

**Rapport de MT12 : Techniques mathématiques de l'ingénieur**  
**UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE**

Printemps 2016

**Alexandre BALLET et Simon LAURENT**

Sujet du rapport :

**Transformée de Fourier discrète**

Département des étudiants :

**Génie Informatique**

Professeur :

**M. Djalil KATEB**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de la transformée de Fourier et ses applications</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Définition de la DFT</b>	<b>5</b>
2.1	Définition . . . . .	5
2.2	DFT d'une fonction . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Une famille de fonctions tests</b>	<b>10</b>
3.1	Procédure Scilab . . . . .	10
3.2	Signal d'origine . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Applications de la DFT</b>	<b>15</b>
4.1	Efficacité de la FFT et Approximation des coefficients de Fourier . . . . .	15
4.2	Résolution fréquentielle de signaux . . . . .	19
<b>5</b>	<b>DFT et convolution</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Phénomène de Gibbs</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Effet du fenêtrage</b>	<b>25</b>

# Chapitre 1

## Présentation de la transformée de Fourier et ses applications

# Chapitre 2

## Définition de la DFT

### 2.1 Définition

**Definition 1.** On appelle transformée de Fourier discrète de la suite  $(y_k)$ ,  $k = 0, \text{ldots}, N - 1$  la suite  $(z_k)$  définie par

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

où  $\omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}}$ . On notera  $z[k] = DFT[f]k$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ .

Nous cherchons à montrer que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq p' \\ N & \text{si } p = p' \end{cases} \quad (2.1)$$

D'une part, posons  $p = p'$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= N \end{aligned}$$

D'autre part, posons  $p \neq p'$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{p-p'})^k \\
&= \frac{1 - \omega^{(p-p')^N}}{1 - \omega^{p-p'}} \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi(p-p')}}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi k}}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \quad , \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\
&= \frac{1 - 1}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous cherchons ensuite à montrer que  $B = \sqrt{N}A$  est une matrice unitaire, c'est-à-dire :

$$\overline{B^T} B = I \quad , \text{ où } I \text{ est la matrice identité} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{N} \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
\overline{B^T} B &= \frac{\sqrt{N}}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\overline{\omega}) & (\overline{\omega})^2 & \dots & (\overline{\omega})^{N-1} \\ 1 & (\overline{\omega})^2 & (\overline{\omega})^4 & \dots & (\overline{\omega})^{2(N-1)} \\ 1 & (\overline{\omega})^3 & (\overline{\omega})^6 & \dots & (\overline{\omega})^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\overline{\omega})^{N-1} & (\overline{\omega})^{2(N-1)} & \dots & (\overline{\omega})^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{N}}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N} (1 + (\overline{\omega})^{p-1} (\omega)^{p'-1} + \dots + (\overline{\omega})^{(N-1)(p-1)} (\omega)^{(N-1)(p'-1)}) \\
&= \frac{1}{N} (1 + (\omega)^{p'-p} + \dots + (\omega)^{(N-1)(p'-p)}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p'-p)} \\
&= \frac{1}{N} N \quad , \text{ d'après (2.1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où  $B = \sqrt{N}A$  est une matrice unitaire.

Nous cherchons à présent  $A^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
\overline{B^T} B &= I \\
N \overline{A^T} A &= I \\
A^{-1} &= \overline{N A^T} \\
A^{-1} &= \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{array} \right)^T
\end{aligned}$$

$A^{-1}$  est la matrice associée à la transformation inverse de la DFT, que l'on peut retrouver :

$$z'_k = \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{-pk} \quad , \quad \text{où } \omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}} \quad (2.3)$$

## 2.2 DFT d'une fonction

Soit  $f$  définie sur une période  $T$  (périodique de période  $T$ ) et soit  $(y_k)$  une suite d'échantillons de  $f$  en  $N$  points uniformément répartis sur une période. La DFT de  $f$  d'ordre  $N$  est l'application qui associe à la suite  $(y_k)_{k=0,\dots,N-1}$  la suite constituée de la DFT appliquée au vecteur  $y = (y_k)_{k=0,\dots,N-1}$ . On note  $(DFT[f](k))_{0,\dots,N-1}$  la suite obtenue et  $iDFT$  sa réciproque.

Nous cherchons à montrer que l'on peut approcher le coefficient de Fourier  $c_n$  à partir de l'approximation de l'intégrale la définissant par une somme de Riemann.

D'après la définition de  $c_n$  on a :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Si nous discrétisons  $f(t)$  en divisant une période  $T$  en  $N$  segments, on obtient :



$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2i\pi \frac{n}{T} k \frac{T}{N}} \frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p e^{-2i\pi n \frac{p}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{np}
\end{aligned}$$

D'où

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

Nous pouvons en déduire que la DFT d'une suite  $(y_k)$  est équivalent au coefficient de Fourier  $c_k$  de cette série.

# Chapitre 3

## Une famille de fonctions tests

### 3.1 Procédure Scilab

```
1  _T = 1
   _alpha=1/3

function [y] = f(x)
6    x=[pmodulo(x + _T/2,_T) - _T/2]
    y = zeros(x)
    for i=1:length(x)
        if (x(i) < _T*_alpha/2 & x(i)>-_T*_alpha/2) then
11            y(i)=1
        else
            y(i) = 0
        end
    end
16 endfunction

N = 32

21 x=[-3*_T/2:_T/N:3*_T/2]
   scf(0)
   clf
   plot(x,f(x),'xr')
```

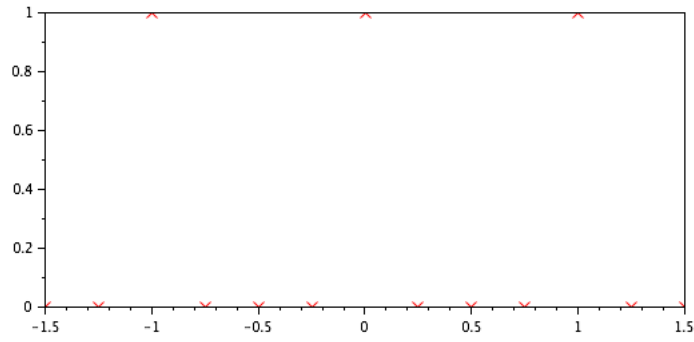


FIGURE 3.1 – Représentation pour  $N=4$

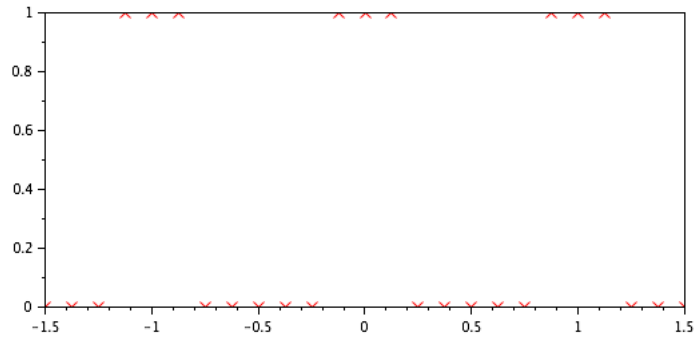


FIGURE 3.2 – Représentation pour  $N=8$

L'échantillonnage consiste à transmettre un signal en capturant des valeurs à périodes régulières. Ce dernier produit une suite de valeurs discrètes.

La première étape de ce processus est l'échantillonnage du signal :

L'échantillonnage d'un signal  $f(t)$  analogique représenté par une fonction  $f(t)$  consiste à construire, à partir de  $f(t)$ , un signal à temps discret obtenu en mesurant la valeur de  $f(t)$  toutes les  $t_k$  secondes tel que :  $y_k = f(t_k)$ , avec  $k = 0, \dots, N-1$  et  $N$  le nombre d'échantillons de  $f(t)$ . On pose  $t_k = \frac{ka}{N}$

La seconde étape est la détermination de la fréquence :

La cadence à laquelle les valeurs sont capturées est la fréquence d'échantillonnage (taux d'échantillonnage). L'objectif de l'échantillonnage est la transmission de l'information codée dans un signal. La question du choix de la fréquence d'échantillonnage se pose immédiatement : Si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, les acquisitions seront trop espacées et si le signal comporte des détails pertinents entre deux positions de capture, ceux-ci seront perdus ; Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, et plus la transmission coûte en puissance de traitement, en capacités de transmission et en espace de stockage. Il faut donc bien choisir sa fréquence  $F_e$  d'échantillonnage. Soit  $F_e$  la fréquence d'échantillonnage il faut donc que le signal

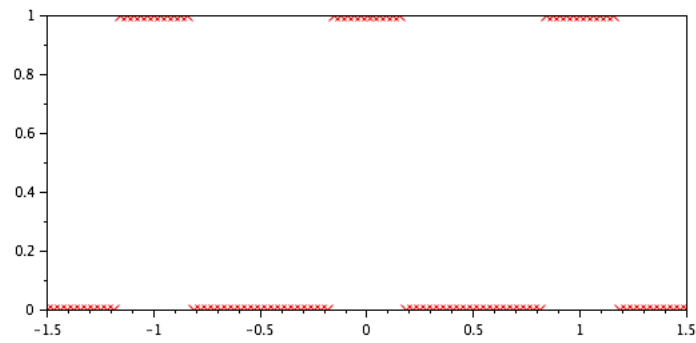


FIGURE 3.3 – Représentation pour  $N=32$

soit échantillonné uniformément avec un intervalle de temps égal à  $\frac{a}{N}$ .

## 3.2 Signal d'origine

Suite à la modélisation de la fonction ci dessus. on peut utiliser la FFT et son inverse IFFT afin de trouver le signal d'origine. On reprend donc la fonction initiale :

```

1 // Paramètres
  _T = 1
  _alpha=1/3
  N = 256
  x=[-3*_T/2:_T/N:3*_T/2]
6
  // Fonction initiale
  function [y] = f(x)
    x=[pmodulo(x + _T/2,_T) - _T/2]
    y = zeros(x)
11    for i=1:length(x)
        if (x(i) < _T*_alpha/2 & x(i)>_T*_alpha/2) then
            y(i)=1

            else
16                y(i) = 0
            end
        end
    endfunction
21 // Représentation graphique
  scf(0)

```

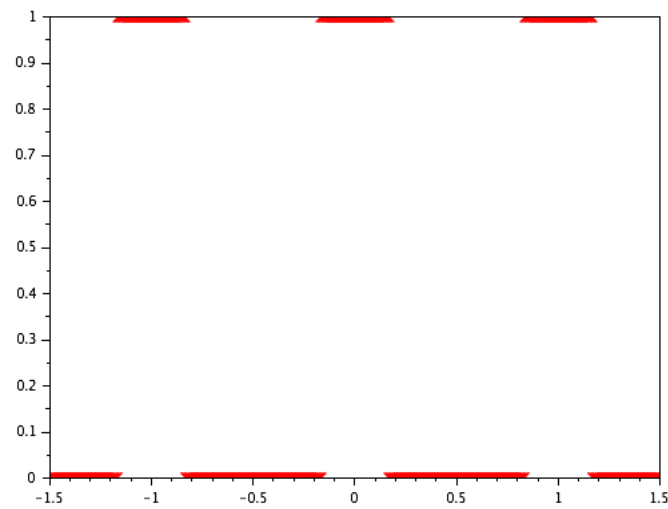


FIGURE 3.4 – *Représentation pour  $N=256$*

```
clf
plot(x,f(x),'xr')
```

On applique ensuite la transformée de Fourier sur la fonction

```
1 //FFT et représentation
F=fft(f(x))
scf(0)
clf
plot(x,F)
```

On obtient alors le spectre du signal :

Puis la transformée de la fonction inverse

```
//Signal d'origine
F2=ifft(F)
scf(0)
clf
5 plot(x,F2)
```

On a le résultat suivant :

On remarque que l'on obtient à nouveau la fonction créneau de départ.

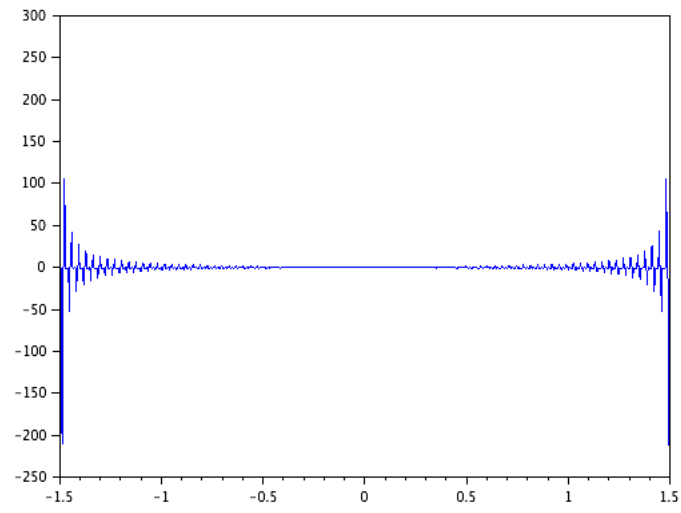


FIGURE 3.5 –  $FFT$  pour  $N=256$

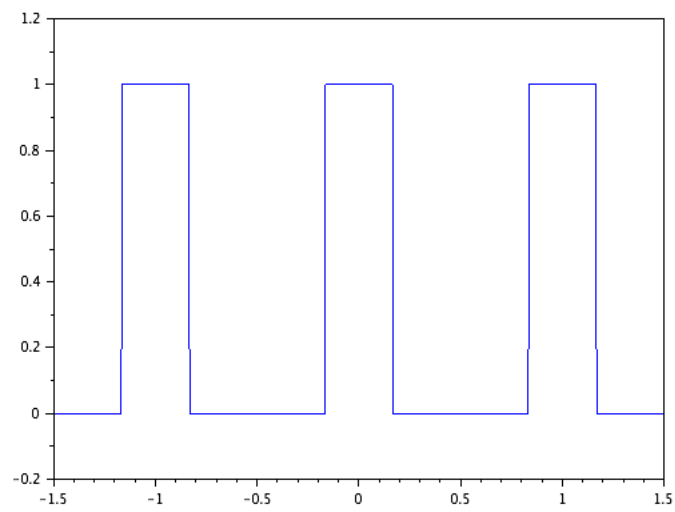


FIGURE 3.6 –  $iFFT$  pour  $N=256$

# Chapitre 4

## Applications de la DFT

### 4.1 Efficacité de la FFT et Approximation des coefficients de Fourier

Dans cette partie nous allons calculer la transformé de Fourier discrète à partir de la fonction discretisée :

```
//Définition de la DFT
a=-1/2
b=1/2
function S=F(f,p,N)
5   // Initialisation à 0
    S=0
    //Pour N échantillons on calcul les valeurs de la dft
    for k=1:N
        S=S+f(a+(k-1)*(b-a)/N)*exp(-2*i*pi*p*(k-1)*(b-a)/N)
10 end
    //On divise la DFT par N
    S=(1/N)*S
endfunction
```

On compare ensuite le résultat avec la FFT

```
//Division par N afin de comparer les résultats
2 fastFourier = fft(x)/N
```

Enfin on analyse le temps d'exécution des deux fonctions grâce au tic() toc() (timer) de Scilab. On obtient :

```
//Calcul de la DFT
```

```

tic()
3 for p=1:N
    y(p)=F(f,p,N)
end
temps=toc()

8 //Comparer fft et DFT
tic()
fastFourier=fft(x)/N;
temps2=toc()

```

```

temps =
    23.531
temps2 =
    0.001

```

Ainsi pour  $N=256$ , on montre que la FFT est  $10^4$  fois plus rapide que la DFT. Ceci est du à la complexité des algorithmes. Pour la DFT on est en  $O(n^2)$  alors que pour la FFT on est en  $O(n * \log(n))$ . Il nous reste maintenant à comparer les résultats de coefficients.

```

//Calcul des coefficients Cp
sol1(1)=1/3
sol2(N)=sol1(1)
4 for p=2:N
    sol1(p)=sin(p*1/3*pi)/(p*pi)
    sol2((N+1)-p)=sol1(p)
end
Res=[sol2' sol1']

```

Cependant les coefficients réels de la série de Fourier ont des valeurs sur  $\mathbb{Z}$ . Et dans notre cas, nous n'avons que des valeurs pour  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi on corrige en utilisant la propriété que :

$$\begin{cases} Y_n, 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ Y_{n+N}, \frac{-N}{2} \leq n < 0 \end{cases}$$

On calcule donc  $C_n$  sur  $\mathbb{Z}$  en séparant les négatifs dans un vecteur et les positifs dans un autre. On obtient alors le résultat suivant :

Les figures ci dessus montrent beaucoup de similarité. En effet pour  $N$  grand, on a des résultats correctes. Cependant lorsque  $N$  est inférieur à 128, les résultats sont médiocres. Comme le montre les graphiques ci dessous :



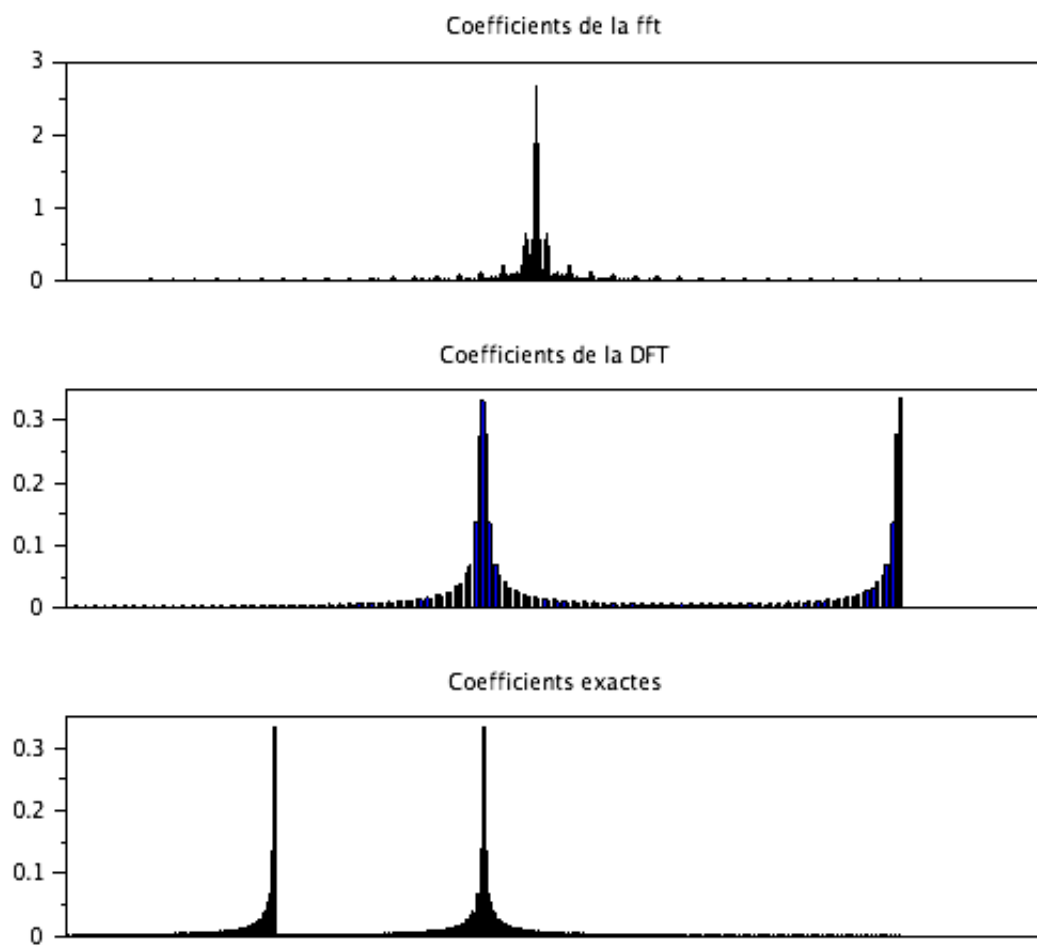


FIGURE 4.1 – *Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour  $N = 256$*

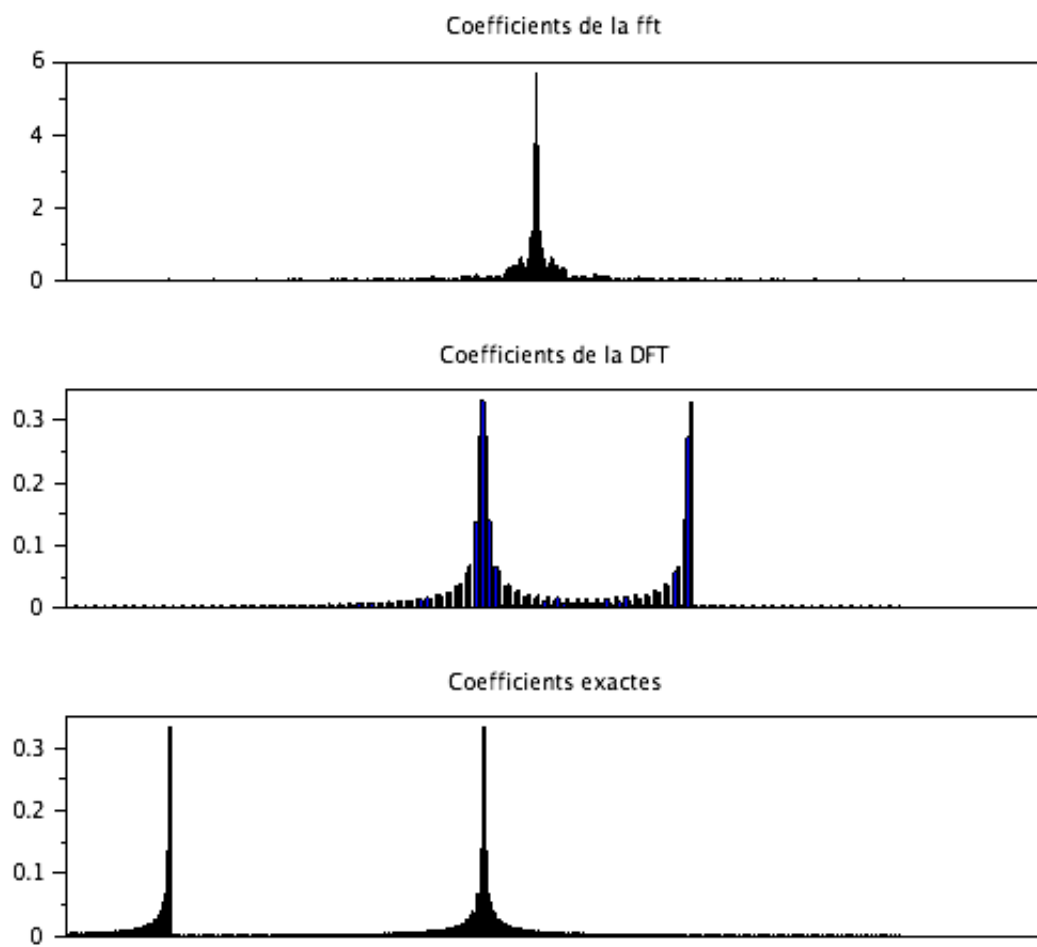


FIGURE 4.2 – *Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour  $N = 64$*

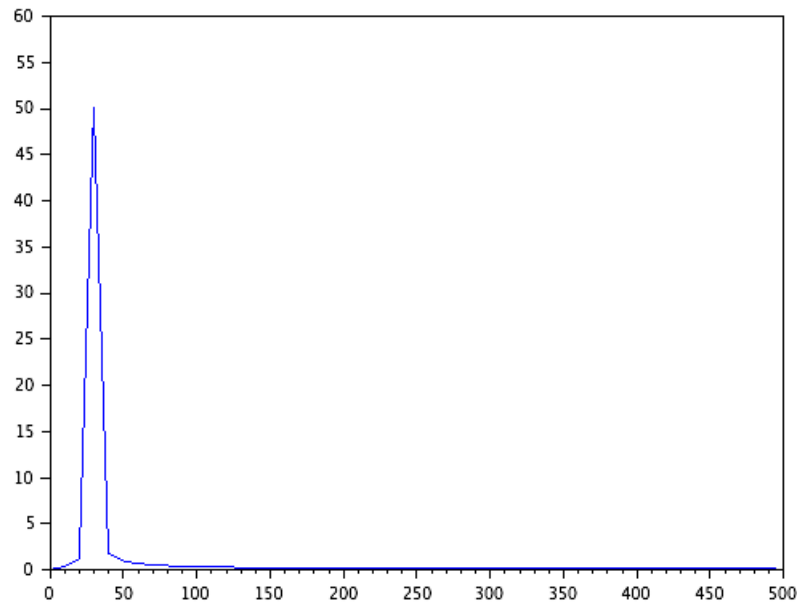


FIGURE 4.3 – *Signal échantillonné à 750Hz*

## 4.2 Résolution fréquentielle de signaux

Nous étudions un signal  $s$  reçu sur un intervalle de temps  $[0; 0, 1]$  et échantillonné de manière discrète avec une fréquence  $F_e = 1000Hz$ . Nous avons alors un pas d'échantillonnage  $T_e = \frac{1}{F_e}$  et un nombre d'échantillons  $N = F_e T_e$ . On commence avec un signal  $s(t) = \sin(2\pi 30t)$ .

```

1  clf
2  sample_rate=1000;
   t = 0:1/sample_rate:0.1;
   //Nombre d'échantillons
   N=size(t, '*');
   s=sin(2*%pi*30*t);
7  y=fft(s);
   //y est symétrique, on prend fonc N/2 points
   //Fréquences associé
   f=sample_rate*(0:(N/2))/N;
   n=size(f, '*')
12 clf()
   plot(f, abs(y(1:n)))

```

On commence par l'échantillonner en temps. Puis on trace sa FFT. Ce qui donne :

On obtient le pic attendu de fréquence  $30Hz$ . Si l'on modifie 30 par  $k, k \in \mathbb{N}$  on retrouvera

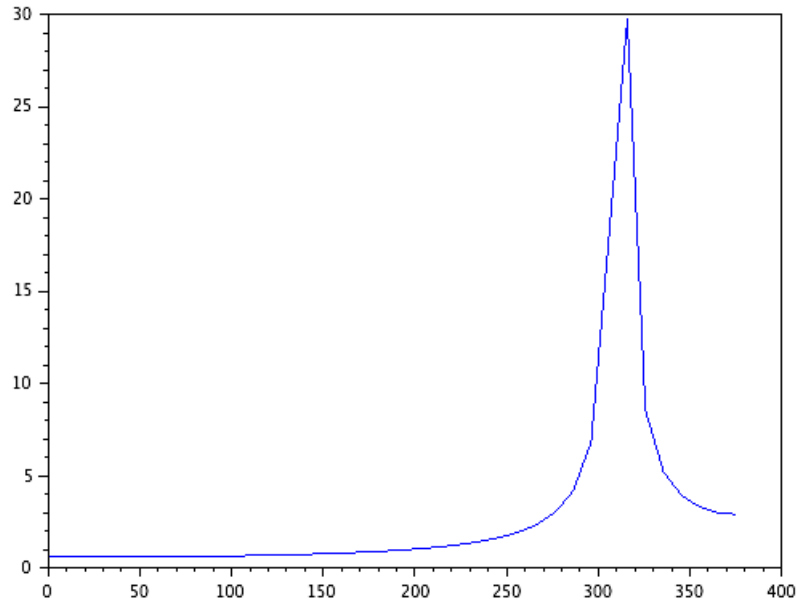


FIGURE 4.4 – *Signal échantillonné à 750Hz*

un pic de fréquence  $k$ . Maintenant, nous allons faire varier la fréquence d'échantillonnage. Pour cela, on s'intéresse à une fonction  $f(t) = \sin(2\pi 312t)$ . On démarre l'échantillonnage avec une fréquence  $F_e = 750Hz$ . On obtient la figure suivante :

Comme prévu. On obtient un pic à 312Hz. De plus, pour des fréquences de 650Hz et plus, on obtient les mêmes figures. Cependant, à partir de 600Hz et moins, le pic de fréquence de fréquence est décalé :

Ici, le pic de fréquence est décalé à 190Hz alors que le signal initial possède un pic à 312Hz. Ainsi tant que la fréquence est deux fois supérieure à 312Hz (624Hz), le signal est correctement reconstitué. En revanche, dès que la fréquence est inférieure, le signal est décalé. Cela illustre le théorème de Shannon.

**Théorème d'échantillonnage de Shannon :** La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence la plus élevée d'un signal à spectre limité.

$$F_e > 2f_{max}$$

Dans le cas contraire, il y a perte d'informations et déformation du signal reconstitué. C'est pourquoi, tant que la Fréquence d'échantillonnage  $F_e$  est supérieure à  $2 * 312Hz$  (soit deux fois la fréquence), la fréquence est bien construite.

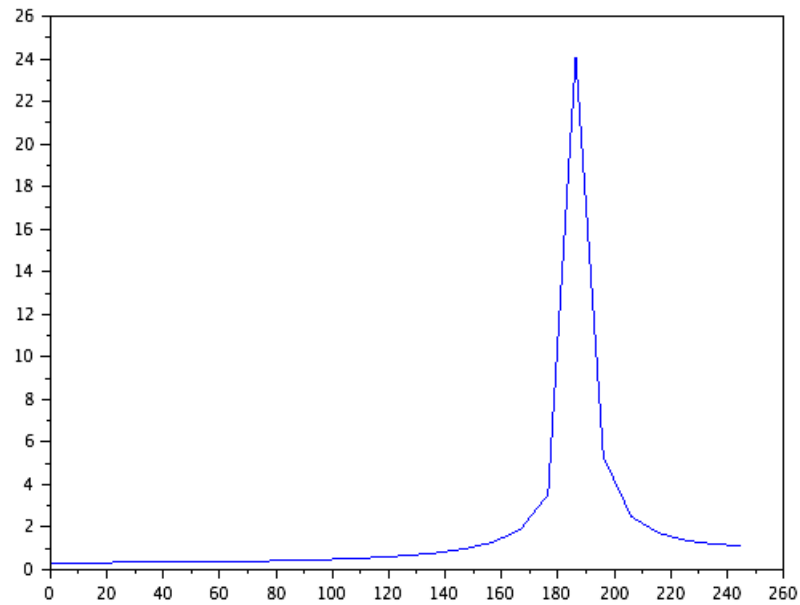


FIGURE 4.5 – *Signal échantillonné à 500Hz*

Théorème de Poisson : Soit  $f$  une fonction régulière à décroissance rapide vers l'infini,  $\forall n$  :

$$\| f(x) \| \leq \frac{c}{(a + x^2)^n}, \| x \| \rightarrow \infty$$

On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \exp(2i\pi n \frac{x}{a})$$

Démonstration du théorème de Shannon :

Démonstration du théorème de Poisson :

# Chapitre 5

## DFT et convolution

La convolution est une méthode pour combiner deux signaux afin d'en produire un troisième. La convolution permet de calculer la sortie d'un système étant donnés l'entrée et la réponse impulsionnelle. Un signal discret peut être représenté comme une somme d'impulsions. On peut donc ainsi donner la définition de la convolution discrètes : Soit l'opération de convolution discrète de  $f(t)$  par  $h(t)$  par le filtre à réponse impulsionnelle  $h(t)$  on a :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante grâce à la commutativité :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x)$$

**Definition 2.** Le produit de convolution  $x * y$  de deux suites  $x = (x_n)$  et  $y = (y_n)$  périodiques de période  $N$  est la suite  $N$ -périodique  $x * y$  définie par

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

*Elle est appelée convolution circulaire.*

Nous nous intéressons à présent à la relation entre  $DFT$  et convolution. Nous pouvons montrer que :

$$DFT(x * y) = DFT(x).DFT(y)$$

En effet :

Soit  $h$  la convolution circulaire de  $x$  et  $y$  :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

D'où,

$$\begin{aligned} DFT(h)(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-2i\pi t \frac{n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) \right) e^{-2i\pi t \frac{n}{N}} \end{aligned}$$

Or,

$$|x(n-k)y(k)e^{-2i\pi t \frac{n}{N}}| = |x(n-k)y(k)|$$

d'où

$$DFT(h)(t) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k)e^{-2i\pi t \frac{n}{N}} \right)$$

On pose  $\theta = n - k$

$$\begin{aligned} DFT(h)(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \left( \sum_{\theta=0}^{N-1} x(\theta)e^{-2i\pi t \frac{\theta+k}{N}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-2i\pi t \frac{k}{N}} \left( \sum_{\theta=0}^{N-1} x(\theta)e^{-2i\pi t \frac{\theta}{N}} \right) \\ &= DFT(y).DFT(x) \end{aligned}$$

Démonstration de la relation propre à la convolution discrète  $DFT(fg) = N.DFT(f).DFT(g)$

Preuve :

## Chapitre 6

### Phénomène de Gibbs



## Chapitre 7

### Effet du fenêtrage

# Table des figures

3.1	<i>Représentation pour <math>N=4</math></i>	11
3.2	<i>Représentation pour <math>N=8</math></i>	11
3.3	<i>Représentation pour <math>N=32</math></i>	12
3.4	<i>Représentation pour <math>N=256</math></i>	13
3.5	<i>FFT pour <math>N=256</math></i>	14
3.6	<i>iFFT pour <math>N=256</math></i>	14
4.1	<i>Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour <math>N = 256</math></i>	17
4.2	<i>Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour <math>N = 64</math></i>	18
4.3	<i>Signal échantillonné à 750Hz</i>	19
4.4	<i>Signal échantillonné à 750Hz</i>	20
4.5	<i>Signal échantillonné à 500Hz</i>	21