Rapport de MT12 : Techniques mathématiques de l'ingénieur

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Printemps 2016

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Sujet du rapport :

Transformée de Fourier discrète

Département des étudiants :

Génie Informatique

Professeur :

M. Djalil KATEB

Table des matières

Chapitre 1

Définition de la DFT

1.1 Définition

Definition 1. *On appelle transformée de Fourier discrète de la suite* $(y_k),\ k = 0,\ ldots, N-1$ *la suite* (z_k) *définie par*

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

où $\omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}}$*. On notera* $z[k] = DFT[f]k],\ k = 0, ..., N-1$*.*

Nous cherchons à montrer que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq p' \\ N & \text{si} \quad p = p' \end{cases} \tag{1.1}$$

D'une part, posons $p = p'$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= N \end{aligned}$$

D'autre part, posons $p \neq p'$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega^{p-p'}\right)^k \\
&= \frac{1-\omega^{(p-p')^k}}{1-\omega^{p-p'}} \\
&= \frac{1-e^{-2i\pi(p-p')}}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= \frac{1-e^{-2i\pi k}}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \qquad , \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\
&= \frac{1-1}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nous cherchons ensuite à montrer que $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire, c'est-à-dire :

$$
\overline{B^T}B = I \qquad , \text{ où I est la matrice identité} \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{N}\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
\overline{B^T}B &= \frac{\sqrt{N}}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\overline{\omega}) & (\overline{\omega})^2 & \dots & (\overline{\omega})^{N-1} \\ 1 & (\overline{\omega})^2 & (\overline{\omega})^4 & \dots & (\overline{\omega})^{2(N-1)} \\ 1 & (\overline{\omega})^3 & (\overline{\omega})^6 & \dots & (\overline{\omega})^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\overline{\omega})^{N-1} & (\overline{\omega})^{2(N-1)} & \dots & (\overline{\omega})^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{N}}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N}(1 + (\overline{\omega})^{p-1}(\omega)^{p'-1} + ... + (\overline{\omega})^{(N-1)(p-1)}(\omega)^{(N-1)(p'-1)}) \\
&= \frac{1}{N}(1 + (\omega)^{p'-p} + ... + (\omega)^{(N-1)(p'-p)}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{k(p'-p)} \\
&= \frac{1}{N}N \qquad \text{, d'après (1.1)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

D'où $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire.

Nous cherchons à présent A^{-1} :

$$\begin{aligned}
\overline{B^T}B &= I \\
N\overline{A^T}A &= I \\
A^{-1} &= N\overline{A^T} \\
A^{-1} &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}^T}
\end{aligned}$$

A^{-1} est la matrice associèe à la transformation inverse de la DFT, que l'on peut retrouver :

$$z'_k = \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{-pk} \qquad , \text{ où } \omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}} \tag{1.3}$$

1.2 DFT d'une fonction

Soit f définie sur une période T (périodique de période T) et soit (y_k) une suite d'échantillons de f en N points uniformément répartis sur une période. La DFT de f d'ordre N est l'application qui associe à la suite $(y_k)_{k=0,\dots,N-1}$ la suite constituée de la DFT appliquée au vecteur $y = (y_k)_{k=0,\dots,N-1}$. On note $(DFT[f](k))_{0,\dots,N-1}$ la suite obtenue et $iDFT$ sa réciproque.

Nous cherchons à montrer que l'on peut approcher le coefficient de Fourier c_n à partir de l'approximation de l'intégrale la déffinissant par une somme de Riemann.

D'après la définition de c_n on a :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi\frac{n}{T}t}dt$$

Si nous discrètisons $f(t)$ en divisant une période T en N segments, on obtient :

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi\frac{n}{T}t}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-2i\pi\frac{n}{T}k\frac{T}{N}}\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p e^{-2i\pi n\frac{p}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{np}
\end{aligned}
$$

D'où

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

Nous pouvons en déduire que la DFT d'une suite (y_k) est équivalent au coefficient de Fourier c_k de cette série.

Chapitre 2

Une famille de fonctions tests

Chapitre 3

Applications de la DFT

3.1 Approximation des coefficients de Fourier

3.2 Résolution fréquentielle de signaux

3.2.1 Mise en jambes

3.2.2 Exercice

Chapitre 4

DFT et convolution

Chapitre 5

Phénomène de Gibbs

Chapitre 6

Effet du fenêtrage

Table des figures