

Guía Rápida de Álgebra I: Conjuntos, Relaciones y Funciones

1. Conjuntos

- **Definición:** Un conjunto es una colección de objetos (elementos).
- **Pertenencia (\in):** $x \in A$ significa que x es un elemento de A .
- **Inclusión (\subseteq):** $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A es también un elemento de B .
- **Igualdad:** $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
- **Conjunto Vacío (\emptyset):** El conjunto que no tiene elementos. $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto A .
- **Conjunto de Partes ($P(A)$):** Conjunto de todos los subconjuntos de A . Si $|A|=n$, entonces $|P(A)|=2^n$.
- **Lógica Proposicional:**
 - **Conjunción:** $p \wedge q$ ("p y q"). Es verdadera solo si ambas son verdaderas.
 - **Disyunción:** $p \vee q$ ("p o q"). Es verdadera si al menos una es verdadera.
 - **Negación:** $\neg p$ ("no p"). Invierte el valor de verdad de p .
 - **Implicación:** $p \Rightarrow q$. Es falsa solo si p es verdadera y q es falsa.
 - **Doble Implicación:** $p \Leftrightarrow q$. Es verdadera solo si p y q tienen el mismo valor de verdad.
- **Operaciones y Leyes:**
 - **Unión:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
 - **Intersección:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
 - **Diferencia:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
 - **Diferencia Simétrica:** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
 - **Leyes de De Morgan:**
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. Relaciones

- **Producto Cartesiano ($A \times B$):** Conjunto de todos los pares ordenados (a,b) con $a \in A$ y $b \in B$.
- **Relación (R):** Un subconjunto de $A \times B$.
- **Tipos de Relaciones en un conjunto A ($R \subseteq A \times A$):**
 - **Reflexiva:** $\forall a \in A, (a,a) \in R$.
 - **Simétrica:** $\forall a,b \in A$, si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.
 - **Antisimétrica:** $\forall a,b \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$, entonces $a=b$.
 - **Transitiva:** $\forall a,b,c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.
- **Relación de Equivalencia:** Cumple las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.

- **Clase de Equivalencia:** Para una relación de equivalencia R en A , la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ es $[a]R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$.
- **Partición:** Una colección de subconjuntos no vacíos de A cuya unión es A y cuyas intersecciones son disjuntas. Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia forman una partición.
- **Relación de Orden:** Cumple las propiedades **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

3. Funciones

- **Definición:** Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función si a cada elemento del dominio (A) le corresponde **exactamente un** elemento del codominio (B).
 - **Notación:** $f: A \rightarrow B$.
- **Igualdad de Funciones:** $f = g \Leftrightarrow (f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow B \wedge \forall a \in A, f(a) = g(a))$.
- **Imagen de una Función:** El conjunto imagen de una función f es $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
- **Tipos de Funciones:**
 - **Inyectiva:** Si $f(a) = f(a')$, entonces $a = a'$. Cada elemento del codominio (B) es imagen de como máximo un elemento del dominio (A).
 - **Sobreyectiva:** Para todo $b \in B$, existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. El conjunto imagen ($\text{Im}(f)$) es igual al codominio (B).
 - **Biyectiva:** Es **inyectiva** y **sobreyectiva** a la vez.
- **Función Inversa (f^{-1}):** Existe si y solo si la función es **biyectiva**.
- **Composición de funciones ($f \circ g$):** Se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.