Capítulo 2

Relaciones

§2.1. El producto cartesiano

2.1.1. Si A y B son dos conjuntos, el ***producto cartesiano*** de A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Así, por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene por elementos a los ocho pares

$$(1, \clubsuit) \quad (1, \diamondsuit) \quad (1, \heartsuit) \quad (1, \spadesuit) \quad (2, \clubsuit) \quad (2, \diamondsuit) \quad (2, \heartsuit) \quad (2, \spadesuit).$$

De manera similar, el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ es el de todos los pares (n, r) con n un número natural y r un número real, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es el de todos los pares (a, b) con a y b números enteros y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales.

2.1.2. Es fácil decidir cuándo el producto cartesiano de dos conjuntos es vacío:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano $A \times B$ es vacío si y solamente si A es vacío o B es vacío.*

Demostración. Supongamos primero que $A \times B$ no es vacío. Esto significa que existe algún par ordenado (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ y, en particular, que ni A ni B son vacíos, ya que contienen, respectivamente, a a y a b.

Recíprocamente, supongamos que $A \times B$ es vacío y que A no lo es, de manera que existe un elemento a en A. Si B no fuera vacío, habría también un elemento b en B y podríamos, por lo tanto, construir el par ordenado (a, b): este par sería en ese caso un elemento de $A \times B$ y esto es absurdo, ya que estamos suponiendo que el producto cartesiano es vacío. Vemos así que B debe ser necesariamente vacío y esto prueba la proposición. □

2.1.3. En el caso en que ambos factores son conjuntos finitos, el producto cartesiano es él mismo finito y podemos precisar su número de elementos:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. Si A y B son finitos y poseen, respectivamente, n y m elementos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es finito y tiene exactamente nm elementos.*

Observemos que si A y B son finitos y alguno de los dos es vacío, de manera que $n = 0$ o $m = 0$, entonces esta proposición nos dice que $A \times B$ tiene $nm = 0$ elementos; recíprocamente, si $A \times B$ es vacío, es $nm = 0$ y, por lo tanto, alguno de n o m tiene que ser nulo. Esto es compatible, por supuesto, con lo que afirma la Proposición 2.1.2.

Demostración. Supongamos que A y B son finitos y que tienen n y m elementos, respectivamente. Si alguno de A o B es vacío, de manera que alguno de los dos números n o m es nulo, ya sabemos que $A \times B$ es vacío y, por lo tanto, tiene $0 = nm$ elementos. Nos queda considerar, entonces, el caso en el que ni A ni B es vacío y, por lo tanto, en el que los números n y m son positivos.

Sean

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n \tag{1}$$

los elementos de A listados en algún orden y sin repeticiones, sean

$$b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_m \tag{2}$$

los de B en algún orden y, otra vez, sin repeticiones y consideremos los nm pares ordenados

$$\begin{matrix} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \dots, & (a_1, b_m), \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \dots, & (a_2, b_m), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, b_1), & (a_n, b_2), & \dots, & (a_n, b_m). \end{matrix} \tag{3}$$

Todos ellos pertenecen a $A \times B$ y, de hecho, todo elemento de $A \times B$ es uno de ellos. En efecto, si (a, b) es un elemento de $A \times B$, entonces a es un elemento de A, así que aparece en la lista (1) y hay un índice i en $\{1, \dots, n\}$ tal que $a = a_i$, y b es un elemento de B, así que aparece en la lista (2) y hay un índice j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $b = b_j$: el par (a, b) es entonces el par (a_i, b_j) y es uno de los que están listados en (3).

Por otro lado, los nm pares ordenados que escribimos en (3) son distintos dos a dos. Supongamos, por ejemplo, que los pares $x = (a_i, b_j)$ e $y = (a_k, b_l)$ son iguales. Eso significa que son iguales componente a componente: esto es, que $a_i = a_k$ y que $b_j = b_l$. Ahora bien, los elementos de la lista (1) son distintos dos a dos y entonces como a_i y a_k son iguales se debe tener que los índices i y k mismos son iguales. Por la misma razón, los índices j y l son iguales, y vemos así que les pares x e y con los que empezamos aparecen en la tabla (3) en la misma posición.

Concluimos así que la lista (3) incluye todos los elementos de $A \times B$ sin repeticiones: como hay allí nm elementos, vemos que $A \times B$ tiene nm elementos y, en particular, que es un conjunto finito. Esto prueba la proposición. $\square$

2.1.4. Observación. El lector atento habrá notado que en ningún momento dijimos qué es exactamente un *par ordenado*. Nos ocupamos aquí de esta cuestión.

Lo que queremos es alguna forma de poder construir a partir de dos objetos x e y un tercero, al que escribimos (x, y), de manera tal que se satisfaga la siguiente propiedad característica: cualesquiera sean los objetos x, y, x' e y',

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ e } y = y'.$$

Es importante observar que lo único que importa es que se cumpla esta propiedad, que esencialmente nos dice que podemos recuperar a partir de (x, y) a los objetos x e y.

Una forma de hacer esto es usar una idea propuesta originalmente por Kazimierz Kuratowski en 1921: si x e y son dos objetos cualesquiera, definimos

$$(x, y)_K \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Veamos que esta definición tiene la propiedad que nos interesa. Sean x, y, x' e y' cuatro objetos cualesquiera. Es claro, por supuesto, que si $x = x'$ e $y = y'$, entonces

$$(x, y)_K = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{x', \{\{x'\}, y'\}\} = (x', y')_K.$$

Lo realmente interesante es que vale la implicación recíproca. Supongamos, para verlo, que $(x, y)_K = (x', y')_K$, esto es, que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, y consideremos los siguientes dos casos.

- Supongamos primero que $x = y$. En este caso es

  $$\{x', \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\},$$

  y, en particular, como $\{x', y'\}$ pertenece a $\{x', \{x', y'\}\}$, también pertenece a $\{\{x\}\}$ y, por lo tanto, tiene que ser igual a $\{x\}$. La igualdad $\{x', y'\} = \{x\}$ implica inmediatamente que $x' = x$ y que $y' = x = y$.
- Supongamos ahora que $x \neq y$. Tenemos que $\{x'\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, así que $\{x'\}$ es igual a $\{x\}$ o a $\{x, y\}$. En el segundo caso es $\{x'\} = \{x, y\}$, así que $x = x' = y$, y esto contradice nuestra hipótesis. Debe ser entonces $\{x'\} = \{x\}$ y, por lo tanto, $x' = x$.

De manera similar, tenemos que $\{x', y'\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, así que $\{x', y'\}$ es igual a $\{x\}$ o a $\{x, y\}$. En el primer caso es $\{x', y'\} = \{x\}$, de manera que $x' = x$ e $y' = x$: esto implica que

$$\{x, y\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}\}$$

y, por lo tanto, que $\{x, y\} = \{x\}$ y, en definitiva, que $y = x$, contradiciendo nuestra hipótesis. La conclusión de esto es que necesariamente vale que $\{x', y'\} = \{x, y\}$.

En particular, tenemos que $y' \in \{x', y'\} = \{x, y\}$, así que $y' = x$ o $y' = y$. Si $y' = x$, entonces $y' = x'$, porque ya sabemos que $x = x'$, y

$$\{x, y\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x'\}\},$$

así que $\{x, y\} = \{x'\}$ y, en consecuencia, $x = y$: esto otra vez contradice nuestra hipótesis. Debe ser entonces $y' = y$.

En cualquiera de los dos casos tenemos que $x = x'$ e $y = y'$, y esto prueba lo que queremos.

2.1.5. Ejercicio. Hay varias formas alternativas de construir pares ordenados a partir de conjuntos. Pruebe que si para cada para de objetos x e y definimos

$$(x, y)_W \coloneqq \{\{\{x\}, \varnothing\}, \{\{y\}\}\}$$

vale que

$$(x, y)_W = (x', y')_W \iff x = x' \text{ e } y = y'.$$

Esto nos dice que esta es una definición alternativa para los pares ordenados en términos de conjuntos — esta es debida a Robert Wiener.

§2.2. Relaciones

2.2.1. Si A y B son dos conjuntos, una ***relación de A a B*** es simplemente un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Llamamos a A el ***dominio*** de la relación R y a B su ***codominio***. Si a y b son elementos de A y de B, respectivamente, entonces cuando el par ordenado (a, b) pertenece a R decimos que a ***está relacionado*** con b por R y escribimos

$$a \; R \; b.$$

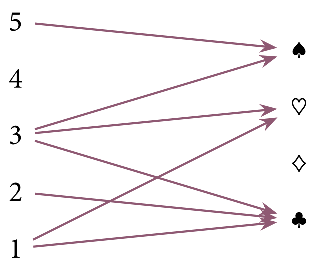
Si en cambio $(a, b) \notin R$, escribimos

$$a \not R\, b.$$

2.2.2. Consideremos un ejemplo sencillo. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$. El conjunto

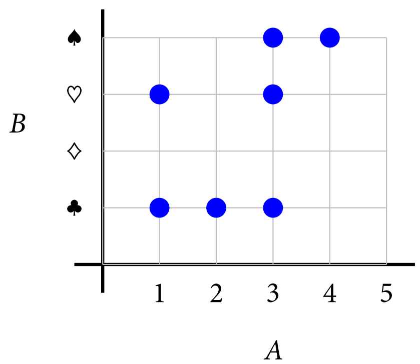
$$R = \{(1, \clubsuit),\ (1, \heartsuit),\ (2, \clubsuit),\ (3, \heartsuit),\ (3, \clubsuit),\ (3, \spadesuit),\ (4, \spadesuit)\}$$

es una relación de A a B. Una forma más eficiente de describir una relación como ésta, que va de un conjunto finito a otro, es dar un diagrama — al que llamamos el ***grafo*** de R — construido de la siguiente manera: ponemos a la izquierda del diagrama los elementos de A encolumnados, a la derecha los de B y conectamos un elemento a de A con uno b de B con una flecha si y solamente si el par ordenado (a, b) está en R. En el ejemplo anterior, si hacemos esto obtenemos el siguiente diagrama:



Observemos que en este dibujo bien puede haber elementos de A o de B que no estén conectados con ningún elemento del otro conjunto y elementos que estén conectados con más de uno.

También podemos usar para representar gráficamente nuestra relación R un diagrama — el ***gráfico*** de la relación — como

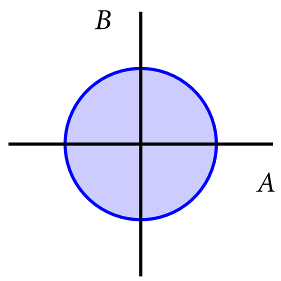


Aquí el eje horizontal y el vertical listan en algún orden y sin repeticiones los elementos de A y de B, respectivamente, y ponemos un punto por cada par ordenado de R de la manera evidente.

Esta última idea, a diferencia de la primera, puede usarse en ciertos casos para representar gráficamente relaciones entre conjuntos infinitos. Por ejemplo, si $A = B = \mathbb{R}$, entonces el conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

es una relación de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y podemos representarla gráficamente usando el dibujo



Aquí, como siempre, vemos a los puntos del plano como pares ordenados (x, y) con coordenadas $x \in A$ y $y \in B$, y pintamos los puntos que pertenecen a la relación.

2.2.3. Si A y B son conjuntos, siempre hay relaciones de A a B: esto es simplemente la observación de que el conjunto $\mathscr{P}(A \times B)$ de $A \times B$ no es vacío. Hay dos ejemplos extremos:

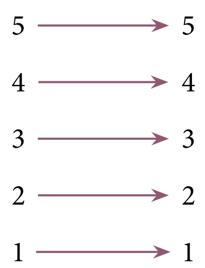
- la ***relación vacía*** de A a B es la relación $E = \varnothing \subseteq A \times B$, y
- la ***relación total*** de A a B es la relación $T = A \times B$.

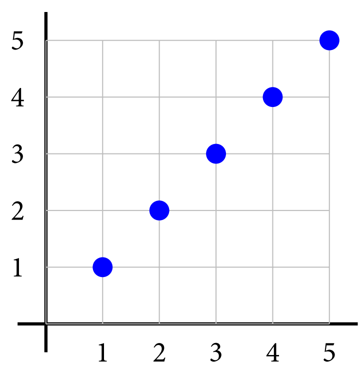
Es posible que la relación vacía de A a B y la relación total sean la misma relación: esto pasa exactamente cuando alguno de los conjuntos A o B es vacío.

2.2.4. Si A es un conjunto, llamamos a la relación

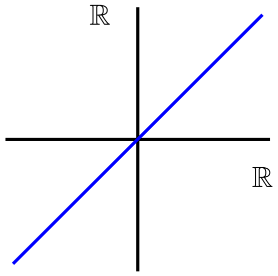
$$I_A = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}$$

de A a A la ***relación identidad*** de A. Si por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, el grafo y el gráfico de la relación I_A son, respectivamente,





En cambio, el gráfico de la relación identidad $I_{\mathbb{R}}$ del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es



§2.3. Operaciones entre relaciones

Composición de relaciones

2.3.1. Si A, B y C son conjuntos, y $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ son relaciones de A a B y de B a C, respectivamente, entonces podemos construir una nueva relación de A a C, la ***composición*** $S \circ R$ de S y R, poniendo

$$S \circ R \coloneqq \{(a, c) \in A \times C : \text{existe } b \in B \text{ tal que } a \mathrel{R} b \text{ y } b \mathrel{S} c\}.$$

Es importante observar que solamente consideramos esta construcción cuando el codominio de la relación R coincide con el dominio de la relación S.

2.3.2. Por ejemplo, si $A = \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit, \heartsuit\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{yellow}{\bullet}, \textcolor{teal}{\bullet}\}$ y tenemos las relaciones

$$R = \{(\heartsuit, 1), (\heartsuit, 4), (\heartsuit, 6), (\spadesuit, 3), (\spadesuit, 6), (\clubsuit, 1), (\clubsuit, 2), (\clubsuit, 4)\}$$

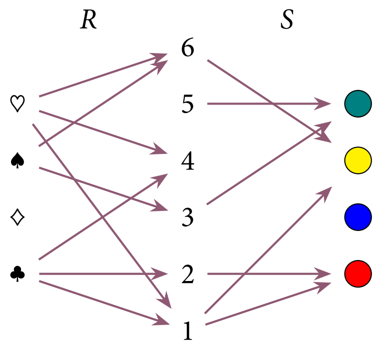
y

$$S = \{(1, \textcolor{red}{\bullet}), (1, \textcolor{yellow}{\bullet}), (2, \textcolor{red}{\bullet}), (3, \textcolor{teal}{\bullet}), (5, \textcolor{teal}{\bullet}), (6, \textcolor{yellow}{\bullet})\},$$

entonces la composición de S y R es la relación de A a C

$$S \circ R = \{(\clubsuit, \textcolor{red}{\bullet}), (\spadesuit, \textcolor{teal}{\bullet}), (\spadesuit, \textcolor{yellow}{\bullet}), (\heartsuit, \textcolor{red}{\bullet}), (\heartsuit, \textcolor{yellow}{\bullet})\}. \tag{4}$$

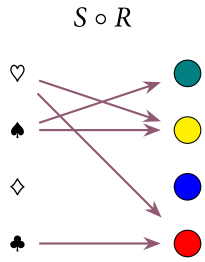
La forma más sencilla de verlo es construir el siguiente diagrama, que contiene simultáneamente el grafo de la relación R y el de la relación S:



(5)

Ahora bien, de acuerdo a la definición de la composición $S \circ R$, un elemento a de A está relacionado con uno c de C por la relación $S \circ R$ exactamente cuando hay un elemento b en B tal que $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$. Así, por ejemplo, el par ordenado $(\heartsuit, \textcolor{yellow}{\bullet})$ pertenece a $S \circ R$ porque existe un elemento en B — a saber, el 6 — tal que $(\heartsuit, 6) \in R$ y $(6, \textcolor{yellow}{\bullet}) \in S$: en términos del diagrama anterior, podemos decir que $\heartsuit$ está conectado con $\textcolor{yellow}{\bullet}$ en la relación $S \circ R$ porque se puede llegar del primero al segundo pasando por 6 a lo largo de las flechas. De la misma forma, como se puede llegar de $\clubsuit$ a $\textcolor{red}{\bullet}$ pasando por 1, el par $(\clubsuit, \textcolor{red}{\bullet})$ pertenece a $S \circ R$. Notemos que también es posible llegar de $\clubsuit$ a $\textcolor{red}{\bullet}$ pasando por 2, pero esto no es importante: es suficiente con que haya *alguna* forma de llegar de uno al otro para que el correspondiente par ordenado esté en $S \circ R$. Finalmente, el par ordenado $(\spadesuit, \textcolor{teal}{\bullet})$ no es un elemento de $S \circ R$, ya que no hay forma de ir de $\spadesuit$ a $\textcolor{teal}{\bullet}$ en el diagrama.

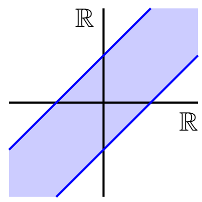
Considerando con cuidado todos los pares, fácilmente construimos el grafo de la relación $S \circ R$ a partir del diagrama (5), y obtenemos



La descripción de $S \circ R$ que dimos en (4) es simplemente una transcripción de esto.

2.3.3. Veamos otro ejemplo: sean los conjuntos A, B y C todos iguales a $\mathbb{R}$ y sea

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\},$$



que es una relación de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Si x e y son elementos de $\mathbb{R}$, entonces $x \ R \ y$ si y solamente si la distancia entre x e y es a lo sumo 1. Afirmamos que

$$R \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 2\}. \tag{6}$$

Llamemos por un momento T a la relación de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que aparece en el miembro derecho de esta igualdad y probemos que $R \circ R = T$ probando las dos inclusiones entre los conjuntos $R \circ R$ y T.

Supongamos primero que (x, y) es un elemento de $R \circ R$, de manera que, de acuerdo a la definición de la composición, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \ R \ z$ y $z \ R \ y$. Esto significa que $|x - z| \leq 1$ y que $|z - y| \leq 1$ y entonces, gracias a la desigualdad triangular, tenemos que

$$|x - y| = |(x - z) - (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \leq 1 + 1 = 2.$$

Esto muestra que $(x, y) \in T$ y, en definitiva, que $R \circ R \subseteq T$.

Recíprocamente, supongamos que (x, y) es un elemento de T, de manera que x, $y \in \mathbb{R}$ y $|x - y| \leq 2$. Si ponemos $z = (x + y)/2$, tenemos que

$$|x - z| = \left| x - \frac{x + y}{2} \right| = \left| \frac{x - y}{2} \right| = \frac{|x - y|}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$$

y, de manera similar, que

$$|z - y| \leq 1.$$

Esto nos dice que $x \ R \ z$ y que $z \ R \ y$ y, por lo tanto, que $(x, y) \in R \circ R$. Esto completa la prueba de nuestra afirmación (6).

2.3.4. La composición de relaciones es una operación asociativa:

Proposición. *Sean A, B, C y D conjuntos y $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ y $T \subseteq C \times D$ relaciones de A a B, de B a C y de C a D, respectivamente. Se tiene que*

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Demostración. Sean $a \in A$ y $d \in D$.

Supongamos primero que (a, d) es un elemento de $T \circ (S \circ R)$. Esto significa que existe $c \in C$ tal que $(a, c) \in S \circ R$ y $(c, d) \in T$. La primera de estas dos cosas significa, a su vez, que existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. Ahora bien, de que $(b, c) \in S$ y $(c, d) \in T$ podemos deducir que $(b, d) \in T \circ S$ y de esto y de que $(a, b) \in R$, que $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$. Concluimos de esta forma que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \subseteq R$.

Supongamos ahora que (a, d) es un elemento de $(T \circ S) \circ R$, de manera que existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, d) \in T \circ S$. Esto último nos dice que existe $c \in C$ tal que $(b, c) \in S$ y $(c, d) \in T$. Como $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$, sabemos que $(a, c) \in S \circ R$ y de esto y de que $(c, d) \in T$, que

$(a,d) \in T \circ (S \circ R)$. Esto prueba que $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ y, junto con la inclusión anterior, la igualdad que aparece en el enunciado. □

2.3.5. Las relaciones identidades se comportan como elementos neutros para la composición:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. Si $R \subseteq A \times B$ es una relación de A a B, entonces*

$$I_B \circ R = R = R \circ I_A.$$

Demostración. Mostremos la primera de las dos igualdades — la segunda puede probarse de exactamente la misma forma. Sean a y b elementos de A y de B, respectivamente, y supongamos primero que $(a,b) \in I_B \circ R$: esto significa que existe $b' \in B$ tal que $(b,b') \in I_B$ y $(a,b') \in R$. Pero si (b,b') está en I_B, entonces necesariamente $b' = b$ y, por lo tanto, tenemos que $(a,b) \in R$. Esto nos dice que $I_B \circ R \subseteq R$.

Recíprocamente, si (a,b) es un elemento de R, como además $(b,b) \in I_B$, tenemos que $(a,b) \in I_B \circ R$: vemos así que $R \subseteq I_B \circ R$, y esto prueba lo que queremos. □

Inversión de relaciones

2.3.6. Si A y B son dos conjuntos y R es una relación de A a B, la ***relación inversa*** de R es la relación de B a A

$$R^{-1} := \{(x,y) \in B \times A : y \mathrel{R} x\}.$$

Observemos que esto significa que si $x \in A$ e $y \in B$, entonces

$$y \mathrel{R^{-1}} x \iff x \mathrel{R} y.$$

El dominio y el codominio de la relación R^{-1} son, respectivamente, el codominio y el dominio de la relación de partida R.

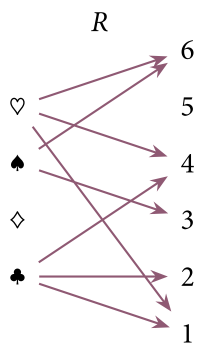
2.3.7. Por ejemplo, si $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6\}$, la relación inversa de

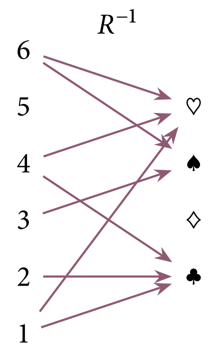
$$R = \{(\heartsuit,1),(\heartsuit,4),(\heartsuit,6),(\spadesuit,3),(\spadesuit,6),(\clubsuit,1),(\clubsuit,2),(\clubsuit,4)\}$$

es

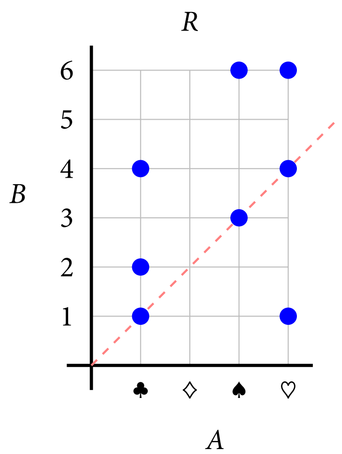
$$R^{-1} = \{(1,\heartsuit),(4,\heartsuit),(6,\heartsuit),(3,\spadesuit),(6,\spadesuit),(1,\clubsuit),(2,\clubsuit),(4,\clubsuit)\}.$$

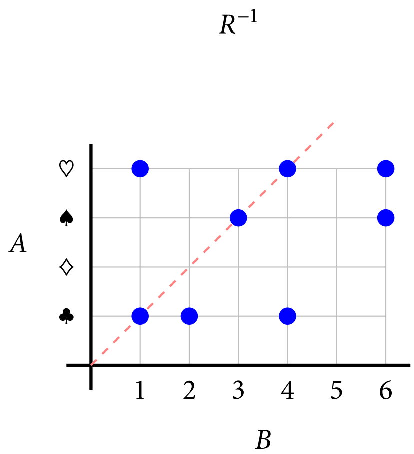
Los grafos de estas relaciones son





y sus gráficos son





Es claro que el grafo de R^{-1} se obtiene del de R dando vuelta la dirección de las flechas e intercambiando de lugar las dos columnas de elementos, mientras que el gráfico de R^{-1} se obtiene del de R reflejando el diagrama con respecto a la diagonal — la linea punteada roja.

2.3.8. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos. Si $R \subseteq A \times B$ es una relación de A a B y $S \subseteq B \times C$ una de B a C, entonces la relación inversa de la composición $S \circ R \subseteq A \times C$ es*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Demostración. Sea R una relación de A a B y S una de B a C. Sean $c \in C$ y $a \in A$.

Supongamos primero que (c, a) es un elemento de $(S \circ R)^{-1}$. Esto significa que $(a, c) \in S \circ R$ y, por lo tanto, que existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. Pero entonces tenemos que $(b, a) \in R^{-1}$ y $(c, b) \in S^{-1}$, así que $(c, a) \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Vemos así que $(S \circ R)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

Supongamos ahora que (c, a) es un elemento de $R^{-1} \circ S^{-1}$. Esto significa que existe $b \in B$ tal que

$(c, b) \in S^{-1}$ y $(b, a) \in R^{-1}$, es decir, tal que $(b, c) \in S$ y $(a, b) \in R$. Estas dos cosas implican entonces que $(a, c) \in S \circ R$, de manera que $(c, a) \in (S \circ R)^{-1}$, y esto prueba que $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$. □

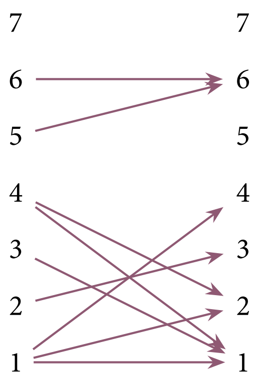
§2.4. Relaciones en un conjunto

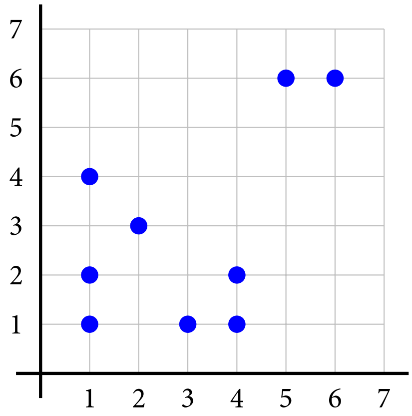
2.4.1. Si A es un conjunto y $R \subseteq A \times A$ es una relación de A a A, decimos que R es una ***relación en*** A. En esta situación A es tanto el dominio como el codominio de R.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la relación

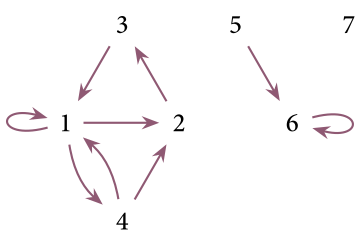
$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (1,4), (4,1), (4,2), (5,6), (6,6)\}$$

es una relación en A. Su grafo y su gráfico, respectivamente, son





En este caso, como el dominio y el codominio de R son ambos el mismo conjunto A, podemos dibujar el grafo poniendo una sola copia de cada elemento de A, de la siguiente manera:



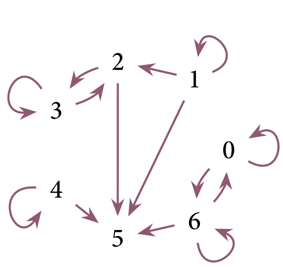
No hay ya necesidad de encolumnar los elementos de A y generalmente los ubicamos de la manera que haga que el diagrama sea lo más claro posible.

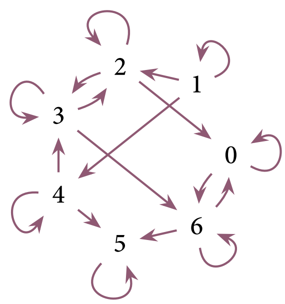
Casi siempre que hacemos un diagrama para una relación *en* un conjunto lo hacemos de esta forma. Observemos que es importante marcar la dirección de cada una de las flechas: bien puede ser que una relación tenga un par (x, y) pero no el par inverso (y, x), como en este ejemplo en el que $(1, 2)$ pertenece a R pero $(2, 1)$ no. De manera similar, la relación de nuestro ejemplo contiene el par $(1, 1)$ pero no el $(3, 3)$: marcamos en el diagrama la presencia del primero usando lo que llamamos un ***bucle***, una flecha que sale y llega al mismo lugar, como 1.

En el grafo de una relación R en un conjunto puede haber a lo sumo *dos* flechas entre dos elementos distintos x e y del su dominio: las que van en una y en otra dirección, correspondiendo a los pares (x, y) e (y, x) que, por supuesto, pueden o no pertenecer a la relación. Por otro lado, puede haber a lo sumo *una* flecha de un elemento x a sí mismo, correspondiendo a que el par ordenado (x, x) puede o no estar en R.

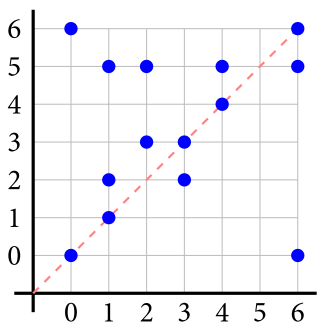
Relaciones reflexivas

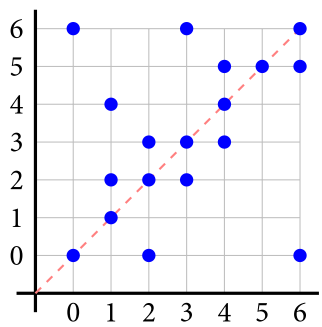
2.4.2. Una relación $R \subseteq A \times A$ en un conjunto A es ***reflexiva*** si para todo elemento a de A se tiene que $a\ R\ a$, es decir, que el par (a, a) pertenece a R. En términos del grafo de la relación R, esto significa que en cada uno de los puntos que representan a los elementos de A hay un bucle: así, de los siguientes dos grafos de relaciones en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$





sólo el de la derecha representa una que es reflexiva. En términos de los gráficos también es inmediato reconocer la reflexividad: por ejemplo, las dos relaciones que acabamos de considerar tienen gráficos





y que el segundo corresponda a una relación que es reflexiva mientras que el primero no se refleja en que todos los puntos que están sobre la diagonal roja están marcados en él, mientras que ése no es el caso en el primero.

2.4.3. La siguiente observación es inmediata:

Proposición. *Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación en A. La relación R es reflexiva si y solamente si contiene a la relación identidad I_A.*

Demostración. En efecto, esto es consecuencia directa de la definición de I_A. □

Relaciones simétricas

2.4.4. Una relación $R \subseteq A \times A$ en un conjunto A es ***simétrica*** si cada vez que a y b son elementos de A se tiene que

$$a\ R\ b \implies b\ R\ a.$$

En términos del grafo de la relación, esto significa que si a y b son dos elementos de A tales que hay una flecha que va de a a b en el grafo, entonces necesariamente hay también otra que va en la dirección contraria, esto es, de b a a.

2.4.5. Los siguientes grafos representan dos relaciones en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(7)

La primera no es simétrica: contiene la flecha que va de 4 a 3 pero no la que va de 3 a 4. En cambio, la segunda de estas relaciones es simétrica.

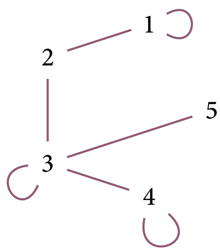
Cuando dibujamos el grafo de una relación simétrica cada flecha viene acompañada siempre de su flecha inversa. Para simplificar el dibujo podemos convenir en dibujar simplemente una linea entre dos elementos, sin dirección,

$$\bullet \longrule \bullet$$

en lugar del par de flechas mutuamente inversas

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Usando esta convención, podemos representar la relación del segundo diagrama de (7) con el dibujo más sencillo



Observemos que aquí también eliminamos la orientación de las flechas que forman bucles: claramente esa orientación no agrega información alguna.

2.4.6. Proposición. *Sea A un conjunto. Una relación $R \subseteq A \times A$ en A es simétrica si y solamente si es igual a su relación inversa, esto es, si y solamente si $R = R^{-1}$.*

Demostración. Sea R una relación en A y supongamos primero que R es simétrica: tenemos que mostrar que $R = R^{-1}$. Si (a, b) es un elemento de R, de manera que $a\ R\ b$, entonces la simetría de R nos dice que $b\ R\ a$, esto es, que $(b, a) \in R$: de acuerdo a la definición de R^{-1}, entonces, tenemos que $(a, b) \in R^{-1}$. Vemos así que $R \subseteq R^{-1}$, y un razonamiento exactamente análogo prueba que también $R^{-1} \subseteq R$, de manera que $R = R^{-1}$, como queremos.

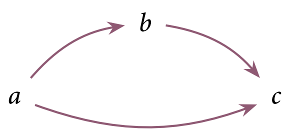
Supongamos ahora que $R = R^{-1}$ y probemos que R es necesariamente simétrica. Sean a y b dos elementos de R tales que $a\ R\ b$, esto es, tales que $(a, b) \in R$. Como $R = R^{-1}$ por nuestra hipótesis, esto nos dice que $(a, b) \in R^{-1}$ y, de acuerdo a la definición de la relación R^{-1}, que $(b, a) \in R$: la relación R es por lo tanto simétrica. $\square$

Relaciones transitivas

2.4.7. Una relación $R \subseteq A \times A$ en un conjunto A es ***transitiva*** si cada vez que a, b y c son elementos de A se tiene que

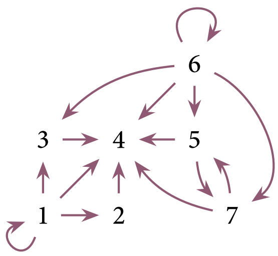
$$a\ R\ b \text{ y } b\ R\ c \implies a\ R\ c.$$

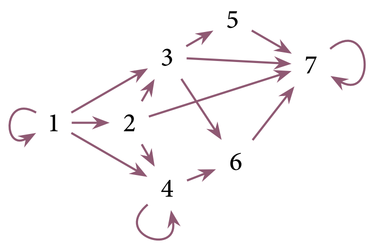
En términos del grafo de R, esto significa que si hay una flecha que va de a hasta b y otra que va de b hasta c, entonces tiene que haber también una flecha que va de a a c:



Así, la condición de transitividad es que si se puede llegar de un vértice a otro en dos pasos siguiendo las flechas, también se puede llegar en uno — en otras palabras, que siempre podemos tomar un "atajo".

2.4.8. Veamos algunos ejemplos. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la primera de las dos relaciones siguientes es transitiva, mientras que la segunda no lo es.





En efecto, en la segunda tenemos por ejemplo la flecha que va de 2 a 4 y la de 4 a 6, pero no la de 2 a 6.

2.4.9. Proposición. *Sea A un conjunto. Una relación $R \subseteq A \times A$ en A es transitiva si y solamente si $R \circ R \subseteq R$.*

Demostración. Sea $R \subseteq A \times A$ una relación en el conjunto A.

Supongamos primero que R es transitiva y sea (a, c) un elemento de $R \circ R$, de manera que existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$. Como R es transitiva, de esto se deduce que $(a, c) \in R$: vemos así que $R \circ R \subseteq R$.

Recíprocamente, supongamos que $R \circ R \subseteq R$ y veamos que R es una relación transitiva. Supongamos que a, b y c son tres elementos de A tales que $a \; R \; b$ y $b \; R \; c$. Se tiene entonces que los pares ordenados (a, b) y (b, c) están en R, así que el par (a, c) está en $R \circ R$. Ahora bien, estamos suponiendo que $R \circ R \subseteq R$, así que esto último implica que $(a, c) \in R$, es decir, que $a \; R \; c$. Concluimos de esta manera que R es transitiva, como queremos. $\square$

§2.5. Relaciones de equivalencia

2.5.1. Una relación R en un conjunto A es una ***relación de equivalencia*** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

2.5.2. Veamos algunos ejemplos de relaciones de equivalencia:

(a) La relación identidad I_A y la relación total $A \times A$ en un conjunto A son relaciones de equivalencia.

(b) Si $A = \{1\}$ tiene un único elemento, entonces hay dos relaciones en A — la vacía y la identidad — y la segunda de ellas es la única de las dos que es de equivalencia.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

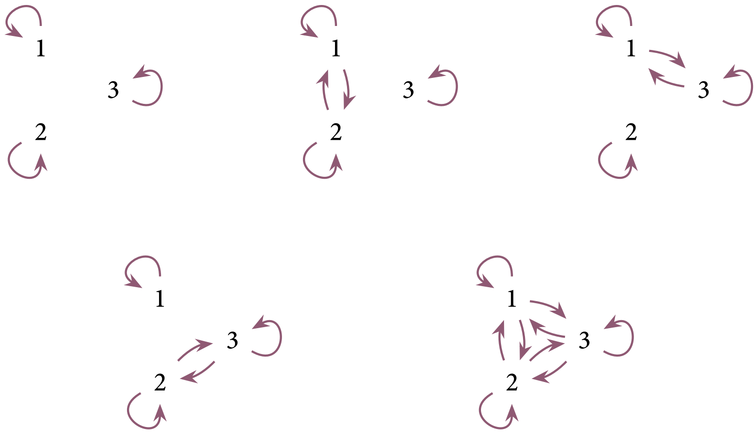
Si $A = \{1, 2\}$ tiene dos elementos, entonces sabemos que $A \times A$ tiene 4 elementos y, por lo tanto, que el conjunto de partes $\mathscr{P}(A \times A)$ tiene $2^4 = 16$: esto nos dice que hay 16 relaciones sobre el conjunto A. De todas ellas, hay exactamente *dos* que son relaciones de equivalencia: la relación identidad y la relación total. En efecto, supongamos que R es una relación de equivalencia sobre A. Como es reflexiva, sabemos que los pares $(1, 1)$ y $(2, 2)$ están en R. Por otro lado, puede ser que $(1, 2)$ esté o no en R. En el primer caso, como R es simétrica también está en ella el par $(2, 1)$ y vemos que están todos los pares: la relación es, por lo tanto, la relación total

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[rr, bend left] & & 2 \arrow[ll, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Si en cambio el par $(1, 2)$ no está en R, entonces el par $(2, 1)$ tampoco — ya que la relación es simétrica — y, por lo tanto, la relación es la relación identidad de A,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] & & 2 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Razonando de la misma forma, es fácil ver que sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ hay cinco relaciones de equivalencia:



En general, si un conjunto A es finito y tiene n elementos, llamamos n-ésimo ***número de Bell*** a la cantidad de relaciones de equivalencia que hay en A y lo escribimos B_n. El nombre recuerda a Eric Temple Bell, matemático y autor de ciencia ficción. Los primeros números de Bell son

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 975	678 570

Por supuesto, para contar las 115 975 relaciones de equivalencia que hay sobre un conjunto de 10 elementos se requiere una estrategia más eficiente que la que usamos arriba! En [OEI2023, A000110] puede encontrarse mucha información sobre esa secuencia de números.

(c) La relación $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x \; R \; y \iff |x| = |y|.$$

(d) La relación $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en el conjunto $\mathbb{R}$ tal que cada vez que x e y son elementos de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$x \; R \; y \iff x^2 - 2x + 2 = y^2 - 2y + 2.$$

(e) La relación $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ dada por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y - x \text{ es par}\}.$$

Más generalmente, si $m \in \mathbb{N}$ tenemos una relación de equivalencia $R_m \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ dada por

$$R_m = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \text{ divide a } y - x\}.$$

Probemos que esto es, en efecto, una relación de equivalencia.

- Si x es un elemento de $\mathbb{Z}$, entonces $x - x = 0 \cdot m$, así que m divide a $x - x$ y, por lo tanto, tenemos que $x \; R_m \; x$. Vemos así que la relación R_m es reflexiva.
- Supongamos que x e y son elementos de $\mathbb{Z}$ tales que $x \; R_m \; y$, es decir, tales que m divide a $y - x$. Esto significa que existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $y - x = u \cdot m$. Por supuesto, tenemos entonces que $x - y = (-u) \cdot m$, así que m divide a la diferencia $x - y$ y, por lo tanto, $y \; R_m \; y$: vemos así que la relación R_m es simétrica.
- Finalmente, supongamos que x, y y z son elementos de $\mathbb{Z}$ tales que $x \; R_m \; y$ e $y \; R_m \; z$, de manera que m divide a $y - x$ y a $z - y$. Esto significa que existen enteros $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $y - x = u \cdot m$ e $z - y = v \cdot m$: usando esto, vemos que

  $$z - x = (z - y) + (y - x) = v \cdot m + u \cdot m = (v + u) \cdot m,$$

  así que m también divide a la diferencia $z - x$ y, por lo tanto, es $x \; R_m \; z$. Concluimos de esta forma que R_m es una relación transitiva.

Cuando x e y son dos enteros y se tiene que $x \; R_m \; y$, decimos que x e y son ***congruentes módulo*** m y normalmente escribimos

$$x \equiv y \mod m$$

en lugar de $x \; R_m \; y$. Esta relación de equivalencia es de extraordinaria importancia en teoría de los números enteros. Fue considerada de manera sistemática por primera vez por Carl Friedrich Gauss en su libro *Disquisitiones Arithmeticæ* — escrito en 1798, cuando tenía 21 años, y publicado 1801 — que es la fundación de la teoría moderna de números. La definición de la relación de congruencia ocupa, de hecho, la primera linea de ese texto — véase la Figura 2.1 en la página siguiente.

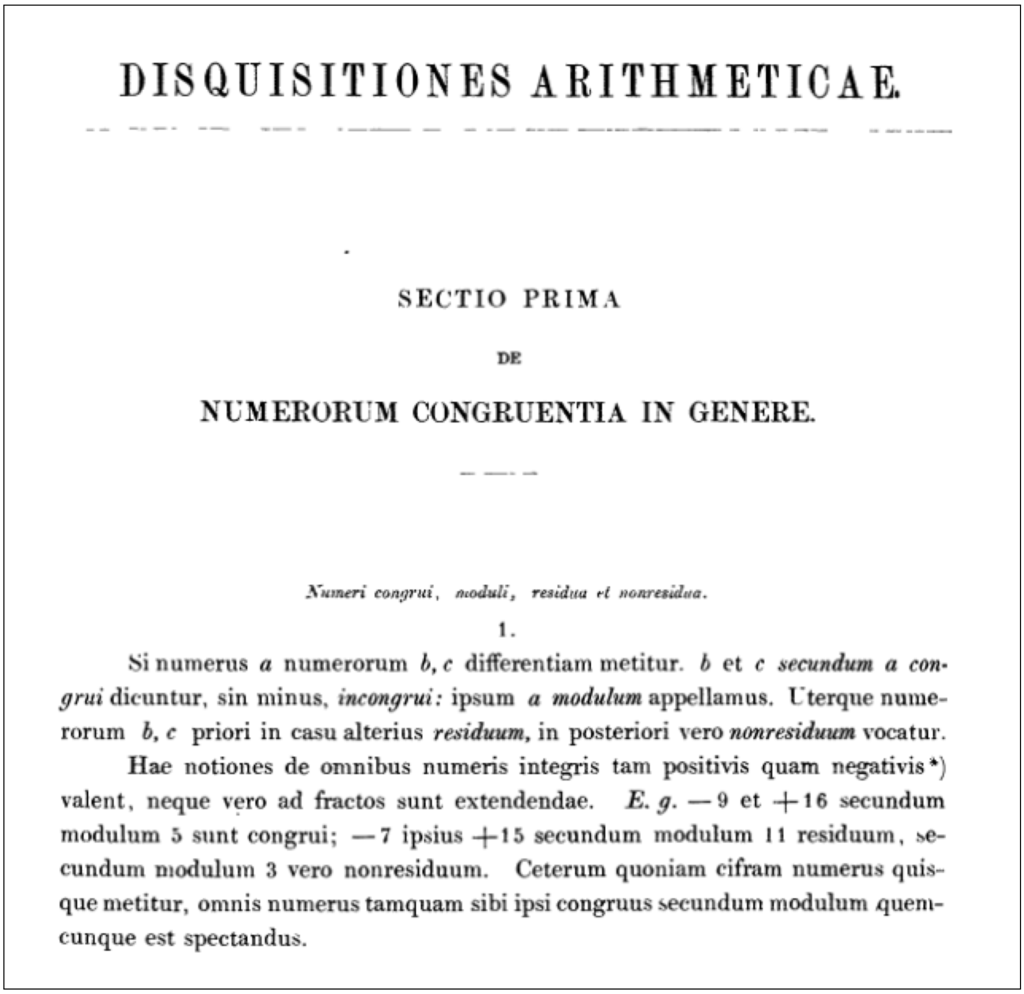
Clases de equivalencia

2.5.3. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia sobre A. Si x es un elemento de A, entonces la ***clase de equivalencia*** de x en A con respecto a la relación R es el conjunto

$$[x] \coloneqq \{y \in A : x \; R \; y\}.$$

En otras palabras, la clase de equivalencia de x es el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados por R con x. Llamamos ***conjunto cociente*** de A por R, y escribimos A/R, al conjunto de las clases de equivalencia de R en A:

$$A/R \coloneqq \{[x] : x \in A\}.$$



DISQUISITIONES ARITHMETICAE.

SECTIO PRIMA

DE

NUMERORUM CONGRUENTIA IN GENERE.

Numeri congrui, moduli, residua et nonresidua.

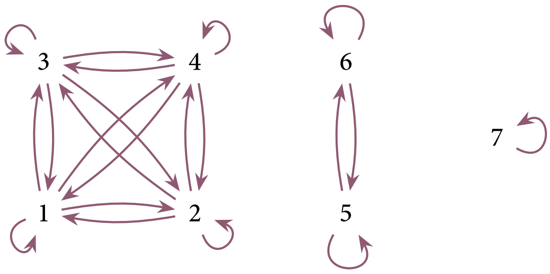
1.

Si numerus a numerorum b, c differentiam metitur, b et c ***secundum a congrui*** dicuntur, sin minus, ***incongrui:*** ipsum a ***modulum*** appellamus. Uterque numerorum b, c priori in casu alterius ***residuum,*** in posteriori vero ***nonresiduum*** vocatur.

Hae notiones de omnibus numeris integris tam positivis quam negativis *) valent, neque vero ad fractos sunt extendendae. *E. g.* -9 et $+16$ secundum modulum 5 sunt congrui; -7 ipsius $+15$ secundum modulum 11 residuum, secundum modulum 3 vero nonresiduum. Ceterum quoniam cifram numerus quisque metitur, omnis numerus tamquam sibi ipsi congruus secundum modulum quemcunque est spectandus.

Figura 2.1. El primer párrafo de las *Disquisitiones Arithmeticæ* de Carl Friedrich Gauss, con la definición de la relación de congruencia. «Si un numero a divide la diferencia de números b y c, b y c se dicen congruentes y si no incongruentes. Llamamos a a el módulo y a cada uno de los números b y c residuos del otro en el primer caso y no residuos en el segundo. [...] Por ejemplo, -9 y 16 son congruentes módulo 5; -7 es residuo de 15 módulo 11 y no residuo módulo 3. Como 0 es divisible por todos los enteros, se sigue que podemos considerar a todo número congruente consigo mismo con respecto a un módulo cualquiera.»

Así, por ejemplo, si A es el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ y la relación R es la que tiene grafo



que es ciertamente una relación de equivalencia en A, entonces las clases de equivalencia de los elementos de A son

$$[1] = \{1,2,3,4\}, \qquad [2] = \{1,2,3,4\}, \qquad [3] = \{1,2,3,4\}, \qquad [4] = \{1,2,3,4\},$$
$$[5] = \{5,6\}, \qquad [6] = \{5,6\}, \qquad [7] = \{7\}.$$

En este ejemplo, entonces, las clases de equivalencia de la relación R son tres, a saber:

$$\{1,2,3,4\}, \qquad \{5,6\}, \qquad \{7\}.$$

El conjunto cociente de A por R es, por lo tanto,

$$A/R = \big\{\{1,2,3,4\}, \{5,6\}, \{7\}\big\}.$$

2.5.4. La siguiente es la observación más importante que podemos hacer sobre las clases de equivalencia de una relación de equivalencia:

Proposición. *Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A. Si x e y son elementos de A tales que $x \in [y]$, entonces $[x] = [y]$.*

Demostración. Sean x e y elementos de A tales que $x \in [y]$, es decir, tales que

$$y \mathrel{R} x. \tag{8}$$

Queremos probar que $[x] = [y]$ y para ello probamos, como es usual, las inclusiones mutuas de los dos conjuntos $[x]$ e $[y]$. Supongamos entonces primero que u es un elemento de $[x]$, de manera que $x \mathrel{R} u$. Como la relación R es transitiva, de esto y de la hipótesis (8) tenemos que $y \mathrel{R} u$, esto es, que $u \in [y]$: esto muestra que $[x] \subseteq [y]$.

Recíprocamente, supongamos que u es un elemento de $[y]$, de manera que $y \mathrel{R} u$ y, como R es simétrica, que $u \mathrel{R} y$. De esto y de la hipótesis (8) tenemos que $u \mathrel{R} x$ y, otra vez por la simetría, que $x \mathrel{R} u$, es decir, que $u \in [x]$. Esto muestra que $[y] \subseteq [x]$ y completa la prueba de la proposición. □

2.5.5. Vamos cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia que listamos en 2.5.2.

(a) Sea A un conjunto y sea $R = I_A$ la relación identidad de A. Si $x \in A$, entonces la clase de equivalencia $[x]$ es el conjunto $\{x\}$. En efecto, si $y \in A$ es tal que $x\ R\ y$, entonces se sigue inmediatamente de la definición de la relación que necesariamente $y = x$: esto muestra que $[x] \subseteq \{x\}$. Por otro lado, como $x\ R\ x$ porque R es reflexiva, tenemos que $x \in [x]$ y, en consecuencia, que $\{x\} \subseteq [x]$. Vemos así que $[x] = \{x\}$, como dijimos. En este ejemplo, entonces, hay tantas clases de equivalencia como elementos hay en A y el conjunto cociente es

$$A/R = \big\{\{x\} : x \in A\big\}.$$

(b) Sea A un conjunto y consideremos ahora la relación total $R = A \times A$ en A. En este caso, cualquiera sea el elemento x en A la clase de equivalencia de x es $[x] = A$ y, por lo tanto, hay exactamente una clase de equivalencia, todos los elementos de A tienen la misma clase de equivalencia y el conjunto cociente es

$$A/R = \{A\}.$$

(c) Sea $A = \mathbb{Z}$ y sea $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación de equivalencia tal que si x e y están en $\mathbb{Z}$ entonces

$$x\ R\ y \iff |x| = |y|.$$

Sea $x \in \mathbb{Z}$. Un entero $y \in \mathbb{Z}$ pertenece a $[x]$ si $x\ R\ y$, es decir, si $|x| = |y|$, y esto ocurre exactamente cuando o $y = x$ o $y = -x$. Vemos así que la clase de equivalencia de x es $[x] = \{x, -x\}$. Esta clase tiene dos elementos, x y $-x$, cuando x es distinto de 0, y uno solo en caso contrario.

En este ejemplo dos elementos de $\mathbb{Z}$ tienen la misma clase de equivalencia si y solamente si son o iguales u opuestos. La clase de equivalencia de 0 tiene un único elemento, ya que $[0] = \{0\}$, mientras que todas las otras clases de equivalencia tienen exactamente dos. El conjunto cociente es

$$A/R = \{[x] : x \in \mathbb{N}_0\}.$$

(d) Sea ahora $A = \mathbb{R}$ y $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ tal que si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$, entonces

$$x\ R\ y \iff x^2 - 2x + 2 = y^2 - 2x + 2.$$

Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y encontremos la clase de equivalencia $[x]$ de x con respecto a R. Un número $y \in \mathbb{R}$ pertenece a $[x]$ si y solamente si $x\ R\ y$, es decir, si y solamente si

$$x^2 - 2x + 2 = y^2 - 2x + 2.$$

Observemos que podemos reescribir esta igualdad en la forma

$$(x-1)^2+1=(y-1)^2+1,$$

y entonces es claro que esa igualdad se cumple si y solamente si $y-1$ es igual a $x-1$ o a $-(x-1)$, es decir, si y es igual a x o a $2-x$. Vemos así que

$$[x]=\{x,2-x\}.$$

Si $x\neq 1$, entonces $x\neq 2-x$ y la clase de equivalencia $[x]$ tiene exactamente dos elementos; si en cambio es $x=1$, entonces $x=1=2-x$ y $[x]$ tiene un único elemento. Afirmamos que el conjunto cociente es, en este ejemplo,

$$A/R=\{[x]:x\in\mathbb{R},\ x\geq 1\}. \tag{9}$$

En efecto, sea $y\in\mathbb{R}$. Si $y\geq 1$, entonces claramente la clase $[y]$ es uno de los elementos del conjunto que aparece a la derecha en (9). Si en cambio $y<1$, entonces $2-y>1$ y $[y]=\{y,2-y\}=[2-y]$, así que $[y]$ también es uno de los elementos de ese conjunto.

(*e*) Sea $A=\mathbb{Z}$ y $R\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la relación tal que si x e y son elementos de $\mathbb{Z}$ entonces

$$x\ R\ y \iff y-x \text{ es par}.$$

Fijemos un entero $x\in\mathbb{Z}$. Si $y\in[x]$, entonces $y-x$ es par, es decir, existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $y-x=2k$ y, por lo tanto, $y=x+2k$. Vemos así que $[x]\subseteq\{x+2k:k\in\mathbb{Z}\}$ y vale, de hecho, la igualdad. En efecto, si y es un entero de la forma $x+2k$ para algún $k\in\mathbb{Z}$, entonces la diferencia $y-x=2k$ es un número par y, en consecuencia, $x\ R\ y$, de manera que $y\in[x]$.

Concluimos de esta forma que para cada $x\in\mathbb{Z}$ la clase de equivalencia de x con respecto a R es

$$[x]=\{x+2k:k\in\mathbb{Z}\}.$$

Afirmamos que el conjunto cociente en este caso es

$$A/R=\{[0],[1]\}$$

y que éste tiene dos elementos distintos. Para verlo, tenemos que mostrar, por un lado, que toda clase de equivalencia de la relación R es igual o a $[0]$ o a $[1]$ y, por otro, que $[0]\neq[1]$.

Sea $y\in\mathbb{Z}$ un entero. Si y es par, entonces por supuesto la diferencia $y-0$ es par, de manera que $0\ R\ y$ y, por lo tanto, $y\in[0]$: esto implica, como sabemos, que $[y]=[0]$. Si en cambio y es impar, entonces la diferencia $y-1$ es par y ahora tenemos que $y\in[1]$ y que $[y]=[1]$. Esto prueba la primera de las dos cosas que queremos. Para ver la segunda basta observar que como la diferencia $1-0$ no es par, entonces $0\not R\ 1$ y, por lo tanto $1\notin[0]$: como $1\in[1]$, es claro que esto muestra que las clases $[0]$ y $[1]$ son distintas.

2.5.6. Proposición. *Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A.*

(i) *Toda clase de equivalencia de R es no vacía.*

(ii) *Todo elemento de A pertenece a alguna una clase de equivalencia de R.*

(iii) *Dos clases de equivalencia de R son o bien disjuntas o bien iguales.*

Observemos que de (ii) y (iii) se deduce que, de hecho, todo elemento de A pertenece a *exactamente* una clase de equivalencia de R.

Demostración. (i) Si c es una clase de equivalencia de R, entonces existe $x \in A$ tal que $c = [x]$ y, por lo tanto, $x \in c$: en efecto, la relación R es reflexiva, así que $x \; R \; x$ y, en consecuencia, $x \in [x]$.

(ii) Si x es un elemento de A, entonces $[x]$ es una clase de equivalencia de R que contiene a x.

(iii) Sean c y d dos clases de equivalencia de la relación R, de manera que existen elementos x e y de A tales que $c = [x]$ y $d = [y]$, y supongamos que c y d no son conjuntos disjuntos. Existe entonces $z \in c \cap d = [x] \cap [y]$ y, en particular, $z \in [x]$ y $z \in [y]$. De acuerdo a la Proposición 2.5.4, esto implica que $[z] = [x]$ y que $[z] = [y]$, así que, por supuesto, tenemos que $[x] = [y]$. □

Ejemplos

2.5.7. Ejemplo. En el conjunto $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consideremos la relación

$$R \coloneqq \{((x, y), (x', y')) \in A \times A : x + y' = x' + y\}.$$

Mostremos que se trata de una relación de equivalencia.

- Si (x, y) es un elemento de A, entonces claramente es $x + y = x + y$, así que $(x, y) \; R \; (x, y)$. Esto nos dice que la relación R es reflexiva.
- Sean (x, y) y (x', y') dos elementos de A y supongamos que $(x, y) \; (\; x', y')$, de manera que $x + y' = x' + y$. Esto implica, por supuesto, que también $x' + y = x + y'$ y, por lo tanto, vale que $(x', y') \; R \; (x, y)$. Vemos así que la relación R es simétrica.
- Sean (x, y), (x', y') y (x'', y'') tres elementos de A y supongamos que $(x, y) \; R \; (x', y')$ y que $(x', y') \; R \; (x'', y'')$, de manera que es $x + y' = x' + y$ y $x' + y'' = x'' + y'$. De esto se sigue que

  $$x + y'' + x' + y' = x' + y'' + x' + y = x'' + y + x' + y'$$

  así que $x + y'' = x'' + y$ y $(x, y) \; R \; (x'', y'')$. La relación R es, por lo tanto, transitiva.

Afirmamos que el conjunto cociente A/R tiene como elementos a las siguientes clases de equivalencia

$$[(1,1)], \quad [(2,1)], \quad [(3,1)], \quad [(4,1)], \quad \ldots, \quad [(1,2)], \quad [(1,3)], \quad [(1,4)], \quad \ldots \tag{10}$$

y que, más aún, estas clases de equivalencia son distintas dos a dos — notemos que estas son las clases de los elementos de A que tienen al menos una componente igual a 1. Esto nos dice que toda clase de equivalencia de R en A coincide con una y una sola de las clases de estos elementos.

- Sea (x, y) un elemento cualquiera de A. Sabemos que o bien $x \leq y$, o bien $x > y$. Consideremos separadamente estas dos posibilidades.
  - Si $x \leq y$, entonces el número $z \coloneqq y - x$ pertenece a $\mathbb{N}_0$, así que $(1, z+1)$ es un elemento de A y, como $x + z + 1 = x + y - x + 1 = y + 1$, tenemos que $(x, y)\ R\ (1, z+1)$ y, por lo tanto, que la clase de equivalencia de (x, y) coincide con la de $(1, z+1)$, que es una de las de (10).
  - Si $x > y$, entonces $z \coloneqq x - y$ es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $x + 1 = x - y + y + 1 = z + 1 + y$, así que $(x, y)\ R\ (z+1, 1)$ y la clase de equivalencia de (x, y) coincide con la de $(z+1, 1)$, que es una de las listadas en (10).

  Vemos así que en cualquier caso la clase de (x, y) coincide con alguna de las clases listadas en (10). Esto prueba, claro, que todas las clases de equivalencia de la relación R están en esa lista.

- Para ver que las clases listadas en (10) son distintas dos a dos es suficiente que mostremos que si (x, y) y (x', y') son dos elementos de A tales que *(i)* alguno de x e y es igual a 1, y *(ii)* alguno de x' e y' es igual a 1, entonces $[(x, y)] = [(x', y')]$ solamente si $(x, y) = (x', y')$.

  Sean para ello (x, y) y (x', y') dos elementos que satisfacen esas condiciones y supongamos que $[(x, y)] = [(x', y')]$, de manera que $(x, y)\ R\ (x', y')$, esto es, $x + y' = x' + y$.
  - Si $x = 1$ y $x' = 1$, esto nos dice que $y' = y$, así que $(x, y) = (x', y')$.
  - Si $y = 1$ y $x' = 1$, esto implica que $x + y' = 2$ y, como x e y' pertenecen a $\mathbb{N}$, que también $x = 1$ e $y' = 1$. Tenemos entonces que $(x, y) = (1, 1) = (x', y')$.
  - Si $x = 1$ e $y' = 1$, entonces $2 = x' + y$ y, como antes, tenemos que $x' = 1$, que $y = 1$ y, por lo tanto, que $(x, y) = (1, 1) = (x', y')$.
  - Finalmente, si $y = 1$ e $y' = 1$, tenemos que $x = x'$, así que $(x, y) = (x', y')$.

  Así, en cualquier caso tenemos que $(x, y) = (x', y')$, y esto prueba lo que queremos.

2.5.8. Ejemplo. Sea ahora A el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, y consideremos sobre A la relación $R \subseteq A \times A$ tal que siempre que (x, y) y (x', y') son elementos de A se tiene que

$$(x, y)\ R\ (x', y') \iff xy' = x'y.$$

Mostremos que se trata de una relación de equivalencia en A.

- Si (x, y) es un elemento de A, entonces ciertamente vale que $xy = xy$, así que $(x, y)\ R\ (x, y)$.

Esto nos dice que la relación R es reflexiva.

- Sean (x, y) y (x', y') dos elementos de A y supongamos que $(x, y)\ R\ (x', y')$, de manera que $xy' = x'y$. Por supuesto, esto implica que $x'y = xy'$ y, por lo tanto, que $(x', y') = (x, y)$. Vemos así que la relación R es simétrica.
- Sean finalmente (x, y), (x', y') y (x'', y'') tres elementos de A tales que $(x, y)\ R\ (x', y')$ y $(x', y')\ R\ (x'', y'')$. Esto nos dice que $xy' = x'y$ y que $x'y'' = x''y'$, así que

  $$xy''y'x' = x'yy''x' = x''yy'x'$$

  y, como $y'x' \neq 0$, esto implica que $xy'' = x''y$, esto es, que $(x, y)\ R\ (x'', y'')$. Podemos concluir con esto que la relación R es transitiva.

2.5.9. Ejemplo. Sea X un conjunto finito y consideremos el conjunto $A \coloneqq \mathscr{P}(X)$ de sus partes. Por supuesto, todos los subconjuntos de X son finitos, así que para cada elemento U de A podemos hablar del cardinal $|U|$ de U, que es un elemento de $\mathbb{N}_0$.

Consideremos en A la relación

$$R \coloneqq \{(U, V) \in A \times A : |U \vartriangle V| \text{ es par}\}.$$

Notemos que esto tiene sentido: en efecto, si U y V son elementos de A, entonces se trata de subconjuntos de X, así que su diferencia simétrica $U \vartriangle V$ también es un subconjunto de A y tiene, en consecuencia, cardinal $|U \vartriangle V|$ finito, que puede ser o no un elemento par de $\mathbb{N}_0$.

Queremos probar que R es una relación de equivalencia.

- Sea U un elemento de A, esto es, un subconjunto de X. La diferencia simétrica $U \vartriangle U$ es vacía, así que su cardinal es $|U \vartriangle U| = 0$, que es un número par. Esto nos dice que $U\ R\ U$ y, en definitiva, que la relación R es reflexiva.
- Sean ahora U y V dos elementos de A y supongamos que $U\ R\ V$, de manera que el conjunto $U \vartriangle V$ tiene un número par de elementos. Como $V \vartriangle U = U \vartriangle V$, es claro entonces que $V \vartriangle U$ tiene un número par de elementos y, en consecuencia, que $V \vartriangle RU$. Vemos así que la relación R es simétrica.
- Finalmente, sean U, V y W tres elementos de A y supongamos que $U\ R\ V$ y $V\ R\ W$, de manera que los cada uno de los conjuntos $U \vartriangle V$ y $V \vartriangle W$ tiene un número par de elementos. Sabemos del Ejercicio 1.6.1 que

  $$U \vartriangle W = (U \vartriangle V) \vartriangle (V \vartriangle W)$$

  Como $U \vartriangle V$ y $V \vartriangle W$ tienen cada un número par de elementos, esta igualdad junto con la siguiente observación implican que $U \vartriangle W$ también tiene un número par de elementos, de manera que $U \; R \; W$.

> *si G y H son dos conjuntos finitos y cada uno de ellos tiene un número par de elementos, entonces $G \triangle H$ también tiene un número par de elementos.*

Para terminar, entonces, tenemos que probar esta observación.

Consideremos para ello dos conjuntos finitos G y H y supongamos que cada uno de ellos tiene un número par de elementos. Sabemos que $G = (G - H) \cup (G \cap H)$ y que $(G - H) \cap (G \cap H) = \varnothing$, así que

$$|G| = |G - H| + |G \cap H|. \tag{11}$$

De manera similar, es $H = (H - G) \cup (G \cap H)$ y $(H - H) \cap (G \cap H) = \varnothing$, así que

$$|H| = |H - G| + |G \cap H|. \tag{12}$$

Por otro lado, como $G \triangle H = (G - H) \cup (H - G)$ y $(G - H) \cap (H - G) = \varnothing$, también tenemos que

$$|G \triangle G| = |G - H| + |H - G|. \tag{13}$$

El número $|G \cap H|$ puede ser par o no.

- Si es par, como $|G|$ y $|H|$ también son pares, de las igualdades (11) y (12) podemos deducir que los cardinales $|G - H|$ y $|H - G|$ también son pares, y usando eso y la igualdad (13) que el cardinal de $G \triangle H$ es par.
- Si en cambio $|G \cap H|$ es impar, las igualdades (11) y (12) implican que $|G - H|$ y $|H - H|$ son números impares y, a su vez, la igualdad (13) que el cardinal de $G \triangle H$ es par.

En cualquiera de los dos casos, por lo tanto, el conjunto $G \triangle H$ tiene cardinal par, como queremos.

Particiones

2.5.10. Si A es un conjunto, una ***partición*** de A es un conjunto $\mathscr{F}$ contenido en $\mathscr{P}(A)$ — de manera que los elementos de $\mathscr{F}$ son subconjuntos de A — que satisface las siguientes tres condiciones:

- $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
- todo elemento de A pertenece a algún elemento de $\mathscr{F}$;
- dos elementos de $\mathscr{F}$ son o bien iguales o disjuntos.

Llamamos a los elementos de $\mathscr{F}$ las ***partes*** de la partición.

2.5.11. Por ejemplo, el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tiene a

$$\mathscr{F}_1 = \{\{1,2,5\}, \{4,6\}, \{3\}\},$$
$$\mathscr{F}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

y a

$$\mathscr{F}_3 = \{\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

como particiones, entre otras. En cambio, ni

$$\mathscr{F}_4 = \{\{1,2\}, \{4,6\}, \{3\}\}$$

ni

$$\mathscr{F}_5 = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4,5,6\}\}$$

son particiones de A.

2.5.12. El conjunto vacío $\varnothing$ tiene exactamente una partición, la partición vacía $\varnothing$. Mostremos esto.

- Primero, supongamos que $\mathscr{F}$ es una partición de $\varnothing$. Todo elemento de $\mathscr{F}$ es un subconjunto de $\varnothing$, así que es vacío y, al mismo tiempo, como $\mathscr{F}$ es una partición no tiene elementos vacíos: esto nos dice que $\mathscr{F}$ no tiene ningún elemento, esto es, $\mathscr{F} = \varnothing$.
- Por otro lado, la familia vacía $\mathscr{F} = \varnothing$ es ciertamente una partición de $\varnothing$: no contiene a $\varnothing$, todo elemento de $\varnothing$ pertenece a algún elemento de $\varnothing$, y dos elementos cualesquiera de $\varnothing$ son o iguales o vacíos — todo esto por razones triviales.

2.5.13. La razón que hace que nos interesen las particiones de conjuntos es que están estrechamente relacionadas con las relaciones de equivalencia. En primer lugar, podemos obtener una partición de un conjunto a partir de una relación de equivalencia:

Proposición. *Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia en A. El conjunto cociente A/R es una partición de A.*

Demostración. En efecto, que las tres condiciones de la definición 2.5.10 se cumplen es precisamente lo que afirma la Proposición 2.5.6. □

2.5.14. Recíprocamente, si tenemos una partición en un conjunto, podemos construir de manera natural una relación de equivalencia:

Proposición. *Sea A un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una partición de A. La relación $R \subseteq A \times A$ tal que si x e y son elementos de A entonces*

$$x \mathrel{R} y \iff \text{existe una parte } P \in \mathscr{F} \text{ tal que } x \in P \text{ e } y \in P$$

es una relación de equivalencia en A y su conjunto cociente es $A/R = \mathscr{F}$.

Demostración. Mostremos primero que la relación R definida en el enunciado de esta proposición es una relación de equivalencia.

- Si x es un elemento de A, entonces como $\mathscr{F}$ es una partición, existe una parte $P \in \mathscr{F}$ tal que $x \in P$ y, por lo tanto, $x \mathrel{R} x$.
- Sean x e y dos elementos de A tales que $x \mathrel{R} y$, de manera que existe una parte $P \in \mathscr{F}$ tal que $x \in P$ e $y \in P$. Por supuesto, tenemos entonces que $y \in P$ y $x \in P$, así que $y \mathrel{R} x$.
- Finalmente, sean x, y y z elementos de A tales que $x \mathrel{R} y$ e $y \mathrel{R} z$. Existen entonces partes P y Q en la partición $\mathscr{F}$ tales que $x \in P$, $y \in P$, $y \in Q$ y $z \in Q$. En particular, vemos de esto que $y \in P \cap Q$, de manera que las partes P y Q no son disjuntas: como $\mathscr{F}$ es una partición y satisface por lo tanto la tercera de las condiciones de la definición 2.5.10, vemos que tiene que ser $P = Q$. Pero en ese caso tenemos que $x \in P$ y $z \in P$ y, por lo tanto, que $x \mathrel{R} z$.

Como consecuencia de todo esto, la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva y, por lo tanto, se trata de una relación de equivalencia.

Veamos ahora que $A/R = \mathscr{F}$. Para ello, tenemos que mostrar las dos inclusiones entre los conjuntos A/R y $\mathscr{F}$.

- Sea primero c un elemento de A/R, es decir, una clase de equivalencia de la relación R, de manera que existe $x \in A$ tal que $c = [x]$. Como $\mathscr{F}$ es una partición del conjunto A, sabemos que existe una parte $P \in \mathscr{F}$ tal que $x \in P$. Afirmamos que c y P son el mismo conjunto y, en particular, que $c \in \mathscr{F}$. Cuando probemos esto tendremos, por lo tanto, que $A/R \subseteq \mathscr{F}$.

  Sea y un elemento de $c = [x]$: esto significa que $x \mathrel{R} y$ y, de acuerdo a la definición de la relación R, que existe una parte $Q \in \mathscr{F}$ tal que $x \in Q$ e $y \in Q$. Ahora bien, como $x \in P \cap Q$, las partes P y Q no son disjuntas, así que tienen que ser iguales, esto es, debe ser $P = Q$. En particular, como $y \in Q$ tenemos que $y \in P$, y en definitiva esto muestra que $c \subseteq P$.

  Por otro lado, sea y un elemento de P. Como $x \in P$ e $y \in P$, la definición de R nos dice que $x \mathrel{R} y$, así que $y \in [x]$: esto implica que $P \subseteq c$.
- Sea ahora P una parte de $\mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es una partición, P no es el conjunto vacío y, por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $x \in P$. Para ver que P pertenece a A/R es suficiente con que mostremos que $P = [x]$.

  Si y es un elemento de P, entonces tenemos que $x \in P$ e $y \in P$, así que $x \mathrel{R} y$ y, por lo tanto, $y \in [x]$. Esto muestra que $P \subseteq [x]$. Recíprocamente, si y es un elemento de $[x]$, de manera que $x \mathrel{R} y$, entonces existe una parte Q de $\mathscr{F}$ tal que $x \in Q$ e $y \in Q$. Como la intersección $P \cap Q$ no es vacía, ya que contiene a x, debe ser $P = Q$ y, por lo tanto, tenemos que $y \in P$. Concluimos de esta forma que $[x] \subseteq P$.

Esto completa la prueba de la proposición. □

2.5.15. Ejercicio. Sea A un conjunto. La Proposición 2.5.13 nos permite construir una partición de A a partir de una relación de equivalencia en A, y la Proposición 2.5.14 nos permite construir una relación de equivalencia en A a partir de una partición de A. Veamos cómo están relacionadas estas dos construcciones.

(a) Sea R una relación de equivalencia en A, sea $\mathscr{P}$ la partición de A que se obtiene a partir de R como en la Proposición 2.5.13, y sea R' la relación de equivalencia en A que se obtiene a partir de la partición $\mathscr{P}$ como en la Proposición 2.5.14. Pruebe que $R = R'$.

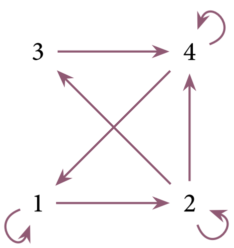
(b) Sea ahora $\mathscr{P}$ una partición del conjunto A, sea R la relación de equivalencia en A que se obtiene de $\mathscr{P}$ como en la Proposición 2.5.14, y sea $\mathscr{P}'$ la partición de A que se obtiene de la relación R como en la Proposición 2.5.13. Pruebe que $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$.

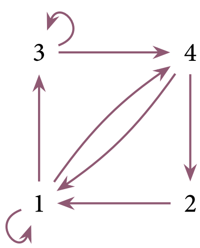
§2.6. Relaciones de orden

2.6.1. Si A es un conjunto y $R \subseteq A \times A$ es una relación en A, entonces decimos que R es ***anti-simétrica*** si cada vez que a y b son elementos de A se tiene que

$$a \mathrel{R} b \text{ y } b \mathrel{R} a \implies a = b.$$

En términos del grafo de la relación, esta condición nos dice que hay a lo sumo *una* flecha entre dos elementos *distintos* de A. De las siguientes dos relaciones en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ sólo la primera es anti-simétrica:





Es importante observar que la propiedad de anti-simetría de una relación es independiente de la de simetría y, en particular, que no es lo mismo que la de no ser simétrica. La siguiente tabla muestra relaciones que tienen las cuatro posibles combinaciones de estas dos propiedades.

		¿Es anti-simétrica?	
		Sí	No
¿Es simétrica?	Sí	$1 \circlearrowleft$	$1 \rightleftarrows 2$
	No	$1 \to 2$	$2 \rightleftarrows 1$, $2 \to 3$

2.6.2. Una relación $R \subseteq A \times A$ en un conjunto A es una ***relación de orden*** si es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

2.6.3. Ejemplo. La relación identidad I_A en un conjunto cualquiera A.

2.6.4. Ejemplo.

Si $A = \mathbb{N}$, entonces la relación

$$R \coloneqq \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \leq b\}$$

en $\mathbb{N}$ es una relación de orden. Podemos reemplazar al conjunto $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$, por $\mathbb{R}$ y, más generalmente, por cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Este ejemplo es el que motiva el nombre de «relación de orden» de la propiedad que estamos estudiando.

2.6.5. Ejemplo. Si B es un conjunto, podemos considerar la relación $R \subseteq \mathscr{P}(B) \times \mathscr{P}(B)$ en el conjunto de partes $\mathscr{P}(B)$ de B dada por

$$R \coloneqq \{(X,Y) \in \mathscr{P}(B) \times \mathscr{P}(B) : X \subseteq Y\}.$$

Es inmediato verificar que se trata de una relación de orden en $\mathscr{P}(B)$. En efecto, ya sabemos que es reflexiva y transitiva, y la Proposición 1.2.4(*ii*) nos dice precisamente que es anti-simétrica.

2.6.6. Ejemplo.

En el conjunto $\mathbb{N}$ consideremos la relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que si x e y son elementos de $\mathbb{N}$ entonces

$$x \mathrel{R} y \iff x \text{ divide a } y.$$

Sabemos que se trata de una relación reflexiva y transitiva y es, de hecho, una relación de orden. Para verlo, bastará que mostremos que es anti-simétrica.

Supongamos que x e y son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $x \; R \; y$ e $y \; R \; x$, es decir, tales que $x \mid y$ e $y \mid x$. Existen entonces k y l en $\mathbb{N}$ tales que $y = lx$ y $x = ky$, y se tiene entonces que

$$x = ky = klx,$$

de manera que $(1 - kl)x = 0$. Como x no es nulo, esta igualdad implica que $1 - kl$ sí lo es, es decir, que $kl = 1$. Como tanto k como l están en $\mathbb{N}$, vemos así que necesariamente $k = 1$ y, por lo tanto, que $x = ky = y$. Esto prueba que la relación es anti-simétrica, como queríamos.

Notemos que si definimos en $\mathbb{Z}$ una relación $R' \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de manera que para cada x e $y \in \mathbb{Z}$ se tenga que vale

$$x \; R' \; y \iff x \text{ divide a } y,$$

entonces *no* obtenemos una relación de orden: por ejemplo, $2 \; R' \; (-2)$ y $(-2) \; R' \; 2$, pero ciertamente 2 y -2 no son iguales.

2.6.7. Ejemplo. Sea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y consideremos la relación $R \subseteq A \times A$ tal que cada vez que (x_1, x_2) e (y_1, y_2) son dos elementos de A se tiene que

$$(x_1, x_2) \; R \; (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_1 > y_1 \\ \quad \text{o} \\ x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2. \end{cases} \tag{14}$$

Veamos que se trata de una relación de orden en el conjunto A. Observemos antes que claramente se tiene que

$$(x_1, x_2) \; R \; (y_1, y_2) \implies x_1 \geq y_1 \tag{15}$$

siempre que (x_1, x_2) e (y_1, y_2) son elementos de A.

- Si (x_1, x_2) es un elemento de A, entonces es claro que $(x_1, x_2) \; R \; (x_1, x_2)$, así que la relación es reflexiva.
- Sean (x_1, x_2) e (y_1, y_2) dos elementos de A para los que se tiene que

  $$(x_1, x_2) \; R \; (y_1, y_2) \tag{16}$$

  y

  $$(y_1, y_2) \; R \; (x_1, x_2). \tag{17}$$

  De nuestra observación (15) y de esto deducimos que $x_1 \geq y_1$ y que $y_1 \geq x_1$, así que, de hecho, es $x_1 = y_1$.

Ahora bien, de (16) y de esto vemos que debe ser $x_2 \geq y_2$, ya que la primera de las alternativas de la definición (14) no puede valer. De la misma forma, de (17) y de que $x_1 = y_1$ deducimos que $y_2 \geq x_2$. Juntando las dos desigualdades, vemos que, de hecho, $x_2 = y_2$ y, por lo tanto, que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Esto prueba que la relación R es anti-simétrica.

- Finalmente, supongamos que (x_1, x_2), (y_2, y_2) y (z_1, z_2) son elementos de A tales que

$$(x_1, x_2) \; R \; (y_1, y_2) \tag{18}$$

y

$$(y_1, y_2) \; R \; (z_1, z_2). \tag{19}$$

En particular, de acuerdo a nuestra observación (15), tenemos que $x_1 \geq y_1$ y que $y_1 \geq z_1$. Si alguna de estas dos desigualdades es estricta, entonces tenemos que $x_1 > z_1$ y, por lo tanto, que $(x_1, x_2) \; R \; (z_1, z_2)$. Supongamos entonces que ninguna de esas dos desigualdades es estricta, de manera que $x_1 = y_1$ e $y_1 = z_1$. De la definición de la relación R y de (18) y de (19) podemos deducir entonces que $x_2 \geq y_2$ y que $y_2 \geq z_2$. Tenemos en consecuencia que $x_1 = z_1$ y que $x_2 \geq z_2$, así que otra vez $(x_1, x_2) \; R \; (z_1, z_2)$.

En cualquier caso, entonces, es $(x_1, x_2) \; R \; (z_1, z_2)$ y, por lo tanto, la relación R es transitiva.

Vemos de esta forma que la relación R es una relación de orden en el conjunto A, como queríamos.

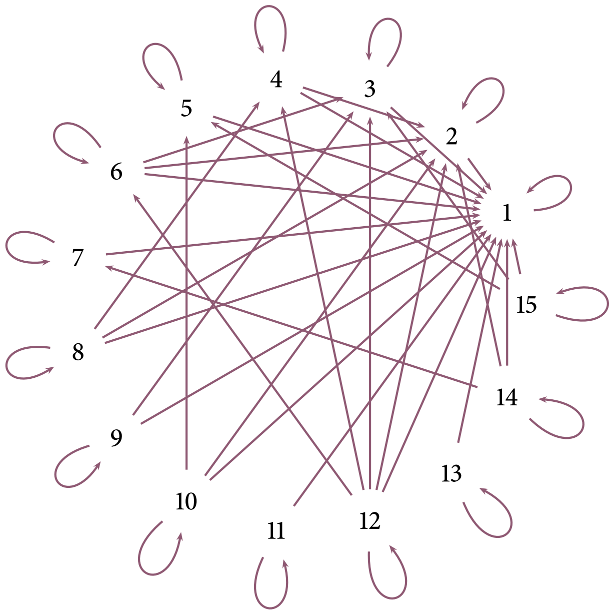
2.6.8. Sea A un conjunto y consideremos en A una relación de orden R. Si a y b son dos elementos de A, decimos que a y b son ***comparables*** con respecto a R si $a \; R \; b$ o $b \; R \; a$. En general, este no es el caso: con respecto a la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ que vimos en el Ejemplo 2.6.6 los números 2 y 3 no son comparables. Cuando, por el contrario, todo par de elementos de A es comparable con respecto a la relación de orden R decimos que R es una relación de orden ***total***.

La relación usual de orden sobre el conjunto $\mathbb{N}$ es total, por ejemplo.

2.6.9. Cuando tenemos una relación de orden R sobre un conjunto A y hacemos el grafo de R, como explicamos en 2.4.1, normalmente hacemos algunas convenciones para simplificar el dibujo resultando. Supongamos, por ejemplo, que A es el conjunto $\{1, 2, \dots, 15\}$ y que R es la relación en A dada por

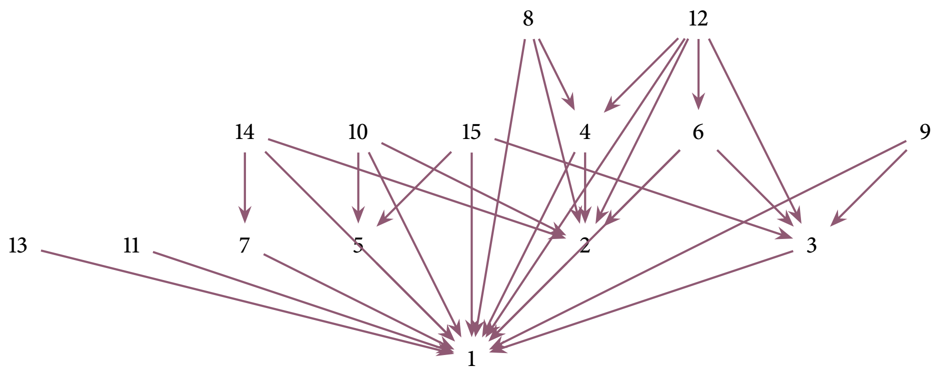
$$R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ divide a } b\}.$$

Si disponemos los elementos de A en un círculo, entonces el grafo de A es el siguiente:

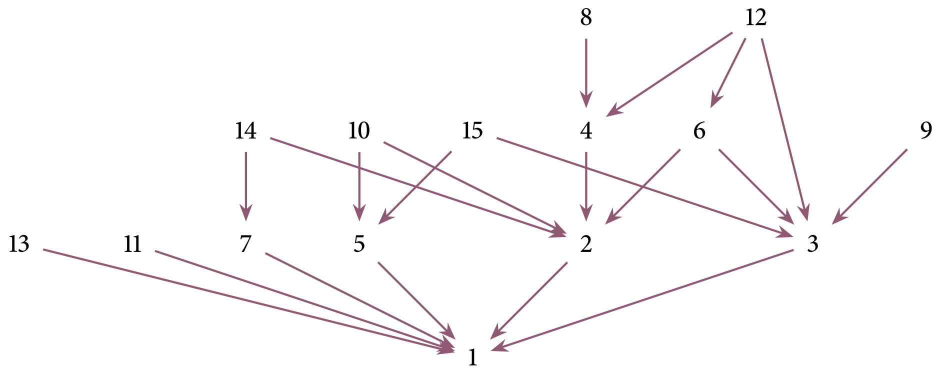


Es claro que este diagrama no es particularmente útil…

Una primera convención que hacemos al dibujar relaciones de orden es omitir todos los bucles: como una relación de orden es reflexiva, sabemos que en todo elemento del conjunto tiene que haber un bucle, así que incluirlo en el dibujo no agrega nada. En segundo lugar, normalmente disponemos los elementos de A en el dibujo de manera que siempre que (a, b) es un elemento de R el elemento a está más abajo que el elemento b. En el ejemplo de arriba, si usamos estas dos convenciones obtenemos un dibujo como el siguiente:



Finalmente, como R es una relación de orden sabemos que siempre es $a \ R \ b$ y $b \ R \ c$ vale que $a \ R \ c$, así que convenimos en no poner en el diagrama la flecha que corresponde a esta última relación. Así, por ejemplo, como $1\ R\ 2$ y $2\ R\ 4$, no incluiremos la flecha que corresponde a que $1\ R\ 4$. Si hacemos esto sistemáticamente obtenemos el siguiente diagrama:



Por supuesto, este ya no es el grafo de la relación R, pero podemos reconstruir a R a partir de este dibujo. Llamamos a este diagrama un ***diagrama de Hasse*** del orden R, por Helmut Hasse.

El diagrama de Hasse de una relación de orden casi siempre es mucho más sencillo que el grafo de esa relación. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \leq b\}$, en el grafo de R hay 21 flechas, contando 6 bucles, mientras que el el correspondiente diagrama de Hasse hay solo 5:

Por otro lado, el diagrama de Hasse de una relación de orden usualmente deja de manifiesto la estructura de este. En la Figura 2.3 damos dos diagramas de Hasse para la situación en que $A = \mathscr{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ y $R = \{(X, Y) \in A \times A : X \subseteq Y\}$. Por otro lado, podemos considerar el conjunto D de todos los divisores positivos de 210, que es

$$D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\},$$

y considerar la relación S en D determinada por la divisibilidad, esto es,

$$S := \{(x, y) \in D \times D : x \text{ divide a } y\},$$

que es una relación de orden en D. En la Figure 2.2 dibujamos un posible diagrama de Hasse para S. Comparando este último diagrama con el tercero de la Figura 2.3 vemos inmediatamente ambos coinciden, salvo por el nombre de los elementos que aparecen en ellos. Este tipo de coincidencia es extremadamente útil en muchas situaciones, y los diagramas de Hasse hacen posible encontrarlas gráficamente.

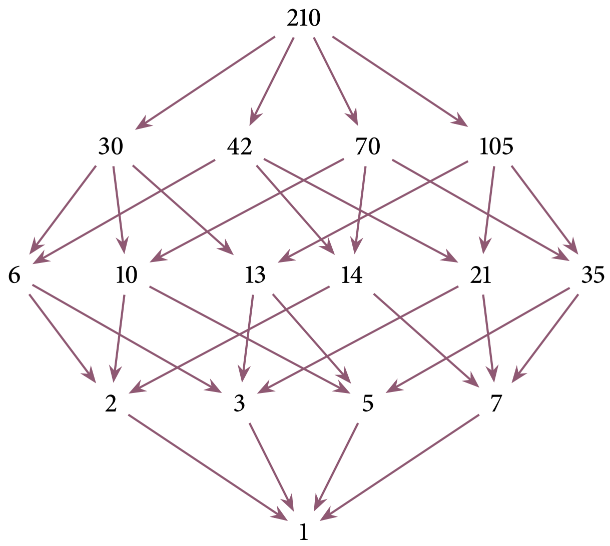


Figura 2.2. Un diagrama de Hasse para la relación de divisibilidad en el conjunto de los divisores positivos de 210.

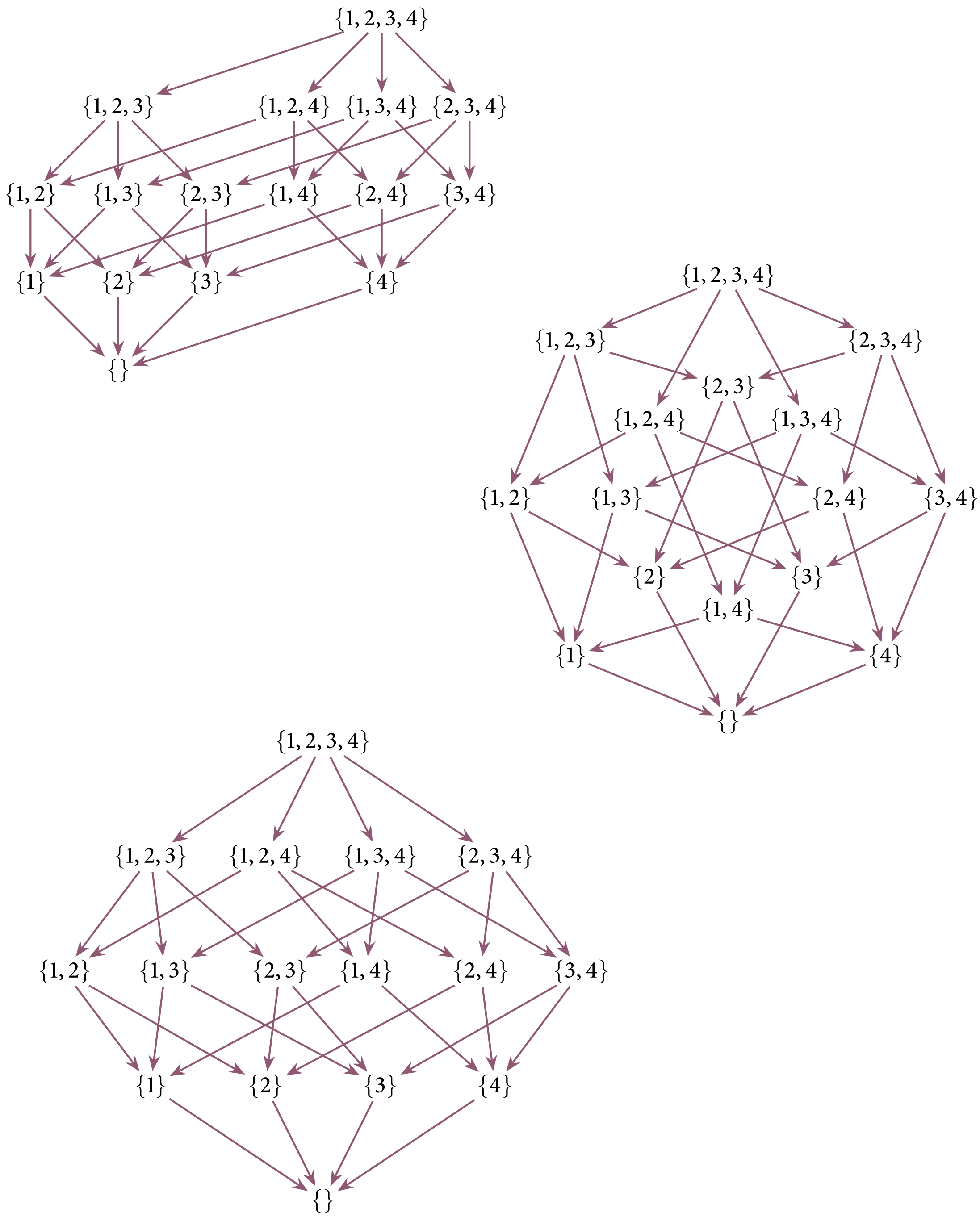


Figura 2.3. Dos diagramas para la relación de orden $R = \{(X, Y) \in A \times A : X \subseteq Y\}$ sobre el conjunto $A = \mathscr{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

§2.7. Ejercicios

Independencia

2.7.1. Decimos que una relación R en un conjunto A es

- *irreflexiva* si para todo $a \in A$ se tiene que $(a, a) \notin R$, y que es
- *intransitiva* si para toda elección de a, b y c en A vale que

$$a \mathrel{R} b,\ b \mathrel{R} c \implies a \not\mathrel{R} c.$$

2.7.2. Ejercicio. Si R es una relación en un conjunto A, entonces puede tener o no cada una de las siguientes propiedades

reflexividad, irreflexividad, simetría, antisimetría, transitividad, intransitividad.

Sea P el conjunto de estas seis propiedades. Determine para qué subconjuntos S de P existe una relación no vacía en algún conjunto que tenga las propiedades de S y no las de $P - S$.

El conjunto P tiene $2^6 = 64$ subconjuntos, así que en principio hacer esto requiere examinar 64 casos distintos. De todas formas, hay ciertas combinaciones de propiedades que son incompatibles: por ejemplo, una relación no vacía claramente no puede ser a la vez reflexiva e irreflexiva. Observaciones como esta permiten reducir la cantidad total de trabajo necesario para hacer este ejercicio.

Intersección de relaciones

2.7.3. Ejercicio. Sea A un conjunto.

(a) Si R y S son dos relaciones en A que son reflexivas, simétricas, transitivas o anti-simétricas, entonces la intersección $R \cap S$, que es una relación en A, tiene la misma propiedad. Si R y S son relaciones de equivalencia o de orden, entonces $R \cap S$ también lo es.

(b) Más generalmente, si $\mathscr{F}$ es una familia no vacía de relaciones en A y todos los miembros de $\mathscr{F}$ son relaciones reflexivas, simétricas, transitivas o anti-simétricas, entonces la intersección

$$\bigcap_{R \in \mathscr{F}} R,$$

que también es una relación en A, tiene la misma propiedad. Si todos los miembros de la familia $\mathscr{F}$ son relaciones de equivalencia o de orden, entonces la intersección de la familia también lo es.

(c) ¿Hay resultados como los de las dos partes anteriores de este ejercicio pero con respecto a la unión de relaciones?

Productos

2.7.4. Si A y B son dos conjuntos y R y S son una relación en A y una relación en B, respectivamente, entonces podemos hay una relación T en el conjunto $A \times B$ tal que

$$(a,b)\ T\ (a',b') \iff a\ R\ a' \text{ y } b\ S\ b'$$

cualesquiera sean los elementos (a,b) y (a',b') de $A \times B$. Llamamos a T el ***producto cartesiano*** de las relaciones R y S.

2.7.5. Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos, sean R y S una relación en A y una relación en B, y sea T la relación en $A \times B$ que es el producto cartesiano de R y S. Pruebe que T es una relación de equivalencia o de orden si tanto R como S son relaciones de equivalencia o de orden, respectivamente.

2.7.6. Sean ahora A y B dos conjuntos y sean R y S relaciones de orden en A y en B, respectivamente. El ***producto lexicográfico*** de R y S es la relación T en el conjunto $A \times B$ tal que cualesquiera sean los elementos (a,b) y (a',b') de $A \times B$ se tiene que

$$(a,b)\ T\ (a',b') \iff \begin{cases} a\ R\ a' \text{ y } a \neq a' \\ \qquad \text{o} \\ a = a' \text{ y } b\ S\ b'. \end{cases}$$

2.7.7. Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos, y sean R y S relaciones de orden en A y en B, respectivamente. Pruebe que el producto lexicográfico de R y S es una relación de orden en $A \times B$, y que es total si R y S lo son.

2.7.8. Ejercicio. Sean n y m dos enteros positivos, sean $A \coloneqq \{1,\dots,n\}$ y $B \coloneqq \{1,\dots,m\}$, y consideremos sobre A y B las relaciones de orden R y S usuales. Dibuje diagramas de Hasse para estas dos relaciones de orden, y para las relaciones de orden en $A \times B$ dadas por el producto cartesiano y por el producto lexicográfico.

Clausura transitiva

2.7.9. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación en A.

(*a*) La familia $\mathscr{F}$ de todas las relaciones $S \subseteq A \times A$ que son transitivas y tales que $R \subseteq S$ es no vacía, ya que contiene a la relación total. Podemos entonces considerar la relación

$$\bar{R} = \bigcap_{S \in \mathscr{F}} S.$$

Esta relación $\bar{R}$ es una relación transitiva en A que contiene a R y es la menor relación en A con esa propiedad, en el sentido de que

si $S \subseteq A \times A$ es una relación transitiva en el conjunto A y $R \subseteq S$, entonces $\bar{R} \subseteq S$.

Llamamos a la relación $\bar{R}$ la ***clausura transitiva*** de R.

(b) Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación en $\mathbb{N}$ tal que si x e y son elementos de $\mathbb{N}$ entonces

$$x \, R \, y \iff y = x + 1.$$

Describa la clausura transitiva $\bar{R}$ de R.

2.7.10. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación en A. Consideremos la relación $R' \subseteq A \times A$ tal que si x e y son elementos de A, entonces se tiene que

$$x \, R' \, y$$

si y solamente si se cumple la siguiente condición:

existen $n \in \mathbb{N}$ y elementos $z_0, z_1, \dots, z_n \in A$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es $z_{i-1} \, R \, z_i$.

Muestre que R' es una relación transitiva en A, que $R \subseteq R'$ y que, de hecho, R' es la clausura transitiva de R.

Relación de equivalencia generada por una relación

2.7.11. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación.

(a) La familia $\mathscr{F}$ de todas las relaciones $S \subseteq A \times A$ que contienen a R y que son relaciones de equivalencia no es vacía, ya que contiene a la relación total en A, y podemos, por lo tanto, considerar la intersección

$$\bar{R} = \bigcap_{S \in \mathscr{F}} S.$$

Esta relación en A es una relación de equivalencia, contiene a R y es la menor relación de equivalencia en A que contiene a R, en el sentido de que

si $S \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia en el conjunto A y $R \subseteq S$, entonces $\bar{R} \subseteq S$.

Llamamos a esta relación $\bar{R}$ la relación de equivalencia ***generada*** por R.

(b) Sea $R' \subseteq A \times A$ la relación en A tal que si x e y son elementos de A, entonces se tiene que

$$x \, R' \, y$$

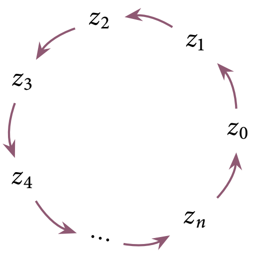
si y solamente si se cumple la condición de que

> *existen $n \in \mathbb{N}_0$ y elementos $z_0, z_1, \dots, z_n \in A$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es $z_{i-1} \mathrel{R} z_i$ o $z_i \mathrel{R} z_{i-1}$.*

Muestre que R' es una relación de equivalencia en A, que $R \subseteq R'$ y que R' es, de hecho, la relación de equivalencia en A generada por R.

Relación de orden generada por una relación acíclica

2.7.12. Si A es un conjunto y $R \subseteq A \times A$ es una relación en A decimos que R es ***posee un ciclo*** si existen $n \in \mathbb{N}$ y elementos $z_0, \dots, z_n \in A$ tales que $z_{i-1} \mathrel{R} z_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $z_n \mathrel{R} z_0$.



Si R no posee un ciclo, entonces decimos que R es ***acíclica***.

2.7.13. Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación en A.

(a) Si la relación R posee un ciclo, entonces no existe ninguna relación de orden $S \subseteq A \times A$ tal que $R \subseteq S$.

(b) Supongamos ahora que R es acíclica. Si R^+ es la clausura transitiva de la relación $R \cup I_A$, entonces R^+ es una relación de orden en A y $R \subseteq R^+$.

(c) En particular, esto muestra que si R es acíclica, entonces la familia $\mathscr{F}$ de todas las relaciones de orden S en A tales que $R \subseteq S$ no es vacía y que, por lo tanto, podemos considerar la intersección

$$\bigcap_{S \in \mathscr{F}} S,$$

que es una relación en A. Esta relación es precisamente la relación R^+ construida en la parte (b) y es la menor relación de orden en A que contiene a R, en el sentido de que

> *si $S \subseteq A \times A$ es una relación de orden en el conjunto A y $R \subseteq S$, entonces $R^+ \subseteq S$.*

Llamamos a esta relación R^+ la relación de orden ***generada*** por R.

La relación de cubrimiento de una relación de orden

2.7.14. Sea A un conjunto y sea $R \subseteq A \times A$ una relación de orden en A. Definimos una nueva relación $R^\circ \subseteq A \times A$ en A de la siguiente manera: si x e y son elementos de A, entonces $x \; R^\circ \; y$ si y solamente se cumplen las siguientes dos condiciones

- es $x \; R \; y$, y
- cada vez que $z \in R$ es tal que $x \; R \; z$ y $z \; R \; y$ se tiene que $z = x$ o $z = y$.

En otras palabras, si x e y son elementos de A, entonces se tiene que $x \; R^\circ \; y$ si y solamente si $x \; R \; y$ y no hay elementos z de R distintos de x y de y que sean «intermedios» entre x e y, en el sentido que se tengan las relaciones

$$x \; R \; z, \qquad z \; R \; y.$$

Llamamos a la relación R° la ***relación de cubrimiento*** correspondiente a la relación R de partida.

2.7.15. Ejercicio. Describa en cada uno de los siguientes ejemplos la relación de cubrimiento correspondiente.

(*a*) Sea $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación de orden en $\mathbb{Z}$ tal que si x e y son elementos de $\mathbb{Z}$ entonces

$$x \; R \; y \iff x \leq y.$$

(*b*) Sea B un conjunto y sea $R \subseteq \mathscr{P}(B) \times \mathscr{P}(B)$ la relación de orden en el conjunto de partes $\mathscr{P}(B)$ tal que si X e Y son elementos de $\mathscr{P}(B)$ entonces

$$X \; R \; Y \iff X \subseteq Y.$$

(*c*) Sea $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la relación de orden en $\mathbb{Q}$ tal que si x e y son elementos de $\mathbb{Q}$ entonces

$$x \; R \; y \iff x \leq y.$$