6. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son un tipo de funciones entre espacios vectoriales, que preservan su geometría lineal. Las mismas sirven para modelar una gran variedad de operaciones geométricas, tales como rotaciones, simetrías, proyecciones, etc. En este capítulo estudiaremos su definición, propiedades y aplicaciones.

6.1 La transformación lineal

Comencemos entendiendo la propiedad definitoria de las transformaciones lineales, sus características principales y la manera de representarlas.

En este apartado estudiaremos...

- La definición transformación lineal.
- Ejemplos de varias transformaciones lineales.
- Las propiedades básicas de estas funciones.
- La representación funcional y la representación matricial de una transformación lineal.
- Cómo construir transformaciones lineales.

■

6.1.1 ¿Que caracteriza a una transformación lineal?

La idea fundamental de una transformación lineal es que envía un espacio lineal a otro espacio lineal, respetando las operaciones (de suma y producto por escalar) definidas en estos espacios. Por ejemplo, envía una recta L a otra recta L', pero lo hace de forma tal que, entre otras cosas, si el punto $P \in L$ es enviado al punto $P' \in L'$ y, el punto $Q \in L$, a $Q' \in L'$, entonces el punto medio entre P y Q es enviado al punto medio entre P' y Q'. ¿Qué característica de una función nos garantiza tener esta propiedad? Sabemos que el punto medio entre P y Q se calcula $\frac{P+Q}{2}$. Tengamos en cuenta que, si solicitamos que la función en cuestión envíe "sumas en sumas" (en el sentido que a un punto $P+Q$ lo envíe a $P'+Q'$) y que, además, envíe "múltiplos en múltiplos" (en el sentido que a un múltiplo λP lo envíe a $\lambda P'$), entonces tendremos garantizado que el punto medio entre P y Q también sea enviado al punto medio entre P' y Q'. En efecto, $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(P+Q)$, por lo cual es enviado al múltiplo de $\frac{1}{2}$ del destino de $P+Q$, que es precisamente $P'+Q'$. Estas propiedades de respetar la suma y el producto por escalar son, entonces, las propiedades características de las transformaciones lineales.

Definición 55 Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una *transformación lineal* si cumple las siguientes dos condiciones:

1. $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Observación 25 *Las dos propiedades definitorias de las transformaciones lineales (contenidas en la definición anterior) pueden expresarse informalmente diciendo que "sacan escalares afuera" y "abren sumas".*

Como una transformación lineal es una función entre un espacio $\mathbb{R}^n$ y un espacio $\mathbb{R}^m$, entonces, a cada punto $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, le asigna un punto $(y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m$. Si llamamos T a la transformación lineal, entonces $T(x_1,\dots,x_n)$ respresenta al punto $(y_1,\dots,y_m)$ (al igual que $f(x)$ suele representar la imagen del punto x por la función real f). Al igual que las funciones de valores reales, el espacio de salida $\mathbb{R}^n$ se lo llama el *dominio* de la transformación lineal y al espacio de llegada $\mathbb{R}^m$, el *codominio*. Como $(y_1,\dots,y_m)$ depende de quién es $(x_1,\dots,x_n)$, entonces cada coordenada de $(y_1,\dots,y_m)$ depende de las coordenadas $x_1,\dots,x_n$. Veremos en breve que esta dependencia es por medio de una relación lineal. Por ejemplo, la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 5x_2, 3x_1-2x_2)$, es una transformación lineal entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El punto $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ es enviado al punto:

$$T(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{2}_{x_2}) = (\underbrace{1+2}_{x_1+x_2},\underbrace{5{,}2}_{5x_2},\underbrace{3{,}1-2{,}2}_{3x_1-2x_2}) = (3,10,-1) \in \mathbb{R}^3$$

■ **Ejemplo 57**

- Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)$, entonces T es una transformación lineal. Veamos que cumple las dos condiciones de la definición. Para saber que saca escalares afuera, veamos cuánto es $T(\lambda(x_1,x_2,x_3))$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1,x_2,x_3)) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (2\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - 4\lambda x_3) \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es ver que esta última expresión es igual a $\lambda T(x_1,x_2,x_3)$. Para ello, saquemos λ de factor común:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1,x_2,x_3)) &= (2\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - 4\lambda x_3) \\ &= \big(\lambda(2x_1+x_2-x_3), \lambda(x_1-4x_3)\big) \\ &= \lambda(2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3) \\ &= \lambda T(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

Esto prueba que T cumple la primera condición para ser transformación lineal. Veamos ahora que T también abre sumas:

$$\begin{aligned} T((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) &= T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= \big(2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3), (x_1+y_1)-4(x_3+y_3)\big) \\ &= (2x_1+2y_1+x_2+y_2-x_3-y_3, x_1+y_1-4x_3-4y_3) \end{aligned}$$

Debemos comprobar que esta última expresión es igual a $T(x_1,x_2,x_3)+T(y_1,y_2,y_3)$. Para ello, agrupemos, por un lado, las coordenadas con x_1, x_2 o x_3 y, por el otro, las que tienen y_1, y_2 o y_3. Entonces:

$$\begin{aligned} T((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) &= (2x_1+2y_1+x_2+y_2-x_3-y_3, x_1+y_1-4x_3-4y_3) \\ &= (2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)+(2y_1+y_2-y_3, y_1-4y_3) \\ &= T(x_1,x_2,x_3)+T(y_1,y_2,y_3). \end{aligned}$$

Con esto, hemos terminado de probar que T es una transformación lineal.

- Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está ahora definida por $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2-x_3+1, x_1-4x_3)$, entonces T **no** es una transformación lineal. Por ejemplo, no se cumple la segunda condición: $T((0,0,0)+(0,0,0)) = T(0,0,0) = (1,0)$. Pero $T(0,0,0)+T(0,0,0) = (1,0)+(1,0) = (2,0)$.
- Por último, si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2-x_3, x_1^2-4x_3)$, entonces T *tampoco* es una transformación lineal. No se cumple, por ejemplo, la primera condición: $T(2(1,0,0)) = T(2,0,0) = (4,4)$, pero $2T(1,0,0) = 2(2,1) = (4,2)$. O sea $T(2(1,0,0)) \neq 2T(1,0,0)$.

■

Los siguientes son ejemplos de funciones, estudiadas en la escuela secundaria, que siempre son transformaciones lineales:

■ **Ejemplo 58**

- La *función nula* $\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $\mathbf{0}(\vec{v}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- La *función identidad* $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- La *función lineal con ordenada al origen cero* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Experimento 32 Muestren que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cumple las siguientes propiedades:

- $T(\vec{0}) = \vec{0}$;
- $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$;
- $T(\vec{v}-\vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$ para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$;
- $T(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\cdots+\alpha_r\vec{v_r}) = \alpha_1 T(\vec{v_1})+\alpha_2 T(\vec{v_2})+\cdots+\alpha_r T(\vec{v_r})$ para todo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ y $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$.

■

Observación 26 *La última propiedad del experimento anterior dice que las transformaciones lineales mandan una combinación lineal de los $v_1, \ldots, v_r$ en* la misma combinación lineal *en los $T(v_1), \ldots, T(v_r)$ (en el sentido que los coeficientes son los mismos).*

6.1.2 Forma funcional y matricial de una transformación lineal

Analicemos la tranformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ del primer ejemplo del apartado anterior con más detalle. Recordemos la fórmula: $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)$. Esta es la *forma funcional* de la transformación lineal (está escrita en forma de función). Recordemos que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la base de este espacio compuesta por los vectores $\{(1,0,0,\ldots,0,1),(0,1,0,\ldots,0,1),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)\}$. En particular, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Veamos qué hace T con los vectores de esta base.

- $T(1,0,0) = (2{,}1+0-0, 1-4{,}0) = (2,1)$,
- $T(0,1,0) = (2{,}0+1-0, 0-4{,}0) = (1,0)$,
- $T(0,0,1) = (2{,}0+0-1, 0-4{,}1) = (-1,-4)$.

En general, para un punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera, tenemos:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= T(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) \\ &= T(x_1(1,0,0)) + T(x_2(0,1,0)) + T(x_3(0,0,1)) \\ &= x_1 T(1,0,0) + x_2 T(0,1,0) + x_3 T(0,0,1) \\ &= x_1(2,1) + x_2(1,0) + x_3(-1,-4) \\ &= (2x_1, x_1) + (x_2, 0) + (-x_3, -4x_3) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3). \end{aligned}$$

¿Qué pasó al final? ¡Volvimos a la fórmula original! *Es que, al saber lo que hace una transfomación lineal en una base del dominio, se puede deducir lo que hace con un vector cualquiera.* Volveremos sobre esta idea en el siguiente apartado. Por otra parte, observemos que la última expresión se puede reescribir en *forma matricial* de la siguiente manera:

$$(2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 4x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ es la *matriz asociada* a la transfomación lineal T. En sus columnas tiene, en orden, las imágenes de los vectores de la base canónica. Notemos que, como T va de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, entonces $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Definición 56 Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que T puede escribirse en la forma:

$$T(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o de modo equivalente,

$$T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v},$$

donde el vector $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$. La representación $T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ se llama *expresión matricial canónica* de T y a la matriz A se la denomina la *matriz de la transformación lineal* T. La matriz A tiene en la columna i-ésima a vector $T(\vec{e_i})$, con $\vec{e_i}$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector que tiene un 1 en la coordenada i y 0 en el resto de las coordenadas).

Si ahora consideramos una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y definimos una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por medio de la fórmula:

$$T(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

, entonces es fácil ver que T resulta una transformación lineal. Por lo tanto, *a cada transformación lineal le corresponde una matriz (su matriz asociada canónica) y a cada matriz le corresponde una transformación lineal (la determinada por la multiplicación de un vector por la matriz).* Por lo tanto, la forma funcional y la forma matricial son maneras equivalentes de representar una misma transformación lineal.

Ejemplos 59

- La matriz asociada a la transformación lineal $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 5x_2, 3x_1 - 2x_2)$ es: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Por lo tanto, la forma matricial de T es:

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

- La transformación lineal asociada a la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ tiene por forma funcional a $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_3, 5x_1 + 3x_2 - 2x_4)$.

■

Observación 27 *Observemos que, cuando la transformación lineal es dentro del mismo espacio $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz asociada es cuadrada.*

6.1.3 Cómo construir transformaciones lineales

Tal como establecimos en el apartado anterior, una transformación lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base de su dominio. Veamos un ejemplo. Hallemos, si es posible, una transformación lineal T que vaya de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (1,0,1)$ y $T(0,1) = (1,2,3)$. Luego, buscamos la expresión funcional de T. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, se puede escribir:

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

Si aplicamos T a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$T(x_1, x_2) = T(x_1(1,0) + x_2(0,1))$$

Como estamos buscando una transformación lineal, entonces debemos requerir que T abra sumas y saque escalares afuera. Por lo tanto, si abrimos primero la suma y, luego, sacamos los escalares x_1, x_2 afuera, obtenemos lo siguiente:

$$T(x_1, x_2) = x_1 T(1,0) + x_2 T(0,1)$$

Dado que $T(1,0)$ y $T(0,1)$ son datos, entonces, queda:

$$T(x_1, x_2) = x_1(1,0,1) + x_2(1,2,3) = (x_1, 0, x_1) + (x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2, x_1 + 3x_2)$$

Esta es la forma funcional de una transformación lineal. Observemos que T quedó unívocamente determinada por los valores $T(1,0)$ y $T(0,1)$: la transformación lineal tiene que ser necesariamente $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2, x_1 + 3x_2)$. Esto tiene que ver con que tenemos el dato de cuanto vale T en los vectores de una base. ¿Qué hubiera sucedido si nos hubieran dado los valores de T en una base que no es canónica? Miren el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 60** Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,1)$ y $T(-1,1) = (1,2,3)$. En este caso, nos dan como dato los valores de la transformación lineal en la base $\{(1,1),(1,-1)\}$, que no es la base canónica. Pero esto no representa inconveniente alguno, ya que podemos realizar el mismo razonamiento que acabamos de hacer más arriba. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, como $\{(1,1),(1,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, se puede escribir:

$$(x_1, x_2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1)$$

En este caso, hay que trabajar un tanto más pues debemos hallar α_1 y α_2. Si desarrollamos la expresión anterior, queda:

$$(x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Si igualamos coordenada a coordenada, obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas del que queremos despejar α_2 y α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

Observamos que $\alpha_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $\alpha_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$. Entonces, podemos escribir:

$$(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1, 1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1, -1).$$

Si aplicamos T a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \tfrac{x_1+x_2}{2} T(1,1) + \tfrac{x_1-x_2}{2} T(1,-1) = \\ &= \tfrac{x_1+x_2}{2}(1,0,1) + \tfrac{x_1-x_2}{2}(1,2,3) = \\ &= \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, 0, \tfrac{x_1+x_2}{2}\right) + \left(\tfrac{x_1-x_2}{2}, 2\tfrac{x_1-x_2}{2}, 3\tfrac{x_1-x_2}{2}\right) = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2, x_1 - x_2, \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2\right) = \\ &= (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Y esta es la fórmula de la transformación lineal pedida. ■

El razonamiento que hicimos en el ejemplo anterior se puede realizar en una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ general: si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de la base:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Si aplicamos T a ambos miembros y usamos las propiedades definitorias de las transformaciones lineales, obtenemos:

$$T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n T(\vec{v}_n).$$

Por lo tanto, para calcular $T(\vec{v})$, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, solo necesitamos conocer $T(v_1)$, $T(v_2)$, ..., $T(v_n)$.

Teorema 28 Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en $\mathbb{R}^m$, entonces hay una *única* transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \ldots, T(v_n) = w_n$.

Tengamos en cuenta que, en el enunciado del teorema anterior, no hay restricciones sobre quienes pueden ser los $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$. Pueden ser vectores cualesquiera. Por ejemplo, hallemos, si es posible, una transformación lineal T tal que $T(1,0,0) = (1,1,2)$, $T(0,1,0) = (-1,2,3)$ y $T(2,2,1) = (0,1,2)$. Este caso es análogo a la construcción que realizamos en el ejemplo anterior, dado que $\{(1,0,0), (0,1,0), (2,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ es un elemento cualquiera, entonces:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(2,2,1)$$

Les proponemos verificar que se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 &= x_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= x_2 \\ \alpha_3 &= x_3 \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $\alpha_1 = \dfrac{x_1 - 2x_3}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{x_2 - 2x_3}{2}$ y $\alpha_3 = x_3$. Por lo tanto,

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - 2x_3}{2}(1,0,0) + \frac{x_2 - 2x_3}{2}(0,1,0) + x_3(2,2,1).$$

Si aplicamos T a ambos lados, resulta:

$$\begin{aligned} T(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{x_1-2x_3}{2}T(1,0,0)+\tfrac{x_2-2x_3}{2}T(0,1,0)+x_3T(2,2,1)= \\ &= \tfrac{x_1-2x_3}{2}(1,1,2)+\tfrac{x_2-2x_3}{2}(-1,2,3)+x_3(0,1,2)= \\ &= \left(\tfrac{x_1-x_2}{2},\tfrac{x_1+2x_2-4x_3}{2},\tfrac{2x_1+3x_2-6x_3}{2}\right) \end{aligned}$$

Esta es la forma funcional de T.

Importante Si los datos no están formulados sobre una base de $\mathbb{R}^n$, pueden pasar varias cosas: o bien no existe una transformación lineal que verifique los datos pedidos, o bien existe, pero no es es única. ■

■ **Ejemplos 61**

- Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0)=(1,1,2)$, $T(0,1,0)=(-1,2,3)$ y $T(2,2,0)=(0,1,3)$. Notemos que $\{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0)\}$ *no* es una base de $\mathbb{R}^3$. En efecto,

$$(2,2,0)=2(1,0,0)+2(0,1,0).$$

  Si existiera una transformación lineal que verifique los datos proporcionados debería, por las propiedades de las transformaciones lineales, preservar esa relación:

$$T(2,2,0)=2T(1,0,0)+2T(0,1,0).$$

  Sin embargo, tenemos:

$$T(2,2,0)=(0,1,3)\neq(0,6,10)=2(1,1,2)+2(-1,2,3)=2T(1,0,0)+2T(0,1,0).$$

  Concluimos que *no existe* una transformación lineal verificando los datos proporcionados: *las condiciones impuestas son incompatibles*.

- Hallemos ahora, y si es posible, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que: $T(1,0,0)=(1,1,2)$, $T(0,1,0)=(-1,2,3)$ y $T(2,2,0)=(0,6,10)$. Observemos que los datos para construir la transformación lineal, en este caso, son idénticos a los del ejemplo anterior, salvo que, ahora, el vector $(2,2,0)$ va a parar al $(0,6,10)$ (en lugar del $(0,1,3)$). Si revisamos el ejemplo anterior, vemos que *ahora sí* es compatible el valor que toma $(2,2,0)$ con los valores que asumen los otros dos vectores dato. ¿Qué sucede en este caso? El último dato no nos aporta información ni restricciones sobre la transformación lineal T que estamos buscando. Como vimos antes, podría determinar que no exista la transformación lineal (si fuese incompatible con las otras), pero si es compatible, no nos dice nada. Entonces, ¿cómo definimos una T que satisfaga los datos requeridos? La forma más fácil de definir una transformación lineal es decir qué valores toma en una base. Extendamos, entonces, el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ (que son los vectores linealmente independientes de los cuales podemos utilizar los datos proporcionados) a una base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, a la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Dado que $T(1,0,0)=(1,1,2)$ y $T(0,1,0)=(-1,2,3)$, nos falta determinar $T(0,0,1)$. Pero el valor de $T(0,0,1)$ lo podemos elegir sin restricciones. Esto indica que existen infinitas posibles transformaciones lineales que verifiquen lo pedido: las condiciones impuestas son compatibles pero no la determinan de manera única. Por ejemplo, podemos decidir $T(0,0,1)=(0,0,0)$. En ese caso, nos quedaría la transformación lineal:

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+2x_2,2x_1+3x_2-x_3),$$

  .

■

¿Qué hicimos en el apartado 6.1?

- Aprendimos la idea detrás de la noción de transformación lineal: una función que preserva la estructura de los espacios lineales.
- Trabajamos la definición formal de transformación lineal: "abre sumas" y "saca escalares afuera".
- Conocimos las propiedades básicas de las transformaciones lineales.
- Desarrollamos la forma funcional y la forma matricial de una transformación lineal.
- Vimos cómo construir transformaciones lineales.

■

6.2 Imagen y núcleo

Muchas propiedades de una transformación lineal se pueden estudiar a partir de su comportamiento respecto de ciertos subespacios del dominio o del codominio.

En este apartado estudiaremos...

- Las definiciones de imagen y de núcleo de una transformación lineal.
- La clasificación de transformaciones lineales según sean inyectivas, suryectivas o biyectivas.

■

6.2.1 Imagen

Consideremos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, llamamos al vector $T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$ la *imagen* de $\vec{v}$ por la transformación lineal T. En general, si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, podemos calcular $T(S)$, la *imagen de S por T*, que se obtiene calculando, "todas juntas", las imágenes por T de todos los vectores $\vec{v} \in S$. Es decir,

$$T(S) = \{T(\vec{v}) : \vec{v} \in S\} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m : w = T(\vec{v}) \text{ para algún } \vec{v} \in S\}.$$

$T(S)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Para verificar si un vector dado $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ pertenece a $T(S)$, debemos hallar un $\vec{v} \in S$ de modo que $\vec{w} = T(\vec{v})$ (en este caso, $\vec{v}$ se llama la *preimagen* del vector $\vec{w}$). Este procedimiento es muy parecido al que se realiza cuando se busca hallar la imagen de una función.

Definición 57 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, la *imagen de T* es el conjunto:

$$Im(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m : \vec{w} = T(\vec{v}) \text{ para algún } \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

La imagen de una transformación lineal es, entonces, el conjunto de todos los valores que puede tomar T.

Experimento 33 Muestren que, si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(S)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. ■

El experimento anterior nos dice que una transformación lineal manda subespacios en subespacios. En particular, dado que $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo, entonces $Im(T) = T(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

¿Cómo hallar la imagen de una transformación lineal? Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$. Por definición, un elemento $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $Im(T)$ si, y sólo si, se puede escribir como $(y_1, y_2, y_3) = T(x_1, x_2, x_3)$ para algún $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Como $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$, entonces buscamos los $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$$

Pero:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2, x_2-x_3, 2x_1-3x_2+x_3) &= (x_1,0,2x_1)+(x_2,x_2,-3x_2)+(0,-x_3,x_3)\\ &= x_1(1,0,-2)+x_2(1,1,-3)+x_3(0,-1,1)\end{aligned}$$

Entonces, concluimos que $(y_1,y_2,y_3) = x_1(1,0,-2)+x_2(1,1,-3)+x_3(0,-1,1)$; es decir, $(y_1,y_2,y_3) = \langle(1,0,-2),(1,1,-3),(0,-1,1)\rangle = \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle$, pues $(1,0,-2)-(1,1,-3) = (0,-1,1)$. Por lo tanto, hemos hallado que $Im(T) = \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle$.

Podemos dar otra manera de calcular $Im(T)$. Consideremos la definición de imagen siguiente:

$$Im(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{T(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^n\}$$

Sabemos que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y todo vector $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de esta base de la siguiente manera:

$$(x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$$

Si aplicamos la transformación lineal a ambos lados, obtenemos:

$$T(x_1,x_2,x_3) = x_1T(1,0,0)+x_2T(0,1,0)+x_3T(0,0,1);$$

es decir, ¡los vectores de la imagen son las combinaciones lineales de $\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}$! Por lo tanto:

$$\begin{aligned}Img(T) = T(\mathbb{R}^n) &= \langle T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\rangle\\ &= \langle(1,0,-2),(1,1,-3),(0,-1,1)\rangle\\ &= \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle\end{aligned}$$

Este último procedimiento para calcular la imagen de una transformación lineal se puede realizar en forma general, a partir de la definición del siguiente teorema:

Teorema 29 Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una transfomación lineal. Si $B = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\ldots,T(\vec{v}_n)\}$ es un sistema de generadores de $Im(T)$.

Importante Si $B = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\}$ es una base, entonces $\{T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\cdots,T(\vec{v}_n)\}$ *no necesariamente es una base* de $Im(T)$; los vectores $T(\vec{v}_1),\ldots,T(\vec{v}_n)$ podrían resultar linealmente dependientes. ■

Si $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una transformaicón lineal, analicen si es posible que $\dim(Im(T)) = 3$. Y, en general, cuál puede ser la máxima dimensión de la imagen. Estudien esta misma característica si $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

■ **Ejemplo 62** Sean S y W dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por $S = \langle(1,2,-1),(0,1,3)\rangle$ y $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2 = 0, x_3-2x_4 = 0\}$. Hallemos, si existe, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $T(S) = W$. En primer lugar, busquemos la descripción por generadores de T:

$$\begin{aligned}V &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2 = 0, x_3-2x_4 = 0\}\\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2, x_3 = 2x_4\}\\ &= \{(-x_2,x_2,2.x_4,x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_2,x_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x_2(-1,1,0,0)+x_4(0,0,2,1) : x_2,x_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \langle(-1,1,0,0),(0,0,2,1)\rangle\end{aligned}$$

Para definir una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, basta especificar los valores que toma en una base del dominio (en este caso, $\mathbb{R}^3$). Como queremos asegurarnos que $T(S) = W$, debemos "manipular" convenientemente las imágenes de los vectores de la base de S. Extendemos la base de S a una base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, $\mathcal{B} = \{(1,2,-1),(0,1,3),(0,0,1)\}$ es una posible base de $\mathbb{R}^3$. Ahora, definimos:

- $T(1,2,-1) = (-1,-1,0,0)$
- $T(0,1,3) = (0,0,2,1)$,

lo cual nos garantiza que $T(S) \subset W$. ¿Qué sucede con $T(0,0,1)$? Dado que $(0,0,1) \notin S$, no hay restricciones para determinar $T(0,0,1)$. Podemos elegir, por ejemplo, $T(0,0,1) = (0,0,0,1)$. Dado que:

$$T(S) = \langle T(1,2,-1), T(0,1,3)\rangle = \langle(-1,-1,0,0),(0,0,2,1)\rangle = W,$$

la transformación lineal así definida satisface $T(S) = W$. ■

Experimento 34 Consideren una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con expresión funcional $T(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$. Verifiquen que la matriz canónica asociada a T tiene, en sus columnas, a las imágenes por T de los vectores de a base canónica de $\mathbb{R}^2$. ■

Observación 30 *Notemos que, del experimento anterior, podemos concluir que $Im(T)$ está generada por los vectores columna de A_T y que $\dim(Im(T)) = rg(A_T)$.*

6.2.2 Núcleo

Para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$, nos interesará averiguar qué vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tienen como imagen a $\vec{w}$; es decir, $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Recordemos que este conjunto se llama la *preimagen de w* por T, y se define por:

$$T^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

En general, si $W \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, la *preimagen de W* por T es el conjunto de vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ cuya imagen pertenece a W. Es decir:

$$T^{-1}(W) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) \in W\}.$$

En particular, nos interesará calcular el conjunto de vectores del dominio donde la transformación lineal se anula. Este conjunto se denomina *núcleo de T*, y se puede pensar como el "conjunto de ceros" de la función T.

Definición 58 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, el *núcleo* de T es el conjunto:

$$Nu(T) = T^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Experimento 35 Comprueben que, si W es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $T^{-1}(W)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. ■

Observemos que, del experimento anterior, dado que $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $Nu(T) = T^{-1}(0)$ es siempre un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

■ **Ejemplo 63** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$. Entonces:

$$\begin{aligned} Nu(T) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (0, 0)\} \\ &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\,, x_2 - x_3 = 0\big\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2, x_3 = x_2\} \\ &= \{(x_2, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1, 1, 1)\rangle \end{aligned}$$

Observemos que, para hallar $Nu(T)$, tuvimos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

que proviene de igualar a cero cada coordenada de la expresión de T. La expresión matricial de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¡Notemos que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz A_T asociada a T! ■

La situación del ejemplo anterior ocurre en general. Lo enunciamos en la siguiente observación.

Observación 31 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y A_T es la matriz canónica asociada a T, entonces $Nu(T)$ es el espacio de soluciones del sistema homogéneo $A_T \cdot \vec{x} = \vec{0}$.*

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $Nu(T)$ es un subespacio del dominio e $Im(T)$ es un subespacio del codominio; es decir, estos subespacios "viven" en lugares distintos. Sin embargo, hay una relación muy fuerte entre sus dimensiones:

Teorema 32 *[Teorema de la dimensión]* Para cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, vale que:

$$\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = n$$

Es decir, la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen coincide con la dimensión del dominio de la transformación lineal.

6.2.3 Clasificación de transformaciones lineales

Vamos a estudiar cómo se clasifican las transformaciones lineales según sean suryectivas, inyectivas o biyectivas.

Definición 59 Decimos que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es:

- *Monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica que si $T(\vec{v}) = T(\vec{w})$ entonces $\vec{v} = \vec{w}$.
- *Epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $Im(T) = \mathbb{R}^m$.
- *Isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Verificar la inyectividad en una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cualquiera puede resultar bastante complicado, pues hay que verificar que a cada vector de la imagen de f proviene de un único vector del dominio. En otras palabras, la función f es inyectiva si, para cada $\vec{w} \in Im(f)$, $f^{-1}(\vec{w})$ tiene un único elemento.

Para las transformaciones lineales, verificar la inyectividad es más simple. Sabemos que toda transformación lineal T tiene al vector nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ en la imagen, y que $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Si T es monomorfismo, entonces $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ debe ser el *único* vector del dominio que llegue a $\vec{0}$. Es decir, $T^{-1}(0) = Nu(T)$ debe ser igual al subespacio nulo $\{\vec{0}\}$. Pero aún nos faltaría verificar que $T^{-1}(\vec{w})$ tiene un único elemento para el resto de los vectores $\vec{w}$ en la imagen. La buena noticia es que, para transfomaciones lineales, esto no es necesario.

Proposición 33 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces T es monomorfismo sí, y solo sí, $Nu(T) = \{\vec{0}\}$.

No es difícil demostrar esta proposición. Es claro que, si T es monomorfismo, entonces $Nu(T) = \{\vec{0}\}$. Para ver la otra implicación, supongamos que $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ pero que existe un vector no nulo $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ que es imagen de dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ distintos. ¿Qué sucede con el vector $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$? ¿Cuál es su imagen? Usando las propiedades de la tranformación lineal tenemos:

$$T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}.$$

Es decir, el vector $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in Nu(T)$. Pero este vector no es el vector nulo, pues estábamos asumiedo que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ eran distintos. Esto contradice que $Nu(T) = \{\vec{0}\}$, que era una de nuestras hipótesis. Esto prueba la proposición anterior.

Anteriormente, vimos que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces no necesariamente $\{T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$,..., $T(\vec{v}_r)\}$, resulta linealmente independiente. Se puede mostrar que, si la transformación lineal es un monomorfismo, entonces sí se verifica esta condición:

Proposición 34 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Si T es monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_r)\}$ es linealmente independiente. En particular, $\dim(Im(T)) = n$.

Observemos que, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es una base de $Im(T)$. Si, además, T es epimorfismo, entonces $Im(T) = \mathbb{R}^m$. En este caso, necesariamente, debe ocurrir que $n = m$ y que $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es, en realidad, una base de $\mathbb{R}^n$. Podemos enunciarlo de la siguiente manera:

Proposición 35 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces T es isomorfismo sí, y solo sí, T manda bases en bases; es decir, si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^n$.

■ Ejemplos 64

- Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nu(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_1 - x_2 = 0\}$ e $Im(T) = \langle(1, 0, 1)\rangle$. Escribamos un sistema de generadores de $Nu(T)$:

$$\begin{aligned} Nu(T) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_1 - x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_1, 2x_1) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1, 2)\rangle \end{aligned}$$

  Definamos la transformación lineal buscada exhibiendo las imágenes por T de una base del dominio. Extendamos $\{(1, 2)\}$ a una base de $\mathbb{R}^2$; por ejemplo, $\{(1, 2), (0, 1)\}$. Dado que $(1, 2) \in Nu(T)$ y $(1, 0, 1) \in Im(T)$, podemos decir:

  - $T(1, 2) = (0, 0, 0)$
  - $T(0, 1) = (1, 0, 1)$

Sabemos que, entonces, existe una única transfomación lineal que cumple estas asignaciones. Verifiquemos que se cumplen las condiciones pedidas. Por un lado, tenemos:

$$Im(T) = \langle T(1,2), T(0,1)\rangle = \langle (0,0,0), (1,0,1)\rangle = \langle (1,0,1)\rangle.$$

Por otro lado, veamos que $Nu(T) = \langle (1,2)\rangle$. Por definición, $(1,2) \in Nu(T)$ y, entonces, $\langle (1,2)\rangle \subseteq Nu(T)$. ¿Puede ocurrir que $Nu(T)$ sea "más grande" que el subespacio $\langle (1,2)\rangle$? Si recordamos el Teorema de la dimensión (en la página 177), se tiene que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Dado que $\dim(Im(T)) = 1$, resulta necesariamente $\dim(Nu(T)) = 1$. Por lo tanto, $\langle (1,2)\rangle = Nu(T)$.

- Hallemos ahora, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que T sea epimorfismo y $Nu(T) = \langle (1,1,2)\rangle$. En este caso, si existiera una tal transformación lineal, debería verificarse, nuevamente, por el Teorema de la dimensión, que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 3$. Pero en las condiciones pedidas, $\dim(Nu(T)) = 1$, y como T debe ser epimorfismo, $Im(T) = \mathbb{R}^3$, es decir, $\dim(Im(T)) = 3$. De esta manera, obtendríamos $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 1 + 3 = 4$, lo cual es imposible. Por lo tanto, podemos concluir que no existe la transformación lineal pedida.

■

Supongamos que tenemos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; es decir, con el mismo codominio que dominio. ¿Qué sucede si T es monomorfismo? En este caso, $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ o, lo que es equivalente, $\dim(Nu(T)) = 0$. El Teorema de la dimensión nos dice que $0 + \dim(Im(T)) = n$. Pero como $Im(T) \subset \mathbb{R}^n$ y ambos subespacios tienen la misma dimensión entonces $Im(T) = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, concluimos que T es epimorfismo. ¿Qué sucede si, ahora, supiéramos que T es epimorfismo? El mismo razonamiento nos muestra que, entonces, $\dim(Nu(T)) = 0$, y esto quiere decir que T es monomorfismo. Notamos entonces que estas características están muy ligadas entre sí para transformaciones lineales con el mismo dominio y codominio. Lo enunciamos a continuación:

Proposición 36 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes, ya que T es:

- Monomorfismo.
- Epimorfismo.
- Isomorfismo.

¿Qué hicimos en el apartado 6.2?

- Introducimos la definición de imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como el conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^m$ que provienen de un vector de $\mathbb{R}^n$ por T.
- Definimos el núcleo de una transformación lineal, que consta de todos los vectores del dominio que son mandados al 0 por la transformación lineal.
- Estudiamos la clasificación de transformaciones lineales en epimorfismos (suryectivas), monomorfismos (inyectivas) e isormofismos (biyectivas) y su relación con el núcleo y la imagen de la transformación.

■

6.3 Interpretación geométrica del efecto de una transformación lineal

Muchas de las construcciones que estudiamos como proyecciones y simetrías en el capítulo 2 son realmente tranformaciones lineales. Por otro lado, algunas transformaciones lineales T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ pueden interpretarse geométricamente como rotaciones, proyecciones, simetrías, etc. En este apartado veremos cómo construirlas y clasificarlas.

En este apartado estudiaremos...

- La interpretación de las simetrías y las proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, como transformación lineal.
- La interpretación geométrica de ciertas tranformaciones lineales: rotaciones, simetrías, proyecciones, homotecias, deslizamientos cortantes.
- El efecto de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ sobre el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$.
- La interpretación geométrica del determinante de una matriz cuadrada.

Comencemos por las *Rotaciones en* $\mathbb{R}^2$. Consideremos un instante las agujas de un reloj. Si miramos el reloj en dos momentos distintos, el movimiento de cada aguja se puede modelar con una transformación lineal. Basta imaginar que la aguja es un vector y el reloj, el plano $\mathbb{R}^2$. Supongamos, entonces, que queremos rotar el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un ángulo $\theta > 0$ *en el sentido contrario a las agujas del reloj*, y que el vector obtenido luego de la rotación es el (x', y'). Si $||(x, y)|| = r$ y α es el ángulo entre el vector (x, y) y el vector $(r, 0)$ entonces, por trigonometría,

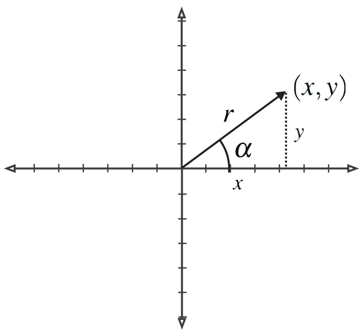

Figura 6.1: Rotación de un vector en $\mathbb{R}^2$.

$\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ y $\sin(\alpha) = \frac{y}{r}$ (Figura 6.1). Es decir:

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$$

Por otra parte, *rotar no cambia longitud del vector*, por lo que $||(x', y')|| = r$. Haciendo un razonamiento análogo al anterior, tenemos que $\cos(\alpha+\theta) = \frac{x'}{r}$ y $\sin(\alpha+\theta) = \frac{y'}{r}$. Es decir:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

Si ahora usamos algunas identidades trigonométricas obtenemos, por un lado:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r\big(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)\big) \\ &= r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{aligned}$$

y, por otro lado:

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha+\theta) \\ &= r\big(\cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta)\big) \\ &= r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \\ &= x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos hallado que:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

Esto podemos escribirlo en notación matricial y obtener:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El razonamiento anterior motiva, entonces, la siguiente definición:

Definición 60 Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que representa la rotación de ángulo $\theta > 0$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj, entonces la matriz canónica asociada a T es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

¿Qué sucede ahora si queremos rotar *en el sentido de las agujas del reloj*? En este caso, decimos que rotamos en un ángulo $-\theta$. Es decir, el signo del ángulo indicará la orientación de la rotación.

Rotar el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un ángulo $\theta > 0$ en el sentido de las agujas de reloj, para obtener (x', y') corresponde entonces a la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Experimento 36 ¿Cuál es la matriz de la transformación lineal que rota un vector (x, y) en $\frac{\pi}{4}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj? ¿En qué vector se transforma el vector $(1, 1)$ luego de dicha rotación? Represéntelo también gráficamente. ■

¿Qué sucede con rotaciones en $\mathbb{R}^3$? Imaginemos nuevamente un reloj pero, esta vez, considerémoslo como habitando el espacio tridimensional; es decir, pensémoslo colgado sobre una pared en una habitación. En este caso, las agujas también rotan, pero lo hacen *respecto del eje perpendicular al reloj*. Es decir, si pensamos a las agujas como contenidas en el plano xy, la dirección que sale perpendicularmente del reloj correspondería al eje z; y la rotación de las agujas es respecto de este eje. En este libro, sólo estudiaremos rotaciones tridimensionales respecto de uno de los ejes. Para este caso, la interpretación de este efecto como transformación lineal es muy sencilla, ya que, realmente, sólo se modifican las coordenadas x e y de los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (la coordenada z queda inalterada). Además, la manera cómo se tranforman las coordenadas x e y es, exactamente, como una rotación del plano xy. En definitiva, arribamos a la siguiente definición:

Definición 61 Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal que representa la rotación de ángulo $\theta > 0$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj *respecto del eje* z, entonces la matriz canónica asociada a T es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A_T se interpreta de la siguiente manera: en la "submatriz" cuadrada de entradas a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, aparece una rotación en un plano que contiene a las coordenadas x, y y, el coeficiente 1 en el lugar a_{33}, nos dice que la coordenada z no es alterada.

Siguiendo el mismo razonamiento, podemos ver que la matriz asociada a una rotación tridimensional de ángulo θ, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, respecto del eje x es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz asociada a una rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo θ, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, respecto del eje y es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ahora, estudiaremos las transformaciones lineales asociadas a las *simetrías en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ ya vistas en el capítulo 2.

Importante Las simetrías que pueden ser caracterizadas por transformaciones lineales son aquellas que se definen con respecto de rectas y planos que pasan por el origen. Esto es debido a que las transformaciones lineales son funciones entre subespacios vectoriales y, como vimos en el capítulo 3, los espacios vectoriales contienen el "cero", que en la geometría del plano y el espacio es el origen. ■

Comencemos estudiando las simetrías en el plano $\mathbb{R}^2$. Sea $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$, la recta en $\mathbb{R}^2$ de vector director $\vec{v}$ que pasa por el origen, queremos hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforme cada vector de $\mathbb{R}^2$ en el vector simétrico respecto de la recta L (Figura 6.2).

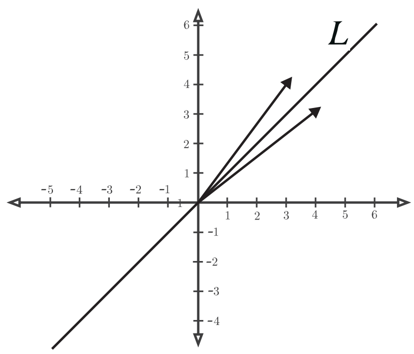

Figura 6.2: Un vector en $\mathbb{R}^2$ y simétrico.

Por un lado, que los vectores que pertenecen a la recta L quedan fijos por la simetría. En particular, $T(\vec{v}) = \vec{v}$. Por el otro lado, los vectores perpendiculares al vector director de la recta se transforman en sus inversos; es decir, el simétrico de (x, y) es $(-x, -y)$ en este caso (pueden comprobarlo por su cuenta). Por lo tanto, si $\vec{w}$ es un vector ortogonal a $\vec{v}$, entonces $T(\vec{w}) = -\vec{w}$. ¿Por qué nos interesan estos casos particulares de vectores? Porque $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, para saber cuál es la transformación lineal que modela una simetría, alcanza con determinar las imágenes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ¡Es lo que acabamos de hacer!

Definición 62 Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que representa la simetría respecto de la recta L de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$ entonces, dado $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ cualquiera, T queda unívocamente determinada por los siguientes valores en la base $\{v, w\}$:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

Experimento 37 Calculen la expresión de la transformación lineal de la simetría respecto de la recta $y = 2x$ ¿Cuál es el vector simétrico de $(1, 1)$ respecto de esa recta? ■

Estudiemos ahora las simetrías en $\mathbb{R}^3$. Consideremos un plano Π en $\mathbb{R}^3$, de ecuación vectorial $X = t\vec{v} + s\vec{w}$ (que pasa por el origen). Queremos encontrar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que transforme cada vector de $\mathbb{R}^3$ en el vector simétrico respecto del plano Π. Si bien este problema es más complicado que el anterior, procedemos de la misma manera. Tengamos en cuenta que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ quedan fijos por la simetría, y si $\vec{N}$ es un vector normal al plano, entonces $\vec{N}$ se transforma en su opuesto $-\vec{N}$. Nuevamente, se puede probar que $\{v, w, N\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo que alcanza con definir a T en esta base de la siguiente manera:

$$\begin{cases} T(v) = v \\ T(w) = w \\ T(N) = -N \end{cases}$$

Observación 37 *La matriz canónica asociada a la simetría respecto del plano xy es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones del plano o del espacio que hemos estudiado hasta ahora *no* modifican el “tamaño” de los vectores. Pero es muy usual realizar transformaciones que sí lo hagan. Por ejemplo, si tenemos un dibujo en tamaño A4 y hacemos una fotocopia que reduce su tamaño a la mitad, entonces la transformación de los puntos del dibujo original al dibujo reducido, se puede modelar con un tipo especial de transformaciones lineales: *las homotecias*. En este ejemplo, la transformación de reducción de la fotocopia se modela con la transformación lineal $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$. Una ampliación al doble de tamaño se traduce en la transformación lineal $T(x, y) = 2(x, y)$.

Definición 63 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice *homotecia* si $T(x, y) = k(x, y)$, con $k > 0$ fijo. La constante k se llama el *factor de la homotecia*. Si $0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y si $k > 1$, se denomina *dilatación*. Notemos que si $k = 1$, la transformación es la identidad.

Observación 38 *Es fácil convencerse que la matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Otro tipo de homotecia consiste en modificar el tamaño de los vectores de modo no homogéneo, es decir, mediante una dilatación o contracción en una dirección determinada (horizontal o vertical).

Definición 64 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice homotecia de factor k *en la dirección x* si $T(x, y) = (kx, y)$; y se dice homotecia de factor k *en la dirección y* si $T(x, y) = (x, ky)$. En ambos casos, si

$0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y, si $k > 1$, se denomina *dilatación*.

Observación 39

- *La matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k en la dirección x es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *La matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k en la dirección y es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Una contracción o dilatación de vectores en el caso tridimensional tiene exactamente el mismo significado que para las homotecias en $\mathbb{R}^2$. Las definiciones en este caso, son idénticas:

Definición 65 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice *homotecia* si $T(x, y, z) = k(x, y, z)$, con $k > 0$ fijo. La constante k se llama el *factor de la homotecia*. Si $0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y si $k > 1$, se denomina *dilatación*. Notemos que si $k = 1$, la transformación es la identidad.

La matriz de una homotecia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de factor k es entonces:

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Definición 66 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice homotecia de factor k *en la dirección* x si $T(x, y, z) = (kx, y, z)$. De manera análoga se definen homotecias en las direcciones y y z.

Experimento 38 Encuentren la forma que tienen las matrices canónicas de las homotecias en las direcciones x, y y z. ■

Los *deslizamientos cortantes* son maneras de “inclinar” los vectores del plano de forma paralela a uno de los ejes. La idea básica de este tipo de transformaciones es enviar el vector (x, y) a $(x + ky, y)$. En este caso, se llama un *deslizamiento cortante de factor k en la dirección x*. Notemos que la inclinación arriba referida tiene que ver con el hecho que la coordenada x está siendo alterada en una cantidad proporcional a la coordenada y, por lo que, cuando mayor sea el valor de y, más grande será la traslación del punto. Esta es la diferencia con una simple traslación en el sentido x (que tiene la forma $(x, y) \to (x + k, y)$). La matriz asociada a este tipo de transformaciones es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que, no tendrán problemas en escribir la matriz asociada a un deslizamiento cortante en la dirección y. Las ideas básicas de estas transformaciones quedarán mejor evidenciadas cuando veamos como afectan al cuadrado unitario.

Las *proyecciones ortogonales* que estudiamos en el capítulo 2 también son transformaciones lineales. Comencemos estudiando proyecciones en $\mathbb{R}^2$.

Sea L la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$, queremos construir la proyección ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre la recta L. Claramente, los vectores de la recta L quedan fijos. Si L' es la recta ortogonal a la recta L que pasa por el origen, entonces los vectores de L' tendrán como imagen por T al vector $(0, 0)$ (Figura 6.3).

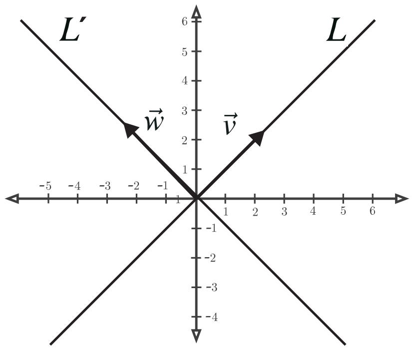

Figura 6.3: Proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$.

Concretamente, si $\vec{w}$ es un vector ortogonal a $\vec{v}$, entonces $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y la proyección ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre la recta L queda unívocamente determinada por:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(w) = (0, 0) \end{cases}$$

■ **Ejemplo 65** Veamos cuál es la fórmula de la proyección ortogonal sobre la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x = y\}$. La ecuación vectorial de la recta sobre la que estamos proyectando es $X = \lambda(1, 1)$. Un vector ortogonal a $\vec{v} = (1, 1)$ es, por ejemplo, $\vec{w} = (1, -1)$. Definimos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por:

$$\begin{cases} T(1, 1) = (1, 1) \\ T(1, -1) = (0, 0) \end{cases}$$

Hallemos ahora la fórmula de T. Un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como combinación lineal de los vectores de la base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ de la siguiente forma:

$$(x, y) = \frac{x + y}{2}(1, 1) + \frac{x - y}{2}(1, -1)$$

Por lo tanto,

$$T(x, y) = \frac{x + y}{2}T(1, 1) + \frac{x - y}{2}T(1, -1) = \frac{x + y}{2}(1, 1) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}\right)$$

Esta es la fórmula de la transformación lineal que representa la proyección ortogonal buscada. ■

El razonamiento para $\mathbb{R}^3$ es completamente análogo. Si $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \; : \; X = t\vec{v} + s\vec{w}, \, t, s \in \mathbb{R}\}$ es un plano que pasa por el origen y $\vec{N}$ es un vector normal al plano, entonces $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{N}\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^3$, y la proyección ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre el plano Π queda unívocamente determinada por:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(\vec{w}) = \vec{w} \\ T(\vec{N}) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Experimento 39 Utilizando esta ultima transformación, calculen la expresión de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy. ■

Transformando el cuadrado unitario. Para tener una idea más precisa de qué hacen realmente todas estas transformaciones geométricas sobre $\mathbb{R}^2$, vamos a estudiar el efecto de cada una de ellas sobre el cuadrado unitario C de $\mathbb{R}^2$; es decir, el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Como comentamos al comienzo de la unidad, una de las consecuencias que se desprende de las propiedades de las tranformaciones lineales, es que un segmento $\overline{PQ}$ es enviado al segmento $\overline{T(P)T(Q)}$. En efecto, todos los puntos del segmento $\overline{PQ}$ se pueden escribir de la forma $tP + (1-t)Q$, donde $0 \leq t \leq 1$. Una transformación lineal T envía a estos puntos a $T(tP + (1-t)Q) = tT(P) + (1-t)T(Q)$, que son precisamente todos los puntos del segmento $\overline{T(P)T(Q)}$ (ya que $0 \leq t \leq 1$). Por lo tanto, para saber cuál es la imagen del cuadrado unitario C por una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, solo debemos calcular a qué puntos envía T a los vértices del C, ya que, necesariamente, el segmento que une dos de sus vértices, será enviado al segmento que une sus imágenes. Por ejemplo, la imagen por T del segmento que une el $(0,0)$ con el $(0,1)$ es el segmento que une $T(0,0)$ con $T(0,1)$. En la Figura 6.4 podemos ver el efecto sobre el cuadrado unitario de todas las transformaciones estudiadas al comienzo de este apartado.

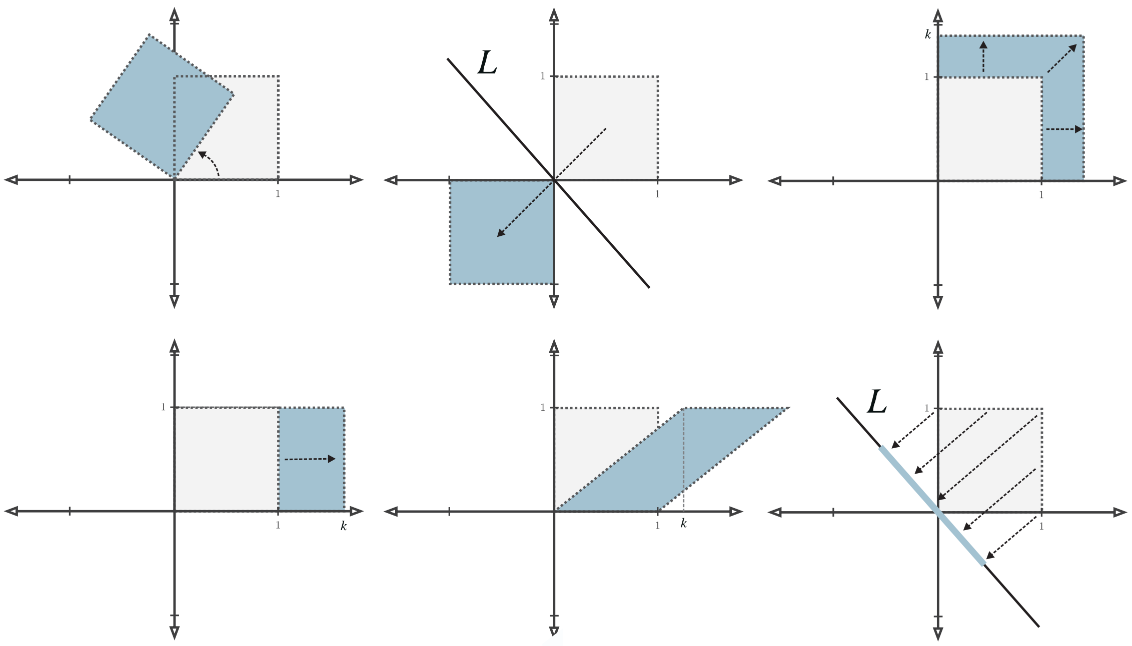

Figura 6.4: Tranformaciones del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ (en orden de aparición): rotación, simetría respecto de la recta L, homotecia de factor k, homotecia de factor k en la dirección x, deslizamiento cortante de factor k en la dirección x y proyección sobre la recta L.

También podemos estudiar el efecto de una tranformación lineal $\mathbb{R}^3$ sobre el cubo unitario: el cubo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$. El procedimiento en este caso es idéntico: los segmentos entre estos puntos serán enviados a los segmentos entre sus imágenes. En particular, los cuadrados que forman los lados del cubo son enviados por T a los trapezoides cuyos vértices son las imágenes de los vértices del cuadrado en cuestión. Por ejemplo, el cuadrado de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$ tiene por imagen el trapezoide $T(0,0,0)$, $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ y $T(1,1,0)$.

Experimento 40 Como hicimos en la Figura 6.4, hagan el dibujo del efecto sobre el cubo unitario de $\mathbb{R}^3$ de todas las transformaciones estudiadas al comienzo de esta sección. ■

6.3.1 La interpretación geométrica del determinante

Como vimos, en el capítulo 5, el determinante de una matriz cuadrada tiene una interpretación algebraica como un número indicativo de la inversibilidad de una matriz. Sorprendentemente, también posee una interpretación geométrica: pensando a la matriz como asociada a una transformación lineal, nos dice *cómo cambia el área o volumen de una figura al aplicarle la transformación lineal*. Veamos algunos ejemplos para clarificar esta aserción. Supongamos que tenemos una homotecia T de factor k en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que la matriz asociada a esta transformación lineal es $A_T = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$. Tal como vimos en la Figura 6.4, si aplicamos esta homotecia al cuadrado unitario $C \subset \mathbb{R}^2$, entonces obtenemos un cuadrado cuyos lados tienen medida k. ¿Cuál es el área de este nuevo cuadrado $T(C)$? Como el área de un cuadrado se mide multiplicando la longitud de la base por la altura, entonces es k^2. Es decir, el cuadrado C de área 1 fue transformado en una figura (que en este caso es un cuadrado también) de área k^2. *Notemos que k^2 es, precisamente, el determinante de A_T mutiplicado por* 1. ¿Qué sucede si, ahora, aplicamos la misma homotecia al cuadrado C_2 de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(2,2)$? Obtenemos el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,2k)$, $(2k,0)$ y $(2k,2k)$, cuyos lados miden $2k$, por lo que su área es $(2k)^2 = 4k^2$. ¿Cuál es el área del cuadrado original? Pues, $2^2 = 4$. Por lo tanto, vemos que:

$$\text{Área de } T(C_2) = (\text{Área de } C_2) \det(A_T)$$

Esto es algo que sucede siempre, para cualquier transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^2$ (no solo las homotecias). Lo enunciamos a continuación.

Proposición 40 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sea $F \subset \mathbb{R}^2$ una figura cualquiera. Entonces:

$$\text{Área de } T(F) = (\text{Área de } F)|\det(A_T)|$$

Esta proposición dice que *el módulo del determinante de la matriz asociada a T nos da el factor por el que se modifica el área de una figura al aplicarle T*. Por ejemplo, ¿qué sucede con las rotaciones? Geométricamente, estamos girando una figura; no le alteramos el área. ¿Cuál es el determinante de una matriz de rotación θ? Pues:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

Por lo tanto, ¡hemos redescubierto que el área antes y después de la rotación no se altera!

■ **Ejemplo 66** Estudiemos cómo se modifica el área del círclo D de radio $r = 3$ centrado en el origen al aplicarle una homotecia T de factor $\frac{1}{2}$. Sabemos que el área de D es $2\pi r = 6\pi$. La Proposición 40 nos dice que, luego de aplicar la homotecia T, el área de $T(D)$ es $6\pi \det(A_T)$. Como $\det(A_T) = \det \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$, entonces $T(D)$ tiene área $\left(\frac{1}{2}\right)^2 6\pi = \frac{3}{2}\pi$. ■

Para transformaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ vale la misma propiedad pero, en este caso, el determinante nos dice cómo se modifica *el volumen* de una figura tridimensional.

Proposición 41 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea $R \subset \mathbb{R}^3$ una región. Entonces:

$$\text{Volumen de } T(F) = (\text{Volumen de } F)|\det(A_T)|$$

Al igual que para $\mathbb{R}^2$, esta proposición dice que *el módulo del determinante de la matriz asociada a T nos da el factor por el que se modifica el volumen de una región al aplicarle T.*

■ **Ejemplo 67** ¿Qué transformación hay que aplicarle al cubo unitario C de $\mathbb{R}^3$ para "agrandarlo" a un cubo de volumen 7? Lo primero que se nos viene a la mente es transformarlo por medio de una homotecia T. ¿Qué factor k debe tener la homotecia para alcanzar el volumen deseado? Sabemos que volumen de $T(C) =$ (Volumen de C) $\det(A_T)$. Como el volumen de C es 1, debemos hallar k tal que $\det(A_T)$ sea 7. Como $A_T = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, entonces $\det(A_T) = k^3$. Por lo tanto, k debe ser $\sqrt[3]{7}$. ■

Esta propiedad del determinante vale, en realidad, para una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En este caso, lo que marca dicho determinante es cómo se altera el volumen n-dimensional *de la región. Claro que, para $n \geq 4$, ya no podemos imaginarnos qué interpretación geométrica tiene dicho "volumen".*

¿Qué hicimos en el apartado 6.3?

- Estudiamos las simetrías y las proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de las transformaciones lineales.
- Estudiamos la interpretación geométrica de ciertas tranformaciones lineales: rotaciones, simetrías, proyecciones, homotecias y deslizamientos cortantes. En cada caso, estudiamos la forma que tienen sus matrices asociadas.
- Vimos el efecto de una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^2$ sobre el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ y el de una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^3$ sobre el cubo unitario de $\mathbb{R}^3$.
- Dimos una interpretación geométrica del determinante de una matriz cuadrada, como el factor de deformación del área (o volumen) de una región en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$).

■

6.4 Composición e inversa de transformaciones lineales

De la misma forma que en la escuela secundaria se define la composición $f \circ g$ de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en este apartado vamos a ver cómo se pueden componer dos transformaciones lineales. En este caso, el resultado vuelve a ser una transformación lineal.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo se componen las transformaciones lineales.
- Cómo calcular al transformación inversa de una transformación lineal inversible.

■

6.4.1 ¿Qué significa componer funciones?

Supongamos que tenemos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Componer f con g* es una nueva función $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se obtiene al *aplicar primero g y después f*; es decir, la función compuesta $f \circ g$ en el punto x toma el valor $f(g(x))$ (aplico g a x y obtengo $g(x)$, y a este valor le aplico f). Componer no es otra cosa que "aplicar una función a continuación de la otra". Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$ entonces $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$. En efecto, al aplicar g a x obtenemos $x + 1$. Y a este último valor le aplicamos f; es decir, calculamos $f(x + 1) = (x + 1)^2$. Notemos que *importa el orden en que componemos las funciones*. En general $f \circ g$ no es la misma función que $g \circ f$. En el ejemplo de recién, $g \circ f(x) = x^2 + 1$, y esta función no es igual a $f \circ g$ (en $x = 1$, por ejemplo, toman distintos valores).

En general, podemos componer funciones cuyo dominio y codominio no coincidan. Lo único que tendremos presente es que, para que esté definida $f \circ g$, "el conjunto donde cae g debe estar contenido en el conjunto donde sale f"; es decir, el codominio de g debe estar contenido en el dominio de f. Esta es una condición necesaria ya que $f \circ g$ quiere decir que, para un x en el dominio de g, primero aplicamos g y después f; pero f solo podemos aplicarlo si $g(x)$ está en el dominio de f. Más concretamente: si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones entre conjuntos cualesquiera, entonces, podemos definir $g \circ f : A \to C$. Notemos que f cae en B y g sale de B, por lo que al valor $f(x)$ podemos aplicarle g. También, tengamos en cuenta que $g \circ f$ es una función cuyo dominio es el dominio de f y cuyo codominio es el codominio de g. La regla para recordar qué función se aplica primero en la notación $g \circ f$ es leerla de derecha a izquierda: en este caso, primero f y luego g.

6.4.2 Composición de transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son, en particular, funciones, por lo que podemos componerlas. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, entonces podemos armar la composición $T \circ T' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, que consiste en aplicar primero T' y, luego, T. Es decir:

$$(T \circ T')(\vec{v}) = T(T'(\vec{v}))$$

Por ejemplo, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ y $T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$, entonces, tanto $T \circ T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $T' \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ están definidas. Para calcular $T \circ T'$ debemos aplicar, primero, T' a un (x, y, z) genérico y, luego, aplicar al resultado la transformación lineal T. Por un lado, $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$. ¿Qué significa aplicar T a este resultado? Pues que la primera coordenada es $x - y - 2z$ y la segunda coordenada es $2x - z$. Es decir que, en la fórmula $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ que define T, el papel de x lo hace $x - y - 2z$ y, el de y, lo hace $2x - z$. Por lo tanto, debemos calcular $T(x - y - 2z, 2x - z)$:

$$\begin{aligned} T(\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}, \underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}}) &= ((\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}) + (\underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}}), 2(\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}), 2(\underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}})) \\ &= (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z). \end{aligned}$$

Entonces, hemos hallado que $T \circ T'(x, y, z) = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} T' \circ T(x, y) &= T'(\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}, \underbrace{2x}_{\text{“}y\text{”}}, \underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}}) \\ &= ((\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}) - (\underbrace{2x}_{\text{“}y\text{”}}) - 2(\underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}}), 2(\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}) - (\underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}})) \\ &= (-x - 3y, 2x) \end{aligned}$$

¿Qué sucede a nivel matricial? Sabemos que toda transformación lineal puede representarse de manera canónica por medio de una matriz, donde el resultado de evaluar un vector en la transformación equivale a multiplicar dicho vector por la matriz. Por este motivo, no nos debería sorprender que componer dos tranformaciones lineales equivale, a nivel matricial, a *multiplicar sus matrices asociadas*. En efecto, supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Si queremos calcular $T' \circ T$ en un vector $\vec{v}$, entonces sabemos que $T(\vec{v}) = A_T \cdot \vec{v}$ y $T'(\vec{v}) = A_{T'} \cdot \vec{v}$. Por lo tanto,

$$T' \circ T(\vec{v}) = T'(T(\vec{v})) = T'(A_T \cdot \vec{v}) = A_{T'} \cdot (A_T \cdot \vec{v}) = (A_{T'} \cdot A_T) \cdot \vec{v}.$$

Como esto vale para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, concluimos que:

$$A_{T' \circ T} = A_{T'} \circ A_T$$

De esta manera, hemos mostrado la validez de la siguiente proposición:

Proposición 42 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene por matriz canónica asociada a A_T y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tiene por matriz canónica asociada a $A_{T'}$, entonces, la matriz canónica asociada a $T' \circ T$ es $A_{T'} \cdot A_T$.

Retomemos los ejemplos anteriores. Teníamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ estaba dada por $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ y $T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$. Calculamos:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{T'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La Proposición 42 nos dice que $T' \circ T$ tiene por matriz canónica asociada a:

$$A_{T'} \cdot A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si pasamos esto a forma funcional tenemos:

$$(T' \circ T)(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 3y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Es decir, $(T' \circ T)(x, y) = (-x - 3y, 2x)$, y descubrimos la misma fórmula que conseguimos haciendo la composición directamente. En el siguiente experimento, los invitamos a hacer el cálculo de la composición para el otro lado.

Experimento 41 Muestren que $T \circ T' = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z)$ haciendo la multiplicación de las matrices A_T y $A_{T'}$. ■

6.4.3 Construyendo transformaciones lineales compuestas

La composición nos permite ampliar el conjunto de transformaciones lineales que estudiamos en el apartado anterior. Ahora, podemos construirnos funciones que transformen de manera más general regiones del plano o el espacio. Por ejemplo, supongamos que queremos armar una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ que, dada una región, la dilate manteniendo sus proporciones, de forma que tenga el doble de su área original y, también, la rote 45^o en el sentido de las agujas del reloj. Sabemos que la transformación que agranda el área de una región en 2 es:

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mientras que la transformación que rota una región 45^o en el sentido horario es:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación buscada es la composición de ambas transformaciones. Pero, ¿en qué orden debemos aplicarlas? Notemos que la misma naturaleza de las transformaciones nos dice que no importa, ya que las rotaciones no afectan el área y las homotecias no afectan la "inclinación" de la región. Elegimos $H \circ R$:

$$A_{(H \circ R)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) & \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación lineal buscada es:

$$(H \circ R) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) & \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

Tomemos la circunferencia unitaria S de $\mathbb{R}^2$ y apliquémosle las siguientes transformaciones:

- Una simetría respecto del eje y.
- Una rotación de ángulo θ en el sentido antihorario, para cierto $0 \leq \theta < 2\pi$.
- Una simetría respecto del eje y nuevamente.

Si seguimos gráficamente el recorrido que hace un punto cualquiera de S al aplicarle estas transformaciones, veremos que el resultado es el mismo que rotar la circunferencia en θ *en sentido horario*. Confirmemos esta hipótesis. Sabemos, por un lado, que la simetría respecto del eje y tiene por matriz asociada a $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado, la rotación en θ en sentido antihorario tiene por matriz asociada a $T' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Por lo tanto, las tres transformaciones que aplicamos sobre S se resumen en la transformación $T \circ T' \circ T$ cuya matriz asociada resulta:

$$\begin{aligned} A_{T\circ T'\circ T} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, debemos recordar que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$ para todo θ. Por lo tanto, esta última matriz podemos reescribirla:

$$A_{T\circ T'\circ T} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

que es, precisamente, la matriz asociada a la transformación lineal que rota en θ en el sentido horario. Esto confirma nuestra hipótesis.

Experimento 42 Le aplicamos a la circunferencia unitaria $S \subset \mathbb{R}^2$ las siguientes dos transformaciones: primero, una simetría respecto del eje x y, luego, una simetría respecto del eje y. Prueben que el efecto de estas transformaciones es el mismo que rotar la circunferencia 180º en el sentido antihorario. ■

6.4.4 Inversa de una transformación lineal

Recordemos que, si tenemos una función entre conjuntos $f : A \to B$ que es biyectiva, entonces, podemos definir la función inversa, $f^{-1} : B \to A$, *que envía al elemento* $f(x) \in B$ *al elemento* $x \in A$; es decir, lo devuelve al mismo punto de donde lo envió f. Formalmente, esto se escribe $f^{-1} \circ f(x) = x$. La función f^{-1} se llama la *inversa de* f y es única (es la única función que verifica esta igualdad). Algunas transformaciones lineales también admiten inversa. Por ejemplo, la inversa de la transformación que rota los vectores en 90º en el sentido antihorario es la transformación que rota los vectores 90º en el sentido horario. Por otro lado, la inversa de una simetría es ella misma, pues el simétrico de un simétrico es el punto original. Finalmente, la inversa de dilatar por un factor $k > 1$ es contraer por $\frac{1}{k}$. En todos estos casos, la inversa de una transformación lineal vuelve a ser una transformación lineal. Veremos que esto es siempre así.

Antes de dar la definición de inversa de una transformación lineal observemos que, para que exista la inversa, la transformación debe ser biyectiva. Esto es siempre un requerimiento para que tenga sentido buscar una inversa. Las transformaciones lineales biyectivas son necesariamente isormorfismos, por lo que *una tranformación lineal admite inversa sí, y solo sí, es un isomorfismo*. En particular, el dominio y el codominio deben ser el mismo espacio.

Definición 67 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. La *inversa de* T es una transformación lineal $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que verifica $(T \circ T^{-1})(\vec{v}) = \vec{v}$ y $(T' \circ T)(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

No es difícil ver que la inversa de T es única; es decir, no hay otra transformación lineal con esas caracteríticas. Por este motivo, la llamamos T^{-1} (pues no crea ambigüedad).

¿Cómo se calcula la inversa de un isomorfismo? Veamos un ejemplo. Consideremos el isomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y - z, x - 2y - 4z, 2x - z)$. Recordemos que, para construir una transformación lineal, alcanza con definir cúales son los valores que esta toma en una base. Pero, ¿qué base nos conviene considerar? Tengamos en cuenta que:

- $T(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$
- $T(0, 1, 0) = (-1, -2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (-1, -4, -1)$

Como T es isomorfismo y $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{(1, 1, 2), (-1, -2, 0), (-1, -4, -1)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^3$ (por la Proposición 35). Notemos que, entonces, definir la inversa es automático a partir de esta observación. La inversa T^{-1} debe verificar:

- $T^{-1}(1, 1, 2) = (1, 0, 0)$
- $T^{-1}(-1, -2, 0) = (0, 1, 0)$
- $T^{-1}(-1, -4, -1) = (0, 0, 1)$

Si ahora queremos encontrar la expresión funcional de T^{-1}, podemos proceder como mostramos en el apartado 6.1.3. Sin embargo, este procedimiento para hallar la forma funcional de una transformación lineal definida en una base involucra, en general, una gran cantidad de cuentas. Por suerte, existe una manera más directa de calcular la inversa de una transformación lineal: calcular la forma matricial de T^{-1}. A esta altura, no debería sorprendernos que *¡la forma matricial de la inversa de T es la matriz inversa de A_T!* Esto es evidente ya que, si $(T^{-1} \circ T)(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $(A_{T^{-1}} \cdot A_T) \cdot \vec{v} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Esto fuerza a que $A_{T^{-1}} \cdot A_T = I$. ¿Se dan cuenta por qué sucede esto? Concluimos, entonces, que $A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$. Por lo tanto, para hallar la inversa de $T(x, y, z) = (x - y - z, x - 2y - 4z, 2x - z)$, podemos escribir primero su matriz asociada:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, luego, calcular su matriz inversa:

$$A_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es, entonces, la matriz asociada a $A_{T^{-1}}$; y podemos hallar que su forma funcional es:

$$T^{-1}(x, y, z) = A_{T^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{5}y + \tfrac{2}{5}z, -\tfrac{7}{5}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{3}{5}z, \tfrac{4}{5}x - \tfrac{2}{5}y - \tfrac{1}{5}z\right)$$

Observamos que, del ejemplo anterior, podemos deducir la siguiente propiedad de los isomorfismos:

Proposición 43 Una transformación lineal T es un isomorfismo sí, y solo sí, su matriz canónica asociada A_T es inversible.

■ **Ejemplo 68** Calculemos, si existe, la inversa de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Para decidir si esta transformación lineal tiene inversa, debemos verificar si es o no un isomorfimo. Nos armamos la matriz canónica asociada:

$$A_T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A_T) = 1 \neq 0$, entonces A_T es inversible y, por lo tanto, T es un isomorfismo. Ahora que sabemos que T tiene inversa, la calculamos. Buscamos entonces la inversa de A_T:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{2}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Esta última matriz es, entonces, $A_{T^{-1}}$, por lo que la forma funcional de T^{-1} es:

$$T^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}.$$

Es decir, $T^{-1}(x, y) = (-x + 2y, -2x + 3y)$. Para verificar que este cálculo es correcto, calculemos $T \circ T^{-1}$:

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1}(x, y) &= T(-x + 2y, -2x + 3y) \\ &= (3(-x + 2y) - 2(-2x + 3y), 2(-x + 2y) - (-2x + 3y)) \\ &= (-3x + 6y + 4x - 6y, -2x + 4y + 2x - 3y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 6.4?

- Estudiamos la composición de transformaciones lineales y vimos que la matriz canónica asociada a una composición es el producto de las matrices canónicas asociadas a las transformaciones originales. Usamos estas propiedades para mostrar cómo construir tranformaciones lineales que sean composiciones de rotaciones, simetrías, homotecias, etc.
- Definimos la inversa de un isomorfismo y vimos que la matriz canónica asociada a la transformación inversa es la matriz inversa de la matriz asociada al isomorfismo original.

■