# Capítulo 3

# Combinatoria de conjuntos, relaciones y funciones.

## 3.1 Cardinal de conjuntos y cantidad de relaciones.

La combinatoria es el arte de contar (en el sentido de enumerar, no de contar un cuento).

**Definición 3.1.1. (Cardinal de un conjunto.)**

Sea $A$ un conjunto, se llama *cardinal de* $A$ a la cantidad de elementos *distintos* que tiene $A$, y se nota $\#A$. Cuando el conjunto no tiene un número finito de elementos, se dice que es *infinito*, y se nota $\#A = \infty$.

<u>*Ejemplos:*</u> $\#\emptyset = 0$, $\#\{a, b, c\} = 3 = \#\{1, 2, 3\}$, $\#\mathbb{N} = \infty$.

Notar que si $A$ es un conjunto finito, $\#A \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$.

**Observación 3.1.2. (Cardinal de un subconjunto.)**

Sea $A$ es un conjunto finito y sea $B \subseteq A$. Entonces $\#B \leq \#A$. (Esto vale también para conjuntos infinitos, como verán más adelante los matemáticos.)

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\#(A \cup B) = \#\{1, \dots, 9\} = 9 = 3 + 6 = \#A + \#B$, pero si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\#(A \cup B) = \#\{1, \dots, 9\} = 9 = 5 + 6 - 2 = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ pues los elementos 4 y 5 de la intersección están contados dos veces. Esto vale en general:

**Observación 3.1.3. (Cardinal de la unión y del complemento.)**

Sean $A, B$ conjuntos finitos dentro de un conjunto referencial $U$.

- Si $A$ y $B$ son conjuntos disjuntos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

- En general $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$.
- Si $U$ es un conjunto finito, entonces $\#(A^c)=\#U-\#A$.

Se deduce por ejemplo

$$\#(A-B)=\#A-\#(A\cap B) \quad \text{y} \quad \#(A\triangle B)=\#A+\#B-2\#(A\cap B).$$

### 3.1.1 Cardinal de un producto cartesiano y del conjunto de partes.

Veamos ahora en un ejemplo como se comporta el cardinal del producto cartesiano y del conjunto de partes. Sean $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{1,2\}$. Entonces

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ y por lo tanto $\#(A\times B)=6=3\cdot 2=\#A\cdot\#B$. Y $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$ y por lo tanto $\#(\mathcal{P}(A))=8=2^3=2^{\#A}$. En general

**Proposición 3.1.4. (Cardinal del producto cartesiano y del conjunto de partes.)**

1. *Sean $A$ y $B$ conjuntos finitos. Entonces $\#(A\times B)=\#A\cdot\#B$.*
2. *Sean $A_1,\dots,A_n,A$ conjuntos finitos. Entonces*

$$\#(A_1\times\cdots\times A_n)=\#A_1\cdots\#A_n=\prod_{i=1}^{n}\#A_i,$$
$$\#(A^n)=(\#A)^n.$$

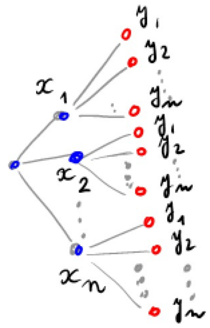
3. *Sea $A$ un conjunto finito, entonces $\#(\mathcal{P}(A))=2^{\#A}$.*

*Demostración.* Haremos una demostración informal pero muy intuitiva. Con los elementos que se vieron en el capítulo anterior, se puede formalizar la demostración si se quiere.

1. Si $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ y $B=\{y_1,\dots,y_m\}$, entonces

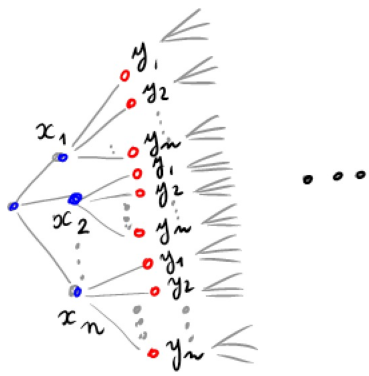
$$A\times B=\{(x_1,y_1),\dots,(x_1,y_m),(x_2,y_1),\dots,(x_2,y_m),\dots,(x_n,y_1),\dots,(x_n,y_m)\},$$

y alcanza con contar los elementos. Esto también se puede representar con un árbol:




Lo informal aquí es el uso de los ..., la demostración formal usa inducción.

2. Esto se formaliza también por inducción, aunque nuevamente se corresponde con un árbol:




3. A cada subconjunto $B$ de $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ se le puede asociar un elemento del producto cartesiano $\{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n}$: se asocia a $B \subseteq A$ la $n$-upla $(e_1, \dots, e_n) \in \{0,1\}^n$ definida por $e_i = 1$ si $a_i \in B$ y $e_i = 0$ si $a_i \notin B$. Por ejemplo, al subconjunto $\emptyset$ se le asocia la $n$-upla $(0, \dots, 0)$, al subconjunto $A$ la $n$-upla $(1, \dots, 1)$, y al subconjunto $\{x_1\}$ la $n$-upla $(1, 0, \dots, 0)$. Está claro que esta asociación define para cada subconjunto $B \subseteq A$ un elemento del producto cartesiano $\{0,1\}^n$, y recíprocamente a cada elemento del producto cartesiano $\{0,1\}^n$ le corresponde un subconjunto $B \subseteq A$ (esta asociación es un ejemplo de función biyectiva entre el conjunto $\mathcal{P}(A)$ y el conjunto $\{0,1\}^n$) y por lo tanto los dos conjuntos tienen el mismo cardinal, pero $\#(\{0,1)\}^n) = 2^n$ por el inciso anterior.

$\square$

### 3.1.2 Cantidad de relaciones y de funciones.

¿Cuántas relaciones de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 2\}$ hay? Sabemos que hay una relación por cada subconjunto de $A \times B$, o sea por cada elemento de $\mathcal{P}(A \times B)$. Es decir, hay tantas relaciones como elementos en $\mathcal{P}(A \times B)$. Luego la cantidad de relaciones es igual a $\#\big(\mathcal{P}(A \times B)\big)$. Como, por la Proposición 3.1.4, el conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$ tiene en este caso $2^6$ elementos, hay $2^6$ relaciones de $A$ en $B$. Este mismo razonamiento vale para conjuntos finitos cualesquiera:

**Proposición 3.1.5. (Cantidad de relaciones.)**

*Sean $A_m$ y $B_n$ conjuntos finitos, con $m$ y $n$ elementos respectivamente. Entonces la cantidad de relaciones que hay de $A_m$ en $B_n$ es igual a $2^{m \cdot n}$.*

Hemos visto que si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, hay $2^6 = 64$ relaciones de $A$ en $B$. Nos podemos preguntar cuántas de estas relaciones son funciones $f : A \to B$. Esto se puede pensar en términos de producto cartesiano (o de árboles): para definir una función $f : A \to B$ tenemos que determinar $f(a) \in \{1, 2\}$, $f(b) \in \{1, 2\}$ y $f(c) \in \{1, 2\}$. Por cada elección de $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$ en el conjunto $\{1, 2\}$, tendremos una función distinta. Como tenemos 2 elecciones posibles para $f(a)$, 2 para $f(b)$ y 2 para $f(c)$ tenemos en total $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ funciones (bastante menos que las 64 relaciones que hay de $A$ en $B$). Dicho de otra manera la cantidad de funciones es igual al cardinal del producto cartesiano $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Este razonamiento vale en general para funciones entre conjuntos finitos:

**Proposición 3.1.6. (Cantidad de funciones.)**

*Sean $A_m$ y $B_n$ conjuntos finitos, con $m$ y $n$ elementos respectivamente. Entonces la cantidad de funciones $f$ que hay de $A_m$ en $B_n$ es igual a $n^m$.*

De las definiciones de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva se desprenden las propiedades siguientes sobre cardinales.

**Proposición 3.1.7. (Cardinal de conjuntos y funciones.)**

*Sean $A$ y $B$ conjuntos* finitos.

- *Sea $f : A \to B$ una función* inyectiva. *Entonces $\#A \leq \#B$.*
- *Sea $f : A \to B$ una función* sobreyectiva. *Entonces $\#A \geq \#B$.*
- *Sea $f : A \to B$ una función* biyectiva. *Entonces $\#A = \#B$.*

## 3.2 El factorial.

Cuando $A, B$ son conjuntos finitos con $n$ elementos, se puede contar la cantidad de funciones biyectivas $f : A \to B$ distintas que hay.

Por ejemplo si $A_2 = \{x_1, x_2\}$ y $B_2 = \{y_1, y_2\}$ tienen ambos 2 elementos, hay 2 funciones funciones biyectivas de $A_2$ en $B_2$: la función $f_1$ definida como $f_1(x_1) = y_1, f_1(x_2) = y_2$, y la función $f_2$ dada por $f_2(x_1) = y_2, f_2(x_2) = y_1$. Esto se puede pensar nuevamente con un árbol: primero se fija dónde va a parar el elemento $x_1$ que tiene 2 posibilidades ($y_1$ o $y_2$), y en este caso haber fijado dónde va a parar $x_1$ determina automáticamente dónde va a parar $x_2$ (al elemento de $B_2$ que quedó libre). Estas 2 funciones biyectivas se pueden pensar como las 2 *permutaciones* de $y_1, y_2$, que son $y_1, y_2$ e $y_2, y_1$.

Y si $A_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $B_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ tienen 3 elementos, hay $6 = 3 \cdot 2$ funciones biyectivas de $A_3$ en $B_3$: primero se fija dónde va a parar el elemento $x_1$ que tiene 3 posibilidades ($y_1$, $y_2$ o $y_3$), luego se fija dónde va a parar $x_2$, a quién le quedan 2 posibilidades en $B_3$ (según dónde fue a parar $x_1$) y luego queda automáticamente determinado dónde va a parar $x_3$ (al elemento de $B_3$ que quedó libre). Estas 6 funciones biyectivas se pueden pensar como las 6 *permutaciones* de $y_1, y_2, y_3$) que son:

$$y_1, y_2, y_3 \ ; \ y_1, y_3, y_2 \ ; \ y_2, y_1, y_3 \ ; \ y_2, y_3, y_1 \ ; \ y_3, y_1, y_2 \ \text{ e } \ y_3, y_2, y_1.$$

En general si $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ son conjuntos con $n$ elementos, se puede probar formalmente (por inducción) que hay

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

funciones biyectivas de $A_n$ en $B_n$. Esta cantidad de funciones biyectivas que hay entre conjuntos con $n$ elementos (o de permutaciones de los elementos de un conjunto de $n$ elementos) resulta ser tan importante en matemática que se le da un nombre y una notación particulares.

**Definición 3.2.1. (El factorial, o la cantidad de funciones biyectivas.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$. El *factorial* de $n$, que se nota $n!$, es el número natural definido como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

que coincide con la cantidad de funciones biyectivas que hay entre dos conjuntos con $n$ elementos, o con la cantidad de permutaciones de elementos en un conjunto de $n$ elementos.
Esta definición se extiende a $\mathbb{N}_0$ definiendo $0! = 1$.

Así,

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,\ 8! = 40320,$
$9! = 362880,\ 10! = 3628800,\ 11! = 39916800,\ 12! = 479001600,\ \dots$

y este número crece muy rápido!

La definición matemática formal, por recurrencia, del factorial es

$$0! = 1 \quad \text{y} \quad n! = n\cdot(n-1)!\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

---

*Un programa recursivo para el factorial en Haskell:*

$$\begin{array}{l} \text{factorial} :: \text{Integer} \ \to\ \text{Integer} \\ \text{factorial } 0 = 1 \\ \text{factorial } n = n * \text{factorial}(n-1) \end{array}$$

---

*Un programa iterativo para el factorial en Python:*

```
def factorial(n) :
   f = 1
   for i in range (1, n + 1) :
      f = f * i
   return f
```

(La línea $f = 1$ pone en la variable $f$ el valor $1$. Luego la instrucción "for $i$ in range $(1, n+1)$" ejecuta la línea que sigue (es decir poner en la variable $f$ el valor que tenía $f$ multiplicado por el valor de $i$) para todos los valores de $i\ \geq 1$ y $< n+1$, es decir entre $1$ y $n$.)

---

### 3.2.1 Cantidad de funciones inyectivas.

Ahora que sabemos contar funciones biyectivas entre conjuntos finitos, también podemos contar, con el mismo razonamiento de árbol, la cantidad de funciones inyectivas que hay de un conjunto $A_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ con $m$ elementos en un conjunto $B_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ con $n$ elementos, donde $m \leq n$ para que pueda haber funciones inyectivas.

Por ejemplo supongamos $A_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $B_5 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A_3 \to B_5$ hay?

Nuevamente, primero se fija dónde va a parar el elemento $x_1$ que tiene 5 posibilidades ($y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ o $y_5$), luego se fija dónde va a parar $x_2$, a quién le quedan $4$ posibilidades en $B_5$ (según dónde fue a parar $x_1$, ya que no se puede repetir) y luego se fija dónde va a parar $x_3$ (a quién le quedan $3$ posibilidades). Por lo tanto hay $5\cdot 4\cdot 3 = 5!/2!$ funciones inyectivas de $A_3$ en $B_5$. Este razonamiento se puede hacer en general (y probar rigurosamente por inducción).

**Proposición 3.2.2. (Cantidad de funciones inyectivas.)**

*Sean $A_m$ y $B_n$ conjuntos finitos, con $m$ y $n$ elementos respectivamente, donde $m \le n$. Entonces la cantidad de funciones inyectivas $f : A_m \to B_n$ que hay es*

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Cabe mencionar que no hay una fórmula tan simple como las anteriores para contar la cantidad de funciones sobreyectivas que hay de un conjunto $A_n$ de $n$ elementos en un conjunto $B_m$ de $m$ elementos, con $n \ge m$ cualesquiera. Existen fórmulas pero son mucho más complicadas e involucran en general contar la cantidad de elementos de muchos conjuntos.

## 3.3 El número combinatorio.

Hasta ahora contamos distintas cosas relacionadas con conjuntos y funciones, pero no contamos aún cuántos subconjuntos con un número dado $k$ de elementos tiene un conjunto de $n$ elementos, o lo que es lo mismo, cuántas formas tengo de elegir $k$ elementos en un conjunto de $n$ elementos (sin que importe el orden). Concentrémonos ahora en ese problema.

**Notación 3.3.1. (El número combinatorio $\binom{n}{k}$.)**

Sea $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto con $n$ elementos. Para $0 \le k \le n$, se nota con el símbolo $\binom{n}{k}$, que se llama el *número combinatorio* $\binom{n}{k}$, la cantidad de subconjuntos con $k$ elementos que tiene $A_n$ (o lo que es lo mismo, la cantidad de formas que tenemos de elegir $k$ elementos en un conjunto $A_n$ con $n$ elementos).

*Ejemplos:*

- Sea $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un conjunto con $4$ elementos. Entonces
  - $\binom{4}{0} = 1$ pues el único subconjunto con $0$ elementos de $A_4$ es el subconjunto vacío $\emptyset$.
  - $\binom{4}{1} = 4$ pues los subconjuntos con $1$ elemento de $A_4$ son $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$ y $\{a_4\}$.

- $\binom{4}{2} = 6$ pues los subconjuntos con 2 elementos de $A_4$ son

$$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}.$$

- $\binom{4}{3} = 4$ pues los subconjuntos con 3 elementos de $A_4$ son

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}.$$

- $\binom{4}{4} = 1$ pues el único subconjunto con 4 elementos de $A_4$ es el conjunto $A_4$.

- Para disipar dudas $\binom{0}{0} = 1$ porque el conjunto vacío $\emptyset$ tiene un único subconjunto, el $\emptyset$, con 0 elementos.

Mucho de lo observado en el ejemplo anterior vale en general:

**Observación 3.3.2.**

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pues el único subconjunto de $A_n$ con 0 elementos es el conjunto $\emptyset$, y el único subconjunto de $A_n$ con $n$ elementos es $A_n$ mismo.

- $\binom{n}{1} = n$ pues los subconjuntos de $A_n$ con 1 elemento son los subconjuntos
$$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{n-1}\}, \{a_n\}.$$

- Podemos darnos cuenta que $\binom{n}{n-1} = n$ también ya que dar un subconjunto de $A_n$ con $n-1$ elementos es lo mismo que elegir cuál elemento $a_i$ quedó afuera del subconjunto: por ejemplo el subconjunto $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ es el que corresponde a haber dejado $a_n$ afuera.

- Con el mismo razonamiento, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\forall\, k, 0 \le k \le n$, ya que a cada subconjunto $B_k$ de $A_n$ con $k$ elementos, podemos asignarle el subconjunto complemento $B_k^c$ que tiene $n-k$ elementos, y esta asignación es una función biyectiva... O lo que es lo mismo, cada vez que elegimos $k$ elementos en $A_n$ estamos dejando de elegir los $n-k$ elementos complementarios.

- Más aún, dado que $\binom{n}{k}$, $0 \le k \le n$, cuenta la cantidad de subconjuntos con $k$ elementos en el conjunto $A_n$ con $n$ elementos, y que sabemos que la cantidad total de subconjuntos que hay en $A_n$ es $2^n$, se tiene:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

### 3.3.1 El triángulo de Pascal: una fórmula recursiva para $\binom{n}{k}$.

Queremos encontrar una forma de calcular $\binom{n}{k}$ sin listar todos los subconjuntos con $k$ elementos de $A_n$, con un razonamiento del tipo del que aplicamos para resolver el problema de las torres de Hanoi.

Sea $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ un conjunto con 5 elementos. Supongamos que queremos calcular $\binom{5}{3}$ sin listar todos los subconjuntos con 3 elementos de $A_5$. Podemos razonar de la manera siguiente:

Sea $B_3$ un subconjunto con 3 elementos de $A_5$. Entonces

- O bien $a_5 \in B_3$, con lo cual para determinar $B_3$ hay que elegir los 2 elementos que faltan en el conjunto $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de elegir 2 elementos en $A_4$.

- O bien $a_5 \notin B_3$, con lo cual para determinar $B_3$ hay que elegir los 3 elementos en el conjunto $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{4}{3} = 4$ formas de elegir 3 elementos en $A_4$.

Como estos dos casos son disjuntos (o bien $a_5 \in B_3$ o bien $a_5 \notin B_3$), la cantidad total de subconjuntos $B_3$ con 3 elementos de $A_5$ es igual a la suma $6 + 4 = 10$, es decir

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}.$$

Y este razonamiento se generaliza sin dificultad a un conjunto $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ con $n+1$ elementos. Ya sabemos que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Queremos ahora calcular $\binom{n+1}{k}$ para un $k$ cualquiera, $1 \le k \le n$.

Sea $B_k$ un subconjunto con $k$ elementos de $A_{n+1}$. Entonces

- O bien $a_{n+1} \in B_k$, con lo cual para determinar $B_k$ hay que elegir los $k-1$ elementos que faltan en el conjunto $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{n}{k-1}$ formas de elegir $k-1$ elementos en $A_n$. (Aquí interviene la condición $k \ge 1$ pues tiene que ser $k-1 \ge 0$ para que esto tenga sentido.)

- O bien $a_{n+1} \notin B_k$, con lo cual para determinar $B_k$ hay que elegir los $k$ elementos en el conjunto $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Y ya sabemos que hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir $k$ elementos en $A_n$. (Aquí interviene la condición $k \le n$ para que esto tenga sentido.)

Como estos dos casos son disjuntos (o bien $a_{n+1} \in B_k$ o bien $a_{n+1} \notin B_k$), la cantidad total de subconjuntos $B_k$ con $k$ elementos de $A_{n+1}$ es igual a la suma $\binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{k}$, es decir se satisface

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \text{para } 1 \le k \le n.$$

Así obtuvimos el resultado siguiente:

**Proposición 3.3.3. (Una fórmula recursiva para el número combinatorio.)**

*Se tiene*

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \qquad y$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \textit{para } 1 \le k \le n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esto da el siguiente triángulo, conocido como el *triángulo de Pascal* (y vuelve a aparecer Pascal!), que empieza con:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}\\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}\\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}\\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}$$

Y como ya sabemos que los dos bordes de ese triángulo siempre valen $1$, y que cada término de una fila, o sea $\binom{n+1}{k}$, se obtiene como la suma de los $2$ términos de la fila anterior que están "encima", o sea $\binom{n}{k-1}$ y $\binom{n}{k}$, esto permite ir deduciendo fila a fila los valores:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad \binom{2}{1} \quad 1\\
1 \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad 1\\
1 \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad 1\\
1 \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad 1\\
1 \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad 1\\
1 \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad 1\\
1 \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad 1\\
1 \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad 1\\
1 \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad 1\\
1 \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad 1\\
1 \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

Vale mencionar que el triángulo de Pascal, que lleva ese nombre en Occidente en honor a las investigaciones que hizo Blaise Pascal sobre él, era conocido mucho antes, por ejemplo por el matemático italiano *Niccolò Fontana Tartaglia*, 1500-1557.

¡O incluso mucho antes por el matemático chino *Yang Hui*, 1238–1298 !

### 3.3.2 La expresión del número combinatorio.

Busquemos ahora cuál es el término general (no recursivo) del número combinatorio $\binom{n}{k}$ conjeturando una fórmula y probándola por inducción.

Si queremos contar la cantidad de subconjuntos $B_3$ con 3 elementos que tiene el conjunto $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con 5 elementos, tenemos que elegir los 3 elementos que van a formar parte del subconjunto $B_3$. Pongamosle por ahora un orden a esos elementos (ya que esto lo sabemos contar, como cuando contamos las funciones inyectivas): para el 1er elemento de $B_3$ tenemos 5 posibilidades: cualquiera de los elementos $a_1$ hasta $a_5$. Pero luego para el 2do elemento nos quedan 4 posibilidades (uno de los que no hayamos elegido como 1er elemento) y para el 3er elemento nos quedan solo 3 posibilidades. Así tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2!$ elecciones. Pero en realidad al hacer esto estamos contando las ternas ordenadas de elementos $(b_1, b_2, b_3)$ formadas con elementos distintos de $A_5$, y no los subconjuntos (donde no importa el orden). Por ejemplo el subconjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ aparece aquí $6 = 3!$ veces si contamos las ternas formadas por estos elementos:

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).$$

Cada subconjunto $\{b_1, b_2, b_3\}$ fue así contado $3!$ veces, luego:

$$3!\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!} \quad \Longrightarrow \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10,$$

que coincide con el valor calculado en la sección anterior.

Con el mismo razonamiento para el caso general, podemos conjeturar entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$ la fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{para } 0 \le k \le n.$$

**Teorema 3.3.4. (Número combinatorio.)**

*Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $A_n$ un conjunto con $n$ elementos. Para $0 \le k \le n$, la cantidad de subconjuntos con $k$ elementos del conjunto $A_n$ (o equivalentemente, la cantidad de maneras que hay de elegir $k$ elementos en el conjunto $A_n$) es igual a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Demostración.* Probaremos esta fórmula por inducción corrida a $n \ge 0$, usando la recurrencia de la Proposición 3.3.3 establecida en la sección anterior. Para $n \ge 0$, se tiene

$$p(n): \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{para } 0 \le k \le n.$$

- Caso base: ¿Es $p(0)$ V? Sí, pues para $n = 0$ solo hay que verificar qué pasa para $k = 0$ y $\dfrac{0!}{0!0!} = 1 = \binom{0}{0}$.

- Paso inductivo: Dado $h \geq 0$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?

  – HI: Para $0 \leq k \leq h$ se tiene $\binom{h}{k} = \dfrac{h!}{k!(h-k)!}$.

  – Qpq para $0 \leq k \leq h+1$ se tiene $\binom{h+1}{k} = \dfrac{(h+1)!}{k!(h+1-k)!}$.

  Pero por la Proposición 3.3.3, sabemos que para $1 \leq k \leq h$ se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{h+1}{k} &= \binom{h}{k-1} + \binom{h}{k} \\
&\underset{HI}{=} \frac{h!}{(k-1)!(h-(k-1))!} + \frac{h!}{k!(h-k))!} \\
&= \frac{k \cdot h!}{k(k-1)!(h+1-k))!} + \frac{(h+1-k)h!}{k!(h+1-k)(h-k))!} \\
&= \frac{k \cdot h! + (h+1-k)h!}{k!(h+1-k))!} = \frac{\big(k+(h+1-k)\big)h!}{k!(h+1-k))!} \\
&= \frac{(h+1)h!}{k!(h+1-k))!} = \frac{(h+1)!}{k!(h+1-k))!}
\end{aligned}$$

  como se quería probar.

  Faltan entonces los casos $k = 0$ y $k = h+1$: en esos casos sabemos que

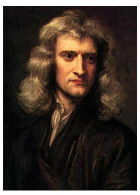
$$\binom{h+1}{0} = 1 = \binom{h+1}{h+1}$$

  que coinciden con

$$\frac{(h+1)!}{0!(h+1-0)!} \quad \text{y} \quad \frac{(h+1)!}{(h+1)!\big(h+1-(h+1)\big)!}$$

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

### 3.3.3 El Binomio de Newton.



Es hora de que entre en escena el que es considerado el matemático y físico más grande de la historia, el inglés *Isaac Newton*, 1642-1727. En este caso relacionado con la expansión de la expresión

$$(x+y)^n, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Por ejemplo, si calculamos los desarrollos para los primeros valores de $n$,

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1,\\
(x+y)^1 &= x+y,\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.
\end{aligned}$$

Pareciera que van apareciendo como coeficientes de los monomios $x^iy^j$ los números combinatorios que aparecen en el triángulo de Pascal! O sea pareciera que se tiene

**Teorema 3.3.5. (El binomio de Newton).**

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

*o lo que es lo mismo, ya que los números combinatorios son simétricos ( $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ):*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Haremos una demostración combinatoria, o sea "contando". Pensemos que

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ factores}}.$$

Cuando aplicamos la distributividad, en cada paréntesis podemos elegir un $x$ o un $y$ (pero no los dos a la vez). Como en total hay $n$ paréntesis terminaremos eligiendo $k$ veces $x$ y $n-k$ veces $y$, para algún valor de $k$, $0 \le k \le n$. Por ejemplo si no elegimos ninguna vez $x$ y $n$ veces $y$, obtenemos –al realizar el producto– el monomio $y^n$, y si elegimos 1 vez $x$ y $n-1$ veces $y$, obtenemos el monomio $xy^{n-1}$. ¿Pero cuántas veces aparece cada uno de estos monomios?

- ¿Cuántas veces se obtiene el monomio $y^n$? Para ello tenemos que elegir solo el $y$ de cada uno de los paréntesis: hay una única forma de hacer eso, y por lo tanto se obtiene una vez el monomio $y^n$.

- ¿Cuántas veces se obtiene el monomio $xy^{n-1}$? Para ello tenemos que elegir en alguno de los paréntesis el $x$ y en todos los demás paréntesis el $y$: como hay $n$ paréntesis, hay $n$ formas de elegir el $x$ (o bien del 1er paréntesis, o bien del 2do, o bien del 3ro, etc.) y de los demás paréntesis saco el $y$. Por lo tanto se obtiene $n = \binom{n}{1}$ veces el monomio $xy^{n-1}$.

- En general, dado $k$, $0 \le k \le n$, ¿cuántas veces se obtiene el monomio $x^k y^{n-k}$? Para ello tenemos que elegir en $k$ paréntesis el $x$ y en todos los $n-k$ paréntesis restantes el $y$: como hay $n$ paréntesis y tenemos que elegir de cuáles $k$ paréntesis extraemos un $x$, hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir de qué paréntesis saco $x$ (y de los demás paréntesis saco el $y$). Por lo tanto se obtiene $\binom{n}{k}$ veces el monomio $x^k y^{n-k}$.

En definitiva, tenemos la suma de $n+1$ términos de la forma $\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, lo que prueba el teorema. □

**Observación 3.3.6.**

- Con la fórmula del Binomio de Newton, se recupera fácilmente la expresión

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

que habíamos notado al definir el número combinatorio.

- ¿ Cuánto da $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ ?

- Propongo que prueben por inducción que $\binom{2n}{n} \le (n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero fijense que en la práctica hay un ejercicio que pide probar que $\binom{2n}{n} < 4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, como consecuencia de que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ (¿por qué?). Notemos que $4^n < (n+1)!$ para $n \ge 6$ con lo cual la desigualdad que se obtiene aplicando el binomio de Newton es más precisa a partir de $n = 6$ que la primera que les propuse.

- Como una aplicación del binomio y un poco de trabajo, se puede probar por inducción que se tiene

$$\frac{n^n}{3^n} \le n! \le \frac{n^n}{2^n}, \quad \forall n \ge 6,$$

una forma bastante precisa de ubicar el factorial entre dos potencias.