

## Capítulo 2

# Números Naturales e Inducción.

Como ya sabemos, los *números naturales* son informalmente el conjunto infinito

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1001, 1002, \dots, 2356789, \dots\}$$

de números que empiezan en 1 y se obtienen los demás sumando siempre 1. Al final de este capítulo, se describe una construcción formal de los números naturales a través de los axiomas de Peano.

En el conjunto  $\mathbb{N}$  se puede sumar y multiplicar: si  $m, n \in \mathbb{N}$ , entonces  $m + n \in \mathbb{N}$  y  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ . Además la suma y el producto se “portan bien”:

- *Conmutatividad:*  $m + n = n + m$  y  $m \cdot n = n \cdot m$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ .
- *Asociatividad:*  $(m + n) + k = m + (n + k)$  y  $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$ ,  $\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ .
- *Distributividad del producto sobre la suma:*  $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$ ,  $\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ .

El objetivo de este capítulo es adquirir herramientas que permiten demostrar (en algunos casos) que una proposición  $p$  enunciada sobre el conjunto de los números naturales es Verdadera, o sea si la proposición  $p$  está dada para cada  $n \in \mathbb{N}$  por una afirmación  $p(n)$ , probar que  $p(n)$  es Verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ejemplos de tales proposiciones  $p, q$  pueden ser

$$p : \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 1 \quad \text{o} \quad q : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 3.$$

Una tal proposición  $p$  es Verdadera si la afirmación asociada  $p(n) : n^2 \geq 1$  es Verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o Falsa si la afirmación  $p(n) : n^2 \geq 1$  es Falsa para al menos algún  $n \in \mathbb{N}$ , o sea en este caso si existe  $n \in \mathbb{N} : n^2 < 1$ . En estos ejemplos es claro que  $p$  es Verdadera, y que  $q$  es Falsa, pues  $\exists n \in \mathbb{N} : n < 3$ , por ejemplo  $n = 1$ .

Demostrar que una proposición  $p$  enunciada sobre todos los números naturales es Verdadera no se puede hacer “verificando” porque nunca vamos a lograr agotar todos los números naturales, sino que hacen falta ciertos mecanismos que garanticen que la demostración está probando la afirmación para todos los números naturales.

Para ejemplificar por qué una simple verificación puede engañar, consideremos el conjunto  $A := \{\sqrt{1141n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$ . Por ejemplo para  $n = 1$ ,  $\sqrt{1141n^2 + 1} = 33,79\dots$ , luego  $1 \notin A$ , y para  $n = 2$ ,  $\sqrt{1141n^2 + 1} = 67,56\dots$ , luego  $2 \notin A$ . Por tiempo se creyó que  $A = \emptyset$  pero resulta que no lo es! Lo que ocurre es que el primero número natural  $n \in A$  tiene 26 dígitos...

Otro ejemplo es la *Conjetura de Goldbach*, por el matemático prusiano *Christian Goldbach*, 1690-1764 (de quién no se conoce ninguna imagen, como me hizo notar el profesor Román Sasyk luego de que yo pusiera una supuesta foto en estas notas), que afirma que todo número natural par  $\geq 4$  es la suma de dos números primos (por ejemplo  $4 = 2 + 2$ ,  $8 = 3 + 5$ ,  $12 = 5 + 7$ ,  $100 = 3 + 97$ ).

Se sabe que esta conjetura es cierta para todos los números pares  $\leq 4 \cdot 10^{18}$  pero sin embargo aún no está probada, a pesar de la cantidad de esfuerzos invertidos en ella.

En 2013, el matemático peruano Harald Helfgott demostró lo que se conocía como la *Conjetura débil de Goldbach*, completando el trabajo previo de 1937 del soviético Ivan Vinogradov. Ésta afirma que todo número natural impar  $\geq 7$  es la suma de tres números primos (por ejemplo  $7 = 3 + 2 + 2$ ,  $9 = 3 + 3 + 3$ ,  $17 = 3 + 7 + 7$ ).



Esta conjetura se llamaba débil porque si la anterior es cierta, entonces también es cierta ésta: restándole 3 al número impar  $\geq 7$  se obtiene un número par  $\geq 4$  que sería suma de dos primos...

Empecemos con un par de ejemplos muy clásicos e importantes.

## 2.1 La suma de Gauss y la serie geométrica.

### 2.1.1 La suma de Gauss.

Supongamos que queremos sumar los 100 primeros números naturales, o sea

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

Se puede hacer recursivamente  $1 + 2 = 3$  luego  $1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$  etc. ¡pero eso tarda mucho!



Proponemos aquí la solución presentada por el alemán *Carl-Friedrich Gauss*, 1777-1855, fue uno de los matemáticos, astrónomos y físicos más influyentes de la historia. Se lo conoce como “el príncipe de las matemáticas”.

Dice la historia que cuando el maestro les dio ese problema a sus alumnos para tener un poco de paz por un rato, el pequeño Carl-Friedrich contestó inmediatamente 5050 ¡que es la respuesta correcta! ¿Qué fue lo que hizo? Se dio cuenta que si uno sumaba “al derecho y al revés”, tenía una forma de sumar de dos maneras distintas:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 = 100 \cdot 101. \end{array}$$

Luego  $S = (100 \cdot 101)/2 = 50 \cdot 101 = 5050$ .

Este procedimiento es claramente generalizable a cualquier número natural  $n$ , y se obtiene

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notar que este número siempre es un número natural (como debe ser) ya que  $n(n+1)$  siempre es un número par!

### 2.1.2 La serie geométrica.

Ahora, sea un número  $q$  cualquiera, y queremos sumar las  $n+1$  primeras potencias de  $q$ ,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n.$$

El mecanismo siguiente, parecido al de la suma de Gauss, permite hallar la suma de esta serie geométrica:

$$\begin{array}{r} Q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ q \cdot Q = \quad \quad q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ \hline q \cdot Q - Q = -1 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad q^{n+1}. \end{array}$$

Luego  $(q-1)Q = q^{n+1} - q$ . Lo que implica que si  $q \neq 1$ ,  $Q = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ . Pero es fácil calcular la suma para  $q = 1$ : da  $n+1$  ¿por qué? Es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1, \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

## 2.2 Sumatoria y Productoria.

En la sección anterior consideramos las sumas  $1 + 2 + \cdots + 99 + 100$  y  $1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n$  donde los puntos suspensivos reemplazan los términos intermedios que se interpretan como “se debe”, en la forma natural para completar la secuencia. Pero hay una notación que evita el uso de estos puntos suspensivos y deja claro quiénes son esos términos intermedios. Esta es la notación para la sumatoria.

Sea entonces  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$  una sucesión de números  $a_i \in A$  que se pueden sumar y multiplicar en el conjunto  $A$  (por ejemplo números naturales, enteros, racionales, reales, complejos, pero veremos más ejemplos en lo que sigue del curso).

### 2.2.1 Sumatoria.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . La notación  $\sum_{i=1}^n a_i$ , que se lee la *sumatoria* para  $i$  de 1 a  $n$  de  $a_i$ , representa la suma de los  $n$  primeros términos de la sucesión  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \cdots + a_n,$$

que se define formalmente *por recurrencia*, para evitar los puntos suspensivos:

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aquí el índice  $i$  es el índice de sumación que simplemente indica cuáles son los términos de la sucesión que se suman, desde el primer  $a_i$  indicado por el valor que toma  $i$  cuando dice  $i = 1$  abajo del símbolo de la sumatoria, hasta el último  $a_i$  indicado por el valor que toma  $i$  cuando dice  $n$  arriba de la sumatoria, y no tiene importancia si se lo llama  $i$  o  $k$  o de cualquier

forma. Así  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$ . También se puede escribir  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ .

Ejemplos:

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$
- $\sum_{i=1}^n 1 = n, \sum_{i=1}^n a = n a, \sum_{i=1}^n n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Esta definición de sumatoria se extiende tal cual a

$$\sum_{i=n_0}^n a_i = a_{n_0} + \dots + a_n,$$

para  $n_0 \leq n$ , y de hecho se extiende a  $n_0 = 0$  (o sea tiene sentido  $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + \dots + a_n$  si el término  $a_0$  está definido) e incluso a índices negativos  $n_0 \in \mathbb{Z}$  (si los términos  $a_i$  correspondientes están definidos). Por ejemplo:

$$\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sumatoria satisface las dos propiedades siguientes para todo  $n \in \mathbb{N}$ , para todo par de sucesiones  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en  $A$  y para todo  $c \in A$ :

- $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i).$
- $c \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n c \cdot a_i.$

Así por ejemplo,  $\sum_{k=1}^{n^2} (k+n) = \left(\sum_{k=1}^{n^2} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n^2} n\right) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + n^3.$

Un programa recursivo para la sumatoria en Haskell:

Esta definición recursiva está muy en sintonía con la programación funcional.



La función sumatoria de una serie que toma valores enteros en el lenguaje de *programación funcional Haskell*, desarrollado a partir de mediados de los 80, y nombrado así por el matemático y lógico americano *Haskell Brooks Curry*, 1900-1982, usando la *currificación* que vieron en el taller, se puede definir de la manera siguiente:

```
sumatoria :: (Integer -> Integer) -> Integer -> Integer
sumatoria a 0 = 0
sumatoria a n = a n + sumatoria a (n - 1)
```

---

*Un programa iterativo para la sumatoria en Python:*

Existen otros lenguajes de programación no funcionales, por ejemplo *imperativos*.



Si escribimos un programa iterativo para la sumatoria en el extensamente usado lenguaje de programación imperativo *Python*, creado a fines de los años 80 por el computador y matemático holandés *Guido van Rossum*, resulta más parecido a la definición de sumatoria que dimos como la suma de todos los términos de la sucesión  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hasta el  $n$ -ésimo.

Asumimos que la sucesión  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  está definida por una función  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ , o sea tal que  $a(i) = a_i$ . Entonces el programa es

```
def sumatoria(n):
    s = 0
    for i in range(1, n + 1):
        s = s + a(i)
    return s
```

(La línea  $s = 0$  pone en la variable  $s$  el valor 0. Luego la instrucción “for  $i$  in range  $(1, n + 1)$ ” ejecuta la línea que sigue (es decir poner en la variable  $s$  el valor que tenía  $s$  sumado el valor de  $a_i$ ) para todos los valores de  $i \geq 1$  y  $< n + 1$ , es decir entre 1 y  $n$ .)

---

### 2.2.2 Productoria.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . La notación  $\prod_{i=1}^n a_i$ , que se lee la *productoria* para  $i$  de 1 a  $n$  de  $a_i$ , representa el producto de los  $n$  primeros términos de la sucesión  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdots a_n,$$

que se define formalmente *por recurrencia*, para evitar los puntos suspensivos:

$$\prod_{i=1}^1 a_i = a_1 \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 2.3. EL CONJUNTO INDUCTIVO $\mathbb{N}$ Y EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.53

Ejemplos:

- $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$  se nota  $n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y se llama  $n$  factorial o el factorial de  $n$ . Tiene un símbolo y un nombre para él solito por la importancia que tiene lo que representa, que estudiaremos con más detalle en el capítulo que viene.
- $\prod_{i=1}^n c = c^n$ ,  $\forall c \in A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

La productoria satisface la propiedad siguiente para todo  $n \in \mathbb{N}$  y sucesiones  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en  $A$ :

$$\bullet \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^n b_i \right) = \prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i).$$

---

Un programa recursivo para la productoria en Haskell:

```
productoria :: (Integer -> Integer) -> Integer -> Integer
productoria a 0 = 1
productoria a n = a n * productoria a (n - 1)
```

---

Un programa iterativo para la productoria en Python:

Supongamos que la sucesión  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en  $A$  está definida por una función  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ , o sea tal que  $f(i) = a_i$ . Entonces el programa es

```
def prod(n):
    p = 1
    for i in range(1, n + 1):
        p = p * f(i)
    return p
```

---

## 2.3 El conjunto inductivo $\mathbb{N}$ y el principio de inducción.

Como no a todos se nos ocurren los trucos “à la Gauss” para probar que ciertas afirmaciones son válidas para todos los números naturales, o a veces

no hay truco, hay un mecanismo muy útil y que se usa muchísimo para demostrar eso, que se llama el *principio de inducción*.



Este principio fue usado a lo largo del tiempo de distintas maneras desde mucho antes de Cristo, en distintas civilizaciones, aunque la primera formulación explícita de este principio fue introducida en 1665 por el matemático, físico, escritor, inventor y filósofo francés *Blaise Pascal*, 1623-1662.

Lo vamos a aplicar reiteradas veces a lo largo de toda la materia, y lo van a seguir aplicando no solo a lo largo de toda la matemática que hagan, sino también de muchas otras ciencias.

El principio funciona en dos pasos. El primer paso, conocido como *caso base* es probar que la afirmación en cuestión es Verdadera para el 1er número natural. El segundo paso, conocido como *paso inductivo*, es probar que la afirmación para un número natural cualquiera implica la afirmación para el número natural siguiente. El principio de inducción es el principio que infiere de estos dos pasos que la afirmación es Verdadera para todos los números naturales.

Se basa en el hecho que el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  es un *conjunto inductivo*.

### Definición 2.3.1. (Conjunto inductivo.)

Sea  $H \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto. Se dice que  $H$  es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $1 \in H$ ,
- $\forall x, x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$ .

#### Ejemplos:

- $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N}_{\geq -13}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[1, +\infty)$  son conjuntos inductivos.
- $\mathbb{N} \cup \{1/2\}$ ,  $\mathbb{Z} - \{0\}$ ,  $[1, 2]$  no son conjuntos inductivos.

De hecho,  $\mathbb{N}$  es el “más chico” de los conjuntos inductivos, en el sentido que si  $H \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto inductivo, entonces  $\mathbb{N} \subseteq H$ . El principio de inducción se basa en este hecho: Si logramos probar que un conjunto  $H \subseteq \mathbb{N}$  es un conjunto inductivo, entonces  $H = \mathbb{N}$ .

Sea  $p(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una afirmación sobre los números naturales, y sea  $H$  el subconjunto de  $\mathbb{N}$  definido como

$$H := \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es Verdadera}\}.$$



### 2.3. EL CONJUNTO INDUCTIVO $\mathbb{N}$ Y EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.55

Si logramos probar que  $H$  es un conjunto inductivo, entonces  $H = \mathbb{N}$ . Es decir  $p(n)$  es Verdadera,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Dicho de otra manera:

#### **Teorema 2.3.2. (Principio de inducción.)**

Sea  $p(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una afirmación sobre los números naturales. Si  $p$  satisface

- (Caso base)  $p(1)$  es Verdadera,
- (Paso inductivo)  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,  $p(h)$  Verdadera  $\Rightarrow p(h+1)$  Verdadera,

entonces  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Aquí la hipótesis “ $p(h)$  Verdadero” para un  $h$  dado se denomina la *hipótesis inductiva* (HI).

Retomemos el ejemplo de la suma de Gauss por el que empezamos, probando por inducción que vale la fórmula dada por Gauss (notemos que la desventaja es que tenemos que conjeturar a priori lo que vale la suma para poder probar la afirmación por inducción).

Ejemplos:

1.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

Aquí la afirmación  $p(n)$  para cada número natural  $n$  es:

$$p(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Queremos probar que  $p(n)$  es Verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$  por inducción. Lo vamos a hacer con todo detalle.

- Caso base: ¿Es  $p(1)$  Verdadera? ¿Es cierto que  $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}$ ?

Sí, pues  $\sum_{i=1}^1 i = 1$  y  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$  también. Luego  $p(1)$  V.

- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿es cierto que si suponemos que  $p(h)$  es Verdadera, podemos deducir que entonces  $p(h+1)$  es Verdadera también? O sea, suponiendo la hipótesis inductiva HI “ $p(h)$  Verdadera”, es decir  $\sum_{i=1}^h i = \frac{h(h+1)}{2}$ , queremos probar

que entonces  $p(h+1)$  es Verdadera también, es decir, queremos probar que

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)((h+1)+1)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}.$$

Pero  $\sum_{i=1}^{h+1} i = \left(\sum_{i=1}^h i\right) + (h+1)$ . Y por HI,  $\sum_{i=1}^h i = \frac{h(h+1)}{2}$ ,  
luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{h+1} i &= \left(\sum_{i=1}^h i\right) + (h+1) \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) \\ &= \frac{h(h+1) + 2(h+1)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$2. \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}:$$

$$p(n) : \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!.$$

- Caso base: ¿ $p(1)$  V? Sí, pues  $\frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)!$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(h)$  V  $\Rightarrow$   $p(h+1)$  V?
  - HI:  $\frac{(2h)!}{h!^2} \leq (h+1)!$ .
  - Qpq (Quiero probar que)  $\frac{(2(h+1))!}{(h+1)!^2} \leq ((h+1)+1)!$ , es decir  $\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$ .

Pero

$$\begin{aligned} \frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} &= \frac{(2h+2)(2h+1)(2h)!}{((h+1)h)!^2} = \frac{2(h+1)(2h+1)(2h)!}{(h+1)^2 h!^2} \\ &= \frac{2(2h+1)}{h+1} \frac{(2h)!}{h!^2} \stackrel{\text{HI}}{\leq} \frac{2(2h+1)}{h+1} (h+1)! \end{aligned}$$

$$\text{ya que } \frac{2(2h+1)}{h+1} > 0.$$

### 2.3. EL CONJUNTO INDUCTIVO $\mathbb{N}$ Y EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN.57

Por lo tanto para probar que  $\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$ , alcanza con probar que  $\frac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$  porque así se tendrá la cadena de desigualdades:

$$\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \underset{HI}{\leq} \frac{2(2h+1)}{h+1} (h+1)! \leq (h+2)(h+1)! = (h+2)!$$

Mostremos entonces que  $\frac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2 &\underset{h+1>0}{\iff} 2(2h+1) \leq (h+1)(h+2) \\ &\iff 4h+2 \leq h^2+3h+2 \iff h \leq h^2 \underset{h>0}{\iff} 1 \leq h \end{aligned}$$

(donde siempre verificamos que no cambia el sentido de la desigualdad pues se multiplica/divide por cantidades  $> 0$ ). La última desigualdad es cierta pues  $h \in \mathbb{N}$ , por lo tanto hemos logrado probar que  $\frac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$ , como queríamos.

Concluimos que  $p(h) \vee \Rightarrow p(h+1) \vee$ .

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadera,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

3.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (En particular esto prueba que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  diverge...):

$$p(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

- Caso base:  $\text{¿} p(1) \vee \text{?}$  Sí, pues  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \geq \sqrt{1}$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\text{¿} p(h) \vee \Rightarrow p(h+1) \vee \text{?}$

$$\begin{aligned} - \text{ HI: } \sum_{k=1}^h \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \sqrt{h}. \\ - \text{ Qpq } \sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \sqrt{h+1}. \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^h \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \stackrel{HI}{\geq} \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}}.$$

Por lo tanto para probar que  $\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{h+1}$ , alcanza con probar que  $\sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1}$  porque así se tendrá la cadena de desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1}.$$

Mostremos entonces que  $\sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1} &\iff \frac{\sqrt{h} \cdot \sqrt{h+1} + 1}{\sqrt{h+1}} \geq \sqrt{h+1} \\ &\iff \sqrt{h} \cdot \sqrt{h+1} + 1 \geq (\sqrt{h+1})^2 = h+1 \\ &\iff \sqrt{h} \cdot \sqrt{h+1} \geq h \iff \sqrt{h(h+1)} \geq h \\ &\iff h(h+1) \geq h^2 \iff h^2 + h \geq h^2 \\ &\iff h \geq 0 \end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta pues  $h \in \mathbb{N}$ , por lo tanto hemos logrado probar que  $\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{h+1}$ , como queríamos.

Concluimos que  $p(h) \vee \Rightarrow p(h+1) \vee$ .

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadera,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.3.1 Inducción “corrida”.

Supongamos que queremos probar que para todo  $n \geq 5$ , se tiene  $2^n > n^2$ .

Este ejemplo plantea el problema de probar una afirmación que no es cierta para todos los números naturales, pero a partir de cierto número. No podemos aplicar directamente el principio de inducción ya que si bien se satisface el caso base  $p(1)$  Verdadera (pues  $2 = 2^1 > 1^2 = 1$ ), no se satisface  $p(2)$  Verdadera, pues  $2^2 = 4$  y por lo tanto no es cierto que para  $n = 2$  se tiene  $2^n > n^2$ . Por lo tanto no vamos a poder deducir de  $p(1)$  Verdadera que

### 2.3. EL CONJUNTO INDUCTIVO $\mathbb{N}$ Y EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN. 59

$p(2)$  es Verdadera! Notemos que tampoco es cierta la afirmación para  $n = 3$  (pues  $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ ) ni para  $n = 4$  (pues  $2^4 = 16 = 4^2$ ).

También podríamos querer probar que una afirmación es cierta a partir de cierto número entero negativo  $n_0$ , por ejemplo  $n_0 = -11$ . ¿Será cierto que podemos usar el mismo principio de inducción, pero “corriéndolo”? es decir ¿verificando el caso base  $n_0 = 5$  en el ejemplo (o  $n_0 = -11$ ) y luego probar  $p(h) \vee \Rightarrow p(h+1) \vee, \forall h \geq n_0$ ?

La respuesta bastante intuitiva es que “sí”, y se puede mostrar que es así mostrando que el conjunto  $H = \{n \in \mathbb{N} : p(n-1+n_0) \text{ es Verdadera}\}$  es un conjunto inductivo, pues así  $1 \in H \Leftrightarrow p(1-1+n_0) = p(n_0)$  es Verdadero.

De esta manera se prueba que es el análogo “corrido” del Principio de Inducción formulado en el Teorema 2.3.2:

#### **Teorema 2.3.3. (Principio de inducción “corrido”).**

Sea  $n_0 \in \mathbb{Z}$  y sea  $p(n), n \geq n_0$ , una afirmación sobre  $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ . Si  $p$  satisface

- (Caso base)  $p(n_0)$  es Verdadera,
- (Paso inductivo)  $\forall h \geq n_0, p(h) \text{ Verdadera} \Rightarrow p(h+1) \text{ Verdadera},$

entonces  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \geq n_0$ .

#### Ejemplos:

1. Probar que para todo  $n \geq 5$  se tiene  $2^n > n^2$ .

Vamos a probarlo por medio del principio de inducción corrido.

$$p(n) : 2^n > n^2$$

- Caso base: ¿ $p(5) \vee$ ? Sí, pues  $32 = 2^5 > 5^2 = 25$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \geq 5$ , ¿ $p(h) \vee \Rightarrow p(h+1) \vee$ ?
  - HI:  $2^h > h^2$  (recordando  $h \geq 5$ ).
  - Qpq  $2^{h+1} > (h+1)^2$ , es decir  $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$ .

Pero por HI,  $2 \cdot 2^h > 2h^2$ . Por lo tanto para probar que  $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$ , alcanza con probar que  $2h^2 \geq h^2 + 2h + 1$ , pues en ese caso se tendría la cadena de desigualdades

$$2 \cdot 2^h > 2h^2 \geq h^2 + 2h + 1,$$

y al haber en la cadena una desigualdad estricta  $>$ , la desigualdad que vale entre el miembro más a la izquierda y el más a la derecha es  $>$  también. Se tiene:

$$2h^2 \geq h^2 + 2h + 1 \iff h^2 \geq 2h + 1 \iff h^2 - 2h - 1 \geq 0.$$

Pero al ser  $h \geq 5$ , se tiene

$$h^2 - 2h - 1 = h \cdot h - 2h - 1 \geq 5h - 2h - 1 = 3h - 1 \geq 3 \cdot 5 - 1 \geq 14 \geq 0.$$

(Notemos que la desigualdad  $h^2 - 2h - 1 \geq 0$  no se cumple para  $h = 1$  ni para  $h = 2$ , sólo se cumple de hecho a partir de  $h = 3$ .)

Concluimos que para  $h \geq 5$ ,  $p(h) \text{ V} \Rightarrow p(h+1) \text{ V}$ .

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadera, para todo  $n \geq 5$ .

## 2. (El distribuidor automático.)

Un distribuidor automático sólo tiene billetes de \$ 2 y \$ 5. Mostrar que puede dar cualquier suma  $n$  entera de \$, con  $n \geq 4$ .

$$p(n) : \quad \exists i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ t.q. } n = i \cdot 2 + j \cdot 5.$$

- Caso base: ¿ $p(4) \text{ V}$ ? Sí, pues  $4 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \geq 4$ , ¿ $p(h) \text{ V} \Rightarrow p(h+1) \text{ V}$ ?
  - HI:  $\exists i, j \in \mathbb{N}_0$  tales que  $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$  (recordando  $h \geq 4$ ).
  - Qpq  $\exists i', j' \in \mathbb{N}_0$  tales que  $h+1 = i' \cdot 2 + j' \cdot 5$ .

Por HI,  $\exists i, j \in \mathbb{N}_0$  tales que  $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$ .

- Si se usó algún billete de 5 para obtener  $h$ , es decir si  $j \geq 1$ , reemplazar ese billete de 5 por 3 billetes de 2 (lo que da 6), o sea reemplazar  $j$  por  $j' = j - 1$  (que satisface  $j' \geq 0$  pues  $j \geq 1$ ) y reemplazar  $i$  por  $i' = i + 3$ :

$$i' \cdot 2 + j' \cdot 5 = (i+3) \cdot 2 + (j-1) \cdot 5 = i \cdot 2 + j \cdot 5 + 6 - 5 = h + 1.$$

- Si no se usó ningún billete de 5 para obtener  $h$ , es decir si  $j = 0$ , se tiene  $h = i \cdot 2$ . Pero como  $h \geq 4$ , entonces  $i \geq 2$  y podemos reemplazar dos billetes de 2 por un billete de 5, o sea reemplazar  $i$  por  $i' = i - 2$  (que satisface  $i' \geq 0$  pues  $i \geq 2$ ) y reemplazar  $j = 0$  por  $j' = 1$ :

$$i' \cdot 2 + j' \cdot 5 = (i-2) \cdot 2 + 5 = i \cdot 2 + 5 - 4 = h + 1.$$

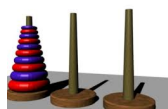
Concluimos que en todos los casos logramos mostrar que existen  $i', j' \in \mathbb{N}_0$  tales que  $h+1 = i' \cdot 2 + j' \cdot 5$ . Así probamos el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadera,  $\forall n \geq 4$ .

## 2.4 Sucesiones definidas por recurrencia.

Los ejemplos siguientes muestran sucesiones definidas por recurrencia, de la misma manera que fueron definidos por recurrencia la sumatoria y la productoria.

### Las torres de Hanoi.



El problema de las torres de Hanoi fue inventado por el matemático francés Edouard Lucas en 1883.

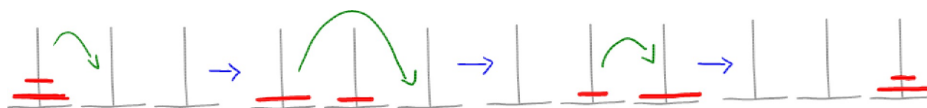
Tenemos 3 estacas, y un cierto número  $n$  de discos de distinto diámetro ensartados en la primera estaca, ordenados por tamaño, de mayor a menor estando el menor encima, como en la foto arriba.



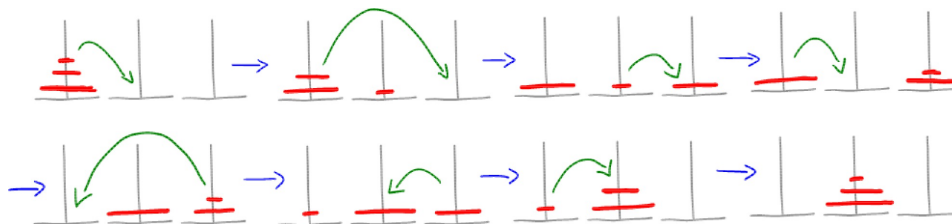
El objetivo del juego es lograr mover toda la pila de discos a otra estaca, con las condiciones siguientes:

- no se puede mover más de un disco a la vez
- sólo se puede sacar el disco de la parte superior de cada pila de discos
- en todo momento los discos de cada estaca deben estar ordenados por tamaño, de mayor a menor con el menor encima.

¿Cuántos movimientos alcanzan para realizar esta operación? Por ejemplo para 2 discos podemos realizar los movimientos siguientes:



O sea alcanza con 3 movimientos. Y para 3 discos podemos hacer lo siguiente:



Y por lo tanto nos alcanza con 7 movimientos. También nos podemos dar cuenta a este nivel que saber cómo mover 3 discos ayuda a mover 4 discos, ya que para mover los 4 discos, podemos primero pasar los 3 discos de arriba a otra estaca, realizando 7 movimientos (ya que aquí al quedar el disco más grande abajo en la primer estaca, podemos usar tranquilamente esa estaca sin contradecir las reglas del juego), luego mover el disco más grande que quedó solo a la estaca libre (1 movimiento), y luego volver a mover la pila de los 3 discos arriba del más grande realizando nuevamente 7 movimientos. Así para mover 4 discos nos alcanzan  $2 \cdot 7 + 1 = 15$  movimientos.

Este razonamiento se generaliza para  $n + 1$  discos: Llamemos a  $a_n$  una cantidad de movimientos suficientes para mover  $n$  discos. Por ejemplo  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 7$ .

Para mover los  $n + 1$  discos podemos empezar moviendo los  $n$  de arriba a otra estaca, con  $a_n$  movimientos, luego pasar el disco grande a la estaca libre, con 1 movimiento, y luego mover la pila de los  $n$  discos arriba del disco grande, con nuevamente  $a_n$  movimiento. Así obtenemos  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ .

Notemos que si queremos deducir de esta definición cuánto vale  $a_7$  vamos a necesitar conocer cuánto vale  $a_6$ , luego  $a_5$ , etc. hasta necesitar conocer  $a_1$ .

Una sucesión definida de esta manera, como aquí:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es una sucesión definida *por recurrencia*, ya que para calcular un término necesitamos conocer el anterior. Además de necesitar conocer el caso base  $n = 1$  obviamente, sino no sabríamos por donde empezar.

**Observación 2.4.1.** Esta definición por recurrencia permite obtener el valor de  $a_n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ : si queremos ser formales, podemos observar que el conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} : a_n \text{ está definida}\}$$

es un subconjunto inductivo de  $\mathbb{N}$  (pues  $1 \in H$  ya que  $a_1 = 1$ , y si  $h \in H$ , entonces  $h + 1 \in H$  pues  $a_{h+1} = 2a_h + 1$ ), y por lo tanto coincide con

$\mathbb{N}$ . (Así definimos en forma recursiva la sumatoria  $\sum_{i=1}^n a_n$  y la productoria

$$\prod_{i=1}^n a_n \cdot)$$

Ahora nos interesa deshacernos de la recurrencia: habrá una fórmula que me diga quién es el término general  $a_n$  de la sucesión, sin tener que calcular el término anterior y el anterior y el anterior?



Veamos:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63.$$

Pareciera ser que puede valer  $a_n = 2^n - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Conjeturemos luego que la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

satisface

$$a_n = 2^n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lo podemos probar por inducción:

$$p(n) : \quad a_n = 2^n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Caso base:  $\iota p(1)$  V? Sí, pues  $2^1 - 1 = 1 = a_1$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\iota p(h)$  V  $\Rightarrow p(h+1)$  V?
  - HI:  $a_h = 2^h - 1$
  - Qpq  $a_{h+1} = 2^{h+1} - 1$ .

Pero por definición de la sucesión, sabemos que  $a_{h+1} = 2a_h + 1$ . Luego

$$a_{h+1} = 2a_h + 1 \stackrel{HI}{=} 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1$$

como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Pregunta 1: Acabamos de probar que con  $2^n - 1$  movimientos se puede resolver el problema de las torres de Hanoi con  $n$  discos. ¿Será éste el mínimo número posible?

Pregunta 2: Con cuál de las dos formulaciones:  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , o  $a_n = 2^n - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  se logra hacer menos cuentas si se quiere calcular por ejemplo  $a_{256}$ ? La respuesta se encuentra en el capítulo sobre enteros, cuando se introducen los sistemas de numeración, en particular el sistema binario.

### Un ejemplo más.

Sea la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} - (n+1)\right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O sea

$$a_1 = 1, a_2 = (\sqrt{1} - 2)^2 = 1, a_3 = (\sqrt{1} - 3)^2 = 4, a_4 = (\sqrt{4} - 4)^2 = 4, \\ a_5 = (\sqrt{4} - 5)^2 = 9, a_6 = (\sqrt{9} - 6)^2 = 9, \dots$$

Pareciera que va dando los cuadrados, repetidos dos veces cada uno, o sea  $a_{2n-1} = a_{2n} = n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Escrito en términos de  $a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Probemoslo por inducción.

$$p(n) : a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

- Caso base:  $\iota p(1)$  V? Sí, pues como 1 es impar,  $\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = 1 = a_1$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\iota p(h)$  V  $\Rightarrow p(h+1)$  V?
  - HI:  $a_h = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$  si  $h$  es impar y  $a_h = \left(\frac{h}{2}\right)^2$  si  $h$  es par.
  - Qpq  $a_{h+1} = \left(\frac{h+2}{2}\right)^2$  si  $h+1$  es impar y  $a_{h+1} = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$  si  $h+1$  es par.

Pero por definición de la sucesión, sabemos que  $a_{h+1} = (\sqrt{a_h} - (h+1))^2$ . Luego:

- Si  $h+1$  es impar, es que  $h$  es par, y por lo tanto por HI,  $a_h = \left(\frac{h}{2}\right)^2$ . Así,

$$a_{h+1} = (\sqrt{a_h} - (h+1))^2 \stackrel{HI}{=} \left(\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2} - (h+1)\right)^2 \\ = \left(\frac{h}{2} - (h+1)\right)^2 = \left(-\frac{(h+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{h+2}{2}\right)^2.$$

- Si  $h+1$  es par, es que  $h$  es impar, y por lo tanto por HI,  $a_h = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2$ . Así,

$$a_{h+1} = (\sqrt{a_h} - (h+1))^2 \stackrel{HI}{=} \left(\sqrt{\left(\frac{h+1}{2}\right)^2} - (h+1)\right)^2 \\ = \left(\frac{h+1}{2} - (h+1)\right)^2 = \left(-\frac{(h+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2.$$

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.5 Inducción completa.

### 2.5.1 Inducción completa – Un caso particular.

Empecemos considerando la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida recursivamente de la manera siguiente:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

¿Se puede decidir quién es  $a_2$ ? Se ve que en este caso no, ya que la sucesión requiere saber lo que valen dos términos anteriores cada vez: para conocer  $a_2$  necesitaríamos conocer  $a_1$  y  $a_0$ , y no sabemos quién es  $a_0$ . Pero si definimos la sucesión  $a_n$  como

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 13, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

al tener los dos primeros términos de la sucesión dados, podemos recursivamente deducir el valor de todos los demás:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 13, \quad a_3 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35, \quad a_4 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97 \dots$$

**Observación 2.5.1.** Cuando una sucesión está definida por recurrencia usando los dos términos anteriores, y se dan los valores de los dos términos iniciales  $a_1$  y  $a_2$ , entonces  $a_n$  está definido para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ : si queremos ser formales, podemos observar que el conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} : a_n \text{ está definida}\}$$

coincide con  $\mathbb{N}$ . Pues supongamos que no: entonces existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{n_0}$  no está definido, y podemos tomar el más chico de todos con esa propiedad de no estar definido. Se sabe que  $n_0 \geq 3$  pues  $a_1$  y  $a_2$  están definidos. Pero si  $n_0 \geq 3$ , se tiene que  $a_{n_0}$  está definido por medio de los dos términos anteriores (que están definidos pues  $a_{n_0}$  era el más chico de todos los que no estaban definidos. Por lo tanto  $a_{n_0}$  está definido. Esto contradice el hecho que  $a_{n_0}$  no estaba definido, o sea que  $H \neq \mathbb{N}$ .

En este razonamiento no probamos directamente que  $H$  era un conjunto inductivo, sino usamos lo que se llama *el principio de buena ordenación* (que vale para  $\mathbb{N}$ ) y que es equivalente al Principio de Inducción, como comentaremos en el Apéndice.

Volviendo al Ejemplo (2.1), alguien muy avezado, o un pajarito, o un “oráculo” me puede decir “Oiga, esto da  $2^n + 3^n$ ”!

Supongamos que queremos probar entonces, por inducción, que el término general de la sucesión definida por  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 13$ ,  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , es  $a_n = 2^n + 3^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

El caso base  $a_1 = 2^1 + 3^1$  es correcto, pero cuando queremos deducir de la HI  $a_h = 2^h + 3^h$  que entonces  $a_{h+1} = 2^{h+1} + 3^{h+1}$ , nos vemos en problemas porque necesitaríamos una HI para  $a_h$  y una para  $a_{h-1}$ . Por suerte hay una variante del principio de inducción que soluciona ese problema:

**Teorema 2.5.2. (Principio de inducción - II)**

Sea  $p(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una afirmación sobre los números naturales. Si  $p$  satisface

- (Casos base)  $p(1)$  y  $p(2)$  son Verdaderas,
- (Paso inductivo)  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,  $p(h)$  y  $p(h+1)$  Verdaderas  $\Rightarrow p(h+2)$  Verdadera,

entonces  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Ejemplo: Probar que el término general de la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$a_1 = 5, a_2 = 13 \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es  $a_n = 2^n + 3^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Por inducción, aplicando el Teorema 2.5.2.

$$p(n) : \quad a_n = 2^n + 3^n.$$

- Casos base: ¿ $p(1)$  y  $p(2)$  V? Sí, pues  $2^1 + 3^1 = 5 = a_1$  y  $2^2 + 3^2 = 13 = a_2$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(h)$  V y  $p(h+1)$  V  $\Rightarrow p(h+2)$  V?
  - HI:  $a_h = 2^h + 3^h$  y  $a_{h+1} = 2^{h+1} + 3^{h+1}$ .
  - Qpq  $a_{h+2} = 2^{h+2} + 3^{h+2}$ .

Pero por definición de la sucesión, sabemos que para  $h \geq 1$ ,  $a_{h+2} = 5a_{h+1} - 6a_h$ . Luego

$$\begin{aligned} a_{h+2} &= 5a_{h+1} - 6a_h \stackrel{HI}{=} 5(2^{h+1} + 3^{h+1}) - 6(2^h + 3^h) \\ &= 10 \cdot 2^h + 15 \cdot 3^h - 6 \cdot 2^h - 6 \cdot 3^h = 4 \cdot 2^h + 9 \cdot 3^h = 2^{h+2} + 3^{h+2} \end{aligned}$$

como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Observación 2.5.3.** Notar que por como está definida la sucesión (por medio de los dos términos anteriores) es indispensable verificar que la afirmación  $p(n)$  es Verdadera para los dos casos base  $p(1)$  y  $p(2)$ , pues si no la verificáramos para 2 no podríamos deducir que  $p(3)$  es Verdadera. Y podríamos –al hacer ese error– deducir algo completamente falso: que la sucesión definida por  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , también tiene como término general  $a_n = 2^n + 3^n$ .

Este principio de inducción admite la misma versión “corrida” que el que vimos en la sección anterior:

**Teorema 2.5.4. (Principio de inducción - II “corrido”)**

Sea  $n_0 \in \mathbb{Z}$  y sea  $p(n), n \geq n_0$ , una afirmación sobre  $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ . Si  $p$  satisface

- (Casos base)  $p(n_0)$  y  $p(n_0 + 1)$  son Verdaderas,
- (Paso inductivo)  $\forall h \geq n_0$ ,  $p(h)$  y  $p(h + 1)$  Verdaderas  $\Rightarrow p(h + 2)$  Verdadera,

entonces  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \geq n_0$ .

## 2.5.2 La sucesión de Fibonacci.

La famosa sucesión de Fibonacci debe su nombre a *Leonardo Pisano Bigollo*, más conocido como *Fibonacci*,  $\sim 1170-1240$ , famoso también por haber difundido en Europa el sistema de numeración indo-arábigo que utilizamos, que emplea una notación posicional y el cero para marcar una posición nula.



Fibonacci publicó *Liber Abaci* en el año 1202, donde entre otras cosas propuso el siguiente problema: si colocamos una pareja de conejos bebés en un área cerrada, ¿cuántos conejos habrá luego de  $n$  meses si

- los conejos nunca mueren,
- cada pareja de conejos produce una nueva pareja de conejos cada mes
- y comienza a tener parejitas luego de dos meses de nacida?

En el mes 0, no hay conejos (porque todavía no los colocamos). En el mes 1, tenemos una pareja de conejos bebés (que colocamos). En el mes 2, tenemos la misma única pareja de conejos, pero ya son adultos y van a empezar a tener parejitas. En el mes 3, tenemos la pareja original (adulta) más una pareja bebé (hijos de la pareja original), o sea tenemos dos parejas. En el mes 4, la pareja original tiene otra pareja de bebés, y además la pareja bebé

del mes 3 se convierte en adulta (tenemos 3 parejas). En el mes 5, las dos parejas adultas que hay tienen parejas bebés y la pareja bebé que había se convierte en adulta: tenemos 5 parejas. Si calculamos algunos números más, vemos que los siguientes meses tenemos: 8, 13, 21, 34 ...

Para encontrar una fórmula para esta sucesión, llamemos  $A_n$  al número de parejas adultas en el mes  $n$  y  $B_n$  al número de parejas bebés en el mes  $n$ . Llamamos también  $F_n$  al total de parejas en el mes  $n$ , o sea  $F_n = A_n + B_n$ . Obtenemos la tabla siguiente:

Mes	$A_n$	$B_n$	$F_n$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$A_n$	$B_n$	$A_n + B_n$
$n + 1$	$A_n + B_n$	$A_n$	$2A_n + B_n$
$n + 2$	$2A_n + B_n$	$A_n + B_n$	$3A_n + 2B_n$

Notemos que el número total de parejas de conejos en el mes  $n + 2$  es el número que había en el mes  $n + 1$  más el número de parejas adultas del mes  $n + 1$ , que coincide con el número de parejas del mes  $n$ . Luego la sucesión  $F_n$  satisface la recurrencia  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Además, los primeros dos valores de la sucesión son  $F_0 = 0$  y  $F_1 = 1$ . Estas condiciones definen una única sucesión, que se llama la sucesión de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

cuyos primeros términos son

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

Esta sucesión está fuertemente relacionada con el *Número de Oro*, o *Número de la proporción divina*, o *de la proporción áurea*, que aparece mucho en la naturaleza, en el arte, en la arquitectura, en medicina. Este número surge de preguntarse, si tenemos un segmento dividido en dos partes de longitudes  $\Phi$  y 1, con  $\Phi \geq 1$ , ¿cómo tiene que ser  $\Phi$  para que la proporción entre esas dos partes  $\Phi$  y 1 sea la misma que la proporción entre todo el segmento  $\Phi + 1$  y  $\Phi$ . Se tiene

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{\Phi + 1}{\Phi}, \quad \text{i.e.} \quad \Phi^2 = \Phi + 1, \quad \text{i.e.} \quad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Las dos raíces de la ecuación  $X^2 - X - 1 = 0$  son

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,61803 \geq 1 \quad \text{y} \quad \bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

(aquí  $\bar{\Phi}$  es solo una notación, no significa que es el conjugado en el sentido de número complejo). Notemos que vale que  $\Phi^2 = \Phi + 1$  y  $\bar{\Phi}^2 = \bar{\Phi} + 1$ , pues ambas cantidades satisfacen la ecuación  $X^2 - X - 1 = 0$ . Además se satisfacen las relaciones

$$\Phi^0 - \bar{\Phi}^0 = 1 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \Phi^1 - \bar{\Phi}^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}. \quad (2.2)$$

De distintas maneras se puede probar el resultado siguiente, que describe el término general de la sucesión de Fibonacci. Veremos algunas a continuación. Pero aprovechemos ahora para practicar un poco más el principio de inducción con esta afirmación.

**Proposición 2.5.5. (Término general de la Sucesión de Fibonacci.)**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \bar{\Phi}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Lo probamos por el principio de inducción corrido a  $n \geq 0$  presentado en el Teorema 2.5.4.

$$p(n) : \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \bar{\Phi}^n).$$

- Casos base: ¿ $p(0)$  y  $p(1)$  V? Sí, pues por las relaciones (2.2),

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 = 0 = F_0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \bar{\Phi}^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = F_1.$$

- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(h)$  V y  $p(h+1)$  V  $\Rightarrow$   $p(h+2)$  V?

$$\begin{aligned} - \text{HI: } F_h &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^h - \bar{\Phi}^h) \quad \text{y} \quad F_{h+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{h+1} - \bar{\Phi}^{h+1}). \\ - \text{Qpq } F_{h+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{h+2} - \bar{\Phi}^{h+2}). \end{aligned}$$

Pero por definición de la sucesión, sabemos que para  $h \geq 0$ ,  $F_{h+2} = F_{h+1} + F_h$ . Luego

$$\begin{aligned} F_{h+2} &= F_{h+1} + F_h \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^h - \bar{\Phi}^h) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{h+1} - \bar{\Phi}^{h+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^h - \bar{\Phi}^h + \Phi^{h+1} - \bar{\Phi}^{h+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^h(1 + \Phi) - \bar{\Phi}^h(1 + \bar{\Phi})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^h \cdot \Phi^2 - \bar{\Phi}^h \cdot \bar{\Phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{h+2} - \bar{\Phi}^{h+2}) \end{aligned}$$

como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Una propiedad (a priori sorprendente) de la sucesión de Fibonacci, que permite de hecho mostrar por qué el Número de Oro  $\Phi$  aparece naturalmente en este contexto, es la *Identidad de Cassini*, que fue descubierta en 1680 por el astrónomo francés de origen italiano *Gian Domenico Cassini*, 1625-1712.



**Proposición 2.5.6. (Identidad de Cassini.)**

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo,

$$F_2 F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1 = (-1)^1, \quad F_3 F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2.$$

*Demostración.* Lo probamos por inducción:

$$p(n) : F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

- Caso base: ¿ $p(1)$  V? Sí, lo verificamos arriba.
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(h)$  V  $\Rightarrow$   $p(h+1)$  V?

- HI:  $F_{h+1} \cdot F_{h-1} - F_h^2 = (-1)^h$ .
- Qpq  $F_{h+2} \cdot F_h - F_{h+1}^2 = (-1)^{h+1}$ .

Pero por definición de la sucesión, sabemos que para  $h \geq 1$ ,  $F_{h+2} = F_{h+1} + F_h$  y  $F_{h+1} = F_h + F_{h-1}$  (pues en este último caso,  $h \geq 1$  implica  $h-1 \geq 0$ , luego  $F_{h-1}$  está definida). Luego

$$\begin{aligned} F_{h+2} \cdot F_h - F_{h+1}^2 &= (F_{h+1} + F_h) \cdot F_h - (F_h + F_{h-1}) \cdot F_{h+1} \\ &= F_{h+1} \cdot F_h + F_h^2 - F_h \cdot F_{h+1} - F_{h-1} \cdot F_{h+1} \\ &= F_h^2 - F_{h-1} \cdot F_{h+1} = -(F_{h-1} \cdot F_{h+1} - F_h^2) \\ &\stackrel{HI}{=} -(-1)^h = (-1)^{h+1} \end{aligned}$$

como se quería probar.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Esto implica que  $\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$ . Así,

$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right| = \frac{1}{F_{n-1}F_n}.$$



Esto implica que para  $m > n$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_{m+1}}{F_m} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right| &\leq \sum_{i=n}^m \left| \frac{F_{i+1}}{F_i} - \frac{F_i}{F_{i-1}} \right| \leq \sum_{i=n}^m \frac{1}{F_{i-1}F_i} \\ &\leq \sum_{i=n}^m \frac{1}{(i-1)i} = \sum_{i=n}^m \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{m-n+1}{(n-1)m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

ya que es fácil ver que  $F_i \geq i$ , y esto implica  $\frac{1}{F_{i-1}F_i} \leq \frac{1}{(i-1)i}$ . Por lo tanto, para los que saben un poco de Análisis, la sucesión  $(\frac{F_{n+1}}{F_n})_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, y luego converge.

Sea entonces  $F := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ . Se observa que  $F \geq 1$  dado que  $F_{n+1} \geq F_n$ . Entonces

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F}.$$

Por lo tanto el límite  $F$  satisface la ecuación  $F = 1 + \frac{1}{F}$ , o equivalentemente la ecuación  $F^2 = F + 1$ . Se concluye que  $F = \Phi$ , ya que es la raíz  $\geq 1$  del polinomio  $X^2 - X - 1$ .

¿No es esto fantástico? ¡La proporción entre dos números de Fibonacci consecutivos tiende a la proporción divina  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,61803$ ! Por ejemplo  $\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} \sim 1,61798$  y  $\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} \sim 1,61806$ .

### 2.5.3 Sucesiones de Lucas.

Veamos ahora un método muy clásico que permite determinar el término general de todas las sucesiones de Lucas, que son sucesiones “de tipo Fibonacci” definidas recursivamente mediante los dos términos inmediato anteriores.

Una *sucesión de Lucas* es una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida recursivamente por

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_{n+2} = c a_{n+1} + d a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son números dados.

En lo que sigue desarrollamos un método que permite determinar el término general  $a_n$  de la sucesión de Lucas definida arriba.

Consideremos la ecuación  $X^2 - cX - d = 0$  asociada a la sucesión de Lucas (que se obtiene de la expresión  $a_2 - ca_1 - da_0 = 0$  y luego reemplazando  $a_2$  por  $X^2$ ,  $a_1$  por  $X$  y  $a_0$  por 1).

Observemos que en el caso de la sucesión de Fibonacci, la ecuación asociada es  $X^2 - X - 1 = 0$ , justamente la ecuación que tiene como raíces a  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$ .

Supongamos que estamos en el caso en que  $X^2 - cX - d$  tiene dos raíces distintas  $r$  y  $\bar{r}$ . Observemos que estas dos raíces  $r$  y  $\bar{r}$  satisfacen las relaciones

$$r^2 = cr + d \quad \text{y} \quad \bar{r}^2 = c\bar{r} + d. \quad (2.3)$$

Afirmación 1: Las sucesiones  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(\bar{r}^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , y más aún cualquier combinación lineal de ellas

$$(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta \bar{r}^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

satisfacen la misma recurrencia

$$\gamma_{n+2} = c\gamma_{n+1} + d\gamma_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que la sucesión de Lucas  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  original, de la cuál queremos determinar el término general.

Esto es cierto pues

$$\begin{aligned} \gamma_{n+2} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha r^{n+2} + \beta \bar{r}^{n+2} = \alpha r^2 r^n + \beta \bar{r}^2 \bar{r}^n \\ &= \alpha(cr + d)r^n + \beta(c\bar{r} + d)\bar{r}^n = c(\alpha r^{n+1} + \beta \bar{r}^{n+1}) + d(\alpha r^n + \beta \bar{r}^n) \\ &= c\gamma_{n+1} + d\gamma_n. \end{aligned}$$

(Aquí se aplicaron las relaciones (2.3).)

Afirmación 2: Existe una única sucesión  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta \bar{r}^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  que satisface las condiciones iniciales  $\gamma_0 = a$ ,  $\gamma_1 = b$ .

Esto es cierto pues para ello hay que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha r + \beta \bar{r} = b \end{cases}$$

que tiene solución y es única pues  $r \neq \bar{r}$  por hipótesis: se obtiene

$$\alpha = \frac{b - a\bar{r}}{r - \bar{r}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{ar - b}{r - \bar{r}}.$$

Se concluye que esta sucesión  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (\alpha r^n + \beta \bar{r}^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  coincide con la sucesión de Lucas original  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , ya que satisface las mismas condiciones iniciales y la misma recurrencia. Por lo tanto el término general de la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es

$$a_n = \alpha r^n + \beta \bar{r}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En el caso de la sucesión de Fibonacci, se tiene  $r = \Phi$ ,  $\bar{r} = \bar{\Phi}$ , y al resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \Phi + \beta \bar{\Phi} = 1 \end{cases},$$

se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{\Phi - \bar{\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y \quad \beta = \frac{-1}{\Phi - \bar{\Phi}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

o sea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - \bar{\Phi}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

que coincide obviamente con el resultado que probamos en la Proposición 2.5.5.

Pregunta: ¿Qué podemos hacer en el caso en que la ecuación asociada  $X^2 - cX - d = 0$  tiene una única raíz  $r$ , o sea  $X^2 - cX - d = (X - r)^2$ ? En este caso se puede probar, usando que  $c = 2r$  (¿por qué?), que las sucesiones  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $(nr^{n-1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  satisfacen la misma recurrencia, y también cualquier combinación lineal de ellas. Así, resolviendo el sistema lineal con las condiciones iniciales  $\gamma_0 = a$  y  $\gamma_1 = b$  deducimos que el término general  $a_n$  de la sucesión, cuando  $r \neq 0$ , es

$$a_n = ar^n + (b - ar)nr^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Cuando  $r = 0$ , la sucesión está dada simplemente por  $a_0 = a$ ,  $a_1 = b$ ,  $a_{n+2} = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

#### 2.5.4 Inducción completa – Formulación general.

El principio de inducción admite una formulación equivalente a las de los Teoremas 2.3.2 y 2.5.2 que es la que resulta útil cuando al querer probar el paso inductivo, no sabemos para cuál  $k \leq h$ , o para cuáles, vamos a tener que suponer que la hipótesis inductiva se cumple, o cuando necesitamos que la hipótesis inductiva se cumpla para todo  $k \leq h$ .

Consideremos el ejemplo siguiente: sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n + a_k}{n + k + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $a_n \leq n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Pero si queremos probar esta afirmación por inducción, resulta que no nos alcanza suponer verdadera la hipótesis inductiva  $a_h \leq h$  para lograr probar que  $a_{h+1} \leq h + 1$ , pues como la sucesión está definida utilizando todos los términos  $a_k$  con  $k \leq h$  y no podemos definirla utilizando solo  $a_h$ , necesitaremos asumir que la hipótesis inductiva es verdadera para todos los términos  $a_k$  con  $k \leq h$ .

**Teorema 2.5.7. (Principio de inducción completa.)**

Sea  $p(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una afirmación sobre los números naturales. Si  $p$  satisface

- (Caso base)  $p(1)$  es Verdadera,
- (Paso inductivo)  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,  $p(1), \dots, p(h)$  Verdaderas  $\Rightarrow p(h+1)$  Verdadera,

entonces  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(El paso inductivo en este caso también suele escribirse en la forma:  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,  $p(k)$  Verdadera para  $1 \leq k \leq h \Rightarrow p(h+1)$  Verdadera.)

Ejemplo: Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n + a_k}{n + k + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $a_n \leq n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Aplicaremos aquí (por necesidad) el principio de inducción completa enunciado en el Teorema 2.5.7.

$$p(n): \quad a_n \leq n.$$

- Caso base: ¿ $p(1)$  V? Sí, pues efectivamente  $a_1 \stackrel{def}{=} 1 \leq 1$ .
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(1), \dots, p(h)$  Verdaderas  $\Rightarrow p(h+1)$  Verdadera?
  - HI:  $a_1 \leq 1, \dots, a_h \leq h$ , o sea  $a_k \leq k$  para  $1 \leq k \leq h$ .
  - Qpq  $a_{h+1} \leq h+1$ .

Pero para  $h \geq 1$  se tiene

$$a_{h+1} \stackrel{def}{=} 1 + \sum_{k=1}^h \frac{h + a_k}{h + k + 1} \stackrel{HI}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^h \frac{h + k}{h + k + 1}$$

pues por HI,  $a_k \leq k$  implica  $h + a_k \leq h + k$  y por lo tanto, dado que  $h + k + 1 > 0$ ,  $\frac{h+a_k}{h+k+1} \leq \frac{h+k}{h+k+1}$  pues no cambia el sentido de la desigualdad.

Así, para concluir que  $a_{h+1} \leq h+1$ , alcanza con probar que

$$1 + \sum_{k=1}^h \frac{h + k}{h + k + 1} \leq h + 1, \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=1}^h \frac{h + k}{h + k + 1} \leq h.$$

Pero notemos que cada uno de los  $h$  términos  $\frac{h+k}{h+k+1}$  tiene el numerador  $h+k$  positivo y menor que el denominador  $h+k+1$ , o sea

$$1 \leq h+k < h+k+1 \implies \frac{h+k}{h+k+1} < 1$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^h \frac{h+k}{h+k+1} < \sum_{k=1}^h 1 = h,$$

como se quería probar. (Notar que probamos algo más fuerte que lo que necesitamos: que  $\sum_{k=1}^h \frac{h+k}{h+k+1} < h$ , pero esto claramente implica que  $\sum_{k=1}^h \frac{h+k}{h+k+1} \leq h$  como nos alcanza. En realidad la proposición dice  $\leq$  por el término  $a_1 = 1$  pero a partir de  $a_2$  vale la desigualdad estricta.)

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Demos otro ejemplo en este capítulo del curso donde se puede usar el principio de inducción completa, corrido esta vez.

Ejemplo: Probar que si se tienen estampillas de 4 y 5 \$, se pueden mandar cartas de cualquier precio  $n$  entero, con  $n \geq 12$ .

*Demostración.*

$$p(n) : \quad \text{existen } j, k \in \mathbb{N} \text{ tq } n = j \cdot 4 + k \cdot 5.$$

- Caso base: ¿ $p(12)$  V? Sí, pues  $12 = 3 \cdot 4$ : se necesitan 3 estampillas de 4 \$.
- Paso inductivo: Dado  $h \geq 12$ , ¿ $p(k)$  V para  $12 \leq k \leq h \implies p(h+1)$  V?

Inmediatamente se ve que para obtener  $h+1$  con estampillas de 4 y 5 \$, conviene obtener  $h-3$  con estampillas de 4 y 5 \$, y luego agregarle una estampilla de 4 \$, ya que  $h+1 = (h-3) + 4$ . O sea necesitamos aplicar la hipótesis inductiva para  $h-3$ , y de ella podremos deducir que  $p(h+1)$  es Verdadero.

La hipótesis inductiva permite suponer que  $p(k)$  es V para  $12 \leq k \leq h$ . Entonces debemos verificar que  $h-3$  está en las condiciones de la HI.

Está claro que  $h-3 \leq h$ . Pero  $h-3 \geq 12 \iff h+1 \geq 16$ . O sea la HI nos permite probar que  $p(h+1)$  es V a partir de  $h+1 = 16$ . Por lo tanto tenemos que verificar los casos  $h = 13$ ,  $h = 14$  y  $h = 15$

aparte (porque para ellos la HI requerida sería  $p(10)$  V,  $p(11)$  y  $p(12)$  V, que no se cumple.

- ¿ $p(13)$  V? Sí, pues  $13 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5$ : se necesitan 2 estampillas de 4 \$ y una de 5.
- ¿ $p(14)$  V? Sí, pues  $14 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5$ : se necesitan 1 estampilla de 4 \$ y 2 de 5.
- ¿ $p(15)$  V? Sí, pues  $15 = 3 \cdot 5$ : se necesitan 3 estampillas de 5 \$.

Así terminamos de probar el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Aquí otro ejemplo, que tiene que ver con la cantidad de cortes necesarios para separar todas las cartas de un mazo de  $n$  cartas.

Ejemplo: Dado  $n \in \mathbb{N}$ , probar que si se tiene un mazo de  $n$  cartas, se necesitan hacer  $n - 1$  cortes para separar todas las cartas independientemente de la manera que se hagan los cortes. ¿Se entiende, no? se trata de pasar de un pilón vertical de cartas a todas cartas separadas, o sea a  $n$  pilones individuales de una carta... (El número  $n - 1$  es bastante intuitivo en este caso ya que hay que separar todas las cartas, pero nos va a servir formalizarlo con inducción completa para entender mejor el ejemplo siguiente.)

*Demostración.*

$p(n)$  : Se necesitan  $n - 1$  cortes para separar completamente  $n$  cartas.

- Caso base: ¿ $p(1)$  V? Sí, pues no hay que separar nada: no se necesita hacer ningún corte.
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(k)$  V para  $1 \leq k \leq h \Rightarrow p(h + 1)$  V? (Es decir, si para un mazo de  $k$  cartas con  $1 \leq k \leq h$  necesito  $k - 1$  cortes, ¿puedo deducir que para un mazo de  $h + 1$  cartas se necesitan  $h$  cortes?)

Haga lo que haga tengo que hacer un primer corte, que va a separar mi mazo de  $h + 1$  cartas en dos mazos: uno de  $j$  cartas y otro de  $k$  cartas, con  $1 \leq j, k \leq h$  y  $j + k = h + 1$ . Ahora bien, tanto para  $j$  y  $k$  puedo aplicar la HI, ya que  $1 \leq j, k \leq h$ : para separar el mazo de  $j$  cartas necesito  $j - 1$  cortes y para el mazo de  $k$  cartas necesito  $k - 1$  cortes. Luego necesito en total

$$1 + (j - 1) + (k - 1) = j + k - 1 = (h + 1) - 1 = h$$

cortes como quería probar.

Así terminamos de probar el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

*Ejemplo:* Hagamos ahora una modificación del ejemplo anterior, donde los cortes tienen un costo y donde la conclusión no es tan obvia ni tan intuitiva: ahora cada corte que separa el mazo de  $n$  cartas en dos mazos de  $j$  y  $k$  cartas, con  $j + k = n$ , cuesta  $jk$ . La pregunta es si hay una estrategia ganadora, o sea que cueste menos, para separar completamente el mazo de  $n$  cartas, o si todas las estrategias tienen el mismo costo.

Antes de proponer una solución, hagamos un ejemplo no obvio. Por ejemplo tenemos un mazo de 8 cartas.

Una primera estrategia que podríamos pensar que es ingenua, es ir sacando las cartas de arriba de a una: esto nos cuesta  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$  ¿Se entiende por qué? el primer corte cuesta  $1 \cdot 7$ , el segundo  $1 \cdot 6$ , etc., hasta el último que cuesta  $1 \cdot 1$ , y se suman los costos.

Otra estrategia que puede parecer más inteligente, y se llama “dividir y conquistar”, consiste en cortar cada vez los mazos por la mitad. El primer corte cuesta entonces  $4 \cdot 4$  y nos quedan 2 mazos de 4 cartas para separar. Cada uno aplicando la misma estrategia cuesta  $2 \cdot 2$ , y nos quedan 4 mazos de 2 cartas cada uno, y separar cada uno de ellos cuesta  $1 \cdot 1$ . Así el costo total es  $16 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 28$  también! ¿Será que siempre da lo mismo? o sea, ¿será que independientemente de la estrategia elegida,

$$p(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

que es el costo de la estrategia ingenua? Intentemos ver si lo podemos probar.

*Demostración.*

$$p(n) : \quad \text{El costo de cualquier estrategia es } \frac{(n-1)n}{2}.$$

- Caso base: ¿ $p(1)$  V? Sí, pues no hay que separar nada: no se necesita hacer ningún corte, y  $\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$ . O sea en este caso cualquier estrategia tiene costo 0.
- Paso inductivo: Dado  $h \in \mathbb{N}$ , ¿ $p(k)$  V para  $1 \leq k \leq h \Rightarrow p(h+1)$  V? (Es decir, si para un mazo de  $k$  cartas con  $1 \leq k \leq h$  el costo de cualquier estrategia es  $\frac{(k-1)k}{2}$ , ¿puedo deducir que para un mazo de  $h+1$  cartas el costo es  $\frac{h(h+1)}{2}$ ?)

Como antes, haga lo que haga tengo que hacer un primer corte, que va a separar mi mazo de  $h+1$  cartas en dos mazos: uno de  $j$  cartas y otro de  $k$  cartas, con  $1 \leq j, k \leq h$  y  $j + k = h + 1$ , y esto tiene un

costo  $jk$ . Ahora bien, tanto para  $j$  y  $k$  puedo aplicar la HI, ya que  $1 \leq j, k \leq h$ : el costo de cualquier estrategia para el mazo de  $j$  cartas va a de  $\frac{(j-1)j}{2}$  y el costo para el mazo de  $k$  cartas es  $\frac{(k-1)k}{2}$ , donde no olvidamos que  $j + k = h + 1$ . Así, haga lo que haga el costo para mi mazo de  $h + 1$  cartas es (haciendo la cuenta)

$$\begin{aligned} jk + \frac{(j-1)j}{2} + \frac{(k-1)k}{2} &= \frac{2jk + (j-1)j + (k-1)k}{2} \\ &= \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \frac{h(h+1)}{2}, \end{aligned}$$

como se quería probar.

Así terminamos de probar el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que  $p(n)$  es Verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Durante este curso veremos varios ejemplos más donde usaremos esta versión del principio de inducción, o su variante corrida, por ejemplo para probar el Algoritmo de División entera en  $\mathbb{Z}$ , o para probar el Teorema de Gauss que dice que todo número natural  $n \neq 1$  es divisible por algún número primo, o para probar el teorema fundamental de la aritmética.

## 2.6 Apéndice

### 2.6.1 Los axiomas de Peano.

A fines del siglo XIX, el matemático, lógico y filósofo italiano *Giuseppe Peano*, 1858-1932, dio una definición axiomática de los números naturales. La clave de la definición de Peano es la noción de *sucesor*  $S$  que es la función de  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $S(n) = n + 1$ , y las propiedades que satisface.



El conjunto  $\mathbb{N}$  de números naturales es un conjunto  $\mathcal{N}$  que satisface los axiomas siguientes:

1.  $1 \in \mathcal{N}$ .
2. Existe una función “sucesor”  $S$  definida sobre  $\mathcal{N}$  que satisface:
  - Para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $S(n) \in \mathcal{N}$  (es decir  $S$  es una función de  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{N}$ ).
  - Para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $S(n) = 1$  es Falso (es decir, 1 no es el sucesor de ningún  $n \in \mathcal{N}$ ).



- Para todo par de números  $n, m \in \mathcal{N}$ , si  $S(n) = S(m)$ , entonces  $n = m$  (es decir la función  $S$  es inyectiva).
3. Si  $K$  es un conjunto cualquiera que satisface las dos propiedades siguientes
- $1 \in K$ ,
  - para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $n \in K \Rightarrow S(n) \in K$ ,

entonces  $\mathcal{N} \subset K$ .

Los Axiomas 1 y 2 implican que el conjunto  $\mathcal{N}$  contiene a los elementos  $1, S(1), S(S(1)), \dots$ , que son todos distintos entre sí, y es por lo tanto infinito. Pero hay que garantizar que no es más “grande” que el conjunto  $\{1, S(1), S(S(1)), \dots\}$ : éste es papel que juega el Axioma 3, que es de hecho el axioma de Inducción. Por ejemplo el conjunto  $\mathcal{N} := \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$  satisface los tres primeros axiomas pero no el 3ro, ya que si tomamos  $K = \mathbb{N}$  (los números naturales que conocemos) tendríamos que deducir que  $\mathcal{N} \subset K$ , es decir  $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ , lo que es claramente falso.

### 2.6.2 El Principio de Buena Ordenación y los Principios de Inducción.

El *Principio de Buena Ordenación* dice que todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  contiene un *primer elemento*, es decir un elemento que es menor o igual que todos los demás.

De hecho, sabiendo que  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , este resultado es bastante natural ya que si el subconjunto  $A \subseteq \mathbb{N}$  es finito y no vacío, podemos comparar sus elementos y quedarnos con el más chico, y si el conjunto  $A \subseteq \mathbb{N}$  es infinito y no vacío, podemos considerar un elemento  $n_0 \in A$  y quedarnos con  $A \cap \mathbb{N}_{\leq n_0}$ , que es finito y no vacío: el menor elemento de este conjunto es el menor elemento de  $A$ .

Pero se puede probar un resultado más potente: se puede probar que de hecho el Principio de Inducción (P.I., Teorema 2.3.2), el Principio de Inducción completa (P.I.C., Teorema 2.5.7) y el Principio de Buena Ordenación (P.B.O.) son todos equivalentes entre sí, es decir si vale cualquier de ellos valen los otros.

Para demostrar ese tipo de afirmaciones donde hay más de dos proposiciones que son equivalentes, se acostumbra mostrar implicaciones en forma de ciclo: por ejemplo aquí lo se puede probar la sucesión de implicaciones

$$\text{P.I.} \implies \text{P.I.C.} \implies \text{P.B.O.} \implies \text{P.I.}$$

Así por ejemplo para ver que  $P.B.O \Rightarrow P.I.C.$  se utiliza el hecho que  $P.B.O. \Rightarrow P.I. \Rightarrow P.I.C.$

Estas demostraciones son bastante sutiles. El lector inquieto las puede encontrar sin dificultad en internet, o en distintos libros, o en las notas de Pacetti-Graña que aparecen en la bibliografía del curso.

## 2.7 Ejercicios.

### Sumatoria y Productoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a)  $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

(b)  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

(c)  $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$

(d)  $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$

(e)  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$

(f)  $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$

- ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a)  $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$

(b)  $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$

(c)  $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i)  $\sum_{i=6}^n 2(i-5)$

iii)  $\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{2i}$

v)  $\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3}$

ii)  $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

iv)  $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$