1. Vectores

Los vectores *constituyen el principal objeto de estudio de la mayor parte del contenido de este libro. Son objetos sencillos que tienen interpretaciones muy concretas, tanto geométricas como algebraicas. En este capítulo vamos a definirlos y estudiar sus propiedades principales.*

1.1 Conjuntos

Comenzaremos viendo algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos que atraviesan el desarrollo de este libro. Es importante tenerlas presentes e interiorizarlas.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo describir conjuntos: por extensión o por comprensión.
- Los conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$.
- Las operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

1.1.1 ¿Qué es un conjunto?

Gran parte de la Matemática que conocemos se cimenta alrededor de la noción de *conjunto*. Un *conjunto* es una colección de *objetos* o *elementos*. Estos objetos o elementos pueden ser de cualquier tipo: concretos (como los útiles en nuestra cartuchera o las hojas de un árbol) o abstractos (como los números que usamos para contar o los puntos en un plano). Un conjunto puede tener cualquier tipo de elementos, concretos o abstractos, y cualquier cantidad de ellos, ya sea finita o infinita.

Habitualmente se utilizan letras mayúsculas (A, B, C) para representar conjuntos y letras minúsculas para representar los objetos o elementos pertenecientes a estos conjuntos. Cuando un elemento x pertenece a un conjunto A escribimos:

$$x \in A$$

Por ejemplo, si X es el conjunto cuyos elementos son el número 1, el símbolo @, una manzana y una naranja entonces podemos escribir $1 \in X$. También, $@ \in X$. Si un elemento no pertenece al conjunto usamos $\notin$. Por ejemplo, $2 \notin X$ y $\sharp \notin X$.

Importante *Un conjunto queda determinado de manera única por sus elementos, de forma que dos conjuntos que tengan los mismos elementos son idénticos. Si A y B son conjuntos con los mismos elementos escribiremos $A = B$.* ■

Muchas veces nos interesará trabajar con algunos de los elementos de un conjunto dado. Por ejemplo, podríamos querer considerar el "conjunto de las frutas que están en X". Es decir, al conjunto formado por la manzana y la naranja. Este es un conjunto Y que está *contenido* o *incluido* en X, ya que los elementos de Y son, en particular, elementos de X. En este caso decimos que "Y es un *subconjunto* de X" y lo escribimos:

$$Y \subseteq X$$

Lo que implica la notación $Y \subseteq X$ es que todo elemento de Y es un elemento de X. De igual manera que antes, utilizamos el símbolo tachado $\nsubseteq$ para indicar que un conjunto no está contenido en el otro. Por ejemplo, si Z es el conjunto de elementos 1, $@$ y $\sharp$, entonces $Z \nsubseteq X$ ya que $\sharp \notin X$. Observemos que, para que $B \nsubseteq A$, alcanza con que al menos un elemento de B no pertenezca a A.

Observación 1 *La noción de inclusión brinda una manera de determinar cuando dos conjuntos son idénticos: $A = B$ si simultáneamente vale que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En efecto, si $A = B$ entonces es cierto que los elementos de A están en B y viceversa, por lo que es cierto que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por otro lado, si $A \subseteq B$ entonces todos los elementos de A también están en B; y si $B \subseteq A$ entonces todos los elementos de B también están en A. Concluimos que tienen los mismos elementos y, por ende, son iguales.*

El conjunto que no posee ningún elementos se llama *conjunto vacío* y se nota $\emptyset$.

1.1.2 ¿Cómo describir un conjunto?

Existen dos maneras clásicas en las que es posible especificar el contenido de un conjunto; se las denomina *descripción por extensión* y *descripción por comprensión*.

Si el conjunto tiene pocos elementos, se puede escribir la lista entre llaves "{ }". Por ejemplo,

$$X = \{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\} \qquad\qquad Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}.$$

Esta manera de describir un conjunto se llama *por extensión*. Cuando describimos un conjunto de esta manera, no importa el orden en el que se presentan los objetos. Es decir, los conjuntos $\{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\}$ y $\{\text{naranja}, 1, \text{manzana}, @\}$ representan el mismo conjunto (en este caso, X).

Muchas veces es imposible listar todos los elementos del conjunto o es muy tedioso hacerlo. En este caso, se apela a una propiedad que compartan los elementos del conjunto para describirlo. Por ejemplo, cuando definimos anteriormente el conjunto Y dijimos que Y era "el conjunto de las frutas en X". De esta manera, el conjunto Y quedó determinado por la premisa que entendemos qué es una fruta (o, por lo menos, sabemos distinguir una fruta de algo que no lo es). Esta manera de describir los conjuntos se llama *por comprensión* y su expresión simbólica es:

$$Y = \{x \in X \ : \ x \text{ es una fruta}\}$$

Aquí las llaves significan "el conjunto de" y los dos puntos ":" sustituyen las palabras "tales que". La definición anterior se lee "Y es el conjunto de los x pertenecientes a X tales que x es una fruta". Notemos que al principio de la descripción se especifica de dónde se están tomando los elementos (en este caso en X) y, luego, cuál es su propiedad definitoria (en este caso "ser una fruta"). Es habitual que cuando describimos un conjunto por comprensión utilicemos un conjunto referencial de donde elegimos los elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números reales positivos menores que 10 lo escribimos de la siguiente manera:

$$W = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 10\}$$

Aquí el conjunto referencial es $\mathbb{R}$. En general, se especifica (o deja en claro) el "universo" en donde se "va a trabajar" y se llama *conjunto universal*.

Observación 2 *En Matemática generalmente se trabaja con conjuntos de números que ya tienen nombres asignados:*

- $\mathbb{N}$, *los números naturales;*
- $\mathbb{Z}$, *los números enteros;*
- $\mathbb{Q}$, *los números racionales;*
- $\mathbb{R}$, *los números reales;*
- $\mathbb{C}$, *los números complejos.*

Ejemplos 1 Consideren los siguientes conjuntos.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y } x \leq 10\}$;
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = -1\}$

Podemos escribir por extensión estos conjuntos. El conjunto A es exactamente el conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$; el conjunto B es $\{1, -1\}$. Por otro lado, el conjunto C no tiene elementos ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Es decir, $C = \emptyset$. ■

1.1.3 Subconjuntos del plano y el espacio

En este libro vamos a trabajar principalmente con subconjuntos del plano y del espacio. Lo que se conoce como *plano* es el conjunto de los *pares ordenados* de números reales (x, y) y se nota $\mathbb{R}^2$. Formalmente, se escribe:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

El adjetivo "ordenados" quiere decir que en la expresión "(x, y)" importa el orden de los números x e y (y, por lo tanto, (x, y) e (y, x) son objetos diferentes). El nombre "plano" que se le da a $\mathbb{R}^2$ surge del hecho que uno puede representar un elemento de $\mathbb{R}^2$ como un punto en el esquema de ejes cartesianos (Figura 1.1). Aquí, el número x representa cuánto hay que desplazarse en el sentido del eje horizontal y el número y cuánto en el sentido vertical. De esta manera, a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano y viceversa. Los números x e y se llaman las *coordenadas* del punto (x, y). El punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ se llama *el origen de coordenadas*.

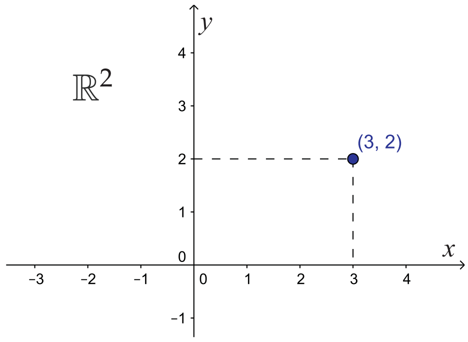

Figura 1.1: Representación en el plano cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplos 2** Consideren los siguientes subconjuntos del plano.

1. $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 10 \text{ y } 2 \leq y \leq 8\}$.
2. $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$.
3. $P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x^2 + 3\}$.

El conjunto P_1 coincide con los puntos dentro de un rectángulo de base 10 y altura 6. El conjunto P_2 son los puntos cuyas coordenadas son iguales. Esto forma una recta en el plano: la recta de ecuación $y = x$. El conjunto P_3 son los puntos cuya segunda coordenada es el cuadrado de la primera más 3. Esto forma una parábola en el plano: la parábola $y = x^2 + 3$. En la Figura 1.2 están representados gráficamente estos conjuntos. ■

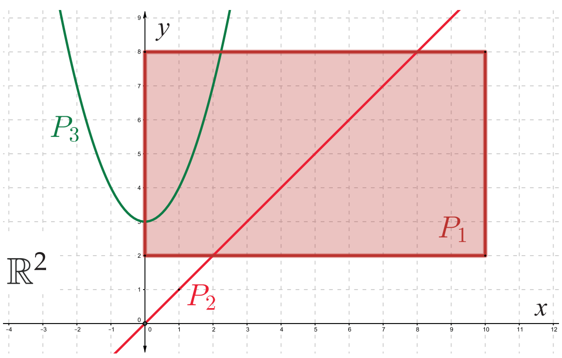

Figura 1.2: El gráfico de los subconjuntos P_1, P_2 y P_3 de $\mathbb{R}^2$.

De manera análoga al plano, se puede considerar $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$; es decir, el conjunto de ternas ordenadas de números reales. Este conjunto se lo llama *espacio* ya que se identifica con un ambiente tridimensional. El objeto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se corresponde con el punto del espacio de tres ejes cartesianos perpendiculares, de manera que el número x dice cuánto hay que desplazarse en la dirección de ese eje, y lo mismo con los números y, z y sus respectivos ejes (Figura 1.3). En este caso, $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ es el *origen de coordenadas*.

■ **Ejemplos 3** Consideren los siguientes subconjuntos del espacio.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4 \text{ y } 1 \leq z \leq 3\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$

El conjunto E_1 coincide con los puntos dentro de un paralelepípedo de lados de tamaño 5, 2 y 2. El conjunto E_2 son los puntos que se encuentran en el plano xy (aquí consideramos el valor de la coordenada z como la "altura" a la que se

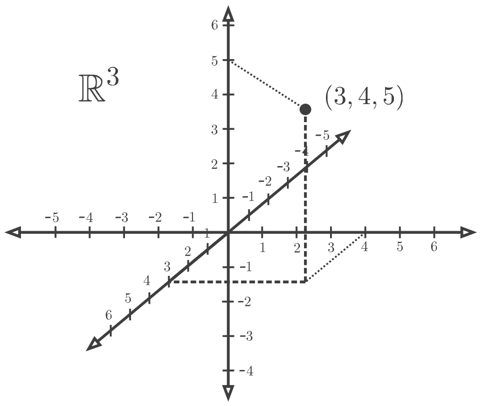

Figura 1.3: Representación en el espacio cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^3$.

encuentran los puntos respecto del "piso" xy). El hecho de que $z = 0$ nos dice precisamente que se trata de los puntos que se encuentran en el "piso". El conjunto E_3 esta conformado por los puntos tales que sus coordenadas son todas iguales. Esto forma una recta en el espacio. En la Figura 1.4 están representados estos conjuntos. ■

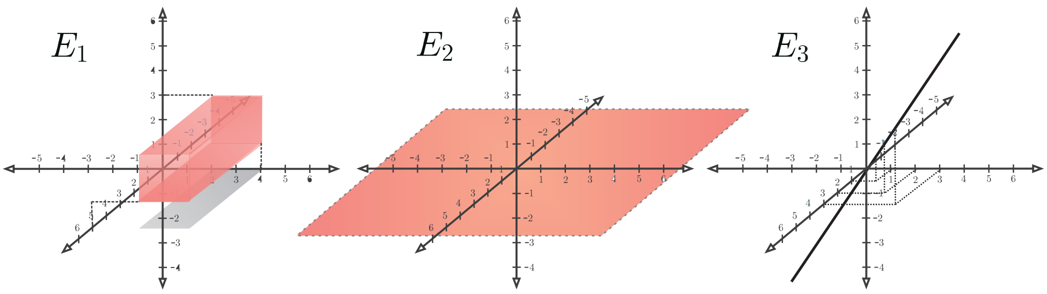

Figura 1.4: El gráfico de los subconjuntos E_1, E_2 y E_3 de $\mathbb{R}^3$.

Generalizando estas ideas, podemos también considerar el conjunto de "tiras ordenadas" de números reales $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Una tira como la que acabamos de describir se la llama *n-upla ordenada de números reales*. Para $n > 3$ ya no podemos representar las n-uplas como puntos en un esquema de ejes cartesianos (el ser humano sólo visualiza hasta tres dimensiones). El espacio $\mathbb{R}^n$ se lo conoce como el *espacio n-dimensional*. El *origen de coordenadas* de $\mathbb{R}^n$ es la n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ de n ceros.

Importante Cuando mencionemos un objeto de $\mathbb{R}^n$ pero no tengamos la necesidad de especificar sus coordenadas, escribiremos solamente $X \in \mathbb{R}^n$ (utilizando letras mayúsculas). Aquí se entiende que $X = (x_1, \ldots, x_n)$ para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. ■

1.1.4 Cómo construir conjuntos a partir de otros

Hay un número de operaciones básicas que es necesario hacer con los conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

Unión de conjuntos. Esta operación consiste en "juntar" el contenido de dos conjuntos.

Definición 1 Si A y B son conjuntos que viven dentro del mismo universo $\mathcal{U}$, entonces, el nuevo conjunto $A \cup B$, llamado *unión entre A y B*, es el que tiene por elementos aquellos que pertenecen a A o a B; es decir, *a* *alguno de los dos*. Simbólicamente se define:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \,:\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Por ejemplo, con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana, naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ que consideramos anteriormente, tenemos:

- $X \cup Y = \{\text{manzana, naranja}, 1, @\}$
- $Y \cup Z = \{\text{manzana, naranja}, @, \sharp\}$
- $X \cup Z = \{\text{manzana, naranja}, 1, @, \sharp\}$

Observemos que $X \cup Y = X$. Esto se debe a que $Y \subseteq X$, por lo cual los elementos de Y ya son elementos de X y no se agrega nada nuevo al unirlos.

■ **Ejemplo 4** Consideremos ahora un ejemplo numérico. Si $W = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 10\}$ y $V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 \leq x \leq 15\}$ entonces $W \cup V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 15\}$. Notemos que los números reales que están entre 5 y 10 pertenecen tanto a W como a V. ■

Analicen si son válidas las expresiones $A \subseteq (A \cup B)$ y $B \subseteq (A \cap B)$ cualesquiera sean los conjuntos A y B. En particular, estudien qué sucede con la $(A \cup B)$ si $A \subseteq B$. Y qué conjunto es $A \cup \emptyset$ para cualquier conjunto A.

Intersección de conjuntos. Esta operación nos permite construir un conjunto que contenga los elementos que tengan en común los dos conjuntos originales.

Definición 2 El conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B *al mismo tiempo*, se llama la *intersección entre A y B* y se nota $A \cap B$. Simbólicamente, se escribe así:

$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana, naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ tenemos:

- $X \cap Y = \{\text{manzana, naranja}\}$
- $Y \cap Z = \emptyset$
- $X \cap Z = \{@\}$

■ **Ejemplo 5** Con W y V, como en el Ejemplo 4, se tiene que $W \cap V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 \leq x \leq 10\}$. ■

Analicen si es cierto que las expresiones $(A \cap B) \subseteq A$ y $(A \cap B) \subseteq B$ son válidas cualesquiera sean A y B. Determinen qué conjunto es $A \cap B$ si $A \subseteq B$ y qué conjunto es $A \cap \emptyset$ cualquiera sea el conjunto A.

Diferencia de conjuntos. Esta operación consiste en "removerle" a un conjunto A los elementos que sean, a su vez, elementos de un conjunto B.

Definición 3 El conjunto que se obtiene al quedarse con los elementos de A que no están en B se llama la *diferencia entre A y B* y se nota $A \setminus B$. Simbólicamente, se escribe de la siguiente manera:

$$A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

Por ejemplo, $X \setminus Y = \{1, @\}$ y $X \setminus Z = \{1, \text{manzana, naranja}\}$. Notemos que $\sharp \in Z$ pero $\sharp \notin X$. Esto no tiene importancia, porque al escribir $X \setminus Z$ estamos diciendo "el conjunto de los elementos de X que no están en Z"; el hecho que Z tenga un elemento que no esté en X no afecta esta operación.

Por último, definimos un conjunto formado por los elementos que se encuentran *fuera* de un conjunto dado A. Esto da lugar a un nuevo conjunto llamado *complemento de* A, el cual se nota A^c. Pero, ¿qué significa "afuera"? Por ejemplo, ¿qué hay afuera de $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$? Esto depende de cuál es el universo en el que estamos trabajando. Si trabajamos con el universo de todas las frutas, entonces Y^c es el conjunto de todas las frutas que no son la manzana y la naranja. Si tomamos el universo dado por el conjunto $X = \{\text{manzana, naranja}, 1, @\}$ entonces $Y^c = \{1, @\}$. Por lo tanto, el complemento de un conjunto *siempre* es en relación al conjunto universal que estamos considerando.

Definición 4 El *complemento* de un conjunto A respecto del universo $\mathcal{U}$ es el conjunto de elementos de $\mathcal{U}$ que no están en A. Simbólicamente, se representa de la siguiente manera:

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A$$

Ejemplo 6 Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces se tiene que:

$$\{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es un número par}\}^c = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es un número impar}\}.$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 1.1?

- Repasamos las nociones de pertenencia de un elemento en relación con un conjunto ($\in$) y de inclusión de un conjunto en otro ($\subseteq$).
- Introdujimos el conjunto $\mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reales (y lo identificamos con un plano), el conjunto $\mathbb{R}^3$ de ternas ordenadas de números reales (y lo identificamos con el espacio 3-dimensional) y generalizamos estos conjuntos a las n-uplas ordenadas de números reales, llamado $\mathbb{R}^n$.
- Definimos las operaciones usuales que hacemos con conjuntos: unión de conjuntos ($\cup$), intersección de conjuntos ($\cap$), diferencia de conjuntos ($\setminus$) y complemento de un conjunto respecto del conjunto universal (A^c).

■

1.2 Vectores de $\mathbb{R}^n$

En este apartado estudiaremos los *vectores*. Es probable que tengan la idea intuitiva de que un vector es una flecha, al menos gráficamente. Será de gran utilidad tener presente esta noción para comprender la definición matemática de este concepto.

En este apartado estudiaremos...

- La definición formal de vector.
- La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.
- Las propiedades fundamentales de estas operaciones.

■

1.2.1 La noción de vector

Seguramente ustedes ya han utilizado flechas (segmentos orientados) para representar cantidades físicas, como fuerzas aplicadas sobre un cuerpo o dirección de trayectorias. Una flecha queda determinada por su origen (donde comienza) y su extremo (donde termina). Con estos datos, la flecha obtiene una *dirección* (la recta sobre la cual está contenida), *sentido* (dónde empieza y dónde termina) y *módulo* (la longitud de la flecha). Análogamente, si se elige el origen de la flecha, y especifica su dirección, sentido y módulo, entonces se obtiene el extremo de la misma.

Definición 5 El *segmento orientado* de origen A y extremo B se llama *vector* $\vec{AB}$ y sus elementos son la *dirección* (recta que contiene a los puntos A y B), el *sentido* (desde A hacia B) y el *módulo* (la distancia entre los puntos A y B).

Cuando se dibujan flechas sobre la hoja de papel se están dibujando vectores en $\mathbb{R}^2$, en el sentido que su origen y su extremo son puntos de un plano. Al señalar un avión que está pasando por el cielo, podemos pensar que estamos representando un vector con origen en nuestro hombro y extremo en nuestro dedo índice. Este vector "pertenece" a $\mathbb{R}^3$, ya que son necesarias tres coordenadas para dar la ubicación del hombro y el dedo índice en el espacio. Los vectores que consideraremos en esta materia serán "vectores en $\mathbb{R}^n$", en el sentido que su origen y extremo estarán dados por puntos de $\mathbb{R}^n$.

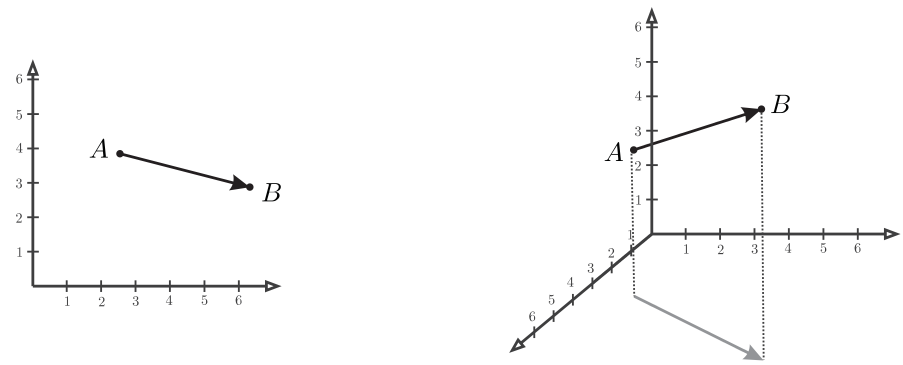

Figura 1.5: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Tengamos en cuenta que la dirección, el sentido y el módulo de un vector son propiedades intrínsecas del mismo; es decir, son independientes del punto origen del vector. El origen y el extremo de un vector dependen de su posición relativa con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, mientras que la dirección, el sentido y el módulo, no. En este libro nos importa estudiar las características propias de los vectores, independientemente de dónde estén ubicados en el sistema de referencia. Por este motivo, *consideramos que todos los vectores de igual dirección, sentido y módulo son* equivalentes*; es decir, para nuestros propósitos es equivalente estudiar cualquiera de ellos.* Sin embargo, tenemos en cuenta que de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ equivalentes a uno dado, el más sencillo de describir es el que tiene su origen en el origen de coordenadas $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, pues de esta manera, para especificar un vector alcanza con dar su extremo.

Importante *En este libro, trabajamos exclusivamente con vectores $\vec{v}$ cuyo origen es el origen de coordenadas $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Es decir que, al indicar el vector $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ nos estamos refiriendo al vector con origen en el punto $(0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ y extremo en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.* ■

En particular, el origen de coordenadas también da lugar a un vector: el vector *nulo* (no tiene longitud, ni dirección, ni sentido). Este vector es el único para el cual su origen y extremo coinciden y se nota $\vec{0}$. Observemos que en $\mathbb{R}^2$ el vector nulo es $\vec{0} = (0, 0)$ y en $\mathbb{R}^3$ es $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Cuando escribamos $\vec{0}$, nos referiremos siempre al vector nulo del $\mathbb{R}^n$ en el que estemos trabajando en ese momento.

Hay dos operaciones fundamentales a tener en cuenta durante el trabajo con vectores: "sumar dos vectores" y "escalar un vector por un número real". Estas operaciones tienen un significado en función del contexto en el cual se las utiliza (a veces geométrico y a veces algebraico). Por ejemplo, si hay dos fuerzas aplicadas sobre un cuerpo y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ especifican la dirección y magnitud de cada una de las fuerzas, necesitamos determinar cuál es la fuerza resultante. En este caso, será la *suma* de los vectores anteriores (Figura 1.6). También, si necesitáramos mover más rápido el cuerpo tendríamos que hacer el doble de fuerza en la misma dirección de $\vec{v}$; en este caso, el vector que representa esta "duplicación de fuerza" será el obtenido al *escalar* en 2 el vector $\vec{v}$. De igual manera, si necesitamos contrarrestar una fuerza para que el cuerpo permanezca inmóvil, deberemos hallar una fuerza de la misma intensidad pero de sentido opuesto. Esto corresponderá al vector opuesto a $\vec{v}$, que se obtiene de escalar a este vector por -1 (Figura 1.6). Estas operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar son la base de la teoría que estudiaremos a lo largo del libro.

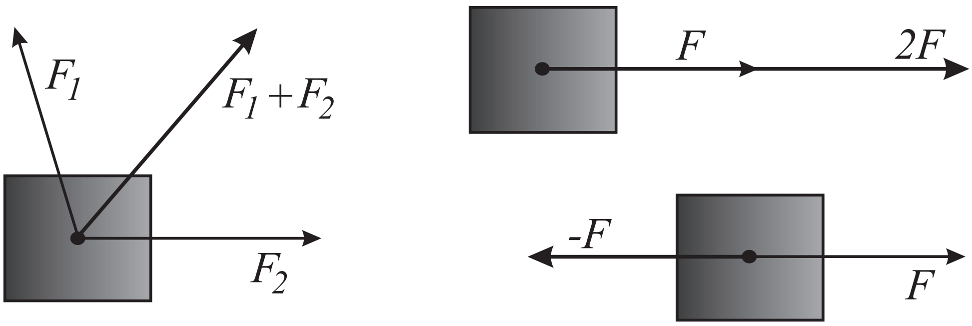

Figura 1.6: Representación de fuerzas con vectores.

1.2.2 Vectores en el espacio n-dimensional

En este apartado, formalizaremos las nociones de "sumar vectores" y "escalarlos por un número real" sugeridas anteriormente. En primer lugar trabajamos con vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para desarrollar la intuición de su definición y sus propiedades.

A un vector en $\mathbb{R}^2$ lo llamamos un *vector en el plano*, y escribimos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $\vec{v}$ queda determinado por un punto (x, y) del plano. Usaremos la notación $\vec{v} = (x, y)$ para referirnos al vector de origen $(0, 0)$ y extremo (x, y).

Definición 6 Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, se define otro vector $\vec{v} + \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Este nuevo vector es llamado *la suma de $\vec{v}$ y $\vec{w}$* (o *vector suma*). Si $\vec{v} = (x_1, x_2)$ y $\vec{w} = (y_1, y_2)$ entonces:

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Gráficamente, el vector suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el vector cuyo extremo es el punto al que se llega partiendo de $(0, 0)$ al recorrer primero el vector $\vec{v}$ y, luego, desde el extremo de $\vec{v}$, el vector $\vec{w}$, o viceversa. Esto se conoce como *la regla del paralelogramo* dado que el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (Figura 1.7).

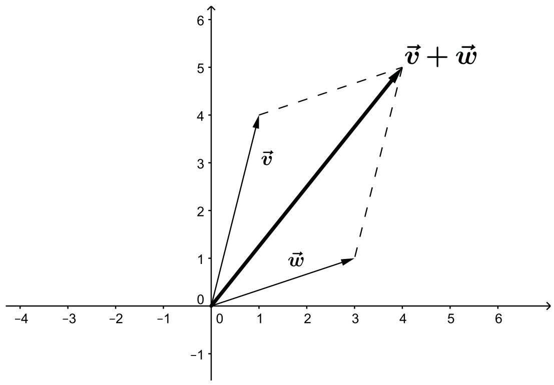

Figura 1.7: Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 7** Si $\vec{v}=(2,-5)$ y $\vec{w}=(-3,-2)$ entonces:

$$\vec{v}+\vec{w}=(2,-5)+(-3,-2)=(2-3,-5-2)=(-1,-7)$$

■

Existe otro medio de obtener nuevos vectores: *escalarlo* a partir de uno dado. Esto remite a las ideas de; "alargarlo", "acortarlo" o "invertirlo". Suponemos que multiplicar un vector por el número 2 duplicará su tamaño; multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, lo reducirá a la mitad; y multiplicarlo por -1, lo invertirá, es decir, le cambiará el sentido (Figura 1.8). Esta operación de multiplicación se llama *producto de un vector por un escalar* y está definida analíticamente de la siguiente manera.

Definición 7 Si $\vec{v}=(x_1,x_2)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces el *producto del vector $\vec{v}$ por el escalar λ* es el vector

$$\lambda\vec{v}=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

■ **Ejemplo 8** Si $\vec{v}=(2,-5)$ y $\lambda=3$ entonces

$$\lambda\vec{v}=3(2,-5)=(3{,}2,3.(-5))=(6,-15)$$

■

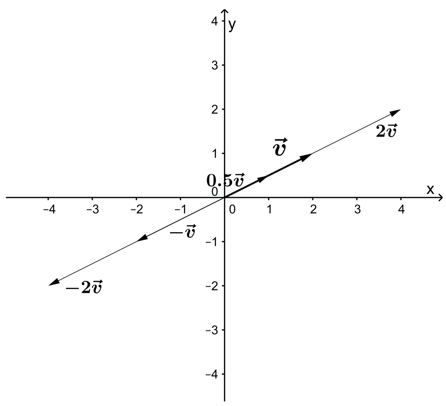

Figura 1.8: Multiplicación de un vector por un escalar en $\mathbb{R}^2$.

Observación 3 *En la teoría de vectores, a los números reales se los conoce como* escalares *pues se utilizan para* escalar *los vectores de la manera recién descripta.*

Observación 4 *Notemos que las operaciones de suma de vectores y producto por escalar están definidas* coordenada a coordenada. *Esto quiere decir que, para hallar la suma del vector $\vec{v}$ con el vector $\vec{w}$, debemos hacer las sumas entre las respectivas coordenadas de estos vectores: la primera coordenada de $\vec{v}$ con la primera de $\vec{w}$ y la segunda de $\vec{v}$ con la segunda de $\vec{w}$. De igual manera sucede con el producto de un vector por un escalar.*

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

1. $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
4. Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}$ y $(\lambda_1\lambda_2)\vec{v} = \lambda_1(\lambda_2\vec{v})$
5. $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
6. $1.\vec{v} = \vec{v}$
7. $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$
8. $0.\vec{v} = \vec{0}$

Como mencionamos al principio de la sección, la suma de vectores y el producto de vectores por escalares son las operaciones fundamentales en $\mathbb{R}^2$ que nos permitirán trabajar durante el desarrollo del libro. Proponemos, ahora, explorar algunas propiedades geométricas de estas operaciones. Miren el siguiente Experimento1.

Experimento 1 Dados los vectores $\vec{v} = (3, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 4)$ en $\mathbb{R}^2$:

1. Grafíquenlos en el plano.
2. Calculen y grafiquen los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{v}$, $2\vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}$.
3. Representen, en un mismo gráfico, los puntos $-2\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\vec{0}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$. ¿Qué notan? ¿Qué características tienen los puntos de la forma $k.\vec{v}$ con $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera? ¿Y los puntos $\lambda.\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera?

Notemos que el efecto de multiplicar un vector por -1 invierte el sentido del vector. Se nota $-\vec{v}$ en lugar de $(-1)\vec{v}$. Esta notación tiene sentido ya que $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$. ¿Cómo se calcula en general $\vec{v} - \vec{w}$? Gráficamente, primero se calcula $-\vec{w}$ (invirtiendo el sentido del vector) y, luego, se suma $\vec{v}$ con $-\vec{w}$ usando la regla del paralelogramo. La resta de dos vectores tiene una interpretación muy importante que veremos en la próxima sección (Experimento 4).

En el siguiente Experimento 2, veremos el efecto de sumar el mismo vector a varios vectores.

Experimento 2 Consideren en $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{t} = (4,2)$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} = (-4,1)$, $\vec{w} = (-3,6)$ y $\vec{u} = (-1,7)$.

1. Grafiquen todos los vectores en el plano.
2. Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} + \vec{t}$, $\vec{w} + \vec{t}$ y $\vec{u} + \vec{t}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} - \vec{t}$, $\vec{w} - \vec{t}$ y $\vec{u} - \vec{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\vec{t}$ a los puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Y que sucede al restar el vector $\vec{t}$?
3. Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $2\vec{v}$, $2\vec{w}$ y $2\vec{u}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\frac{1}{2}\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Para trabajar en el espacio $\mathbb{R}^3$ se procede de manera idéntica al caso de $\mathbb{R}^2$. En este caso, cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ queda determinado por las coordenadas de su extremo (considerando su origen en el $(0,0,0)$) y se hará referencia al “vector $\vec{v} = (x,y,z)$” (Figura 1.9). Las operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar se definen de forma análoga a las operaciones con vectores en el plano, pero extendiéndolas a una coordenada más.

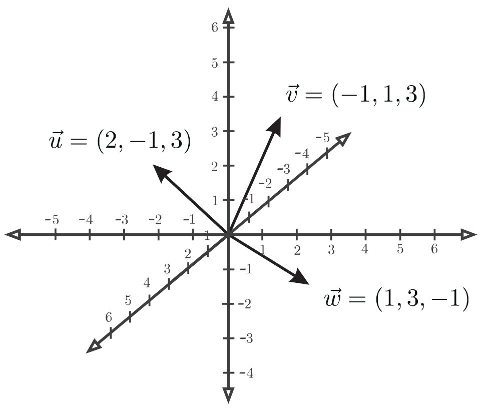

Figura 1.9: Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición 8 Si $\vec{v} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{w} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la *suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$* y el *producto de $\vec{v}$ por el escalar λ* de la siguiente manera:

- $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

Ejemplo 9 Si $\vec{v} = (1,2,-5)$, $\vec{w} = (3,-2,0)$ y $\lambda = -4$ entonces:

- $\vec{v} + \vec{w} = (1,2,-5) + (3,-2,0) = (1+3, 2-2, -5+0) = (4,0,-5)$ y
- $\lambda\vec{v} = (-4).(1,2,-5) = ((-4).1, (-4).2, (-4).(-5)) = (-4,-8,20)$.

Gráficamente, el efecto de la multiplicación de un vector por un escalar es el mismo que en el caso del plano (alarga, acorta y/o invierte). Por otro lado, la suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ conserva la misma interpretación: es el vector a cuyo extremo se arriba partiendo de $(0,0,0)$ al recorrer, primero, el vector $\vec{v}$ y, luego, desde el punto extremo de $\vec{v}$, el vector $\vec{w}$. De esta manera, la regla del paralelogramo también puede ser utilizada para interpretar la suma de dos vectores en el espacio, pensando a los vectores como incluidos en el plano que los contiene; es decir, identificando dicho plano con $\mathbb{R}^2$ (Figura 1.10).

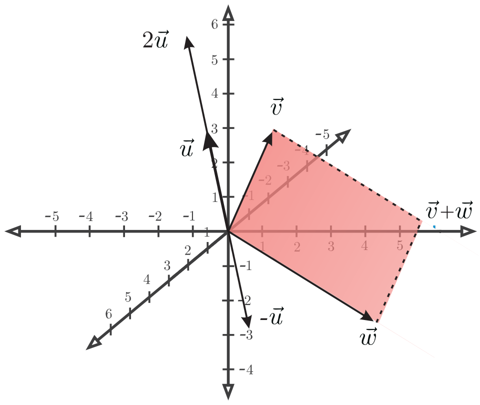

Figura 1.10: Suma de vectores y producto de un vector por un escalar en $\mathbb{R}^3$.

Como es de esperar, todos los conceptos introducidos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden extender a cualquier $\mathbb{R}^n$ de *idéntica* manera. Las operaciones para vectores en $\mathbb{R}^n$, se definen de forma completamente análoga a los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Definición 9 Si $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

- $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ejemplos 10

- $(1, 0, 2, 0) + (-1, -1, 2, -3) = (1 - 1, 0 - 1, 2 + 2, 0 - 3) = (0, -1, 4, -3)$ en $\mathbb{R}^4$.
- $(-2).(2, 4, 6, -3, 1) = (-4, -8, -12, 6, -2)$ en $\mathbb{R}^5$.
- $5(1, 2, 3, \ldots, n) + (1, 1, 1, \ldots, 1) = (6, 11, 16, \ldots, 5.n + 1)$ en $\mathbb{R}^n$.

La noción gráfica que debe interiorizarse sigue siendo la misma: la multiplicación por escalar estira, acorta y/o invierte el vector, y la suma de vectores responde a recorrer un vector y, a continuación, el otro (aunque ya no puedan visualizar este hecho). Todas las propiedades y conclusiones de los experimentos que hicimos en el caso $n = 2$ valen para todos los $n \in \mathbb{N}$.

¿Qué hicimos en el apartado 1.2?

- Introdujimos la noción de vector de $\mathbb{R}^n$ y nos concentramos en trabajar con vectores con origen en $\vec{0}$.
- Definimos la suma de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^n$ y vimos que el resultado es un nuevo vector $\vec{v} + \vec{w}$, cuyo extremo es la suma lugar a lugar de las coordenadas de los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Gráficamente, es el vector que coincide con la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
- Definimos el producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar (número real) λ y vimos que el resultado es un nuevo vector $\lambda\vec{v}$ cuyo extremo es la multiplicación lugar a lugar de las coordenadas del extremo de $\vec{v}$ con λ. Gráficamente, el resultado es un vector "escalado" por λ.
- Observamos que el vector $\vec{v} - \vec{w}$, es un vector cuya dirección, sentido y módulo es el mismo el vector de origen el extremo de $\vec{w}$ y extremo el extremo de $\vec{v}$.

1.3 Producto escalar de vectores

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de vectores se desarrolla en el estudio de la Geometría. En esta sección estudiaremos las nociones matemáticas relacionadas con las herramientas de medición más importantes de esta rama: la regla y el transportador; es decir, vamos a introducir una forma de medir longitudes y ángulos. Esta tarea la realizaremos a través del concepto de *producto escalar de vectores*.

En este apartado estudiaremos...

- El producto escalar de vectores.
- La norma (módulo) de un vector.
- La distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$.
- El ángulo que forman dos vectores.
- Cuando dos vectores son ortogonales (perpendiculares).

1.3.1 Producto escalar, norma y distancia

El producto escalar es una operación que, a cada par de vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, le asocia un número real que condensa información relevante sobre la relación geométrica entre ambos vectores. La definimos a continuación.

Definición 10 Sean $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el *producto escalar* o *producto interno* entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el número real:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Ejemplos 11

- El producto escalar entre los vectores $(2, -1)$ y $(3, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ es:

$$(2, -1) \cdot (3, 3) = 2{,}3 + (-1)3 = 6 - 3 = 3$$

- El producto escalar entre los vectores $(1, 1, 3)$ y $(-1, 3, -4)$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$(1, 1, 3) \cdot (-1, 3, -4) = 1(-1) + 1{,}3 + 3(-4) = -1 + 3 - 12 = -10$$

- El producto escalar entre los vectores $(1, 2, 3, \ldots, n)$ y $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ es:

$$(1, 2, 3, \ldots, n) \cdot (1, 1, 1, \ldots, 1) = 1{,}1 + 2{,}1 + 3{,}1 + \cdots + n{,}1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

A diferencia de las operaciones vistas en la Sección 1.2, *el producto escalar es una operación entre vectores cuyo resultado no es un vector, sino un número* (de allí su nombre).

El producto escalar de vectores nos permitirá hacer cálculos de longitudes, distancias y ángulos. En efecto, consideremos el producto escalar de un vector de $\mathbb{R}^2$ consigo mismo. Si $\vec{v} = (x_1, x_2)$ entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Realicen el siguiente experimento.

Experimento 3 Consideren el triángulo de vértices $(0,0)$, $(x_1,0)$ y (x_1,x_2), para algunos $x_1,x_2 > 0$ genéricos (Figura 1.11). Luego:

1. Noten que dicho triángulo es rectángulo y que el módulo de $\vec{v} = (x_1,x_2)$ es exactamente la longitud de la hipotenusa.
2. Calculen el módulo de $\vec{v}$ utilizando el Teorema de Pitágoras.

■

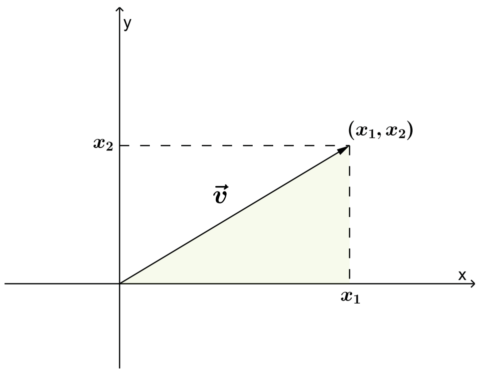

Figura 1.11: El triángulo de vértices $(0,0)$, $(x_1,0)$ y (x_1,x_2).

El resultado del experimento anterior da cuenta de que el módulo de $\vec{v}$ es exactamente $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. ¿Qué sucede con un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$? Se puede mostrar con argumentos similares que el módulo de un vector en $\mathbb{R}^3$ es exactamente $\sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}$. En el caso general de vectores de $\mathbb{R}^n$, el módulo de un vector se lo conoce como *norma* del vector, y se define:

Definición 11 Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se define la *norma* del vector $\vec{v}$ como el número real $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. Es decir, si $\vec{v} = (x_1,\ldots,x_n)$ entonces $||\vec{v}|| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

Por lo tanto, teniendo a disposición el producto escalar tenemos una manera de medir el módulo o norma de los vectores.

■ **Ejemplos 12** Calculemos algunas normas.

- $||(2,-5)|| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
- $||(-1,3,-2)|| = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$.
- $||(1,1,1,1,1)|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{5}$.

■

Habíamos comentado en la sección anterior que la resta de vectores $\vec{v}-\vec{w}$ tenía una importante interpretación geométrica. Realicen el siguiente Experimento 4.

Experimento 4 Sean $\vec{v} = (x_1,x_2)$ y $\vec{w} = (y_1,y_2)$ en $\mathbb{R}^2$.

1. Comprueben que, gráfica y analíticamente, se verifica la igualdad $\vec{v} = \vec{v}-\vec{w}+\vec{w}$.
2. Interpreten, gráficamente, la igualdad anterior agrupándola de la siguiente manera: $\vec{v} = (\vec{v}-\vec{w})+\vec{w}$. ¿Qué pueden concluir de la dirección del vector $\vec{v}-\vec{w}$? ¿Qué pueden concluir de la normal de vector $\vec{v}-\vec{w}$? Miren la Figura 1.12.

■

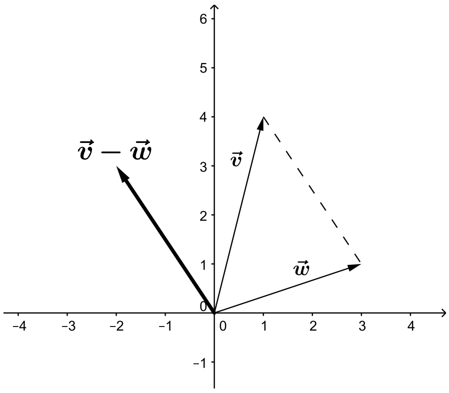

Figura 1.12: La interpretación gráfica de la resta de dos vectores.

Definición 12 Si P y Q son puntos de $\mathbb{R}^n$, se define la *distancia* de P a Q como el número real $d(P,Q) = ||\vec{v}-\vec{w}||$, donde $\vec{v}$ es el vector cuyo extremo es P y $\vec{w}$ es el vector cuyo extremo es Q. Esto es, si $P=(x_1,\ldots,x_n)$ y $Q=(y_1,\ldots,y_n)$ entonces $d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Ejemplos 13

- La distancia del punto $(2,-5)$ al punto $(-3,-3)$ en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{aligned} d((2,-5),(-3,-3)) &= ||(2,-5)-(-3,-3)|| \\ &= ||(2+3,-5+3)|| \\ &= ||(5,-2)|| \\ &= \sqrt{(5)^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{29}. \end{aligned}$$

- La distancia del punto $(1,1,1)$ al punto $(-1,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{aligned} d((1,1,1),(-1,2,1)) &= ||(1,1,1)-(-1,2,1)|| \\ &= ||(2,-1,0)|| \\ &= \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(0)^2} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- La distancia del punto $(1,2,3,\ldots,n)$ al punto $(1,1,1,\ldots,1)$ en $\mathbb{R}^n$ es:

$$\begin{aligned} d((1,2,3,\ldots,n),(1,1,1,\ldots,1)) &= ||(1,2,3,\ldots,n)-(1,1,1,\ldots,1)|| \\ &= ||(0,1,2,3,\ldots,n-1)|| \\ &= \sqrt{1^2+2^2+3^3+\cdots+(n-1)^2}. \end{aligned}$$

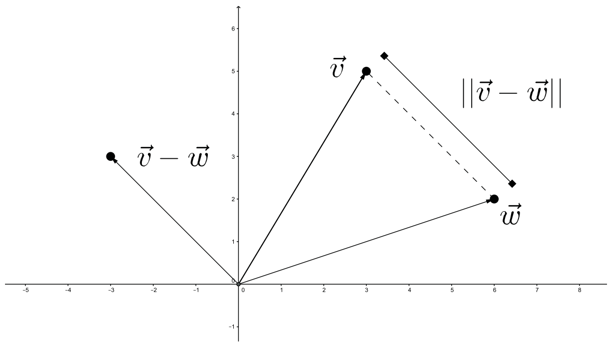

Figura 1.13: Utilización de la teoría de vectores para calcular la distancia entre puntos.

A continuación enumeramos algunas propiedades del producto escalar.

1. $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ (es conmutativo)
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distribuye respecto de la suma de vectores)
3. $(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$ (si algún vector está multiplicado por un escalar, este puede "sacarse fuera" del producto interno).

Experimento 5 Dados $\vec{v}=(3,-4)$ y $\vec{w}=(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$:

1. Calculen

$$||\vec{v}||, \quad ||\vec{w}||, \quad ||\vec{v}+\vec{w}||, \quad ||\vec{v}||+||\vec{w}||, \quad ||2\vec{v}|| \quad \text{y} \quad ||\tfrac{1}{2}\vec{v}||.$$

2. ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}||$ y $||2\vec{v}||$? ¿Y entre $||\vec{v}||$ y $||\frac{1}{2}\vec{v}||$?
3. ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}+\vec{w}||$ y $||\vec{v}||+||\vec{w}||$? ¿Cuál es más grande que el otro? Esto sucede siempre y es conocido como *desigualdad triangular*.

1.3.2 Ángulo entre vectores y ortogonalidad

Con lo desarrollado hasta aquí, ya tenemos una traducción matemática de la noción de "regla", es decir, como podemos medir longitudes y distancias. Como se mencionó al inicio de esta sección, el producto escalar también nos provee la noción de "transportador", que nos permitirá calcular ángulos entre vectores (no nulos).

¿A qué nos referimos cuando hablamos del ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^2$? A que, *de los dos ángulos que quedan determinados por los vectores, consideramos el más pequeño de los dos; es decir, el que está entre* 0 *y* π (Figura 1.14 lado izquierdo). Si se tienen dos vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces también se tiene determinado un ángulo entre ellos: el ángulo de menor amplitud al cual hay que girar uno de los vectores alrededor de su origen hasta que quede superpuesto con el otro vector. Notemos que este recorrido de un vector hacia el otro en realidad sucede en el plano que contiene a ambos (Figura 1.14 lado derecho). En general, dos vectores en cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ están contenidos en un plano, por lo cual medir ángulos de vectores de cualquier dimensión es lo mismo que medirlos en $\mathbb{R}^2$.

Definición 13 Sean $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ *no nulos*. Se define el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el *único* ángulo θ entre 0 y π tal que:

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}$$

Ejemplos 14

- El ángulo entre los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ es aquel ángulo θ entre 0 y π tal que $\cos(\theta) = \frac{(1,0)\cdot(0,1)}{||(1,0)||.||(0,1)||}$. Pero $(1,0)\cdot(0,1) = 0$, por lo que $\theta = \frac{\pi}{2}$. O sea, los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ son perpendiculares.
- El ángulo entre los vectores $(1,2,3)$ y $(1,0,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ es aquel ángulo θ entre 0 y π tal que

$$\cos(\theta) = \frac{(1,2,3)\cdot(1,0,-1)}{||(1,2,3)||.||(1,0,-1)||} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Tenemos entonces que $\theta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{7}})$, que equivale aproximadamente a 112°.

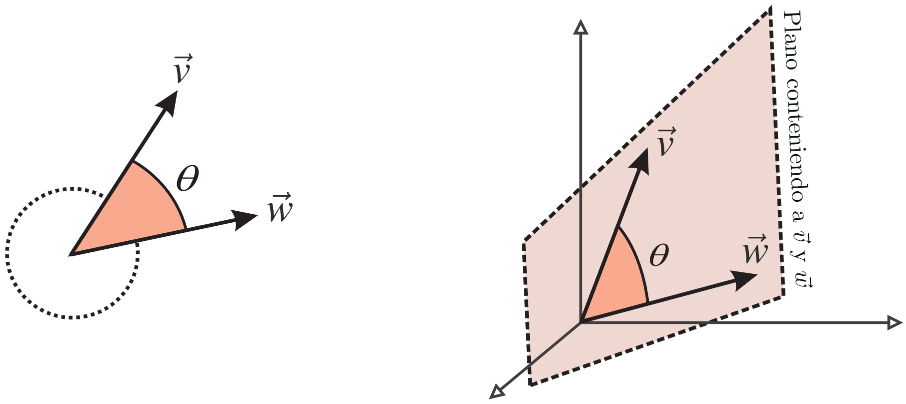

Figura 1.14: El ángulo entre dos vectores.

Observación 5 *Observemos cómo la expresión para hallar el ángulo entre los vectores depende únicamente del producto escalar (pues la norma también está definida a partir del mismo). El hecho que esta fórmula, efectivamente, calcula el ángulo entre los dos vectores es una consecuencia del* Teorema del Coseno.

Como el coseno siempre es un número entre -1 y 1, uno puede deducir de la fórmula del ángulo entre dos vectores que $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq ||\vec{v}||.||\vec{w}||$ para cualesquiera $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Por otro lado, de la fórmula del ángulo entre dos vectores se deduce otra expresión para el producto escalar entre vectores. Si $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y θ es el ángulo entre ambos entonces:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ||\vec{v}||||\vec{w}||\cos(\theta)$$

Por lo tanto, si uno tiene por datos la norma de los vectores y el ángulo entre ellos, puede calcular de manera directa su producto escalar. Esta fórmula nos ofrece un criterio para decidir si dos vectores son perpendiculares. Recordemos que dos vectores $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ son perpendiculares u *ortogonales* si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Pero como $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, entonces deducimos de esta fórmula que $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Por otro lado, como el único ángulo en el intervalo $(0,\pi)$ que anula al coseno es $\frac{\pi}{2}$ entonces, si $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, quiere decir, nuevamente por la fórmula de arriba, que $\theta = \frac{\pi}{2}$; o sea, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición que caracteriza a los vectores perpendiculares.

Definición 14 Dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *ortogonales* si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Ejemplos 15

- Los vectores $(2, -5)$ y $(-3, -3)$ no son ortogonales pues $(2, -5) \cdot (-3, -3) = 9$.
- Los vectores $(1, -2)$ y $(4, 2)$ son ortogonales pues $(1, -2) \cdot (4, 2) = 0$.
- El vector $(-1, 1, 1)$ es ortogonal al vector $(-1, -2, 1)$ y también al vector $(1, 1, 0)$.

Experimento 6 Realicen las siguientes búsquedas:

1. Encuentren tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(2, 3)$. ¿Qué relación encuentran entre los vectores hallados?
2. Encuentren *todos* los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $(2, -2)$ y tienen norma 1.
3. Encuentren dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1, 2, 1)$ que no sean paralelos entre sí.
4. Encuentren tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1, 2, 1)$ y $(1, -3, 0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

¿Qué hicimos en el apartado 1.3?

- Definimos el producto escalar entre dos vectores. Su resultado es un número real que contiene información de la relación entre los vectores involucrados.
- Interpretamos la raíz cuadrada del producto escalar de un vector con él mismo como el módulo de dicho vector. Definimos la norma del vector $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ como $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
- Definimos la distancia entre dos puntos $P = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Q = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ como la norma del vector cuyo extremo es $P - Q$. O sea, $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
- Definimos el ángulo entro dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ como el único ángulo θ entre 0 y π tal que $\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \, ||\vec{w}||}$.
- Determinamos que dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales sí, y solo sí, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.