7. Números complejos

Los números complejos forman un conjunto numérico más grande que los números reales, que surgen ante la necesidad de encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{R}$. En este sentido, son la "extensión" necesaria (más pequeña) que garantiza que todas estas ecuaciones tienen solución. Si bien los números complejos, como objeto matemático, son una abstracción, surgieron en el estudio de ciertos problemas geométricos y en la resolución de ecuaciones polinomiales.

7.1 ¿Qué son los números complejos?

Probablemente hayan tenido contacto con números complejos durante su formación y asocien a ellos la palabra "imaginario" y la famosa letra i. Lo cierto es que las presentaciones de los números complejos que se hacen, en general, oscurecen el fuerte sentido geométrico que conllevan.

En este apartado estudiaremos...

- El sentido geométrico de los números complejos.
- La definición de número complejo y las operaciones básicas entre ellos.

7.1.1 ¿Cómo surgen los números complejos?

Los números naturales son los números que utilizamos para contar, de allí su nombre. Supongamos que queremos resolver ecuaciones con estos números. Por ejemplo, $x+3=5$ puede ser resuelta sin problema: la solución es $x=2$. Pero ¿qué sucede si queremos resolver $x+3=1$? Esta ecuación *no tiene solución* en números naturales (no hay ningún número natural tal que, al sumarle 3, nos dé como resultado 1). ¿Qué podemos hacer? Pues podemos introducir los números naturales negativos para resolver este tipo de ecuaciones. Creamos, entonces, los números enteros, que constan de los números naturales y sus inversos aditivos (y del 0, ya que vamos a tener que poder representar $1-1$, por ejemplo). De esta manera, ya podemos resolver $x+3=1$; la solución es el número entero -2. ¿Y si quisiéramos ahora resolver $2x+3=4$? ¿Podemos? ¡No! Esta ecuación *no tiene solución* con los números enteros. Necesitamos nuevamente ampliar el conjunto de números con el que trabajamos. Entonces, construimos los cocientes entre números enteros: los números racionales. Con estos últimos, es posible resolver este tipo de ecuaciones. En este caso, la solución de la ecuación es el número racional $\frac{1}{2}$. ¿Qué sucede ahora si queremos resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 2$? Pues sucede que esta ecuación *no tiene solución* con los números racionales. Como bien sabemos ahora, las posibles soluciones a dicha ecuación son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, y estos números *no se pueden escribir como cociente de números enteros* (la demostración de este hecho se puede ver como información complementaria sobre el Teorema de Gauss del próximo capítulo). Entonces, llegamos a definir los números reales, que son los números que conocemos y utilizamos todo el tiempo. Lamentablemente, especificar cuáles son los números reales no es tan sencillo como lo es especificar los números enteros (a partir de los naturales) o los números racionales (a partir de los enteros). Podemos decir que, informalmente, los números reales constan de los números racionales más los números que se encuentran entre los racionales en la recta real (es decir, los números necesarios para llenar la recta y que no queden huecos). ¿Llegamos al final del camino? ¿Son estos los últimos números que vamos a necesitar? Miremos la ecuación $x^2 + 1 = 0$. ¿Existe algún número real que, elevado al cuadrado y sumado con 1, nos de 0? ¡No! Sabemos que el cuadrado de *cualquier* número real es un número positivo, por lo que no es posible que, al sumarle 1 a un número positivo, obtengamos algo más pequeño que 1 (mucho menos, el 0). Es, en este contexto, que necesitamos agrandar aún más el conjunto de números con el que trabajamos. Y aquí es donde aparecen los números complejos: nos permiten, en particular, resolver la ecuación $x^2 = -1$. Para ello, vamos a tener que introducir un número que elevado al cuadrado de como resultado -1: el famoso número i.

7.1.2 ¿Cómo se define el conjunto de números complejos?

Tal como mencionamos en el párrafo anterior, buscamos que el conjunto de números complejos sea una extensión de los reales que, además, contenga un elemento i que verifique $i^2 = -1$. Esta “ampliación” del conjunto $\mathbb{R}$ debemos realizarla de manera que las operaciones que de suma y multiplicación en este nuevo conjunto sean coherentes con las que llevamos a cabo en los números reales. Vamos a describir al conjunto $\mathbb{C}$ de *números complejos* de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde establecimos que el nuevo “número” i verifica $i^2 = -1$. Es decir, un número complejo es la suma de un número real a y de un múltiplo real b de i. Notemos que el conjunto $\mathbb{R}$ es efectivamente un subconjunto de $\mathbb{C}$ ya que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbb{R} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \ : \ b = 0\}$$

Ahora que sabemos qué forma tienen los números complejos, debemos aprender a sumarlos y multiplicarlos. Como dijimos, estas operaciones tienen que coincidir con las operaciones que ya conocemos de $\mathbb{R}$ cuando estemos trabajando con números reales *vistos como subconjuntos de* $\mathbb{C}$:

Definición 68 Dados números complejos $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$, definimos la suma y el producto entre ellos de la siguiente manera:

- Suma: $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- Producto: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observemos que la suma de números complejos consiste, simplemente, en sumar entre sí a los números reales que no están multiplicando a i y, entre sí, a los que están multiplicando a i. Por otro lado, si bien la fórmula del producto de números complejos parece complicada, esta surge de aplicar la propiedad distributiva y recordando que el número i al cuadrado es -1:

$$zw = (a+bi)(c+di) = ac + di + bci + bdi^2 = ac + di + bci - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 69

- $3i - (1+2i) = (0-1) + (3-2)i = -1 + i$.
- $(4+5i)(1+3i) = 4 - 15 + (12+5)i = -11 + 17i$.
- $3{,}5 = (15 - 0{,}0) + (0{,}5 + 3{,}0)i = 15$.

Nos preguntamos ahora, ¿cuáles son los números complejos inversibles? Sabemos que todo número real λ distinto de 0 tiene inverso: el número $\frac{1}{\lambda}$. ¿Qué sucede con un número complejo $a+bi$ distinto de 0? Podríamos proponer como inverso de este número a $\frac{1}{a+bi}$; pero, ¿es esto un número complejo? En realidad, sí lo es, solo que no está escrito de una forma que lo reconozcamos como tal. ¿Cómo podemos hacer para reescribir $\frac{1}{a+bi}$ de la manera como definimos a los números complejos? Pues multiplicamos esta expresión por $\frac{a-bi}{a-bi}$, ¡que es simplemente 1! (por lo que no la estamos cambiando). ¿Cuál es el resultado de esta cuenta?:

$$\frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Esta última expresión está escrita en la forma en la que definimos a los números complejos (un números real $\frac{a}{a^2+b^2}$ sumado a un número real $-\frac{b}{a^2+b^2}$ multiplicado por i). Verifiquemos que, efectivamente, este número es el inverso de $a+bi$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) &= \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}\right) + \left(a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}\right)i \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \\
&= 1 + 0i \\
&= 1
\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que *todos los números complejos no nulos son inversibles*.

¿Qué hicimos en el apartado 7.1?

- Mostramos la necesidad para definir y trabajar con números complejos (nos brindan soluciones a ecuaciones que no tienen soluciones reales).
- Definimos el conjunto de números complejos junto con su suma y multiplicación, estudiamos sus propiedades y vimos que eran coherentes con las operaciones de los números reales.
- Vimos que todos los números complejos no nulos son inversibles y estudiamos una manera de calcular dicho inverso.

7.2 El plano complejo

El hecho que un número complejo $a+bi$ esté definido a partir de los números reales a y b, no hace pensar si existe alguna relación entre estos y los puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Esta relación existe y, en muchas ocasiones, será conveniente pensar un número complejo $z = a + bi$ como el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Este proceso nos permite obtener una representación gráfica de los números complejos e interpretar geométricamente las operaciones de suma y producto.

En este apartado estudiaremos...

- La representación en el plano de los números complejos.
- La forma binómica de un número complejo (partes real e imaginaria) y el conjugado de un número complejo.
- El módulo de un número complejo y la distancia entre números complejos.

7.2.1 Representación en el plano y forma binómica

Podemos, entonces, identificar un número complejo $a+bi$ con el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, la primera coordenada del vector asociado corresponde a la componente real que no multiplica al número i, y la segunda coordenada, a la componente real que multiplica i. Esta identificación es biyectiva: a cada número complejo le corresponde un único vector de $\mathbb{R}^2$ y, a cada vector de $\mathbb{R}^2$, le corresponde un único número complejo. Cuando pensemos a $\mathbb{R}^2$ representando a los números complejos, lo llamaremos *el plano complejo*.

Observación 44 *Notemos que, el vector de $\mathbb{R}^2$ que le corresponde a la suma $z + w$ de los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$, es el vector que se obtiene al sumar los vectores asociados a z y w. Es decir, si (a, b) es el vector asociado a z y (c, d) el vector asociado a w, entonces el vector asociado a $z+w$ es $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$. Por otro lado, el vector asociado al producto zw es $(ac - bd, ad + bc)$.*

Las componentes o coordenadas que constituyen un número complejo, tienen un nombre:

Definición 69 Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, llamaremos *parte real* de z al número a y *parte imaginaria* a b, y escribiremos $a = Re(z)$, $b = Im(z)$. Siempre que un número complejo esté escrito de esta manera, diremos que está en *forma binómica*.

Ejemplo 70

- Para $z = 4 + 3i$, ¿cuánto valen $Re(z)$, $Im(z)$? Como z ya está en forma binómica, podemos ver directamente que $Re(z) = 4$, $Im(z) = 3$.
- Si ahora z es $z = i(3 + 2i)^2$, para hallar $Re(z)$, $Im(z)$, primero necesitamos ponerlo en forma binómica. Desarrollemos el cuadrado:

$$z = i(3 + 2i)^2 = i(3^2 + 2{,}3{,}2i + (2i)^2) = i(9 + 12i - 4) = i(5 + 12i)$$

Ahora efectuamos la multiplicación de los dos números complejos que nos quedaron y obtenemos

$$z = -12 + 5i$$

que resulta la forma binómica de z. Por lo tanto, la respuesta es $Re(z) = -12$, $Im(z) = 5$.

Importante *Notemos que las partes real e imaginaria de un número complejo siempre son números **reales**. Por ejemplo, $Im(i) = 1$ y **no** i.*

Experimento 43 Calculen $Re(z+w)$ y $Im(z+w)$ en términos de $Re(z)$ y $Im(w)$ para complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. ■

Un punto importante, que quizás escapa a primera vista, es que llevar números complejos a su forma binómica nos permite decidir si dos números dados son iguales. ¿De qué manera? Es claro que, si $z = 2i, w = 2i$, entonces $z = w$. Pero si fuera $z = 2i(4+i)$ y $w = i(8-2i)$, no es tan inmediato responder si $z = w$ o $z \neq w$. Sucede que dos números complejos z y w son iguales sí, y solo sí,

$$Re(z) = Re(w) \text{ e } Im(z) = Im(w)$$

Dado que tenemos que $z = 2i(4+i) = -2+8i$ y $w = i(8-2i) = 2+8i$. Como $Re(z) = 2 \neq -2 = Re(w)$, podemos afirmar que $z \neq w$.
Traducir la igualdad de números complejos en términos de partes real e imaginaria es una herramienta más poderosa de lo que parece. Veamos un ejemplo de esto.

■ **Ejemplo 71**

- Supongamos que queremos averiguar cuáles son los números complejos z que satisfacen $(3+i)z = 4-2i$. Llamemos $z = a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y operemos:

$$(3+i)z = (3+i)(a+bi) = (3a-b) + (a+3b)i$$

  Por lo tanto, tenemos que $(3+i)z = 4+2i$ sí, y solo sí, $3a-b = 4$ y $a+3b = -2$. ¡Este es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales! Es fácil calcular que las soluciones son $a = 1$ y $b = -1$.
- Busquemos ahora los números complejos z tales que $Re(z(1-2i)) + 4i = zIm(z)$. Escribimos $z = a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y reemplazamos en la ecuación original. El lado izquierdo de la igualdad queda:

$$Re(z(1-2i)) + 4i = Re((a+bi)(1-2i)) + 4i = Re(a+2b+(-2a+b)i) + 4i = a+2b+4i.$$

  Del lado derecho:

$$zIm(z) = (a+bi)b = ab + ib^2$$

  Si ahora igualamos las partes real e imaginaria de cada lado, obtenemos:

$$a + 2b = ab \text{ y } b^2 = 4$$

  De aquí, vemos que $b = 2$ o $b = -2$. En el primer caso, $a = 4$ y, en el segundo caso, $a = \frac{4}{3}$. Concluimos, entonces, que hay dos soluciones a la ecuación original: $z_1 = 4+2i$ y $z_2 = \frac{4}{3} - 2i$.

■

Norma de un número complejo. Una propiedad importante que conocíamos de los vectores en $\mathbb{R}^2$ es su longitud, que llamamos en general *norma*. En el caso de un número complejo $z = a+bi$, llamaremos *módulo* a la norma del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado.

Definición 70 Dado un número complejo $z = a+bi$ en forma binómica, su *módulo* es el número real $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Gráficamente, este número representa la longitud del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado al número complejo z.

■ **Ejemplo 72**

- El módulo del número complejo $z = 2i$ es $|z| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Esto es claro si pensamos que el vector asociado a z es $(0,2)$.

- ¿Cuál es el módulo de zw, donde $z = 3+2i$ y $w = -1+5i$? Hallemos la forma binómica de zw:

$$zw = (3+2i)(-1+5i) = (-3-10) + (-2+15)i = -13+13i.$$

Aplicamos ahora la fórmula del módulo para obtener:

$$|zw| = \sqrt{13^2+13^2} = 13\sqrt{2}$$

■

Como el módulo de un número complejo se define a partir de su representación en el plano, entonces sus propiedades con relación a la suma y a la multiplicación *por escalar real* son las mismas que para la de la norma de vectores en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, los números complejos pueden multiplicarse entre sí (operación que *no está definida* para vectores). Nos preguntamos, ¿existe alguna propiedad que verifique el módulo respecto del producto de números complejos? La respuesta es sí, y dado que conciste en hacer las mismas cuentas que ya hicimos, se las dejamos para desarrollar en el siguiente experimento.

Experimento 44 Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$. Muestren que $|zw| = |z||w|$ (o sea, el módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos de dichos números). ■

Comentamos en el párrafo anterior que, para un número complejo $a+bi$, el número $a-bi$ es de mucha importancia. Entre otras cosas, este número está relacionado sutilmente con el módulo. Lo definimos a continuación:

Definición 71 Dado un número complejo $z = a+bi$, escrito en forma binómica, definimos el *conjugado* de z, que notaremos por $\overline{z}$, como el número complejo $\overline{z} = a-bi$.

Notemos que, si (a,b) es el vector asociado a z, entonces $(a,-b)$ es el vector asociado a $\overline{z}$. Gráficamente, $\overline{z}$ es el simétrico de (a,b) respecto del eje x.

■ **Ejemplo 73**

- El conjugado de $3+i$ es, obviamente $3-i$.
- El conjugado de 2 es él mismo pues 2 escrito en forma binómica es $2+0i$, por lo que su conjugado es $2-0i = 2$. Gráficamente, el simétrico del vector asociado $(2,0)$ respecto del eje x es $(2,0)$, pues este vector pertenece a dicho eje.

■

Veremos que el conjugado de un número complejo z aparece muchas veces relacionado a propiedades de z. El siguiente experimento muestra algunas de las mismas.

Experimento 45

1. Consideren $z = 2 + 3i$. Calculen $z\overline{z}$. ¿Qué relación tiene este producto con $|z|$? ¿Y para un número complejo en general?
2. Verifiquen las siguientes propiedades de la conjugación para números complejos z, w:
   - $\overline{\overline{z}} = z$
   - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
   - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
   - $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2Im(z)$.
   - $|z| = |\overline{z}|$.

■

Observemos que, del experimento anterior, podemos deducir que todo número complejo distinto de 0 es inversible. Más aún, podemos calcular directamente el inverso por medio de $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

■ **Ejemplo 74** Calculemos z^{-1} para $z = (3 + i)$. De acuerdo a la fórmula que acabamos de ver necesitamos, en primer lugar, hallar $|z|$ y $\overline{z}$. Por un lado $|z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Por otro lado, $\overline{z} = 3 - i$. Por lo tanto, tenemos $z^{-1} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$. ■

¿Qué más nos permite hacer el módulo de números complejos? Podemos medir la distancia entre dos números complejos z, w de la misma manera que hacíamos con los vectores de $\mathbb{R}^2$.

Definición 72 Dados dos números complejos z y w, definimos la *distancia entre z y w* como el número real $|z - w|$.

Por supuesto, la distancia entre z y w es, simplemente, la distancia en el plano complejo entre sus vectores asociados.

■ **Ejemplo 75**

- La distancia entre $z = -1 + 4i$ y $w = -5 - 2i$ es:

$$|z - w| = |(-1 + 4i) - (-5 - 2i)| = |4 + 6i| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

- ¿Cuál es el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - (3 + i)| = 2\}$? Pues son los números que distan en 2 unidades del número $3 + i$. Gráficamente, en el plano complejo, C es la circunferencia de radio 2 y centro $(3, 1)$.
- Consideremos ahora el conjunto $L = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$. ¿Qué significa la condición que define al conjunto? Los elementos de L son los números complejos que distan de 1 lo mismo que de i. Gráficamente, en el plano complejo, son los puntos que distan de $(1, 0)$ en lo mismo que de $(0, 1)$. Si lo pensamos un rato, podemos convencernos de que este conjunto es una recta (que pasa por 0). Hagamos el cálculo formal para confirmarlo. Tomemos $z \in L$ y escribamos $z = a + bi$. Si reemplazamos en la ecuación que define a L, tenemos:

$$|a + bi - 1| = |a + bi - i|$$

Por la definición de módulo, podemos escribir:

$$\sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

Si elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado, obtenemos:

$$(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2$$

Si expandimos los cuadrados y operamos, descubrimos que la igualdad de arriba equivale a $a = b$. Concluimos que un número complejo $z = a + bi$ pertenece a L sí, y solo sí, $a = b$, es decir, es de la forma $a + ai$. Podemos entonces escribir:

$$L = \{a + ai : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1+i) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Esto nos dice que L consiste en todos los números complejos múltiplos de $1+i$. Gráficamente, el vector asociado a $1+i$ es el $(1,1)$, por lo que, visto en el plano complejo, el conjunto L es el conjunto

$$L = \{a(1,1) \, : \, a \in \mathbb{R}\}.$$

Concluimos que L se trata de la recta con ecuación vectorial $t(1,1)$.

7.2.2 Transformaciones en el plano complejo

Dado que hay una identificación natural entre los vectores de $\mathbb{R}^2$ y los números complejos, ¿cómo se traducen las transformaciones geométricas que vimos en el capítulo anterior en el lenguaje de números complejos? En este apartado las estudiaremos.

Empecemos por las *traslaciones*. Una de las transformaciones más simples en $\mathbb{R}^2$ consiste en "trasladar" un vector $\vec{v}$ por medio de otro vector $\vec{w} = (a,b)$. Por ejemplo, si a y b son números positivos, esto consiste en desplazar al vector $\vec{v}$ en a unidades a la derecha y en b unidades hacia arriba. La fórmula de la traslación $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por el vector $\vec{w}$ está dada por:

$$T_{\vec{w}}(x,y) = (x+a, y+b) = (x,y) + (a,b)$$

Si pensamos en la misma transformación en el plano complejo, esta consiste en sumar, a un número complejo dado, el número $w = a + bi$. Es decir, la traslación $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por un número complejo $w = a + bi$ está dada por:

$$T_w(z) = z + w = z + (a + bi)$$

Analicen por qué las traslaciones $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no son transformaciones lineales.

Como vimos en el capítulo anterior, una *homotecia* consiste en cambiar la longitud de cada vector multiplicándolo por un número $r > 0$ fijo, llamado la razón de la homotecia. Si $r < 1$, la homotecia de razón r "acorta" vectores y, si es $r > 1$, los "alarga". Una homotecia $H_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de razón r en $\mathbb{R}^2$ tiene fórmula:

$$H_r(x,y) = r(x,y) = (rx, ry)$$

Una homotecia en el plano complejo se traduce, entonces, a multiplicar por el número complejo $r + 0i$. Es decir, es la función $H_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$H_r(z) = H_r(x+iy) = r(x+iy) = rx + iry$$

Las *rotaciones* en $\mathbb{R}^2$ consisten en girar a cada vector un ángulo fijo en determinado sentido. En el capítulo anterior, vimos que la rotación $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ángulo $\theta > 0$, en sentido contrario a las agujas del reloj, está dada por la fórmula:

$$R_\theta(x,y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Consideremos el número complejo $\omega = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. ¿Qué características tiene? En primer lugar, su módulo es 1:

$$|\omega| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Por otro lado, al multiplicarlo con otro número complejo $z = x + iy$ se obtiene:

$$z\omega = (x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

¡Notemos que el vector asociado a esta última expresión es exactamente $R_\theta(x, y)$! Por lo tanto, concluimos que, en el plano complejo, la fórmula de rotación de ángulo $\theta > 0$, en sentido antihorario, es:

$$R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ R_\theta(z) = z\omega,$$

donde $\omega = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Importante La deducción que acabamos de realizar muestra una propiedad geométrica muy interesante de los números complejos: *multiplicar por un número complejo de módulo 1 es una rotación por cierto ángulo.* ■

Veamos ahora las *simetrías*. Recordemos, del capítulo 2, que en $\mathbb{R}^2$ teníamos dos tipos de simetrías: respecto de un punto y respecto de una recta. Para el plano complejo, sólo consideraremos simetrías respecto de puntos. En general, una simetría $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ respecto de un número complejo w es la correspondiente simetría $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto del vector asociado a w. Por ejemplo, como la simetría $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto del origen de coordenadas tiene por fórmula a $S(x, y) = -(x, y) = (-x, -y)$, entonces la simetría respecto del número complejo 0 tiene es la función $S(z) = -z$. Si bien no desarrollaremos simetrías respecto de rectas, recordemos que ya hemos estado trabajando con una: el conjungado $\overline{z}$ de un número complejo z es el simétrico de z respecto de la recta dada por el eje x.

■ Ejemplo 76

- Interpretemos geométricamente el efecto de la operación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = (1 + i)z - 3$, sabiendo que $(1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Si analizamos la expresión de T, vemos que dicha operación consta de varias transformaciones sucesivas de las que hemos estudiado. En efecto, lo primero que hace T a un número complejo z es rotarlo un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario; luego, "agranda" el resultado por medio de una homotecia de razón $\sqrt{2}$. Finalmente, traslada lo obtenido tres unidades a la izquierda.
- ¿Cuál es la fórmula de la simetría S respecto del número $w = 3 + 2i$? Veremos que podemos reducir el cálculo de $S(z)$, para $z \in \mathbb{C}$, al caso conocido de la simetría respecto de 0. Notemos que, si realizamos una translación por el número $-w$, entonces dos números simétricos respecto de w van a parar, necesariamente, a dos números simétricos respecto de 0 (pues esta traslación manda w a 0). Como z y $S(z)$ son simétricos respecto de w, esto dice que:

  $$T_w(z) = z - w = -(T_w(S(z))) = -(S(z) - w) = -S(z) + w$$

  De aquí, concluimos que $S(z) = -z + 2w$.
- Si bien no desarrollaremos simetrías respecto de rectas, miremos la siguiente propiedad de la simetría S respecto del eje y en el plano complejo. Se puede ver que, si $z = a + bi$, entonces $S(z) = S(a + bi) = -a + bi$. Notemos que $-a + bi = -(a - bi) = -\overline{z}$, por lo que $S(z) = -\overline{z}$. Interpretada de esta manera, vemos que la simetría respecto del eje y consiste en la simetría respecto del eje x (que manda z a $\overline{z}$), seguida de la simetría respecto del 0 (que manda z a $-z$).

■

¿Qué hicimos en el apartado 7.2?

- Interpretamos a los números complejos como vectores en $\mathbb{R}^2$.
- Definimos la forma binómica de un número complejo y sus partes real e imaginaria (que siempre son números reales). Vimos que dos números complejos son iguales sí, y solo sí, sus partes reales y sus partes imaginarias coinciden.
- Definimos el módulo de un número complejo como la norma del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado a dicho número y observamos que tiene la propiedad que el módulo de un producto es el producto de los módulos. También definimos distancia entre números complejos.
- Definimos el conjugado de un número complejo $a + bi$ como $a - bi$ que, geométricamente es el punto simétrico a (a, b) respecto del eje de las x, y estudiamos sus propiedades y relación con el cálculo de la inversa del número.
- Estudiamos las posibles transformaciones que se pueden hacer geométricamente con los números complejos (interpretándolos como vectores del plano): traslaciones, homotecias, rotaciones y simetrías.

7.3 Ecuaciones cuadráticas

Seguramente saben calcular las raíces (reales) de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. La *fórmula resolvente* dice que todas las soluciones reales de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

son de la forma:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El principal aprendizaje de este apartado es que la misma expresión vale para ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo resolver ecuaciones cuadráticas en los números complejos.

7.3.1 Raíces cuadradas complejas

¿Qué es la raíz cuadrada de un número real $x > 0$? Muchas veces se dice que es "otro número y tal que $y^2 = x$." Pero esta definición no es correcta. Lo que entendemos por "raíz cuadrada de un número real $x > 0$" es *el único número* ***positivo*** *y tal que $y^2 = x$*. Por ejemplo, si bien tanto 2 como -2 verifican que, al elevarlos al cuadrado, dan como resultado 4, la raíz cuadrada de 4 es 2. Esta unicidad de la raíz cuadrada y de x es lo que nos permite escribirla como $y = \sqrt{x}$: si no convenimos que siempre es positiva, no sabríamos si $\sqrt{4}$ representa al 2 o al -2.
¿Cómo se traslada la definición de raíz cuadrada a números complejos? Los números complejos no tienen noción de orden, por lo cual, en particular, no se pueden diferenciar entre positivos (mayores a 0) o negativos (menores a 0). Por este motivo, *en los números complejos*, no existe esta unicidad de la raíz cuadrada.

Definición 73 Una raíz cuadrada de $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo w tal que $w^2 = z$.

A diferencia de los reales, donde los números negativos no poseen raíz cuadrada, cualquier número complejo siempre tiene raíces cuadradas (aunque sea un real negativo). Veremos, de hecho, que siempre tiene exactamente dos. Analicemos cómo calcularlas "a mano" por medio de algunos ejemplos.

Ejemplos 77

- ¿Cuáles son las raíces cuadradas de -4? Para que un número complejo w sea una raíz cuadrada de -4 debe suceder que $w^2 = -4$. Si escribimos $w = a + bi$, esto se traduce en pedir:

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -4$$

Al igualar las partes real e imaginaria, deducimos que $a^2 - b^2 = -4$ y $2ab = 0$. La segunda condición nos dice que, o bien $a = 0$, o bien $b = 0$. Si $a = 0$ entonces $b^2 = 4$, de donde $b = 2$ o $b = -2$. Concluimos que $w = 2i$ y $2 = -2i$ son raíces cuadradas de -4. En el caso que fuera $b = 0$, entonces debería ser $a^2 = -4$. Pero $a \in \mathbb{R}$, y no hay números reales cuyo cuadrado sea -4. Por lo tanto, todas las raíces cuadradas de -4 son $2i$ y $-2i$.

- Hallemos todas las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$. Es decir, busquemos todos los números complejos w tales que $w^2 = 4 + 3i$. Si, como antes, escribimos $w = a + bi$, entonces se tiene:

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 4 + 3i$$

Esto implica que $a^2 - b^2 = 4$ y $2ab = 3$. Esta vez, parece más difícil resolver estas ecuaciones simultáneas (notemos que no son lineales). Si despejamos, por ejemplo, $a = \frac{3}{2b}$ de la segunda ecuación y la reemplazamos en la primera, obtenemos $\frac{3^2}{(2b)^2} - b^2 = 4$. Esto nos dice que debemos buscar un número b que verifique $9 - 4b^4 = 16b^2$. Si bien esto no es muy difícil (lo aprenderemos a hacer en el capítulo ocho), existe una manera más fácil de resolver nuestro problema. Observemos que podemos extraer más información de los datos del problema. En efecto, como el w buscado debe verificar $w^2 = 4+3i$, entonces, en particular, $|w^2| = |4+3i| = 5$. Como $|w^2| = |w|^2$ (por Experimento 44), entonces debemos tener $|w| = \sqrt{5}$. En términos de a y b, esto quiere decir que $a^2 + b^2 = 5$. Esta es una nueva ecuación que nos va a facilitar el despeje los valores de a y b. Tenemos:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación con la tercera, obtenemos $a^2 = \frac{9}{2}$, de donde $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ o $a = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Reemplazando cada una de estas posibilidades en la segunda ecuación, hallamos $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Concluimos que todas las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$ son $w_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ y $w_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Siempre es una buena idea verificar si la respuesta hallada es efectivamente una solución al problema:

$$w_1^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 2\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4 + 3i$$

Por otro lado, notemos que $w_2 = -w_1$, por lo que $w_2^2 = (-w_1)^2 = w_1^2 = 4 + 3i$.

■

Observación 45 *Como muestran los ejemplos anteriores, si z es un número complejo distinto de 0, entonces z tiene* exactamente *dos raíces cuadradas y, además,* una es la inversa aditiva de la otra.

7.3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas

Ahora, vamos a estudiar cómo resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Definición 74 Una ecuación cuadrática con coeficientes complejos es una ecuación de la forma:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

donde a, b, c son números complejos y $a \neq 0$.

Como dijimos al comienzo del apartado, la misma fórmula resolvente $x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es válida para este tipo de ecuaciones complejas. Notemos que esta fórmula puede reescribirse como:

$$z_1, z_2 = \frac{-b+w}{2a},$$

donde w es una raíz cuadrada (compleja) de $b^2 - 4ac$. El término $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* y se lo nota $\Delta = b^2 - 4ac$. Tengamos en cuenta que, en esta fórmula, no tenemos la necesidad de utilizar el símbolo $\pm$, ya que sabemos que, si w es raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$, también lo es $-w$.

Ejemplos 78

- Hallemos los números complejos z que satisfacen $z^2 + 2iz - 3 = 0$. Para esto, busquemos las raíces cuadradas de $\Delta = (2i)^2 - 4(-3) = -4 + 12 = 8$. Se trata entonces de $\sqrt{8}$ y $-\sqrt{8}$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\frac{-2i+\sqrt{8}}{2} \text{ y } \frac{-2i-\sqrt{8}}{2}$$

  Simplificando estas fracciones: $\sqrt{2} - i$ y $-\sqrt{2} - i$.

- Encontremos las soluciones de $z^2 + (3+i)z + (1 + \frac{3}{4}i) = 0$. Debemos encontrar las raíces cuadradas de:

$$\Delta = (3+i)^2 - 4\left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 9 - 1 + 6i - 4 - 3i = 4 + 3i$$

  Las raíces cuadradas de $4 + 3i$ las habíamos calculado en el Ejemplo 77:

$$w_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ y } w_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

  Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son:

$$\frac{-(3+i)+w_1}{2} \text{ y } \frac{-(3+i)+w_2}{2}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 7.3?

- Estudiamos el concepto de "raiz cuadrada" de un número complejo. Vimos que todo número complejo tiene dos raíces (siendo una la inversa aditiva de la otra) y mostramos cómo hallarlas.
- Aprendimos a resolver ecuaciones cuadráticas en los números complejos (utilizando al fórmula resolvente conocida).

■

7.4 Formas polar y exponencial

Existen otras maneras de representar a los números complejos que resultarán muy convenientes a la hora de resolver ecuaciones.

En este apartado estudiaremos...

- La forma polar de un número complejo.
- La forma exponencial de un número complejo.

■

7.4.1 El problema de la forma binomial

En el apartado anterior vimos cómo resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos. ¿Pero qué sucede con las ecuaciones cúbicas, cuartas o de grados mayores? Supongamos, por ejemplo, que buscamos un número complejo z que cumpla $z^4 = 1$. Una manera directa de encarar este problema es plantear un número complejo genérico $z = a + bi$ (con $a, b, \in \mathbb{R}$), calcular $(a+bi)^4$ e intentar despejar a y b. Si hacemos estas cuentas tenemos, primero:

$$z^2 = (a+bi)(a+bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$$

Luego,

$$z^3 = z^2 z = ((a^2 - b^2) + 2abi)(a+bi) = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$$

Finalmente,

$$z^4 = z^3 z = (a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i)(a+bi) = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)i$$

Por lo tanto, deberíamos lidiar con la ecuación:

$$a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)i = 1$$

En este punto, resulta claro que este camino no es muy ameno, tanto por la complejidad de la ecuación como por la cantidad de cuentas que hay que llevar a cabo para arribar a la misma. Por suerte, hay otra forma mucho más simple de encarar este problema. Esta consiste en utilizar otra manera de representar números complejos: la *forma polar*.

7.4.2 La forma polar de un número complejo

Hasta este punto, el único modo que utilizamos para especificar un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es por medio de sus coordenadas. Pero existen otros. Uno consiste en dar la longitud de $\vec{v}$ (su norma) y la inclinación que tiene respecto del semieje positivo de las x (Figura 7.1, lado izquierdo). Dadas las coordenadas del vector, ya sabemos como calcular su norma. ¿Cómo encontramos el ángulo de $\vec{v}$ respecto del semieje positivo de las x? Notemos que, si $\vec{v}$ está en el *semiplano superior* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\}$ (es decir, el semiplano determinado por todos los puntos del plano cuya coordenada y es mayor o igual a 0) entonces el ángulo buscado es, simplemente, el ángulo θ entre $\vec{v}$ y el vector $(1, 0)$ (o cualquier vector con extremo en el semieje positivo de las x, en realidad; Figura 7.1, lado izquierdo). Por otro lado, si $\vec{v}$ está en el *semiplano inferior* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0\}$ de los puntos cuya coordenada y es menor o igual a 0, entonces el ángulo buscado es $2\pi - \theta$, donde θ es, nuevamente, el ángulo entre $\vec{v}$ y el $(0, 1)$ (Figura 7.1, lado derecho).

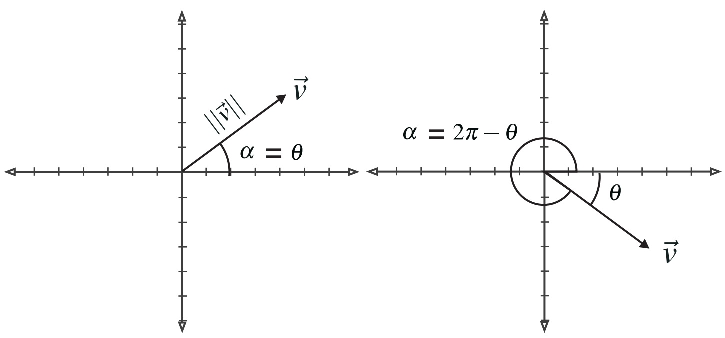

Figura 7.1: Representación polar de vectores.

Por otro lado, dados la norma y ángulo α respecto del semieje positivo de las x del vector $\vec{v}$, ¿cómo podemos hallar las coordenadas a, b de $\vec{v}$? Supongamos primero que el vector tiene norma 1. En este caso, es fácil ver que $a = \cos(\alpha)$ y $b = \sin(\alpha)$, de forma que $\vec{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Si ahora $||\vec{v}||$ es cualquier valor, entonces podemos considerar el vector $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$, que es un vector con la misma dirección que $\vec{v}$ pero de norma 1. Por el razonamiento anterior, sabemos entonces que $\vec{w} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, donde α es el ángulo entre $\vec{w}$ y el $(1, 0)$ (que es el mismo ángulo entre $\vec{v}$ y el $(1, 0)$). Por lo tanto, como $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$, concluimos que:

$$\vec{v} = ||\vec{v}||(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (||\vec{v}|| \cos(\alpha), ||\vec{v}|| \sin(\alpha))$$

donde α es el ángulo entre $\vec{v}$ y el semieje positivo de las x.

Estudiemos esta situación en el plano complejo. Si tenemos $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces aplicando el razonamiento anterior al vector asociado (a, b), podemos concluir que $a = |z| \cos(\alpha)$ y $b = |z| \sin(\alpha)$, donde α es el ángulo entre el vector (a, b) y el semieje positivo de las x. Es decir, $z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$. Esta forma de representar a z es lo que se conoce como *forma polar de* z. Lo definimos formalmente a continuación:

Definición 75 Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, donde a y b son números reales (y no son ambos 0), vamos a llamar el *argumento* de z, y lo vamos a notar $\arg(z)$, al ángulo que forma (a, b) con el semieje positivo de las x. Observar que $0 \leq arg(z) < 2\pi$. De esta manera, vale:

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

Un número complejo escrito de esta manera se dice que está en *forma polar*. Si $|z| = 1$, suele omitirse en la expresión.

Notemos que hemos definido el argumento de un número complejo basados en la fuerte relación geométrica entre $\mathbb{C}$ y el subespacio $\mathbb{R}^2$. Existe, de todas formas, una manera puramente algebraica de especificarlo: *el argumento de un número complejo* $z = a + bi \neq 0$ *es el único ángulo* $arg(z)$ *que satisface, simultáneamente, que* $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, $\frac{a}{|z|} = \cos(\arg(z))$ *y* $\frac{b}{|z|} = \sin(\arg(z))$. Esta manera de definirlo no requiere conocimientos de cálculo de ángulos entre vectores, pero suele involucrar más cuentas.

Observación 46 *Si* $z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ *está dado en forma polar, es muy fácil encontrar sus partes real e imaginaria. Como* $z = |z| \cos(\alpha) + i|z| \sin(\alpha)$ *y, tanto* $|z| \cos(\alpha)$ *como* $|z| \sin(\alpha)$ *son números reales, se tiene* $Re(z) = |z| \cos(\alpha)$ *y* $Im(z) = |z| \sin(\alpha)$.

■ Ejemplos 79

- Hallemos la forma polar de $z = (1 - i)$. En primer lugar, el módulo de z es $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por otro lado, el vector asociado a z en el plano complejo es $(1, -1)$, el cual se encuentra en el semiplano inferior del plano, por lo $arg(z) = 2\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre $(1, -1)$ y $(1, 0)$. Este ángulo es;

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1, -1) \cdot (1, 0)}{||(1, -1)||||(1, 0)||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

  Por lo tanto, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, y la forma polar de z es $\sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi))$.

- ¿Cuál es la forma polar de $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$? A primera vista, podría parecer que este número ya está escrito en forma polar, pero hay una condición que falla: $-\frac{\pi}{4}$ no está en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo tanto, esta no es la escritura polar de z. Notemos, sin embargo, que 3 sí es el módulo de z, pues:

$$|z| = \sqrt{9\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 9\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{9\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{9} = 3$$

  Ahora, tenemos que $Re(z) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ y $Im(z) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Como $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces el vector asociado a z es $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$. Este vector está en el semiplano inferior, por lo que $arg(z) =$

$2\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ y el $(1,0)$. Dicho ángulo es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})\cdot(1,0)}{||(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})||||(1,0)||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, y la forma polar de z resulta $3(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi))$. Observemos que el argumento que acabamos de hallar es el mismo que el del ejemplo anterior. Esto no es casualidad, ya que $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ y $(1,-1)$ forman el mismo ángulo con el semieje positivo de las x (porque son múltiplos). Como para calcular ángulos no nos importan las longitudes de los vectores involucrados, siempre podemos reemplazar los vectores por múltiplos convenientes de ellos. En este ejemplo concreto, podríamos haber calculado el argumento de z utilizando el ángulo entre $(1,-1)$ y $(1,0)$, cosa que nos hubiera simplificado las cuentas.

- Busquemos ahora la forma polar de $z = -1 + \sqrt{3}i$. Un cálculo rápido muestra que $|z| = 2$. El vector asociado a z es $(-1, \sqrt{3})$, el cual se encuentra en el semiplano superior. Por lo tanto, el argumento de z es el ángulo entre $(-1, \sqrt{3})$ y el $(1,0)$. Dicho ángulo es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(-1,\sqrt{3})\cdot(1,0)}{||(-1,\sqrt{3})||||(1,0)||}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Por lo tanto, la forma polar de z es $2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$

■

Observación 47 *En el segundo de los ejemplos anteriores, vimos que el número* $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *tenía por forma polar a* $3\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$. *Estas son dos maneras de escribir al mismo número. De hecho, si reemplazamos el argumento* $\frac{7}{4}\pi$ *por cualquier otro número en el cual el seno y coseno tomen el mismo valor que toma este argumento (en cualquier número de la forma* $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$*, para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*), entonces vemos que existen infinitas maneras de representar al número* z. Pero la forma polar es la única expresión de esta forma que tiene al ángulo entre 0 y 2π. *Además,* la norma de z no depende del argumento. *Por estos motivos, podemos concluir que: dos números complejos* z, w *son iguales sí, y solo sí, sus formas polares son idénticas; es decir,* $z = w$ *sí, y solo sí,* $|z| = |w|$ *y* $arg(z) = arg(w)$.

Una de las características más importantes de la forma polar de los complejos es la interpretación del producto. Supongamos que z y w son números complejos no nulos, y sean $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ y $w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ sus escrituras en forma polar, respectivamente. Si hacemos el producto entre z y w, se tiene:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))|w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))) \end{aligned}$$

Si recordamos las siguientes identidades trigonométricas:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ y
- $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))$

entonces podemos concluir el siguiente resultado, que se conoce como *Teorema de De Moivre*:

Teorema 48 *[De Moivre]* Si $z, w \in \mathbb{C}$ son distintos de 0 y se pueden escribir de la forma $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ y $w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$, para ciertos ángulos α y β (que no necesariamente estén en el intervalo $[0, 2\pi)$), entonces:

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

¡Este resultado es realmente maravilloso! Dice que el módulo de zw es el producto de los módulos de z y w (que ya sabíamos de antes), pero, también, que el ángulo de zw respecto del eje de las x es la suma de los ángulos de z y

w. Esto muestra que, gráficamente, el efecto de multiplicar un número complejo z por otro w es el de modificar el módulo de vector determinado por z en la proporción $|w|$ y rotar el vector determinado por z en el sentido y magnitud especificada por $\arg(w)$. En particular, si multiplicamos a z por un número complejo de módulo 1, entonces el efecto es simplemente de rotación.

Los siguientes resultados son consecuencia directa del Teorema de De Moivre:

Corolario 49 Si $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ es no nulo, entonces:

1. $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.
2. $\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.
3. $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$.

Por ejemplo, veamos por qué vale la primera propiedad enunciada en el corolario. Tenemos que verificar que $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$. Si llamamos $w = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ entonces, por el Teorema de De Moivre:

$$zw = |z|\frac{1}{|z|}(\cos(\alpha - \alpha) + i\sin(\alpha - \alpha)) = 1(\cos(0) + i\sin(0)) = 1$$

Esto demuestra que $z^{-1} = w$.

Experimento 46 Demuestren las otras dos propiedades enunciadas en el corolario. ■

7.4.3 La forma exponencial

Aun existe otra forma de representar un número complejo. Esencialmente, es equivalente a la forma polar, pero tiene la ventaja que es más "cómoda" para su notación.

Definición 76 Para un número real x, definimos $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Usando esta notación, si z es un número complejo no nulo con forma polar $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, tenemos que $z = |z|e^{i\alpha}$. A esta escritura la llamaremos *forma exponencial* de z.

¿Qué ganamos con esta nueva escritura? En primer lugar, da una expresión más concisa que la forma polar para un número complejo. En segundo lugar, nos permite reescribir el Teorema de De Moivre, y sus consecuencias, de manera que es consistente con la propiedad de la exponencial en $\mathbb{R}$ de transformar sumas en productos (es decir, la conocida identidad $e^{x+y} = e^x e^y$ para números reales x, y). Enunciamos a continuación la "versión exponencial" de los resultados y propiedades que vimos para números complejos dados en forma polar. Si $z = |z|e^{i\alpha}$ y $w = |w|e^{i\beta}$, entonces:

1. $zw = |z|e^{i\alpha}|w|e^{i\beta} = |z||w|e^{i\alpha + i\beta} = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$ (este es el Teorema de De Moivre).
2. $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-i\alpha}$.
3. $\overline{z} = |z|e^{-i\alpha}$.
4. $z^n = |z|^n e^{in\alpha}$, para cualquier número natural n.

¿Qué hicimos en el apartado 7.4?

- Definimos la forma polar de un número complejo (módulo y argumento) y estudiamos sus propiedades e interpretación geométrica.
- Enunciamos el teorema de De Moivre que establece cómo se obtiene la forma polar de un producto de números complejos a partir de los módulos y argumentos de los números involucrados.
- Introdujimos la forma exponencial de un número complejo.

■

7.5 Resolución de ecuaciones generales

Vamos ahora a estudiar cómo resolver ecuaciones con coeficientes complejos.

En este apartado estudiaremos...

- Las raíces n-ésimas de la unidad y de un número complejo cualquiera.
- La resolución de algunas ecuaciones que involucran números complejos.

7.5.1 Raíces n-ésimas de la unidad

En el apartado 7.3 estudiamos las raíces cuadradas de un número complejo z, que son los $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^2 = z$, y vimos que saber calcular raíces cuadradas nos permite resolver ecuaciones cuadráticas generales. En es apartado vamos a aprender a resolver ecuaciones que tengan grado n mayor a dos y, para ello, en muchas ocasiones será útil poder encontrar las *raíces n-ésimas* de un número z, es decir, los $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^n = z$. Esta es una generalización de la noción de raíz cuadrada a cualquier número natural n. Lo definimos a continuación:

Definición 77 Si n es un número natural, una raíz n-ésima de $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo tal que $w^n = z$.

Observación 50 *Así como todo número complejo no nulo tiene, exactamente, dos raíces cuadradas, veremos que todo número complejo no nulo tiene, exactamente, n raíces n-ésimas distintas.*

¿Cómo hacemos para encontrar las raíces n-ésimas de un número complejo $z \neq 0$ dado? Para empezar a buscar una manera, pensemos por un momento, la situación "al revés". Supongamos que sabemos de antemano que w_1 y w_2 son raíces n-ésimas de z. ¿Qué podemos decir de la relación entre ellas? Observemos que, como $w_1^n = w_2^n = z$ (por definición de "raíz n-ésima"), entonces:

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n = 1$$

Esto dice que, entonces, $\frac{w_0}{w_1}$ es una raíz n-ésima del número 1. Además indica que podría haber alguna relación entre las raíces en n-ésimas de un número complejo cualquiera y las raíces n-ésimas del número 1. Esto no debería sorprendernos, ya que lo mismo sucede para las raíces cuadradas: si w es una raíz cuadrada de z entonces $-w$ es la otra; pero $-w$ se obtiene al multiplicar a w por la "otra" raíz cuadrada de 1: -1.

Comencemos entonces, estudiando cuáles son raíces cuadradas del número 1; las llamaremos *raíces n-ésimas de la unidad*.

Ejemplos 80

- Las raíces cuadradas de la unidad son 1 y -1, como ya sabíamos.
- Las raíces cúbicas de la unidad son 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Busquemos las raíces cuartas de la unidad, es decir, los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^4 = 1$. Lo primero que notamos es que la norma de ω debe ser 1. Esto se debe a que $|\omega^4| = |\omega|^4$, y el único número *real positivo* que elevado a la cuarta da 1 es el mismo 1 (de hecho, esto sucede para cualquier potencia n). Por otro lado, como $\omega = 0$ no es una posible raíz, podemos escribir $\omega = |\omega|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ (en forma polar). Aquí, hemos escrito $arg(\omega) = \alpha$ y ya hemos hecho el reemplazo $|\omega| = 1$. Si reemplazamos en la ecuación $\omega^4 = 1$ obtenemos, por De Moivre:

$$\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha) = 1$$

Si escribimos al 1 en forma polar, esta igualdad queda:

$$\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha) = \cos(0) + i\sin(0)$$

Recordemos que dos números complejos escritos en forma polar son iguales sí, y solo sí, sus módulos coinciden y sus argumentos coinciden. *¡Pero cuidado! ¡No sabemos si la expresión de ω^4 en esta última igualdad es su forma polar!* Por ejemplo, si α fuera π entonces $4\alpha = 4\pi$, el cual no es un argumento válido. Debemos, entonces, averiguar cual es realmente el argumento de ω^4 para poder igualarlo a 0 (que es el argumento de 1). Notemos que, en caso que 4α fuera mayor a 2π deberíamos ir restándole múltiplos de 2π hasta arribar a un número del intervalo $[0, 2\pi)$; o si fuera menor a 0, sumándole múltiplos de 2π. Por lo tanto, el argumento de ω^4 será de la forma $4\alpha + k2\pi$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, donde k representa el múltiplo mencionado, y será positivo o negativo dependiendo de si hay que sumar o restar el 2π. Ahora que sabemos que $arg(\omega^4)$ es de esta forma (para cierto k), podemos igualarlo al argumento de 1 y escribir $4\alpha + k2\pi = 0$. ¿Qué nos dice esta ecuación? Nos dice que el argumento α de ω que estamos buscando debe ser tal que, al multiplicarlo por 4 y, luego, sumarle un múltiplo de 2π, el resultado debe ser 0. Pero, ¿qué múltiplo? *No importa. Alguno.* Mientras $4\alpha + k2\pi$ sea igual a 0 para cierto k, el α correspondiente será un argumento válido para el ω que estamos buscando. De hecho, veremos que existen varios múltiplos que nos servirán, dando lugar a varios posibles argumentos α para ω. Esto no debería soreprendernos, ya que debemos hallar cuatro raíces n-enésima de la unidad. recién mencionado, el múltiplo k no es importante, y solo nos interesará hallar los α. Si despejamos la última ecuación que encontramos, obtenemos:

$$\alpha = -\frac{k\pi}{2}$$

Esto dice que "α tiene la forma $-\frac{k\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$". Pero, ¿para cualquier k? *¡No!* Debemos recordar que $\alpha = arg(\omega)$, por lo que $\alpha \in [0, 2\pi)$. Entonces, ¿para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$ vale que $-\frac{k\pi}{2}$ esté en dicho intervalo? Si vamos haciendo la prueba, vemos que para $k = 0$ queda $\alpha = 0$, para $k = -1$ queda $\alpha = \frac{\pi}{2}$, para $k = -2$ queda $\alpha = \pi$ y para $k = -3$ queda $\alpha = \frac{3}{2}\pi$. Para un $k \in \mathbb{Z}$ distinto de estos valores, los ángulos determinados caen fuera del intervalo $[0, 2\pi)$. Como dijimos antes, no nos importan cuáles son estos múltiplos k; solo nos importan cuáles son los posibles argumentos α. Hay cuatro posibles argumentos para ω, por lo que encontramos las cuatro raíces cuartas de la unidad:

- $\omega_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\omega_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$
- $\omega_2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
- $\omega_3 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

Es decir, las raíces cuartas de la unidad son 1, -1, i y $-i$.

Este razonamiento se puede repetir para calcular las raíces n-ésimas de la unidad para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por un lado, el módulo de toda raíz será 1. Por otro lado, como el argumento de ω^n es $n\alpha$, donde $\alpha = arg(\omega)$, entonces obtendremos la ecuación $n\alpha - k2\pi = 0$, de donde concluimos que los posibles $alpha$ son de la forma $-\frac{k2\pi}{n}$, *para los $k \in \mathbb{Z}$ tales que* $-\frac{k2\pi}{n} \in [0, 2\pi)$. Es fácil chequear que dichos k son $0, -1, -2, -3, \ldots, -(n-1)$, por lo que los posibles argumentos de ω son $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$; es decir, los números de la forma $\frac{2t\pi}{n}$ para $t = 0, \ldots, n-1$. Concluimos que las raíces n-ésimas de la unidad son:

- $\omega_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
- $\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

- $\vdots$
- $\omega_{n-1} = \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$.

Notemos que los subíndices de los ω_t los hemos elegido de manera que $\omega_t = \cos\left(\frac{2t\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2t\pi}{n}\right)$.

7.5.2 Raíces n-ésimas de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$ no nulo. Supongamos que conocemos de antemano una raíz n-ésima de z. Llamémosla η. Por un lado, si $\tilde{\eta}$ es otra raíz n-ésima de z, entonces vimos que $\frac{\tilde{\eta}}{\eta}$ es raíz n-ésima de la unidad. Por otro lado, si ω es una raíz de la unidad, entonces $\omega\eta$ es una raíz n-ésima de z, pues:

$$(\omega\eta)^n = \underbrace{\omega^n}_{=1}\underbrace{\eta^n}_{=z} = z$$

Por lo tanto, acabamos de ver que, fijada una raíz n-ésima de z particular, a cada raíz n-ésima de z da lugar a una raíz n-ésima de la unidad y, a su vez, cada raíz n-ésima de la unidad da lugar a una raíz n-ésima de z. Por lo tanto, para hallar todas las raíces n-ésimas de z, nos alcanza con encontrar una en particular y, luego, multiplicarla por cada una de las raíces n-ésimas de la unidad. Ahora, si $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ es la forma polar de z, entonces una posible raíz n-ésima de z es $\eta_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n}))$ (pueden comprobarlo elevando esta expresión a la n). Concluimos, entonces, que todas las raíces n-ésimas de z son:

- $\eta_0 = \eta_0\omega_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n}))$
- $\eta_1 = \eta_0\omega_1 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2\pi}{n}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+4\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+4\pi}{n}))$
- $\vdots$
- $\eta_{n-1} = \eta_0\omega_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}))$.

Notemos que los subíndices de los η_t los hemos elegido de manera que $\eta_t = \eta_0\omega_t = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2t\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2t\pi}{n}))$.

Ejemplo 81 Calculemos las raíces sextas de $1+i$. Por lo visto recién, vamos a necesitar calcular las raíces sextas de la unidad y una raíz sexta de $1+i$ particular. Sabemos que una tal raíz es $\eta_0 = \sqrt[6]{|1+i|}(\cos(\frac{\alpha}{6}) + i\sin(\frac{\alpha}{6}))$, donde $\alpha = arg(1+i)$. Como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$, entonces $\eta_0 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{\pi}{24}) + i\sin(\frac{\pi}{24}))$. Por otro lado, las raíces sextas de la unidad son los números complejos de la forma $\omega_t = \cos\left(\frac{2t\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2t\pi}{6}\right)$ para $t = 0,1,2,3,4,5$. Por lo tanto, las raíces sextas de $1+i$ son:

- $\eta_0 = \eta_0\omega_0 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{\pi}{24}) + i\sin(\frac{\pi}{24}))$
- $\eta_1 = \eta_0\omega_1 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{9\pi}{24}) + i\sin(\frac{9\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{17\pi}{24}) + i\sin(\frac{17\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{25\pi}{24}) + i\sin(\frac{25\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{33\pi}{24}) + i\sin(\frac{33\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{41\pi}{24}) + i\sin(\frac{41\pi}{24}))$

Estos números en general tienen partes reales e imaginarias muy complicadas de escribir, por lo que los dejaremos expresados en forma polar. Por ejemplo, $\eta_0 \approx 1,059460329406 + 0,002420479749i$ ■

7.5.3 Resolución de ecuaciones generales

Vamos a aprender a resolver ecuaciones con coeficientes complejos que incorporan todo lo que aprendimos en la unidad: raíces n-ésimas, módulos y conjugados. Mostramos las ideas principales de resolución en dos ejemplos. Busquemos, primero, todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que cumplan $z^3 = (1+i)(3-2i)^3$. Un posible camino es llevar a cabo las operaciones indicadas en el lado derecho de la igualdad (es decir, calcular el cubo de $3-2i$ y multiplicarlo por $1+i$) y, luego, hallar las raíces cúbicas del resultado. Este camino es efectivamente factible, pero muchas veces se pueden "reordenar" ciertas expresiones para hacer más fáciles los cálculos (o, directamente, nos lo podemos ahorrar). En este caso, como hay una potencia cúbica a cada lado de la igualdad, pasar el $(3-2i)^3$ dividiendo y reescribir:

$$\left(\frac{z}{3-2i}\right)^3 = 1+i$$

Esto nos está diciendo que *el número* $\frac{z}{3-2i}$ *es una raíz cúbica de* $1+i$. Ya sabemos calcular raíces n-ésimas para cualquier n, así que podemos hallar que las raíces cúbicas de $1+i$ son:

- $\eta_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- $\eta_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)$
- $\eta_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

Por lo tanto, estas son las tres posibilidades para $\frac{z}{3-2i}$. Si pasamos multiplicando el $3-2i$ hallamos los z buscados:

- $z_0 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- $z_1 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)$
- $z_2 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

Supongamos ahora que queremos hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\overline{z}^4 + z^2(2-2i)|z| = 0$. Siempre es una posibilidad plantear z en forma binomial, llevar a cabo las operaciones que indican la ecuación y tratar de despejar la parte real e imaginaria de z. Pero, como vimos en ejemplos anteriores, en general, la forma binomial no es muy cómoda a la hora de calcular potencias grandes de números. Elijamos, entonces, la forma polar. Recuerden que la forma polar de un número complejo está definida sólo para números no nulos, por lo que, siempre que resolvamos ecuaciones apelando a esta forma, debemos tratar por separado el caso $z=0$. En este caso, es claro que $z=0$ es una solución de esta ecuación. Ahora que ya la registramos como posible solución, la dejamos de lado y estudiamos si alguno de los números no nulos es también solución. Escribimos $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, con $\alpha = arg(z)$, y reemplazamos en la ecuación para obtener:

$$\underbrace{|z|^4(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha))}_{\overline{z}^4} + \underbrace{|z|^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))}_{z^2}(2-2i)|z| = 0$$

¿Cómo seguimos? Vimos que, por el Teorema de De Moivre, es muy sencillo multiplicar las formas polares de dos números complejos, pero no hay ningún resultado que nos diga cómo es la suma de este tipo de expresiones. Sí sabemos cómo lidiar con una igualdad de formas polares: sus módulos y argumentos deben coincidir. Por este motivo, lo mejor que podemos hacer, en este caso, es pasar uno de los términos de la suma al otro lado de la igualdad, con el fin de "deshacernos" de la suma y llevar la ecuación a una expesión de igualdad entre formas polares. Entonces, obtenemos:

$$|z|^4(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha)) = |z|^3(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))(-2+2i)$$

Aquí hemos juntado $|z|^2$ con el $|z|$ del final de la expresión y hemos incluido el signo "$-$" que aparece por haber pasado restando, dentro del paréntesis del número $2-2i$ (por este motivo aparece $-2+2i$ en su lugar). Ahora, como $|z| \neq 0$, pues descartamos el caso $z=0$, entonces podemos cancelar el $|z|^3$ a ambos lados de la igualdad (lo que deja solo un $|z|$ del lado izquierdo). Por otro lado, $-2+2i$ tiene por forma polar a $\sqrt{8}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$, por lo cual, luego de hacer la multiplicación por $(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$, la igualdad nos queda:

$$|z|(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha)) = \sqrt{8}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2 + \alpha\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Esta última, se asemeja a una igualdad de formas polares, pero ya sabemos que no lo es. Los ángulos involucrados no verifican ser posibles argumentos (pues podrían no estar dentro del rango $[0, 2\pi)$). Como este problema lo tenemos en ambos términos de la igualdad, sería muy complicado relacionar todos los posibles argumentos del término de la derecha con los posibles argumentos de la izquierda. ¡En este caso, lo más conveniente es volver a acudir al Teorema de De Moivre! ¿Cómo? ¡Pues podemos pasar dividiendo el término de la derecha! Recordemos que, al dividir números escritos en forma polar, se resta el argumento del divisor al del dividendo. Por lo tanto, nuestra ecuación equivale a:

$$\frac{|z|}{\sqrt{8}}\left(\cos\left(-6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 1$$

Ahora procedemos de manera análoga a cuando hallamos las raíces cuartas de la unidad (en la página 211). No sabemos si $-6\alpha - \frac{3\pi}{4}$ es un argumento válido ya que no podemos garantizar que caiga en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo tanto, debemos sumarle a esta expresión algún múltiplo entero de 2π para llevarlo a dicho intervalo. Como el argumento de 1 es 0, entonces al igualar argumentos nos queda la igualdad:

$$-6\alpha - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = 0$$

De aquí, despejamos que:

$$\alpha = \frac{k2\pi - \frac{3}{4}\pi}{6}$$

Como α representa el argumento del z, entonces debemos ver para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$ esta última expresión está en el intervalo $[0, 2\pi)$. Esto podemos hacerlo a mano, y descubrir que los únicos $k \in \mathbb{Z}$ que verifican esto son $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Por lo tanto, los posibles argumentos de z son $\alpha = \frac{5}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{21}{24}\pi, \frac{29}{24}\pi, \frac{37}{24}\pi, \frac{45}{24}\pi$. Por otro lado, como el módulo de 1 es 1, entonces $\frac{|z|}{\sqrt{8}} = 1$, de donde $|z| = \sqrt{8}$. Hemos hallado, entonces, que todas las soluciones de la ecuación $\overline{z}^4 + z^2(2 - 2i)|z| = 0$ son:

- $z_0 = 0$ (que habíamos hallado al comienzo)
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{5}{24}\pi) + i\sin(\frac{5}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{13}{24}\pi) + i\sin(\frac{13}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{21}{24}\pi) + i\sin(\frac{21}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{29}{24}\pi) + i\sin(\frac{29}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{37}{24}\pi) + i\sin(\frac{37}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{45}{24}\pi) + i\sin(\frac{45}{24}\pi))$

¿Qué hicimos en el apartado 7.5?

- Estudiamos las raíces n-ésimas de la unidad y de un número complejo genérico.
- Vimos como resolver algunas ecuaciones generales que involucran a los números complejos.