Capítulo 1

Conjuntos

§1.1. Conjuntos

1.1.1. Un ***conjunto*** es una colección de objetos, a los que nos referimos como sus ***elementos***. Cuando un objeto x es un elemento de un conjunto A decimos que x ***pertenece*** a A y escribimos

$$x \in A.$$

Si, por el contrario, x no es un elemento de A, decimos que x no pertenece a A y escribimos

$$x \notin A.$$

Un conjunto queda completamente determinado por sus elementos. Como consecuencia de esto, dos conjuntos son iguales si y solamente si tienen exactamente los mismos elementos.

1.1.2. Si un conjunto tiene un número finito de elementos y estos no son muchos, entonces podemos describir el conjunto simplemente listando sus elementos y en ese caso lo hacemos entre llaves $\{\cdots\}$. Por ejemplo, si escribimos

$$\{1, 3, 101, 7\} \tag{1}$$

estamos mencionando el conjunto que tiene por elementos a los números 1, 3, 101 y 7, y a ninguna otra cosa más — observemos que de esta forma el conjunto queda completamente determinado. Cuando usamos este tipo de descripción de un conjunto — listar sus elementos — decimos que lo describimos por ***enumeración*** o por ***extensión***. Si llamamos A al conjunto de (1), entonces claramente tenemos que

$$1 \in A, \qquad 99 \notin A, \qquad 101 \in A, \qquad 0 \notin A.$$

Cada una de estas afirmaciones puede verificarse simplemente por inspección: por ejemplo, 0 no es un elemento de A porque 0 no es ninguno de los objetos listados entre las llaves en (1).

Es importante tener en cuenta que el orden en que listamos los elementos de un conjunto cuando lo damos por enumeración es irrelevante — ya que lo único importante es qué cosas pertenecen al conjunto y qué cosas no — y, por lo tanto, que podríamos haber escrito

$$\{7, 101, 1, 3\}$$

para describir exactamente el mismo conjunto que el de (1). De manera similar, la cantidad de veces que aparece un objeto en la lista de elementos de un conjunto en una descripción como (1) es irrelevante: otra vez, lo único importante es si un objeto aparece o no en la lista. Esto significa que el conjunto

$$\{1, 1, 101, 3, 3, 3, 7, 101, 7, 7\}$$

es exactamente el mismo que el conjunto de (1). Por supuesto, casi siempre es preferible evitar repeticiones inútiles, pero esto puede no ser fácil o posible.

1.1.3. En ciertas situaciones usamos la palabra ***familia*** en lugar de *conjunto*. Por ejemplo, cuando tenemos un conjunto cuyos elementos son conjuntos, como $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$, preferimos decir «familia de conjuntos» a decir «conjunto de conjuntos», pero las dos frases significan exactamente lo mismo. Encontraremos algunos ejemplos de este uso en lo que sigue — por ejemplo, en el Ejercicio 1.6.3.

1.1.4. Los elementos de un conjunto pueden ser de cualquier tipo. Por ejemplo, el conjunto

$$\{1, \text{🔴}, \clubsuit, (2, 3)\}$$

tiene cuatro elementos: el número 1, el disco rojo 🔴, el palo de trébol $\clubsuit$ de la baraja francesa y el par ordenado $(2, 3)$. Los elementos de un conjunto pueden ser ellos mismos conjuntos: así, los elementos del conjunto

$$\{1, \{2, 3\}, 4, \{5, 6\}\}$$

son cuatro: los números 1 y 4 y los conjuntos $\{2, 3\}$ y $\{5, 6\}$. Es importante observar que, por ejemplo, el número 2 no es un elemento de este conjunto. De manera similar, el conjunto

$$\{\{1, 2\}\}$$

tiene exactamente *un* elemento, el conjunto $\{1, 2\}$, y

$$\{\{1\}, 1\}$$

tiene *dos*: el número 1 y el conjunto $\{1\}$. Finalmente,

$$\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1, \{1\}\}\}\}$$

denota el conjunto que tiene cuatro elementos: el número 1 y los conjuntos $\{1\}$, $\{1, \{1\}\}$ y $\{\{1, \{1\}\}\}$, que tienen 1, 2 y 1 elementos, respectivamente.

1.1.5. Un conjunto puede no tener elementos: decimos en ese caso que es ***vacío***. Si A y B son dos conjuntos que son vacíos, entonces tienen exactamente los mismos elementos — a saber, ninguno — y esto implica, como observamos arriba, que A y B son de hecho el mismo conjunto. Vemos así que hay exactamente un conjunto que es vacío y no hay ninguna ambigüedad si nos referirnos a él como *el* conjunto vacío.

Podemos dar el conjunto vacío por enumeración: de acuerdo a las convenciones que describimos arriba, el símbolo

$$\{\}$$

denota al conjunto vacío. En efecto, como no hay ningún objeto listado entre estas llaves ningún objeto pertenece a este conjunto. Casi siempre, sin embargo, usamos el símbolo especial

$$\varnothing$$

para representar al conjunto vacío. Este símbolo fue propuesto por André Weil, inspirado en la letra ø del idioma noruego, y fue usado por primera vez en 1939 en el libro sobre la teoría de conjuntos de Nicolás Bourbaki[1]. El concepto de conjunto vacío, sin embargo, es muy anterior: el primero en usar explícitamente el conjunto vacío fue Georges Boole en 1847.

Observemos que el conjunto $\{\varnothing\}$ tiene un elemento — el conjunto vacío — así que no es vacío. De manera similar, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ tiene dos, ya que $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$ son dos cosas distintas: se trata de dos conjuntos, pero no son el mismo, ya que uno es vacío mientras que el otro, el segundo, tiene exactamente un elemento.

1.1.6. Si un conjunto es finito pero tiene muchos elementos o, peor, si tiene infinitos elementos, entonces no es práctico o posible darlo por enumeración. En ese caso, podemos describirlo dando alguna condición que permita decidir si un objeto pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, escribimos

$$A = \{x : x \text{ es un entero positivo y par}\} \tag{2}$$

para decir que A es el conjunto de todos los objetos x que satisfacen la condición «x es un entero positivo y par». Así, los números 2 y 1928 pertenecen a este conjunto A mientras que el número 7,

[1]En su autobiografía, Weil cuenta: «Wisely, we had decided to publish an installment establishing the system of notation for set theory, rather than wait for the detailed treatment that was to follow: it was high time to fix these notations once and for all, and indeed the ones we proposed, which introduced a number of modifications to the notations previously in use, met with general approval. Much later, my own part in these discussions earned me the respect of my daughter Nicolette, when she learned the symbol Ø for the empty set at school and I told her that I had been personally responsible for its adoption. The symbol came from the Norwegian alphabet, with which I alone among the Bourbaki group was familiar.»

el número -4 o el conjunto $\{4, 9\}$ no: el número 7 es un entero positivo pero no es par, el número -4 es un entero y es par, pero no es positivo, y el conjunto $\{4, 9\}$ no es ni siquiera un entero. De manera similar, al conjunto

$$\{x : x \text{ es un número real y } 0 < x \leq 3\} \tag{3}$$

pertenecen los números 1, $\sqrt{2}$ y 3, pero no el número -9, el número 12 o el par ordenado $(1, 2)$.

Los conjuntos de (2) y (3) son infinitos, así que no sería posible darlos por enumeración de sus elementos. Por otro lado, el conjunto

$$\{x : x \text{ es un entero positivo menor que } 1\,000\,000\}$$

es finito pero tiene 999 999 elementos, así que aunque es en principio posible describirlo por enumeración hacerlo no es muy práctico.

1.1.7. Cuando describimos un conjunto dando una condición que permite decidir si cada objeto pertenece o no a él, decimos que lo damos ***por comprensión***. El símbolo «:» que usamos en (2) y en (3) se lee «tal que», y entonces leemos en voz alta lo que aparece a la derecha del símbolo igual de (2) «el conjunto de los objetos x tales que x es un entero positivo y par». A veces se usa una barra vertical «|» en lugar de «:», y se escribe, por ejemplo,

$$\{x \mid x \text{ es un entero positivo y par}\}.$$

En estas notas usaremos exclusivamente el símbolo «:», ya que reservaremos la barra vertical para denotar la relación de divisibilidad entre números enteros.

1.1.8. Casi siempre que damos un conjunto por comprensión, parte de la condición que lo determina es que los objetos tienen que pertenecer a algún conjunto ya conocido. Así, la condición que aparece en el conjunto (2) incluye la de que x pertenezca al conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, mientras que la de (3) que x pertenezca al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Cuando es ese el caso y queremos enfatizarlo, preferimos escribir

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es positivo y par}\}$$

y

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 3\}$$

en lugar de las fórmulas de (2) y (3). Cuando leemos en voz alta la primera de estas fórmulas, por ejemplo, decimos «el conjunto de los elementos x de $\mathbb{Z}$ tales que x es positivo y par».

§1.2. Subconjuntos

1.2.1. Decimos que un conjunto A es un ***subconjunto*** de un conjunto B o también que A está ***contenido*** o ***incluido*** en B, y en ese caso escribimos $A \subseteq B$, si todo elemento de A es un elemento de B, esto es, si para todo objeto x vale la implicación

$$x \in A \implies x \in B.$$

Si además es $A \neq B$, decimos que A es un subconjunto ***propio*** de B y escribimos, si queremos enfatizar esto, $A \subsetneq B$.

Muchos autores usan el símbolo $\subset$ en lugar de $\subseteq$ para denotar la contención de conjuntos, y escriben $A \subset B$ en lugar de $A \subseteq B$. En estas notas no usaremos nunca este símbolo.

1.2.2. Usaremos la siguiente observación todo el tiempo en lo que sigue, y casi siempre sin referir a ella explícitamente:

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos. Es $A \subseteq B$ si y solamente si para todo objeto x vale que $x \notin B \implies x \notin A$.*

Demostración. La afirmación $A \subseteq B$ significa que para todo x vale la implicación $x \in A \implies x \in B$, y la afirmación contrarrecíproca de esta implicación es precisamente la del enunciado de la proposición, así que la proposición es trivialmente cierta. □

1.2.3. Es importante distinguir a los *elementos* de un conjunto de sus *subconjuntos*. Esto lo hacemos tanto en la notación como en el lenguaje: si x es un elemento de un conjunto B, decimos que x pertenece a B y escribimos $x \in B$, y si A es un subconjunto del conjunto B decimos que A está contenido en B y escribimos $A \subseteq B$.

Así, por ejemplo, 1 pertenece al conjunto $\{1, 2, 3\}$ y $\{1\}$ está incluido en ese conjunto. De todas formas, es bien posible que algo simultáneamente pertenezca y esté incluido en un conjunto: así, $\{1, 2\}$ es un subconjunto del conjunto $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ y a la vez es uno de sus elementos.

1.2.4. La siguiente proposición describe las propiedades más sencillas de la relación de inclusión entre conjuntos.

Proposición. *Sean A, B y C conjuntos.*

(*i*) *Se tiene que $A \subseteq A$.*

(*ii*) *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.*

(*iii*) *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*

Demostración. (*i*) Si x es un elemento de A, entonces claramente x es un elemento de A: esto significa, precisamente, que A está contenido en A, es decir, que $A \subseteq A$.

(*ii*) Supongamos que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, y mostremos que $A = B$. Si x es un elemento de A, entonces, como $A \subseteq B$, tenemos que $x \in B$; se manera similar, si x es un elemento de B, entonces como $B \subseteq A$ podemos deducir que $x \in A$. Vemos así que todo elemento de A es un elemento de B y que todo elemento de B es un elemento de A, por lo que A y B tienen exactamente los mismos elementos y, por lo tanto, es $A = B$.

(*iii*) Supongamos que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq C$, y sea x un elemento de A. Como $A \subseteq B$, de que x pertenezca a A se deduce que x pertenece a B. De esto y de que $B \subseteq C$ se deduce, a su vez, que x pertenece a C. Vemos así que todo elemento de A es un elemento de C y, por lo tanto, que $A \subseteq C$, como afirma el enunciado. □

1.2.5. La primera afirmación de la Proposición 1.2.4 que acabamos de probar nos dice que todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo, esto es, que $A \subseteq A$. Por el contrario, ningún conjunto es un *elemento* de sí mismo: en otras palabras, vale que

cualquiera sea el conjunto A se tiene que $A \notin A$.

Esta afirmación es, de hecho, el llamado *Axioma de Fundación* de la Teoría Axiomática de Conjuntos de John von Neumann y Ernst Zermelo, que es la formalización más usual de la teoría de conjuntos.

1.2.6. El conjunto vacío se comporta de una manera especial con respecto a la relación de inclusión:

Proposición. *Sea A un conjunto.*

(*i*) *Se tiene que $\varnothing \subseteq A$.*

(*ii*) *Si $A \subseteq \varnothing$, entonces $A = \varnothing$.*

Demostración. Todo elemento de $\varnothing$ pertenece a A, simplemente porque no hay ningún elemento en $\varnothing$: esto nos dice que $\varnothing \subseteq A$. Esto prueba la afirmación (*i*). Para probar la afirmación (*ii*), por su parte, probaremos la afirmación contrarrecíproca, a saber, que

si $A \neq \varnothing$, entonces $A \nsubseteq \varnothing$.

Sea entonces A un conjunto que no es vacío. Como no es vacío, posee algún elemento x: ahora bien, como $x \notin \varnothing$, es claro que $A \nsubseteq \varnothing$. □

1.2.7. Si A es un conjunto, el ***conjunto de partes*** de A es el conjunto $\mathscr{P}(A)$ cuyos elementos son los subconjuntos de A. Así, se tiene que

$$B \in \mathscr{P}(A) \iff B \subseteq A.$$

Proposición. *Sean A y B dos conjuntos.*

(*i*) *El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto A son elementos de $\mathscr{P}(A)$ y, en particular, el conjunto $\mathscr{P}(A)$ no es vacío.*

(*ii*) *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.*

Demostración. (*i*) Sabemos de la Proposición 1.2.6(*i*) y de la Proposición 1.2.4(*i*) que $\varnothing \subseteq A$ y que $A \subseteq A$, así que $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ y $A \in \mathscr{P}(A)$.

(*ii*) Supongamos que $A \subseteq B$ y sea $C \in \mathscr{P}(A)$, de manera que $C \subseteq A$. Usando la Proposición 1.2.4(*iii*) y el hecho de que $C \subseteq A$ y $A \subseteq B$, vemos que $C \subseteq B$, esto es, que $C \in \mathscr{P}(B)$. Así, todo elemento de $\mathscr{P}(A)$ está en $\mathscr{P}(B)$ y, por lo tanto, $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$, como afirma el enunciado. □

1.2.8. El único subconjunto del conjunto vacío es el conjunto vacío — esto es precisamente lo que nos dice la Proposición 1.2.6(*ii*)— así que $\mathscr{P}(\varnothing)$ tiene exactamente un elemento, el conjunto vacío mismo:

$$\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Los subconjuntos del conjunto $\{1\}$ son

$$\varnothing \quad \text{y} \quad \{1\}$$

así que estos son los elementos de $\mathscr{P}(\{1\})$, que tiene, por lo tanto, 2 elementos. De manera similar, los subconjuntos de $\{1, 2\}$ y de $\{1, 2, 3\}$ son, respectivamente,

$$\varnothing, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{1,2\},$$

y

$$\varnothing, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,3\}, \quad \{1,2,3\},$$

así que los conjuntos de partes $\mathscr{P}(\{1,2\})$ y $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$ tienen $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$ elementos. Veremos un poco más adelante que este patrón se cumple con toda generalidad, de manera que tenemos el siguiente resultado:

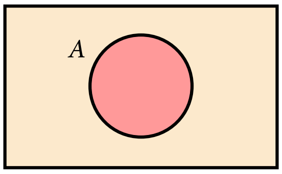
Proposición. *Si A es un conjunto finito y $n \in \mathbb{N}_0$ es el número de elementos de sus elementos, entonces el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$ es finito y tiene exactamente 2^n elementos.*

Daremos la prueba de esta proposición cuando tengamos a nuestra disposición el principio de inducción.

§1.3. Diagramas de Venn

Cuando tenemos unos pocos conjuntos es frecuente usar una idea de John Venn para hacer un diagrama que refleje las relaciones entre ellos. Dedicaremos esta sección a los llamados *diagramas de Venn*, que aparecerán frecuentemente en todo lo que sigue.

Cuando tenemos un conjunto A podemos representarlo gráficamente con un diagrama como el siguiente:



La idea es que el rectángulo contiene todos los objetos sobre los que estamos hablando, mientras que el círculo, que representa al conjunto A, divide a esos objetos en dos: los que están adentro son los que pertenecen a A y los que están afuera son los que no pertenecen a A.

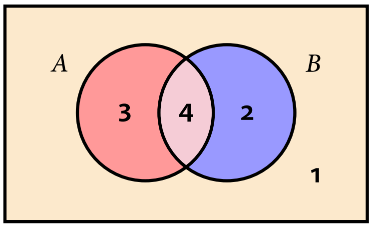
Supongamos ahora tenemos dos conjuntos A y B. Cada objeto puede pertenecer o no a A y puede pertenecer o no a B. En total, hay cuatro posibilidades, correspondientes a las cuatro entradas de la siguiente tabla:

		¿$x \in B$?	
		No	Sí
¿$x \in A$?	No	1	2
	Sí	3	4

Una forma alternativa y más conveniente de presentar estas mismas cuatro posibilidades es la siguiente tabla:

	¿$x \in A$?	¿$x \in B$?
1	No	No
2	No	Sí
3	Sí	No
4	Sí	Sí

Gráficamente podemos representar estas cuatro opciones usando el siguiente diagrama:

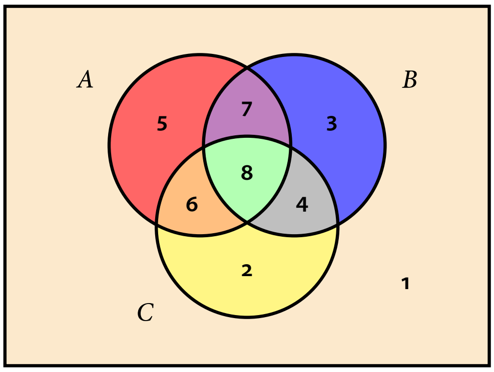


Tenemos aquí el mismo rectángulo que antes, que representa la clase de todos los objetos sobre los que estamos hablando, y dos círculos que corresponden a los conjuntos A y B. Cada uno de estos círculos dividen al rectángulo en dos regiones, que representan los elementos que pertenecen al conjunto corresponden y los que no pertenecen a él. Entre los dos, los círculos dividen al rectángulo en cuatro regiones: cada una de ellas se corresponde a una de las cuatro opciones que tabulamos arriba. Por ejemplo, la región que pintamos de azul es la parte del rectángulo que está dentro del círculo que representa a B y fuera del que representa a A.

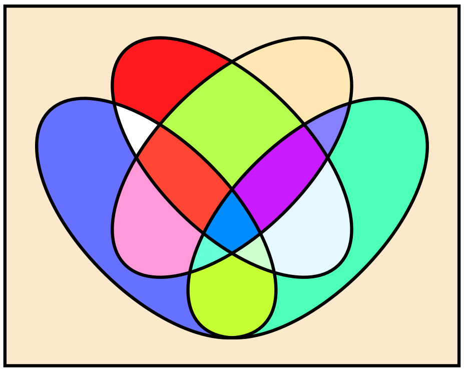
Si en lugar de dos conjuntos tenemos tres, A, B y C, entonces un elemento x puede o no pertenecer a A, puede o no pertenecer a B y puede o no pertenecer a C: en total esto nos da ocho casos, que son los que aparecen en la siguiente tabla:

	¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in C$?
1	No	No	No
2	No	No	Sí
3	No	Sí	No
4	No	Sí	Sí
5	Sí	No	No
6	Sí	No	Sí
7	Sí	Sí	No
8	Sí	Sí	Sí

Como en el caso anterior, cada una de las filas de esta tabla se corresponde con una de las regiones del siguiente diagrama de Venn:



Si tenemos más conjuntos, es más difícil hacer diagramas de Venn que los representen, pero Venn probó en [Ven1880] que siempre es posible. Por ejemplo, si tenemos cuatro conjuntos A, B, C, D y un elemento x que puede pertenecer o no a cada uno de ellos, hay en total 16 posibles casos a considerar. Es imposible hacer un diagrama de Venn para esta situación usando círculos — esencialmente porque dos círculos se intersecan en como mucho dos puntos[2] — pero sí es posible hacerlo con otras figuras. Por ejemplo, el siguiente es un diagrama de Venn con cuatro elipses congruentes:



Notemos que este diagrama no tiene la misma simetría rotacional que el diagrama de arriba para tres conjuntos, y esto es inevitable: David Henderson [Hen1963] y Stan Wagon y Peter Webb [WW2008] probaron que si hay un diagrama de Venn para n conjuntos que tiene simetría

[2] Que dos círculos se intersequen en como mucho dos puntos implica que si tenemos un diagrama con k círculos y agregamos un círculo más, entonces agregaremos como mucho $2k$ nuevos puntos de intersección y, por lo tanto, el número de regiones en las que queda dividido el plano puede aumentar, como mucho, en $2k$. Con un solo círculo tenemos 2 regiones, así que agregando uno tenemos como mucho $2 + 2 \cdot 1 = 4$ regiones, agregando uno más como mucho $4 + 2 \cdot 2 = 8$, y agregando uno más como mucho $8 + 2 \cdot 3 = 14$. Como 14 es ciertamente menor que 16, es imposible hacer un diagrama de Venn con 4 círculos.

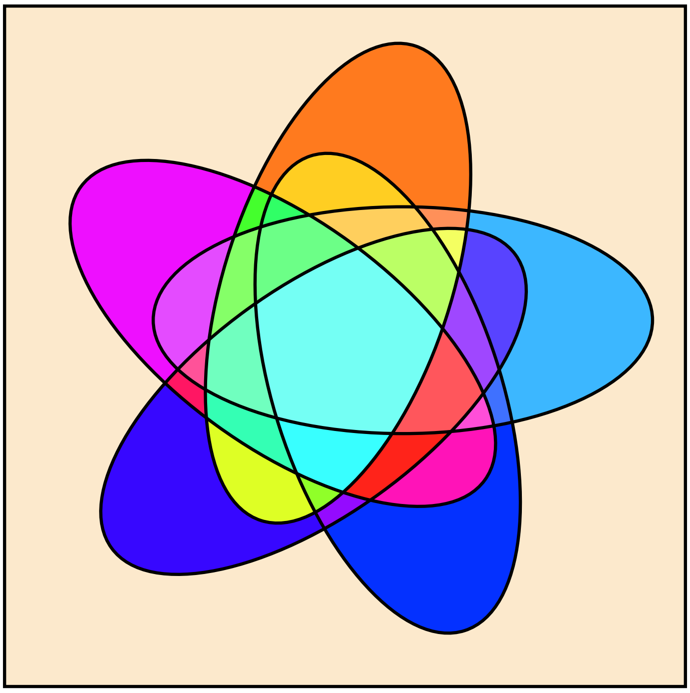


Figura 1.1. Un diagrama de Venn para cinco conjuntos usando elipses congruentes.

rotacional de $360/n$ grados, entonces el número n es necesariamente primo. No se conocen diagramas simétricos para todos los primos, de todas formas. En la Figura 1.1 mostramos un diagrama de Venn para cinco conjuntos representados por elipses congruentes que tiene simetría rotacional — la construcción es debida a Branko Grünbaum [Grü1992a, Grü1992b].

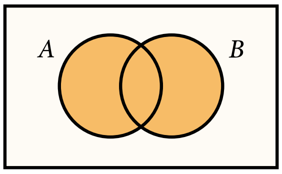
§1.4. Operaciones entre conjuntos

Unión

1.4.1. Si A y B son conjuntos, la ***unión*** de A y B es el conjunto $A \cup B$ tal que un elemento pertenece a $A \cup B$ si y solamente si pertenece a A o a B, esto es, tal que

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ o } x \in B.$$

En términos de diagramas de Venn, la unión de A y B es



1.4.2. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $A \subseteq A \cup B$ *y* $B \subseteq A \cup B$.

(*ii*) *Si* $A \subseteq C$ *y* $B \subseteq C$, *entonces* $A \cup B \subseteq C$.

(*iii*) *Se tiene que* $A \subseteq B$ *si y solamente si* $A \cup B = B$.

Demostración. (*i*) Si x es un elemento de A, entonces claramente se tiene que $x \in A$ o $x \in B$, y esto significa que $x \in A \cup B$: vemos así que $A \subseteq A \cup B$. Para ver la veracidad de la segunda parte del enunciado procedemos de exactamente la misma manera.

(*ii*) Supongamos que $A \subseteq C$ y que $B \subseteq C$ y mostremos que $A \cup B \subseteq C$. Sea x un elemento de $A \cup B$, de manera que $x \in A$ o $x \in B$. En el primer caso, de que $x \in A$ y que $A \subseteq C$ podemos deducir que $x \in C$; en el segundo, de que $x \in B$ y que $B \subseteq C$, que también $x \in C$. Así, en cualquier caso se tiene que $x \in C$ y esto prueba que todo elemento de $A \cup B$ es un elemento de C, esto es, que $A \cup B \subseteq C$, como queremos.

(*iii*) Supongamos primero que $A \subseteq B$. Como además es $B \subseteq B$, usando la parte (*ii*) que acabamos de probar podemos deducir que $A \cup B \subseteq B$. Por otro lado, la parte (*i*) nos dice que $B \subseteq A \cup B$. Juntando estas dos cosas, la Proposición 1.2.4(*ii*) nos permite concluir que $A \cup B = B$. Vemos así que si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

Probemos ahora la implicación recíproca: que si $A \cup B = B$, entonces $A \subseteq B$. Supongamos entonces que $A \cup B = B$. De la parte (*i*) de la proposición sabemos que $A \subseteq A \cup B$ y, por hipótesis, este último conjunto es igual a B, así que $A \subseteq B$, que es lo que queremos. □

1.4.3. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $A \cup A = A$.

(*ii*) $A \cup \varnothing = A$.

(*iii*) $A \cup B = B \cup A$.

(*iv*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Demostración. (*i*) De la Proposición 1.4.2(*i*) sabemos que $A \subseteq A \cup A$, y de la Proposición 1.4.2(*ii*), como $A \subseteq A$ y $A \subseteq A$, que $A \cup A \subseteq A$. Estas dos inclusiones nos dicen que $A \cup A = A$.

(*ii*) Como $A \subseteq A$ y $\varnothing \subseteq A$, de la Proposición 1.4.2(*ii*) tenemos que $A \cup \varnothing \subseteq A$. Por otro lado, de la Proposición 1.4.2(*i*) sabemos que $A \subseteq A \cup \varnothing$. Vemos así que $A \cup \varnothing = A$.

(*iii*) De la Proposición 1.4.2(*i*) sabemos que $A \subseteq B \cup A$ y que $B \subseteq B \cup A$ y entonces, gracias a la Proposición 1.4.2(*ii*), podemos concluir que $A \cup B \subseteq B \cup A$. Exactamente el mismo argumento pero intercambiando los roles de A y de B muestra que $B \cup A \subseteq A \cup B$ y, juntando todo, que $A \cup B = B \cup A$.

(*iv*) Sea x un elemento de $(A \cup B) \cup C$, de manera que o $x \in A \cup B$ o $x \in C$.

- En el segundo caso, tenemos que $x \in B \cup C$ y, por lo tanto que $x \in A \cup (B \cup C)$.
- En el primer caso, tenemos que o $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, entonces claramente $x \in A \cup (B \cup C)$. Si en cambio $x \in B$, entonces $x \in B \cup C$ y, por lo tanto, $x \in A \cup (B \cup C)$.

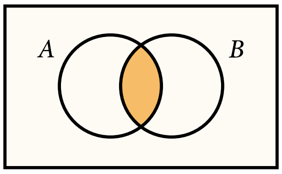
Vemos así que en cualquier caso se tiene que x pertenece a $A \cup (B \cup C)$, y esto prueba que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$. Razonando de la misma manera podemos ver que también vale la inclusión recíproca, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$, y concluir entonces que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, como afirma el enunciado. $\square$

Intersección

1.4.4. Si A y B son conjuntos, la ***intersección*** de A y B es el conjunto $A \cap B$ de los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, esto es, el conjunto tal que

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ y } x \in B.$$

En términos de diagramas de Venn, la intersección de A y B es



Decimos que A y B son ***disjuntos*** si la intersección $A \cap B$ es vacía.

1.4.5. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$.

(*ii*) *Si* $C \subseteq A$ *y* $C \subseteq B$, *entonces* $C \subseteq A \cap B$.

(*iii*) *Se tiene que* $A \subseteq B$ *si y solamente si* $A \cap B = A$.

Demostración. (*i*) Si x es un elemento de $A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$, así que, en particular, x es un elemento de A. Esto nos dice que todo elemento de $A \cap B$ es elemento de A, esto es, que se tiene que $A \cap B \subseteq A$. Que $A \cap B \subseteq B$ se prueba de la misma forma.

(*ii*) Supongamos que $C \subseteq A$ y que $C \subseteq B$ y mostremos que $C \subseteq A \cap B$. Sea x un elemento de C. Como $C \subseteq A$, de que x pertenezca a C podemos deducir que $x \in A$; de manera similar, de que

$C \subseteq B$ y $x \in C$ vemos que $x \in B$. Como x pertenece tanto a A como a B, pertenece a $A \cap B$. Esto muestra que bajo nuestras hipótesis es $C \subseteq A \cap B$, que es lo que queremos.

(*iii*) Mostremos primero que si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$. Supongamos, para ello, que $A \subseteq B$. De la parte (*i*) de la proposición sabemos que $A \cap B \subseteq A$. Por otro lado, si x es un elemento de A, entonces $x \in B$ porque $A \subseteq B$ y, en consecuencia, $x \in A \cap B$: esto muestra que todo elemento de A es pertenece a $A \cap B$, es decir, que $A \subseteq A \cap B$. Como valen las dos inclusiones, vemos de esta forma que $A \cap B = A$.

Mostremos ahora que si $A \cap B = A$ entonces $A \subseteq B$. Supongamos para ello que $A \cap B = A$ y sea x un elemento de A. Como x pertenece a A y $A = A \cap B$, tenemos por supuesto que $x \in A \cap B$ y, en particular, que x pertenece a B. Esto prueba que $A \subseteq B$. □

1.4.6. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $A \cap A = A$.

(*ii*) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(*iii*) $A \cap B = B \cap A$.

(*iv*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Demostración. (*i*) De la Proposición 1.4.5(*i*) sabemos que $A \cap A \subseteq A$. Por otro lado, como $A \subseteq A$, de la Proposición 1.4.5(*ii*) sabemos también que $A \subseteq A \cap A$. En definitiva, tenemos que $A = A \cap A$.

(*ii*) Es $A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$ por la Proposición 1.4.5(*i*) y entonces, de acuerdo a la Proposición 1.2.6(*ii*), es $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(*iii*) Sabemos que $A \cap B \subseteq B$ y que $A \cap B \subseteq A$, así que la Proposición 1.4.5(*ii*) implica que $A \cap B \subseteq B \cap A$. Intercambiando los roles de A y B en este razonamiento, vemos que también $B \cap A \subseteq A \cap B$ y, por lo tanto, que $A \cap B = B \cap A$.

(*iv*) Sea x un elemento de $(A \cap B) \cap C$. Se tiene entonces que $x \in A \cap B$ y que $x \in C$, y que x pertenezca a $A \cap B$ implica que $x \in A$ y que $x \in B$. Ahora bien, como $x \in B$ y $x \in C$, es $x \in B \cap C$; como además $x \in A$, tenemos que $x \in A \cap (B \cap C)$. Vemos de esta forma que

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C). \tag{4}$$

Para probar la inclusión recíproca, observemos que

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= A \cap (C \cap B) && \text{porque } B \cap C = C \cap B\text{, en vista de la parte } (iii) \\
&= (C \cap B) \cap A && \text{otra vez por la parte } (iii) \\
&\subseteq C \cap (B \cap A) && \text{porque ya sabemos que (4) vale} \\
&= (B \cap A) \cap C && \text{por } (iii) \\
&= (A \cap B) \cap C && \text{por la misma razón.}
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, como afirma el enunciado. □

1.4.7. Las Proposiciones 1.4.5 y 1.4.6 sobre la intersección de conjuntos son completamente paralelas a las Proposiciones 1.4.2 y 1.4.3, que se refieren a la unión. El siguiente resultado, por su parte, nos dice cómo se relacionan entre sí las operaciones de unión e intersección.

Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(*ii*) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

La primera parte de esta proposición nos dice que la unión se ***distribuye*** sobre intersecciones, de manera similar a como el producto de números de distribuye sobre sumas: sabemos que si a, b y c son números, vale que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. De manera similar, la segunda parte de la proposición afirma que la intersección se distribuye sobre uniones.

Demostración. (*i*) Probaremos la igualdad que afirma el enunciado mostrando que los dos conjuntos que aparecen a los lados del signo = se contienen mutuamente.

Empezamos probando que $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Para ello, supongamos que x es un elemento de $(A \cap B) \cup C$, de manera que x está en $A \cap B$ o x están en C.

- Si $x \in C$, entonces claramente $x \in A \cup C$ y $x \in B \cup C$, así que $x \in (A \cup C) \cap (B \cap C)$.
- Si en cambio $x \in A \cap B$, entonces sabemos que tanto $x \in A$ como $x \in B$. De lo primero deducimos que $x \in A \cup C$ y de lo segundo que $x \in B \cup C$ y, juntando estas dos cosas, que $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

En cualquier caso, entonces, se tiene que $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ y esto prueba que, como queríamos,

$$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{5}$$

Veamos ahora la inclusión recíproca: supongamos que x es un elemento de $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ y mostremos que necesariamente es también un elemento de $(A \cup B) \cap C$. La hipótesis nos dice, otra vez, que x pertenece a $A \cap C$ o a $B \cap C$.

- Si $x \in A \cap C$, entonces tenemos que $x \in A$ y que $x \in C$. De lo primero se deduce que $x \in A \cup B$, y de todo que $x \in (A \cup B) \cap C$.
- Si $x \in B \cap C$, entonces tenemos que $x \in B$ y que $x \in C$. Lo primero implica que $x \in A \cup B$ y esto y lo segundo que $x \in (A \cup B) \cap C$.

Vemos así que x pertenece a $(A \cup B) \cap C$ independientemente de en qué caso estemos, y esto muestra que

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C. \tag{6}$$

Finalmente, de (5) y de (6) vemos que $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$, como queremos.

(ii) Probaremos esta igualdad, como la anterior, mostrando que ambos conjuntos se contienen mutuamente. Sea x un elemento de $(A \cup B) \cap C$. Sabemos que $x \in C$ y que $x \in A \cup B$, de manera que $x \in A$ o $x \in B$. En el primer caso tenemos que $x \in A \cap C$ y, por lo tanto, que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. En el segundo tenemos que $x \in B \cap C$ y, por lo tanto, que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. En cualquier caso, entonces, es $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, de manera que

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{7}$$

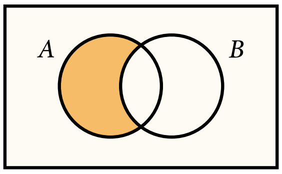
Supongamos ahora que x es un elemento de $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Si $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \in C$, así que $x \in A \cup B$ y, más aún, que $x \in (A \cup B) \cap C$. Si en cambio $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$, así que $x \in A \cup B$ y $x \in (A \cup B) \cap C$. Vemos de esta forma que $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$ y esto, junto con (7), prueba que $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, completando la prueba de la proposición. □

Diferencia

1.4.8. Si A y B son conjuntos, la ***diferencia*** de A y B es el conjunto $A \setminus B$ cuyos elementos son precisamente los elementos de A que no son elementos de B, esto es, el conjunto tal que

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ y } x \notin B.$$

En términos de diagramas de Venn, la diferencia de $A \setminus B$ es



Muchos autores escriben $A - B$ a lo que nosotros aquí escribimos $A \setminus B$.

1.4.9. Observemos que de la definición del conjunto $A \setminus B$ se siguen inmediatamente que

$$x \notin A \setminus B \implies x \notin A \text{ o } x \in B.$$

En efecto, esta implicación es la contrarrecíproca de la implicación

$$x \in A \text{ y } x \notin B \implies x \in A \setminus B$$

que es parte de la definición de $A \setminus B$.

1.4.10. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(i) *El conjunto $A \setminus B$ está contenido en A y es disjunto de B.*

(*ii*) $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$ *y* $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

(*iii*) *Si* $A \setminus B = B \setminus A$, *entonces* $A = B$.

(*iv*) *Es* $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

Demostración. (*i*) Si x es un elemento de $A \setminus B$, entonces de la definición misma de la diferencia de conjuntos sabemos que x pertenece a A: esto significa que $A \setminus B \subseteq A$ y prueba la primera afirmación. Para probar la segunda, supongamos por un momento que el conjunto $(A \setminus B) \cap B$ no es vacío, de manera que posee algún elemento x. Por supuesto se tiene en ese caso que $x \in B$. Por otro lado, es $x \in A \setminus B$ y, por lo tanto, $x \notin B$: esto es imposible. Esta contradicción muestra que nuestra suposición de que $(A \setminus B) \cap B$ no es vacío no puede ser cierta y podemos concluir de esto que $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$, esto es, que los conjuntos $A \setminus B$ y B son disjuntos.

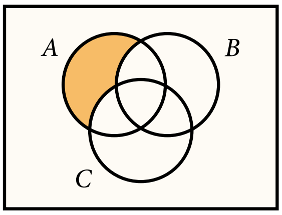
(*ii*) Supongamos que la diferencia $A \setminus A$ no es vacía, de manera que posee algún elemento x. Como $x \in A \setminus A$, de la definición de la diferencia tenemos que $x \in A$ y $x \notin A$: esto es imposible y esta contradicción provino de haber supuesto que el conjunto $A \setminus A$ no es vacío. Vemos así que debe ser $A \setminus A = \varnothing$.

De la parte (*i*) sabemos que $A \setminus \varnothing \subseteq A$. Por otro lado, si x es un elemento de A, entonces claramente $x \notin \varnothing$, así que $x \in A \setminus \varnothing$: esto nos dice que $A \subseteq A \setminus \varnothing$ y, juntando todo, que $A \setminus \varnothing = A$. Finalmente, de la parte (*i*) sabemos que $\varnothing \setminus A \subseteq \varnothing$, así que usando la Proposición **1.2.6**(*ii*) podemos deducir que $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

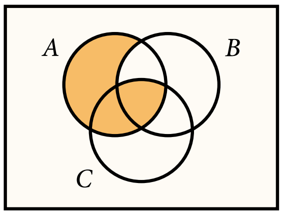
(*iii*) Supongamos que $A \setminus B = B \setminus A$ y mostremos que $A = B$ probando que los conjuntos A y B se contienen mutuamente. Sea x un elemento de A: si fuese $x \notin B$, entonces tendríamos que $x \in A \setminus B$ y como este último conjunto coincide con $B \setminus A$ por hipótesis y sabemos que $B \setminus A \subseteq B$, tendríamos que $x \in B$, lo que es absurdo. Vemos así que x necesariamente pertenece a B y, en definitiva, que $A \subseteq B$. Razonando de manera similar pero intercambiando los roles de A y de B vemos que además es $B \subseteq A$, así que, como queríamos, $A = B$.

(*iv*) Sea x un elemento de $(A \setminus B) \setminus C$, de manera que $x \in A \setminus B$ y $x \notin C$. Como $x \in A \setminus B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$. En particular, de que x no pertenezca a B deducimos que $x \notin B \setminus C$ y, juntando todo, que $x \in A \setminus (B \setminus C)$. $\square$

1.4.11. Observemos que no es cierto que valga la igualdad en la Proposición **1.4.10**(*iv*). Por ejemplo, si tomamos $A = C = \{1\}$ y $B = \varnothing$, entonces el conjunto $(A \setminus B) \setminus C = \varnothing$ esta contenido propiamente en $A \setminus (B \setminus C) = \{1\}$. En general, los conjuntos que aparecen en ese enunciado tienen los diagramas de Venn siguientes:



$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$

Esto nos dice que la operación de diferencia de conjuntos no es, en general, asociativa y, más aún, nos sugiere cuándo sí lo es.

1.4.12. Ejercicio. Sean A, B y C tres conjuntos. Pruebe que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ si y solamente si $A \cap C = \varnothing$.

1.4.13. La siguiente proposición nos describe algunas de las formas en las que la diferencia interactúa con las otras operaciones de conjuntos.

Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) *Es* $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus B \cup C$.

(*ii*) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

(*iii*) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.

(*iv*) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Demostración. Probaremos cada una de las cuatro igualdades que afirma esta proposición mostrando que los dos conjuntos involucrados se contienen mutuamente.

(*i*) Sea x un elemento de $(A \setminus B) \setminus C$, de manera que $x \in A \setminus B$ y $x \notin C$. Se tiene entonces que $x \in A$ y que $x \notin B$, así que $x \notin B \cup C$ y, por lo tanto, podemos concluir, como queremos, que $x \in A \setminus B \cup C$. Vemos así que $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus B \cup C$.

Sea, por otro lado, x un elemento de $A \setminus B \cup C$, de forma que $x \in A$ y $x \notin B \cup C$. De esto último se deduce que $x \notin B$ y que $x \notin C$, así que tenemos que $x \in A \setminus B$ y, finalmente, que $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Esto nos dice que $A \setminus B \cup C \subseteq (A \setminus B) \setminus C$.

(*ii*) Sea x un elemento de $A \setminus (B \setminus C)$. Se tiene entonces que $x \in A$ y $x \notin B \setminus C$ y, por lo tanto, que $x \notin B$ o $x \in C$. En el primer caso tenemos que $x \in A \setminus B$ y en el segundo que $x \in A \cap C$: vemos así que en cualquier caso es $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Esto muestra que $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Supongamos, por otro lado, que x es un elemento de $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Si $x \in A \setminus B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$, así que $x \notin B \setminus C$ y, en definitiva, $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Si en cambio es $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \notin B \setminus C$, así que $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Esto prueba que $(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ y, junto con la inclusión que probamos antes, que vale la igualdad del enunciado.

(*iii*) Sea x un elemento de $A \cup (B \setminus C)$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$ y $x \notin C \setminus A$ y, por lo tanto, $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$. Por otro lado, si $x \in B \setminus C$, entonces $x \in B$, de manera que $x \in A \cup B$, y $x \notin C$, de manera que $x \notin C \setminus A$ y, otra vez, $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$. Concluimos de esta forma que $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.

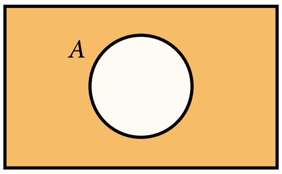
Sea ahora $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$. Es $x \in A \cup B$ y $x \notin C \setminus A$. Si $x \in A$, entonces claramente $x \in A \cup (B \setminus C)$. Si $x \notin A$, entonces debe ser $x \in B$, ya que $x \in A \cup B$, y, como $x \notin C \setminus A$, debe ser también $x \notin C$, así que $x \in B \setminus C$ y, por lo tanto, $x \in A \cup (B \setminus C)$. Esto nos dice que $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ y, junto con la inclusión anterior, prueba lo que queremos.

(*iv*) Sea x un elemento de $A \cap (B \setminus C)$, de manera que $x \in A$ y $x \in B \setminus C$, es decir, $x \in B$ y $x \notin C$. Como $x \in A$ y $x \in B$, sabemos que $x \in A \cap B$; por otro lado, como $x \in A$ y $x \notin C$, es $x \notin A \cap C$. Estas dos cosas implican que $x \in A \cap B \setminus A \cap C$ y, en definitiva, que $A \cap (B \setminus C) \subseteq A \cap B \setminus A \cap C$.

Sea, para verificar la inclusión recíproca, x un elemento de $A \cap B \setminus A \cap C$, de forma que $x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap C$. Lo primero nos dice que $x \in A$ y $x \in B$, mientras que lo segundo nos dice, dado que x pertenece a A, que $x \notin C$. Tenemos así que $x \in B \setminus C$ y, en consecuencia, que $x \in A \cap (B \setminus C)$. Esto prueba que $A \cap B \setminus A \cap C \subseteq A \cap (B \setminus C)$ y, en vista de la inclusión que ya probamos, que vale de hecho la igualdad. □

Complemento

1.4.14. Fijemos un conjunto $\mathscr{U}$, al que llamaremos en este contexto el ***conjunto de referencia*** o ***universal***, y representémoslo en los diagramas de Venn por el rectángulo exterior. Si A es un subconjunto de $\mathscr{U}$, llamamos ***complemento*** de A (con respecto al conjunto de referencia $\mathscr{U}$) al conjunto $A^c := \mathscr{U} \setminus A$. El diagrama de Venn de A^c es el siguiente.



Es importante observar que el complemento A^c depende de la elección del conjunto de referencia $\mathscr{U}$ y que solamente está definido para subconjuntos de este.

1.4.15. Proposición. *Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de referencia y sean A y B dos subconjuntos de $\mathscr{U}$.*

(*i*) *Es $A \cup A^c = \mathscr{U}$ y $A \cap A^c = \varnothing$.*

(*ii*) $\varnothing^c = \mathscr{U}$ *y* $\mathscr{U}^c = \varnothing$.

(*iii*) $(A^c)^c = A$.

(*iv*) $A \setminus B = A \cap B^c$.

Observemos que si A es un subconjunto de $\mathscr{U}$, entonces su complemento A^c con respecto a $\mathscr{U}$ también lo es, así que tiene sentido considerar su complemento $(A^c)^c$, como hicimos en la parte (*iii*) de esta proposición.

Demostración. (*i*) Es

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= A \cup (\mathscr{U} \setminus A) \\ &= (A \cup \mathscr{U}) \setminus (A \setminus A) && \text{por la Proposición 1.4.13}(iii) \\ &= \mathscr{U} \setminus \varnothing && \text{porque } A \subseteq \mathscr{U} \\ &= \mathscr{U} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= A \cap (\mathscr{U} \setminus A) \\ &= A \cap \mathscr{U} \setminus A \cap A && \text{por la Proposición 1.4.13}(iv) \\ &= A \setminus A && \text{porque } A \subseteq \mathscr{U} \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

(*ii*) Claramente $\varnothing^c = \mathscr{U} \setminus \varnothing = \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}^c = \mathscr{U} \setminus \mathscr{U} = \varnothing$.
(*iii*) Es

$$\begin{aligned} (A^c)^c &= \mathscr{U} \setminus A^c \\ &= \mathscr{U} \setminus (\mathscr{U} \setminus A) \\ &= (\mathscr{U} \setminus \mathscr{U}) \cup (\mathscr{U} \cap A) && \text{por la Proposición 1.4.13}(ii) \\ &= \varnothing \cup A && \text{porque } A \subseteq \mathscr{U} \\ &= A. \end{aligned}$$

(*iv*) Sea x un elemento de $A \setminus B$, de manera que $x \in A$ y $x \notin B$. Como $A \subseteq \mathscr{U}$, de que $x \in A$ obtenemos que $x \in \mathscr{U}$ y, por lo tanto, que $x \in \mathscr{U} \setminus B = B^c$. Así, $x \in A \cap B^c$. Recíprocamente, si x es un elemento de $A \cap B^c$, entonces $x \in A$ y $x \in B^c = \mathscr{U} \setminus B$, de manera que $x \notin B$: vemos de esta forma que $x \in A \setminus B$. □

1.4.16. Las dos afirmaciones de la siguiente proposición son conocidas como las Leyes de Dualidad de De Morgan, por Augustus De Morgan, uno de los fundadores de la lógica moderna.

Proposición. *Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de referencia y sean A y B dos subconjuntos de $\mathscr{U}$.*
(*i*) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(*ii*) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Observemos que si A y B son subconjuntos de $\mathscr{U}$, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son, así que tiene sentido considerar, como en esta proposición, los complementos $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$

con respecto al conjunto $\mathscr{U}$.

Demostración. (i) Supongamos que x es un elemento de $(A \cup B)^c$, de manera que $x \in \mathscr{U}$ y $x \notin A \cup B$, y, por lo tanto, $x \notin A$ y $x \notin B$. Vemos así que $x \in \mathscr{U} \setminus A = A^c$ y que $x \in \mathscr{U} \setminus B = B^c$ y, entonces, que $x \in A^c \cap B^c$.

Recíprocamente, sea x un elemento de $A^c \cap B^c$. Es $x \in A^c$ y $x \in B^c$, así que $x \in \mathscr{U}$, $x \notin A$ y $x \notin B$: de esto se deduce que $x \notin A \cup B$ y, por lo tanto, que $x \in \mathscr{U} \setminus A \cup B = (A \cup B)^c$.

(ii) Podríamos probar esta afirmación procediendo de manera totalmente similar a como probamos la parte (i) — dejamos eso al lector — pero preferimos, para variar, seguir un camino alternativo. Tenemos que

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= ((A^c)^c \cap (B^c)^c)^c && \text{porque } A = (A^c)^c \text{ y } B = (B^c)^c \\ &= ((A^c \cup B^c)^c)^c && \text{por la parte } (i) \text{ de la proposición} \\ &= A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Esta última igualdad es consecuencia de que $(X^c)^c = X$ para todo conjunto X y, en particular, cuando X es el conjunto $A^c \cup B^c$. □

1.4.17. Los resultados anteriores describen de qué manera se relaciona la operación de tomar el complemento de un conjunto con las demás operaciones entre conjuntos. El siguiente, por su parte, nos dice qué hace con las inclusiones: «las da vuelta».

Proposición. *Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de referencia. Si A y B son dos subconjuntos de $\mathscr{U}$, entonces*

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathscr{U}$, supongamos que $A \subseteq B$ y sea x un elemento de B^c. Como $x \in \mathscr{U}$ y $x \notin B$, entonces $x \notin A$ y, por lo tanto, $x \in \mathscr{U} \setminus A = A^c$. Esto prueba que

$$A \subseteq B \implies B^c \subseteq A^c.$$

Ahora bien, esto vale cualesquiera sean los conjuntos A y B: en particular, si como A elegimos a B^c y como B a A^c, nos dice que

$$B^c \subseteq A^c \implies (A^c)^c \subseteq (B^c)^c$$

y, como $(A^c)^c = A$ y $(B^c)^c = B$, que

$$B^c \subseteq A^c \implies A \subseteq B.$$

Con esto quedan probadas las dos implicaciones de la proposición. □

El principio de dualidad

1.4.18. Usando las Leyes de Dualidad de la Proposición 1.4.16 y la Proposición 1.4.17 podemos hacer una observación útil, que es conocida como el *principio de dualidad*. Antes que nada, demos dos ejemplos para mostrar de qué hablamos.

1.4.19. La primera parte de la Proposición 1.4.7 nos dice que

> *si A, B y C son tres conjuntos, entonces* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$.

Esto es cierto cualesquiera sean los conjuntos A, B y C. En particular, si tenemos tres conjuntos X, Y y Z y como A, B y C elegimos a X^c, Y^c y Z^c, respectivamente, entonces sabemos que

$$(X^c \cap Y^c) \cup Z^c = (X^c \cup Z^c) \cap (Y^c \cup Z^c).$$

Ahora bien, usando las leyes de dualidad de De Morgan de la Proposición 1.4.16 podemos ver que el lado izquierdo de esta igualdad es

$$(X^c \cap Y^c) \cup Z^c = (X \cup Y)^c \cup Z^x = \big((X \cup Y) \cap Z\big)^c,$$

mientras que el lado derecho es

$$(X^c \cup Z^c) \cap (Y^c \cup Z^c) = (X \cap Z)^c \cap (Y \cap Z)^c = \big((X \cap Z) \cup (Y \cap Z)\big)^c,$$

así que aquella igualdad nos dice que

$$\big((X \cup Y) \cap Z\big)^c = \big((X \cap Z) \cup (Y \cap Z)\big)^c.$$

Esto implica — usando otra vez las leyes de dualidad — que

$$(X \cup Y) \cap Z = \Big(\big((X \cup Y) \cap Z\big)^c\Big)^c = \Big(\big((X \cap Z) \cup (Y \cap Z)\big)^c\Big)^c = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

Hemos probado así que

> *si X, Y y Z son tres conjuntos, entonces* $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Esta afirmación es, más allá de la elección de los nombres de los conjuntos, la segunda afirmación de la Proposición 1.4.7. Vemos así que podemos deducir la segunda afirmación de esa proposición de la primera usando las leyes de dualidad. Dejamos al lector la tarea de mostrar que usando esas leyes de dualidad podemos, recíprocamente, deducir la primera de la segunda y, en definitiva, que esas dos afirmaciones son equivalentes — al menos, si tenemos a mano las leyes de dualidad.

1.4.20. La Proposición 1.4.5 afirma en parte que que

si A y B son conjuntos, entonces $A \subseteq B$ exactamente cuando $A \cap B = A$.

Si X e Y son dos conjuntos cualesquiera, entonces podemos elegir en esa afirmación como A y B a los conjuntos Y^c y X^c: tenemos entonces que

$Y^c \subseteq X^c$ exactamente cuando $Y^c \cap X^c = Y^c$.

De la Proposición 1.4.17 sabemos que la afirmación $Y^c \subseteq X^c$ es equivalente a la afirmación $X \subseteq Y$. Por otro lado, de acuerdo a las leyes de dualidad de la Proposición 1.4.16 sabemos que $Y^c \cap X^c = (Y \cup X)^c$, así que la afirmación $Y^c \cap X^c = Y^c$ es equivalente a la afirmación $(Y \cup X)^c = Y^c$ y, por lo tanto, a la afirmación $Y \cup X = Y$. Juntando todo, vemos que lo que tenemos es que

$X \subseteq Y$ exactamente cuando $Y \cup X = Y$.

En definitiva, hemos probado que

si X e Y son conjuntos, entonces $X \subseteq Y$ exactamente cuand $Y \cup X = Y$,

y esto es esencialmente la tercera afirmación de la Proposición 1.4.2.

1.4.21. Estos dos ejemplos son parte de un fenómeno general: siempre que tenemos una afirmación sobre conjuntos podemos construir otra usando las leyes de dualidad de De Morgan de la Proposición 1.4.16 y la Proposición 1.4.17 de la misma forma en que lo hicimos en estos dos ejemplos, y el resultado es una nueva afirmación que es tan cierta como aquella con la que empezamos.

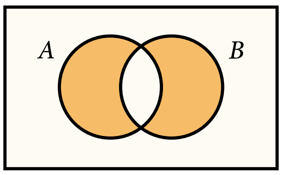
No es difícil probar esto — la dificultad consiste, sobre todo, en describir exactamente qué es lo que queremos decir cuando decimos «una afirmación sobre conjuntos» — y nos contentaremos con usar esta idea como forma de encontrar información.

Diferencia simétrica

1.4.22. Si A y B son dos conjuntos, la ***diferencia simétrica*** de A y B es el conjunto

$$A \triangle B \coloneqq A \cup B \setminus A \cap B.$$

En otras palabras, $A \triangle B$ es el conjunto de todos los elementos de A y de B que no están simultáneamente en A y en B. Por otro lado, en términos de diagramas de Venn, la diferencia simétrica de A y B es



1.4.23. Proposición. *Si A y B son conjuntos, entonces*

$$A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A).$$

Muchas veces, la diferencia simétrica de dos conjuntos se define usando la igualdad que nos da esta proposición.

Demostración. Sea x un elemento de $A \triangle B = A \cup B \smallsetminus A \cap B$, de manera que $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B$. Hay dos posibilidades:

- Puede ser que $x \in A$ y, como $x \notin A \cap B$, necesariamente es entonces $x \notin B$ y, por lo tanto, $x \in A \smallsetminus B$.
- Si no, puede ser que $x \in B$, y entonces de que $x \notin A \cap B$ podemos deducir ahora que $x \notin A$ y que $x \in B \smallsetminus A$.

En cualquiera de estos dos casos tenemos que $x \in (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$ y, en definitiva, concluimos que $A \triangle B \subseteq (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$.

Para probar la inclusión recíproca, sea x un elemento de $\in (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$. Otra vez tenemos que considerar dos casos:

- Si $x \in A \smallsetminus B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$, así que $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B$, y podemos concluir que $x \in A \cup B \smallsetminus A \cap B = A \triangle B$.
- Si $x \in B \smallsetminus A$, entonces $x \in B$ y $x \notin A$, así que $x \in B \smallsetminus A$ y $x \notin A \cap B$ y, como consecuencia de esto, otra vez tenemos que $x \in A \cup B \smallsetminus A \cap B = A \triangle B$.

Vemos así que $(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) \subseteq A \triangle B$. □

1.4.24. Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos.*

(*i*) $A \triangle \varnothing = A$ *y* $A \triangle A = \varnothing$.

(*ii*) $A \triangle B = B \triangle A$.

(*iii*) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

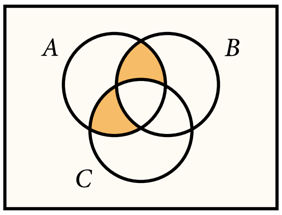
El conjunto de la parte (*iv*) de esta proposición está ilustrado en la Figura 1.2 en la página siguiente.

Demostración. Es

$$A \triangle \varnothing = A \cup \varnothing \smallsetminus A \cap \varnothing = A \smallsetminus \varnothing = A$$

y

$$A \triangle A = A \cup A \smallsetminus A \cap A = A \smallsetminus A = \varnothing,$$



$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

Figura 1.2. El conjunto de la Proposición 1.4.24(*iii*).

y, de manera similar, tenemos que

$$A \triangle B = A \cup B \setminus A \cap B = B \cup A \setminus B \cap B = B \triangle A.$$

Por otro lado, es

$$\begin{aligned} A \cap (B \triangle C) &= A \cap (B \cup C \setminus B \cap C) \\ &= A \cap (B \cup C) \setminus A \cap B \cap C \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \cap (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \triangle (A \cap C). \end{aligned}$$

Con esto hemos probado todas las afirmaciones de la proposición. □

1.4.25. Proposición. *Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de referencia. Si A y B son subconjuntos de $\mathscr{U}$, entonces*

$$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B = A \triangle B^c.$$

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos de U. Tenemos que

$$\begin{aligned} A^c \triangle B &= (\mathscr{U} \setminus A) \triangle B \\ &= ((\mathscr{U} \setminus A) \setminus B) \cup (B \setminus (\mathscr{U} \setminus A)) \\ &= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup ((B \setminus \mathscr{U}) \cup (A \cap B)) && \text{por 1.4.13}(i) \text{ y 1.4.13}(ii) \\ &= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup (\varnothing \cup (A \cap B)) && \text{ya que } B \subseteq \mathscr{U} \\ &= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup (A \cap B), && (8) \end{aligned}$$

que

$$A \triangle B^c = B^c \triangle A \qquad \text{por 1.4.24}(ii)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathscr{U} \setminus B \cup A) \cup (B \cap A) && \text{por la igualdad (8)} \\
&= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup (A \cap B) && \text{por 1.4.3}(iii) \text{ y 1.4.6}(iii) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

y que

$$
\begin{aligned}
(A \triangle B)^c &= \mathscr{U} \setminus A \triangle B \\
&= \mathscr{U} \setminus (A \cup \setminus A \cap B) \\
&= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup (\mathscr{U} \cap (A \cap B)) && \text{por 1.4.13}(ii) \\
&= (\mathscr{U} \setminus A \cup B) \cup (A \cap B) && \text{porque } A \cap B \subseteq \mathscr{U}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Comparando (8), (9) y (10) obtenemos las igualdades del enunciado. □

§1.5. Tablas de verdad

1.5.1. Muchas de las demostraciones que hicimos en la sección anterior requirieron la consideración de varios casos. Cada vez que hacemos eso es importante ser sistemáticos, para asegurarnos de que no estamos dejando de lado alguna posibilidad. Hay varias estrategias para lograr eso. Veamos una de ellas.

1.5.2. Supongamos que queremos verificar que para cada par de conjuntos A y B se tiene que

$$A \setminus A \triangle B = A \cap B. \tag{11}$$

Una forma de hacer esto es mostrar que cualquiera sea un objeto x vale que x pertenece a $A \setminus A \triangle B$ exactamente cuando pertenece a $A \cap B$. Ahora bien: ¿cuándo pertenece a $A \setminus A \triangle B$? Sabemos que pertenece a este conjunto si y solamente si pertenece a A y no a $A \triangle B$ y, más aún, que no pertenece a $A \triangle B$ si y solamente si o bien pertenece simultáneamente a A y a B o bien no pertenece a ninguno de esos dos conjuntos. Más allá de los detalles, es claro de todo esto que para decidir si x pertenece a $A \setminus A \triangle B$ o no es suficiente con saber responder a las preguntas de si x pertenece o no a A y de si pertenece o no a B.

Ahora bien, ya observamos en la Sección 1.3 que hay cuatro posibilidades para las respuestas a estas dos preguntas, que son las descriptas en cada una de las filas de la siguiente tabla.

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?
No	No
No	Sí
Sí	No
Sí	Sí

En otras palabras, una vez que fijamos un objeto x, hay exactamente una fila de esta tabla que contiene la respuesta a las dos preguntas. Eso significa, entonces, que solo con saber cuál es la fila de la tabla que corresponde a x podemos decidir si x pertenece a $A \setminus A \triangle B$ o no. Mostremos cómo podemos hacer esto en detalle.

Primero, sabiendo qué fila corresponde a x ciertamente podemos decidir si x pertenece o no a $A \triangle B$. Extendemos entonces la tabla anterior con una columna que contiene la respuesta:

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in A \triangle B$?
No	No	No
No	Sí	Sí
Sí	No	Sí
Sí	Sí	No

Hecho eso, podemos extender la tabla una vez más con una columna en la que tabulamos, en cada uno de los casos representados por las filas de la tabla, la respuesta a la pregunta de si x pertenece o no a la diferencia $A \setminus A \triangle B$:

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in A \triangle B$?	¿$x \in A \setminus A \triangle B$?
No	No	No	No
No	Sí	Sí	No
Sí	No	Sí	No
Sí	Sí	No	Sí

(12)

Podemos hacer, por otro lado, una tabla que nos diga, para cada uno de los cuatro casos

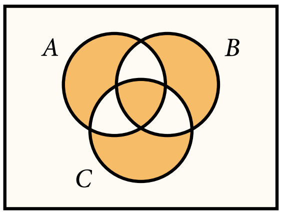


Figura 1.3. El conjunto $(A \triangle B) \triangle C$, que, de acuerdo a la Proposición 1.5.3, coincide con $A \triangle (B \triangle C)$.

representados por las filas, si x pertenece o no a $A \cap B$:

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in A \cap B$?
No	No	No
No	Sí	No
Sí	No	No
Sí	Sí	Sí

(13)

Observemos ahora que en las tablas (12) y (13) las columnas «¿$x \in A \setminus A \triangle B$?» y «¿$x \in A \cap B$?» son iguales: esto significa que en cada uno de los cuatro casos correspondientes a las filas de esas tablas el elemento x o bien pertenece a los dos conjuntos $A \setminus A \triangle B$ y $A \cap B$, o bien no pertenece a ninguno de los dos. El punto de todo esto es, por supuesto, que esto prueba que vale la igualdad (11): nos dice que no importa cuál de los cuatro casos corresponda a x, la respuesta a las dos preguntas «¿$x \in A \setminus A \triangle B$?» y «¿$x \in A \cap B$?» es la misma, así que los conjuntos $A \setminus A \triangle B$ y $A \cap B$ contienen exactamente los mismos elementos.

1.5.3. Veamos un ejemplo un poco más complicado de aplicación de esta idea:

Proposición. *Si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

En la Figura 1.3 ilustramos el conjunto que aparece en esta proposición.

Demostración. En este caso tenemos tres conjuntos, A, B y C, así que cuando consideramos las distintas posibilidades que hay de que un elemento x pertenezca a cada uno de ellos, tenemos ocho casos distintos. En cada uno de ellos tenemos que decidir si x pertenece o no a $A \triangle (B \triangle C)$ y a $(A \triangle B) \triangle C$: si en todos los casos la respuesta de las dos preguntas es la misma, entonces los dos conjuntos son iguales.

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in C$?	¿$x \in B \triangle C$?	¿$x \in A \triangle (B \triangle C)$?	¿$x \in A \triangle B$?	¿$x \in (A \triangle B) \triangle C$?
No	No	No	No	No	No	No
No	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí
No	Sí	Sí	No	No	Sí	No
Sí	No	No	No	Sí	Sí	No
Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Sí	Sí	No	Sí	No	No	No
Sí	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí

Tabla 1.1. La tabla de verdad de la prueba de la Proposición 1.5.3.

La Tabla 1.1 contiene todos los resultados necesarios. Notemos que incluimos columnas con la respuesta a las preguntas «¿$x \in A \triangle B$?» y «¿$x \in B \triangle C$?» en cada uno de los ocho casos, ya que estas sirven como pasos intermedios para calcular las columnas que verdaderamente nos interesan, que son la quinta y la séptima. Esas dos columnas son iguales, y esto significa que un elemento x pertenece a $A \triangle (B \triangle C)$ si y solamente si pertenece a $(A \triangle B) \triangle C$. Esto nos dice que estos dos conjuntos son iguales, como afirma la proposición. □

1.5.4. Consideremos otro ejemplo de cómo podemos usar estas «tablas de verdad», esta vez no para probar que dos conjuntos *son iguales*, sino que *son iguales bajo una hipótesis*.

Proposición. *Sean A, B y C tres conjuntos. Si $C \subseteq A$, entonces*

$$(A \cup B) \cap C^c = (B \setminus C) \cup (A \triangle C).$$

Demostración. Sean A, B y C tres conjuntos y supongamos que $C \subseteq A$. Otra vez tenemos tres conjuntos, así que hay en principio ocho posibilidades para la pertenencia de un elemento x a cada uno de ellos. La hipótesis que hicimos de que C está contenido en A hace, sin embargo, que algunos de esos casos sean imposibles: no puede ser que x pertenezca a C y no a A. Esto significa

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in C$?	¿$x \in A \cup B$?	¿$x \in (A \cup B) \cap C^c$?	¿$x \in B \setminus C$?	¿$x \in A \triangle C$?	¿$x \in (B \setminus C) \cup (A \triangle C)$?
No	No	No	No	No	No	No	No
No	No	Sí	No	No	No	Sí	Sí
No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
No	Sí	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí
Sí	No	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Sí	No	Sí	Sí	No	No	No	No
Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No

Tabla 1.2. La tabla de verdad de la prueba de la Proposición 1.5.4. Las filas marcadas en rojo son aquellas que corresponden a situaciones que no pueden ocurrir bajo la hipótesis de la proposición.

que cuando armemos la tabla que tabule todos los casos posibles hay que excluir todos aquellos en los que esa condición no se cumpla, que son dos: las marcamos en rojo en la Tabla 1.2.

Si comparamos la quinta columna de esa tabla con la octava, vemos que coinciden en todas sus entradas no marcadas en rojo. Esto prueba la proposición. □

Es importante notar que esas dos columnas no son completamente iguales: sus entradas correspondientes a las filas rojas son efectivamente distintas, y eso significa que la igualdad

$$(A \cup B) \cap C^c = (B \setminus C) \cup (A \triangle C)$$

es falsa en general. La tabla nos permite encontrar un ejemplo de esto: las dos columnas difieren en las entradas correspondientes a la primera de las filas rojas, así que basta encontrar tres conjuntos A, B y C tales que haya un elemento x que corresponda a esa fila, es decir, tal que $x \notin A$, $x \notin B$ y $x \in C$. Por ejemplo, podemos elegir $A = B = \varnothing$ y $C = \{1\}$. En ese caso es $(A \cup B) \cap C^c = C^c$ mientras que $(B \setminus C) \cup (A \triangle C) = C$, y estos dos conjuntos son efectivamente distintos.

Las columnas también difieren en sus entradas correspondientes a la segunda fila roja, en la que $x \notin A$, $x \in B$ y $x \in C$: esto nos sugiere otro ejemplo, con $A = \varnothing$ y $B = C = \{1\}$. Ahora

$(A \cup B) \cap C^c = \varnothing$ mientras que $(B \setminus C) \cup (A \triangle C) = C$.

1.5.5. Para terminar, demos un ejemplo de cómo podemos usar tablas de verdad para probar una inclusión de conjuntos.

Proposición. *Si A, B y C tres conjuntos, entonces $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.*

Demostración. Fijemos tres conjuntos A, B y B, y sea x un objeto cualquiera. Como antes, si nos preguntamos si x pertenece o no a A, a B y a B, las tres respuestas que obtenemos determinan una de ocho posibilidades, y sabiendo las respuestas a esas preguntas podemos decidir si x pertenece o no a $(A \setminus B) \setminus C$ y si pertenece o no a $A \setminus (B \setminus C)$. La Tabla 1.3 tiene los resultados de hacer esto.

Sus columnas correspondientes a las preguntas «¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?» y «¿$x \in A \setminus (B \setminus C)$?» son distintas, y esto nos dice que los conjuntos $(A \setminus B) \setminus C$ y $A \setminus (B \setminus C)$ son, en general, distintos. Esto no es lo que nos interesa, de todas formas: queremos probar que el conjunto $(A \setminus B) \setminus C$ está contenido en $A \setminus (B \setminus C)$, no que es igual a él. Lo que tenemos que mostrar es que cada vez que elegimos un objeto x y este es un elemento de $(A \setminus B) \setminus C$, entonces x también es un elemento de $A \setminus (B \setminus C)$. En términos de nuestra Tabla 1.3: lo que tenemos que hacer es verificar que cada vez que elegimos una fila de esa tabla que tiene un Sí en la columna «¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?» también tiene un Sí en la columna «¿$x \in A \setminus (B \setminus C)$?». Esto efectivamente ocurre — de hecho, la única fila que tiene un Sí en la columna «¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?» es que pintamos de verde. Esto prueba la proposición. □

Como dijimos, los conjuntos $(A \setminus B) \setminus C$ y $A \setminus (B \setminus C)$ son en general distintos — ya que las columnas correspondientes en nuestra tabla son distintas. Tiene sentido, de todas formas, preguntarse *cuándo* son iguales — ciertamente es posible que lo sean, como ocurre cuando los tres conjuntos A, B y C son vacíos.

Supongamos por un momento que los conjuntos A, B y C son tales que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. Si elegimos un objeto cualquiera x, entonces las preguntas «¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?» y «¿$x \in A \setminus (B \setminus C)$?» tienen la misma respuesta. Mirando nuestra Tabla 1.3 notamos inmediatamente que no puede ser que x determine una de las filas que pintamos de rojo: en los casos descriptos por ellas x no pertenece a $(A \setminus B) \setminus C$ pero sí a $A \setminus (B \setminus C)$.

Vemos así que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$, entonces no puede ser que

- haya algún objeto que pertenezca a A y a C pero no a B, porque a él correspondería la primera fila roja, no que
- hay algún objeto que terminar a A, a B y a C, ya que a él correspondería la segunda fila roja.

En otras palabras, lo que hemos observado es que

si $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$, entonces $A \cap B^c \cap C = \varnothing$ y $A \cap B \cap C = \varnothing$,

¿$x \in A$?	¿$x \in B$?	¿$x \in C$?	¿$x \in A \setminus B$?	¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?	¿$x \in B \setminus C$?	¿$x \in A \setminus (B \setminus C)$?
No	No	No	No	No	No	No
No	No	Sí	No	No	No	No
No	Sí	No	No	No	Sí	No
No	Sí	Sí	No	No	No	No
Sí	No	No	Sí	Sí	No	Sí
Sí	No	Sí	Sí	No	No	Sí
Sí	Sí	No	No	No	Sí	No
Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí

Tabla 1.3. La tabla de verdad de la prueba de la Proposición 1.5.5. Las filas marcadas en rojo son aquellas que corresponden a situaciones que no pueden ocurrir bajo la hipótesis de la proposición.

y esto nos da una condición necesaria para que sea $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. Esta condición también es necesaria, esto es, vale que

> *si* $A \cap B^c \cap C = \varnothing$ *y* $A \cap B \cap C = \varnothing$, *entonces* $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Probemos esto, usando otra vez nuestra tabla. Supongamos que $A \cap B^c \cap C = \varnothing$ y $A \cap B \cap C = \varnothing$, y sea x un objeto cualquiera. De acuerdo a que x pertenezca o no a A, a B y a C queda determinada una de las filas de la Tabla 1.3, pero la hipótesis de que es $A \cap B^c \cap C = \varnothing$ y $A \cap B \cap C = \varnothing$ nos dice que, en realidad, los casos correspondientes a las filas que pintamos de rojo no pueden ocurrir. Para saber, entonces, si las respuestas a las preguntas «¿$x \in (A \setminus B) \setminus C$?» y «¿$x \in A \setminus (B \setminus C)$?» son las mismas lo que tenemos que hacer es ver si las columnas correspondientes a estas son iguales salvo, posiblemente, en las filas rojas. Como esto es así, podemos concluir que los dos conjuntos son iguales bajo nuestra hipótesis.

Juntado todo, hemos probado el siguiente resultado:

> *Sean A, B y C tres conjuntos. La igualdad $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ vale si y solamente si $A \cap B^c \cap C = \varnothing$ y $A \cap B \cap C = \varnothing$.*

El siguiente ejercicio da una leve mejora de esto.

1.5.6. Ejercicio. Sean A, B y C tres conjuntos. Pruebe que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ si y solamente si $A \cap C = \varnothing$.

§1.6. Ejercicios

Identidades

1.6.1. Ejercicio. Sean A, B y C tres subconjuntos de un conjunto de referencia $\mathscr{U}$. Pruebe las siguientes afirmaciones.

(*a*) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \setminus A \triangle B = A \triangle (A \setminus B)$.

(*b*) $A \cup B = (A \triangle B) \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) = (A \setminus B) \cup B$.

(*c*) $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (B \triangle C) = A^c \triangle B^c$.

(*d*) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \triangle B) = A \triangle (A \cap B) = B \triangle (A \cup B)$.

(*e*) $A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$.

(*f*) $A \subseteq B \implies A \triangle B = B \setminus A$.

(*g*) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \triangle C)$.

(*h*) $A \cup (B \triangle C) \supseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C) = (B \triangle C) \setminus A = (B \setminus A) \triangle (C \setminus A)$.

(*i*) $A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap C \setminus B$, y estos tres conjuntos son iguales si y solamente si $A \setminus B = A \cap C$.

(*j*) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cup (A \setminus C)$, y todos estos conjuntos son iguales si y solamente si $A \setminus (B \cap C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

(*k*) $(A \star B) \setminus C = (A \setminus C) \star (B \setminus C)$ cuando $\star$ es cualquiera de las operaciones $\cup$, $\cap$, $\triangle$ y $\setminus$.

(*l*) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

(*m*) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (C \setminus B) \iff A \cap C \subseteq M \iff A \setminus (C \setminus B) = A$.

(*n*) $(A \cup B) \triangle (B \cup C) = (A \cup C) \setminus B$.

(*o*) $(A \cap B) \triangle (B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

(*p*) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B$.

(*q*) $(A \cup B) \triangle (C \setminus B) = B \cup (A \triangle C)$.

Uniones e intersecciones de familias de conjuntos

1.6.2. Si $\mathscr{F}$ es una familia de conjuntos, la ***unión*** de $\mathscr{F}$ y la ***intersección*** de $\mathscr{F}$ son los conjuntos que denotamos con los símbolos

$$\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{A\in\mathscr{F}} A$$

tales que

$$x \in \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A \iff \text{existe } A \in \mathscr{F} \text{ tal que } x \in A$$

y

$$x \in \bigcap_{A\in\mathscr{F}} A \iff \text{para cada } A \in \mathscr{F} \text{ se tiene que } x \in A.$$

Estas construcciones generalizan la unión y la intersección que ya vimos. En efecto, si X e Y son dos conjuntos, entonces la intersección y la unión de la familia $\mathscr{F} = \{X, Y\}$ son, respectivamente,

$$\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = X \cup Y, \qquad \bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = X \cap Y.$$

1.6.3. Ejercicio. Si $\mathscr{F}$ es una familia de conjuntos y B es un conjunto, entonces

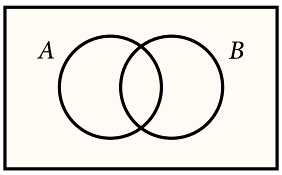
$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} (A \cup B) = \left(\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A\right) \cup B, \qquad \bigcup_{A\in\mathscr{F}} (A \cap B) = \left(\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right) \cap B$$

y si todos los miembros de la familia $\mathscr{F}$ están contenidos en un conjunto de referencia $\mathscr{U}$, entonces además

$$\left(\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A^c, \qquad \left(\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathscr{F}} A^c.$$

Sistemas completos de operaciones

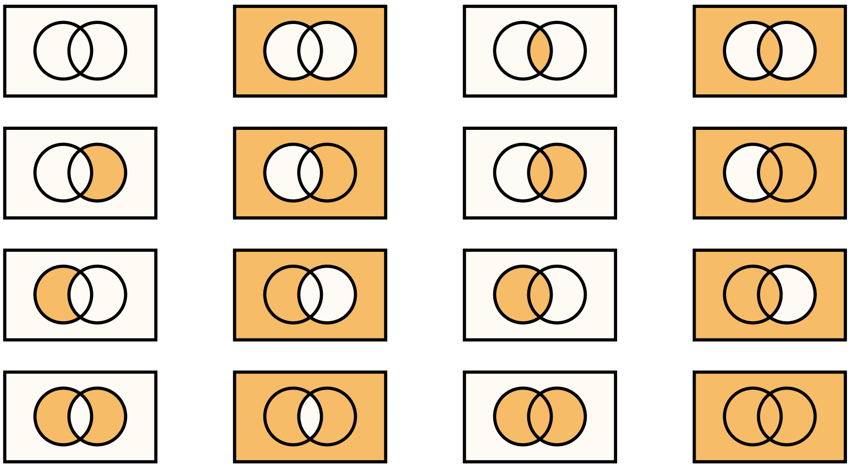
1.6.4. Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de referencia y sean A y B dos subconjuntos de $\mathscr{U}$. Consideremos el diagrama de Venn correspondiente a esta situación:



El conjunto $\mathscr{U}$ queda divido así en 4 regiones:

$$A \setminus B, \qquad B \setminus A, \qquad A \cap B, \qquad (A \cup B)^c$$

y considerando uniones de ellas podemos armar 16 conjuntos distintos.



Esto significa que podemos describir estos 16 conjuntos a partir de A y de B usando las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento.

1.6.5. Ejercicio.

(a) Muestre que para describir estos 16 conjuntos a partir de A y B es suficiente usar únicamente las operaciones de unión y complemento, o las de intersección y complemento.

(b) Si X e Y son subconjuntos de $\mathscr{U}$, definimos dos nuevas operaciones $\downarrow$ y $\uparrow$ poniendo

$$X \downarrow Y = (X \cup Y)^c, \qquad X \uparrow Y = (X \cap Y)^c$$

Muestre que es posible describir cada uno de los 16 conjuntos del diagrama anterior a partir de A y B usando únicamente la operación $\downarrow$ y también usando únicamente la operación $\uparrow$. Así, por ejemplo, se tiene que

$$A \cap B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B), \qquad A \cap B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B).$$