2. Rectas y planos

En este capítulo utilizaremos el contenido que desarrollamos en el capítulo 1 para estudiar rectas y planos en el espacio. La importancia de estudiar dichos objetos se debe a que, desde el punto de vista algebraico, las rectas y los planos son casos particulares de conjuntos de vectores que tienen propiedades relevantes en relación a la suma de vectores y al producto de un vector por un escalar. Por este motivo, a estos objetos no se los considera simplemente un "conjuntos de puntos" sino un espacio de vectores *o* espacios lineales. *Las propiedades de estos espacios de vectores, que estudiaremos en más generalidad en el capítulo próximo, son la base del Álgebra Lineal.*

2.1 Rectas

Las rectas son los espacios lineales más sencillos, dado que poseen una sola dirección. Si bien nos concentraremos en rectas en el espacio, todas las definiciones son válidas para espacios n-dimensionales.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación vectorial de la recta.
- Cómo determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares.
- La ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$.
- Cómo determinar si un punto pertenece a una recta y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

2.1.1 ¿Cómo describir una recta?

Es usual que se enseñe a describir una recta en el plano por medio de una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde m (la pendiente) y b (la ordenada) son números reales dados. Formalmente, esta ecuación está diciendo que la recta es precisamente el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = mx + b\}$. Esta manera de describir una recta se basa, entonces, en establecer una "relación entre las coordenadas de sus puntos". Por ejemplo, si la ecuación de la recta es $y = 3x + 2$ entonces el punto $(1, 5)$ pertenece ella, ya que $5 = 3{,}1 + 2$.

Lo curioso es que, si no nos hubieran enseñado a describir a las rectas de esta manera, probablemente no hubiésemos ideado este tipo de descripción. Imaginemos que estamos en una habitación en penumbras y hay un rayo láser que la atraviesa de punta a punta en alguna dirección. ¿Cómo podemos describir la recta que determina el haz? Supongamos que tenemos una vara de madera de 1 metro de largo y que queremos representar el haz por medio de la vara, en el sentido que *queremos ubicar la vara sobre la recta del haz*. Para esto, podemos acercar la vara hasta que corte el rayo y después "enderezarla" para que coincida con este. O mejor aún, podemos *enderezar primero la vara para que quede paralela al rayo* y después, sin cambiar la dirección que tiene, *desplazarla hasta superponerla con el rayo*. Esta última manera se puede se puede traducir al lenguaje de vectores: utilizamos un vector para determinar la dirección de la recta ("enderezar la vara" para hacerla paralela al haz) y, después, utilizar otro vector para determinar por dónde pasa la recta ("trasladar la vara" hasta que quede superpuesta con el haz). La descripción de una recta identificando su dirección y un punto por el que pasa, se conoce como ecuación vectorial de la recta.

2.1.2 La ecuación vectorial de la recta

Para describir una recta vectorialmente, necesitamos un vector $\vec{v}$ que nos brinde la dirección de la recta y un vector $\vec{w}$ que traslade la recta hasta un punto por el cual queremos que pase. Recordemos que todos los múltiplos $t\vec{v}$ de $\vec{v}$ (con $t \in \mathbb{R}$) forman una recta que tiene la dirección de $\vec{v}$. Esta recta pasa por el origen de coordenadas, pues el vector $\vec{v}$ tiene su origen allí. Por lo tanto, esta recta es paralela a la que describiremos y solo nos resta desplazarla en el sentido del vector $\vec{w}$.

Definición 15 Una **ecuación vectorial** para la recta L contenida en $\mathbb{R}^n$ con dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^n$ es:

$$t\vec{v} + \vec{w},$$

donde $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de extremo P, $\vec{v}$ se llama un *vector director* de la recta y $t \in \mathbb{R}$. Una ecuación vectorial para la recta L nos brinda una manera de describir los puntos de la recta, y lo hacemos de la siguiente manera:

$$L = \{X \in \mathbb{R}^n \ : \ X = t\vec{v} + \vec{w},\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Importante La igualdad $X = t\vec{v} + \vec{w}$ utilizada en la definición anterior debe interpretarse como "el punto X es el extremo del vector $t\vec{v} + \vec{w}$". Este abuso de notación aparecerá muy seguido en el texto y esta justificado desde la identificación natural que hay entre vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen en $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ y puntos de $\mathbb{R}^n$. ■

Como planteamos, $t\vec{v}$ es la ecuación de una recta con dirección $\vec{v}$ que pasa por el origen de coordenadas. Si recordamos la interpretación de la suma de vectores, observemos que al sumar el vector $\vec{w}$ a cada punto de la recta, lo estamos trasladando en esa dirección (Figura 2.1). En particular, el $\vec{0}$ va a parar al $\vec{w}$. Gráficamente, alcanza con imaginarnos que tomamos con el pulgar y el índice la recta por el origen, la levantamos y la apoyamos en el extremo de $\vec{w}$, sin cambiarle la dirección.

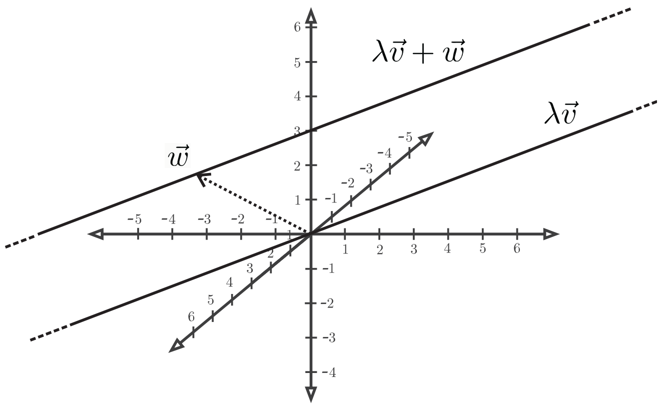

Figura 2.1: Traslado de una recta que pasa por el origen.

Ejemplos 16

- La recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t(1,2) + (3,3), \ t \in \mathbb{R}\}$ es una recta del plano con dirección $(1,2)$ que pasa por el punto $(3,3)$.
- La recta $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(-1,0,3) + (-2,2,7), \ t \in \mathbb{R}\}$ es una recta con dirección $(-1,0,3)$ y que pasa por el punto $(-2,2,7)$.

Recordemos que en la definición de ecuación vectorial dijimos "*Una* ecuación vectorial para la recta..." y no "*La* ecuación vectorial para la recta...". Esto se debe a que hay infinitas ecuaciones vectoriales que pueden describir la misma recta. Por un lado, del vector director solo nos importa la dirección que nos provee; ademas ni su sentido, ni su módulo alteran esta dirección. De este modo, las ecuaciones $t\vec{v} + \vec{w}$ y $t(5\vec{v}) + w$ representan *la misma recta* (aquí 5 puede ser reemplazado por cualquier número real distinto de 0). Por otro lado, el vector $\vec{w}$ es trasladar la recta de manera que *el punto de la recta que, originalmente, tocaba el origen de coordenadas es "reubicado" en el extremo de $\vec{w}$*. Pero dado que una recta se extiende infinitamente en ambas direcciones, es lo mismo trasladar este punto que toca el origen a *cualquier otro* punto de la recta (Figura 2.2). Por lo tanto, la elección de $\vec{w}$ para desplazar a la recta tampoco es única.

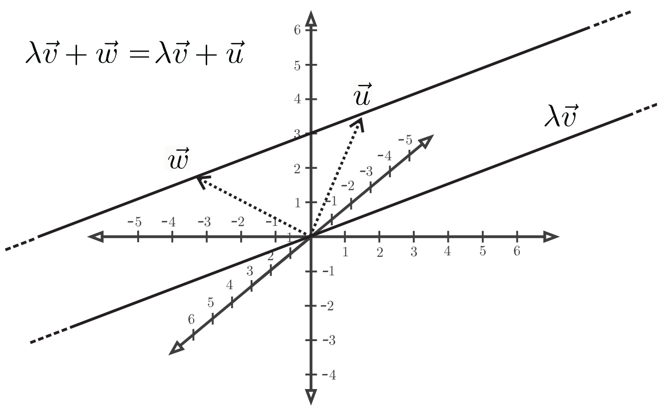

Figura 2.2: Diferentes traslaciones que determinan la misma recta.

■ **Ejemplo 17** Las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2,1,-1) + (1,3,2),\ t \in \mathbb{R}\}$, $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(4,2,-2) + (1,3,2),\ s \in \mathbb{R}\}$ y $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(-6,-3,3) + (3,4,1),\ k \in \mathbb{R}\}$ son iguales. Observen que, si bien los vectores directores de L y L' son distintos, uno es múltiplo del otro, por lo cual determinan la misma dirección. Por otro lado, el vector director de L'' también es múltiplo de los vectores directores de L y L', por lo cual determina la misma dirección que estas, y además pasa por el punto $(3,4,1)$ que pertenece a L y L'. ■

¿Cuándo un punto pertenece a una recta? Si queremos saber si el punto $(3,-2)$ pertenece a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(2,1) + (5,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$, ya vimos que la interpretación geométrica de esta ecuación significa que la recta tiene dirección $(2,1)$ y pasa por el punto $(5,-1)$. ¿Cuál es su interpretación algebraica? La ecuación $X = t(2,1) + (5,-1)$ establece que los puntos de la recta "son de la forma" $t(2,1) + (5,-1)$, para t un número real; o, aquello que es lo mismo, son de la forma $(2t+5, t-1)$ –teniendo presente las definiciones de producto de un vector por un escalar y de suma de vectores–. Esto quiere decir que: *un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pertenece a la recta L si y solo si existe un número real t tal que* simultáneamente $x = 2t+5$ e $y = t-1$. Cuando queremos que dos ecuaciones se verifiquen simultáneamente, las escribimos abarcadas por una llave "{" de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = 2t+5 \\ y = t-1 \end{cases}$$

En nuestro caso, $(3,-2)$ pertenecerá a L si podemos encontrar un $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} 3 = 2t+5 \\ -2 = t-1 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación nos queda: $t = \frac{3-5}{2} = -1$. Esto determina que, si existe dicho t entonces tiene que ser el -1 (de lo contrario no se verificaría la primera ecuación). Lo que nos resta verificar es si con $t = -1$ se verifica la segunda ecuación (pues buscamos un t que verifique *ambas ecuaciones simultáneamente*). Pero $-2 = -1 - 1$, por lo cual, con $t = -1$ se verifican ambas ecuaciones y podemos concluir que $(3,-2) \in L$.
¿Qué sucede ahora con el punto $(-1,0)$? ¿Pertenece a L? En este caso buscamos un $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -1 = 2t+5 \\ 0 = t-1 \end{cases}$$

Para que sea válida la segunda ecuación debemos tener $t = 1$. Pero si reemplazamos con $t = 1$, en la primera ecuación obtenemos $-1 = 2{,}1 + 5 = 7$, lo cual es una contradicción (pues $-1 \neq 7$). En este caso, no existe ningún $t \in \mathbb{R}$ verificando ambas condiciones simultánemanete, por lo que $(-1,0) \notin L$.

Dados dos puntos $P, Q \in R^n$ analicen cuál debe ser la dirección de la recta que pasa por ellos, por qué punto debe pasar y si es única la escritura de suecuación vectorial.

¿Cómo se puede expresar la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ en general? Lo que debemos hacer es análogo a lo que hicimos en $\mathbb{R}^2$. Observen el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 18** Supongamos que queremos determinar si $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1,3,-1) + (2,5,4),\ t \in \mathbb{R}\}$. Los puntos de L son de la forma $(t+2, 3t+5, -t+4)$, por lo que $(1,2,1) \in L$ si y solo si se verifican simultáneamente las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = t + 2 \\ 2 = 3t + 5 \\ 1 = -t + 4 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación, se tiene $t = -1$. Si reemplazamos $t = -1$ en la segunda ecuación, vemos que efectivamente $2 = 3(-1) + 5$; pero, si reemplazamos esta misma información en la última ecuación, obtenemos $1 = -(-1) + 4 = 5$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no existe $t \in \mathbb{R}$ que haga que se verifiquen simultáneamente las tres ecuaciones y concluímos que $(1, 2, 1) \notin L$. Por el contrario, $(1, 2, 5) \in L$ como pueden verificar por su cuenta. ■

El procedimiento para rectas en $\mathbb{R}^n$ es completamente análogo.

¿Cuáles rectas son paralelas? ¿Cuáles perpendiculares? La ecuación vectorial de la recta permite decidir cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares. En efecto, para determinar esto solo se considera la dirección de la recta (no por donde pase), por lo cual solo debemos verificar cuál es el ángulo entre sus vectores directores (cuestión que ya aprendimos a hacer en el capítulo anterior). Tengamos en cuenta que, para que dos rectas sean paralelas, sus vectores directores deben ser paralelos, pero como son vectores con origen en $\vec{0}$ entonces esto indica que son múltiplos.

Definición 16 Dos rectas L y L' son *paralelas* si los vectores directores de (cualquiera de) sus ecuaciones vectoriales son múltiplos uno del otro; y son *perpendiculares* si dichos vectores directores son ortogonales.

Ejemplos 19

- Las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(-7, 5, 5) + (0, 0, 2),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(14, -10, -10) + (3, 3, 0),\ s \in \mathbb{R}\}$ son paralelas (sus vectores directores son múltiplos).
- Las rectas $\tilde{L} = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2, -3, -2) + (3, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $\tilde{L}' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(2, 2, -1) + (3, -1, 5),\ s \in \mathbb{R}\}$ son perpendiculares (sus vectores directores son ortogonales).

■

2.1.3 Ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$

Más allá de la naturalidad de describir una recta por medio de su ecuación vectorial, en muchas ocasiones, es conveniente tener descriptos sus puntos por medio de la relación entre sus coordenadas. En este apartado veremos cómo describir rectas de $\mathbb{R}^2$ de esta forma. Para rectas en $\mathbb{R}^3$ debemos esperar hasta el tema *intersecciones de plano*. Sabemos que en $\mathbb{R}^2$ una recta queda determinada por una relación de la forma $y = 3x + 2$. A esta ecuación podemos escribirla de manera equivalente como $-3x + y = 2$ (simplemente despejamos todas las coordenadas de un lado y dejamos los números del otro). La manera de describir una recta por medio de este tipo de ecuaciones se llama *ecuación implícita* de la recta.

Definición 17 Una *ecuación implícita* para la recta L en $\mathbb{R}^2$ es una relación de la forma $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, de manera que un punto $(x, y) \in L$ si y solo si sus coordenadas verifican dicha ecuación. La relaciones de esta forma se llaman *lineales*. La recta L queda definida entonces por $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$.

Ejemplos 20

- La recta de ecuación $y = 3x + 5$ tiene por ecuación implícita $-3x + y = 5$. También, $3x - y = -5$ y $-6x + 2y = 10$ son ecuaciones implícitas para esta recta. En el primer caso, hemos multiplicado a ambos lados de la ecuación original por -1; en el segundo, por 2. Esto se debe a que multiplicar una igualdad a ambos lados por un *número no nulo* no cambia la relación entre las variables involucradas.

- Una ecuación implícita para la recta $\{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(1,2) + (3,3),\ t \in \mathbb{R}\}$ es $2x - y = 3$. Es posible verificar esto al graficar la recta.

■

Observación 6 *Si bien la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$ consta de una ecuación, en dimensiones mayores se necesita más de una ecuación para describir una recta. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se necesitan* dos *ecuaciones para describir una recta (veremos en el próximo apartado que una sola ecuación en $\mathbb{R}^3$ describe un plano, no una recta).*

¿Por qué se necesitan más ecuaciones para describir implícitamente un recta en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$? Que un conjunto de puntos verifiquen una ecuación es poner una restricción a esos puntos. Cuanto más *restricciones pongamos,* menos *será la cantidad de puntos que las verifiquen. En los espacios de vectores, una restricción* disminuye la dimensión en 1*; esto quiere decir que, si ponemos una restricción (ecuación) a los puntos de $\mathbb{R}^2$ (un espacio de 2 dimensiones), obtenemos un espacio que tiene una sola dimensión: una recta. Si en cambio ponemos una restricción a los puntos de $\mathbb{R}^3$ (espacio de 3 dimensiones), obtenemos un espacio con 2 dimensiones: un plano. Si agregamos ahora una restricción más (2 ecuaciones en total) entonces obtenemos un espacio de otra dimensión menos: una recta.*

Una de las ventajas de tener una recta descripta en forma implícita es que verificar la pertenencia de un punto a la recta es mucho más sencillo. Efectivamente, como la ecuación implícita es simplemente una relación que cumplen las coordenadas de los puntos de la recta, un punto que cumpla dicha relación estará en la recta, y un punto que no la cumpla, no. Por ejemplo, para verificar si $(3,-2)$ pertenece a la recta L' de ecuación $x + 2y = -1$, solo debemos reemplazar $x = 3$ e $y = -2$ en dicha ecuación y ver si se verifica la igualdad. En este caso, $3 + 2.(-2) = -1$, por lo que concluimos cual $(3,-2) \in L'$. También, $(-1,0)$ pertenece a L', ya que $-1 + 2{,}0 = -1$. Por otro lado, $(1,1) \notin L'$ pues $1 + 2{,}1 = 3 \neq -1$.

2.1.4 ¿Cómo hallar la ecuación vectorial a partir de la implícita? ¿y viceversa?

Como se pudo haber notado (o sospechado), para hacer ciertas cosas es conveniente trabajar con la ecuación vectorial, y para hacer otras, con la implícita. Por ejemplo, la ecuación vectorial es más fácil para describir geométricamente la recta, mientras que, para chequear la pertenencia de un punto a la recta, es mejor trabajar con la ecuación implícita. Por este motivo, es importante que sepamos cómo pasar de una a otra. Lo hacemos con un ejemplo.

Consideremos nuevamente la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(2,1) + (5,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$. Vimos que un punto $(x,y) \in L$ si y solo si:

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Para escribir una ecuación implícita para L debemos hallar una relación lineal entre sus coordenadas. Aunque no sea del todo evidente, estas ecuaciones muestran una relación lineal entre x e y; *sólo que lo están haciendo por medio de t*. Es decir, nos dicen cómo depende linealmente tanto x de t como y de t. A partir de estas dependencias de t nuestro trabajo es hallar cómo depende linealmente x de y (algo asi como “eliminar al intermediario”). Esto se obtiene al despejar t de una ecuación y reemplazarlo en la otra. En este caso, al despejar t de la ecuación segunda, nos queda $t = y + 1$; y, al reemplazar t por $y + 1$ en la ecuación primera, obtenemos $x = 2(y + 1) + 5 = 2y + 7$.

Por lo tanto, despejando convenientemente, nos queda la relación lineal $x - 2y = 7$. Esta es la ecuación implícita de la recta L. Es decir, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x - 2y = 7\}$.

■ **Ejemplo 21** Hallemos la ecuación implícita de $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \,:\, X = t(-1, 1) + (2, 3),\ t \in \mathbb{R}\}$. Los puntos de L son de la forma $(-t + 2, t + 3)$ con $t \in \mathbb{R}$. Es decir:

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación encontramos que $t = -x + 2$. Al reemplazar esta información en la segunda ecuación tenemos $y = (-x + 2) + 3 = -x + 5$. De aquí, pasando la x al lado izquierdo obtenemos $x + y = 5$, una ecuación implícita para L. ■

¿Cómo hallamos ahora la ecuación vectorial de una recta dada en forma implícita? Lo hacemos nuevamente con un ejemplo. Supongamos que tenemos la recta L' de ecuación $x + 2y = -1$. De aquí despejamos x, y obtenemos que $x = -2y - 1$; es decir, si la segunda coordenada es y entonces la primera debe ser $-2y - 1$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, vemos que los puntos de la recta L' son de la forma $(-2y - 1, y)$, con $y \in \mathbb{R}$. Tal vez hayan notado que estamos cerca, en caso de que tengan dificultades en este punto puede cambiar la variable "y" por la variable "t" para que sea más evidente por donde estamos yendo. Reescribiéndolo de esta forma, observamos que los puntos de la recta L' son de la forma $(-2t - 1, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Este vector tiene la misma forma a la que llegamos luego de agrupar todos los términos de la ecuación vectorial dentro de un mismo vector. Por lo tanto, lo que debemos hacer ahora es "desandar" esta expresión para escribirla como un múltiplo de un vector (el vector director) más otro vector (que traslada la recta al punto por el que pasa). Y la manera de hacerlo es muy sencilla. En primer lugar escribimos $(-2t - 1, t)$ como suma de dos vectores: uno cuyas coordenadas están multiplicadas por t y otro cuyas coordenadas son solo números. En este caso:

$$(-2t - 1, t) = \underbrace{(-2t, t)}_{\text{coord. con } t} + \underbrace{(-1, 0)}_{\text{coord. con números}}.$$

En segundo lugar, "sacamos" el t por fuera del primero de estos vectores de manera que $(-2t, t) = t(-2, 1)$. Por lo tanto, obtenemos:

$$(-2t - 1, t) = t(-2, 1) + (-1, 0),$$

y esta es una ecuación vectorial de L' (con vector director $(-2, 1)$ y punto de paso $(-1, 0)$. En la expresión anterior ¿qué hubiese sucedido si despejábamos y en función de x en lugar de x en función de y? Pues en este caso, como $y = \frac{-1-x}{2}$, vemos que los puntos de L son de la forma $(x, \frac{-1-x}{2})$ con $x \in \mathbb{R}$. Al descomponer este vector, observamos que:

$$\left(x, \frac{-1-x}{2}\right) = \left(x, -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) = x\left(1, -\frac{1}{2}\right) + \left(0, -\frac{1}{2}\right),$$

y obtenemos la ecuación vectorial $s(1, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$, $s \in \mathbb{R}$. Por supuesto, esta ecuación define la misma recta L. Notemos que los vectores directores, en ambos casos, son múltiplos uno del otro, y se puede verificar que el punto $(-1, 0)$ puede escribirse como $s(1, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$ (así como el punto $(0, -\frac{1}{2})$ puede escribirse como $t(-2, 1) + (-1, 0)$).

■ **Ejemplo 22** Encontremos la ecuación vectorial de la recta L definida por la ecuación $3x + \frac{1}{2}y = -1$. Al despejar y en función de x, vemos que $y = 2(-1 - 3x) = -2 - 6x$. Por lo tanto, los puntos de L son de la forma $(x, -2 - 6x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Reescribiendo este vector convenientemente tenemos $(x, -2 - 6x) = x(1, -6) + (0, -2)$. Por lo tanto, una ecuación vectorial para L es $t(1,-6)+(0,-2)$. ■

¿Qué hicimos en el apartado 2.1?

- Definimos la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^n$ a partir de una dirección (vector director) y de un punto de paso (un vector que traslada la recta al dicho punto).
- Aprendimos cómo determinar que dos rectas sean paralelas o perpendiculares en función de los vectores directores de sus ecuaciones vectoriales.
- Definimos la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$ como una relación lineal entre las coordenadas de los puntos de la recta. Esta relación determina completamente cuáles puntos forman parte de la recta y cuáles no.
- Estudiamos cómo determinar cuándo un punto pertenecía a una recta y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

■

2.2 Planos

En este apartado se estudiarán planos en el espacio. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre un plano y una recta? Seguramente, ningún estudiante tendrá problema en distinguir entre ambos conceptos, pero contestar esta pregunta podría requerir tiempo para pensar su respuesta. La diferencia fundamental entre un plano y una recta es que una recta solo "contiene" una dirección, mientras que el plano contiene infinitas. Gráficamente, si estamos parados en un punto de una recta y nos queremos desplazar sobre ella, solo tenemos dos opciones: ir a la derecha o ir a la izquierda (de donde estamos). En cambio, si estamos en un plano, podemos movernos en cualquier dirección: derecha, izquierda, adelante, atrás o una combinación de las anteriores (por ejemplo, dos pasos a la derecha y 3 pasos hacia atrás). Pero, ¿es posible sobre un plano movernos *en cualquier dirección*? En realidad, *no*. Porque, por ejemplo, no podemos movernos hacia arriba (nos iríamos del plano). Mientras que en el espacio, sí tenemos esta posibilidad (derecha, izquierda, adelante, atrás, arriba y abajo).

¿Qué es entonces lo que diferencia la recta, el plano y el espacio? *Los grados de libertad*; es decir, la cantidad de direcciones *independientes* en las que nos podemos mover. La *recta* tiene un solo grado de libertad, pues solo tenemos una dirección en la cual movernos (depende el sentido que escojamos será a la derecha o a la izquierda). El *plano* tiene dos grados de libertad, ya que además de derecha-izquierda podemos movernos adelante-atrás. ¿Qué sucede con los movimientos en diagonal? Como mencionamos anteriormente, son *combinación* de movimientos en la dirección derecha-izquierda y adelante-atrás, por lo cual *no* son nuevos grados de libertad: no son independientes de derecha-izquierda y adelante-atrás. Por supuesto, el *espacio* tiene tres grados de libertad.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación vectorial de un plano en $\mathbb{R}^3$.
- La ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$.
- Cómo determinar si un punto pertenece a un plano y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita y viceversa.

2.2.1 La ecuación vectorial del plano

El concepto que hay detras del procedimiento para formar una ecuación vectorial para un plano es la misma que para la recta. Para describir un plano, primero determinamos su "inclinación" y después lo trasladamos hasta el punto por donde esperamos que pase. En el caso de las rectas, usamos un vector que nos dé la dirección de la recta. En el caso de los planos, necesitamos *dos* vectores (que no sean múltiplos) para dar la inclinación del plano. Desde el punto de vista geométrico, al elegir dos vectores que no son múltiplos queda determinado un único plano que contiene a ambos (Figura 2.3). Desde el punto de vista algebraico, elegir dos vectores representa determinar en qué dirección serán los grados de libertad que tiene ese plano. Por ejemplo, el plano xy tiene sus grados de libertad en el eje x y el eje y (y, por lo tanto, podemos movernos en las infinitas combinaciones de movimientos sobre el eje x y el eje y). Como el eje x consta de todos los múltiplos de $(1, 0, 0)$ y el eje y del $(0, 1, 0)$ entonces podemos pensar a estos vectores como directores del plano xy. Si bien estos vectores son perpendiculares, esto no es, en general, necesario. Por ejemplo, los vectores $(1, 2, 0)$ y $(-1, 1, 0)$ también determinan el plano xy.

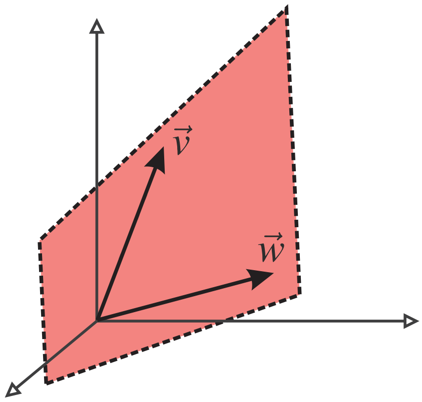

Figura 2.3: Dos vectores (no múltiplos) determinan un único plano.

Definición 18 Una *ecuación vectorial* del plano Π contenido en $\mathbb{R}^n$ con vectores directores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^n$ es:

$$L : t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},$$

donde $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de extremo P y $t, s \in \mathbb{R}$. Una ecuación vectorial para el plano Π permite describir los puntos del plano, y lo hacemos de la siguiente manera:

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

■ **Ejemplos 23**

- La ecuación $t(1, 1, 2) + s(-1, 3, 7) + (2, 0, 0)$ con $t, s \in \mathbb{R}$ determina un plano de vectores directores $(1, 1, 2)$ y $(-1, 3 - 7)$ y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$.
- La ecuación $t(-1, 5, 2) + s(2, -10, -4) + (1, 1, 3)$ con $t, s \in \mathbb{R}$ *no* es la ecuación vectorial de un plano ya que $(2, -10, -4) = -2(-1, 5, 2)$; es decir, los vectores directores son múltiplos y, por lo tanto, no determinan dos grados de libertad. En este caso, esta ecuación describe los puntos de una recta de vector director $(-1, 5, 2)$ que pasa por el punto $(1, 1, 3)$. Además describe a dicha recta de manera redundante, ya que sabemos que podemos utilizar un único vector director para hacerlo.

■

Al igual que con las rectas, un plano posee infinitas ecuaciones vectoriales; pero en este caso, la variedad de ecuaciones que uno puede construir es mucho mayor. Realicen el siguiente experimento.

Experimento 7 Consideren el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}$ que aparece en la Figura 2.4. Luego, calculen gráficamente:

1. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(2\vec{v}) + s\vec{w} + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}$.
2. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(2\vec{v}) + s\vec{-w} + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}$.
3. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(\vec{v} + \vec{w}) + s\vec{-2}w + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}$.

■

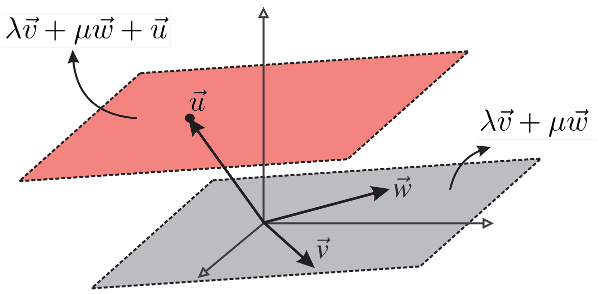

Figura 2.4: El plano de ecuación vectorial $t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u}$.

Observación 7 *Vemos como resultado del Experimento 7 que, a diferencia del caso de las rectas, en el que los vectores directores de distintas ecuaciones vectoriales resultan múltiplos entre sí, ahora los vectores directores de dos ecuaciones vectoriales del plano pueden no estar relacionados de una manera tan directa.*

Al igual que con las rectas, $\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{v} + s\vec{w},\ t, s \in \mathbb{R}\}$ es un plano que pasa por el origen de coordenadas, y sumarle $\vec{u}$ tiene la interpretación gráfica de levantar el plano por el origen y moverlo, sin cambiarle la inclinación, hasta apoyar el origen de coordenadas en el extremo de $\vec{u}$.

¿Cuándo un punto pertenece a un plano? El razonamiento es exactamente el mismo que para las rectas. Supongamos que queremos saber si el punto $(1, 3, -2)$ pertenece al plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 2, 1) + s(0, 1, -1) + (2, 5, -1),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Interpretamos que esta fórmula establece que los puntos del plano Π son de la forma $t(1, 2, 1) + s(0, 1, -1) + (2, 5, -1)$ para t y s números reales. Es decir, son de la forma $(t + 2, 2t + s + 5, t - s - 1)$ con $s, t \in \mathbb{R}$. Esto nos advierte que *un punto* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *pertenece al plano* Π *si y solo si existen números reales* t, s *tales que* simultáneamente $x = t + 2$, $y = 2t + s + 5$ y $z = t - s - 1$. Esto lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + s + 5 \\ z = t - s - 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $(1, 3, -2)$ pertenecerá a Π si podemos encontrar un $t, s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} 1 = t + 2 \\ 3 = 2t + s + 5 \\ -2 = t - s - 1 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $t = -1$. Al reemplazar en la segunda ecuación y al despejar s, nos queda $s = 0$. Finalmente, al reemplazar por $t = -1$ y $s = 0$ en la última ecuación se tiene, $-2 = -2$, lo cual es correcto. Por lo tanto, $(1, 3, -2) \in \Pi$, ya que hallamos $t, s \in \mathbb{R}$ que verifican las ecuaciones de arriba, simultáneamente.

2.2.2 Ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$

Cómo comentamos en la observación de la página 44, un plano se puede describir a través de una *única* ecuación que relacione linealmente sus coordenadas.

Definición 19 Una *ecuación implícita* para el plano Π en $\mathbb{R}^3$ es una relación *lineal* $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de manera que un punto $(x, y, z) \in \Pi$ si y solo si sus coordenadas verifican dicha ecuación. Lo notamos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$.

■ **Ejemplos 24**

- El plano xy tiene por ecuación implícita la ecuación $z = 0$. Observemos que la característica que tienen en común los puntos de dicho plano es, precisamente, que la cooordenada z es nula.
- El plano cuyos vectores directores son $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$, tiene ecuación implícita $x - y - z = 0$.

■

Comprobar la pertenencia de puntos a un plano descripto por una ecuación implícita es también más sencillo que si viene dado por una ecuación vectorial, ya que solo debemos corroborar que se verifique la ecuación. Por ejemplo, si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3z = -7\}$, entonces $(1, 2, 3) \in \Pi$, pues $2{,}1 - 3{,}3 = -7$. Por otro lado, $(1, 0, 0) \notin \Pi$ pues $2{,}1 - 3{,}0 = 2 \neq -7$.

2.2.3 ¿Cómo hallar la ecuación vectorial a partir de la implícita, y viceversa?

El procedimiento es el mismo que para las rectas, solo que se suma una variable más con la cual debemos trabajar. Tomemos un ejemplo, considerando de nuevo el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, 2, 1) + s(0, 1, -1) + (2, 5, -1),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. En el mismo, vimos que un punto (x, y, z) estaba en Π si y solo si:

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + s + 5 \\ z = t - s - 1 \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las rectas, estas ecuaciones brindan una relación lineal entre las variables x, y, z, solo que lo están haciendo por medio de s y t. Nuestro objetivo, entonces, es desenmascarar esta relación quitando s y t, Al despejar t y s en función de nuestras coordenadas. Por ejemplo, de la primera ecuación despejamos t y nos queda $t = x - 2$. En la segunda ecuación, al reemplazar este nuevo dato, nos queda $y = 2(x - 2) + s + 5$, de donde despejamos s, y obtenemos $s = y - 2x - 1$. Una vez despejadas s y t en función de las coordenadas, solo nos resta reemplazar estos datos en la última ecuación para obtener $z = (x - 2) - (y - 2x - 1) - 1$, a partir de la cual conseguimos la ecuación $z = 3x - y - 2$. Al agrupar para que quede en forma implícita, hallamos que $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -3x + y + z = -2\}$.

■ **Ejemplos 25**

- Consideremos el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, 0, 1) + s(-2, 2, 3) + (1, -3, -1),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Entonces, los puntos $(x, y, z) \in \Pi$ verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = t + 3s - 1 \end{cases}$$

  De la primera ecuación obtenemos que $t = x + 2s - 1$. Al reemplazar el valor de t en la tercera ecuación, se tiene que $z = x + 2s - 1 + 3s - 1 = x + 5s - 2$. Si despejamos s de esta última ecuación, obtenemos: $s = \frac{z-x+2}{5}$. Por último, al reemplazar el valor de s en la segunda ecuación, se tiene que $y = 2\frac{z-x+2}{5} - 3$, de lo cual concluimos que $-\frac{2}{5}x - y + \frac{2}{5}z = \frac{11}{5}$. Esta es una posible ecuación implícita para el plano Π. Podemos simplificarla, multiplicando esta última igualdad por 5, es decir, $-2x - 5y + 2z = 11$. Esta también constituye una ecuación implícita para el plano Π.
- Al considerar la ecuación vectorial $t(1, 2, -1) + s(-2, -4, 2) + (0, 0, 1)$, observamos que, como los vectores directores son uno múltiplo del otro, dicha ecuación no define un plano. Hagamos el pasaje a la forma implícita y veamos qué ocurre en este caso. Tenemos las siguientes relaciones entre las coordenadas de un punto cualquiera

que verifica la ecuación dada:

$$\begin{cases} x = t - 2s \\ y = 2t - 4s \\ z = -t + 2s + 1 \end{cases}$$

En la primera ecuación obtenemos $t = x + 2s$. Luego, al reemplazaar esta última igualdad en la segunda y tercera ecuación, resulta $y = 2(x + 2s) - 4s = 2x$ y $z = -(x + 2s) + 2s + 1 = -x + 1$, respectivamente. En este caso, tenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

Observemos que estas dos ecuaciones no pueden reducirse a una sola pues tanto y como z dependen de x de manera independiente. Si quisiéramos despejar x de la primera ecuación y reemplazarla en la segunda, de manera de quedarnos solo con la ecuación $z = \frac{y}{2} + 1$, entonces estaríamos perdiendo información, ya que sabríamos cómo depende z de y pero ignoraríamos cómo depende y de x. Por lo tanto, las dos ecuaciones son independientes y no pueden reducirse a una sola.

¿Cómo hallamos ahora la ecuación vectorial de un plano dado en forma implícita? Lo hacemos con un ejemplo. Supongamos que tenemos el plano $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = -1\}$. De aquí obtenemos que $x = -2y + z - 1$. Es decir, la ecuación nos indica que, dados $y, z \in \mathbb{R}$, el punto $(x, y, z) \in \Pi'$ si y solo si $x = -2y + z - 1$. Por lo tanto, los puntos del plano Π' son de la forma $(-2y + z - 1, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$. Nuevamente, debemos "descomponer" este vector para escribirlo como un múltiplo de un vector director, más un múltiplo de otro vector director, más otro vector que indica el punto por el que pasa. En primer lugar escribimos $(-2y + z - 1, y, z)$ como suma de tres vectores: uno cuyas coordenadas están multiplicadas por y, otro cuyas coordenadas estén multiplicadas por z y otro cuyas coordenadas son solo números. En este caso:

$$(-2y + z - 1, y, z) = \underbrace{(-2y, y, 0)}_{\text{coord. con } y} + \underbrace{(z, 0, z)}_{\text{coord. con } z} + \underbrace{(-1, 0, 0)}_{\text{coord. con números}}$$

Luego, "sacamos" y por fuera del primero de estos vectores y z por fuera del segundo y, de esta manera, obtenemos:

$$(-2y + z - 1, y, z) = \underbrace{y(-2, 1, 0)}_{(-2y, y, 0)} + \underbrace{z(1, 0, 1)}_{(z, 0, z)} + (-1, 0, 0),$$

la cual es una ecuación vectorial para Π'. Así mismo, podemos reemplazar las variables y y z en esta expresión para escribir $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(-2, 1, 0) + s(1, 0, 1) + (-1, 0, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$.

Estudien cómo se modifica la ecuación del plano si en vez de comenzar despejando la variable x se hubiese despejado la variable y o la z.

Ejemplo 26 Consideremos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -3x + 7y + z = 0\}$. Despejamos, por ejemplo, la variable z de esta última ecuación y obtenemos $z = 3x - 7y$. Así, un punto (x, y, z) pertenece a Π si y solo si verifica que $(x, y, z) = (x, y, 3x - 7y) = (x, 0, 3x) + (0, y, -7y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -7)$. De esta forma, obtenemos la ecuación implícita $t(1, 0, 3) + s(0, 1, -7)$ para Π.

Los planos admiten otra forma de descripción, además, de la ecuación vectorial y la implícita, esta es: *la ecuación normal* que desarrollaremos en el próximo apartado.

¿Qué hicimos en el apartado 2.2?

- Definimos la ecuación vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$ a partir de dos direcciones distintas (vectores directores) y un punto de paso (un vector que traslada el plano a dicho punto).
- Definimos la ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$ como una relación lineal entre las coordenadas de los puntos del plano. Esta relación determina completamente cuáles puntos forman parte del plano y cuáles no.
- Estudiamos cómo determinar cuando un punto pertenece a un plano y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

2.3 La ecuación normal de un plano

Veamos otra forma vectorial de describir un plano: la ecuación normal. En este caso, necesitaremos utilizar nuestra herramienta de medición introducida en el capítulo anterior: el producto escalar.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación normal de un plano y su relación con la ecuación implícita del mismo.
- El producto vectorial entre vectores de $\mathbb{R}^3$.

2.3.1 La ecuación normal

Primero veamos una analogía, imaginemos que tenemos una placa plana de vidrio con una sopapa (un palo con ventosa) pegada a (Figura 2.5 lado izquierdo). Supongamos que la placa es “infinita”, de manera que podemos pensarla como un plano de $\mathbb{R}^3$. Todos los puntos de la placa tienen una propiedad en común respecto de la sopapa: si pensamos que el lugar donde la sopapa está pegada a la placa es el origen de coordenadas, entonces cada punto de la placa (visto como el extremo de un vector), es perpendicular al vector determinado por la sopapa (Figura 2.5 lado derecho). De hecho, esta propiedad es *definitoria* del plano, en el sentido que un punto está en la placa si y solo si es perpendicular a la ventosa. Es decir, podemos describir (el plano dado por) la placa como “el conjunto formado por todos los puntos perpendiculares (al vector dado por) la sopapa”. ¿Cómo escribir esta propiedad formalmente? Sabemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Si llamamos Π al plano determinado por la placa y $\vec{N}$ al vector determinado por la sopapa, entonces escribimos:

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{N} \cdot \vec{X} = 0\}.$$

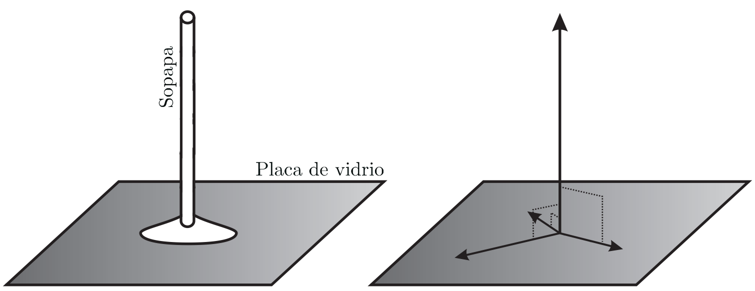

Figura 2.5: Placa de vidrio con sopapa pegada.

Un vector $\vec{N}$ que es perpendicular al plano se llama una *normal del plano*. La forma de describir un plano como el conjunto de vectores ortogonales a una dirección normal dada, se llama la *ecuación normal del plano* y se sintetiza escribiendo $\vec{N} \cdot \vec{X} = 0$, donde $X \in \mathbb{R}^3$. Esta ecuación está diciendo "considero los $X \in \mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $\vec{N}$".

En nuestra deducción de la ecuación normal del plano motivada por la analogía anterior, hemos asumido en un momento que la intersección entre la placa y la sopapa justamente sucedía en el origen de coordenadas. ¿Qué sucede si tenemos un plano que no pasa por el origen de coordenadas? En este caso, no es verdad que el plano sea el conjunto de puntos perpendiculares a un vector normal a él. Esto sucede ya que la perpendicularidad se mide por medio del producto escalar de vectores, y las propiedades de dicho producto valen para vectores con origen en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Una manera de resolver esto consiste en trasladar el plano hasta que pase por el origen (esto no altera la inclinación del plano ni la de la normal) y así, entonces, plantear la ecuación normal para planos que introdujimos.

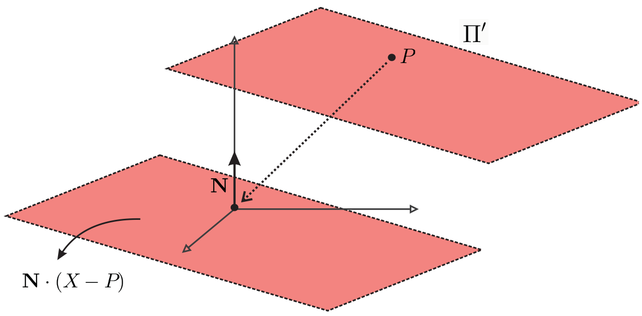

Figura 2.6: Traslado de un plano al origen.

Si Π' es ahora un plano que no pasa por el origen, digamos que pasa por un punto $P \neq \vec{0}$, entonces se puede trasladar el plano Π' al origen desplazándolo por medio del vector $-\vec{P}$ (Figura 2.6). Los puntos de este nuevo plano trasladado son de la forma $X - P$, donde $X \in \Pi'$. Por lo tanto, si $\vec{N}$ es una normal de Π', la frase "el plano Π' es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ tales que, luego de trasladar Π' al origen, resultan perpendiculares a $\vec{N}$", se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0\}.$$

En este caso, lo que se conoce como *ecuación normal del plano* es la fórmula $\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0$. Cuando $P = \vec{0}$, obtenemos la ecuación normal del plano por el origen que vimos antes. Estonos lleva a la siguiente definición:

Definición 20 Una *ecuación normal* de un plano Π es:

$$\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0,$$

donde $\vec{N}$ es una normal del plano (un vector perpendicular a él) y P es un punto de Π (cualquiera).

Ejemplos 27

- El plano xy consta de todos los puntos que son perpendiculares al eje z. Por lo tanto, podemos pensar que son los puntos (x, y, z) que verifican que $(x, y, z) \cdot \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{N}} = 0$.
- El plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(1, 0, 1) + s(1, 1, 0) + (1, 2, 0), \ t, s \in \mathbb{R}\}$ al trasladarlo al origen (por ejemplo,

por medio del vector $-(1,2,0)$) es el plano $= \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(1,0,1) + s(1,1,0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que el vector $(-1,1,1)$ es perpendicular a los vectores $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$ simultáneamente y, por lo tanto, a todos los puntos del plano trasladado al origen $\Pi - (1,2,0)$. Así, el vector $(-1,1,1)$ resulta ser un vector normal de dicho plano. Por lo tanto, una ecuación normal para Π es $(-1,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,2,0)) = 0$.

■

¿Cuándo son dos planos paralelos?¿Cuándo es un plano perpendicular a una recta? La noción de "normal de un plano" nos ofrece una manera muy sencilla de contestar estas preguntas. El estudiante podrá interpretar gráficamente estas definiciones.

Definición 21 Dos planos Π y Π' son *paralelos* si sus vectores normales son múltiplos uno del otro. Un plano Π es perpendicular a una recta L si el vector normal de Π es múltiplo del vector director de L.

¡La ecuación normal y la ecuación implícita son lo mismo! Anteriormente cuando hablamos de la ecuación implícita del plano, la presentamos como una manera de describir los puntos del espacio que verifican ciertas restricciones (ecuaciones). Pero ahora podemos ver que, en realidad, la ecuación implícita de un plano se desprende precisamente de la ecuación normal. En efecto, solo basta reescribir la ecuación $\vec{N}\cdot(\vec{X}-\vec{P}) = 0$ en toda su extensión. Es decir, si para un plano Π escribimos su vector normal $\vec{N} = (a,b,c)$, un punto genérico $X = (x,y,z)$ y un punto fijo del plano $P = (\alpha,\beta,\gamma)$ entonces, teniendo en cuenta la definición de producto escalar, la ecuación normal del plano se convierte en:

$$(a,b,c)\cdot((x,y,z)-(\alpha,\beta,\gamma)) = 0,$$

que no es otra cosa que:

$$ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

En esta última ecuación, $a\alpha+b\beta+c\gamma$ es simplemente un número real, por lo que ¡obtenemos una ecuación implícita para el plano!

Observación 8 *Veamos que los coeficientes que acompañanan a las coordenadas x, y, z en una ecuación implícita del plano son siempre las coordenadas de una normal de dicho plano.*

■ Ejemplos 28

- Consideremos el primer ítem de los Ejemplos 27. Vimos que la ecuación normal del plano xy es $(x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0$. al desarrollar el producto escalar obtenemos que $x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 1 = 0$. Es decir, hallamos la ecuación implícita $z = 0$ para el plano xy.
- En el segundo ítem de los Ejemplos 27, una ecuación normal para Π era $(-1,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,2,0)) = 0$. Nuevamente, si hacemos el producto escalar, obtenemos que $(-1,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,2,0)) = (-1,1,1)\cdot(x-1, y-2, z) = -x+1+y-2+z = 0$. Luego obtenemos la ecuación implícita $-x+y+z = 1$ para Π.

■

Entonces la ecuación normal del plano nos provee una manera de interpretar geométricamente la ecuación implícita de un plano. Recuperar la normal de un plano y su ecuación normal, a partir de una ecuación implícita, es sencillo. En efecto, supongamos por ejemplo que tenemos el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x+2y-z = 4\}$. Inmediatamente hallamos que $\vec{N} = (3,2,-1)$, por la Observación 8. Además, como 4 debe coincidir con $-\vec{N}\cdot P$ entonces:

$$(3,2,-1)\cdot\underbrace{(\alpha,\beta,\gamma)}_{P} = 4,$$

de donde $3\alpha+2\beta-\gamma = 4$. Es decir, P debe ser un punto que verifica esta ecuación; por ejemplo: $P = (0,1,-2)$.

Por lo tanto, una ecuación normal para Π es:

$$(3,2,-1)\cdot((x,y,z)-(0,1,-2))=0.$$

Observación 9 *Observen que tuvimos mucha libertad al elegir el punto P (podíamos elegir cualquiera cuyas coordenadas verificaran la ecuación dada). Esto se debe a que en la ecuación normal de un plano, el punto P puede ser tomado como* cualquier *punto del plano, ya que el objetivo es trasladar el plano al origen y no nos importa de qué manera (Figura 2.7).*

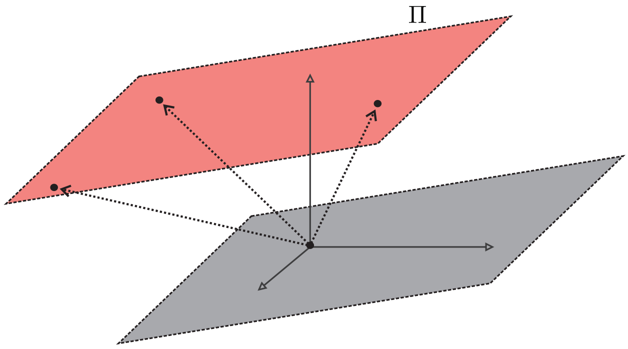

Figura 2.7: Diferentes maneras de trasladar un plano desde el origen para obtener el mismo plano.

La ecuación implícita de un plano se puede deducir a partir de su ecuación normal. La misma permite describir al plano como un conjunto de puntos perpendiculares a una dirección. Deduzcan, a partir de esta premisa, la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$ y comprueben que toda recta en el plano que pasa por el origen de coordenadas puede describirse como el conjunto de los puntos perpendiculares a una dirección perpendicular a ella.

2.3.2 El producto vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$

A esta altura, ya hemos notado que es conveniente calcular la normal de un plano (pues a partir de ella encontramos una descripción muy sencilla del mismo). Si el plano está dado en forma vectorial, entonces la normal es un vector que es perpendicular al plano que los vectores directores generan (y que pasa por el origen). En particular, es ortogonal a los dos vectores directores *simultáneamente*. En esta apartado, introduciremos una herramienta para hallar un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a otros dos vectores dados. Esto es, si $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ no son paralelos, entonces definiremos otro vector $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$, llamado *el producto vectorial entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$*, cuya propiedad principal es que es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$. Esto nos permitirá calcular automáticamente la normal de un plano dado en forma vectorial. A diferencia de las demás operaciones entre vectores, el producto vectorial *sólo está definido para vectores de $\mathbb{R}^3$*.

Definición 22 Sean $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$. El *producto vectorial entre los vectores $\vec{v}=(x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{w}=(y_1,y_2,y_3)$, es el vector $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$* definido por:

$$\vec{u}=(x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1).$$

Se nota $\vec{u}=\vec{v}\times\vec{w}$.

Por ejemplo, $(1,2,0)\times(-1,3,-2)=(2.(-2)-0{,}3, 0.(-1)-1.(-2), 1{,}3-2.(-1))=(-4,2,5)$. Si ahora chequeamos la ortogonalidad de este vector con los originales encontramos que:

- $(1, 2, 0) \cdot (-4, 2, 5) = -4 + 4 + 0 = 0$ y
- $(-1, 3, -2) \cdot (-4, 2, 5) = 4 + 6 - 10 = 0$,

Se verifica que, efectivamente, el nuevo vector hallado es perpendicular a los dos originales: la propiedad fundamental del producto vectorial.

Es claro que la fórmula que define el producto vectorial es algo complicada, y tratar de memorizar qué término va en cada lugar parece una pérdida de tiempo. Por esta razon, proporcionamos la siguiente "regla" para recordar cómo formar el producto vectorial. Esta regla se basa en un "movimiento" que aparecerá muchas veces en la teoría (por lo cual es una buena idea ir introduciéndolo). El movimiento puede verse en la Figura 2.8:

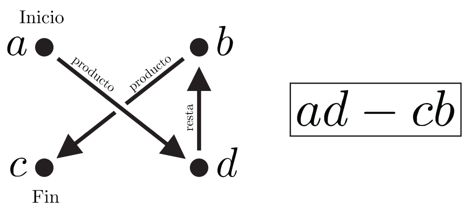

Figura 2.8: Movimiento elemental para calcular el producto vectorial.

El procedimiento para calcular el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ es el siguiente.

1. Escribir el vector $\vec{w}$ debajo del vector $\vec{v}$, de manera que la primera coordenada (y por consiguiente, la segunda y tercera) de cada uno queden alineadas en la misma columna.
2. Tapar la primera columna (es decir, las primeras coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. Este número es la primera coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.
3. Ocultar la segunda columna (las segundas coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. *El opuesto* de este número es la segunda coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.
4. Tapar la tercera columna (las terceras coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. Este número es la tercera coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.
   La Figura 2.9 muestra un ejemplo de cómo es el procedimiento descripto.

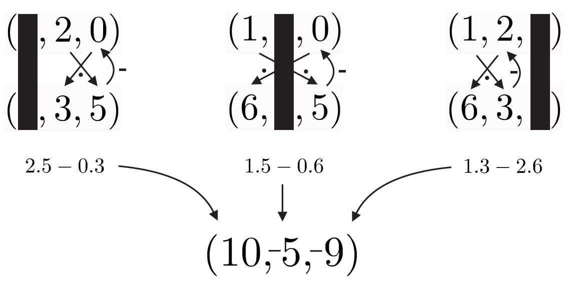

Figura 2.9: Cálculo del producto vectorial entre $(1, 2, 0)$ y $(6, 3, 5)$.

2.3.3 Nuevo cálculo de la ecuación implícita a partir de la vectorial, y viceversa

Ahora que pudimos interpretar la ecuación implícita de un plano a partir de su ecuación normal, y teniendo a mano la noción de producto vectorial de vectores, tenemos una forma mucho más sencilla y directa de pasar de la ecuación implícita a la vectorial, y viceversa. En efecto, realicen los siguientes experimentos.

Experimento 8 Consideren un plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},\ t, s \in \mathbb{R}\}$ dado en forma vectorial. Luego:

- Hallen la normal del plano Π utilizando el producto vectorial entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
- Formen la ecuación implícita de Π, a partir de su ecuación normal, utilizando $\vec{v} \times \vec{w}$ y el extremo de $\vec{u}$ (que es un punto por donde pasa Π).

Experimento 9 Consideren un plano $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$, dado en forma implícita. Luego:

- Hallen la normal $\vec{N}$ del plano Π' y algún punto P por el que pase dicho plano (hay muchos).
- Encuentren ("a ojo" o haciendo una cuenta) algún vector $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{N}$ (hay muchos).
- Usen el producto vectorial para hallar un vector $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{N}$ y a $\vec{v}$ simultáneamente.
- Formen la ecuación vectorial de Π' con vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{N} \times \vec{v}$ y el vector de extremo P.

Observación 10 *Tengamos en cuenta que, en este último experimento, los vectores directores hallados son ortogonales. Por supuesto, esto no es un requerimiento para una ecuación vectorial del plano, aunque es muchas veces preferible que las direcciones tengan esta propiedad. De todas maneras, al calcular la ecuación vectorial de esta forma (utilizando el producto vectorial), lo que intentamos hacer es mecanizar el procedimiento.*

El nombre espacio lineal *proviene de que estos espacios tienen la propiedad que, cada vez que dos puntos pertenecen al espacio, entonces la (única) recta que pasa por ellos también pertenece a dicho espacio. El lector interesado puede comprobar este hecho de manera directa utilizando ecuaciones vectoriales de las rectas (repasen lo escrito en la sección "Para pensar." de la página 42).*

¿Qué hicimos en el apartado 2.3?

- Definimos la ecuación normal del plano que permite describirlo como todos los puntos perpendiculares a una dirección dada. A partir de esta ecuación, obtenemos inmediatamente la ecuación implícita del plano.
- Definimos el producto vectorial entre vectores de $\mathbb{R}^3$, cuyo resultado es un vector de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a los vectores originales, simultáneamente.

2.4 Intersección de subespacios de $\mathbb{R}^3$

En este apartado, calcularemos intersecciones entre rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. Esto nos va a permitir, en particular, introducir la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$ (la recta determinada por la intersección de dos planos). *Es importante destacar que la intersección de dos subespacios lineales vuelve a ser un subespacio lineal, por lo que la dicha intersección se puede describir vectorial o implícitamente como lo venimos haciendo, en este capítulo.*

Interpreten que la intersección de subespacios lineales es nuevamente un espacio lineal, a partir de la propiedad que poseen los espacios lineales: si dos puntos pertenecen al espacio entonces toda recta que los atraviesa también.

En este apartado estudiaremos...

- Como calcular la intersección:
  - de dos planos.
  - de un plano y una recta.
  - entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$.
- La clasificación de rectas del espacio.

2.4.1 Intersección de planos

Sabemos que existen tres posibles resultados al buscar la intersección de dos planos:

1. se "atraviesan" a lo largo de una recta,
2. no se intersecan (pues son paralelos) o
3. son el mismo plano (y su intersección es el mismo único plano).

Estas posibilidades pueden verse en la Figura 2.10. Vamos a estudiar cómo hallar la intersección en cada uno de estos planos según como aparezcan descriptos.

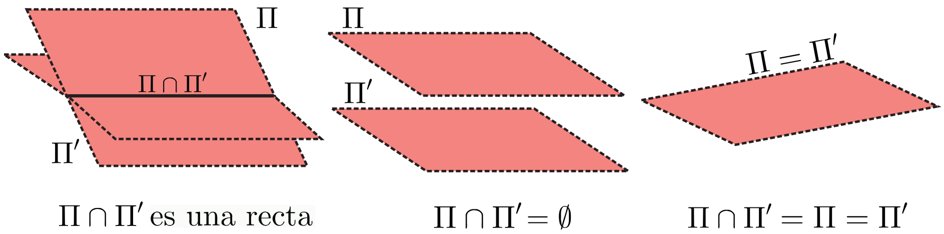

Figura 2.10: Posibilidades de intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$.

Intersección de planos dados en forma implícita La manera más sencilla de calcular la intersección de dos planos es si ambos vienen descriptos por su ecuación implícita.[1] Supongamos que tenemos los planos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$. La interpretación de los puntos de la intersección entre ambos es directa: si los puntos de Π son los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $2x - 3y + 2z = 2$ y los de Π' los que verifican $x - 2y - z = 0$, entonces, para estar en ambos planos, deben corroborarse ambas ecuaciones a la vez. Es decir, buscamos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Entonces, ¿cuáles son los puntos en $\Pi \cap \Pi'$? Como mencionamos anteriormente, sabemos que dicha intersección tiene tres posibles formas de concretarse, o bien formarán una recta, o bien serán el mismo plano, o bien no habrá ninguno punto en común entre los dos planos. La manera de resolver estas ecuaciones simultáneas es la misma que ya utilizamos anteriormente para resolver otras situaciones análogas. El objetivo es despejar una variable en una ecuación y, luego, reemplazarla en la otra (cuál y de qué ecuación, es indistinto). En este caso, podemos despejar x de la segunda ecuación y obtener $x = 2y + z$. Al reemplazar x por $2y + z$ en la primera ecuación, obtenemos $2(2y + z) - 3y + 2z = 2$; o lo que es lo mismo: $y + 4z = 2$. De esta última ecuación, despejamos de nuevo una variable en función de la otra (esta ecuación solo tiene las variables y y z). Por ejemplo, $y = 2 - 4z$. Con esto,

[1] Esto será evidente cuando estudiemos la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la segunda parte del libro.

observamos que y *depende* de z (y solo de z). ¿Qué sucede con x? Ya habíamos visto que $x = 2y + z$; pero ahora tenemos más información que cuando despejamos x: sabemos que $y = 2 - 4z$. Por lo tanto, reemplazamos y por este valor en la ecuación $x = 2y + z$ para hallar: $x = 2(2 - 4z) + z = 4 - 7z$. De esta manera, vemos que x también depende solo de z. Lo que hemos hallado, entonces, es que se verifica:

$$\begin{cases} x = 4 - 7z \\ y = 2 - 4z \end{cases}$$

Es decir que los puntos en $\Pi \cap \Pi'$ son de la forma $(4 - 7z, 2 - 4z, z)$ para $z \in \mathbb{R}$ cualquiera. Ahora, desarmamos el vector como ya hicimos anteriormente: escribiéndolo como suma de un vector con todas sus coordenadas multiplicadas por z y otro con solo números:

$$(4 - 7z, 2 - 4z, z) = (4, 2, 0) + (-7z, -4z, z) = (4, 2, 0) + z(-7, -4, 1).$$

¡Esta es precisamente la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$! Su vector director es $(-7, -4, 1)$ y su punto de paso el $(4, 2, 0)$. Esto nos indica que los planos Π y Π' se intersecan efectivamente y que la recta encontrada está compuesta por los puntos que están en ambos planos. Este es el resultado que debemos esperar siempre que los planos no sean paralelos.

En el ejemplo anterior, al resolver el sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas, se obtuvieron dos ecuaciones en las que tanto x como y dependen del valor de z. Analicen cómo se modifica esta solución si se le agrega una tercera ecuación al sistema.

¿Qué sucede si Π y Π' fuesen paralelos? Por ejemplo, si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + 2z = 7\}$ entonces al formar el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

vemos que al despejar x en la primera ecuación tenemos $x = 1 - y - z$; y al reemplazar en la segunda se tiene $2(1 - y - z) + 2y + 2z = 7$, de lo que se deduce $2 = 7$, lo cual es absurdo. Esto quiere decir que *no existen puntos que satisfagan las ecuaciones de ambos planos simultáneamente*; o sea, $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ pues los planos son paralelos.
¿Qué sucede si Π y Π' fuesen el mismo plano? Por ejemplo, si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = -1\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 3y - 6z = 3\}$ entonces al formar el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -3x + 3y - 6z = 3 \end{cases}$$

observamos que al despejar x en la primera ecuación tenemos $x = -1 + y - 2z$; y al reemplazar en la segunda se tiene $-3(-1 + y - 2z) + 3y - 6z = 3$, a partir de lo cual deducimos $3 = 3$. Es decir que, si la primera ecuación se verifica (o sea, $x = -1 + y - 2z$), entonces la segunda ecuación se verifica *automáticamente*. En otras palabras, la segunda ecuación no impone nuevas restricciones sobre las coordenadas x, y, z: si se verifica la restricción que aporta la primera ecuación, la de la segunda ecuación también se correborará. Es posible chequear que, si hubiésemos despejado alguna variable de la segunda ecuación y reemplazado en la primera, hubiéramos obtenido el mismo resultado. Por lo tanto, ambas restricciones son la misma restricción. Esto nos indica que las ecuaciones implícitas de Π y Π' son ecuaciones implícitas del mismo plano, por lo que $\Pi = \Pi'$.

Estamos en condiciones de explicar cómo es una ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$. Ya mencionamos que necesitamos dos ecuaciones; ¡y estas son precisamente las ecuaciones de dos planos dados en forma implícita cuya intersección es dicha recta! En efecto, si retomamos el primer ejemplo de la carilla 54, vemos que si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y - z = 0\}$, entonces su intersección era la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7, -4, 1) + (4, 2, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Y los puntos de L eran precisamente los que satisfacían las ecuaciones de los dos planos simultáneamente. Este *sistema de dos ecuaciones* simultáneas es lo que llamaremos una *ecuación implícita para la recta* L. Se expresa de la siguiente manera:

$$L : \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Como sabemos, las ecuaciones implícitas no son únicas y uno tiene, en general, libertad para elegir qué planos "intersecar" para determinar la ecuación implícita. Por ejemplo, la recta recién descripta también se podría obtener como intersección de los planos $5x - 7y + 7z = 6$ y $21x - 44y - 29z = -4$, con lo cual otra ecuación implícita para dicha recta es:

$$L : \begin{cases} 5x - 7y + 7z = 6 \\ 21x + 44y + 29z = 172 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 29** Veamos cómo podemos hacer para encontrar esta segunda ecuación implícita para la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7, -4, 1) + (4, 2, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Tenemos que encontrar dos planos (distintos) que contengan a dicha recta simultáneamente. En primer lugar, para asegurarnos de que un plano contenga a L, tomamos como uno de los vectores directores del mismo a un vector director de L (por ejemplo, al $(-7, -4, 1)$) y pedimos que dicho plano contenga a un punto cualquiera de la recta (por ejemplo, el $(4, 2, 0)$). Un posible plano es $\Pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7, -4, 1) + s(0, 1, 1) + (4, 2, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Notemos que el vector $(0, 1, 1)$ fue elegido arbitrariamente con la única condición de que no sea múltiplo de $(-7, -4, 1)$. La ecuación implícita Π es $5x - 7y + 7z = 6$. En segundo lugar, el otro plano que necesitamos lo construimos de la misma manera, pero teniendo en cuenta que no es posible definir el mismo primer plano que ya contruimos. Es decir, debemos asegurarnos que el segundo vector director que elegimos no determine el mismo plano Π. Una manera de hacerlo de forma segura, es tomando un vector perpendicular al $(-7, -4, 1)$ y al $(0, 1, 1)$, al mismo tiempo; por ejemplo, el producto vectorial $(-7, -4, 1) \times (0, 1, 1) = (-5, 7, -7)$. En este caso, obtenemos el plano de ecuación vectorial $t(-7, -4, 1) + s(-5, 7, -7) + (4, 2, 0)$. Al calcular su ecuación implícita, se obtiene $21x - 44y - 29z = -4$. Por lo tanto, como queríamos mostrar:

$$L : \begin{cases} 5x - 7y + 7z = 6 \\ 21x - 44y - 29z = -4 \end{cases}$$

Ahora, si bien aquí hemos hallado una ecuación implícita para L por medio de dos planos perpendiculares que se cortan en L, en general, esto no es necesario. De igual manera, podíamos haber construido un segundo plano que no sea perpendicular al primero, eligiendo de manera arbitraria el segundo vector director. Si la casualidad es tal que esta elección en realidad nos devuelve el mismo plano Π, entonces solo debemos volver a sugerir otro vector director (esperando que la nueva elección no determine el mismo plano otra vez). ■

¿Cómo calcular la intersección si uno de los planos está dado en forma vectorial? Supongamos ahora que tenemos los planos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(2, 1, 0) + s(2, 2, -2) + (0, -1, 2),\ t, s \in \mathbb{R}\}$ y queremos encontrar $\Pi \cap \Pi'$. *Ya conocemos una manera de resolver esto*: hallamos la ecuación implícita del plano Π' y, luego, calculamos la intersección como explicamos al comienzo del capítulo. Pero, ¿si no queremos calcular la ecuación implícita de Π'? Como lo venimos haciendo, lo único que debemos tener

presente es *qué nos están diciendo estas formas de representar los planos*: la ecuación implícita nos impone una relación que deben verificar las coordenadas de los puntos del plano, mientras que la ecuación vectorial nos dice "qué forma tienen los puntos del plano". Recordando lo que hicimos en el apartado anterior (2.3), los puntos de Π' son de la forma $(2t+2s, t+2s-1, -2s+2)$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los puntos en $\Pi \cap \Pi'$ deben ser de esta forma y, además, sus coordenadas x, y, z deben verificar $2x - 3y + 2z = 2$. Pero la forma que tienen los puntos de Π' indican precisamente que la coordenada x es de la forma $2t + 2s$, la y de la forma $t + 2s - 1$ y la z de la forma $-2s + 2$. Por lo tanto, pedir que estas coordenadas verifiquen la ecuación implícita de Π es pedir que:

$$2(\underbrace{2t+2s}_{x}) - 3(\underbrace{t+2s-1}_{y}) + 2(\underbrace{-2s+2}_{z}) = 2.$$

Si desarrollamos esta ecuación, obtenemos $t-6s+7 = 2$, a partir de lo cual tenemos $t = 6s-5$. Lo que sucedió aquí es que, originalmente, en la ecuación dada por la forma vectorial de Π', las variables s y t eran *independientes*, en el sentido que no dependía una de otra. Pero al pedir a los puntos de Π' que además verifiquen la ecuación implícita de Π, hemos descubierto que ahora las variables s y t ya no pueden ser independientes: deben estar relacionadas por una ecuación. En conclusión, de todos los puntos de Π' (que son de la forma $(2t+2s, t+2s-1, -2s+2)$), los que además están en Π son los que verifican $t = 6s - 5$. Por lo tanto, los puntos de $\Pi \cap \Pi'$ son los puntos de la forma:

$$(2(6s-5)+2s, (6s-5)+2s-1, -2s+2) = (14s-10, 8s-6, -2s+2).$$

Ahora ya sabemos qué hacer en este caso: reescribimos este vector convenientemente como:

$$s(14, 8, -2) + (-10, -6, 2),$$

que es una ecuación vectorial de la recta $\Pi \cap \Pi'$.

¿Qué sucede en el caso de planos paralelos o el mismo plano? Vamos a descubrirlo en el siguiente experimento.

Experimento 10 Consideren los planos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 13\}$, $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(0, 1, 1) + s(1, 0, -2) + (-3, 1, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(2, 2, -2) + l(-1, 1, -3) + (5, 0, 3),\ k, l \in \mathbb{R}\}$. Luego:

1. Calculen $\Pi \cap \Pi'$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que obtuvieron cuando calcularon la intersección de planos paralelos dados en forma implícita.
2. Calculen $\Pi \cap \Pi''$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que consiguieron cuando calcularon la intersección de planos iguales dados en forma implícita.

■

¿Cómo calcular la intersección si ambos planos están dados en forma vectorial? En esta instancia, ya sabemos cómo encarar este problema. Lo resolvemos con un ejemplo sin ahondar mucho en detalles. Si $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 0, -1) + s(0, 1, 1) + (0, 0, 3),\ t, s \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(1, 0, 0) + l(0, 1, -2) + (1, 0, 1),\ k, l \in \mathbb{R}\}$, entonces los puntos de Π son de la forma $(t, s, -t+s+3)$ para algún $s, t \in \mathbb{R}$ y los de Π' de la forma $(k+1, l, -2l+1)$ para algunos $k, l \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los puntos que estén en ambos planos a la vez deben ser de *ambas formas a la vez*. Esto es, deben existir $s, t, k, l \in \mathbb{R}$ tales que $(t, s, -t+s+3) = (k+1, l, -2l+1)$. De aquí, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L : \begin{cases} t = k+1 \\ s = l \\ -t+s+3 = -2l+1 \end{cases}$$

Luego, al reemplazar la primera y segunda ecuación en la tercera, obtenemos que $-k-1+l+3=-2l+1$ y, por lo tanto, $k=3l+1$. Así, los puntos que pertenecen a la intersección de ambos planos son de la forma $(3l+2,l,-2l+1)=(3l,l,-2l)+(2,0,1)=l(3,1,-2)+(2,0,1)$. Es decir, la intersección de Π y Π' es la recta de ecuación $l(3,1,-2)+(2,0,1)$. Observemos que, de la segunda y tercera ecuación, podemos encontar una relación similar entre s y t; más precisamente, $t=3s+2$. Al reemplazar esta información en $(t,s,-t+s+3)$, obtenemos la misma recta. Nuevamente, dejamos para deducir en un experimento qué sucede con estas cuentas en el caso de planos paralelos o iguales.

Experimento 11 Consideren los planos $\Pi=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=t(2,1,-4)+s(-1,0,1)+(2,0,-3),\ t,s\in\mathbb{R}\}$, $\Pi'=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=k(-3,-\frac{1}{2},2)+l(1,1,-3)+(1,3,-1),\ k,l\in\mathbb{R}\}$ y $\Pi'' : r(0,1,-2)+j(-3,-1,5)+(1,0,-2)$. Luego:

1. Calculen $\Pi\cap\Pi'$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que alcanzaron cuando calcularon la intersección de planos paralelos dados en forma implícita.
2. Calculen $\Pi\cap\Pi''$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que consiguieron cuando calcularon la intersección de planos iguales dados en forma implícita.

■

2.4.2 Intersección de un plano y una recta

¿Cómo calcular la intersección de un plano y una recta en $\mathbb{R}^3$? Sabemos que las posibilidades son:

1. la recta interseca al plano en un punto (y la intersección es ese único punto),
2. la recta es paralela al plano (y la intersección es vacía) o
3. la recta está contenida dentro del plano (y la intersección es exactamente toda la recta).

Estas opciones pueden verse en la Figura 2.11. Nuevamente, analizamos en cada caso dependiendo de como estén descriptos el plano y la recta. Como los desarrollos son análogos a los que hicimos en el apartado anterior, (2.4.1), solo mostraremos con ejemplos la resolución, sin hacer mucho hincapié en los detalles.

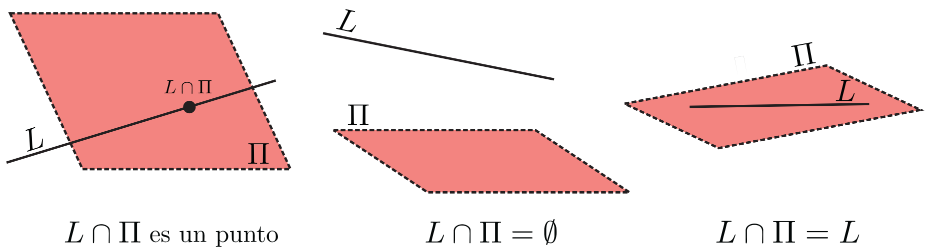

Figura 2.11: Posibilidades de intersección de un plano y una recta en $\mathbb{R}^3$.

Otra vez, la manera más simple de calcular intersecciones de subespacios es cuando estos vienen dados por ecuaciones implícitas: solo debemos juntar sus ecuaciones. Supogamos, entonces, que tenemos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y la recta cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

Los puntos de $\Pi \cap L$ son entonces los que verifican:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$

Ahora, resolveremos este sistema de ecuaciones simultáneas. De la segunda ecuación podemos despejar x para hallar que $x = 2z - y$. Al reemplazar en la primera ecuación obtenemos $2(2z - y) - 3y + 2z = 2$; es decir, $-5y + 6z = 2$. De aquí, encontramos que $y = -\frac{2-6z}{5}$. Con esta información, podemos "actualizar" la primera ecuación que hallamos $x = 2z - y$ y obtener $x = 2z - (-\frac{2-6z}{5}) = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$. Finalmente, reemplazamos estas dos ecuaciones en la última ecuación y obtenemos $2(\frac{4}{5}z + \frac{2}{5}) - 4z = 1$; es decir, $-\frac{12}{5}z + \frac{4}{5} = 1$. Despejamos z y conseguimos $z = -\frac{1}{12}$. Y como ya hallamos que $x = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$ e $y = -\frac{2-6z}{5}$, entonces, $x = \frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$. Aquí vemos que el único punto que pertenece a la intersección $\Pi \cap L$ es el punto $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$. O sea, en este caso, la recta atraviesa el plano.

¿Qué sucede en los otros posibles casos de intersección? Lo dejamos para averiguarlo en los siguientes experimentos.

Experimento 12 Consideren el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1\}$ y las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, -1, 0) + (1, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = s(2, 1, -1) + (2, 0, 1),\ s \in \mathbb{R}\}$. Luego, calculen:

1. $\Pi \cap L$
2. $\Pi \cap L'$

utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? ¿Cómo interpretan dicho resultado? ■

¿Qué sucede si ahora la recta viene dada en forma vectorial? Aquellos que ya hayan dominado la técnica para la intersección de planos, no tendrán dificultad en seguir el mismo razonamiento para este caso. Los orientamos en el siguiente experimento.

Experimento 13 Consideren el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1\}$ y la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, 3, -1) + (2, 2, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Luego:

1. Escriban la "forma" que tienen los puntos de L (en función de $t \in \mathbb{R}$).
2. Reemplacen x, y, z en la ecuación implícita de Π utilizando la forma de los puntos de L hallada en el punto anterior. ¿Cuál es la interpretación de este reemplazo?
3. Para el t obtenido en el punto anterior, reemplácenlo en la ecuación vectorial de L para encontrar el punto donde se intersecan el plano y la recta.

■

A esta altura, no tendrán problemas en reconocer o interpretar los resultados de los procedimientos para los casos en los que la recta sea paralela al plano o esté incluída en el mismo.

Si el plano viene dado en su forma vectorial, pueden comprobar que no importa si es la forma de los puntos de L que introducimos en las ecuaciones Π o, como en este caso, la forma de os punto de Π que introducimos en *las ecuaciones de L. En ambos casos lo que se pide es verificar que las dos ecuaciones se verifiquen en forma simultánea. De esta forma se garantiza que se buscan los puntos en los dos subespacios: la recta y el plano.*

Finalmente, el caso en el que tanto la recta como el plano vienen dados en forma vectorial, solo debemos "igualar" la forma de sus puntos. Por ejemplo, si $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,1,0) + s(1,0,1) + (0,1,2),\, t,s \in \mathbb{R}\}$ y $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = k(1,3,-1) + (2,2,0),\, k \in \mathbb{R}\}$, entonces, buscamos $t, s, k \in \mathbb{R}$ tales que $(t+s, t+1, s+2) = (k+2, 3k+2, -k)$. A partir de aquí, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de donde despejamos s, t, k

$$\begin{cases} t + s = k + 2 \\ t + 1 = 3k + 2 \\ s + 2 = -k \end{cases}$$

En la segunda ecuación conseguimos $t = 3k + 1$ y, de la tercera ecuación, $s = -2 - k$. Luego, al reemplazar estos valores en la primera ecuación, deducimos que $3k + 1 - 2 - k = k + 2$. De esta última igualdad, podemos despejar k y obtener $k = 3$. Luego, al reemplazar este valor de k en $(k+2, 3k+2, -k)$, hallamos que la intersección entre la recta y el plano es el punto $(5, 11, -3)$.

Analicen qué se espera obtener si la recta es paralela al plano o si está contenida en él.

2.4.3 Intersección de rectas

Analicemos los posibles resultados de la intersección entre dos rectas en el espacio. Dichas rectas podrían:

1. cortarse en un punto,
2. no cortarse (lo que en este caso no implica que sean necesariamente paralelas) o
3. ser la misma recta.

La Figura 2.12 muestra estas posibles situaciones.

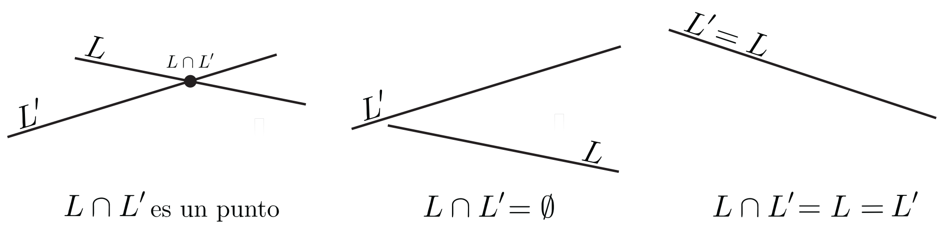

Figura 2.12: Posibilidades de intersección de rectas en $\mathbb{R}^3$.

Veamos todas las posibles formas de describir a estas rectas. Supongamos que L es la recta dada por las ecuaciones implícitas $x + 2z = 1$ y $y - z = 1$; L' es la recta dada por las ecuaciones $x + y + 3z = 6$ y $2x - 3y + z = -13$; L'' la recta de ecuación vectorial $t(1,-4,2) + (3,1,0)$ y L''' la recta de ecuación vectorial $s(2,-1,1) + (-3,3,0)$. Entonces, $L \cap L'$ es el conjunto de soluciones $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ del siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = -13. \end{cases}$$

Es la primera vez que nos encontramos con tantas ecuaciones. Si las pensamos como restricciones, nos están indicando que, para que haya al menos un punto en la intersección de ambas rectas, deben verificarse muchas condiciones, lo cual, en principio, parecería díficil que suceda. En realidad, dada la espacialidad de $\mathbb{R}^3$, esto tiene sentido. Si bien en $\mathbb{R}^2$ dos rectas casi siempre se cortan (con la única excepción que sean paralelas), en $\mathbb{R}^3$ es mucho más fácil encontrarse con rectas que no se toquen. ¿Cómo se resuelve entonces un sistema de cuatro ecuaciones? Pues como lo venimos haciendo. Ya vimos en el apartado anterior que, cuando tenemos tres ecuaciones, en general, quedan despejadas todas las variables y conseguimos un punto como la solución del sistema. En general, aquí pasará lo mismo con las primeras tres ecuaciones que utilicemos, pero no debemos perder de vista que, el punto que encontremos con estas tres ecuaciones, también debe satisfacer la cuarta ecuación (que aún no hemos utilizado).

Resolvemos entonces el sistema. De la primera ecuación obtenemos que $x = 1 - 2z$, y de la segunda ecuación, $y = z + 1$. Luego reemplazamos estos resultados en la tercera ecuación, consiguiendo $2 + 2z = 6$; con lo cual $z = 2$. Así, también, despejamos $x = -3$ e $y = 3$. Finalmente, debemos chequear que estos valores que alcanzamos verifican la última ecuación: $2 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 + 2 = -13$. Por lo tanto, concluimos que la intersección de ambas rectas es el punto $(-3, 3, 2)$.

Para los otros casos se procede de manera análoga a cómo lo venimos haciendo.

A diferencia de lo que pasa para las rectas en el plano, dos rectas en el espacio que no se tocan no son necesariamente paralelas (como sí era el caso entre planos o entre un plano y una recta). Por esta razón, existe la siguiente *clasificación de rectas en* $\mathbb{R}^3$.

Definición 23 Sean L y L' dos rectas en $\mathbb{R}^3$. Entonces, L y L' se dicen:

- **Concurrentes:** si su intersección no es vacía.
- **Paralelas:** si no son concurrentes y son paralelas.
- **Coincidentes:** si son concurrentes y paralelas.
- **Alabeadas:** si no son concurrentes ni paralelas.

¿Qué hicimos en el apartado 2.4?

- Estudiamos cómo calcular la intersección de:
  1. dos planos.
  2. de un plano y una recta.
  3. dos rectas de $\mathbb{R}^3$.
- Vimos cómo se clasifican dos rectas en: $\mathbb{R}^3$ en concurrentes, coincidentes, paralelas o alabeadas.

■

2.5 Distancias y ángulos entre rectas y planos

Dado que ya sabemos calcular intersecciones, estamos en condiciones de aprender a medir distancias y ángulos entre espacios lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo calcular:
  1. el ángulo entre dos rectas, entre una recta y un plano y entre dos planos.
  2. la distancia entre un punto y una recta y entre un punto y un plano.
  3. la distancia entre dos planos, entre dos rectas y entre una recta y un plano.

2.5.1 Ángulos entre rectas

¿Cómo medir el ángulo entre dos rectas? Tengamos en cuenta tres puntos. Observemos la situación como se muestra en la Figura 2.13, lado izquierdo. En primer lugar, dos rectas determinan *dos ángulos entre ellas*, uno más pequeño y otro más grande. Vamos a considerar que el ángulo entre dos rectas es el más pequeño entre ambos; es decir, aquel que está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Por otro lado, medimos el ángulo entre dos rectas cualesquiera, *aunque no se corten*. Por ejemplo, para nosotros, dos rectas paralelas distintas forman un ángulo de 0. Cabe destacar, entonces, que *no es necesario que las rectas se corten para poder medirles el ángulo*. Es posible pensar que, si fuera necesario, trasladamos una de las rectas (sin cambiarle la dirección) hasta que interseque a la otra.

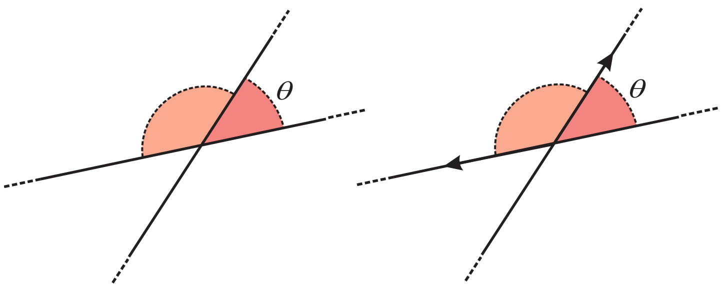

Figura 2.13: Ángulo entre dos rectas.

Entonces, dado que el ángulo depende de la dirección de la recta, ¿alcanza con definir el ángulo entre dos rectas como el ángulo entre los vectores directores de las rectas? *No, pero casi*. Observemos la Figura 2.13, lado derecho. Observemos que el ángulo entre las rectas no coincide con el ángulo entre los vectores directores. Esto sucede ya que es posible elegir infinitos vectores directores, pero, mientras que en la recta no importa el sentido, en los vectores directores sí. Entonces veamos que, en este caso, el ángulo se obtiene midiendo el ángulo entre uno de los vectores directores y el inverso del otro.

Definición 24 Sean $L, L' \in \mathbb{R}^3$ y supongamos que $\vec{v}$ es un vector director para L y $\vec{w}$ un vector director para L'. Si llamamos θ al ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$, entonces el ángulo entre L y L', el cual se denota $\angle(L, L')$, es ángulo más pequeño entre θ y $\pi - \theta$; es decir, el ángulo que está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ de estos dos.

Independientemente de esta definición, es importante recordar como hacemos para medir ángulos entre rectas: en primer lugar, buscamos el ángulo más pequeño entre ambas rectas (y para calcularlo, debemos elegir convenientemente los vectores directores de ambas; o, en su defecto, elegir vectores directores al azar) y, en segundo lugar, estimar si se forma un ángulo menor al considerar el opuesto de uno de los vectores directores. Veamos esto con un par de ejemplos:

Ejemplos 30

1. Para calcular el ángulo que forman las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(1,2) + (3,-3),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = s(3,0) + (2,5),\ s \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ debemos, primero, calcular el ángulo entre los vectores $(1,2)$ y $(3,0)$. Este es $\arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{5}}\right) \approx 63{,}43^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$ entonces este es precisamente $\angle(L, L')$.
2. Para calcular el ángulo que forman las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(-1,2,0) + (1,2,-3),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(-5,-4,2) + (2,2,9),\ s \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ debemos, primero, calcular el ángulo entre los vectores $(-1,2,0)$ y $(-5,-4,2)$. Este es $\arccos\left(-\frac{3}{15}\right) \approx 101,5^{\text{o}}$. Como este ángulo es mayor a $\frac{\pi}{2}$ entonces $\angle(L, L')$ es aproximado por $180^{\text{o}} - 101,5^{\text{o}} = 78,5^{\text{o}}$.

■

También podemos medir *ángulos entre dos planos y entre una recta y un plano*. Veremos que el cálculo se reduce al mismo que para medir ángulos entre rectas. Por un lado, la Figura 2.14, lado derecho, muestra que el ángulo formado entre dos planos es el mismo que el ángulo determinado por las rectas con direcciones normales de dichos planos. Por otro lado, la Figura 2.14, lado izquierdo, muestra que el ángulo entre una recta L y un plano Π puede calcularse restando a $\frac{\pi}{2}$ el ángulo entre L y la recta con dirección normal a Π. Tenemos entonces la siguiente definición.

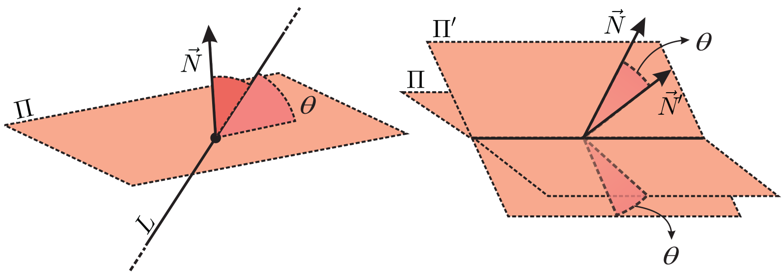

Figura 2.14: Medición ángulos entre planos y entre rectas y planos.

Definición 25 Sean L una recta y Π, Π' planos en $\mathbb{R}^3$. Sean $\vec{N}, \vec{N}'$ vectores normales a Π, Π' respectivamente.

1. El ángulo $\angle(L, \Pi)$ entre la recta L y el plano Π es $\frac{\pi}{2} - \angle(L, L')$, donde $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{N},\ t \in \mathbb{R}\}$.
2. El ángulo $\angle(\Pi, \Pi')$ entre los planos Π y Π' es $\angle(L', L'')$, donde $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{N},\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s\vec{N}',\ s \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplos 31

1. Calculemos el ángulo que forman la recta L de ecuación vectorial $t(1,2,-1) + (0,0,2)$ y el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 3z = 2\}$. Por la definición, el ángulo $\angle(L, \Pi)$ es el ángulo $\frac{\pi}{2} - \angle(L, L')$, donde L' es la recta de ecuación vectorial $s\vec{N}$ y $\vec{N}$ es un vector normal al plano. Si miramos la ecuación implícita de Π, sabemos que una normal para Π es $(2,-1,-3)$. Por lo tanto, para hallar $\angle(L, L')$, debemos calcular el ángulo entre los vectores directores $(1,2,-1)$ y $(2,-1,-3)$. Dicho ángulo es $\arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) \approx 70,89^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$, entonces $\angle(L, L') \approx 70,89^{\text{o}}$. Por lo tanto, $\angle(L, \Pi) \approx 90^{\text{o}} - 70,89^{\text{o}} = 19,11^{\text{o}}$.
2. Calculemos ahora el ángulo entre los planos $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(0,2,-1) + s(-3,1,1) + (2,-2,5),\ t,s \in \mathbb{R}\}$. Por definición, $\angle(\Pi, \Pi') = \angle(L, L')$, donde L, L' son las rectas, que pasan por el origen, cuyos vectores directores son las normales de Π, Π' respectivamente. Por un lado, un vector normal para Π es $(1,1,3)$. Por otro lado, un vector normal para Π' es $(0,2,-1) \times (-3,1,1) = (3,3,6)$. El ángulo entre $(1,1,3)$ y $(3,3,6)$ es $\arccos\left(\frac{24}{3\sqrt{66}}\right) \approx 10,02^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$, entonces

$\angle(\Pi, \Pi') \approx 10,02^{\text{o}}$.

■

2.5.2 Distancia de un punto a una recta

Hemos vimos que el producto escalar nos brinda una manera de medir la distancia entre dos puntos. Ahora bien, veamos cómo proceder para medir distancias en otras situaciones. Comencemos calculando la distancia entre un punto y una recta. ¿Qué significa la distancia entre un punto y una recta? Si imaginamos un deportista de velocidad llegando a la meta en una carrera, ¿a qué nos referimos cuando decimos "el corredor está a 10 m. de la línea de llegada? A *la menor distancia entre el corredor y la línea de llegada*, y, dicha distancia se recorre cuando medimos la posición del corredor en forma *perpendicular* respecto de la línea de llegada. Por lo tanto, al pensar en la posición del corredor como un punto sobre la pista de carrera y la línea de llegada como una recta, la distancia de este punto a esta recta es *la menor distancia entre el punto y todos los puntos de la recta*, entonces deducimos que, además, esta distancia se recorre cuando medimos la distancia en forma perpendicular a la recta. Estudiemos los siguientes casos, teniendo presente estas nociones.

Comencemos por el caso de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que tenemos la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \,:\, X = t(2,-3)+(0,5),\ t \in \mathbb{R}\}$ y el punto $P = (1,-3)$. Es necesario medir la distancia del punto P al punto de la recta que se encuentra "perpendicular" a la recta a lo largo de P. Entonces calculamos auxiliarmente la recta L' que es perpendicular a L y que pasa por el punto P. De esta manera, el punto de la recta que se encuentra más cerca de P es $Q = L' \cap L$ (Figura 2.15). Por lo tanto, la distancia de P a la recta L es la distancia de P a Q (Q es el punto de L más cercano a P). Resuelvan este problema a través del siguiente experimento.

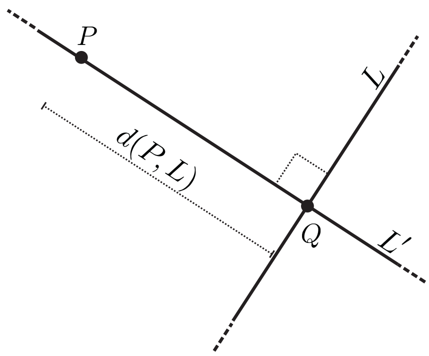

Figura 2.15: Cálculo de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$.

Experimento 14 Con L y P recién definidos, sigan los siguientes pasos para hallar la distancia de L a P:

1. Encuentren la recta L' perpendicular a L que pase por el punto P.
2. Hallen $L' \cap L$, el cual es un punto Q.
3. Calculen $d(P, Q)$. Ésta es la distancia de L a P.

■

¿Cómo hacemos para calcular ahora la distancia de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ a una recta L en el espacio? Aquí la situación es un poco más complicada, aunque el procedimiento es exactamente el mismo al utilizado para el cálculo de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo calcular el punto de L que se encuentra más cercano al punto P? No es difícil ver que la distancia se establece sobre el segmento que une P con una dirección perpendicular a L, exactamente igual que el caso de $\mathbb{R}^2$. Es posible entonces intentar armar una recta perpendicular a L que pase por P.

El problema con este acercamiento es que *hay infinitas rectas que son perpendiculares a L y pasan por P*. Esto se debe a que hay muchas direcciones perpendiculares a una dada en $\mathbb{R}^3$ (a diferencia de $\mathbb{R}^2$, que solo hay una). En realidad, uno debería armarse la "recta perpendicular a L que pase por P *y que corte* L". De todas formas, este procedimiento que acabamos de describir es más complicado que el caso de $\mathbb{R}^2$, y en el espacio hay una forma más directa de calcular el punto de L más cercano a P.

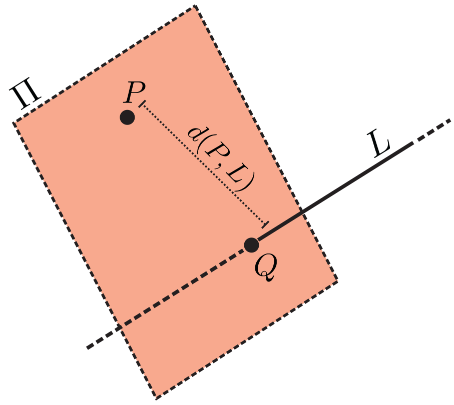

Figura 2.16: Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$.

Al observar la Figura 2.16, consideramos *el plano perpendicular a L que pasa por P*. Esto es fácil, ya que dicho plano podemos representarlo por medio de la ecuación normal, ¡y la normal del plano puede ser escogida como el vector director de L! Resuelvan este problema en el Experimento 15.

Experimento 15 Sean $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(1,2,-3) + (0,1,5),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $P = (1,0,1)$.

1. Hallen el plano Π perpendicular a L que pasa por P.5
2. Encuentren $Q = L \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$ para hallar la distancia de L a P.

■

2.5.3 Distancia de un punto a un plano

De la misma forma que para el caso de las rectas, si quisiéramos medir la distancia de un punto a un plano, como por ejemplo la distancia de una mosca que se encuentra volando en una habitación a una de las paredes de la misma, estaremos pensando en la menor distancia entre la mosca y la pared, y se recorre cuando consideramos la dirección perpendicular al plano determinado por la pared (Figura 2.17).

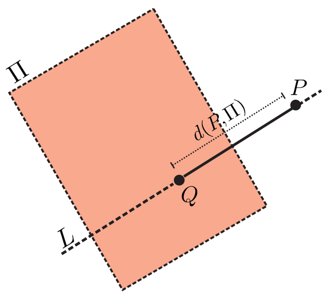

Figura 2.17: Cálculo de la distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$.

Trabajemos con un ejemplo. Sean $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2,2,-1) + s(5,0,-3) + (2,0,0),\ t,s \in \mathbb{R}\}$ y $P = (-1,-2,4)$, busquemos la distancia más corta entre un punto del plano y P. Si vemos la Figura 2.17, notamos que nos alcanza con considerar la recta L perpendicular a Π que pasa por P. Resuelvan el problema en el siguiente experimento.

Experimento 16 Sean Π y P como recién definidos.

1. Hallen la recta L perpendicular a Π que pasa por P.
2. Encuentren $Q = L \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$ para hallar la distancia de Π a P.

Observemos que este caso es inverso al caso de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$, ya que aquí construimos una recta para hallar el punto del plano más cercano a P y, en el caso anterior, construimos un plano para encontrar el punto de la recta más cercano a P. Esto se debe a que, en $\mathbb{R}^3$, una recta complementa a un plano y un plano complementa a una recta, porque un plano contiene 2 direcciones y la recta (perpendicular) contiene la dirección que le falta para "ser" todo el espacio (y lo mismo al revés). Por este motivo hay un único plano perpendicular a una recta que pasa por P y una única recta perpendicular a un plano que pasa por P. Precisamente por esta razón, no era conveniente calcular la distancia de un punto P a una recta L en el espacio buscando la recta perpendicular a L que pase por P (porque hay infinitas opciones y solo una nos sirve).

2.5.4 Distancia entre rectas y planos

Finalmente, abordaremos el problema de medir distancias entre dos rectas, dos planos o una recta y una plano. Así como vimos que medir distancias entre una recta y un punto, o un plano y un punto se reduce a medir la distancia entre puntos (el punto dado y el punto más cercano de la recta o el plano), el cálculo de la distancia entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano, puede reducirse al cálculo de la distancia entre un punto y una recta o un punto y un plano. En lugar de explicar cada uno de estos casos, dejaremos que ustedes los deduzcan por su cuenta en los experimentos que siguen. Antes de avanzar, cabe destacar algunas consideraciones. Por un lado, cuando estimamos la distancia entre dos subespacios (recta y recta, recta y plano o plano y plano), si dichos subespacios se intersecan, entonces la distancia es obviamente 0 (si se tocan, están "pegados" y no hay distancia entre ellos). Por lo tanto, al calcular distancia entre dos planos, es bueno verificar primero si los planos son paralelos; si no lo son, sabemos que indefectiblemente se cortarán en una recta y, en particular, se tocarán y estarán a distancia 0 (y no es necesario hacer ningún cálculo más). Lo mismo al buscar la distancia entre un plano y una recta (debemos chequear si son paralelos; de lo contrario se tocan y la distancia es 0). En el caso de la distancia entre dos rectas del espacio, vayamos con un poco más de cuidado. Es indispensable verificar si se intersecan o no, pero sabemos que, aún cuando no se toquen, podrían no ser paralelas (y ser alabeadas). Observen en los experimentos que ambos casos se abordan de modo diferente, por lo que habrá que clasificar ambas rectas antes de resolver su distancia.

Experimento 17 Consideren los planos $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(-2,1,1)+\mu(0,-3,4)+(5,-1,0),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 7x+8y+6z=-2\}$.

1. Verifiquen que Π y Π' son paralelos.
2. Construyan una recta L perpendicular a ambos planos y calculen $P = L \cap \Pi$ y $Q = L \cap \Pi'$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa en este problema el número $d(P,Q)$?
4. ¿Es importante saber qué recta perpendicular a Π y Π' construyeron? Expliquen este hecho geométricamente.

■

Experimento 18 Consideren las rectas $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x-y-z=4,\ 4x-y-2z=9\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(1,0,2)+(1,2,-3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L_1 y L_2 son paralelas.
2. Hallen un plano Π perpendicular a L_2 que pase por $P=(1,2,-3)$ y determinen $Q = L_1 \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa el número $d(P,Q)$ en este problema?

■

Experimento 19 Sean Π el plano de ecuación $x+y+z=1$ y L la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(-1,0,1)+(1,1,2),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L es paralela a Π.
2. Hallen una recta L' ortogonal a Π que pase por $P=(1,1,2)$ y determinen $Q = L' \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa el número $d(P,Q)$ en este problema?

■

Experimento 20 Consideren las rectas $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x-y-z=1,\ x-2y+z=-2\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(2,-3,0)+(0,0,-1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L_1 y L_2 son alabeadas.
2. Construyan dos planos paralelos Π_1 y Π_2 tales que Π_1 contenga a L_1 y Π_2 contenga a L_2. *Sugerencia: encuentren vectores directores para L_1 y L_2 y úsenlos como vectores directores de los plano Π_1 y Π_2.*
3. Calculen $d(\Pi_1,\Pi_2)$. ¿Qué representa el número $d(\Pi_1,\Pi_2)$ en este problema?

■

¿Qué hicimos en el apartado 2.5?

- Estudiamos cómo calcular:
    1. el ángulo entre dos rectas, entre una recta y un plano y entre dos planos.
    2. la distancia entre un punto y una recta.
    3. la distancia entre un punto y un plano.
    4. la distancia entre dos planos, entre dos rectas y entre una recta y un plano.

■

2.6 Proyecciones y simetrías

Finalmente, nos abocaremos a *proyectar* puntos sobre rectas y planos y, también, a calcular la “imagen simétrica"de un punto respecto de otro punto, de una recta o de un plano.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto, una recta o un plano.
- Cómo calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano.

2.6.1 Simetrías

Simetría es una palabra que se encuentra presente en todas las ramas de la matemática y puede tener un significado distinto en cada caso. Sin embargo, en la teoría de espacios lineales, esta noción refiere a la situación más natural de la palabra: es como la imagen que refleja un espejo. Por ejemplo, si hubiese una mosca frente al espejo (no apoyada en él), entonces, la imagen de la mosca “del otro lado del espejo” sería su *simétrico* respecto del espejo. Ahora bien, formalmente, si tenemos un punto en $\mathbb{R}^3$ y un plano (que podemos pensarlo como si fuera un espejado) entonces el simétrico del punto respecto del plano (el espejo) es aquél punto (del otro lado del plano) que marcaría el reflejo de dicho punto. Vamos a ver que es posible calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto, y de rectas también. Debemos proceder siempre de la misma manera: el punto, recta o plano actuarán como espejos y nos interesará saber qué punto es el que está “del otro lado”, en el sentido simétrico de la definición. Veamos cómo formalizar estas nociones.

Comencemos analizando la situación que más se parece a nuestra realidad tridimensional: el simétrico de un punto en el espacio respecto de un plano. En este caso, deseamos encontrar cuál es el punto “del otro lado del plano” que sería la imagen simétrica del punto original, pensando al plano como espejado. Por ejemplo, consideremos el plano xy (de ecuación $z = 0$) y el punto $(1, 2, 3)$. ¿Cuál es la imagen reflejada de $(1, 2, 3)$ respecto del plano xy? Seguramente, no tendrán problemas en hallar la respuesta correcta: $(1, 2, -3)$; este es el punto que naturalmente se encuentra “del otro lado” del plano xy (Figura 2.18, lado izquierdo). Si ahora cambiamos la inclinación del espejo para que esté en la dirección del plano $\Pi : x + 2y + 3z = 0$ ¿Cuál es el simétrico del $(1, 2, 3)$ respecto de Π? Al analizar la situación geométricamente, observamos que se trata del punto $(-1, -2, -3)$ (Figura 2.18, lado derecho). ¿Qué hicimos en ambos casos? Pues nos dimos cuenta que, si formamos la recta entre un punto y su simétrico respecto de un plano, entonces esta recta es *perpendicular al plano*. Pero además, *la distancia del simétrico al plano debe ser la misma que la del punto original al plano*. Esto es lo que debe tenerse presente al momento de análizar la definición, que se presenta luego de la Figura.

Definición 26 Sean $P \in \mathbb{R}^3$ y Π un plano. El *simétrico de P con respecto a Π* es el **único** punto $Q \in \mathbb{R}^3$ distinto de P que verifica que el segmento que une a ambos puntos es perpendicular al plano y, además, la distancia de cada uno de dichos puntos al plano es la misma.

Observación 11 *Observemos que si $P \in \Pi$, entonces, su simétrico con respecto a Π es el mismo punto P.*

Ya contamos con todas las herramientas necesarias para calcular un simétrico. Observemos el método para encontrar un simétrico de forma detallada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 32 Consideremos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z = 1\}$ y el punto $(1, 1, 0)$. Queremos encontrar el simétrico de dicho punto con respecto a Π. Luego, calculamos la recta L que es perpendicular al plano y que pasa por

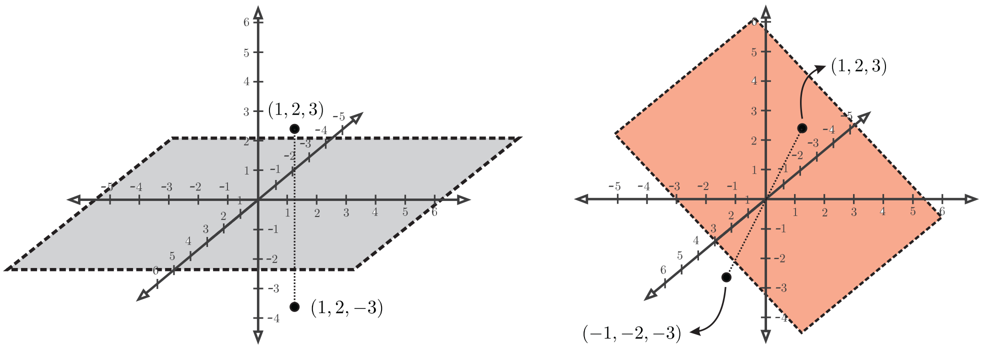

Figura 2.18: El simétrico de un punto respecto de un plano.

el punto $(1,1,0)$. A partir de la ecuación de Π, deducimos que la normal del plano es el vector $(1,1,1)$. Por lo tanto, una ecuación vectorial para L es $t(1,1,1)+(1,1,0)$, $t\in\mathbb{R}$. Para calcular $d(P,\Pi)$ debemos obtener $R=L\cap\Pi$; y, entonces, resolvemos la ecuación $t+1+t+1+t=1$, de la que conseguimos $t=-1/3$. Así, el punto de intersección entre la recta y el plano es $R=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$. Ahora, $d(P,\Pi)=d(P,R)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Finalmente, $Q=(x,y,z)$ es el (único) punto de L distinto de P que verifica $d(Q,\Pi)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $Q\in L$, entonces, Q es de la forma $(t+1,t+1,t)$ para cierto $t\in\mathbb{R}$. Observemos que $d(Q,\Pi)=d(Q,R)$, por lo que buscamos la solución a:

$$\sqrt{(t+1-\frac{2}{3})^2+(t+1-\frac{2}{3})^2+(t+\frac{1}{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

o lo que es lo mismo:

$$3(t+\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3}.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son $t=0$ y $t=-\frac{2}{3}$. El caso $t=0$ nos devuelve el punto P. El caso $t=-\frac{2}{3}$ nos devuelve el simétrico de P respecto de Π: $Q=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$. ■

Existe otra manera (más sencilla) de calcular el simétrico. Solo debemos darnos cuenta de que *el punto medio entre un punto P y su simétrico respecto del plano Π es, necesarimente, un punto del plano Π* (justamente, esto es lo que indica el hecho que la distancia de cada uno de estos puntos al plano sea la misma). Por lo tanto, otra posible manera de calcular el simétrico en esta situación es la siguiente.

Experimento 21 Sean $P=(1,2,3)$ y $\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+2y+3z=0\}$ (definidos como recién). Luego:

1. Hallen la recta L perpendicular a Π que pasa por P.
2. Hallen el punto $R=L\cap\Pi$.
3. Sabiendo que R es el punto medio entre P y su simétrico Q, hallen Q.

■

¡Observemos que esta manera de calcular el simétrico de P no involucra el cálculo de distancias!

■ **Ejemplo 33** Con los datos del ejemplo anterior, vimos que la recta L de ecuación vectorial $t(1,1,1)+(1,1,0)$ es perpendicular al plano Π y pasa por $(1,1,0)$ y que $L\cap\Pi$ es $R=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$. Como sabemos que R debe ser precisamente el punto medio entre $(1,1,0)$ y su simétrico $Q=(x,y,z)$ podemos plantear $Q=\frac{P+R}{2}$; es decir:

$$\begin{cases} \frac{1+x}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{1+y}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{z}{2} = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

de donde $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ y $z=-\frac{2}{3}$. Luego, el simétrico de P respecto de Π es el punto $Q=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$. ■

En $\mathbb{R}^2$, el caso análogo al del encontrar el simétrico de un punto respecto de un plano, es el de encontrar el simétrico de un punto respecto de una recta. Esto se debe a que, si viviéramos en dos dimensiones, los espejos serían segmentos (en lugar de planos como en el espacio tridimensional). Veamos un ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el punto $(3,4)$. ¿Cuál es el simétrico de $(3,4)$ respecto del eje x? Nuevamente, no tendremos problemas en convencernos que la respuesta correcta es el punto $(3,-4)$: este es el punto que naturalmente se encuentra "del otro lado" del eje x (Figura 2.19, lado izquierdo). ¿Y el simétrico del $(3,4)$ respecto de la recta de ecuación vectorial $t(1,1)$? Al mirar la Figura 2.19, lado derecho, vemos que se trata del $(4,3)$. Lo que sucede en este caso es idéntico al caso del simétrico de un punto respecto de un plano. La definición es también idéntica.

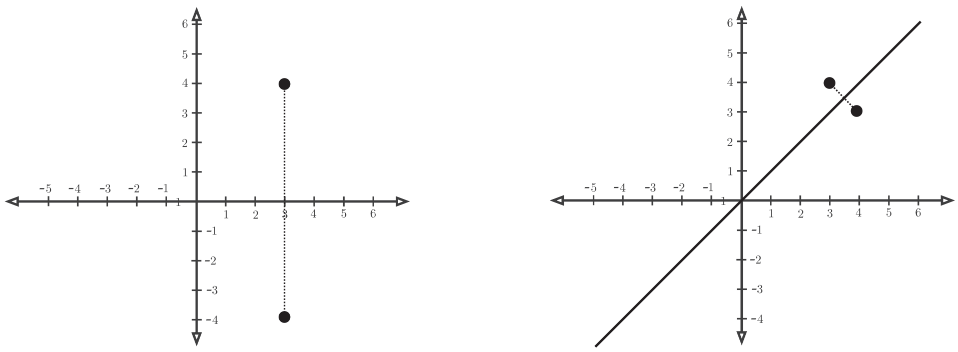

Figura 2.19: El simétrico de un punto respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$.

Definición 27 Dado un punto $P\in\mathbb{R}^2$ y una recta $L\subset\mathbb{R}^2$, el *simétrico* de P respecto de L es el (único) punto $Q\in\mathbb{R}^2$ distinto de P, tal que el segmento que une P con Q es perpendicular a L y la distancia de cada uno de ellos a L es la misma.

Como sucedía con los simétricos respecto de un plano, si $P\in L$, entonces, su simétrico con respecto a L es el mismo punto P. También podemos calcular el simétrico de P respecto de L como apuntamos en el Experimento 16; esto es, teniendo presente que el punto medio entre P y su simétrico es, necesariamente, un punto de la recta L. Si han comprendido los procedimientos hasta aquí desarrollados, no tendrán problema en reproducirlos en este caso más sencillo.

■ **Ejemplo 34** Consideremos la recta $L=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=t(1,-1)+(0,2),\ t\in\mathbb{R}\}$ y el punto $P=(1,3)$, y calculemos el simétrico Q de dicho punto con respecto a L. En primer lugar, recordemos que un punto y su simétrico pertenecen a una misma recta que resulta perpendicular a L. Comenzamos, entonces, buscando una ecuación de la recta L' que es perpendicular a L y pasa por $(1,3)$. Luego, elegimos un vector director que sea perpendicular al vector director de L; por ejemplo, una posibilidad es tomar el vector $(1,1)$. Una ecuación vectorial para L' es, entonces, $s(1,1)+(1,3)$. Al calcular la intersección entre ambas rectas, vemos que $L\cap L'=\{(0,2)\}$. Por lo tanto, si $Q=(x,y)$, entonces, debe verificarse $\frac{x+1}{2}=0$ y $\frac{y+3}{2}=2$, a partir de lo cual concluimos que $(x,y)=(-1,1)$. ■

A partir de los conceptos estudiados, analicen con respecto a qué objeto se puede calcular el simétrico de un punto en $\mathbb{R}$, cómo se lo define y qué calculos son necesarios.

También, es posible definir el simétrico de un punto P respecto de otro punto Q, para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (en realidad, la defınción vale para cualquier $\mathbb{R}^n$). Como los conceptos y procedimientos son prácticamente los mismos, no surgirán problemas para hallar esta definición natural.

Definición 28 Sean $P, Q \in \mathbb{R}^n$. El *simétrico de P respecto de Q* es el (único) punto $R \in \mathbb{R}^n$ distinto de P tal que R está en la recta determinada por P y Q y la distancia de R a Q es la misma que la distancia de P a Q.

Al igual que en los casos anteriores, el punto R queda determinado por la propiedad tal que el punto medio entre R y P es precisamente Q.

■ **Ejemplos 35**

1. Hallemos el simétrico del punto $P = (1, 2)$ respecto del punto $Q = (-3, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Si $R = (x, y)$ representa a dicho simétrico, entonces, debe verificar que $\frac{P+R}{2} = Q$; es decir, $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = (-3, 1)$. De aquí, despejamos fácilmente: $x = -7$ e $y = 0$. Luego, $R = (-7, 0)$.
2. Hallemos ahora el simétrico del punto $P = (0, -1, 4)$ respecto del punto $Q = (2, -3, -2)$ en $\mathbb{R}^3$. Si $R = (x, y, z)$ representa a dicho simétrico, entonces debe verificar $\left(\frac{0+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{4+z}{2}\right) = (2, -3, -2)$. De aquí, despejamos: $x = 4$, $y = -5$ y $z = -8$. Luego, $R = (4, -5, -8)$.

■

Finalmente, podemos definir el simétrico de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ respecto de una recta en $\mathbb{R}^3$.

Definición 29 Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ que no contiene a P, el *simétrico* de P respecto de L es el (único) punto $Q \in \mathbb{R}^3$ distinto de P tal que el segmento que une P con Q es perpendicular a L y la distancia de cada uno de ellos a L es la misma. Si $P \in L$ entonces P es su mismo simétrico.

Observemos que la definición anterior es prácticamente la misma que la del simétrico respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$. Esto no es casualidad: dados el punto P y la recta L, si $P \notin L$, entonces existe un único plano que contiene a P y a L. El simétrico de P va a estar, necesariamente, contenido en este plano, por lo cual, estaremos trabajando en un plano (que podemos identificar con $\mathbb{R}^2$). Una posible manera de calcular el simétrico R del punto P, respecto de la recta L, es la siguiente:

1. Construir el plano Π perpendicular a L que pase por P.
2. Calcular el punto $Q = \Pi \cap L$.
3. Construir la recta L' que une P con Q.
4. Hallar el punto de L', distinto de P, que se encuentre a la misma distancia de Q que P.

También, como en los casos anteriores, el punto R queda determinado por la siguiente propiedad: el punto medio entre R y P es $Q = \Pi \cap L$. Esta suele ser una manera más directa (y más inmediata) de arribar al resultado.

■ **Ejemplo 36** Hallemos el simétrico del punto $P = (-3, -1, 1)$ respecto de la recta de ecuación vectorial $t(1, 1, -1) + (2, 0, -1)$. Primero, construimos el plano Π perpendicular a L que pase por P: una ecuación implícita para este plano es $x + y - z = -5$. A continuación, calculamos $Q = \Pi \cap L$: es un punto de la forma $(t + 2, t, -t - 1)$ tal que $(t + 2) + t - (-t - 1) = -5$. De aquí, despejamos $t = -\frac{8}{3}$. Por lo tanto, $Q = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Finalmente, si llamamos $R = (x, y, z)$ al simétrico buscado, entonces debe verificar $\frac{P+R}{2} = Q$; es decir,

$$\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Por lo tanto, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{13}{3}$ y $z = \frac{7}{3}$, y hallamos que $R = \left(\frac{5}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right)$. ■

2.6.2 Proyección ortogonal de puntos sobre rectas y planos

¿Qué significa "proyectar" un punto sobre una recta o un plano? La idea es sencilla: retomemos el ejemplo de una mosca en una habitación (oscura, ahora) en la cual encendemos una linterna y apuntamos hacia la mosca. La sombra de la mosca caerá sobre la pared que la mosca tiene detrás. Dicha sombra es una *proyección de la mosca sobre la pared*. Supongamos que la mosca es un punto y la pared es un plano: la sombra representa la *proyección del punto sobre el plano*. Pero, ¿está bien definida esta proyección? *No, pues depende de dónde estemos sosteniendo nosotros la linterna*. Es decir, la proyección de un punto sobre una recta o un plano depende desde donde lo estemos proyectando. En este libro solo estudiaremos el caso de proyecciones que se hagan de manera perpendicular a la recta o al plano. Este tipo de proyecciones se llaman, naturalmente, *proyecciones ortogonales*.

¿Cómo calcular la proyección ortogonal? Supongamos que tenemos un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Queremos proyectar P sobre Π de manera ortogonal. Esto significa que pretendemos que la recta L determinada por el punto P y el punto desde donde estamos proyectando (donde estaríamos sosteniendo la linterna) sea perpendicular al plano (Figura 2.20). Entonces, la proyección ortogonal de P sobre Π sería la intersección $L \cap \Pi$ (tengamos en cuenta que la recta L estaría representando el haz de luz de la linterna). Sin embargo, observemos que la recta L construida es, exactamente, la recta perpendicular a Π que pasa por el punto P. Por lo tanto, para calcular la proyección ortogonal de P sobre Π, no necesitamos saber dónde está ubicada la linterna, pues alcanza con saber que está ubicada en una posición cuyo haz es perpendicular a Π.

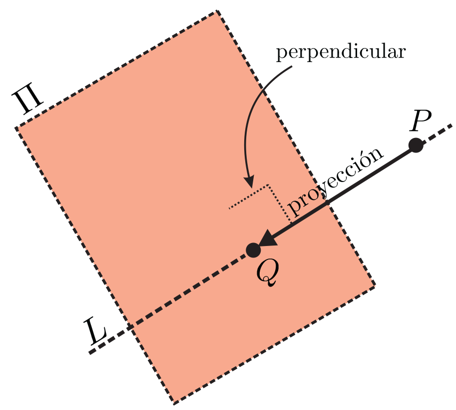

Figura 2.20: Proyección ortogonal sobre un plano.

Al igual que en el ejemplo de cómo calcular el simétrico de un punto, la situación de proyectar un punto $P \in \mathbb{R}^2$ sobre una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ es completamente análoga a la de proyectar un punto sobre un plano. No presentará problemas comprender que se trata del punto Q que se encuentra en la intersección de L y la recta L', perpendicular a L, que pasa por P. ¿Se pueden proyectar puntos sobre rectas en $\mathbb{R}^3$? Claro que sí: es posible proyectar puntos sobre cualquier espacio lineal. ¿Cómo sería la proyección ortogonal de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ sobre una recta $L \subset \mathbb{R}^3$? Debemos pedir que la incidencia del haz de luz de la linterna sea perpendicular a la recta. Notemos que esta última premisa dice dos cosas: por un lado, el haz *debe incidir sobre la recta*; y por otro lado, *la incidencia debe ser perpendicular*. Como sabemos, en $\mathbb{R}^3$ hay infinitas direcciones perpendiculares a una recta. En los apartados anteriores, vimos que, la manera más fácil de hallar una dirección perpendicular a una recta L que corte tanto a L como a P, es considerar el plano Π perpendicular a la L que pase por el punto P. De esta forma, el punto

$Q = \Pi \cap L$ será, efectivamente, la proyección ortogonal de P sobre L.

Les presentamos la siguiente definición general de proyección ortogonal.

Definición 30 Sea $P \in \mathbb{R}^n$ y sea S una recta o plano de $\mathbb{R}^n$. La *proyección ortogonal* de P sobre S es el punto Q de S que se encuentra más cercano a P.

Observación 12 *¡Tengamos presente que ya estuvimos calculando proyecciones ortogonales antes! De hecho, todas estas construcciones que acabamos de hacer, precisamente, dan cuenta que la proyección ortogonal entre un punto y una recta o un plano es, en definitiva, el punto de la recta o el plano, respectivamente, que más cerca se encuentra del punto. Esta es la manera más "económica" de definir este concepto.*

Hemos visto, en el apartado 2.5, que la distancia entre un punto P y una recta L (o un plano Π), era la distancia entre el punto P y el punto $Q \in L$ (o $Q \in \Pi$) más cercano a P. Por lo tanto, el punto Q que calculábamos era exactamente la proyección ortogonal de P sobre L (o sobre Π). Esto lo desarrollamos en los siguientes experimentos:

- Experimento 14: la distancia de un punto P a una recta L en $\mathbb{R}^2$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L \cap L'$, donde L' era la recta perpendicular a L que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre L.*
- Experimento 15: la distancia de un punto P a una recta L en $\mathbb{R}^3$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L \cap \Pi$, donde Π era el plano perpendicular a L que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre L.*
- Experimento 16: la distancia de un punto P a un plano Π en $\mathbb{R}^3$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L' \cap \Pi$, donde L' era la recta perpendicular a Π que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre Π.*

Ejemplos 37

1. Calculemos la proyección ortogonal del punto $P = (1, -3)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(2, -3) + (0, 5),\ t \in \mathbb{R}\}$. Buscamos primero la recta L' que es perpendicular a L y que pasa por el punto P: una ecuación vectorial para L' es $s(3, -2) + (1, -3)$. La proyección ortogonal de P sobre L será, entonces, $Q = L \cap L'$. Buscamos esta intersección. En segundo lugar, planteamos $(2t, -3t + 5) = (3s + 1, -2s - 3)$; es decir:
$$\begin{cases} 2t = 3s + 1 \\ -3t + 5 = -2s - 3 \end{cases}$$
Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas, hallamos que $s = \frac{13}{5}$ y que $t = \frac{22}{5}$. Reemplazando por este valor de s en $s(3, -2) + (1, -3)$, obtenemos $Q = \left(\frac{44}{5}, -\frac{41}{5}\right)$ (el mismo resultado al que llegamos si reemplazamos $t = \frac{22}{5}$ en $t(2, -3) + (0, 5)$).
2. Calculemos ahora la proyección ortogonal del punto $P = (1, 0, 1)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 2, -3) + (0, 1, 5),\ t \in \mathbb{R}\}$. En primer lugar, buscamos el plano Π que es perpendicular a L y que pasa por el punto P: una ecuación implícita para Π es $x + 2y - 3z = -2$. La proyección ortogonal de P sobre L será, entonces, $Q = L \cap \Pi$. En segundo lugar, hallamos esta intersección. Planteamos:
$$\begin{aligned} &\underbrace{t}_{x} + 2\underbrace{(2t + 1)}_{y} - 3\underbrace{(-3t + 5)}_{z} = -2 \\ \Rightarrow\ & 14t - 13 = -2 \\ \Rightarrow\ & t = \tfrac{11}{14} \end{aligned}$$
Reemplazando por este valor de t en $t(1, 2, -3) + (0, 1, 5)$, obtenemos $Q = \left(\frac{11}{14}, \frac{18}{7}, \frac{37}{14}\right)$.

3. Finalmente, calculemos la proyección ortogonal del punto $P = (-1, -2, 4)$ sobre el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2, 2, -1) + s(5, 0, -3) + (2, 0, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. En primer lugar, buscamos la recta L que es perpendicular a Π y que pasa por el punto P: una ecuación vectorial para L es $r(-6, 1, -10) + (-1, -2, 4)$. La proyección ortogonal de P sobre Π será, entonces, $Q = L \cap \Pi$. En segundo lugar, buscamos la intersección. Para facilitar las cuentas, hallemos una ecuación implícita para Π: una normal es $(2, 2, -1) \times (5, 0, -3) = (-6, 1, -10)$ (esta cuenta ya la habíamos hecho para calcular el vector director de L), por lo que la ecuación normal para Π (utilizando como punto de P el $(2, 0, 0)$) nos queda:

$$\begin{aligned} & (-6, 1, -10) \cdot (x, y, z) = (-6, 1, -10) \cdot (2, 0, 0) \\ \Rightarrow\quad & -6x + y - 10z = -12 \end{aligned}$$

Luego, los puntos de $L \cap \Pi$ son los de la forma $(-6r - 1, r - 2, -10r + 4)$ que verifican

$$\begin{aligned} & -6\underbrace{-6r - 1}_{x} + \underbrace{(r - 2)}_{y} - 10\underbrace{(-10r + 4)}_{z} = -12 \\ \Rightarrow\quad & 137r - 36 = -12 \\ \Rightarrow\quad & r = \tfrac{24}{137} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q = \left(-\frac{281}{137}, -\frac{250}{137}, \frac{308}{137}\right)$.

¿Qué hicimos en el apartado 2.6?

- Estudiamos el concepto de punto simétrico a otro punto de $\mathbb{R}^n$ respecto de puntos, rectas y planos.
- Aprendimos cómo calcular la proyección ortogonal de puntos sobre rectas y planos.