Capítulo 6

Números Complejos.

El próximo capítulo tratará sobre los polinomios con coeficientes en un cuerpo K. Hasta ahora mencionamos en la materia varios ejemplos de cuerpos: el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, los cuerpos finitos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para p un número primo, aunque nunca introdujimos la definición formal. A continuación definimos la noción de cuerpo y hacemos un repaso exhaustivo del cuerpo de los números complejos orientado a lo que nos interesa que es estudiar polinomios con coeficientes complejos.

6.1 Cuerpos.

Definición 6.1.1. (Cuerpo.)

Sea K un conjunto, y sean $+, \cdot : K \times K \to K$ dos operaciones en K (usualmente la suma y el producto). Se dice que $(K, +, \cdot)$ es un *cuerpo* si

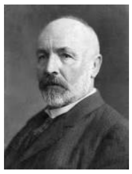
- $+$ y $\cdot$ son operaciones asociativas y conmutativas. Es decir $\forall\, x, y, z \in K$ se tiene $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (asociatividad) y $\forall\, x, y \in K$ se tiene $x + y = y + x$ y $x \cdot y = y \cdot x$.
- Existe un elemento neutro para la suma, que se nota 0_K, es decir $\forall\, x \in K$ se tiene $x + 0_K = x$, y un elemento neutro para el producto, que se nota 1_K, es decir $\forall\, x \in K$ se tiene $x \cdot 1_K = x$.
- Cualquiera sea $x \in K$, x tiene un inverso aditivo, u opuesto, que se nota $-x$, es decir $x + (-x) = 0_K$, y cualquiera sea $x \in K$, $x \neq 0$, x tiene un inverso multiplicativo que se nota x^{-1}, es decir $x \cdot x^{-1} = 1_K$.
- La operación $\cdot$ es distributiva sobre $+$, es decir $\forall\, x, y, z \in K$ se tiene $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Estas propiedades implican en particular que $0 \cdot x = 0$, $\forall x \in K$, pues $0 = 0 + 0 \Rightarrow 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, y por lo tanto sumando de cada lado $-0 \cdot x$ se obtiene $0 \cdot x = 0$. También se deduce que $\forall x, y \in K$ no nulos, vale que $x \cdot y \neq 0$ pues si fuera $x \cdot y = 0$ con $x \neq 0$ entonces, como existe x^{-1}, se tendría $y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 = 0$.

En particular, cuando K es un cuerpo, notando $K^\times := K - \{0\}$, se tiene que $\cdot : K^\times \times K^\times \to K^\times$, y tanto $(K, +)$ como $(K^\times, \cdot)$ son grupos abelianos.

La información siguiente es en su mayoría extraída de Wikipedia.

Lo números naturales ya eran conocidos desde el principio de los tiempos, pero claro, no se podía "restar". Los números racionales positivos, las fracciones positivas, (que permiten "dividir") ya eran utilizadas de alguna manera por los Egipcios alrededor del año 1000 AC, y luego también por los griegos. Los números negativos aparecieron por primera vez en un libro de matemática de la Dinastía Han en China (202 AC-202 DC), y también en un manuscrito indio escrito en algún momento entre los años 200 AC y 400 DC. Matemáticos indios $\sim$ 700 AC y griegos $\sim$ 500 AC ya reconocían el concepto de irracionalidad (en particular con $\sqrt{2}$). Durante el Medioevo los árabes ya trataban a los números irracionales como entidades algebraicas, y asociaron los conceptos de números y magnitudes.

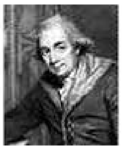


En el Siglo XVI apareció la notación decimal de los números reales, pero fue recién en 1871 cuando Georg Cantor realizó la descripción rigurosa de los números reales, uno de los avances matemáticos más importantes del Siglo XIX, mostrando en particular que hay muchos más números irracionales que racionales.

6.2 Números complejos: forma binomial.

Con respecto a los números complejos, la primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el Siglo I AC, como resultado de una imposible sección de una pirámide.

Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grado 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) y Gerolamo Cardano (1501-1576): aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. Las reglas para la suma, resta, producto y división fueron desarrolladas por el matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572). El término imaginario para estas cantidades (y real para los números reales) fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII. Muchos matemáticos contribu-



del Ferro

Tartaglia

Cardano

Bombelli

yeron al desarrollo completo de los números complejos.

Lo que todos sabemos es que no existe ningún número real r que satisface $r^2 = -1$, dado que el cuadrado de un número real siempre es un número real ≥ 0. Luego se introduce una cantidad *imaginaria* i, que no pertenece a $\mathbb{R}$, que satisface $i^2 = -1$. Se "agrega" esa cantidad al cuerpo de los números reales, construyendo el "menor" conjunto que contiene a $\mathbb{R}$ y a i, y donde se puede sumar y multiplicar (respetando la distributividad): a este conjunto lo llamamos el conjunto de los números *complejos* $\mathbb{C}$.

Al estar $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $i \in \mathbb{C}$, tiene que estar $b \cdot i \in \mathbb{C}$, y luego también $a + b \cdot i \in \mathbb{C}$. O sea $\{z = a + b \cdot i;\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

Pero observemos que dados $a + b \cdot i, c + d \cdot i \in \mathbb{C}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces si operamos respetando la distributividad,

- $(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$.
- $(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = ac + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$.

O sea la suma y el producto de estos números tienen la misma forma: un número real + otro número real multiplicado por i. Es decir, el menor conjunto donde tiene sentido sumar y multiplicar números de la forma $a + b \cdot i$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i;\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde si $z = a + b \cdot i$, $\omega = c + d \cdot i \in \mathbb{C}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces $z = \omega \iff a = c$ y $b = d$.

Teorema 6.2.1. (El cuerpo de los números complejos.)

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ es un cuerpo.}$$

Demostración.

- La operación $+$ es conmutativa y es asociativa pues lo es sobre los números reales. Además $0 = 0 + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$ es el elemento neutro para la suma, y el opuesto aditivo de $z = a + b \cdot i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es $-z = -a - b \cdot i \in \mathbb{C}$.

- Se puede verificar que la operación $\cdot$ es conmutativa y asociativa también. El elemento $1 = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$ es el elemento neutro para el producto, y para todo $z = a + b \cdot i \neq 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que existe
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i \ \in \ \mathbb{C},$$
pues si $z \neq 0$, $a^2 + b^2 > 0$, por lo tanto es un denominador permitido, y es fácil verificar que $(a + bi) \cdot \Big(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i\Big) = \frac{a^2 - (-b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{\big(a(-b) + ba\big)}{a^2 + b^2} = 1 + 0\, i = 1$.

- También se puede verificar que la operación $\cdot$ es distributiva sobre $+$ pues lo es en $\mathbb{R}$: para todo $z, \omega, \omega' \in \mathbb{C}$ se tiene
$$z(\omega + \omega') = z\omega + z\omega'.$$

$\square$

Por lo tanto el cuerpo $\mathbb{C}$ es un cuerpo que "contiene" al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$: $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a = a + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$.

Se gana al extender de esa forma el cuerpo $\mathbb{R}$ que la ecuación $X^2 + 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{C}$, y probaremos más adelante que todas las ecuaciones cuadráticas $z\, X^2 + \omega\, X + u = 0$ con $z, \omega, u \in \mathbb{C}$, z, ω no ambos nulos, tienen solución en $\mathbb{C}$. En realidad veremos sin demostración un resultado mucho más general: que todas las ecuaciones de cualquier grado con coeficientes complejos tienen solución en $\mathbb{C}$ (éste es el renombrado Teorema Fundamental del Álgebra).

Se pierde que en $\mathbb{C}$ no se puede establecer ningún orden $\geq$ como tienen los números reales: no hay ninguna forma de establecer un orden completo $\geq$ en $\mathbb{C}$ (es decir una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, que satisface además $z \geq \omega$ o $\omega \geq z$, $\forall\, z, \omega \in \mathbb{C}$) que respete la suma ($z \geq z' \Rightarrow z + \omega \geq z' + \omega$, $\forall\, \omega \in \mathbb{C}$) y el producto por no negativos ($z \geq 0$ y $\omega \geq 0 \ \Rightarrow \ z\, \omega \geq 0$): pues si $i \geq 0$ entonces $i^2 = -1 \geq 0$ implica $0 = -1 + 1 \geq 0 + 1 = 1$, pero por otro lado, $1 = (-1)^2 \geq 0^2 = 0$. Es decir $0 \geq 1$ y $1 \geq 0$. Por la antisimetría, eso tendría que implicar $0 = 1$, contradicción. Un razonamiento análogo prueba que no puede ser $0 \geq i$.

<u>*Ejemplos:*</u>

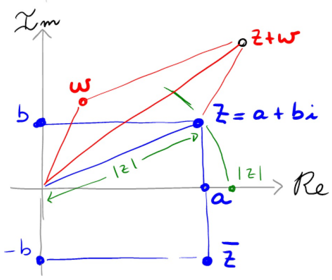
- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y en general,
$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b\,i)^2 = a^2 - b^2 + 2\,a\,b\,i$ y $(a+b\,i)\cdot(a-b\,i) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definición 6.2.2. (Forma binomial, parte real, parte imaginaria, conjugado, módulo.)

- Dado $z \in \mathbb{C}$, la forma $z = a + b \cdot i$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma binomial* de z, su parte real es $\Re e(z) := a \in \mathbb{R}$ y su parte imaginaria es $\Im m(z) := b \in \mathbb{R}$.
- Dado $z = a + b\,i$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el *conjugado* de z es $\overline{z} := a - b\,i \in \mathbb{C}$, y el *módulo* de z es $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Observemos que $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, y que si $z \neq 0$, entonces $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$.

Se representa z y esas cantidades en el *plano complejo*, así como la operación suma, que se hace con la regla del paralelogramo. Se nota que por el Teorema de Pitágoras, $|z| = \mathrm{dist}(z, 0)$, es decir $|z| \geq 0$ mide la distancia del número complejo z al origen 0.



Además se tiene las siguientes relaciones entre $\overline{z}$ y $|z|$:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \text{y} \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Proposición 6.2.3. (Propiedades del conjugado y del módulo.)

Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene

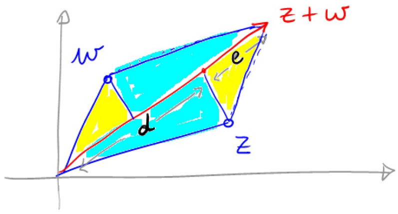
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $z = \overline{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$,
- $z + \overline{z} = 2\,\Re e(z)$,
- $z - \overline{z} = 2\,\Im m(z)\,i$,
- $|\Re e(z)| \leq |z|$ *e* $|\Im m(z)| \leq |z|$.

Además, para todo $z, \omega \in \mathbb{C}$, se tiene

- $\overline{z + \omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$.
- $\overline{z \cdot \omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}$.
- *Si* $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.
- *Si* $z \neq 0$, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
- $|z + \omega| \leq |z| + |\omega|$.
- $|z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega|$
- *Si* $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
- *Si* $z \neq 0$, $|z^k| = |z|^k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

La propiedad $|z+\omega| \leq |z|+|\omega|$ se llama la *desigualdad triangular* y se puede comprobar geométricamente:

$$d \leq |z|,\ e \leq |\omega| \implies |z+\omega| = d+e \leq |z|+|\omega|$$



Podemos probar aquí en forma muy simple que al construir $\mathbb{C}$ agregándole a $\mathbb{R}$ la raíz cuadrada i de -1, se consigue que en $\mathbb{C}$ todos los números complejos tengan raíces cuadradas, y no solo -1 o los números reales negativos b, cuyas raíces cuadradas son $\pm\sqrt{|b|}\,i$.

Proposición 6.2.4. (Raíces cuadradas de números complejos.)

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^2 = (-\omega)^2 = z$. Si $z \neq 0$, entonces z tiene exactamente dos raíces cuadradas distintas, que son ω y $-\omega$.

Hagamos un ejemplo antes de hacer la demostración.

<u>*Ejemplo:*</u> Calcular las raíces cuadradas complejas de $z = 3-4\,i$.

Planteemos $\omega^2 = z$ donde $\omega = x+y\,i \in \mathbb{C}$ con $x,y \in \mathbb{R}$ a determinar. Esto implica $|\omega^2| = |z|$, es decir $|\omega|^2 = |z|$ también. Por lo tanto, de $\omega^2 = 3-4\,i$ y $|\omega|^2 = |3-4\,i| = \sqrt{25} = 5,$ obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-y^2+2xy\,i = 3-4\,i \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2+y^2 = 5. \end{cases}$$

De la primera ecuación $2x^2 = 5+3 = 8$, y de la tercera $2y^2 = 5-3 = 2$. Luego

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \ \text{ e } \ y = \pm\sqrt{\frac{2}{2}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

O sea que en principio tenemos 4 posibilidades, eligiendo x e y positivos y/o negativos. Pero la segunda condición nos dice que $x\,y = -2$, el producto es negativo, por lo tanto si se toma $x = 2$ se debe tomar $y = -1$ y si se toma $x = -2$ se debe tomar $y = 1$: los candidatos a raíces cuadradas son entonces

$$\omega = 2-i \quad \text{y} \quad \omega' = -\omega = -2+i.$$

Efectivamente, es inmediato verificar que $\omega^2 = (-\omega)^2 = (4-1)+2(-2)\,i = 3-4\,i$.

Demostración. (de la Proposición 6.2.4.)

Sea $z = a+b\,i \in \mathbb{C}$, con $a,b \in \mathbb{R}$, y planteemos $\omega^2 = z$ donde $\omega = x+y\,i \in \mathbb{C}$ con $x,y \in \mathbb{R}$ a determinar.

Si $z = 0$, entonces $\omega = 0$.

Luego podemos asumir $z \neq 0$. La condición $\omega^2 = z$ implica $|\omega^2| = |z|$, es decir $|\omega|^2 = |z|$ también. Por lo tanto, de $\omega^2 = z$ y $|\omega|^2 = |z|$ obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy\, i = a + b\, i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

De la primera ecuación y la tercera deducimos

$$2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a \quad \text{y} \quad 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a.$$

Observemos que tanto $\sqrt{a^2+b^2} + a$ como $\sqrt{a^2+b^2} - a$ son números reales no negativos por la propiedad $|\Re e(z)| \leq |z|$ que dice que valen tanto $a \leq \sqrt{a^2+b^2}$ como $-a \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Por lo tanto existen las raíces cuadradas reales

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Esto nos daría en principio 4 posibles candidatos para ω. Pero solo dos de ellas son en realidad candidatos: las dos que cumplen con la segunda condición $2xy = b$: si $b \geq 0$, hay que tomar

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\,, y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{y}$$
$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\,, y = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

mientras que si $b < 0$, hay que tomar

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\,, y = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{y}$$
$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\,, y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Observemos que en ambos casos se obtiene $\omega = x + y\, i$ y $\omega' = -\omega$. Verifiquemos finalmente que estas dos candidatos a solución ω y $\omega' = -\omega$ son efectivamente raíces cuadradas de z cuando $z \neq 0$. Como claramente $(-\omega)^2 = \omega^2$, alcanza con probarlo para

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\, i$$

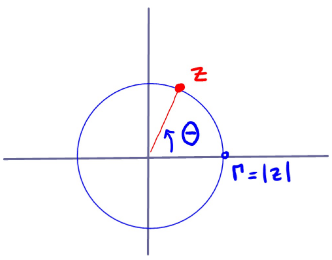
donde el $\pm$ es $+$ o $-$ dependiendo de si $b \geq 0$ o $b < 0$.

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \Big(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\, i\Big)^2 \\
&= \Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\Big) \pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\, i \\
&= a \pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}^{\,2}-a^2}{4}}\, i \;=\; a \pm \sqrt{b^2}\, i \;=\; a \pm |b|\, i \;=\; a + b\, i,
\end{aligned}$$

pues si $b \geq 0$, $|b| = b$ y el signo en $\pm$ era $+$ mientras que si $b < 0$, $|b| = -b$ pero el signo en $\pm$ era $-$. $\square$

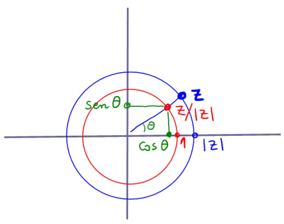
Más adelante probaremos que no sólo se consigue que todo número complejo tiene raíces cuadradas de números complejos, sino también que todo número complejo tiene raíces n-ésimas, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir que dado n, para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^n = z$. Para ello introducimos la forma trigonométrica o polar de los números complejos.

6.3 Números complejos: forma trigonométrica.



Sea $z \in \mathbb{C}^\times$. Entonces z no solo está determinado por su parte real $\Re e(z) \in \mathbb{R}$ y su parte imaginaria $\Im m(z) \in \mathbb{R}$, pero también se lo puede determinar de otra forma por su módulo $r = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$, que determina en qué circunferencia se encuentra z, y por un ángulo θ con respecto a (por ejemplo) el semieje real positivo, como lo muestra el dibujo.

Dado $z \in \mathbb{C}^\times$, $z/|z|$ pertenece a la circunferencia unidad, pues $\big|z/|z|\big| = |z|/|z| = 1$, y por lo tanto sus coordenadas son de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$:



Luego,

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta)$$

donde

$$r = |z| \quad \text{y} \quad \theta \text{ es tal que } \cos\theta = \frac{\Re e(z)}{|z|} \text{ y } \operatorname{sen}\theta = \frac{\Im m(z)}{|z|}.$$

Vamos a adoptar para la expresión $\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$ la notación exponencial $e^{\theta i}$, que se denomina la *Fórmula de Euler* ya que él fue el primero en demostrar su validez:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta, \quad \forall\,\theta\in\mathbb{R}.$$

Por lo tanto $z = r\,e^{\theta i}$ donde $r = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta\in\mathbb{R}$ es tal que $\cos\theta = \frac{\Re e(z)}{|z|}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{\Im m(z)}{|z|}$.

El ángulo $\theta\in\mathbb{R}$ está por convención dado en radianes, que es una unidad de medida de ángulos sumamente útil ya que se corresponde con el perímetro del sector angular de la circunferencia unidad comprendido entre el ángulo 0 y el ángulo θ (contando todas las vueltas completas a la circunferencia que se dio). Por ejemplo el ángulo 2π radianes se corresponde con el perímetro 2π de la circunferencia unidad, el ángulo $\pi/2$ radianes se corresponde con el perímetro de un cuarto de circunferencia, y el ángulo 4π es lo que mide dar dos vueltas completas en la circunferencia unidad.

Claramente, el ángulo no está determinado en forma única, ya que sabemos que $\cos\theta = \cos(\theta+2k\pi)$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta+2k\pi)$, $\forall\,k\in\mathbb{Z}$. Así,

$$e^{\theta i} = e^{(\theta+2k\pi)i}, \quad \forall\,k\in\mathbb{Z},$$

y más aún, para $r, s\in\mathbb{R}_{>0}$ y $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$, se tiene

$$s\,e^{\varphi i} = r\,e^{\theta i} \iff \begin{cases} s = r \\ \varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{para algún } k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

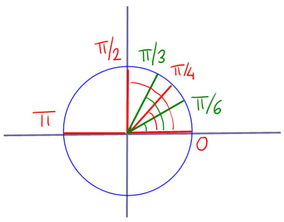
Si elegimos θ con $0\le\theta<2\pi$, entonces este ángulo está determinado en forma única y se denomina el *argumento de* z que se denota $\arg(z)$.

La *forma trigonométrica* o *polar* de $z\in\mathbb{C}^\times$ es

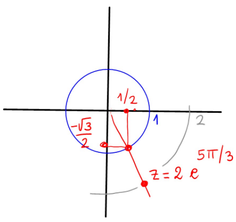
$$z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) \;=\; r\,e^{\theta i} \quad \text{con} \quad r\in\mathbb{R}_{>0} \;\text{ y }\; 0\le\theta<2\pi.$$

Repasemos los ángulos típicos con sus coseno y seno:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

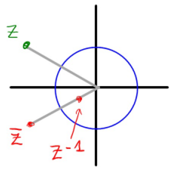


<u>*Ejemplo:*</u> Sea $z = 1-\sqrt{3}\,i$. Entonces $z = r\,e^{i\theta}$ donde $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$ y $\theta\in\mathbb{R}$ es un ángulo tal que $\cos\theta = 1/2$, $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$. Por lo tanto $\theta = -\pi/3$ o $\theta = -\pi/3 + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Se tiene $\arg(z) = -\pi/3+2\pi = 5\pi/3$, y $z = 2\,e^{\frac{5\pi}{3}i}$ es la forma trigonométrica de z.

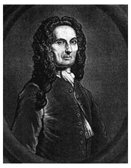


Observación 6.3.1. Sea $z = r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta) = r\,e^{\theta i}$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $\overline{z} = r\,\big(\cos(-\theta) + i\ \mathrm{sen}(-\theta)\big) = r\,e^{-\theta i}$,
- $z^{-1} = r^{-1}\,\big(\cos(-\theta) + i\ \mathrm{sen}(-\theta)\big) = r^{-1}\,e^{-\theta i}$.



Demostración. El segundo inciso es porque $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ y $|z^{-1}| = |z|^{-1}$. Por lo tanto z^{-1} está en la misma semirrecta que $\overline{z}$ (ya que es un múltiplo de $\overline{z}$ que se obtiene al multiplicar $\overline{z}$ por el número real positivo $1/|z|^2$). Por lo tanto $\overline{z}$ y z^{-1} vienen definidos por el mismo ángulo $-\theta$. □



A continuación vamos a recordar la Fórmula de de Moivre, que debe su nombre al matemático francés Abraham de Moivre, 1667-1754.

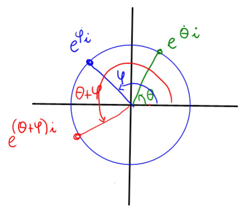
Teorema 6.3.2. (Fórmula de de Moivre.)

Sean $z = r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta) = r\,e^{\theta i}$ *y* $\omega = s(\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\,\varphi) = s\,e^{\varphi i}$ *con* $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$z\cdot\omega = rs\,\big(\cos(\theta+\varphi) + i\ \mathrm{sen}(\theta+\varphi)\big) = rs\,e^{(\theta+\varphi)i}.$$

Es decir

$$r\,e^{\theta i}\cdot s\,e^{\varphi i} = rs\,e^{(\theta+\varphi)i}.$$



En particular,

$$\arg(z\cdot\omega) = \arg(z) + \arg(\omega) - 2k\pi$$

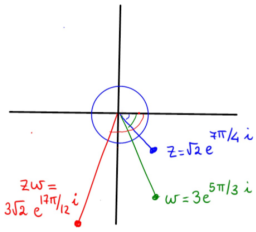
con $k = 0$ *o* 1 *elegido de modo tal que*

$$0 \le \arg(z) + \arg(\omega) - 2k\pi < 2\pi.$$

Demostración. Es una consecuencia muy simple de cómo es el producto de números complejos, y las fórmulas del coseno y seno de la suma de ángulos:

$$\begin{aligned} z\cdot\omega &= r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)\cdot s(\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\,\varphi)\\ &= rs\,\big((\cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi) + i\,(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)\big)\\ &= rs\,\big((\cos(\theta+\varphi) + i\,(\mathrm{sen}(\theta+\varphi)\big). \end{aligned}$$

□



Ejemplo: Sean $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{4}i}$ y $\omega=3\,e^{\frac{5\pi}{3}i}$. Entonces

$$\begin{aligned} z\cdot\omega &= \sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{4}i}\cdot 3\,e^{\frac{5\pi}{3}i} \;=\; 3\sqrt{2}\,e^{(\frac{7\pi}{4}+\frac{5\pi}{3})i} \\ &= 3\sqrt{2}\,e^{\frac{41\pi}{12}\,i} \;=\; 3\sqrt{2}\,e^{(\frac{41\pi}{12}-2\pi)\,i} \;=\; 3\sqrt{2}\,e^{\frac{17\pi}{12}\,i}. \end{aligned}$$

Por inducción en $n\in\mathbb{N}$ se puede deducir la fórmula para cualquier potencia n-ésima, $n\in\mathbb{Z}$.

Corolario 6.3.3. (Expresión trigonométrica de una potencia.)
Sean $z=r\,(\cos\theta+i\,\operatorname{sen}\theta)=r\,e^{\theta i}$ *y* $\omega=s(\cos\varphi+i\,\operatorname{sen}\varphi)=s\,e^{\varphi i}$ *con* $r,s\in\mathbb{R}_{>0}$ *y* $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$. *Entonces*

- $\dfrac{z}{\omega}=\dfrac{r}{s}\big(\cos(\theta-\varphi)+i\,\operatorname{sen}(\theta-\varphi)\big)=\dfrac{r}{s}\,e^{(\theta-\varphi)i}$.
- $z^n=r^n\big(\cos(n\theta)+i\,\operatorname{sen}(n\theta)\big)=r^n\,e^{n\theta i}$, *para todo* $n\in\mathbb{Z}$.

En particular, $\arg(z^n)=n\,\arg(z)-2k\pi$ *con* $k\in\mathbb{Z}$ *elegido de modo tal que* $0\le n\,\arg(z)-2k\pi<2\pi$.

Ejemplos:

- Calcular la forma binomial de $\left(\dfrac{-1+i}{-2-2\sqrt{3}i}\right)^{10}$:

  Se tiene que $-1+i=\sqrt{2}\,e^{\theta i}$ con $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, o sea $-1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Del mismo modo, $-2-2\sqrt{3}i=4\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$. Por lo tanto

  $$\begin{aligned} \left(\frac{-1+i}{-2-2\sqrt{3}i}\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{10} e^{10\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)i} \;=\; \frac{2^5}{2^{20}}\,e^{\frac{-70\pi}{12}i} \\ &= 2^{-15}\;e^{(\frac{-70\pi}{12}+3\cdot 2\pi)i} \;=\; 2^{-15}\;e^{\frac{\pi}{6}i} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2^{16}}+\frac{1}{2^{16}}\,i. \end{aligned}$$

- Calcular todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(1+i)^{2n}=(\sqrt{3}-i)^n$:

  Se tiene $1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$ y por lo tanto

  $$(1+i)^{2n}=\sqrt{2}^{2n}\;e^{\frac{2n\pi}{4}i}=2^n\;e^{\frac{n\pi}{2}i},$$

  y $\sqrt{3}-i=2\,e^{\frac{-\pi}{6}i}$, y por lo tanto

  $$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\;e^{\frac{-n\pi}{6}i}.$$

Esto implica

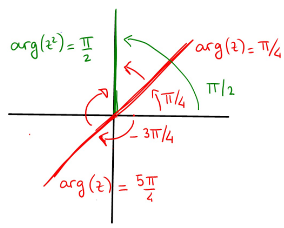
$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} = (\sqrt{3}-i)^n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{n\pi}{2} = \frac{-n\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2n\pi}{3} = 2k\pi \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Longleftrightarrow \quad 2n\pi = 6k\pi \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Longleftrightarrow \quad 3 \mid n.\end{aligned}$$

- Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\arg(z^2) = \dfrac{\pi}{2}$:

  Sea $z = r\,e^{\theta i}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces $\arg(z^2) = 2\theta - 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ de modo tal que $0 \leq 2\theta - 2k\pi < 2\pi$. Se tiene

  $$2\theta - 2k\pi = \frac{\pi}{2} \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

  Para $k = 0$ se obtiene $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$ y para $k = 1$ se obtiene $\theta_1 = 5\pi/4$. Luego los ángulos se van repitiendo:



  – $k = 2j \;\Rightarrow\; \theta_k = \dfrac{\pi}{4} + 2j\pi$, i.e. $\theta_k = \theta_0 + 2j\pi$

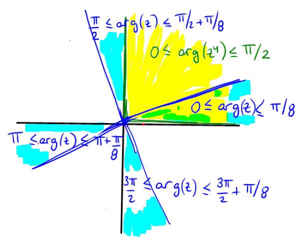
  – $k = 2j+1 \;\Rightarrow\; \theta_k = \dfrac{5\pi}{4} + 2j\pi$, i.e. $\theta_k = \theta_1 + 2j\pi$.

- Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $0 \leq \arg(z^4) \leq \dfrac{\pi}{2}$:

  Sea $z = r\,e^{\theta i}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces $\arg(z^4) = 4\theta - 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ de modo tal que $0 \leq 4\theta - 2k\pi < 2\pi$. Se tiene

  $$0 \leq 4\theta - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{k\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

  – Para $k = 0$ se obtiene el sector $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{8}$.



  – Para $k = 1$ se obtiene el sector $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}$.

  – Para $k = 2$ se obtiene el sector $\pi \leq \theta \leq \pi + \dfrac{\pi}{8}$.

  – Para $k = 3$ se obtiene el sector $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}$.

6.4 Raíces n-ésimas de números complejos.

Sea $z \in \mathbb{C}^\times$. Hallar las raíces n-ésimas de z consiste en determinar todos los $\omega \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\omega^n = z$. Hagamos primero un ejemplo.

<u>*Ejemplo:*</u> Las raíces sextas de $z = 1 + i$.

Queremos determinar los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^6 = 1 + i$. Como comparar potencias es más fácil con la forma trigonométrica, planteemos $\omega = r\, e^{\theta i}$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, y comparemos $\omega^6 = r^6\, e^{6\theta i}$ con $1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$:

$$r^6\, e^{6\theta i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i} \iff \begin{cases} r^6 = \sqrt{2} \\ 6\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

O sea,

$$r = \sqrt{2}^{1/6} = 2^{1/12} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6} \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z},$$

Es decir

$$\omega = 2^{1/12}\, e^{(\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6}) i} \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que si $\ell = 6j + k$ con $0 \le k < 6$, entonces

$$\frac{2\ell\pi}{6} = \frac{2(6j+k)\pi}{6} = \frac{2k\pi}{6} + 2j\pi,$$

y por lo tanto

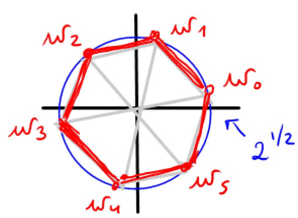
$$\theta_\ell := \frac{\pi}{24} + \frac{2\ell\pi}{6} = \frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6} + 2j\pi =: \theta_k + 2j\pi.$$

Se deduce que

$$\omega_\ell = 2^{1/12}\, e^{\theta_\ell i} = 2^{1/12}\, e^{\theta_k i} = \omega_k.$$

Para $k = 0, 1, \dots, 5$, se obtienen los 6 ángulos, y luego las 6 soluciones

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 0\pi}{6} = \frac{\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_0 = 2^{1/12}\, e^{\frac{\pi}{24} i} \\
\theta_1 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 1\pi}{6} = \frac{9\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_1 = 2^{1/12}\, e^{\frac{9\pi}{24} i} \\
\theta_2 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 2\pi}{6} = \frac{17\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_2 = 2^{1/12}\, e^{\frac{17\pi}{24} i} \\
\theta_3 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 1\pi}{6} = \frac{25\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_3 = 2^{1/12}\, e^{\frac{25\pi}{24} i} \\
\theta_4 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 1\pi}{6} = \frac{33\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_4 = 2^{1/12}\, e^{\frac{33\pi}{24} i} \\
\theta_5 &= \frac{\pi}{24} + \frac{2\cdot 1\pi}{6} = \frac{41\pi}{24} &&\Longrightarrow \quad \omega_5 = 2^{1/12}\, e^{\frac{41\pi}{24} i},
\end{aligned}$$



que son todas distintas pues $0 \le \theta_k < 2\pi$ son todos argumentos distintos.

Teorema 6.4.1. (Las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}^\times$.)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $z = s\,e^{\varphi i} \in \mathbb{C}^\times$, con $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $0 \le \varphi < 2\pi$. Entonces z tiene n raíces n-ésimas $\omega_0, \dots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$, donde

$$\omega_k = s^{1/n}\, e^{\theta_k i} \quad \textit{donde} \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \textit{para } 0 \le k \le n-1.$$

Demostración. La prueba es igual que en el ejemplo. Tenemos que determinar los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^n = z$. Planteemos $\omega = r\,e^{\theta i}$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, y comparemos $\omega^n = r^n\, e^{n\theta i}$ con $z = s\,e^{\varphi i}$:

$$\begin{aligned} r^n\, e^{n\theta i} = s\,e^{\varphi i} &\iff \begin{cases} r^n = s \\ n\,\theta = \varphi + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = s^{1/n} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir

$$\omega = s^{1/n}\, e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i} \quad \text{para algún} \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que si $\ell = jn + k$ con $0 \le k < n$, entonces

$$\theta_\ell := \frac{\varphi + 2\ell\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(jn+k)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2j\pi =: \theta_k + 2j\pi,$$

y por lo tanto

$$\omega_\ell = s^{1/n}\, e^{\theta_\ell i} = s^{1/n}\, e^{\theta_k i} = \omega_k.$$

Pero más aún, para $0 \le k < n$, $\theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ son todos distintos y satisfacen $0 \le \theta_k < 2\pi$ pues $0 \le \varphi < 2\pi$ y $0 \le k \le n-1$ implica

$$0 \le \frac{\varphi + 2k\pi}{n} < \frac{2\pi + 2(n-1)\pi}{n} = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi.$$

Por lo tanto son todos argumentos distintos, es decir $\omega_k \ne \omega_{k'}$ para $0 \le k \ne k' < n$. Se obtienen por lo tanto las n raíces distintas

$$\omega_k = s^{1/n}\, e^{\theta_k i} \quad \text{donde} \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{para } 0 \le k \le n-1.$$

□

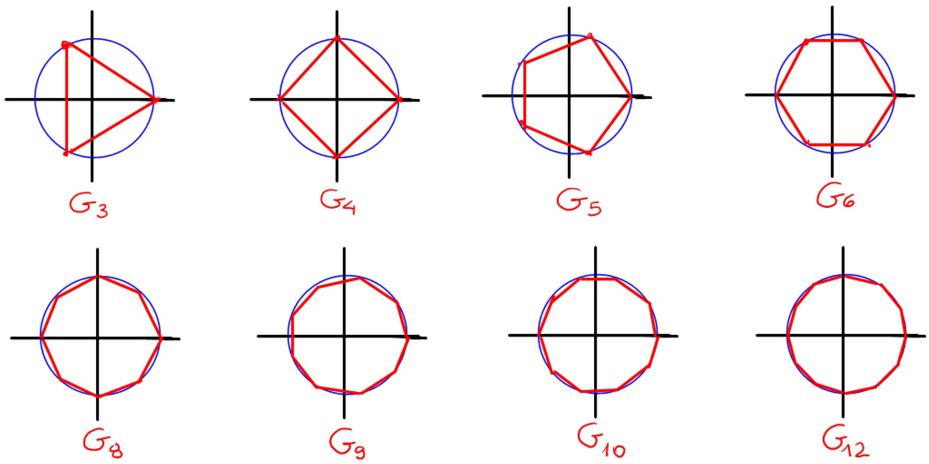
6.4.1 El grupo G_n de raíces n-ésimas de la unidad.

Cuando $z = 1$, buscamos las raíces n-é simas de 1, es decir los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^n = 1$. Según el Teorema 6.4.1, como $1 = e^0$, se tiene que las soluciones son $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ donde

$$\omega_k = e^{\frac{2\,k\,\pi}{n} i}, \quad 0 \le k \le n-1.$$

Éstas se llaman las *raíces n-ésimas de la unidad.*

Todas las raíces n-ésimas de 1 están sobre la circunferencia unidad, $\omega_0 = 1$ y las demás se obtienen dividiendo el ángulo 2π por n, o sea forman un n-ágono regular en la circunferencia unidad, empezando por el 1, como lo muestran las figuras para los valores de $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ y $n = 12$.



A continuación, estudiamos más en detalle el comportamiento del conjunto de raíces n-ésimas de la unidad para un $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Definición 6.4.2. (El conjunto G_n.)

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto G_n es el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad, es decir

$$G_n := \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = 1\} \;=\; \{\omega_k = e^{\frac{2\,k\,\pi}{n} i},\; 0 \le k \le n-1\} \;\subseteq\; \mathbb{C}.$$

El conjunto G_n contiene n números complejos distintos, que forman un n-ágono regular en la circunferencia unidad del plano complejo, empezando desde el 1. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{e^0\} = \{1\},\\
G_2 &= \{e^0, e^{\pi}\} = \{1, -1\},\\
G_3 &= \{e^{\frac{2k\pi}{3}i}, 0 \le k \le 2\} = \{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}\\
G_4 &= \{e^{\frac{2k\pi}{4}i}, 0 \le k \le 3\} = \{\pm 1, \pm i\},\\
G_5 &= \{e^{\frac{2k\pi}{5}i}, 0 \le k \le 4\}\\
G_6 &= \{e^{\frac{2k\pi}{6}i}, 0 \le k \le 5\} = \{\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\},\\
G_8 &= \{e^{\frac{2k\pi}{8}i}, 0 \le k \le 7\} = \{\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i\}.
\end{aligned}
$$

En particular, si $n \ne m$, $G_n \ne G_m$ pues G_n tiene n elementos y G_m tiene m elementos.

Podemos conjeturar de los dibujos un montón de propiedades, que se pueden demostrar incluso sin conocer la forma particular de los elementos de G_n, pero solamente usando la definición: que $\omega \in G_n \Leftrightarrow \omega^n = 1$.

Proposición 6.4.3. **($(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$.

1. $\forall\, \omega, z \in G_n$ *se tiene que* $\omega \cdot z \in G_n$.
2. $1 \in G_n$.
3. $\forall\, \omega \in G_n$, *existe* $\omega^{-1} \in G_n$.

Estas tres propiedades muestran que G_n es un grupo abeliano dentro del grupo multiplicativo $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$: es un subconjunto de $\mathbb{C}$ cerrado para la operación producto, el producto es claramente asociativo y conmutativo (pues es el producto de $\mathbb{C}$ que lo es), el elemento neutro 1 de $\mathbb{C}$ pertenece a ese subconjunto, y además cada elemento de G_n tiene inverso en G_n.

Demostración.

1. $\omega, z \in G_n$ si y solo si por definición $\omega^n = 1$ y $z^n = 1$. Por lo tanto $(\omega \cdot z)^n = \omega^n \cdot z^n = 1 \cdot 1 = 1$ también. O sea $\omega \cdot z \in G_n$.
2. $1 \in G_n$ pues $1^n = 1$.
3. Dado $\omega \in G_n$, como $\omega \in \mathbb{C}$ y $\omega \ne 0$ (pues $0^n \ne 1$), se tiene que ω tiene un inverso $\omega^{-1} \in \mathbb{C}$. Alcanza con probar que ese inverso pertenece a G_n. Pero $(\omega^{-1})^n = (\omega^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$ también, y por lo tanto $\omega^{-1} \in G_n$.

$\square$

También se pueden inferir las propiedades siguientes de los elementos de G_n, del estudio de los ejemplos anteriores. Por ejemplo podemos observar (y probar) que

$$-1 \in G_n \iff n \text{ es par},$$

pues $(-1)^n = 1 \iff n$ es par. Aquí van más propiedades:

Proposición 6.4.4. (Más propiedades de G_n.)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in G^n$. Entonces

1. $|\omega| = 1$.
2. *Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \mid m$. Entonces $\omega^m = 1$.*
3. *Sean $m, m' \in \mathbb{Z}$ tales que $m \equiv m' \pmod n$, entonces $\omega^m = \omega^{m'}$. En particular $\omega^m = \omega^{r_n(m)}$.*
4. $\omega^{-1} = \overline{\omega} = \omega^{n-1}$.

Demostración.

1. Esto ya lo sabemos porque ya conocemos la forma particular de los elementos de G_n, pero se puede probar directamente de la definición: $\omega^n = 1 \Rightarrow 1 = |\omega^n| = |\omega|^n$, y por lo tanto $|\omega| = 1$.
2. Si $n \mid m$, entonces $m = kn$ y por lo tanto $\omega^m = \omega^{kn} = (\omega^n)^k = 1^k = 1$.
3. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = k\,n + m'$. Entonces $\omega^m = \omega^{kn+m'} = (\omega^n)^k \cdot \omega^{m'} = 1^k \cdot \omega^{m'} = \omega^{m'}$.
4. $\omega^{-1} = \dfrac{\overline{\omega}}{|\omega|^2}$ pero $|\omega| = 1$, por lo tanto $\omega^{-1} = \overline{\omega}$. La segunda igualdad es una consecuencia del inciso anterior, dado que $-1 \equiv n-1 \pmod n$.

$\square$

<u>*Ejemplo:*</u> Para cada $\omega \in G_5$, calcular $\omega^{103} + \omega^{27} + \omega^{-4} + \overline{\omega}$:

Por la Proposición 6.4.4 (3,4), se tiene

$$\omega^{103} + \omega^{27} + \omega^{-4} + \overline{\omega} = \omega^3 + \omega^2 + \omega + \omega^4 = \begin{cases} 4 & \text{si } \omega = 1, \\ -1 & \text{si } \omega \neq 1. \end{cases}$$

ya que

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \sum_{i=0}^{4} \omega^i = \begin{cases} 5 & \text{si } \omega = 1, \\ \dfrac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = \dfrac{1-1}{\omega - 1} = 0 & \text{si } \omega \neq 1, \end{cases}$$

por la fórmula de la serie geométrica.

También se pueden comparar distintos G_n.

Proposición 6.4.5. **(** $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$ **).**
Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

1. $n \mid m \;\Rightarrow\; G_n \subset G_m$.
2. $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$.
3. $G_n \subset G_m \;\Leftrightarrow\; n \mid m$.

Demostración.

1. $n \mid m \;\Rightarrow\; m = k\,n$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, si $\omega \in G_n$, $\omega^m = \omega^{kn} = (\omega^n)^k = 1^k = 1$, o sea $\omega \in G_m$.
2. Como $(n:m) \mid n$ y $(n:m) \mid m$, $G_{(n:m)} \subset G_n$ y $G_{(n:m)} \subset G_m$ por el inciso anterior, y por lo tanto $G_{(n:m)} \subset G_n \cap G_m$.

   Falta probar la otra inclusión: se sabe que existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $(n:m) = sn + tm$, por lo tanto $\omega^{(n:m)} = \omega^{sn+tm} = (\omega^n)^s \cdot (\omega^m)^t$. Si $\omega \in G_n \cap G_m$, entonces $\omega^n = \omega^m = 1$ y por lo tanto, $\omega^{(n:m)} = 1^s \cdot 1^t = 1$, es decir $\omega \in G_{(n:m)}$ también.
3. Ya sabemos que vale $(\Leftarrow)$ por el inciso 1. Probemos $(\Rightarrow)$:

   $G_n \subset G_m \;\Rightarrow\; G_n \cap G_m = G_n$. Pero por el inciso anterior, se sabe que $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$. Por lo tanto $G_n = G_{(n:m)}$. Esto implica $n = (n:m)$ (pues hemos visto que distintos G_n tienen distinta cantidad de elementos) y por lo tanto $n \mid m$ como se quería probar.

□

Saquemos ahora provecho de la forma particular de los elementos de G_n:

$$G_n := \{\omega_k = e^{\frac{2\,k\,\pi}{n} i},\ 0 \le k \le n-1.\}$$

Proposición 6.4.6. **(** G_n **es un grupo cíclico.)**
Sea $n \in \mathbb{N}$. *Existe* $\omega \in G_n$ *tal que*

$$G_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, , \omega^{n-1}\} = \{\omega^k,\ 0 \le k \le n-1\}.$$

Demostración. Se puede tomar por ejemplo $\omega := \omega_1 = e^{\frac{2\,\pi}{n} i}$, ya que sabemos por la fórmula de de Moivre que

$$\omega_1^k = \big(e^{\frac{2\,\pi}{n} i}\big)^k = e^{k\frac{2\,\pi}{n} i} = e^{\frac{2k\,\pi}{n} i} = \omega_k, \quad 0 \le k \le n-1.$$

□

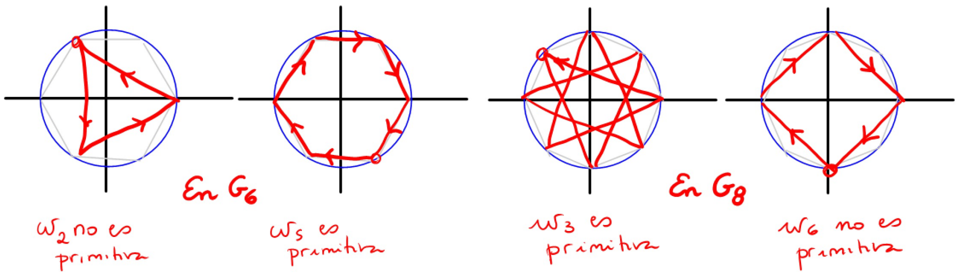
Pero ω_1 no es la única elección posible en esta demostración, por ejemplo también podríamos haber tomado $\omega_{n-1} = \overline{\omega_1}$ pues $\overline{\omega_1}^k = \overline{\omega_1^k} = \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$ para $0 \leq k \leq n-1$, es decir $\omega_{n-1}^k = \omega_{n-k}$ para $0 \leq k \leq n-1$. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 6.4.7. (Raíz n-ésima primitiva de la unidad.)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\omega \in \mathbb{C}$ es una raíz n*-ésima primitiva* de la unidad si

$$G_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\} = \{\omega^k,\ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Ejemplo:



Observación 6.4.8. Sea ω una raíz primitiva de orden n de la unidad, es decir $G_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$. Entonces para $0 \leq k \neq j \leq n-1$ se tiene que $\omega^k \neq \omega^j$, pues ya sabemos que G_n tiene n elementos distintos, y por la tanto no pueden coincidir dos potencias distintas de ω en el rango $0 \leq k, j \leq n-1$.

Proposición 6.4.9. (Caracterización de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad.)

Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces ω es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si

$$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad \omega^m = 1 \iff n \mid m.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea ω una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Queremos probar que $\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$.

Como ω es raíz n-ésima de la unidad, sabemos por la Proposición 6.4.4(4) que si $n \mid m$, entonces $\omega^m = 1$.

Queremos probar la recíproca, que si $\omega^m = 1$ entonces $n \mid m$. Pero por la Proposición 6.4.4(5), $\omega^m = \omega^{r_n(m)}$. Luego $\omega^m = 1$ implica $\omega^{r_n(m)} = 1 = \omega^0$, lo que implica por la Observación anterior que $r_n(m) = 0$, o sea $n \mid m$.

$(\Leftarrow)$ Queremos probar que si ω satisface $\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$, entonces $G_n = \{\omega^k,\ 0 \leq k \leq n-1\}$.

Pero $\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$ implica $\omega^n = 1$ y $\omega^k \neq 1$ para $1 \leq k \leq n-1$. Por lo tanto $\omega \in G_n$, lo que implica que $\omega^k \in G_n,\ 0 \leq k \leq n-1$. Así $\{\omega^k,\ 0 \leq k \leq n-1\} \subset G_n$.

Pero además se cumple que $\omega^\ell \neq \omega^j$ para todo $0 \leq \ell < j \leq n-1$, pues si para algún $0 \leq \ell < j \leq n$ se tuviera $\omega^\ell = \omega^j$, entonces $\omega^{j-\ell} = 1$ con $1 \leq j - \ell \leq n-1$, lo que es una contradicción (tomando $k = j - \ell$) con $\omega^k \neq 1$ para $1 \leq k \leq n-1$. Por lo tanto $\#\{\omega^k;\ 0 \leq k \leq n-1\} = n = \# G_n$ implica que $\{\omega^k,\ 0 \leq k \leq n-1\} = G_n$. □

Corolario 6.4.10. (Raíces primitivas y potencias.)

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Entonces ω^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solamente si $(n : k) = 1$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Alcanza con probar, según la proposición anterior, que $(\omega^k)^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$, sabiendo que, al ser ω una raíz *primitiva* de la unidad de orden n, cualquiera sea el exponente j, $\omega^j = 1 \Leftrightarrow n \mid j$. Pero

$$1 = (\omega^k)^m = \omega^{km} \iff n \mid k\,m \underset{(n:k)=1}{\iff} n \mid m,$$

como se quería probar.

($\Rightarrow$) Lo demostramos por la contrarecíproca: Supongamos que $(n : k) = d \neq 1$. Entonces

$$(\omega^k)^{\frac{n}{d}} = (\omega)^{\frac{kn}{d}} = (\omega^n)^{\frac{k}{d}} = 1^{\frac{k}{d}} = 1$$

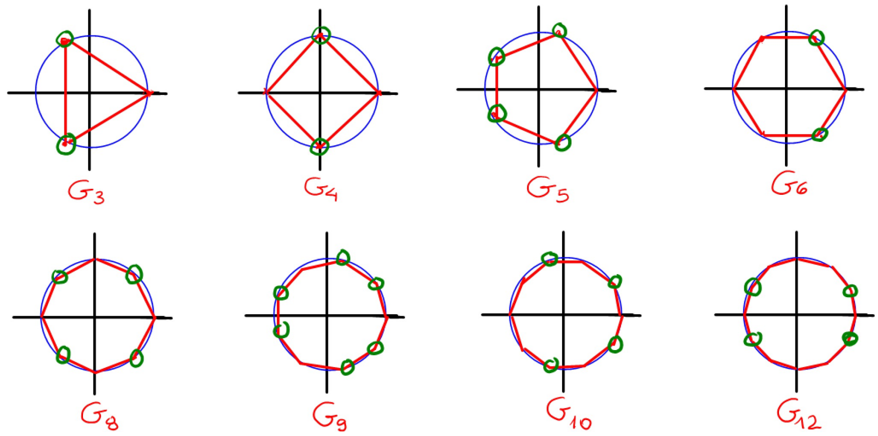
y por lo tanto ω^k no es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, pues $n \nmid \dfrac{n}{d}$ y se contradice la Proposición 6.4.9. □

Corolario 6.4.11. (Las raíces primitivas en G_n.)

Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$, $0 \leq k \leq n-1$. Entonces ω_k es raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solamente si $(n : k) = 1$.

Demostración. Pues sabemos que ω_1 es raíz n-ésima primitiva de la unidad y $\omega_k = (\omega_1)^k$. □

En los ejemplos siguientes, las raíces primitivas están marcadas con un círculo verde:



Corolario 6.4.12. (Las raíces primitivas en G_p.)

Sea p un primo. Entonces cualquiera sea k, $1 \leq k \leq p-1$, se tiene que $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{p}i}$ es ráiz p-ésima primitiva de la unidad. Es decir $\forall \omega \in G_p$, $\omega \neq 1$, se tiene que ω es una raíz p-ésima primitiva de la unidad.

<u>*Ejemplo:*</u> Sea ω una raíz primitiva de la unidad de orden 15.

- Probar que ω^3 es una raíz primitiva de la unidad de orden 5: Se tiene $(\omega^3)^5 = \omega^{15} = 1$, por lo tanto ω^3 es una raíz de la unidad de orden 5. Pero $\omega^3 \neq 1$ pues ω es *primitiva* de orden 15, por lo tanto $\omega^3 \in G_5 - \{1\}$ implica que ω^3 es primitiva de orden 5, pues 5 es primo, y todas las raíces de la unidad de orden 5 salvo el 1 son primitivas.

- Calcular $\omega^{159} + \overline{\omega}^{27} - \omega^{27} + \omega^6 + 2\omega^{-3}$:

  Se tiene

$$\begin{aligned} \omega^{159} + \overline{\omega}^{27} - \omega^{27} + \omega^6 + 2\omega^{-3} &= \omega^9 + \omega^3 - \omega^{12} + \omega^6 + 2\omega^{12} \\ = \sum_{k=1}^{4} (\omega^3)^k = \frac{(\omega^3)^5 - 1}{\omega^3 - 1} - (\omega^3)^0 = -1, \end{aligned}$$

  pues $\omega^3 \neq 1$ al ser ω *primitiva* de orden 15.

Terminemos este capítulo con una propiedad general de las raíces de la unidad.

Proposición 6.4.13. (Suma y producto de los elementos de G_n.)

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Entonces

$$\sum_{\omega \in G_n} \omega = 0 \qquad y \qquad \prod_{\omega \in G_n} \omega = \begin{cases} 1 & si \quad n \ es \ impar, \\ -1 & si \quad n \ es \ par. \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que G_n es un grupo cíclico, es decir existe $\omega \in G_n$ tal que $G_n = \{1, w, \dots, w^{n-1}\}$, por ejemplo $\omega = \omega_1$. Por lo tanto,

$$\sum_{\omega \in G_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{\omega_1^n - 1}{\omega_1 - 1} = \frac{1-1}{\omega - 1} = 0,$$

por la suma geométrica, ya que $\omega_1 \neq 1$, y porque $\omega_1^n = 1$.

Con respecto al producto, en G_n sabemos que cada vez que está ω también está $\omega^{-1} = \overline{\omega} \neq \omega$ si $\omega \neq \pm 1$. Por lo tanto, cuando n es impar (caso en que $-1 \notin G_n$), las raíces de la unidad vienen de a pares inversos, cuyo producto da 1, además de la raíz 1, y por lo tanto el producto da 1. Cuando n es par (caso en que $-1 \in G_n$), las raíces de la unidad vienen de a pares inversos, cuyo producto da 1, además de las raíces 1 y -1, y por lo tanto el producto da -1. □

6.5 Ejercicios.

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$

   i) $z = 5\,i(1+i)^4$

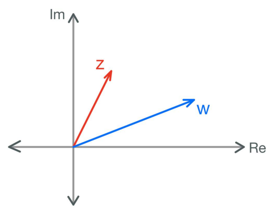
   ii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i)^2(\overline{1 - 3\,i})$

   iii) $z = i^{17} + \dfrac{1}{2}\,i(1-i)^3$

   iv) $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{10}$

   v) $z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$.

2. Dados los siguientes $z, w \in \mathbb{C}$ en el plano:



   representar en un gráfico aproximado los números complejos de cada inciso

   i) $z, w, z+w$ y $z - w$

   ii) $z, -z, 2z, \dfrac{1}{2}z, iz$ y $\overline{z}$

   iii) $z, w, |z|, |z+w|$ y $|\overline{w - z}|$.