2 = 1$, mientras que el derecho es

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1,$$

así que esa igualdad vale.

- Sea ahora k un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y supongamos que la afirmación $P(k)$ vale, de manera que

  $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

  Tenemos entonces que

  $$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}, \end{aligned}$$

  y esto nos dice que vale la afirmación $P(k+1)$.

La suma alternada de los cuadrados de los primeros números naturales

4.2.3. Probemos que

$$\textit{para todo } n \textit{ de } \mathbb{N} \textit{ vale que } \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}. \tag{9}$$

Para cada elemento n de $\mathbb{N}$ llamemos $P(n)$ a la afirmación

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

y procedamos por inducción.

- La afirmación $P(1)$ vale, ya que

  $$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i i^2 = -1$$

  y

  $$\frac{(-1)^1 1(1+1)}{2} = -1.$$

- Supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y que vale a afirmación $P(k)$, de manera que

  $$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^k k(k+1)}{2}.$$

  Separando el último término de la suma, tenemos que

  $$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i i^2 = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i i^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2$$

y entonces, usando la hipótesis inductiva, vemos que esto es

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^k k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= (-1)^k \left(\frac{k}{2} - (k+1)\right)(k+1) \\
&= (-1)^k \frac{k-2(k+1)}{2}(k+1) \\
&= (-1)^k \frac{-(k+2)}{2}(k+1) \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que, bajo la hipótesis inductiva, vale la afirmación $P(k+1)$.

De esto podemos concluir, gracias al principio de inducción, que vale la igualdad (9) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una suma de fracciones

4.2.4. Queremos probar que

para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

De manera similar a lo que hicimos antes, para cada elemento n de $\mathbb{N}$ llamamos $P(n)$ a la afirmación de que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

y probamos por inducción que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Calculando, vemos que cuando $n = 1$ es

  $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1},$$

  así que la afirmación $P(1)$ vale.

- Sea ahora k un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y supongamos que vale la afirmación $P(k)$, es decir, que

  $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}. \tag{10}$$

Se tiene entonces que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

y, en vista de la hipótesis inductiva (10), esto es

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Vemos así que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

y, por lo tanto, que vale la afirmación $P(k+1)$.

Esto prueba lo que queremos, gracias al principio de inducción.

El producto de los primeros números impares

4.2.5. Mostremos que

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ se tiene que } \prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} \tag{11}$$

haciendo inducción con respecto a n. Para cada elemento n de $\mathbb{N}$ sea $P(n)$ la afirmación de que

$$\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$$

- Si $n = 1$, entonces

  $$\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n},$$

  así que vale la afirmación $P(1)$.

- Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que vale la afirmación $P(k)$, es decir, que

  $$\prod_{i=1}^{k}(2i-1) = \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}.$$

Separando el último factor del producto, vemos que

$$\prod_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \prod_{i=1}^{k}(2i-1)\cdot(2(k+1)-1)$$

y, usando ahora la hipótesis inductiva, que esto es

$$\begin{aligned}&= \frac{(2k)!}{k!\cdot 2^k}\cdot(2(k+1)-1)\\ &= \frac{(2k)!}{k!\cdot 2^k}(2k+1).\end{aligned}$$

Si multiplicamos al último miembro de esta cadena de igualdades por $1 = \frac{2k+2}{2k+2}$, vemos finalmente que

$$\prod_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \frac{(2k)!}{k!\cdot 2^k}(2k+1)\frac{2k+2}{2k+2} = \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!\cdot 2^{k+1}},$$

es decir, que vale la afirmación $P(k+1)$.

Esto completa la inducción y, por lo tanto, la prueba de (11).

Una sucesión de enteros divisibles por 5

4.2.6. Probemos que

para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $8^n - 3^n$ es divisible por 5. (12)

Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos $P(n)$ a la afirmación

$8^n - 3^n$ *es divisible por* 5

y procedemos por inducción.

- Como $8^1 - 3^1 = 8 - 3 = 5$, y esto es evidentemente divisible por 5, es claro que la afirmación $P(1)$ vale: esto establece el caso base.
- Sea, por otro lado, k un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y supongamos que la afirmación $P(k)$ vale, de manera que 5 divide a $8^k - 3^k$, esto es, que existe un número $r \in \mathbb{Z}$ tal que $8^k - 3^k = 5r$. Entonces

$$\begin{aligned}8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8^k\cdot 8 - 8^k\cdot 3 + 8^k\cdot 3 - 3^k\cdot 3\\ &= 8^k\cdot(8-3) + (8^k - 3^k)\cdot 3\end{aligned}$$

y, de acuerdo a la hipótesis inductiva, esto es

$$\begin{aligned}&= 8^k\cdot 5 + 5r\cdot 3\\ &= (8^k + 3r)\cdot 5.\end{aligned}$$

Vemos así $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es divisible por 5, esto es, que vale la afirmación $P(k+1)$.

Esto completa la inducción y, por lo tanto, la prueba de (12).

La cardinalidad del conjunto de partes de un conjunto finito

4.2.7. Mostremos que

si $n \in \mathbb{N}$ y A es un conjunto finito de n elementos, entonces el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos. (13)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P(n)$ la afirmación

si A es un conjunto finito de n elementos, entonces $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos

y procedamos por inducción con respecto a n.

- Sea A un conjunto que tiene 1 elemento y sea a ese elemento, de manera que $A = \{a\}$. Es claro que $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ y, como $A \neq \varnothing$, que $\mathscr{P}(A)$ tiene exactamente dos elementos. Como $2^1 = 2$, esto nos dice que la afirmación $P(1)$ vale.
- Sea ahora k un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y supongamos que vale la afirmación $P(k)$. Sea A un conjunto finito con $k+1$ elementos y sean $a_1, \ldots, a_{k+1}$ esos $k+1$ elementos listados en algún orden y sin repeticiones. Un subconjunto de A puede contener a a_{k+1} o no, y exactamente una de estas opciones ocurre: esto significa que si ponemos

  $$P \coloneqq \{X \in \mathscr{P}(A) : a_{k+1} \notin X\}, \qquad Q \coloneqq \{X \in \mathscr{P}(A) : a_{k+1} \in X\}$$

  entonces tenemos que $\mathscr{P}(A) = P \cup Q$ y $P \cap Q = \varnothing$ y, en consecuencia, que el número de elementos de $\mathscr{P}(A)$ es la suma del número de elementos de P y el número de elementos de Q.

  Los subconjuntos de A que no contienen a a_{k+1} son precisamente los subconjuntos del conjunto $B = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Como B tiene k elementos, la hipótesis de que vale la afirmación $P(k)$ nos dice que $P = \mathscr{P}(B)$ tiene 2^k elementos.

  Es claro que si X es un elemento de P, entonces $X \cup \{a_{k+1}\}$ es un elemento de Q, así que hay una función

  $$f : X \in P \mapsto X \cup \{a_{k+1}\} \in Q.$$

  Esta función es biyectiva. En efecto, si X y X' son dos elementos de P tales que $f(X) = f(X')$, de manera que $X \cup \{a_{k+1}\}) = X \cup \{a_{k+1}\}$, entonces tenemos que

  $$X = (X \cup \{a_{k+1}) \cap B = (X' \cup \{a_{k+1}\}) \cap B = X',$$

  y esto nos dice que la función f es inyectiva. Por otro lado, si Y es un elemento de Q, entonces $Y \cap B$ es un elemento de P tal que $f(Y \cap B) = Y$, así que la función f es sobreyectiva.

La biyectividad de f nos permite concluir que su dominio y codominio tienen el mismo numero de elementos y, por lo tanto, que Q tiene 2^k elementos. Juntando todo, concluimos que $\mathscr{P}(A)$ tiene $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ elementos y, por lo tanto, que vale la afirmación $P(k+1)$.

Queda así completa la prueba de (13)

Veamos en un ejemplo como funciona este argumento. Sea $A = \{1,2,3,4\}$, de manera que $k = 3$, y pongamos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ y $a_4 = 4$. Dividimos a $\mathscr{P}(A)$ en dos partes: P y Q son los subconjuntos de $\mathscr{P}(A)$ de los subconjuntos X de A que no contienen y que contienen, respectivamente, a 4. Así, los elementos de P son

$$\varnothing, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,3\}, \quad \{1,2,3\},$$

y los de Q son

$$\{4\}, \quad \{1,4\}, \quad \{2,4\}, \quad \{3,4\}, \quad \{1,2,4\}, \quad \{1,3,4\}, \quad \{2,3,4\}, \quad \{1,2,3,4\}.$$

Es claro que P es precisamente $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$ y, gracias a la hipótesis inductiva, tiene entonces 2^3 elementos. Por otro lado, la función $X \in P \mapsto X \cup \{4\} \in Q$ es claramente biyectiva y, por lo tanto, Q tienen la misma cantidad de elementos que P, es decir, 2^3.

Subconjuntos de dos elementos de un conjunto finito

4.2.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

un conjunto de n elementos posee $n(n-1)/2$ subconjuntos de dos elementos. (14)

Para verlo, llamemos $P(n)$ a esta afirmación y procedamos por inducción.

- Si un conjunto A tiene un elemento, entonces por supuesto A no posee ningún subconjunto de dos elementos. Como $n(n-1)/2$ es 0 si $n = 1$, esto nos dice que el caso base funciona, es decir, que vale la afirmación $P(1)$.
- Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que vale la afirmación $P(k)$, y sea A un conjunto con $k+1$ elementos. Digamos que los elementos de A, listados en algún orden y sin repeticiones, son $a_1, \dots, a_{k+1}$. Hay dos tipos de subconjuntos de A de dos elementos:
    - En primer lugar, están los subconjuntos de A de dos elementos que *no* contienen a a_{k+1}. Estos son, por supuesto, los subconjuntos de $\{a_1, \dots, a_k\}$ de dos elementos. Como el conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$ tiene k elementos y nuestra hipótesis inductiva es que la afirmación $P(k)$ vale, hay $k(k-1)/2$ subconjuntos de este tipo.
    - En segundo lugar, están los subconjuntos de A de dos elementos que *sí* contienen a a_{k+1}. Éstos son de la forma $\{a_i, a_{k+1}\}$ con i algún elemento de $\{1, \dots, k\}$ y, por lo tanto, hay k de ellos.

Concluimos así que, en total, hay $k(k-1)/2+k$ subconjuntos de A de dos elementos, y este número es igual a $(k+1)k/2$. Esto muestra que vale $P(k+1)$.

Gracias al principio de inducción, podemos concluir con todo esto que vale (14).

La dualidad de De Morgan

4.2.9. Fijemos un conjunto de referencia U y mostremos la siguiente generalización de la Proposición 1.4.16(i):

> *si $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos de U, entonces $(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \dots \cup A_n^c$.*

Procedamos por inducción. En este caso, si $n \in \mathbb{N}$ la afirmación $P(n)$ que nos interesa es

> *si $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos de U, entonces $(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \dots \cup A_n^c$.*

Observemos que la afirmación $P(1)$ es evidente, así que el caso base se satisface automáticamente. Resta entonces probar que vale el paso inductivo. Sea k un elemento de $\mathbb{N}$, supongamos que vale la afirmación $P(k)$, y sean $A_1, \dots, A_{k+1}$ subconjuntos de U. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1})^c &= ((A_1 \cap \dots \cap A_k) \cap A_{k+1})^c \\ &= (A_1 \cap \dots \cap A_k)^c \cup A_{k+1}^c\end{aligned}$$

porque vale la Proposición 1.4.16(i), y esto es, de acuerdo a la hipótesis inductiva, es

$$\begin{aligned}&= (A_1^c \cup \dots \cup A_k^c) \cup A_{k+1}^c \\ &= A_1^c \cup \dots \cup A_k^c \cup A_{k+1}^c.\end{aligned}$$

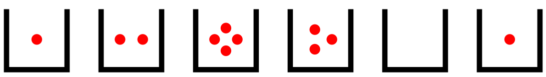
Esto completa la prueba de lo que queremos.

El «principio del palomar»

4.2.10. Mostremos que si n es un elemento de $\mathbb{N}$, entonces vale que

> *si distribuímos m bolas en n cajas y $m > n$, alguna caja necesariamente contiene dos bolas o más.* (15)

Por ejemplo, una posible distribución de 11 bolas en 6 cajas es



y claramente hay cajas que tienen al menos dos bolas.

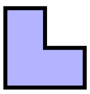
Llamemos $P(n)$ a la afirmación (15) y procedamos por inducción.

- Consideremos primero el caso en que $n = 1$. Es evidente que si tenemos una sola caja y más que una bola, al distribuir las bolas va a haber más de una bola en esa única caja: esto nos dice que la afirmación $P(1)$, el caso base, vale.
- Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que sabemos que vale la afirmación $P(k)$. Supongamos que m es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $m > k + 1$ y que distribuimos m bolas en $k + 1$ cajas, y consideremos tres casos:
    - Si la caja número $k + 1$ está vacía, entonces en realidad lo que hicimos fue distribuir las m bolas en las primeras k cajas, y la hipótesis inductiva nos dice, ya que $m > k$, que alguna de estas contiene al menos dos bolas.
    - Si la caja número $k + 1$ contiene al menos dos bolas, entonces por supuesto alguna de las cajas contiene al menos dos bolas: por ejemplo, la número $k + 1$.
    - Consideremos, finalmente, el caso en que la caja $k + 1$ contiene exactamente una bola. En ese caso, distribuimos las otras $m - 1$ bolas en las primeras k cajas, y como $m - 1 > k$, ya que $m > k + 1$, la hipótesis inductiva nos dice que alguna de esas primeras k cajas contiene al menos dos bolas.

  Así, en cualquier caso podemos garantizar que alguna caja contiene al menos dos bolas y, por lo tanto, que vale la afirmación $P(k + 1)$. Esto completa la inducción.

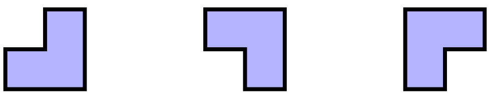
Un embaldozado

4.2.11. Supongamos que tenemos muchas piezas de la siguiente forma:



(16)

y que podemos rotarlas 90°, 180° y 270°, de manera que obtenemos

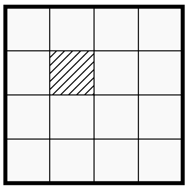


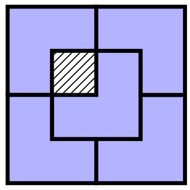
(17)

Afirmamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

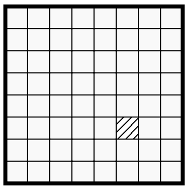
> *si tenemos un tablero de ajedrez de $2^n \times 2^n$ cuadrados al que le falta uno de los cuadrados, podemos taparlo con piezas como la de* (16) *y sus rotaciones* (17) *sin que falte cubrir ninguno de los cuadrados restantes ni haya uno cubierto más de una vez.* (18)

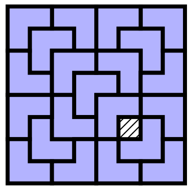
Así, por ejemplo, si $n = 2$ y tenemos un tablero de $2^2 \times 2^2$ cuadrados al que le falta un cuadrado como en el dibujo de la izquierda





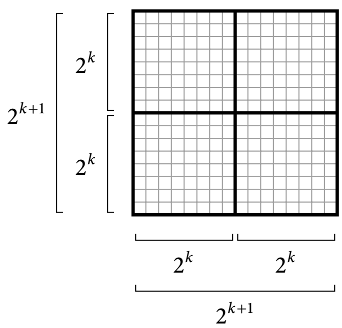
entonces podemos taparlo con fichas como está indicado en la figura derecha. De manera similar, el siguiente dibujo indica como tapar un tablero de $2^3 \times 2^3$ al que le falta el cuadrado gris siguiente:



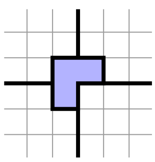


Probemos nuestra afirmación (18) haciendo inducción sobre n. El caso base, en el que $n = 1$, es inmediato: si tenemos un tablero de $2^1 \times 2^1$ al que le falta un cuadrado, el tablero tiene la forma es de una de nuestras piezas, así que ciertamente podemos taparlo de la manera correcta.

Supongamos entonces que $k \in \mathbb{N}$, que la afirmación (18) vale cuando n es k y consideremos un tablero de tamaño $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ al que le falta uno de los casilleros. A ese tablero podemos dividirlo en cuatro tableros de tamaño $2^k \times 2^k$, y el casillero faltante está en uno de los cuatro:



Podemos poner una de nuestras piezas en la posición central, de manera que tenga un casillero en cada uno de los subtableros que no contienen el casillero que falta. Por ejemplo, si el casillero que falta el el tablero está en el subtablero que está en la esquina inferior derecha, ponemos una pieza en el centro orientada de la siguiente manera:



Hecho esto, cada uno de los cuatro subtableros es un tablero de tamaño $2^k \times 2^k$ al que le falta un casillero, y la hipótesis inductiva nos dice que podemos taparlo con nuestras piezas de manera que no haya casilleros cubiertos más de una vez. Si hacemos esto con cada uno de estos subtableros, vemos que hemos cubierto el tablero original de la manera que queríamos. Esto significa que vale la afirmación (18) cuando n es $k+1$ y completa la inducción.

§4.3. Dos variaciones del principio de inducción

Inducción «corrida»

4.3.1. Muchas veces tenemos una afirmación $P(n)$ para cada entero positivo n pero, a diferencia de los ejemplos que vimos antes, queremos mostrar no que vale para todo $n \in \mathbb{N}$ sino que vale a partir de algún entero en adelante. Así, por ejemplo, la afirmación «$n! \geq 3^n$» vale para todo entero $n \geq 7$ (y no vale si $1 \leq n \leq 6$). Para probar cosas como esta podemos usar el principio de inducción bajo la siguiente forma:

Proposición. *Sea n_0 un elemento de $\mathbb{Z}$ y consideremos, para cada entero $n \geq n_0$, una afirmación $P(n)$. Si*

- *vale $P(n_0)$ y*
- *para cada entero $k \geq n_0$ se tiene que*

$$P(k) \implies P(k+1),$$

entonces la afirmación $P(n)$ vale para todo entero $n \geq n_0$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $Q(n)$ la afirmación $P(n+n_0-1)$. Las dos condiciones que aparecen en el enunciado nos dicen que vale $Q(1)$ y que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $Q(k) \implies Q(k+1)$, así que el principio de inducción nos dice que la afirmación $Q(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$: esto significa precisamente que la afirmación $P(n)$ vale para todo entero $n \geq n_0$. □

Demos dos ejemplos de cómo usar este resultado.

4.3.2. Ejemplo. Veamos que, como dijimos antes,

$$\text{para todo } n \geq 7 \text{ se tiene que } n! \geq 3^n \tag{19}$$

usando esta proposición. Llamemos $P(n)$ a la afirmación «$n! \geq 3^n$».

- Calculando, vemos que $7! = 5\,040$ mientras que $3^7 = 2\,187$, así que claramente vale que $3^7 \leq 7!$, es decir, vale la afirmación $P(7)$.
- Por otro lado, supongamos que $k \geq 7$ y que vale la afirmación $P(k)$, de manera que $3^k \leq k!$. Entonces se tiene que

  $$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \leq k! \cdot (k+1)$$

  usando la hipótesis inductiva y el hecho de que $3 \leq k+1$, y esto es

  $$= (k+1)!$$

  Vemos así que para cada entero $k \geq 7$ se tiene que

  $$P(k) \implies P(k+1).$$

Estas dos observaciones y la Proposición 4.3.1 implican que vale (19).

Es de notar que la prueba del segundo punto que hicimos muestra que, de hecho, para todo entero $k \geq 2$ se tiene que $P(k) \implies P(k+1)$: esto no nos permite concluir que $P(r)$ valga para todo $n \geq 2$, ya que $P(2)$ no vale — en efecto, $2! = 2 < 9 = 3^2$.

4.3.3. Ejemplo. Probemos ahora que

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } n \geq 5 \textit{ vale que } 2^n > n^2. \tag{20}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P(n)$ la afirmación «$2^n > n^2$» y procedamos por inducción.

- Cuando $n = 5$ es $2^n = 32$ y $n^2 = 25$, así que ciertamente vale que $2^n > n^2$, esto es, la afirmación $P(5)$ es cierta.
- Supongamos ahora que k es un elemento tal que $k \geq 5$ y vale la afirmación $P(k)$, de manera que $2^k > k^2$. Como $k \geq 5$, es $k^2 \geq 5k$ y $3k - 1 \geq 3 \cdot 5 - 1 = 14$, así que

  $$k^2 - 2k - 1 \geq 5k - 2k - 1 = 3k - 1 \geq 14 > 0$$

  y, por lo tanto, $k^2 > 2k + 1$. Por otro lado, como $2^k > k^2$, tenemos que

  $$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

  y esto nos dice que la afirmación $P(k+1)$ vale.

Esto completa la inducción y prueba (20). Notemos que el segundo punto que hicimos es la prueba de que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$k \geq 5 \wedge P(k) \implies P(k+1).$$

y no que vale

$$P(k) \implies P(k+1).$$

De hecho, esta última implicación es falsa: por ejemplo, $P(1)$ vale, ya que $2^1 = 2 > 1 = 1^2$, pero $P(2)$ no, ya que $2^2 = 4 \not> 2^2$.

4.3.4. La proposición anterior nos dice, informalmente, que podemos arrancar la inducción en cualquier entero. Es importante, de todas formas, arrancarla en *alguno*. Por ejemplo, si para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos $P(n)$ a la afirmación

$$n = n + 1,$$

entonces es cierto que si $k \in \mathbb{Z}$ vale que

$$P(k) \implies P(k+1).$$

En efecto, supongamos que k es un elemento de $\mathbb{Z}$ y que vale $P(k)$, esto es, que $k = k+1$. En ese caso, sumando 1 a ambos lados de esa igualdad vemos inmediatamente que $k+1 = (k+1)+1$, es decir, que vale la afirmación $P(k+1)$. Por supuesto, no existe *ningún* entero $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $P(n_0)$ valga, así que no podemos usar la Proposición 4.3.1 para concluir nada.

Inducción «fuerte»

4.3.5. En todos los ejemplos de pruebas por inducción que llevamos vistos hasta ahora, para probar que una afirmación $P(n)$ vale cualquiera sea el entero positivo n mostramos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$P(k) \implies P(k+1).$$

Al hacer eso, fijamos $k \in \mathbb{N}$, supusimos que vale la afirmación $P(k)$ — esta es la llamada «hipótesis inductiva», como dijimos — y de alguna forma, a partir de eso, concluimos que vale la afirmación $P(k+1)$. La razón por la que esto funciona, en todos los casos que vimos, es que saber que $P(k)$ vale ayuda a probar que $P(k+1)$ vale. Hay situaciones, sin embargo, en que los que no es suficiente saber que vale $P(k)$ para probar $P(k+1)$.

4.3.6. Veamos un ejemplo sencillo de esto. Supongamos que tenemos monedas de 3 y de 7 centavos y tratemos de probar que

> *para cada $n \geq 12$ es posible juntar exactamente n centavos usando estas monedas.*

Así, como $2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 34$, podemos juntar 34 centavos usando 2 monedas de 3 centavos y 4 de 7. Si intentamos proceder por inducción, es natural llamar $P(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, a la afirmación

> *es posible juntar n centavos usando monedas de 3 y de 7 centavos.*

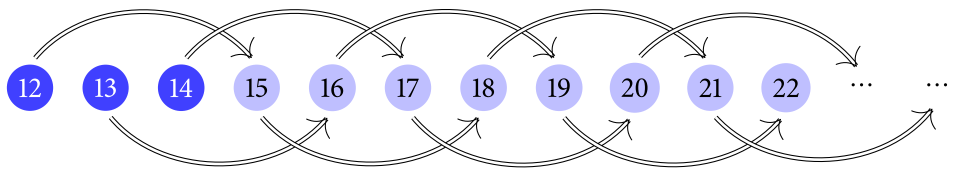
Como $12 = 4 \cdot 3$, con 4 monedas de 3 centavos juntamos 12 centavos: esto significa que vale la afirmación $P(12)$. Tenemos sin embargo un problema cuando intentamos mostrar que vale el paso inductivo: si suponemos que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 12$ y vale $P(k)$, entonces no hay ninguna forma de concluir que vale $P(k+1)$. En efecto, no es difícil convencerse que no es útil saber cómo juntar k centavos usando nuestras monedas si lo que queremos es juntar $k+1$.

De todas formas, podemos hacer la siguiente observación: si k es un entero positivo, entonces vale que

$$P(k-2) \implies P(k+1). \tag{21}$$

En efecto, si suponemos que la afirmación $P(k-2)$ vale, entonces existen a y b en $\mathbb{N}_0$ tales que $k-2 = 3a + 7b$ y, por lo tanto, $k+1 = 3(a+1) + 7b$: esto implica que vale la afirmación $P(k+1)$.

Usando que vale la implicación (21) y el hecho de que $P(12)$ vale, podemos concluir que $P(15)$, $P(18)$, $P(21)$ valen y, más generalmente, que $P(12+3c)$ vale para todo $c \in \mathbb{N}_0$, pero no que $P(16)$ vale, por ejemplo. Sin embargo, basta observar que $13 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 7$ y que $14 = 2 \cdot 7$ para deducir que $P(13)$ y $P(14)$ valen, y esto junto a la implicación (21) sí nos permite concluir que $P(n)$ vale para todo $n \geq 12$. El argumento puede representarse gráficamente de la siguiente manera



4.3.7. Estamos en una situación similar cuando queremos probar el siguiente resultado:

> *todo entero no negativo $n \in \mathbb{N}_0$ puede escribirse como suma de potencias distintas de* 2.

Así, $77 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6$, $530 = 2^1 + 2^4 + 2^9$ y 0 puede escribirse como la suma con cero sumandos y esa suma es una suma de potencias distintas de 2. Como ocurre en el ejemplo anterior, no es obvio que saber que el número $k-1$ puede escribirse como suma de potencias distintas de 2 ayude a escribir a k de esa forma. En este caso, podemos proceder de la siguiente manera.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y elijamos $r \in \mathbb{N}_0$ de manera que 2^r sea la potencia más grande de 2 que no supera a k, es decir, tal que $2^r \leq k$. El número $k - 2^r$ es un elemento de $\mathbb{N}_0$. Supongamos por un momento que vale $P(k-2^r)$, es decir, que $k-2^r$ puede ser escrito como suma de potencias distintas de 2. Todas las potencias de dos que aparecen en esa suma son menores que 2^r: de no ser así, tendríamos que $k - 2^r \geq 2^r$ y, por lo tanto, que $k \geq 2^{r+1}$, lo que contradice la forma en que elegimos el número r. Como

$$k = (k-2^r) + 2^r$$

y sabemos ahora que podemos escribir a $k - 2^r$ como suma de potencias de 2 distintas dos a dos y distintas de 2^r, es claro que k puede ser escrito como suma de potencias de dos distintas dos a dos: vale por lo tanto $P(k)$.

Lo que esto muestra es lo siguiente: para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que

si r es el mayor elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $k \geq 2^r$ y vale $P(k - 2^r)$, entonces vale $P(k)$. (22)

No es difícil convencerse que esto es suficiente para probar que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Así, para ver que vale $P(22)$ observamos que la potencia más grande de 2 menor que 22 es 2^4, así que basta ver que vale $P(22 - 2^4) = P(6)$. Ahora bien, la potencia de 2 más grande que es menor que 6 es 2^2, así que es suficiente verificar que vale $P(6 - 2^2) = P(2)$: como 2 es él mismo una potencia de 2, esto es claro. Este razonamiento puede ilustrarse con el siguiente diagrama:

$$P(0) \rightsquigarrow P(2) \rightsquigarrow P(6) \rightsquigarrow P(22).$$

De manera similar, para ver que vale $P(5785)$ usando (22) hacemos las siguientes reducciones:

$$P(0) \rightsquigarrow P(1) \rightsquigarrow P(9) \rightsquigarrow P(25) \rightsquigarrow P(153) \rightsquigarrow P(665) \rightsquigarrow P(1689) \rightsquigarrow P(5785).$$

En efecto, la potencia de 2 más grande que no supera a 5785 es 2^{12} y $5785 - 2^{12} = 1689$, la potencia de 2 más grande que no supera a 1689 es 2^{10} y $1689 - 1^{10} = 665$, etc. Lo que es importante es que (22) permite reducir la verificación de que la afirmación $P(k)$ vale a la verificación de que $P(l)$ vale para algún número l que es *menor* que k y entonces iterando este proceso un cierto número finito de veces concluimos que para verificar afirmación $P(k)$ es suficiente con verificar $P(0)$.

4.3.8. En general, tenemos el siguiente resultado:

Proposición. *Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y para cada entero $n \geq n_0$ sea $P(n)$ una afirmación. Si*

- *vale la afirmación $P(n_0)$ y*
- *para cada elemento k de $\mathbb{Z}$ tal que $k \geq n_0$ se tiene que*

  si valen las afirmaciones $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$, …, $P(k)$, entonces también vale la afirmación $P(k + 1)$,

entonces la afirmación $P(n)$ vale para todo entero $n \geq n_0$.

Demostración. Para cada entero $n \geq n_0$ sea $Q(n)$ la afirmación

las afirmaciones $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$, …, $P(n)$ valen.

y mostremos por inducción que $Q(n)$ vale cualquiera sea el entero $n \geq n_0$.

- En primer lugar, la afirmación $Q(n_0)$ vale simplemente porque esta afirmación coincide con $P(n_0)$ y que esta vale es la primera de las condiciones del enunciado.

- Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{Z}$ tal que $k \geq n_0$ y que vale $Q(k)$, es decir, que las afirmaciones $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, …, $P(k)$ valen. De acuerdo a la segunda condición del enunciado, esto implica que $P(k+1)$ vale: vemos así que si $Q(k)$ vale, entonces $P(n_0), \dots, P(k+1)$ valen, es decir, que $Q(k+1)$ vale.

Ahora bien, es claro que si $Q(n)$ vale para todo entero n mayor o igual que n_0 en particular $P(n)$ vale para todo entero n mayor o igual que n_0, y esto es precisamente lo que queríamos probar. □

4.3.9. En la sección siguiente daremos ejemplos de uso de esta proposición. Por ahora mostremos como podemos usarla para formalizar los argumentos que hicimos en 4.3.6 y 4.3.7.

- En el primer caso, para cada $n \geq 12$ llamamos $P(n)$ a la afirmación «es posible juntar n centavos con monedas de 3 y de 7 centavos». Que $P(12)$ vale es consecuencia de que $12 = 4 \cdot 3$, así que con 4 monedas de 3 centavos tenemos 12 centavos. Para usar la Proposición 4.3.8, tenemos que probar ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 12$ se tiene que

  si las afirmaciones $P(12)$, $P(13)$, …, $P(k)$ valen, entonces también vale $P(k+1)$.

  Supongamos entonces que k es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $k \geq 12$ y que valen las afirmaciones $P(12), \dots, P(k)$. Se nos presentan ahora tres casos.

  - Si $k = 12$, entonces de que $13 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 7$ es claro que $P(k+1)$ vale.
  - Si $k = 13$, entonces de que $14 = 2 \cdot 7$ es claro que $P(k+1)$ vale.
  - Finalmente, si $k \geq 14$, entonces $k - 2 \geq 12$ y la hipótesis inductiva nos dice que $P(k-2)$ vale, así que hay elementos a y b en $\mathbb{N}_0$ tales que $k - 2 = a \cdot 3 + b \cdot 7$ y, por lo tanto $k + 1 = (a+1) \cdot 3 + b \cdot 7$: vemos así que también en este caso $P(k+1)$ vale.

  Esto prueba el enunciado de 4.3.6.

- Veamos ahora cómo usar la Proposición 4.3.8 para probar el enunciado de 4.3.7. En este caso, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ escribimos $P(n)$ a la afirmación

  n puede escribirse como suma de potencias distintas de 2.

  Es claro que $P(0)$ vale, ya que cero es suma de cero potencias de dos. Para el paso inductivo, supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}_0$ y que valen $P(0), \dots, P(k)$. Sea $r \in \mathbb{N}_0$ el mayor entero no negativo tal que $2^r \leq k+1$. Si $k+1 = 2^r$, entonces claramente $k+1$ puede escribirse como suma de potencias distintas de 2. Si en cambio $k+1 > 2^r$, entonces el número $l = k+1-2^r$ es uno de los elementos de $\{0, \dots, k\}$ y, de acuerdo a la hipótesis, vale $P(l)$, es decir, l puede escribirse como suma de potencias distintas de 2. Más aún, todas las potencias de dos que aparecen en esa suma son menores que 2^r: si no fuese ese el caso, tendríamos que $k+1-2^r \geq 2^r$ y por lo tanto, $k+1 \geq 2^{r+1}$, lo que es imposible en vista de la forma en que elegimos a r. Como

$$k+1 = (k+1-2^r) + 2^r$$

y ahora sabemos que $k+1-2^r$ puede escribirse como suma de potencias distintas de 2 y todas distintas de 2^r, vemos que $k+1$ puede escribirse como suma de potencias distintas de 2, es decir, que vale $P(k+1)$.

Observemos que en ambos casos no estamos usando la hipótesis inductiva completa: en el primer ejemplo, la hipótesis inductiva es que valen $P(12), \ldots, P(k)$, pero sólo usamos el hecho de que $P(k-2)$ vale, mientras que en el segundo ejemplo la hipótesis inductiva es que valen $P(0), \ldots, P(k)$ pero sólo necesitamos que $P(k+1-2^r)$ valga.

4.3.10. Llamamos a un argumento basado en la Proposición 4.3.8 una *inducción fuerte*, porque es una forma de inducción en la que la hipótesis inductiva es mas fuerte que la usual. De todas formas, es importante notar que este principio es simplemente una aplicación del principio usual que usamos antes — esto queda claro en la prueba que dimos de la Proposición 4.3.8.

§4.4. Tres pruebas por «inducción fuerte»

Potencias de dos

4.4.1. Mostremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

existen $r \in \mathbb{N}_0$ y un entero impar u tales que $n = 2^r u$. (23)

Sea $P(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, esta última afirmación.

- Es claro que $P(1)$ vale: como $1 = 2^0 \cdot 1$, basta tomar $r = 0$ y $u = 1$ en (23).
- Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(1), \ldots, P(k)$ valen. Si $k+1$ es impar, entonces podemos tomar $r = 0$ y $u = k+1$ en (23), y $P(k+1)$ vale en ese caso. Si en cambio $k+1$ es par, entonces existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $k+1 = 2k'$. Como $k' = (k+1)/2 < k+1$, la hipótesis inductiva implica que $P(k')$ vale, es decir, que existen $r \in \mathbb{N}_0$ y un entero impar u tales que $k' = 2^r u$. Pero entonces es $k+1 = 2k' = 2^{r+1}u$, y esto muestra que $P(k+1)$ vale también en este caso.

Usando estas dos observaciones y la Proposición 4.3.8 podemos concluir, como queremos, que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Números irreducibles

4.4.2. Decimos que un número $n \in \mathbb{N}$ es ***irreducible*** si no puede ser escrito en la forma $n = ab$ con a y b enteros mayores que 1. Por ejemplo, es fácil ver que 2, 3, 5 y 7 son irreducibles, pero 6 o 9 no lo son: en efecto, $6 = 2 \cdot 3$ y $9 = 3 \cdot 3$.

Queremos probar que

$$\textit{todo elemento de } \mathbb{N} \textit{ es producto de números irreducibles} \tag{24}$$

usando la Proposición 4.3.8 y para ello llamaremos $P(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, a la afirmación «n es igual a un producto de números irreducibles» y probaremos que $P(n)$ vale cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

- La afirmación $P(1)$ vale: en efecto, 1 es igual a un producto con cero factores y — de manera tautológica — cada uno de esos factores es irreducible.
- Sea ahora k un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y supongamos inductivamente que $P(1), \ldots, P(k)$ valen. El número $k + 1$ puede ser o no irreducible. Si es irreducible, entonces ciertamente is igual a un producto de irreducibles — un producto con un único factor, él mismo — así que en ese caso $P(k+1)$ vale. Si, por el contrario, $k + 1$ no es irreducible, entonces existen a y b en $\mathbb{N}$ tales que $k + 1 = ab$ y $a, b \geq 2$. Observemos que

  $$a = \frac{ab}{b} = \frac{k+1}{b} \leq \frac{k+1}{2} < k+1$$

  y, de manera similar, que $b < k + 1$. De acuerdo a la hipótesis inductiva, entonces, las afirmaciones $P(a)$ y $P(b)$ valen: esto significa que a y b son iguales a productos $p_1 \cdots p_u$ y $q_1 \cdots q_v$ de números irreducibles: se sigue de eso, claro, que

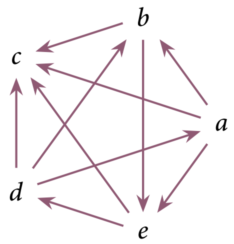
  $$k + 1 = ab = p_1 \cdots p_u q_1 \cdots q_v,$$

  así que también $k + 1$ es igual a un producto de números irreducibles. Vemos así que la afirmación $P(k+1)$ vale.

Estos dos puntos, junto con la Proposición 4.3.8, nos permiten concluir que la afirmación (24) vale.

Caminos

4.4.3. Supongamos que en un país hay n ciudades y que entre cada par de esas ciudades hay una ruta de una sola mano. Por ejemplo, si $n = 5$ y las ciudades se llaman a, b, c, d y e, podríamos describir las rutas usando el siguiente diagrama



Observemos que en este caso hay un camino que recorre todas las ciudades avanzando en la dirección permitida de las rutas, a saber

$$a \to b \to e \to d \to c.$$

No es el único, ya que también está el camino

$$d \to a \to b \to e \to c,$$

pero lo único que nos interesa es que hay alguno.

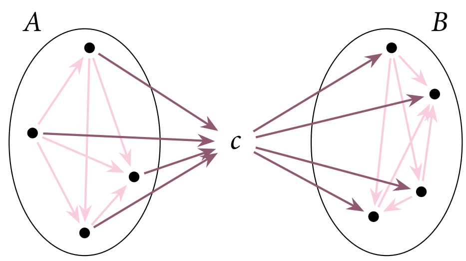
Queremos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene, de hecho, que

> *si hay n ciudades y entre cada dos de ellas hay una ruta de una sola mano, entonces hay al menos un camino que las recorre todas.*

Sea $P(n)$ esta afirmación y procedamos por inducción en n.

- La afirmación $P(1)$ vale: si hay una sola ciudad, entonces hay un camino que recorre todas las ciudades, que consiste en empezar en esa ciudad y no moverse.
- Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que todas las afirmaciones $P(1), \ldots, P(k)$ valen. Supongamos además que tenemos $k + 1$ ciudades conectadas dos a dos con rutas de una sola mano y llamemos c a una de esas ciudades.

  Sea A al conjunto de ciudades a tales que la ruta que une a y c va desde a a c, y B al conjunto de ciudades b tales que la ruta que une b y c va desde c hasta b. Podemos representar esquemáticamente esta situación de la siguiente manera:



Como cada par de ciudades está conectado por una ruta, es claro que $A \cup B \cup \{c\}$ es el conjunto de todas las ciudades; por otro lado, los conjuntos A, B y $\{c\}$ son disjuntos dos a dos. En otras palabras, el conjunto $\{A, B, \{c\}\}$ es una partición del conjunto de nuestras $k+1$ ciudades.

Supongamos ahora por un momento que tanto A como B son conjuntos no vacíos. Si r es el número de elementos de A, entonces claramente $1 \leq r \leq k$ y, de acuerdo a nuestro hipótesis inductiva, la afirmación $P(r)$ vale: esto significa que hay un camino — llamémoslo α — que recorre todas las ciudades de A. De manera similar, si s es el número de elementos de B, entonces $1 \leq s \leq k$ y la hipótesis inductiva nos dice que hay un camino — que podemos llamar β — que recorre todas las ciudades de B. Pero entonces hay un camino que recorre todas las ciudades: consiste en

- seguir primero el camino α,
- tomar luego la ruta que va desde la última ciudad visitada por α hasta la ciudad c (notemos que esto es posible precisamente porque esa última ciudad visitada por α está en el conjunto A y, por lo tanto, la ruta que la une con c va en dirección de c),
- continuar por la ruta que va desde c hasta la primera ciudad visitada por el camino β (y esto es posible porque esta ciudad está en B) y,
- finalmente, recorrer el camino β.

Si alguno de los conjuntos A o B es vacío, podemos hacer algo parecido. Supongamos, por ejemplo, que A es vacío. En este caso, B tiene exactamente k elementos y la hipótesis inductiva nos dice que hay un camino β que recorre esas ciudades. Un camino que recorre todas las ciudades consiste entonces en empezar en c, tomar la ruta que va desde c hasta el la primera ciudad visitada por ese camino β, y luego recorrer el camino β. Por supuesto, si B es vacío podemos proceder de manera similar.

Esto completa la inducción: gracias a la Proposición 4.3.8 podemos concluir que $P(n)$ vale cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

§4.5. Ejercicios

4.5.1. Ejercicio. Pruebe las siguientes afirmaciones por inducción con respecto a n.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ para cada $n \geq 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2-1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$ para cada $n \geq 2$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n-1} (2i+1) = n^2$ para cada $n \geq 1$.

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ para cada $n \geq 1$.

(e) $\displaystyle\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ para cada $n \geq 1$.

4.5.2. Ejercicio. Pruebe que para todo entero positivo n vales las siguientes igualdades:

(a) $1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = n$.

(b) $1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(e) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$.

(f) $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)$.

(g) $1^6 + 2^6 + \cdots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)$.

(h) $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2\left(3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right)$.

(i) $1^8 + 2^8 + \cdots + n^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right)$.

(j) $1^9 + 2^9 + \cdots + n^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2\left(n^2+n-1\right)\left(2n^4+4n^3-n^2-3n+3\right)$.

(k) $1^{10}+2^{10}+\cdots+n^{10} = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)\left(n^2+n-1\right)\left(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5\right)$.

Estas identidades son llamadas *fórmulas de Faulhaber*, por Johann Faulhaber, que encontró la fórmula para la suma de las potencias k-ésimas de los primeros n números naturales para cada k de 1 hasta 17 — esos resultados fueron publicados en 1631. Una fórmula valida para todo entero positivo k fue encontrada por Jacob Bernoulli en 1713, que publicó el resultado en un célebre trabajo llamado *Summae Potestatum*. En la página 125 puede verse una reproducción de la página del *Ars Conjectandi*, el libro póstimo de Bernoulli donde se incluyen estos resultados.

La primera prueba completa de que la fórmula dada por Bernoulli es correcta, sin embargo, fue dada recién en 1834 — ¡más de un siglo después! — por Carl Gustav Jacob Jacobi en [Jac1834]. La dificultad en hacer esto está en lograr describir los coeficientes de los polynomios de Faulhaber: la respuesta final es en términos de la sucesión de los llamados ***números de Bernoulli***,

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}, \dots$$

Una discusión de la historia de este problema puede encontrarse en el artículo [Knu1993] de Donald Knuth.

4.5.3. Ejercicio. Muestre que

(*a*) $2^n > n$ si $n \geq 1$;

(*b*) $2^n \geq n^2$ si $n \geq 4$;

(*c*) $n! > 2^n$ si $n \geq 4$;

(*d*) $(1-x)^n \geq 1 - nx$ si $n \geq 0$ y $x \in (0,1)$;

(*e*) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ si $n \geq 0$ y $x > 0$.

4.5.4. Ejercicio. Pruebe por inducción los siguientes enunciados:

(*a*) El producto de n números enteros impares es impar.

(*b*) Si $n \in \mathbb{N}$ $x_1, \dots, x_n$ son números reales, entonces

$$\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\sin x_i|.$$

(*c*) Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ es tal que $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \cdot \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x}$$

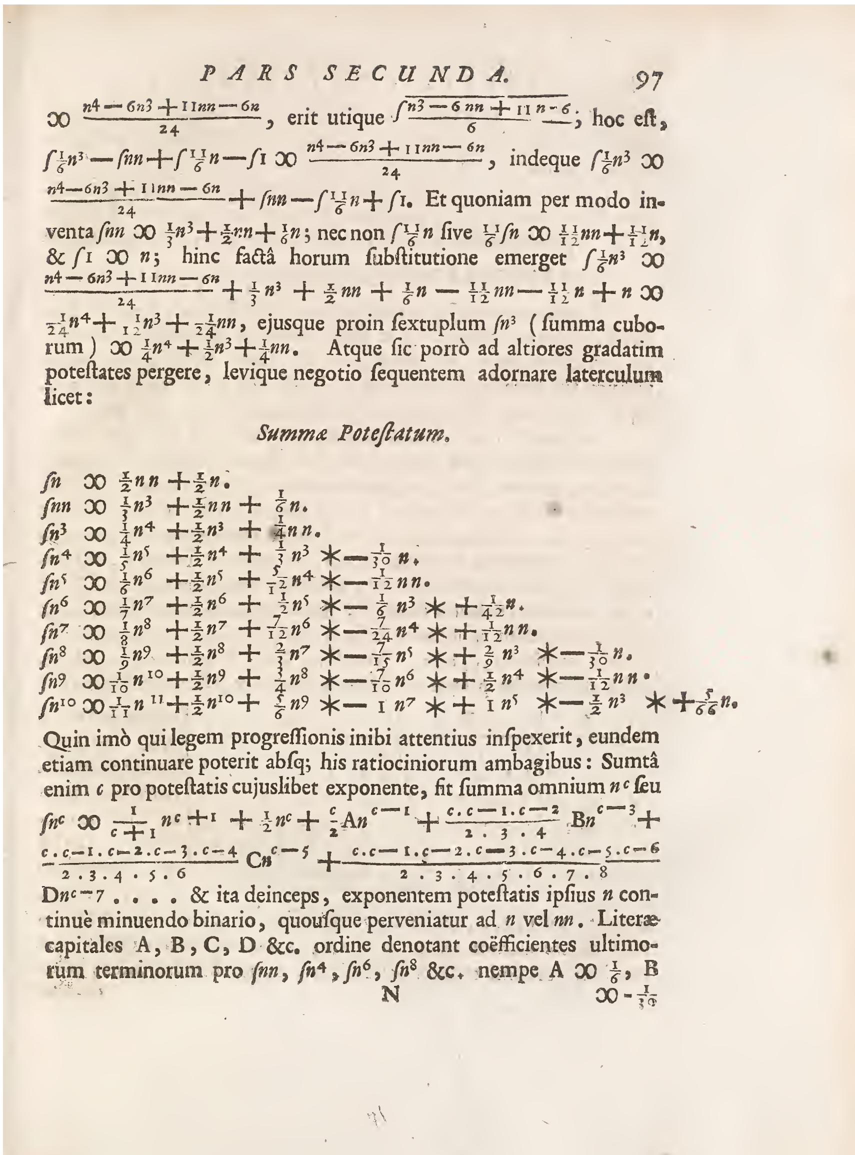
y

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \cos nx = \frac{\sin(n + 1\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

(*d*) Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ es tal que $\sin x \neq 0$, entonces

$$\prod_{i=1}^{n} \cos 2^i x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^n \sin x}.$$

4.5.5. Ejercicio. Muestre que para cada entero $n \geq 0$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$. Usando



PARS SECUNDA. 97

$\infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, erit utique $\int \frac{\overline{n^3 - 6nn + 11n - 6}}{6}$; hoc eſt, $\int \frac{1}{6}n^3 - \int nn + \int \frac{11}{6}n - \int 1 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, indeque $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \int nn - \int \frac{11}{6}n + \int 1$. Et quoniam per modo inventa $\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$; nec non $\int \frac{11}{6}n$ ſive $\frac{11}{6}\int n \infty \frac{11}{12}nn + \frac{11}{12}n$, & $\int 1 \infty n$; hinc factâ horum ſubſtitutione emerget $\int \frac{1}{6}n^3 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n - \frac{11}{12}nn - \frac{11}{12}n + n \infty \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{24}nn$, ejusque proin ſextuplum $\int n^3$ (ſumma cuborum) $\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$. Atque ſic porrò ad altiores gradatim poteſtates pergere, levique negotio ſequentem adornare laterculum licet:

Summæ Poteſtatum.

$\int n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n.$

$\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n.$

$\int n^3 \infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn.$

$\int n^4 \infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n.$

$\int n^5 \infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$

$\int n^6 \infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n.$

$\int n^7 \infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn.$

$\int n^8 \infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n.$

$\int n^9 \infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$

$\int n^{10} \infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * - 1n^7 * + 1n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.$

Quin imò qui legem progreſſionis inibi attentius inſpexerit, eundem etiam continuare poterit abſq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro poteſtatis cujuslibet exponente, fit ſumma omnium n^c ſeu $\int n^c \infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} \ldots$ & ita deinceps, exponentem poteſtatis ipſius n continuè minuendo binario, quouſque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A $\infty \frac{1}{6}$, B

N $\infty - \frac{1}{30}$

Figura 4.1. La página del *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli en la que tabula las primeras fórmulas de Faulhaber.

eso, pruebe que todo entero positivo $m \in \mathbb{N}$ puede escribirse en la forma

$$m = d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + \cdots + d_r \cdot r!$$

para algún $r \in \mathbb{N}$ y con $d_i \in \{0, \ldots, i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

4.5.6. Ejercicio.

(a) Todo entero positivo puede escribirse en la forma $3a + 5b$ con a y b enteros.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $3^{3n} + 5^{4n+2}$ es divisible por 13.