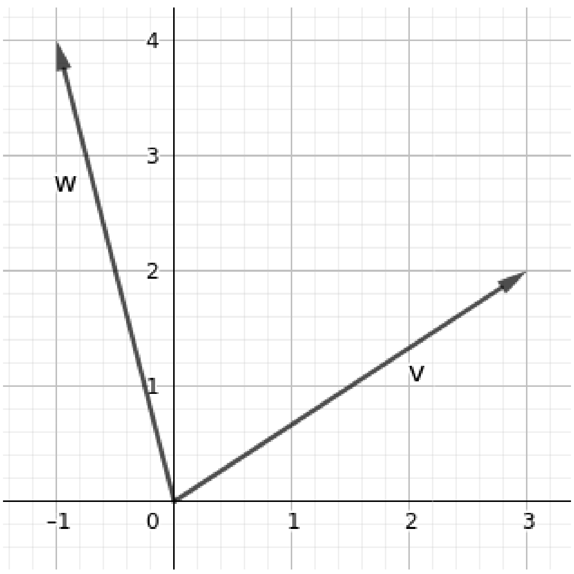
9. Experimentos resueltos

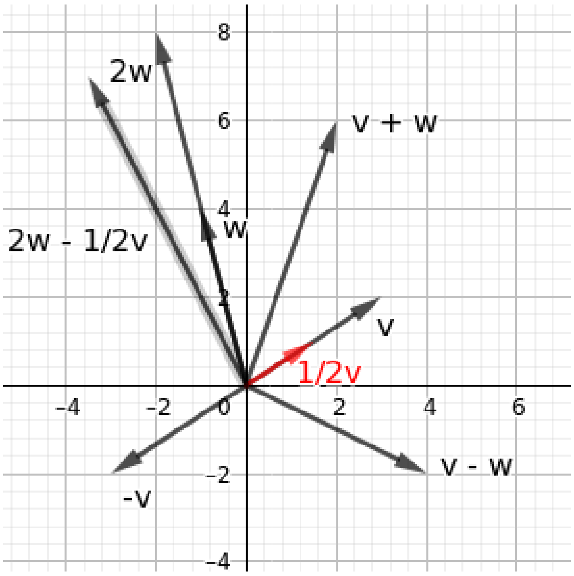
Experimento Resuelto 1 (pág. 29)

El gráfico del punto a, es:

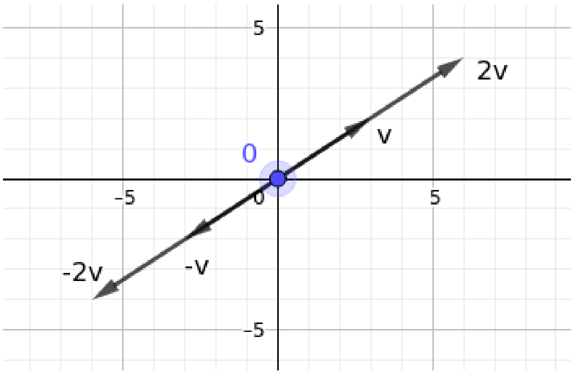


Los calculos para el punto b dan $\vec{v}+\vec{w}=(2,6)$, $\vec{v}-\vec{w}=(4,-2)$, $-\vec{v}=(-3,-2)$, $2\vec{w}=(-2,8)$, $\frac{1}{2}\vec{v}=(\frac{3}{2},1)$ y $2\vec{w}-\frac{1}{2}\vec{v}=(-\frac{7}{2},7)$

Y sus gráficos son:

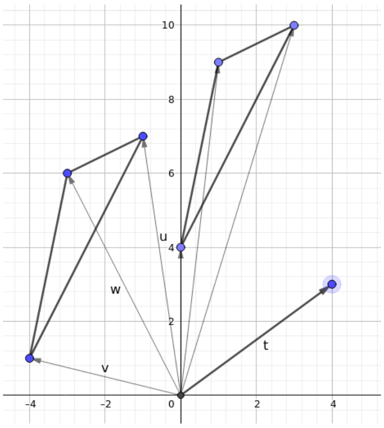


Los gráficos del punto c son:

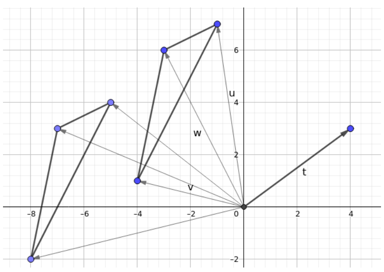


Experimento Resuelto 2 (pág. 30)

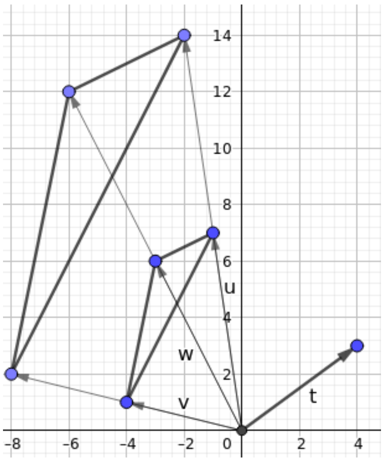
En la siguiente imagen vemos todos los vectores pedidos, junto con las sumas:



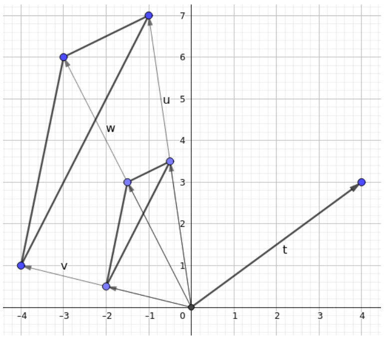
los vectores y las restas:



los vectores multiplicados por 2:



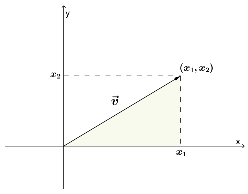
y multiplicados por $\frac{1}{2}$:



■

Experimento Resuelto 3 (pág. 33)

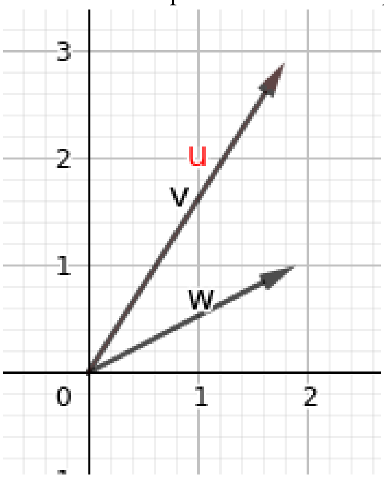
El módulo de (x_1, x_2) es $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ que es exactamente la longitud de la hipotenusa del triángulo que obtenemos si hacemos Pitágoras, pues la longitud de los catetos en este caso es x_1 y x_2, como podemos constatar en la imagen.



■

Experimento Resuelto 4 (pág. 33)

Gráficamente es imposible de observar pues $\vec{v}$ (en negro) se superpone con $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} + \vec{w}$ (en color):



Análiticamente tenemos $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) + (y_1, y_2) = (x_1 - y_1 + y_1, x_2 - y_1 + y_2) = (x_1, x_2)$. ■

Experimento Resuelto 5 (pág. 35)

1. Si $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (1, 2)$, entonces, $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$, $||\vec{w}|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

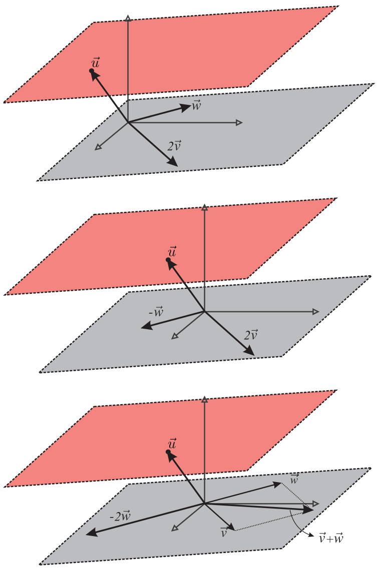
$||\vec{v}+\vec{w}|| = ||(4,2)|| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $||\vec{v}||+||\vec{w}|| = 5+\sqrt{5}$, $||2\vec{v}|| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$, $||\frac{1}{2}\vec{v}|| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

2. Vemos que al duplicar el vector se duplica el módulo y al dividirlo por dos el módulo tambien se divide por dos.
3. $||\vec{v}+\vec{w}|| = 2\sqrt{5} \leq 5+\sqrt{5} = ||\vec{v}||+||\vec{w}||$

Experimento Resuelto 6 (pág. 37)

1. Tres vectores ortogonales a $(2,3)$: $(-3,2)$, $(6,-4)$ y $(-5,\frac{10}{3})$. El producto escalar entre los vectores y $(2,3)$ siempre es cero.
2. Los vectores ortogonales a $(2,-2)$ serán de la forma (k,k) con $k\in\mathbb{R}$, entonces como nos piden norma 1 tenemos que $\sqrt{k^2+k^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2}$, con lo cual para que la norma sea 1 necesitamos que $|k| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto los vectores ortogonales a $(2,-2)$ con norma 1 son $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. Dos vectores ortogonales a $(1,2,1)$ no paralelos entes si pueden ser $(2,-1,0)$ y $(0,1,-2)$.
4. Los vectores simultaneamente ortogonales a $(1,2,1)$ y $(1,-3,0)$ serán multiplos del vector $(3,1,-5)$.

Experimento Resuelto 7 (pág. 48)



Experimento Resuelto 8 (pág. 57)

Tomemos como ejemplo $\vec{v} = (1,-1,2)$, $\vec{w} = (1,3,1)$ y $\vec{u} = (-1,3,7)$, entonces $\vec{v}x\vec{w} = (-7,1,4)$, esta será la normal al plano Π.

La ecuación normal es $(-7,1,4)[(x,y,z)-(-1,3,7)] = 0$, de aquí obtenemos $-7(x+1)+(y-3) = 4(z-7) = 0$, de lo cual deducimos $-7x+y+4z = 38$.

Experimento Resuelto 9 (pág. 57)

- Cuando nos dan un plano a través de una ecuación $ax+by+cz = d$ la normal del plano Π' es $\vec{N} = (a,b,c)$.
- Para encontrar un punto del plano basta buscar una terna de números que "cumpla" la ecuación, uno puede ser $P = (0,0,\frac{d}{c})$, pues si reemplazamos obtenemos $a0+b0+c\frac{d}{c} = d \Rightarrow d = d$.
- Un posible vector ortogonal a $\vec{N}$ es $\vec{v} = (-b,a,0)$, pues $(a,b,c)\cdot(-b,a,0) = -ab+ab = 0$.
- $\vec{N}x\vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = (-ac,-bc,a^2+b^2)$

- $X = t(-b, a, 0) + s(-ac, -bc, a^2 + b^2) + (0, 0, \frac{d}{c})$, donde $s, t \in \mathbb{R}$

■

Experimento Resuelto 10 (pág. 61)

1. Los puntos del plano Π' son de la forma $(s-3, t+1, t-2s)$, al reemplazarlos en la ecuación de Π obtenemos $2(s-3)-(t+1)+(t-2s) = 13$ lo cual es $-7 = 13$, absurdo. Por lo tanto tenemos que $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$.
2. Los puntos del plano Π'' son de la forma $(2k-l+5, 2k+l, -2k-3l+3)$, al reemplazarlos en la ecuación de Π obtenemos $2(2k-l+5)-(2k+l)+(-2k-3l+3) = 13$ con lo cual tenemos $-6l+13 = 13$, o sea $l = 0$, con lo cual $\Pi \cap \Pi'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(2,2,-2)+(5,0,3), k \in \mathbb{R}\}$

■

Experimento Resuelto 11 (pág. 62)

1. Los puntos del plano Π' son de la forma $(-3k+l+1, -\frac{1}{2}k+l+3, 2k-3l-1)$, al igualarlos con los que surjen de la ecuación de Π obtenemos:

$$\begin{cases} -3k+l+1 = 2t-s+2 \\ -\frac{1}{2}k+l+3 = t \\ 2k-3l-1 = -4t+s-3 \end{cases}$$

resolviendo ese sistema obtenemos $k = 2l + \frac{9}{2}$, entonces tenemos que $\Pi \cap \Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = l(-5,0,1) + (\frac{23}{2}, \frac{5}{4}, -8), l \in \mathbb{R}\}$.

2. De la misma forma al igualar los puntos de cada recta obtenemos:

$$\begin{cases} -3j+1 = 2t-s+2 \\ r-j = t \\ -2r+5j-2 = -4t+s-3 \end{cases}$$

resolviendo ese sistema obtenemos $0 = -2$, absurdo. Por lo tanto tenemos que $\Pi \cap \Pi'' = \emptyset$.

■

Experimento Resuelto 12 (pág. 63)

1. La recta L escrita en forma de ecuaciones cartesianas es:

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Entonces para encontrar $\Pi \cap L$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

A partir de las dos primeras ecuaciones tenemos que $1+z = 1$, pero esto es $z = 0$. Con lo cual el sistema es contradictorio. No tiene solución, luego $\Pi \cap L = \emptyset$.

2. Mientras que la recta L' es:

$$\begin{cases} x-2y = 2 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

Entonces para encontrar $\Pi \cap L'$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuaciones tenemos $x+1=1$, es decir $x=0$, entonces reemplazando esto en la segunda ecuacion nos queda $-2y=2$, o sea $y=-1$, y volviendo con esto a la tercera ecuación $-1+z=1$, es decir $z=2$, con lo cual tenemos que $\Pi \cap L' = \{(0,-1,2)\}$.

Experimento Resuelto 13 (pág. 63) ■

1. Los puntos de L tienen la forma $(t+2, 3t+2, -t)$.
2. $(t+2)+(3t+2)+(-t)=1$, la interpretación de este paso es que de todos los puntos del plano, nos estamos quedando con los que tienen la forma de los puntos que estan en la recta, es decir los puntos que estan al mismo tiempo en el plano y en la recta.
3. El t que se deduce del punto anterior es $t=-1$, entonces $\Pi \cap L = \{(1,-1,1)\}$.

Experimento Resuelto 14 (pág. 68) ■

En este experimento nos piden averiguar la distancia de $P=(1;-3)$ a la recta:

$L = X \in R^2 : X = t(2;-3)+(0;5), t \in R$

En primer lugar, buscamos la ecuación de una recta L perpendicular a L que pase por el punto P. Para ello, buscamos un vector perpendicular a L, por ejemplo: $\vec{v}=(3;2)$. Luego: $L = X \in R^2 : X = k(3;2)+(1;-3), k \in R$

Para hallar a intersección entre L y L, igualamos coordenada a coordenada sus ecuaciones paramétricas, es decir:

$2t = 3k+1$ y $-3t+5 = 2k-3$. Al reoslver este sistema obtienen que $t=2$ y $k=1$. por lo tanto, las rectas se intersecan en el punto $Q=(4;-1)$.

Ahora nos resta calcular la distancia entre $P=(1;-3)$ y $Q=(4;-1)$:

$d(P;Q) = \sqrt{(4-1)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Esta es la distancia de la recta L al punto P. ■

Experimento Resuelto 15 (pág. 69)

Para hallar el plano Π perpendicular a L, tomamos como vector normal al plano al vector director de la recta L:

$\Pi : 1\cdot x + 2\cdot y - 3\cdot z + d = 0$. Nos falta hallar d. Para eso reemplazamos en esta ecuación por el punto P:

$1\cdot 1 + 2\cdot 0 - 3\cdot 1 + d = 0 \to 1-3+d=0 \to d=2$. Luego: $\Pi : x+2y-3z+2=0$

Para hallar el punto Q de intersección entre L y Π, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L en Π:

$(t)+2(2t+1)-3(-3t+5)+2=0 \to 14t=11 \to t=\frac{11}{14}$. Luego: $Q=\left(\frac{11}{14};\frac{18}{7};\frac{37}{14}\right)$

Solo nos resta hallar la distancia $d(P;Q) = \sqrt{\left(\frac{11}{14}-1\right)^2+\left(\frac{18}{7}-0\right)^2+\left(\frac{37}{14}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{1834}}{14}$ ■

Experimento Resuelto 16 (pág. 70)

Primero vamos a escribir la ecuación del plano Π en su forma implícita. Para ello, averiguamos el vector normal al plano como el producto vectorial entre los vectores $(2,2,-1)$ y $(5,0,-3)$ y nos da: $\vec{N}=(-6;1;-10)$.

Luego: $\Pi : -6x+y-10z+d=0$. Si reemplazamos por el punto del plano $(2;0;0)$ obtenemos que $d=12$.

Entonces $\Pi : -6x+y-10z+12=0$

Para escribir L perpendicular a Π y que pase por $P=(-1;-2;4)$, usamos como vector director de L la normal la plano:

$L: X = k(-6;1;-10) + (-1;-2;4)$. Expresamos esta recta en sus ecuaciones paramétricas y las reemplazamos en la ecuación del plano para encontrar el punto Q interseccciónn:

$-6(-6k-1) + (k-2) - 10(-10k+4) + 12 = 0 \rightarrow k = \frac{24}{137} \rightarrow Q = \left(-\frac{281}{137}; -\frac{250}{137}; \frac{308}{137}\right)$

Luego resta calcular: $d(P;Q) = d(\Pi; L) = 2,05$ ■

Experimento Resuelto 17 (pág. 71)

Para probar que los planos son paralelos, podemos buscar el vector normal al plano Π calculando en producto vectorial entre los vectores contenidos en él: $(-2;1;1)$ y $(0;-3;4)$.

Este vector normal es:$\vec{N} = (7;8;6)$. Para comprobar que el plano Π es paralelo Π verificamos que las coordenadas de los vectores normales son proporcionales (porque son paralelos): en este caso basta con ver que tienen el mismo vector normal.

Para construir la recta L perpendicular a ambos planos, podemos definirla con el vector normal a los planos como vector director (se verifica la condición de perpendicularidad pedida) y que pase, por ejemplo, por un punto del plano Π:

$L: X = k(7;8;6) + (5;-1;0)$. De esta forma nos ahorramos el paso de calcular P dado que ese punto es $P = (5;-1;0)$ Ahora buscamos la intersección entre L y Π y a ese punto lo llamamos Q. ¿Cómo? Reemplazando las ecuaciones paramétricas de L en Π:

$7(7k+5) + 8(8k-1) + 6(6k) = -2 \rightarrow k = -\frac{29}{149}$. Luego $Q = \left(\frac{542}{149}; -\frac{381}{149}; -\frac{174}{149}\right)$

Solo nos resta calcular $d(P;Q) = \frac{29\sqrt{149}}{149}$. Este número representa la distancia entre los planos. ■

Experimento Resuelto 18 (pág. 71)

Primero vamos a expresar a la reecta L_1 en su ecuación vectorial. Como viene dada por la intersección de dos planos, elegimos despejar la variable y de ambas ecuaciones e igualarlas.

De ello resulta que: $2x - z - 4 = 4x - 2z - 9$ y si se despeja z se obtiene: $z = 2x - 5$. Al volver con esta igualdad a una de las ecuaciones de los planos -puede ser cualquiera- se obtiene que $y = 1$.

Luego, todo punto de la forma $(x;1;2x-5)$ es un punto de la recta L_1. Separando lo que tiene x de lo que no, resulta que una posible ecuación vectorial de L_1 es:

$L_1: X = k(1;0;2) + (0;1;-5)$. Ustedes pueden observar que el vector director de L_1 es el mismo vector director de L_2. Esto nos garantiza que las rectas son paralelas.

Para encontrar una ecuación de Π perpendicular a L_2, tomamos el vector director de esta recta como la normal al plano:

$1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z + d = 0$. Luego reemplazamos por el punto $P = (1;2;-3)$ y obtenemos d:

$1 + 2(-3) + d = 0 \rightarrow d = 5$. Entonces: $\Pi: x + 2z + 5 = 0$.

Para encontrar Q, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L_1 en Π: $(k) + 2(2k-5) + 5 = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow Q = (1;1;-3)$

Solo nos resta hallar $d(P;Q)$, que es la distancia entre las rectas paralelas. Pero como $P = Q$ ¡son el mismo punto!, dicha distancia vale 0 (cero). ■

Experimento Resuelto 19 (pág. 71)

Para probar que L es perpendicular a Π basta con mostrar que el vector director de la recta es ortogonal al vector normal al plano, es decir: el producto escalar entre ambos es nulo:

$\vec{v_L} \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow (-1;0;1)(1;1;1) = -1 + 0 + 1 = 0$. ¡Comprobado!

Para encontrar L' ortogonal a Π, se toma como vector director de esta recta la normal al plano Π y si, además, debe pasar por $P = (1;1;2)$ reuslta:

$L' : X = k(1;1;1) + (1;1;2)$. Si esta recta la expresamos en sus coordenadas cartesianas y la reemplazamos en Π resulta:

$(k+1) + (k+1) + (k+2) = 1 \to k = -1$. Luego $Q = (0;0;1)$.

La distancia $d(P;Q) = d(L;\Pi) = \sqrt{3}$. ■

Experimento Resuelto 20 (pág. 71)

1. Para probar que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas debemos comprobar que su intersección es vacía y que no son paralelas.

   Si reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L_2 en L_1 resulta que:

   $x - y - z = 1 \to 2\lambda + 3\lambda + 1 = 1 \to 5\lambda = 0 \to \lambda = 0$

   $x - 2y + z = -2 \to 2\lambda + 6\lambda - 1 = -2 \to -1 = -2$ es absurdo (pues $\lambda = 0$). Entonces la intersección entre las rectas es vacía.

   Ahora bien, si escribimos la ecuación vectorial de L_1 resulta: $(x;y;z) = k(3;2;1)+(4;3;0)$. Como el vector director de L_2 es $(2;-3;0)$ es sencillo comprobar que las coordenadas de los vectores de ambas rectas no son proporcionales.

   Por lo tanto, comprobamos que las rectas no son paralelas. Luego: las rectas son alabeadas.
2. La ecuación vectorial de la recta L_1 es $k(3,2,1) + (4,3,0)$. Entonces los planos buscados serán de la forma:

   $\Pi_1 = \{\lambda(3,2,1) + \beta(2,-3,0) + (4,3,0), \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$

   $\Pi_2 = \{\lambda'(3,2,1) + \beta'(2,-3,0) + (0,0,-1)\lambda', \beta' \in \mathbb{R}\}$
3. Para encontrar la distancia entre los planos, primero buscamos la recta perpendicular a Π_2 que pasa por $(0,0,1)$.

   Para esto encontramos la normal al plano:
   $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (3,2,-13)$$
   Entonces la ecuación de la recta buscada es $\alpha(3,2,-13) + (0,0,-1)$.

   La intersección de esta recta con el plano Π_1 es el punto $(42,28,-183)$.

   Entonces $d(\Pi_1, \Pi_2) = d((0,0,1),(42,28,-183)) = 14\sqrt{182}$.

■

Experimento Resuelto 21 (pág. 73)

Para encontrar una recta L que pase por $P = (1;2;3)$ y sea perpendicular al plano $\Pi : x + 2y + 2z = 0$ utilizamos el punto P como punto de la recta y la normal al plano $\vec{N} = (1;2;3)$ como vector director de la recta. Es decir:

$L : (x;y;z) = k(1;2;3)+(1;2;3)$. Luego, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano para enocntrar las coordenadas del punto R:

$(k+1) + 2(2k+2) + 3(3k+3) = 0 \to 14k + 14 = 0 \to k = -1$ entonces $R = (0;0;0)$

Como R es el punto medio entre P y Q podemos plantear que:

$(x_R; y_R; z_R) = \left(\frac{x_P+x_Q}{2}; \frac{y_P+y_Q}{2}; \frac{z_P+z_Q}{2}\right)$

$(0;0;0) = \left(\frac{1+x_Q}{2}; \frac{2+y_Q}{2}; \frac{3+z_Q}{2}\right)$

$Q = (-1;-2;-3)$ ■

Experimento Resuelto 22 (pág. 80)

1. Si $P \in L \to P = t_1 \cdot \vec{v}$ y si $Q \in L \to Q = t_2 \cdot \vec{v}$

   Sumamos miembro a miembro ambas igualdades y resulta: $P + Q = t_1 \cdot \vec{v} + t_2 \cdot \vec{v}$

   Luego: $P + Q = (t_1 + t_2) \cdot \vec{v} \to P + Q \in L$

   Si $P \in L \to P = t_1 \cdot \vec{v}$ y multiplicamos miembro a miembro por $\lambda \in R$ resulta:

   $\lambda P = \lambda t_1 \cdot \vec{v} \to \lambda P = (\lambda t_1) \cdot \vec{v} \to \lambda P \in L$

2. Si $P \in \Pi \to P = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u}$

   Si $Q \in \Pi \to Q = s_2 \cdot \vec{w} + r_2 \cdot \vec{u}$

   Si sumamos miembro a miembro resulta:

   $P + Q = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u} + s_2 \cdot \vec{w} + r_2 \cdot \vec{u}$

   Si se extraer como factor común los vectores $\vec{w}$ y $\vec{u}$ resulta:

   $P + Q = (s_1 + r_1) \cdot \vec{u} + (s_2 + r_2) \cdot \vec{u} \to P + Q \in \Pi$

   Si $P \in \Pi \to P = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u}$ y multiplicamos miembro a miembro por $\lambda \in R$ resulta:

   $\lambda P = \lambda(s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u})$

   Si se distribuye λ resulta: $\lambda P = (\lambda \cdot s_1) \cdot \vec{w} + (\lambda \cdot r_1)\vec{u})$

   Entonces: $\lambda P \in \Pi$.

■

Experimento Resuelto 23 (pág. 85)

1. Todo vector del subespacio $S = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in R^5 : x_5 = 0$ puede ser escrito como $(a; b; c; d; 0)$ con $a, b, c, d \in R$.

   Para probar que el conjunto $< (1; 0; 0; 0; 0); (0; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 1; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0) >$ genera S debo mostrar que $(a; b; c; d; 0)$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores del conjunto dado:

   $(a; b; c; d; 0) = a(1; 0; 0; 0; 0) + b(0; 1; 0; 0; 0) + c(0; 0; 1; 0; 0) + d(0; 0; 0; 1; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

2. En este caso, debemos probar que: $< (1; 0; 0; 0; 0); (1; 1; 0; 0; 0); (1; 1; 1; 0; 0); (1; 1; 1; 1; 0) >$ genera S. Luego:

   $(a; b; c; d; 0) = (a - b)(1; 0; 0; 0; 0) + (b - c)(1; 1; 0; 0; 0) + (c - d)(1; 1; 1; 0; 0) + d(1; 1; 1; 1; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

3. En este caso, debemos probar que

   $< (1; 0; 0; 0; 0); (0; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 1; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0); (1; 2; 3; 4; 0) >$

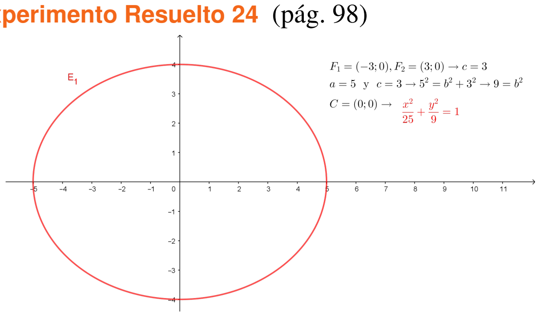
   genera S. Luego:

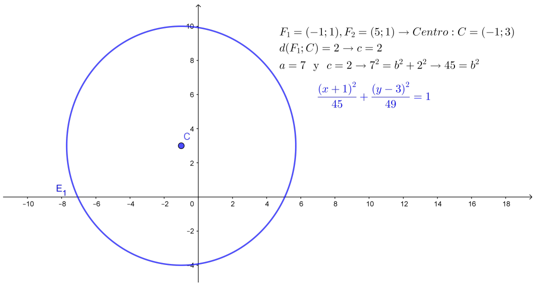
   $(a; b; c; d; 0) = a(1; 0; 0; 0; 0) + b(0; 1; 0; 0; 0) + c(0; 0; 1; 0; 0) + d(0; 0; 0; 1; 0) + 0(1; 2; 3; 4; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

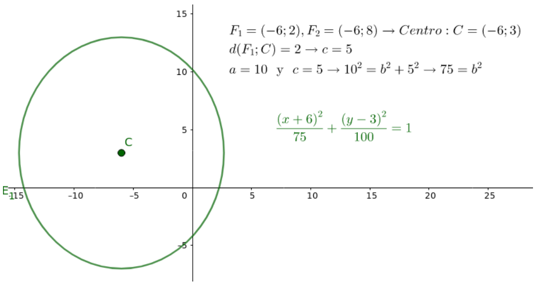
   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

■

Experimento Resuelto 24 (pág. 98)







Experimento Resuelto 25 (pág. 103) $9x^2-16y^2-36x+32y-124=0$

$$(9x^2-36x)-(16y^2-32y)=124$$

$$9(x^2-4x)-16(y^2+2y)=124$$

$$9(x^2-4x+4-4)-16(y^2+2y+1-1)=124$$

$$9[(x-2)^2-4]-16[(y+1)^2-1]=124$$

$$9(x-2)^2-36-16(y+1)^2+16=124$$

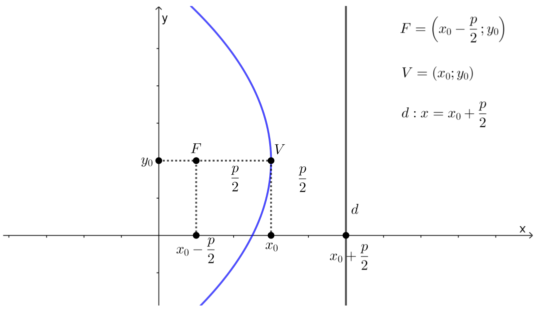
$$9(x-2)^2-16(y+1)^2=124+36-16$$

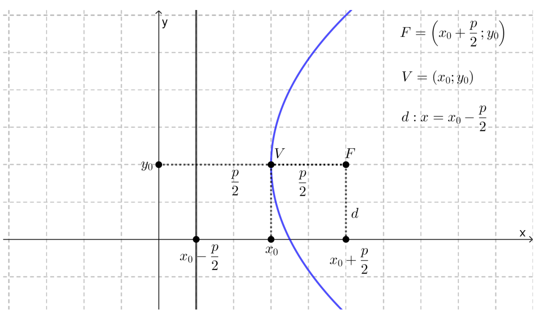
$$9(x-2)^2-16(y+1)^2=144$$

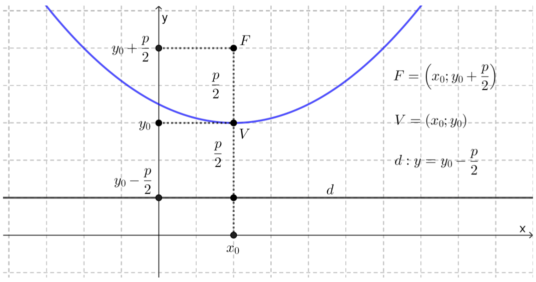
$$\frac{9(x-2)^2}{144}-\frac{16(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Experimento Resuelto 26 (pág. 108)







■

Experimento Resuelto 27 (pág. 147) Primero resolvamos el producto de la izquierda. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2d-g & b+2e-h & c+2f-i \\ a+d-2g & b+e-2h & c+f-2i \\ 2a+2g & 2b+2h & 2c+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se ve bastante feo, pero los sistema que salen de esa igualdad son:

$$\begin{cases} a+2d-g=1 \\ a+d-2g=0 \\ 2a+2g=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2e-h=0 \\ b+e-2h=1 \\ 2b+2h=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+2f-i=0 \\ c+f-2i=0 \\ 2c+2i=1 \end{cases}$$

Cómo se observa, son muchas cuentas. Lo cual nos deja en claro que el método para encontrar la inversa nos facilita el trabajo. La idea detrás de esto es que al irse alternando la fila que tiene al 1 en cada sistema al hacer la triángulación por el método de Gauss estaremos reproduciendo de forma ordenada los despejes que, de todas formas, deberiamos hacer para resolver los tres sistemas. ■

Experimento Resuelto 28 (pág. 150) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$ para todo i, por la definición de independencia lineal. Pero entoces como cualquier reordenamiento de una suma finita da el mismo resultado, tenemos que:

$$\alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica lo mismo, luego $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, es linealmente independiente.
Pero entonces si $\alpha_i = 0$ tenemos que $\alpha_2 = 0$ y $\lambda\alpha_2 = 0$, sin importar el valor de λ, con lo cual $\{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es L.I.
Por último como:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica $\alpha_i = 0$ para todo i, entonces, a partir de:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2(\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

tenemos:

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

pero $(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = 0$, pues ambos α_i lo son, con lo cual $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es L.I. ■

Experimento Resuelto 29 (pág. 158)

Conviene desarrollar por la última fila o la primer columna. Dado que son las que contienen la mayor cantidad de ceros. Si desarrollamos el determinante obtenemos $a_11 \cdot a_22 \cdot a_33$. Con lo cual la conclusión es que el determinante de una matriz triangular se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal de dicha matriz. ■

Experimento Resuelto 30 (pág. 163)

1. Calculemos el determinante de una matriz que tiene una fila de ceros, en el caso de columna es lo mismo. Para fijar ideas pensemos en la primer fila, en caso de ser otra es lo mismo. En ese caso al momento del calculo obtenemos $0 \cdot |A_{11}| - 0 \cdot |A_{12}| + 0 \cdot |A_{13}| - \cdots + (-1)^n \cdots 0 \cdot |A_{1n}|$, como vemos todos los terminos de la suma son $|A_1 i|$ donde este es el determinante del menos de la matriz, por cero. Sea cual sea el resultado del determinate del menor lo estoy multiplicando por cero, con lo cual obtengo una suma de ceros, lo que obviamente es cero.
2. Para el caso de una matriz con dos filas o columnas iguales, en este caso para fijar ideas las primera y segunda, debemos tener en cuenta la propiedad que dice que el determinante de una matriz es el mismo que el determinante que surje de reemplazar una fila por el resultado de la resta de dos filas de la matriz, que nos da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} & \ldots & a_{1n} - a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Pero al hacer esa resta tenemos que nos queda una fila de ceros, lo cual hace que el determinante de cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

3. Para que una matriz de nxn tenga rango menor que n debe tener una, o más, filas o columnas todas conformadas por ceros. Pero en este caso, por el ítem 1 tenemos que el determinante da cero.

■

Experimento Resuelto 31 (pág. 164)

1. El determinante será $det(A^k) = det(A \cdot A \cdot A \ldots A) = det(A) \cdot det(A) \cdot det(A) \ldots det(A) = (det(A))^k$.
2. $1 = det(I) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) \Rightarrow (det(A))^{-1} = det(A^{-1})$.
3. Son matrices diferentes.
4. Si $A \cdot B$ es inversible entonces $det(A \cdot B) \neq 0$ pero entonces $det(A) \cdot det(B) \neq 0$, y como los determinantes son números reales entonces $det(A) \neq 0$ y $det(B) \neq 0$, con lo cual A y B son inversibles.

■

Experimento Resuelto 32 (pág. 169)

- Como en general $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$, en particular $\vec{0} = 0 \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{0} \cdot \vec{v}) = T(\vec{0})$
- $\vec{0} = T(\vec{v} - \vec{v}) = T(\vec{v} + (-\vec{v})) = T(\vec{v}) + T(-\vec{v}) \Rightarrow -T(\vec{v}) = T(-\vec{v})$

- $T(\vec{v}-\vec{w}) = T(\vec{v}+(-\vec{w})) = T(\vec{v})+T(-\vec{w}) = T(\vec{v})-T(\vec{w})$
- Para dos vectores tenemos $T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1+\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_1)+\cdots+T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)+T(\vec{v}_2)+\cdots+T(\vec{v}_2) = \alpha_1 T(\vec{v}_1)+\alpha_2 T(\vec{v}_2)$. Este razonamiento puede extenderse en general para la suma de r vectores.

■

Experimento Resuelto 33 (pág. 174)

Como S es subespacio entonces si $v, w \in S \Rightarrow T(v), T(w) \in T(S)$, pero entonces $T(v)+T(w) = T(v+w) \in T(S)$. Del mismo modo $\lambda T(v) = T(\lambda v) \in T(S)$, pues $\lambda v \in S$. Finalmente, $\vec{0} = T(\vec{0}) \in T(S)$. Por lo tanto T(S) cumple las tres condiciones con las que definimos un subespacio. Luego $T(S) \subset (R)^m$ es un subespacio de $(R)^m$.

■

Experimento Resuelto 34 (pág. 176)

Por exploración podemos encontrar que la matriz A que cumple que $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ es de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esto lo podemos comprobar haciendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

A partir de lo que obtenemos (x_1, x_2, x_1+x_2) que es $T(x_1, x_2)$.

Pero tenemos tambien que $T((1,0)) = (1,0,1)$ y $T((0,1)) = (0,1,1)$, que podemos observar son las columnas de la matriz anterior. ■

Experimento Resuelto 35 (pág. 176)

Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ entonces si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ tomemos $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T^{-1}(W)$ tales que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ y $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Pero entonces $\vec{w}_1+\vec{w}_2 = T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \in T(W)$, del mismo modo $\lambda\vec{w}_1 = \lambda T(\vec{v}_1) = T(\lambda\vec{v}_1) \in T(W)$. Por lo tanto $T^{-1}(W)$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$. ■

Experimento Resuelto 36 (pág. 181)

La matriz de la transformación rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj es $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \sqrt{2})$$

■

Experimento Resuelto 37 (pág. 183)

La expresión de la T.L. simetría respecto de $y = 2x$ es $T(x,y) = (\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5})$. $T(1,1) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$. ■

Experimento Resuelto 38 (pág. 184)

- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección x: $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección y: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección z: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

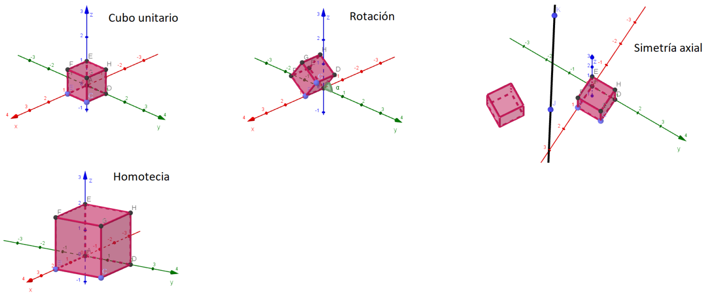
■

Experimento Resuelto 39 (pág. 186)

Como el plano xy esta generado por $\vec{v} = (1,0,0)$ y por $\vec{w} = (0,1,0)$ y como normal podemos tomar $N = (0,0,1)$, entonces la transformación buscada cumple $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ y $T(0,0,1) = (0,0,0)$. Entonces tenemos:

$T(x,y,z) = T(x,0,0) + T(0,y,0) + T(0,0,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) =$
$x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$ ■

Experimento Resuelto 40 (pág. 187)



■

Experimento Resuelto 41 (pág. 190) Primero calculamos el producto de las matrices A_T y A'_T:

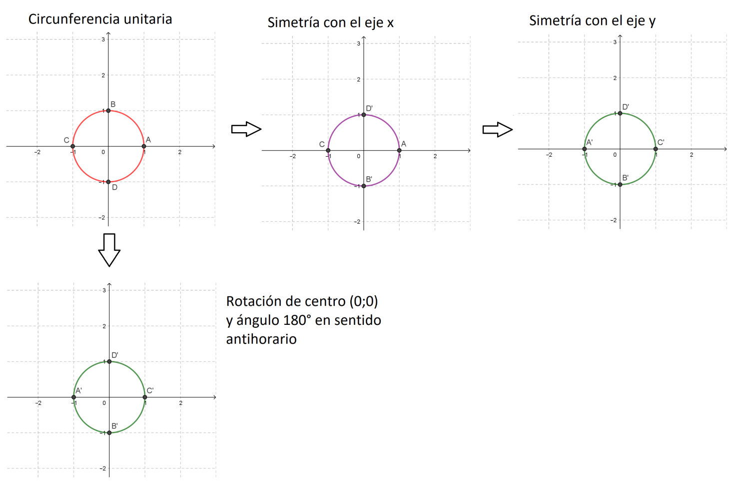
$$A_T \cdot A'_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos esto veamos que el producto de la matriz resultante por el vector de variables nos da lo mismo que la forma funcional de la composición ToT', es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 2x - 2z)$$

Vemos que se recupera la expresión funcional de la composición. ■

Experimento Resuelto 42 (pág. 191)



■

Experimento Resuelto 43 (pág. 199)

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces:

$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$. Luego:

- $Re(z+w) = a+c = Re(z) + Re(w)$
- $Im(z+w) = b+d = Im(z) + Im(w)$

■

Experimento Resuelto 44 (pág. 201) Si $z = a+bi$ y $w = c+di$ sucede que:

$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{(z \cdot w)})$

$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$

$|z \cdot w|^2 = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$

$|z \cdot w|^2 = |z|^2 |w|^2$

Tomando raíces cuadradas en la igualdad obtenida, resulta: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. ■

Experimento Resuelto 45 (pág. 202)

1. Si $z = 2+3i$ entonces $\overline{z} = 2-3i$

   Luego: $z \cdot |z| = (2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2$ por ser una diferencia de cuadrados.

   $z \cdot \overline{z} = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$. Este valor coincide con $|z|^2$.

   En general, sucede que si $z = a+bi$ entonces $\overline{z} = a - bi$. Entonces:

   $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

2. Si $z = a+bi$ y $w = c+di$ son dos números complejos, se verifica que:
   - $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$
   - $\overline{z+w} = \overline{a+bi+c+di} = (a+c) - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \overline{z} + \overline{w}$
   - $\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc) = ac - bd - iad - ibc =$ $(a-bi)(c-di) = \overline{z}\overline{w}$
   - $z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2Re(z)$; $z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2Im(z)$
   - $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

■

Experimento Resuelto 46 (pág. 210)

Propiedad 2 del corolario 49:

$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

$z = |z|\cos(\alpha) + i|z|\sin(\alpha)$

$\overline{z} = \overline{|z|\cos(\alpha) + i|z|\sin(\alpha)}$

$\overline{z} = |z|\cos(\alpha) - i|z|\sin(\alpha)$

Pero $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ y $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

Entonces: $\overline{z} = |z|\cos(-\alpha) - i|z|(-\sin(-\alpha))$

$\overline{z} = |z|\cos(-\alpha) + i|z|\sin(-\alpha)$

$\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ ■

Experimento Resuelto 47 (pág. 219)

Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, el grado de $P+Q$ será:

- $gr(P+Q) = n$ si $n > m$
- $gr(P+Q) = m$ si $m > n$
- $gr(P+Q) = n$ si $n = m$

■

Experimento Resuelto 48 (pág. 219) Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, el grado de $P \cdot Q$ será:

$gr(P \cdot Q) = n + m$ ■

Experimento Resuelto 49 (pág. 223)

Si se realiza la división entre dos polinomios del mismo grado, el cociente y el resto son polinomios de grado 0, es decir, funciones constantes. ■

Experimento Resuelto 50 (pág. 225)

Si el polinomio $Q(x)$ divide al polinomio $P(x)$ entonces las raíces de $Q(x)$ son raíces también de $P(x)$. ■

Experimento Resuelto 51 (pág. 227)

Sea $P(x) \in K[x]$ de grado n. Observemos que $P(x)$ no puede tener más de n raíces. Si $P(x)$ no tiene raíces, entonces lo que estamos tratando de ver es cierto (si no tiene ninguna raíz, no tiene más de n). Ahora bien: supongamos que $P(x)$ posee al menos una raíz a. Sabemos que $x - a$ divide a $P(x)$ y que, por lo tanto, $P(x) = (x - a)C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división y su grado es $n - 1$. Observemos que si, ahora, $C(x)$ no tiene raíces, entonces, nuevamente, hemos visto que $P(x)$ no tiene más de n raíces.

Si $C(x)$ tiene al menos una raíz, se procede de la misma forma y, entonces, $P(x)$ tiene dos raíces: a y la raíz de $C(x)$. Nuevamente, $P(x)$ tiene n raíces. ■

Experimento Resuelto 52 (pág. 228)

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 0$. Por el TFA, sabemos que $P(x)$ tiene al menos una raíz $a \in C$. Por lo tanto, $x - a$ divide a $P(x)$ y se tiene $P(x) = (x - a)C(x)$. Calculando las raíces de $C(x)$ puede repetirse el procedimiento y, con el experimento 50, sabemos que las raíces de C son raíces de P. Luego, P tiene como máximo n raíces: la raíz $x = a$ y las $n - 1$ raíces de C.

■