3. Espacios vectoriales

En este capítulo analizamos cómo se generalizan las nociones de espacios lineales para vectores de $\mathbb{R}^n$*. Los espacios vectoriales son el objeto principal de estudio del Álgebra Lineal. Los ejemplos abundan en todas las ramas de la matemática.*

En este libro, solo daremos una breve introducción centrados exclusivamente en espacios vectoriales que viven dentro de $\mathbb{R}^n$*; conocidos como* subespacios de $\mathbb{R}^n$.

En este capítulo estudiaremos...

1. Subespacios de $\mathbb{R}^n$.
2. Combinaciones lineales de vectores.
3. Dependencia lineal de un conjunto de vectores.
4. Generadores, bases y dimensión de subespacios.

■

3.1 Subespacios de $\mathbb{R}^n$

En el capítulo 1, estudiamos que las propiedades de los espacios de vectores no dependen de su ubicación, sino de sus características propias (la pendiente de la recta, la inclinación del plano). Por esta razón, la teoría de espacios vectoriales se desarrolla exclusivamente para espacios de vectores que pasen por el origen. Algebraicamente, esto tiene, además, la ventaja de contar con el elemento nulo de la suma: el vector $\vec{0}$.

Importante En esta unidad, todos los espacios lineales que aparecen pasan por el origen. ■

Desde el punto de vista algebraico, la propiedad característica que tienen las rectas y los planos *que pasan por el origen* es que *son cerrados por suma de vectores y producto de un vector por un escalar*. Esto quiere decir que, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores cuyos extremos pertenecen a una recta L o a un plano Π, entonces el vector $\vec{v} + \vec{w}$ y todos los vectores $\lambda\vec{v}$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, también pertenecen a L o a Π. La manera de generalizar la noción de espacio lineal a $\mathbb{R}^n$ es la siguiente: se trata de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ tal que, al sumar dos vectores del conjunto, el resultado es nuevamente un vector del conjunto y, al multiplicar un vector del conjunto por un escalar cualquiera, el resultado es nuevamente un vector del conjunto. Observemos que, dado que la suma y producto por escalar están definidos considerando que el origen de los vectores es el origen de coordenadas, entonces el vector nulo $\vec{0}$ deberá pertenecer necesariamente a dicho conjunto.

Definición 31 Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores $S \subset \mathbb{R}^n$ que tiene las siguientes características:

1. $\vec{0} \in S$,
2. si $\vec{v}, \vec{w} \in S$ entonces $\vec{v} + \vec{w} \in S$ y
3. si $\vec{v} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera entonces $\lambda\vec{v} \in S$.

Retomamos lo dicho anteriormente: la suma de vectores del subespacio vuelve a ser un vector del subespacio y el producto de un vector del subespacio por un escalar cualquiera, también es un vector del subespacio. Consideremos el conjunto $S \subset \mathbb{R}^5$ de vectores cuya última coordenada es 0. Afirmamos que S es un subespacio. En efecto, el vector $(0, 0, 0, 0, 0) \in S$, pues su última coordenada es 0. Además, si $(a, b, c, d, 0), (p, q, r, s, 0) \in S$, entonces $(a, b, c, d, 0) + (p, q, r, s, 0) = (a + p, b + q, c + r, d, s, 0 + 0) \in S$, pues su última coordenada sigue siendo 0. Por último, si $(a, b, c, d, 0) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda(a, b, c, d, 0) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, \lambda 0) = \lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, 0) \in S$. Por lo tanto, S es efectivamente un subespacio.

Proponemos realizar el siguiente experimento para comprobar que las rectas y los planos que pasan por el origen tienen estas propiedades:

Experimento 22 Consideren una recta L de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$ y un plano Π de ecuación vectorial $X = s\vec{w} + r\vec{u}$.

1. Muestren que si P y Q son puntos de L y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $P + Q$ y λP también.
2. Muestren que si P y Q son puntos de Π y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $P + Q$ y λP también.

■

3.2 Combinación lineal

Cuando una recta pasa por el origen podemos hallar una ecuación vectorial de la forma $X = t\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector director. Ahora, $P \in L$ si existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = t\vec{v}$ (aquí estamos pensando en el extremo de $\vec{v}$). Es decir, P está en la recta si P es múltiplo del vector director $\vec{v}$. ¿Qué sucede en el caso de un plano Π, que pasa por el origen, dado en forma vectorial? Si escribimos una ecuación vectorial para Π de la forma $X = t\vec{v} + s\vec{w}$ entonces, para ver si $P \in \Pi$, observamos si existían $t, s \in \mathbb{R}$ tales que P tuviese la forma $t\vec{v} + s\vec{w}$. Es decir, $P \in \Pi$ sí, y solo sí, es la suma de múltiplos de los vectores directores del plano. En espacios de mayor dimensión, la idea de que un punto pertenezca o no a un subespacio es la misma: el punto P está en el subespacio S si y solo si P es suma de múltiplos de vectores directores de S.

¿Qué significa, entonces, "vectores directores" de un subespacio y "suma de múltiplos de los vectores directores"? Vamos a cambiar ciertos nombres y definiciones cuando trabajemos en el contexto más general. Cuando $\vec{v}$ es un vector director de una recta L, diremos que $\vec{v}$ *genera* L; y cuando $\vec{w}, \vec{u}$ son vectores directores de un plano Π, diremos que *generan* el plano Π. ¿Y cómo lo hacen? De la manera que venimos viendo: los puntos de L son múltiplos de $\vec{v}$ y los puntos de Π son suma de múltiplos de $\vec{w}$ y $\vec{u}$. Esta noción de "suma de múltiplos" de $\vec{w}$ y $\vec{u}$ se llama *combinación lineal de* $\vec{w}$ *y* $\vec{u}$ y se define en general como sigue:

Definición 32 Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$. Una *combinación lineal de los vectores* $\vec{v}_1, \dots, \vec{v_r}$ es un vector $\vec{w}$ de la forma:

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{v}_r$$

para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

¿Cómo hacemos para determinar si un vector es combinación lineal de otros? Pensemos la respuesta a partir de un ejemplo. Supongamos que queremos saber si el vector $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1,0,2)$ y $(-1,1,-5)$. Esto sucederá sí, y solo sí, existen escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,2,3) = \lambda(1,0,2) + \mu(-1,1,-5) = (\lambda - \mu, \mu, 2\lambda - 5\mu)$$

Es decir, λ y μ deben verificar:

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ 2\lambda - 5\mu = 3 \end{cases}$$

De las dos primera ecuaciones despejamos $\mu = 2$ y $\lambda = 3$. Nos resta, entonces, chequear si con estas igualdades se verifica la última ecuación:

$$2\lambda - 5\mu = 2{,}3 - 5{,}2 = -4 \neq 3$$

Por lo tanto, concluimos que $(1,2,3)$ no es combinación lineal de los vectores $(1,0,2)$ y $(-1,1,-5)$.

Veamos, entonces, cómo reescribimos la ecuación vectorial de un plano utilizando la noción de combinación lineal. Al repasar lo que hicimos anteriormente, observamos que si el plano está generado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (es decir, son vectores directores del plano), entonces $P \in \Pi$ si y solo si P es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Esto quiere decir que Π es *exactamente* el conjunto de los puntos que se obtienen de hacer todas las posibles combinaciones lineales entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 33 Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r}$ se nota:

$$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$$

Es decir, los vectores que pertenecen al conjunto $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ son aquellos que se pueden escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

El conjunto $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ es un subespacio. El estudiante interesado puede comprobar esto verificando que, tanto la suma como el producto por escalar de vectores de $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$, también pertenece a $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ (es decir, también es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r}$).

3.3 Dependencia lineal

Cuando un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, sucede que $\vec{v}$ *depende linealmente* de estos vectores: "depende", porque es combinación de ellos y, "linealmente", pues la combinación es lineal. Cuando tenemos un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\}$, podríamos preguntarnos si alguno de ellos depende linealmente de los otros. En un ejemplo de la capítulo anterior, trabajamos con la ecuación vectorial $X = t(-1,5,2) + s(2,-10,-4) + (1,1,3)$, y vimos que dicha ecuación no determina un plano (pues los vectores directores son múltiplos). En realidad, determina una recta ya que, como $(2,-10,-4) = -2(-1,5,2)$, se puede reescribir $(t-2s)(-1,5,2) + (1,1,3)$ y, aquí, $t - 2s$ es un número real cualquiera (no importa que utilicemos dos parámetros para escribirlo; podríamos usar solo uno). Si esta ecuación está describiendo una recta, entonces trabajar con ella hace las cosas más complicadas, ya que estamos empleando dos vectores directores (y dos parámetros), mientras que para describir la recta solo necesitamos uno. Pero justamente, lo que sucede en este caso es que *los vectores* $(-1,5,2)$ *y* $(2,-10,-4)$ *son linealmente dependientes* (uno es múltiplo del otro). En general, cuando describimos subespacios, buscamos la manera más económica de hacerlo; y esta es, precisamente, que los vectores que usemos "como directores" sean linealmente independientes: si no lo fueran, entonces, uno de ellos sería combinación lineal de los otros y sería necesario para describir al subespacio. La definición formal de independencia lineal es la siguiente:

Definición 34 Un conjunto de vectores $\{v_1,\dots,v_r\}$ se dice *linealmente dependiente* si existen $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ *no todos nulos* tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$. Es decir, son linealmente dependientes si existe una combinación lineal no trivial (no todos los $\lambda_i = 0$) que da el vector $\vec{0}$. Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente si la única combinación lineal de los $\{v_1,\dots,v_r\}$ que da 0 es la que tiene a todos los coeficientes de la combinación lineal nulos.

Analicen la definición de dependencia lineal y vean que es equivalente a expresar que un vector puede ser escrito como combinación lineal de otros.

Queremos saber si un conjunto de vectores es o no linealmente dependiente. En el siguiente ejemplo veremos la técnica que permite determinar esto. Consideremos el conjunto:

$$\{(1,2,3),(1,0,2),(-1,-6,-5)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Este conjunto será linealmente independiente si, y solo si, la única combinación lineal entre todos sus vectores –que da como resultado el vector nulo– es aquella que tiene todos los coeficientes de la combinación nulos. Analicemos, entonces, cómo son las combinaciones lineales de estos vectores que dan como resultado el vector nulo. Consideremos una combinación lineal genérica igualada al vector nulo:

$$\lambda(1,2,3)+\mu(1,0,2)+\nu(-1,-6,-5)=\vec{0}$$

Esto es lo mismo que escribir:

$$(\lambda+\mu-\nu,2\lambda-6\nu,3\lambda+2\mu-5\nu)=(0,0,0)$$

Es decir:

$$\begin{cases} \lambda+\mu-\nu=0 \\ 2\lambda-6\nu=0 \\ 3\lambda+2\mu-5\nu=0 \end{cases}$$

De la ecuación segunda obtenemos $\lambda = 3\nu$. Al reemplazar en la primera ecuación, despejamos $\mu = -2\nu$. Finalmente, reemplazando estas dos informaciones en la tercera ecuación obtenemos $3(3\nu)+2(-2\nu)-5\nu = 0$. Es decir, $0 = 0$. Al haber utilizado todas las ecuaciones, solo nos quedan las restricciones $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$. Aquí, la variable ν es libre y puede tomar cualquier valor (no hay restricción sobre ella). Esto nos dice que, sin importar quién es ν, mientras que, para un ν elegido arbitrariamente, se cumpla $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$, entonces se va a verificar que la combinación lineal de los vectores originales como resultado el vector nulo. Por ejemplo, tomando $\nu = 1$, nos queda $\lambda = 3$ y $\mu = -2$, y hallamos que:

$$3(1,2,3)-2(1,0,2)+(-1,-6,-5)=(0,0,0)$$

Este desarrollo nos indica que el conjunto $\{(1,2,3),(1,0,2),(-1,-6,-5)\}$ es linealmente dependiente: hallamos una combinación lineal del vector nulo donde no todos los coeficientes son nulos (de hecho, ninguno lo es). Entonces, ¿cuándo es un conjunto linealmente independiente? Cuando la solución del sistema de ecuaciones simultáneas da como resultado $\lambda = 0$, $\mu = 0$ y $\nu = 0$ como única solución.

3.4 Generadores, base y dimensión

Para describir un subespacio $\mathbb{R}^n$, se hace de la misma manera que para planos y rectas. Básicamente se utilizan dos formas: *por ecuaciones* o *por generadores*.

Descripción por ecuaciones Describir un subespacio de $\mathbb{R}^n$ por ecuaciones es como describir una recta o un plano por ecuaciones implícitas: damos una relación lineal entre las coordenadas de los puntos que pertenecen al subespacio. Por ejemplo, un posible subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$$

Este subespacio queda, entonces, determinado por todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas verifican estas ecuaciones simultáneamente. ¿Cómo se puede describir por ecuaciones el subespacio S introducido en la página 80? Simplemente, de la siguiente manera:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x_5 = 0\}$$

Descripción por generadores La otra manera es describir al subespacio exhibiendo generadores del mismo. Recordemos que un subespacio T es, simplemente, un conjunto de vectores que tiene las propiedades 1-3 introducidas en el apartado 3.1. Un *conjunto de generadores* de T es un conjunto finito de vectores $\{v_1,\dots,v_r\}$ tal que, cualquier vector de T, puede escribirse como combinación lineal de $v_1,\dots,v_r$ (de la misma forma como cualquier punto de un plano se podía escribir como combinación lineal de sus vectores directores).

> **Definición 35** Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Un *conjunto de generadores* para T es un conjunto finito $\{v_1,\dots,v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $T = \langle v_1,\dots,v_r\rangle$.

Al considerar, nuevamente, al subespacio $S \subset \mathbb{R}^5$ conformado por todos los vectores de $\mathbb{R}^5$ cuya última coordenada es 0. Afirmamos que el conjunto (de cuatro vectores):

$$\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}$$

es un sistema de generadores de S. Esto significa que debemos verificar que todos los vectores de S se pueden escribir como combinación lineal de los vectores $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$ y, *además*, que todos los vectores de $\langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$ están en S (recuerden que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$ simultáneamente). Por un lado, los vectores de S tienen la forma $(a,b,c,d,0)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pero,

$$(a,b,c,d,0) = a(1,0,0,0,0) + b(0,1,0,0,0) + c(0,0,1,0,0) + d(0,0,0,1,0),$$

es una combinación lineal de los vectores del conjunto en consideración. Esto muestra que:
$S \subset \langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$.
Por otro lado, cualquier combinación lineal de los vectores $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$ tiene su última coordenada 0, pues:

$$\alpha(1,0,0,0,0) + \beta(0,1,0,0,0) + \gamma(0,0,1,0,0) + \delta(0,0,0,1,0) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta,0)$$

Esto muestra que $\langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle \subset S$. Concluimos, entonces, que $S = \langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$, como queríamos ver.

¿Cómo pasamos de la descripción por generadores a la descripción por ecuaciones y viceversa? De la misma manera que hicimos para pasar de la ecuación implícita a la vectorial de una recta o un plano. Consideremos el subespacio:

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + 2x_2 = 0, \ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

Los vectores de T son aquellas 4-uplas (x_1,x_2,x_3,x_4) que verifican:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Al despejar x_1 en la primera ecuación, obtenemos $x_1 = -2x_2$; y despejando x_4 en la segunda ecuación, $x_4 = x_2 + 3x_3$ (notemos que aquí no pudimos reemplazar por el valor despejado en la primera ecuación pues no aparece el x_1 en la segunda ecuación). Como no hay más ecuaciones, toda la información que pudimos extraer es que x_1 depende de x_2 y que x_4 depende de x_2 y x_3. Por lo tanto, los puntos de T son aquellos vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $(-2x_2, x_2, x_3, x_2 + 3x_3)$. Este vector lo escribimos de la siguiente manera:

$$x_2(-2,1,0,1) + x_3(0,0,1,3)$$

Como x_2 y x_3 no tienen restricciones, entonces son libres, y los vectores de T son las combinaciones lineales de los vectores $(-2,1,0,1)$ y $(0,0,1,3)$. Es decir, $T = \langle(-2,1,0,1),(0,0,1,3)\rangle$.

Si ahora queremos describir por ecuaciones el subespacio $\langle(-2,1,0,1),(0,0,1,3)\rangle$, simplemente debemos plantear que los puntos del subespacio son las combinaciones lineales de ambos vectores. Es decir, los puntos de este subespacio son de la forma:

$$\lambda(-2,1,0,1) + \mu(0,0,1,3)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Al desarrollar esta última expresión, obtenemos:

$$\lambda(-2,1,0,1) + \mu(0,0,1,3) = (\underbrace{-2\lambda}_{x_1}, \underbrace{\lambda}_{x_2}, \underbrace{\mu}_{x_3}, \underbrace{\lambda + 3\mu}_{x_4})$$

Es decir, podemos escribir:

$$\begin{cases} x_1 = -2\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

En este caso, al igual que en el pasaje hecho para rectas y planos, debemos hallar la relación entre las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 eliminando los parámetros λ y μ. Por ejemplo, como $x_2 = \lambda$, entonces, la primera ecuación queda $x_1 = -2x_2$. Y al reemplazar estos despejes en la cuarta ecuación nos queda $x_4 = x_2 + 3x_3$. Por lo tanto, hemos usado todas las ecuaciones y hemos hallado las dos ecuaciones $x_1 = -2x_2$ y $x_4 = x_2 + 3x_3$.

3.4.1 Bases

Nuevamente, consideremos el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_5 = 0\}$. Como vimos $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}$ era un sistema de generadores para S. Proponemos realizar el siguiente experimento para hallar otros posibles conjuntos de generadores para S.

Experimento 23 Muestren que cada uno de los siguientes conjuntos es un sistema de generadores para S.

1. $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0)\}$.
2. $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0)\}$.
3. $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(1,2,3,4,0)\}$.

¿Qué sucede en el punto 3. del experimento 24? Tanto en el desarrollo de la explicación como en los puntos 1. y 2., vemos que S se puede generar usando cuatro vectores; pero el ítem 3. indica que también podemos hacerlo con cinco. En este caso, sucede que es que el último vector es combinación lineal de los otros, con lo cual no aporta ninguna información nueva. Sin embargo, también es un sistema de generadores de S, pues todo elemento de S es combinación lineal de esos cinco vectores y todo vector que sea combinación lineal de esos cinco vectores está en S. Si trabajamos con un subespacio, lo más conveniente es tenerlo descripto de la manera más sencilla posible. Es decir, ¿por qué usar cinco vectores si podemos describirlo con cuatro? Esta es precisamente la noción de *base* de un subespacio: un sistema de generadores del subespacio lo más pequeño posible. ¿Qué significa "lo más pequeño posible"? Que no haya ningún vector "de más" en el sistema: que con el resto de los vectores del sistema "nos alcanza". Y un vector "está de más" en un sistema de generadores si lo podemos generar con los otros vectores del sistema; vale decir, si es combinación lineal de los otros. La definición forma del base es, entonces, la siguiente:

Definición 36 Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_r\}$ es una *base* de S si es un sistema de generadores de S y es linealmente independiente.

Observemos que si un conjunto de vectores tiene menos vectores *que una base, entonces, no puede ser un sistema de generadores, y si tiene* más vectores *que una base entonces no puede ser linealmente independiente.*

Se puede ver que los conjuntos de generadores de los ítems 1. y 2. del Experimento 23 son bases del subespacio S (es decir, son conjuntos linealmente independientes). Por el contrario, como observamos, el conjunto de generadores del ítem 3. no es una base. Sin embargo, notemos que, si removemos el último vector del sistema, obtenemos una base de S. Esto siempre se le puede hacer a un sistema de generadores: remover sus vectores hasta quedarnos con un conjunto linealmente independiente. Esto se llama *extraer una base* del sistema de generadores. Lo que sucede es que, si X es un sistema de generadores de un subspacio $T \neq \{\vec{0}\}$ que no es base, entonces alguno de sus vectores es combinación lineal de los otros. Por lo tanto, podemos remover este vector al conjunto X y este nuevo conjunto más pequeño, seguirá generando al subespacio T (porque, al haber removido un vector que es combinación lineal de los otros, no perdimos información). Este procedimiento podemos continuarlo hasta obtener un conjunto linealmente independiente que genere T (y, por ende, sea una base de T).

Observen por qué el procedimiento anterior siempre termina en un conjunto linealmente independiente. Analicen cómo son los conjuntos generados por un solo vector.

De manera análoga, si tenemos un conjunto Y de vectores de un subespacio T, que es linealmente independiente, entonces podemos *extenderlo a una base*; es decir, podemos agregarle vectores de T al conjunto Y de manera que, a medida que vamos agregando nuevos vectores, el conjunto siga siendo linealmente independiente. Este proceso podemos continuarlo hasta conseguir un sistema de generadores de T (y por lo tanto, una base de T).

El procedimiento anterior siempre termina en un conjunto de generadores del suvbespacio. Analicen las posibles formas en las que no es posible continuar con el proceso.

Tal como establecimos, hallar bases de subespacios es muy importante, ya que las bases proveen las maneras más fáciles de describir a los subespacios. Miren una de las ventajas de trabajar con bases en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 38 Consideren un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S. Sabemos que, como $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores, entonces todo vector de S es combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$. Pero como $\mathcal{B}$ es una base, demostramos que esta combinación lineal *es única*. Es decir, existe una sola manera de combinar linealmente los vectores de $\mathcal{B}$ para lograr un vector $\vec{w} \in S$ dado. En efecto, supongamos que hubiese dos maneras de expresar a $\vec{w}$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_r \vec{v_r} \text{ y } \vec{w} = \mu_1 \vec{v_1} + \cdots + \mu_r \vec{v_r}.$$

Al igualar ambas ecuaciones, tenemos:

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_r \vec{v_r} = \mu_1 \vec{v_1} + \cdots + \mu_r \vec{v_r},$$

y al pasar todos lo términos de la derecha a la izquierda, obtenemos:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{v_r} = \vec{0}.$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ que da $\vec{0}$ y, como $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces la única posibilidad es que todos los coeficientes $\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_r - \mu_r$ sean 0 (recuerden la definición 34 dada en la página 82). Por lo tanto, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ ... $\lambda_r = \mu_r$ y concluimos que las dos combinaciones lineales que en principio parecían distintas, en realidad, son la misma. ■

Por supuesto, hay infinitas bases que podemos construirnos para un subespacio (como hay infinitas posibilidades de crear un sistema de generadores o de elegir vectores directores de un plano). Tengamos en cuenta que las bases que construimos para el subespacio S de vectores de $\mathbb{R}^5$ con la última coordenada nula siempre tienen cuatro vectores. Podríamos preguntarnos si esto es casualidad o no. Es decir, si tenemos dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ para un subespacio S, ¿tienen la misma cantidad de vectores siempre? La respuesta es sí. *Dos bases del mismo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tienen siempre la misma cantidad de vectores*. Este número se llama *dimensión del subespacio S*. En nuestro ejemplo, podemos decir que S tiene dimensión 4.

La noción de dimensión es muy útil también para trabajar con espacios vectoriales. Por ejemplo, si sabemos que S tiene dimensión 4, entonces, ya podemos concluir que un conjunto que no tenga exactamente cuatro vectores no puede ser base de S. También, si se tienen dos subespacios $T, L \subset \mathbb{R}^n$ de la misma dimensión, tales que uno está contenido en el otro (por ejemplo, $L \subset T$), entonces concluimos que son iguales.

La palabra "dimensión" en el contexto de la teoría de subespacios está fuertemente ligada a nuestra noción de esta palabra en la vida cotidiana. Por ejemplo, sabemos que nuestro espacio (de tres grados de libertad) es tridimensional; y tenemos, seguramente, la idea de que un plano tiene dos dimensiones y una recta, una sola. Y esto es precisamente lo que sucede con esta definición de dimensión. Puede probarse que toda base de un plano tiene dos vectores y, por lo tanto, todos los planos tienen dimensión 2. Por ejemplo, el plano xy en $\mathbb{R}^3$ tiene por posible base al $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$. De la misma manera, el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, con posible base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Estas bases que parecen tan naturales de considerar se las conoce como bases canónicas.

¿Qué hicimos en el capítulo 3?

- Definimos algebraicamente la noción de *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *a partir de sus propiedades relacionadas con la suma de vectores y el producto por un escalar.*
- Estudiamos las nociones de combinación lineal de vectores y de dependencia lineal de vectores.
- Definimos las nociones de sistema de generadores, de base y de dimensión de un subespacio vectorial.

■