Capítulo 1

Conjuntos, Relaciones y Funciones.

1.1 Conjuntos.

1.1.1 Conjuntos y subconjuntos, pertenencia e inclusión.

Definición 1.1.1. (informal de conjunto y elementos.)

Un conjunto es una colección de objetos, llamados *elementos*, que tiene la propiedad que dado un objeto cualquiera, se puede decidir si ese objeto es un elemento del conjunto o no.

Ejemplos:

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\triangle, \square\}$, $C = \{1, \{1\}, \{2, 3\}\}$.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos.
- $\emptyset$ o $\{\ \}$ el *conjunto vacío*, o sea el conjunto que no posee ningún elemento.

Observación 1.1.2. El orden de los elementos no importa en un conjunto, y en un conjunto no se tiene en cuenta repeticiones de elementos.

Se dice que cada elemento a de un conjunto A *pertenece* al conjunto A, y se nota $a \in A$. Si un objeto b no pertenece al conjunto A, se nota $b \notin A$.

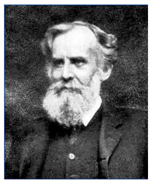
Ejemplos:

- Sea $A = \{1,2,3\}$: $1 \in A$, $2 \in A$, $4 \notin A$, $\{1,2\} \notin A$, $\emptyset \notin A$.
- Sea $B = \{2, \{1\}, \{2,3\}\}$: $\{1\} \in B$, $\{2,3\} \in B$, $1 \notin B$, $3 \notin B$.

Para notar los conjuntos se suele reservar letras mayúsculas: A, B, $\dots$, X, Y, $\dots$, U, V, $\dots$

Las definiciones comunes de un conjunto son por *extensión* (listando todos los elementos del conjunto entre las llaves $\{$ y $\}$, cuando es posible hacerlo, o sea cuando el conjunto es finito) y por *comprensión* (a través de una propiedad que describe los elementos del conjunto, pero usualmente para eso se necesita la noción de subconjunto porque hay que dar un conjunto *referencial*, de donde se eligen los elementos). También presentamos en forma informal los conjuntos infinitos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ usando los puntos suspensivos $\dots$, aunque esto no es muy riguroso: se puede dar una definición formal del conjunto $\mathbb{N}$ sin usar $\dots$, y a partir de ello definir $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. El conjunto $\mathbb{R}$ se supone "conocido", aunque para él también se puede dar una construcción rigurosa (que no se verá en esta materia), y a través de $\mathbb{R}$ se puede definir $\mathbb{C}$ fácilmente.

Los conjuntos se suelen representar gráficamente por los llamados diagramas de Venn (por el lógico y filósofo británico *John Archibald Venn*, 1834–1923): simplemente se utiliza una circunferencia para representar el conjunto, y eventualmente en el interior sus elementos.



Aquí, está por ejemplo representado por medio de un diagrama de Venn un conjunto cuyos elementos son polígonos.

Definición 1.1.3. (Subconjuntos e Inclusión.)

Sea A un conjunto. Se dice que un conjunto B *está contenido en* A, y se nota $B \subseteq A$ (o también $B \subset A$), si todo elemento de B es un elemento de A. En ese caso decimos también que B *está incluído en* A, o que B es un *subconjunto* de A. Si B no es un subconjunto de A se nota $B \not\subseteq A$ (o $B \not\subset A$).

Ejemplos:

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$: $\{1\} \subseteq A$, $\{2, 3\} \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$, $\{3, 4\} \not\subseteq A$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $A \subseteq A$ y $\emptyset \subseteq A$ cualquiera sea el conjunto A.

O sea, B está incluído en A si para todo x, se tiene que si x pertenece a B entonces x pertenece a A, y B no está incluído en A si existe x perteneciendo a B tal que x no pertenece a A. Matemáticamente se escribe:

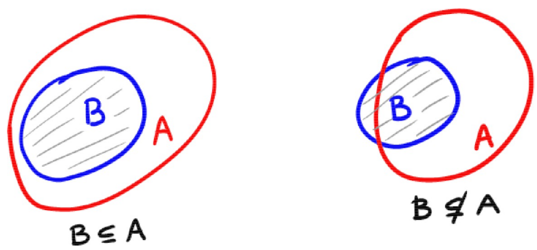
$$B \subseteq A \ \text{ si } \ \forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in A \quad , \quad B \not\subseteq A \ \text{ si } \ \exists x \in B : x \notin A.$$

Aquí el símbolo "$\forall$" significa "*para todo*": la construcción "$\forall x, \dots$" se lee "para todo x, se tiene ...", y el símbolo "$\exists$" significa "*existe*": la construcción "$\exists x \in B : \dots$" se lee "existe x en B tal que ...". El símbolo "$\Rightarrow$" significa "*implica*": la construcción "$x \in B \Rightarrow x \in A$" se lee "$x$ en B implica x en A", o también "si x en B, entonces x en A" (significa que si ocurre lo primero, entonces obligatoriamente tiene que ocurrir lo segundo, veremos esto con más precisión por medio de las tablas de la lógica un poco más adelante).

Ejemplos de conjuntos dados por comprensión:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$, $B = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq -2\}$.
- $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$, $I = \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ es impar}\}$.

Representación de Venn de $B \subseteq A$:



Observación 1.1.4. (Igualdad de conjuntos.)

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Es decir $A = B$ si tienen exactamente los mismos elementos (sin importar el orden y sin tener en cuenta repeticiones de elementos). (Aquí, el símbolo "$\Leftrightarrow$" es el símbolo de la bi-implicación, que se lee "*si y sólo si*".)

Definición 1.1.5. (Conjunto de partes.)

Sea A un conjunto. El *conjunto de partes* de A, que se nota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, o sea el conjunto cuyos *elementos* son los subconjuntos de A. Es decir

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \quad \text{o también} \quad B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A.$$

Ejemplos:

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.
- Cualquiera sea el conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$.
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, o sea el conjunto que tiene como único elemento al conjunto vacío.

1.1.2 Operaciones entre conjuntos.

Supondremos en todo lo que sigue que los conjuntos $A, B, C, \ldots$ que se consideran son subconjuntos de un mismo *conjunto referencial* (o de referencia) U (para poder "operar"). Esto también es generalmente indispensable al definir un conjunto *por comprensión*, como por ejemplo $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número par }\}$, o $I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = [-\infty, 2)$, que no es lo mismo que $J = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2\} = \{1, 2\}$.

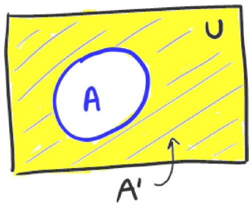
Complemento ^{c}: Sea A subconjunto de un conjunto referencial U. El *complemento* de A (en U) es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A, que se suele notar con A' o A^c (aquí usaremos la notación A^c que es la que aparece en la práctica). Es decir

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Ejemplos:

- Si $U = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{2\}$, entonces $A^c = \{1, 3\}$.
- Si $U = \mathbb{N}$ y $A = \{2\}$, entonces $A^c = \{n \in \mathbb{N}, n \neq 2\}$.
- Si $U = \mathbb{N}$ y $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número par }\}$, entonces $P^c = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número impar }\}$.
- Para el conjunto referencial U, se tiene $\emptyset^c = U$ y $U^c = \emptyset$.
- $(A^c)^c = A$.

Representación de Venn del complemento:



Unión $\cup$**:** Sean A, B subconjuntos de un conjunto referencial U. La *unión* de A y B es el conjunto $A \cup B$ de los elementos de U que pertenecen a A o a B. Es decir

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Notemos que este "o" involucrado en la definición de la unión es no excluyente, es decir si un elemento está en A y en B, está en la unión por estar en al menos alguno de los dos.

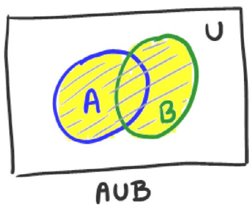
Ejemplos:

- Si $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ y $B = \{3, 4, 5, 10\} \subseteq U = \{1, \dots, 10\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$.
- Si $I = \{x \in \mathbb{R} : x \le 2\} = (-\infty, 2]$ y $J = \{x \in \mathbb{R} : -10 \le x < 10\} = [-10, 10) \subseteq U = \mathbb{R}$, entonces $I \cup J = \{x \in \mathbb{R} : x < 10\} = (-\infty, 10)$.
- Cualesquiera sean A y B, se tiene $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad), $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$, $A \cup A^c = U$.

  Probemos por ejemplo la afirmación $A \cup A^c = U$: Hay que probar las dos inclusiones $A \cup A^c \subseteq U$ y $U \subseteq A \cup A^c$.

  - $A \cup A^c \subseteq U$: Sea $x \in A \cup A^c$; si $x \in A$ entonces $x \in U$ pues $A \subseteq U$, y si $x \in A^c$, entonces $x \in U$ pues $A^c \subseteq U$; por lo tanto $A \cup A^c \subseteq U$.
  - $U \subseteq A \cup A^c$: Sea $x \in U$; entonces $x \in A$ o $x \notin A$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup A^c$, y si $x \notin A$, por definición $x \in A^c$ y luego $x \in A \cup A^c$; por lo tanto $U \subset A \cup A^c$.

Representación de Venn de la unión:



Intersección $\cap$. Sean A, B subconjuntos de un conjunto referencial U. La *intersección* de A y B es el conjunto $A \cap B$ de los elementos de U que pertenecen tanto a A como a B. Es decir

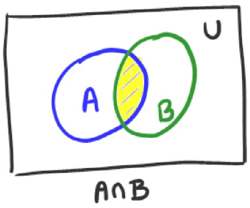
$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 10\} \subseteq U = \{1, \dots, 10\}$. Entonces $A \cap B = \{3, 5\}$.
- Sean $I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} = (-\infty, 2]$, $J = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x < 10\} = [-10, 10) \subseteq U = \mathbb{R}$. Entonces $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq 2\} = [-10, 2]$.
- Cualesquiera sean A y B, se tiene $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad), $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$, $A \cap A^c = \emptyset$.

Cuando $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son conjuntos *disjuntos*.

Representación de Venn de la intersección:



Podemos notar que a diferencia del complemento, la unión y la intersección no dependen del conjunto referencial U, siempre que A y B estén incluídos en U.

Proposición 1.1.6. (Leyes de De Morgan y distributivas.)

Sean A, B, C conjuntos dentro de un conjunto referencial U. Entonces

- **Leyes de De Morgan**, *por el matemático británico* Augustus De Morgan, *1806-1871:*

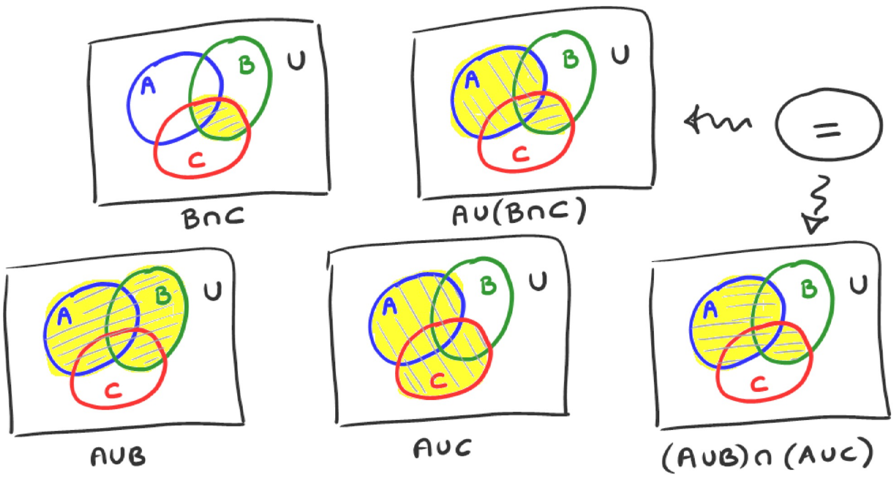
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad y \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

- **Leyes distributivas***:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad y \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demostración. Haremos la demostración de $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ en forma directa, y la demostración de $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ con los diagramas de Venn (donde es necesario explicitar todos los pasos). Las otras demostraciones quedan para el lector.

- $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$: Tenemos que probar la doble inclusión.
  - $(A\cup B)^c \subseteq A^c\cap B^c$: Sea $x\in(A\cup B)^c$. Entonces $x\notin A\cup B$. Como $A\cup B=\{x\in U: x\in A \text{ o } x\in B\}$, $x\notin A$ y $x\notin B$, es decir $x\in A^c$ y $x\in B^c$, y por lo tanto $x\in A^c\cap B^c$.
  - $A^c\cap B^c\subseteq (A\cup B)^c$: Sea $x\in A^c\cap B^c$. Entonces $x\in A^c$ y $x\in B^c$. Es decir $x\notin A$ y $x\notin B$, lo que significa que x no está ni en A ni en B, por lo tanto no está en la unión: $x\notin A\cup B$. O sea $x\in(A\cup B)^c$.
- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$:



(Esta demostración con diagrama de Venn es válida porque solo involucra tres conjuntos y el diagrama expresa todas las posibilidades de pertenencia de elementos en esos tres conjuntos (8 posibilidades: x en A pero no en B ni en C, x en A y en B pero no en C, x en ninguno de los tres conjuntos, etc.). Si fueran 4 conjuntos, no hay forma en un dibujo de expresar todas las posibilidades para un elemento x, que son en ese caso 16, pero esto se arregla con las tablas de verdad como veremos enseguida.)

De las operaciones básicas se derivan las operaciones siguientes:

Diferencia $-$: $A-B := A\cap B^c$, es decir

$$x\in A-B \iff x\in A \text{ y } x\in B^c \iff x\in A \text{ y } x\notin B.$$

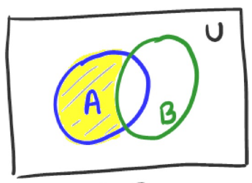
Es decir, $A - B$ es el conjunto de los elementos de A que no son elementos de B:

$$A - B = \{a \in A : a \notin B\}.$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1,2,3,5,8\}$, $B = \{3,4,5,10\} \subseteq U = \{1,\dots,10\}$. Entonces $A - B = \{1,2,8\}$ y $B - A = \{4,10\}$.
- Sean $I = (-\infty, 2]$, $J = [-10, 10) \subseteq U = \mathbb{R}$. Entonces $I - J = [-\infty, -10)$ y $J - I = (2, 10]$.
- Siempre $A - \emptyset = A$, $A - U = \emptyset$, $A - A = \emptyset$, $A - A^c = A$. Pero $A - B \neq B - A$ en general.

Representación de Venn de la diferencia:



A-B

Diferencia simétrica $\triangle$: $A \triangle B$ es el conjunto de los elementos de U que pertenecen a A o a B pero no a los dos a la vez. Es decir

$$A \triangle B = \{c \in U : (c \in A \text{ y } c \notin B) \text{ o } (c \in B \text{ y } c \notin A)\}.$$

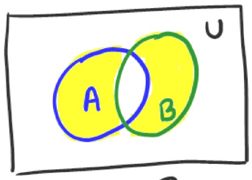
Vale

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1,2,3,5,8\}$, $B = \{3,4,5,10\} \subseteq U = \{1,\dots,10\}$. Entonces $A \triangle B = \{1,2,4,8,10\}$.
- Sean $I = (-\infty, 2]$, $J = [-10, 10) \subseteq U = \mathbb{R}$. Entonces $I \triangle J = [-\infty, -10) \cup (2, 10]$.
- Siempre $A \triangle B = B \triangle A$ (simetría), $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle U = A^c$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle A^c = U$.

Representación de Venn de la diferencia simétrica:



A △ B

1.1.3 Tablas de verdad de la lógica proposicional.

Otra forma de visualizar esas operaciones es por medio de las tablas de verdad de la lógica proposicional, aplicadas a las operaciones de conjuntos.

Se vio que las operaciones básicas de conjuntos están definidas por medio del *no* (para el complemento), del *o no excluyente* para la unión, del *y* para la intersección, y del *o excluyente* para la diferencia simétrica. Estos se llaman conectores lógicos: $\neg$ ("no", o "NOT"), $\vee$ ("o" no excluyente, u "OR"), $\wedge$ ("y", o "AND"), $\veebar$ ("o excluyente", u "XOR"), y se les puede agregar $\Rightarrow$ (implica, o si ... entonces) y $\Leftrightarrow$ (si y solo si).

Tablas de verdad de los conectores lógicos:

Sean p, q proposiciones, es decir afirmaciones que son o bien verdaderas o bien falsas, como por ejemplo "hoy es domingo", o "$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$", o "los perros son mamíferos". Las tablas de verdad de los conectores lógicos son las siguientes:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

(La definición formal de $p \Rightarrow q$ es $\neg p \vee q$.)

Las tablas de los conectores lógicos se relacionan con las tablas de las operaciones de conjuntos: Dados A, B conjuntos incluídos en un un conjunto referencial U, y dado un elemento $x \in U$, se puede pensar en las proposiciones p y q asociadas a A, B (y x) definidas por

$$p: \text{ "}x \in A\text{"} \qquad \text{y} \qquad q: \text{ "}x \in B\text{"}.$$

Notemos que la proposición p es verdadera si y sólo el elemento x de U pertenece al subconjunto A, y del mismo modo, la proposición q es verdadera si y sólo el elemento x de U pertenece al subconjunto B. Dado un elemento $x \in U$ cualquiera, puede pertenecer a A o no. Esto describe dos posibilidades para cualquier elemento de U. Ahora bien, si tenemos dos conjuntos $A, B \subseteq U$, hay 4 posibilidades para un $x \in U$: estar en A y en B, no en A pero sí en B, en A pero no en B, y finalmente ni en A ni en B. Así describimos todas las posibilidades para un elemento "genérico" de U. Las tablas de verdad de las operaciones de conjuntos se corresponden con las tablas de verdad de los conectores lógicos de la manera siguiente:

Tablas de verdad de las operaciones de conjuntos:

- *Complemento:* El complemento A^c de A en U se corresponde con $\neg p$.
- *Unión:* La unión $A \cup B$ se corresponde con $p \vee q$.
- *Intersección:* La intersección $A \cap B$ se corresponde con $p \wedge q$.
- *Diferencia simétrica:* La diferencia simétrica $P \triangle Q$ se corresponde con $p \veebar q$.
- *Inclusión:* La inclusión $A \subseteq B$ se corresponde con $p \Rightarrow q$.
- *Igualdad:* La igualdad $A = B$ se corresponde con $p \Leftrightarrow q$.

A	A^c
V	F
F	V

A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \cap B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \triangle B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \subseteq B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A = B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

Ejemplos: (*de afirmaciones sobre conjuntos por medio de tablas*)

- La tabla de la diferencia $A - B$ se obtiene de la definición $A - B = A \cap B^c$:

A	B	B^c	$A \cap B^c = A - B$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

.

- Retomemos la primer ley de de Morgan, que demostramos más arriba, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

.

Se observa que las columas correspondientes a $(A \cup B)^c$ y a $A^c \cap B^c$ son exactamente las mismas, o sea los elementos pertenecen a $(A \cup B)^c$ si y solo si pertenecen a $A^c \cap B^c$. Luego los dos conjuntos son iguales.

- $A \cap B \subseteq (B - C) \cup (A \cap C)$:

A	B	C	$A \cap B$	$B - C$	$A \cap C$	$(B - C) \cup (A \cap C)$	$A \cap B \subseteq (B - C) \cup (A \cap C)$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

.

Vemos que la columna correspondiente a la inclusión es Verdadera siempre, lo que implica que es verdad que $A \cap B \subseteq (B - C) \cup (A \cap C)$.

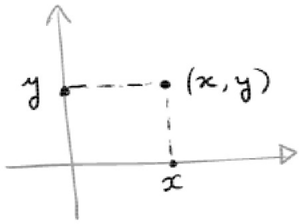
- $A^c \cap B = B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$:

A	B	A^c	$A^c \cap B$	$A \cap B$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

.

Comparando la 2da y la 4ta columna, se ve que $A^c \cap B = B$ cuando no se está en la primera fila, o sea cuando no se está en el caso de algún $x \in A$, $x \in B$. Por lo tanto esta fila no cumple con la hipótesis y se la olvida. Para las demás filas, $A \cap B$ da siempre Falso, es decir, no existe ningún elemento $x \in A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.

1.1.4 Producto cartesiano.



El nombre *producto cartesiano* fue puesto en honor al matemático, físico y filósofo francés *René Descartes*, 1596-1650. El plano euclideo $\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ representado mediante los ejes cartesianos es el plano donde constantemente dibujamos los gráficos de las funciones.

Definición 1.1.7. (Producto cartesiano.)

Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano de A con B, que se nota $A \times B$, es el conjunto de *pares ordenados*

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Ejemplos:

- Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Entonces

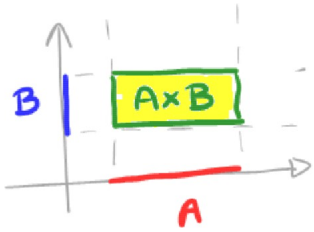
$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}, \\ B \times B &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}. \end{aligned}$$

- Si $A = B = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el plano real $\mathbb{R}^2$.
- $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$.
- Si $A \neq B$ son ambos no vacíos, entonces $A \times B \neq B \times A$.
- Sean $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ entonces $A \times B \subseteq U \times V$. Analizar si vale $(A \times B)^c = A^c \times B^c$.

De la misma forma se puede definir el producto cartesiano de n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ como el conjunto de n-uplas ordenadas:

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Representación del producto cartesiano:



1.2 Relaciones.

En lo que sigue daremos la formalización matemática de la noción de *relación* que usamos constantemente en el lenguaje.

Definición 1.2.1. (Relación.)

Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

Ejemplos:

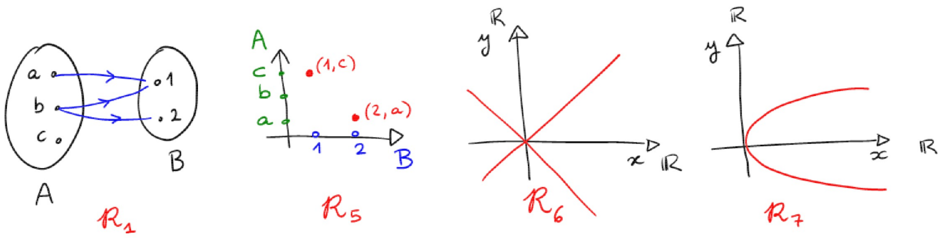
- Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Entonces $\mathcal{R}_1 = \{(a,1), (b,1), (b,2)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(a,2), (b,2), (c,1), (c,2)\}$, $\mathcal{R}_3 = \emptyset$ y $\mathcal{R}_4 = A \times B$ son ejemplos de relaciones de A en B, y $\mathcal{R}_5 = \{(1,c), (2,a)\}$ es un ejemplo de relación de B en A (notar que importa el orden).

- Sean $A = B = \mathbb{R}$: $\mathcal{R}_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ y $\mathcal{R}_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ son relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o, como veremos luego, relaciones en $\mathbb{R}$.

Dados $x \in A$, $y \in B$ y una relación $\mathcal{R}$ de A en B, se dice que x *está relacionado con* y (por la relación $\mathcal{R}$) si $(x,y) \in \mathcal{R}$. En ese caso se escribe $x \,\mathcal{R}\, y$. Si x no está relacionado con y, es decir $(x,y) \notin \mathcal{R}$, se escribe $x \not\mathcal{R} y$.

En los ejemplos arriba, se tiene $b \,\mathcal{R}_1\, 1$ pero $a \not\mathcal{R}_1 2$, $x \,\mathcal{R}_4\, y, \forall x \in A, y \in B$, y $\nexists x \in A, \nexists y \in B$ tal que $x \,\mathcal{R}_3\, y$. También, $-2 \,\mathcal{R}_6\, 2$ y $4 \,\mathcal{R}_7\, -2$.

<u>*Posibles representaciones gráficas de las relaciones:*</u>



1.2.1 Relaciones en un conjunto.

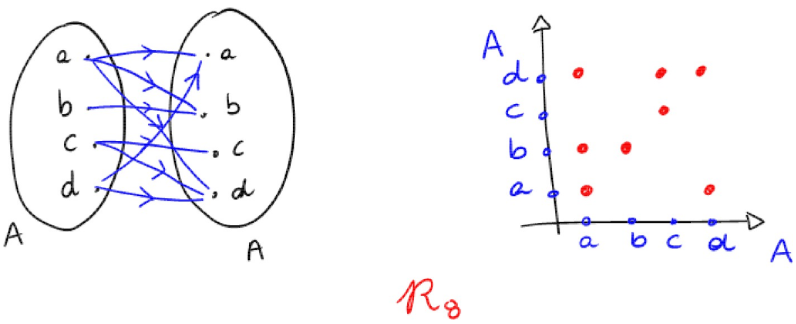
En esta sección consideramos *relaciones de un conjunto en sí mismo.*

Definición 1.2.2. (Relación en un conjunto.)

Sea A un conjunto. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

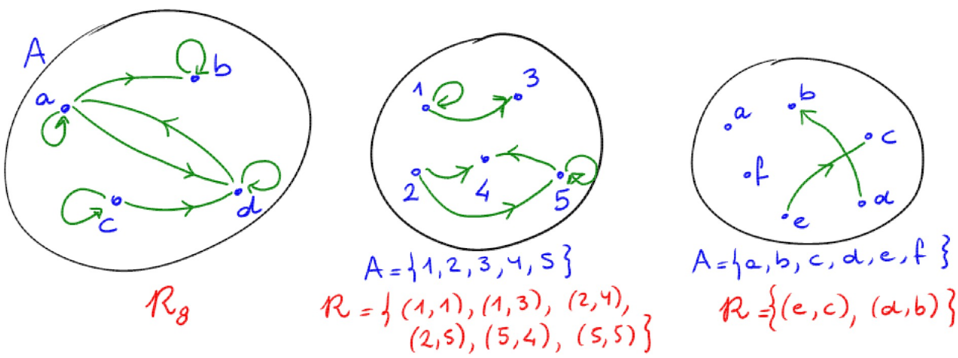
<u>*Ejemplos:*</u>

- Las relaciones $\mathcal{R}_6$ y $\mathcal{R}_7$ arriba son relaciones en el conjunto $\mathbb{R}$.
- La igualdad de elementos siempre es una relación en cualquier conjunto A:
$$\mathcal{R} = \{(x,x),\ x \in A\}, \quad \text{es decir } \forall\, x, y \in A: \ x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x = y.$$
- $\leq$ es una relación en $\mathbb{R}$, y $\subseteq$ es una relación en $\mathcal{P}(A)$, cualquiera sea el conjunto A.
- Sea $A = \{a, b, c, d\}$, entonces
$$\mathcal{R}_8 = \{(a,a), (a,b), (a,d), (b,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,d)\}$$
es una relación en A, que según lo que vimos arriba se puede representar de las siguientes maneras:



Sin embargo, cuando el conjunto A es finito (como en este caso), una relación $\mathcal{R}$ en A se puede representar también por medio de un *grafo dirigido*, o sea un conjunto de puntos (llamados *vértices*, que son los elementos del conjunto A) y un conjunto de *flechas* entre los vértices, que se corresponden con los elementos relacionados: se pone una flecha (que parte de x y llega a y) para cada elemento $(x,y) \in \mathcal{R}$, es decir cada vez que $x \,\mathcal{R}\, y$.

Ejemplos:



La teoría de grafos juega un rol esencial en matemática y computación

Las relaciones en un conjunto dado son particularmente importantes, y algunas de las propiedades que pueden cumplir merecen un nombre.

Definición 1.2.3. (Relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.)

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *reflexiva* si $(x,x) \in \mathcal{R}, \forall x \in A$ (dicho de otra manera, $x \,\mathcal{R}\, x, \forall x \in A$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es reflexiva si en cada vértice hay una flecha que es un "bucle", es decir que parte de él y llega a él.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *simétrica* si cada vez que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$, entonces el par "simétrico" $(y,x) \in \mathcal{R}$ también (dicho de otra manera, $\forall x,y \in A,\ x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es simétrica si por cada flecha que une dos vértices en un sentido, hay una flecha (entre los mismos vértices) en el sentido opuesto.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *antisimétrica* si cada vez que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$ con $x \neq y$, entonces el par $(y,x) \notin \mathcal{R}$ (dicho de otra manera, $\forall x,y \in A,\ x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x \Rightarrow x = y$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es antisimétrica si no hay ningún par de flechas en sentidos opuestos que unen dos vértices distintos.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *transitiva* si para toda terna de elementos $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x, z) \in \mathcal{R}$ también (dicho de otra manera, $\forall x, y, z \in A$, $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es transitiva si hay un "camino directo" por cada "camino con paradas".

<u>*Ejemplos:*</u>

- La relación $\mathcal{R}_8$ de arriba es reflexiva, pero no es simétrica ni antisimétrica, y tampoco transitiva como se ve en el grafo arriba: están todos los "bucles" (es reflexiva), está por ejemplo la flecha $a \to b$ pero no la vuelta $b \to a$ (no es simétrica), están las flechas $a \to d$ y $d \to a$ (no es antisimétrica) y están las flechas $c \to d$ y $d \to a$ pero no el camino corto $c \to a$ (no es transitiva).

- $\mathcal{R}_6$ es reflexiva, pues $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene $x \mathcal{R}_6 x$ pues $x^2 = x^2$. Es simétrica pues $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que si $x \mathcal{R}_6 y$, es decir $x^2 = y^2$, entonces $y^2 = x^2$, es decir $y \mathcal{R}_6 x$. No es antisimétrica pues no es cierto que $x \mathcal{R}_6 y$ e $y \mathcal{R}_6 x$ implica $x = y$: por ejemplo para $x = 1$ e $y = -1$ se tiene $x^2 = y^2$ e $y^2 = x^2$. Y es transitiva pues $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2$ e $y^2 = z^2$ implica $x^2 = z^2$.

  ¿Cómo se ve que una relación es reflexiva en la representación gráfica del producto cartesiano? ¿Y simétrica?

  ¿Puede ser una relación simétrica y antisimétrica a la vez? Si sí, ¿en qué caso?

- $=$ en A, con A un conjunto, es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

- $\leq$ en $\mathbb{R}$ es una relación reflexiva pues para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $x \leq x$, no es simétrica pues en general $x \leq y$ no implica $y \leq x$: por ejemplo para $x = 1$ e $y = 2$. Pero es antisimétrica pues si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$. Y es transitiva pues $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

- Mostrar que $\subseteq$ en $\mathcal{P}(A)$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- $\mathcal{R}_7$ no es reflexiva, pues $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x \not\mathcal{R}_7 x$, es decir $x \neq x^2$ (por ejemplo $x = 2$). Tampoco es simétrica porque $x = y^2$ no implica en general $y = x^2$ (por ejemplo para $x = 4, y = 2$). ¿Es antisimétrica? Supongamos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x = y^2$ e $y = x^2$, por lo tanto $x = x^4$, lo que implica $x(x^3 - 1) = 0$, es decir $x = 0$ o $x = 1$ (por estar en $\mathbb{R}$, ¡ojo!), y luego en el caso $x = 0$ se tiene $y = x^2 = 0^2 = 0 = x$, y en el caso $x = 1$ se tiene $y = x^2 = 1^2 = 1 = x$ también, o sea es antisimétrica nomás. Finalmente $\mathcal{R}_7$ no es transitiva pues $x = y^2$ e $y = z^2$ implica $x = z^4$ que no es igual a z^2 en general, por ejemplo tomando $x = 16$, $y = 4$, $z = 2$.

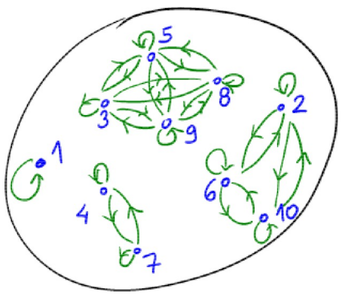
Definición 1.2.4. (Relación de equivalencia y relación de orden.)

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A.

- Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de equivalencia* cuando es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.
- Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de orden* cuando es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos:

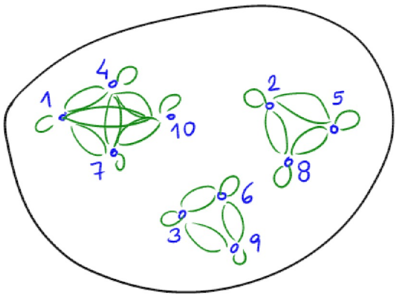
- Las relaciones $=$ en un conjunto A y $\mathcal{R}_6$ en $\mathbb{R}$ son relaciones de equivalencia, las relaciones $\leq$ en $\mathbb{R}$ y $\subseteq$ en $\mathcal{P}(A)$ son relaciones de orden.
- La relación $\sim$ descrita con el grafo siguiente es una relación de equivalencia, pues en cada uno de los subgrafos formados, están todas las flechas posibles (cada subgrafo es “completo”).



Las relaciones de equivalencia juegan un rol muy importante en matemática, porque de algún modo funcionan como una generalización de la igualdad (que es el ejemplo más simple de relación de equivalencia): clasifican, a través de las *clases de equivalencia*, a los elementos del conjunto en subconjuntos donde se los considera “iguales” en algún sentido. Veamoslo primero en un ejemplo.

Ejemplo:

Sea la relación $\sim$ siguiente en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$: $x \sim y$ si al dividir x e y por 3 tienen el mismo resto. Por ejemplo $1 \sim 4$ pues al dividirlos por 3 tienen resto 1, y $6 \sim 9$ porque al dividirlos por 3 ambos tienen resto 0. El grafo de la relación es:



Esta relación es claramente una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de $x \in A$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos y de A relacionados con x, y se nota $\overline{x}$. Aquí,

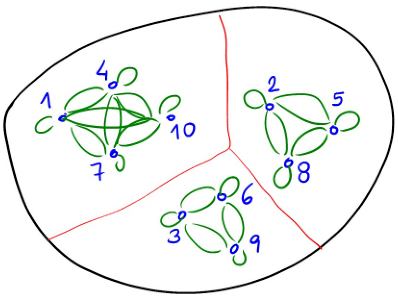
$$\overline{1} = \{1,4,7,10\} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{10},\ \overline{2} = \{2,5,8\} = \overline{5} = \overline{8},\ \overline{3} = \{3,6,9\} = \overline{6} = \overline{9}.$$

Estas clases de equivalencia clasifican entonces los elementos de A según su resto al dividir por 3: dos elementos que están en la misma clase de equivalencia tienen mismo resto, y dos elementos en distintas clases tienen restos distintos.

Ahora bien, observemos que los tres subconjuntos obtenidos son disjuntos dos a dos (y su unión da todo el conjunto A). Podemos considerar el conjunto de clases de equivalencia:

$$\left\{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\right\} = \big\{\{1,4,7,10\},\{2,5,8\},\{3,6,9\}\big\}$$

que tiene 3 elementos (que caracterizan los posibles restos al dividir por 3). Lo que hicimos fue "partir" al conjunto A en tres subconjuntos, que son las tres clases de equivalencia.



Definición 1.2.5. (**Clases de equivalencia**.)

Sean A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Para cada $x \in A$, la *clase de equivalencia de x* es el conjunto

$$\overline{x} = \{y \in A : y \sim x\} \subseteq A.$$

Observemos que debido a la simetría, podríamos haber definido $\overline{x} = \{y \in A : x \sim y\}$ y daría el mismo subconjunto de A. También, debido a la reflexividad, siempre tenemos $x \in \overline{x}$ (pues $x \sim x$). Finalmente la simetría y transitividad muestran que si $y \in \overline{x}$ y $z \in \overline{x}$, entonces $y \sim z$ (pues $y \sim x$ y $x \sim z$ implica $y \sim z$), es decir todos los elementos de una clase de equivalencia están relacionados entre sí.

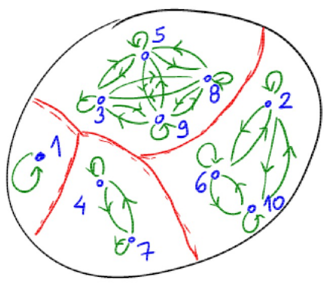
Proposición 1.2.6. (Propiedad fundamental de las clases de equivalencia.)

Sean A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Sean $x, y \in A$. Entonces, o bien $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$, o bien $\overline{x} = \overline{y}$.

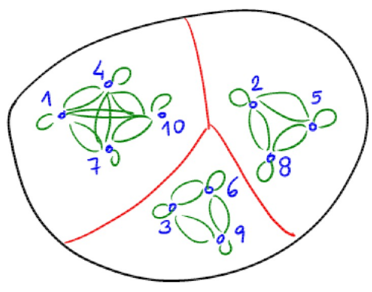
Observación 1.2.7. En la proposición anterior, nuestro enunciado es que alguna de las proposiciones "$\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$", o "$\overline{x} = \overline{y}$" es verdadera. Si llamamos p a la primera y q a la segunda, queremos probar que siempre es verdadera $p \vee q$. Si p es verdadera, también lo es $p \vee q$, luego basta probar que si no es verdadera p (es decir es falsa p) entonces debe ser verdadera q (que es lo que haremos a continuación). El rol de p y de q son intercambiables, con lo cual si resultase mas fácil también podemos suponer que si es falsa q entonces debe ser verdadera p.

Demostración. Supongamos que $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Existe entonces $z \in A$ tal que $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, es decir $z \sim x$ y $z \sim y$. Pero por simetría, $x \sim z$ también, y por transitividad, $x \sim z$ y $z \sim y$ implica $x \sim y$, esto quiere decir que $x \in \overline{y}$ (y por simetría, $y \in \overline{x}$). Pero luego, todo elemento $z' \in \overline{x}$ satisface $z' \sim x$, y como $x \sim y$, se tiene $z' \sim y$, o sea $z' \in \overline{y}$. Es decir, hemos probado que $\overline{x} \subseteq \overline{y}$, y del mismo modo se prueba $\overline{y} \subseteq \overline{x}$. Por lo tanto $\overline{x} = \overline{y}$. $\square$

Así, logramos partir el conjunto A en una unión disjunta de subconjuntos no vacíos, sus clases de equivalencia. Eso se se llama hacer una *partición* de A:



Partición: $\{\{1\}, \{2,6,10\}, \{3,5,8,9\}, \{4,7\}\}$



Partición: $\{\{1,4,7,10\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}\}$

<u>*Ejemplos:*</u>

- Para la relación $=$ en A, las clases de equivalencia son simplemente $\overline{x} = \{x\}$, y para la relación $\mathcal{R}_6$ en $\mathbb{R}$, las clases de equivalencia son $\overline{x} = \{x, -x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, o sea todas las clases tienen dos elementos de la forma $\pm x$, salvo la clase del 0 que tiene solo el elemento 0. Esta relación clasifica a los números reales según su módulo. En cada clase podemos elegir un *representante*, es decir un elemento en la clase que "representa" la clase: por ejemplo aquí podemos elegir en casa clase al $x \geq 0$ como representante.

- Miremos el conjunto L de las rectas del plano, con relación de equivalencia $//$ (ser paralelo). Cada clase consiste de rectas todas paralelas entre sí. Esta relación clasifica a las rectas según su dirección. En cada clase de rectas paralelas podemos elegir como representante la recta que pasa por el 0.

- Si uno quiere describir el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales sin repetir elementos, la forma correcta de hacerlo es por medio de las clases de equivalencia de la siguiente relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$: Dados $(k_1, n_1), (k_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,
$$(k_1, n_1) \sim (k_2, n_2) \iff k_1 n_2 = k_2 n_1.$$
Verificar que es una relación de equivalencia. Se tiene $(k_1, n_1) \sim (k_2, n_2) \Leftrightarrow \frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2}$, o sea $\frac{k_1}{n_1}$ y $\frac{k_2}{n_2}$ determinan el mismo número racional: todos los elementos de una clase de equivalencia $\overline{(k, n)}$ dada determinan el mismo número racional $\frac{k}{n}$. En cada clase podemos elegir como representante el par (k, n) con k y n coprimos.

Proposición 1.2.8. (Relaciones de equivalencia y particiones.)

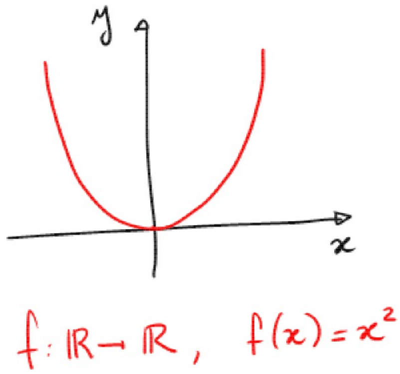
Sea A un conjunto. Hay una manera natural de asociarle a una relación de equivalencia en A una partición de A. Recíprocamente, a toda partición se le puede asociar una relación de equivalencia, y estas asociaciones son inversas una de la otra.

Demostración. Si $\sim$ es una relación de equivalencia, como vimos anteriormente podemos considerar las clases de equivalencia de los elementos de A. Cada clase de equivalencia es un subconjunto, y dos de estos subconjuntos distintos son disjuntos. Como el conjunto es la unión de las clases, obtenemos una partición.

Recíprocamente, dada una partición, definimos la relación $\sim$ de la siguiente manera: $x \sim y$ si y sólo si x e y están en el mismo subconjunto. Es fácil ver que esto da una relación de equivalencia. También es fácil ver que estas asignaciones son una la inversa de la otra, en el sentido de que si empezamos con una relación de equivalencia, miramos la partición asociada, y la relación asociada a esta partición, recuperamos la relación original. Asimismo, si empezamos con una partición, miramos la relación de equivalencia asociada, y la partición que tiene esta relación, recuperamos la partición original. □

1.3 Funciones.

En esta sección volvemos a considerar relaciones de un conjunto A en un conjunto B y formalizamos la noción de función, que todos sabemos que es una asignación que a cada elemento de un conjunto de partida A le hace corresponder algún elemento de un conjunto de llegada B. Como por ejemplo la famosa función cuadrática:



Definición 1.3.1. (Función.)

Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\forall\, x \in A,\ \exists\,!\, y \in B :\ x\,\mathcal{R}\,y.$$

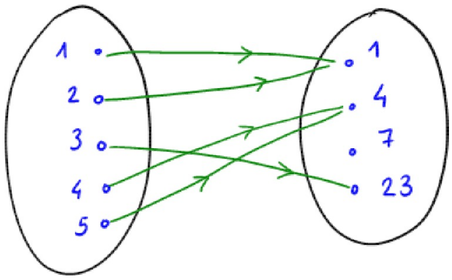
Aquí el símbolo "$\exists\,!$" significa "existe un único", es decir:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in A,\ \exists\, y \in B \text{ tal que } x\,\mathcal{R}\,y,\\ &\text{y si } y, z \in B \text{ son tales que } x\,\mathcal{R}\,y \text{ y } x\,\mathcal{R}\,z, \text{ entonces } y = z. \end{aligned}$$

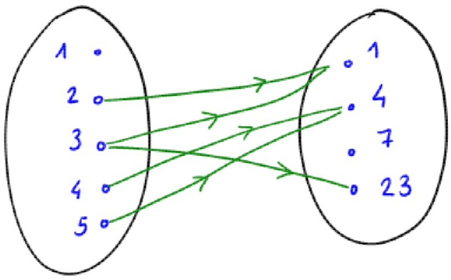
Como a cada $x \in A$ le corresponde un $y \in B$ y este y es único, se le puede dar un nombre que hace notar que y depende de x: se dice que y es la *imagen* de x por f, y se suele notar "$y = f(x)$", que es la forma usual en la que conocemos a las funciones; se nota "$f : A \to B$" a una función del conjunto A en el conjunto B.

Ejemplos:

- La relación de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $B = \{1, 4, 7, 23\}$ descrita por el diagrama siguiente es una función, la función $f_1 : A \to B$ que satisface $f_1(1) = 1$, $f_1(2) = 1$, $f_1(3) = 23$, $f_1(4) = 4$ y $f_1(5) = 4$.



- La relación de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $B = \{1, 4, 7, 23\}$ descrita por el diagrama siguiente no es una función.



  Falla tanto que el elemento $1 \in A$ no está relacionado con nadie en B como que el elemento $3 \in A$ está relacionado con dos elementos distintos de B. (Lo primero se puede solucionar "restrigiendo el dominio", pero lo segundo no tiene solución clara para hacer de esta relación una función.)

- La relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{R} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ graficada arriba.

- La relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ dada por $\mathcal{R} = \{(k, |k|) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una función, que se escribe $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, f(k) = |k|$.

- La relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dada por $\mathcal{R} = \{(k^2, k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *no* es una función, ya que por ejemplo tanto $(1, 1)$ como $(1, -1)$ pertenecen a $\mathcal{R}$ (el elemento $1 \in \mathbb{N}_0$ está relacionado con dos elementos de $\mathbb{Z}$).

- Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ cualquiera, la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ dada por $\mathcal{R} = \{(x, x) : x \in A\}$ siempre es una función, que se llama la *función identidad* de A y se nota id_A (o id cuando está claro el conjunto A): satisface $\mathrm{id}_A(x) = x, \forall x \in A$.

- Una n-upla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede pensar como una función $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$: la función

  $$f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R} \ \text{ definida por } \ f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n.$$

  Recíprocamente, una función $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$ se puede pensar como una n-upla de $\mathbb{R}^n$: la n-upla

  $$(x_1, \dots, x_n) = \big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

- Extendiendo el ejemplo anterior, si A es un conjunto, una sucesión

  $$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

  de elementos de A se puede pensar como una función $f : \mathbb{N} \to A$: la función definida por

  $$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, \ \text{ es decir } f(i) = x_i, \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

  Recíprocamente, una función $f : \mathbb{N} \to A$ se puede pensar como una sucesión en A: la sucesión

  $$(x_1, x_2, x_3 \dots) = \big(f(1), f(2), f(3), \dots\big), \ \text{ es decir } \ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = \big(f(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Definición 1.3.2. (Igualdad de funciones.)

Sean $f, g : A \to B$ funciones. Se tiene

$$f = g \iff f(x) = g(x), \ \forall\, x \in A.$$

Dada una función $f : A \to B$, el conjunto A se llama el *dominio* de la función f, y el conjunto B se llama el *codominio* de la función f. Como se ve de los ejemplos anteriores, todos los elementos del dominio tienen que estar involucrados en una función, o sea tienen que tener al menos una imagen y con $y = f(x)$, pero puede ocurrir que haya elementos y del codominio que no estén involucrados, que no tengan preimagen x tal que $f(x) = y$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.3.3. (Imagen de una función.)

Sea $f : A \to B$ es una función. La *imagen* de f, que se nota $\mathrm{Im}(f)$, es el subconjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A. Es decir

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

En términos del diagrama, la imagen es el conjunto de elementos de B a los que les llega al menos una flecha. En términos del gráfico, es el conjunto de puntos del eje vertical que cuando tiro una recta horizontal por ese punto, corta el gráfico en al menos un punto.

<u>Ejemplos:</u>

- La imagen de la función $f_1 : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,4,7,23\}$ descrita arriba es el conjunto $\{1,4,23\}$.
- Sea $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_2(n) = n+1$. Entonces $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{N}_{\geq 2}$ pues para todo $m \geq 2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = m$ (tomando $n = m-1$ que pertenece a $\mathbb{N}$ pues $m \geq 2$) pero $1 \notin \mathrm{Im}(f_2)$ pues no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = 1$.
- ¿Y si se considera $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = n+1$?
- Sea $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- Sea $f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(k) = |k|$. Entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}_0$.
- Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto, entonces $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_A) = A$.
- Sea
$$f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f_6(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ -\dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par.} \end{cases}$$
Esto es efectivamente una función bien definida sobre los números naturales, y para cada número natural n, se tiene $f_6(n) \in \mathbb{Z}$. Más aún probemos que $\mathrm{Im}(f_6) = \mathbb{Z}$:

  Se tiene $1 \mapsto \dfrac{1-1}{2} = 0$ pues 1 es impar, $2 \mapsto -\dfrac{2}{2} = -1$ pues 2 es par, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto -2$, $5 \mapsto 2$ y esto da una indicación de cómo funciona esta función: los impares va a parar a los enteros ≥ 0 y los pares van a parar a los enteros ≤ -1.

  Sea entonces $k \in \mathbb{Z}$. Queremos probar que $k = f_6(n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

  Si $k \geq 0$, probemos que $k = f_6(n) = \dfrac{n-1}{2}$ para algún *número natural impar* n:
$$k = \frac{n-1}{2} \iff 2k = n-1 \iff n = 2k+1$$
  que pertenece a $\mathbb{N}$ por ser $k \geq 0$ (se tiene $k \geq 0 \Rightarrow n = 2k+1 \geq 1$), y es además impar, como se quería probar.

  Si $k \leq -1$, probemos que $k = f_6(n) = -\dfrac{n}{2}$ para *algún número natural par* n:
$$k = -\frac{n}{2} \iff 2k = -n \iff n = -2k$$

que pertenece a $\mathbb{N}$ por ser $k \leq -1$ (se tiene $k \leq -1 \Rightarrow -2k \geq 2$), y es además par, como se quería probar.

Luego $\mathrm{Im}(f_6) = \mathbb{Z}$.

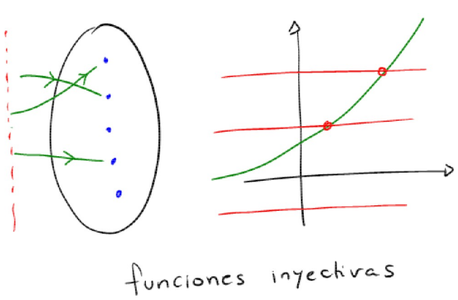
Propiedades importantes que pueden satisfacer las funciones son las siguientes:

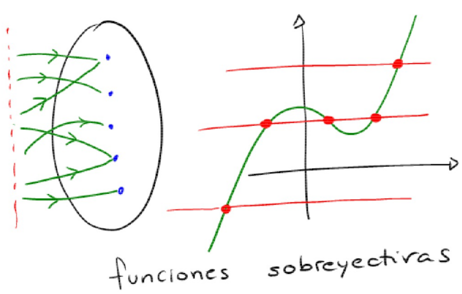
Definición 1.3.4. (Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.)

Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que

- f es *inyectiva* si *para todo* elemento $y \in B$ existe *a lo sumo un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra manera, f es inyectiva si para todo $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$.
- f es *sobreyectiva* si *para todo* elemento $y \in B$ existe *al menos un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra manera, f es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = B$.
- f es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, es decir *para todo* elemento $y \in B$ existe *exactamente un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$.

Ser inyectiva, sobreyectiva y biyectiva son propiedades que se chequean a nivel del codominio: en las representaciones gráficas, ser inyectiva significa que a cada elemento del codominio le llega a lo sumo una flecha, o en el producto cartesiano, que si se trazan rectas horizontales, se corta el grafo de la función a lo sumo corta en un punto. Ser sobreyectiva significa que a cada elemento del codominio le llega por lo menos una flecha, o en el producto cartesiano, que si se trazan rectas horizontales, siempre se corta el grafo de la función en al menos un punto. Biyectiva significa que a cada elemento del codominio le llega exactamente una flecha, o en el producto cartesiano, que si se trazan rectas horizontales, siempre se corta el grafo de la función en exactamente un punto.





Ejemplos:

- La función f_1 arriba no es ni inyectiva pues por ejemplo $f_1(1) = f_1(2) = 1$ ni sobreyectiva pues $7 \notin \mathrm{Im}(f_1)$.
- La función $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva pues $f_2(n) = f_2(m)$ significa $n+1 = m+1$ de lo cual se deduce $n = m$, pero no es sobreyectiva pues $1 \notin \mathrm{Im}(f_2)$. Pasa a ser sobreyectiva si se restringe el codomino a la imagen $\mathbb{N}_{\geq 2}$ y se la considera como $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq 2}$.
- La función $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva, igual que f_2, y también es sobreyectiva pues $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \exists\, n \in \mathbb{Z}$ t.q. $f_3(n) = k$: simplemente tomando $n = k - 1$ se satisface que $f_3(n) = k$. Luego es biyectiva.
- La función $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Pero se puede forzar a que sea sobreyectiva restringiendo el codominio $\mathbb{R}$ a la imagen $\mathbb{R}_{\geq 0}$, o sea definiendo en realidad $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- La función f_5 tampoco es inyectiva ni sobreyectiva.
- id_A es claramente biyectiva, cualquiera sea el conjunto $A \neq \emptyset$.
- La función f_6 es sobreyectiva ya que probamos que $\mathrm{Im}(f_6) = \mathbb{Z}$. Probemos que es también inyectiva:

  Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f_6(n) = f_6(m) = k$. Está claro que para tener la misma imagen k, o bien n y m son ambos impares, o bien son ambos pares (pues si son uno impar y el otro par, por la definición de la función, uno tiene imagen ≥ 0 y el otro < 0). Si son ambos impares, entonces $k = \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{m-1}{2}$ implica $n = m$. Si por otro lado son ambos impares, entonces $k = -\dfrac{n}{2} = -\dfrac{m}{2}$ también implica $n = m$. Luego la función f_6 es inyectiva.

  Por lo tanto f_6 es biyectiva (esta función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ muestra que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen el mismo cardinal, el "mismo infinito"...).

Las funciones se pueden componer, cuando el codominio de una coincide con el dominio de la siguiente:

Definición 1.3.5. (Composición de funciones.)

Sean A, B, C conjuntos, y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota $g \circ f$, definida por

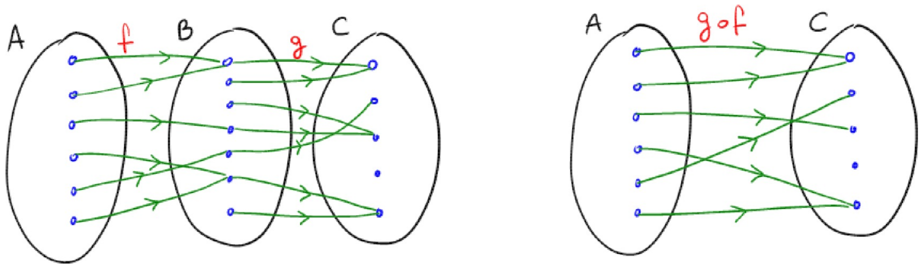
$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big),\ \forall\, x \in A$$

resulta ser una función de A en C. Esto se visualiza mejor en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto f(x)$$
$$y \longmapsto g(y)$$
$$x \longmapsto g(f(x)) = g\circ f(x)$$

<u>*Ejemplos:*</u>

- 

- Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = x^2 + 1$, entonces $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es la función dada por:

$$g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(\sqrt{n}) = (\sqrt{n})^2 + 1 = n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$. En este caso se pueden calcular $g \circ f$ y $f \circ g$ que son ambas funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

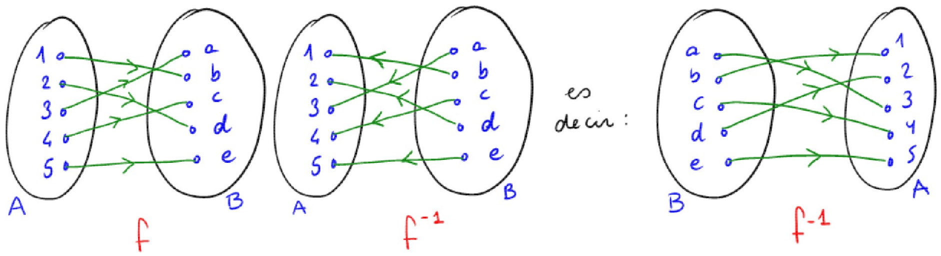
$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x^2 + 3x + 2)^2 - 1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 3, \\ f \circ g(x) &= f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) + 2 = x^4 + x^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Sea $f : A \to B$ una función, entonces $\mathrm{id}_B \circ f = f$ y $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

1.3.1 Funciones biyectivas y función inversa.

Cuando $f : A \to B$ es una función biyectiva, recordemos que se tiene que *para todo* elemento $y \in B$ existe *exactamente un* elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{R}' = \{(y, x) : \ f(x) = y\} \subseteq B \times A$ es una relación de B en A que también satisface las propiedades de función! Pues todos los $y \in B$ están relacionados con algún $x \in A$, y ese x es único. Esta función $\mathcal{R}'$ se nota f^{-1} y se llama la *función inversa* de f. Está definida únicamente cuando la función f es biyectiva. Se tiene que $f^{-1}: B \to A$ es la función que satisface para todo $y \in B$:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$



Ejemplos:

- La función inversa de la función $\mathrm{id}_A : A \to A$ es la misma función $\mathrm{id}_A : A \to A$.

- La función inversa de la función $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_3(n) = n+1$ es la función $f_3^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_3^{-1}(k) = k-1$ (simplemente se despeja en la expresión $k = f_3(n)$ quién es n en función de k, lo que se suele hacer para calcular la imagen).

- La función inversa de la función

$$f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f_6(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ -\dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

es la función $f_6^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f_6^{-1}(k) = \begin{cases} 2k+1 & \text{si} \quad k \geq 0 \\ -2k & \text{si} \quad k \leq -1. \end{cases}$$

Las funciones biyectivas y su inversa están relacionadas por medio de la composición. Por ejemplo para $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f_3(n) = n+1$ se tiene que

$$f_3^{-1} \circ f_3(n) = f_3^{-1}\big(f_3(n)\big) = f_3^{-1}(n+1) = (n+1) - 1 = n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

y por lo tanto $f_3^{-1} \circ f_3 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, y del mismo modo,

$$f_3 \circ f_3^{-1}(k) = f_3\big(f_3^{-1}(k)\big) = f_3(k-1) = (k-1)+1 = k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

y por lo tanto $f_3 \circ f_3^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Esto ocurre siempre, y más aún, vale una recíproca:

Proposición 1.3.6. (Biyectividad y función inversa.)
Sea $f : A \to B$ *una función.*

- *Si* f *es biyectiva, entonces* $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ *y* $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ *.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f = id_A"'] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1} = id_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

- *Si existe una función* $g : B \to A$ *tal que* $g \circ f = \mathrm{id}_A$ *y* $f \circ g = \mathrm{id}_B$ *, entonces* f *es biyectiva y* $f^{-1} = g$ *.*

Demostración.

- $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y)$ donde $y = f(x)$ y por lo tanto $f^{-1}(y) = x$ por la definición de la función inversa. Es decir $f^{-1} \circ f(x) = x$, $\forall\, x \in A$. Así $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Del mismo modo, se prueba que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

- Sea $g : B \to A$ la función tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Probemos primero que f es biyectiva:

  – f es inyectiva pues $f(x) = f(x')$ implica $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, es decir $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Pero $g \circ f = \mathrm{id}_A$, por lo tanto $x = \mathrm{id}_A(x) = \mathrm{id}_A(x') = x'$. Es decir $x = x'$ como se quería probar.

  – f es sobreyectiva pues si $y \in B$, podemos tomar $x = g(y)$. Luego $f(x) = f\big(g(y)\big) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_B(y) = y$. Por lo tanto y tiene un antecedente, que es $x = g(y)$.

  Así acabamos de probar que f es biyectiva.

  Para probar que $g = f^{-1}$, hay que probar que $g(y) = f^{-1}(y),\ \forall\, y \in B$. Pero $g(y) = g\big(f(x)\big)$ donde $y = f(x)$, y por lo tanto $g(y) = g \circ f(x) = \mathrm{id}_A(x) = x = f^{-1}(y)$ por la definición de f^{-1} , $\forall\, y \in B$. Así $g = f^{-1}$.

$\square$