Transformée de Fourier, ses variantes et quelques applications
TP3

1 Motivation du TP

En pratique, on n'a jamais accès à une fonction f quelle soit dans $L^2(\mathbb{R})$ ou dans $L^2([-T/2, T/2])$ mais seulement à un nombre fini déchantillons $f[k] = f(k\delta),\ \ k = 0, 1, \ldots, N-1$ où δ est un pas déchantillonage. (qui est lié à une fréquence d'échantillonnage). Pour que les choses se passent correctement, il faut que la condition de Nyqvist-Shannon soit vérifiée : la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure (au sens large) à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Se pose alors la question de savoir comment passer de l'analogique au discret? D'une manière équivalente se pose la question de savoir comment définir la transformée de Fourier d'un tel signal? Une idée simple est de discrétiser l'intégrale donnant les coefficients de Fourier du signal qui est connu sur une durée finie : il faudra voir les $f[k],\ \ k = 0, \ldots, N-1$ comme les échantillons d'une fonction $N\delta$-périodique, et de définir des coefficients de Fourier à l'aide dune somme de Riemann. Comme pour la transformée de Fourier, il faudra aussi penser à définir une transformée de Fourier discrète inverse pour la reconstruction.

2 Transformée de Fourier discrète

Definition 2.1 *On appelle transformée de Fourier discrète de la suite* $(y_k),\ \ k = 0,\ ldots, N-1$ *la suite* (z_k) *définie par*

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

où $\omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}}$. *On notera* $z[k] = DFT[f]k],\ \ k = 0, \ldots, N-1$.

Cette transformation est linéaire; on va trouver la matrice A carrée d'ordre N associée. On peut montrer que si on note $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_{N-1})^T$ et $z = (z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_{N-1})^T$ on a alors $z = Ay$ où

$$A = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \ldots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Question 1: Cette partie s'inspire du TP de MT12 A1009 rédigée par Vincent Robin. L'auteur de cette fiche a modifié légèrement le contenu.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')N} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq p' \\ N & \text{si} \quad p = p' \end{cases}$

2. En déduire que $\sqrt{N}A$ est une matrice **unitaire**.

   (On parle dans le cas réel de matrice orthogonale lorsque les vecteurs colonnes de la matrice sont orthonormés. Dans le cas complexe, on parle de matrice unitaire. On prendra soin de prendre comme produit scalaire $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \bar{b}_i$ lorsque $a = (a_i)_{i=1,\dots,N}$ et $b = (a_i)_{i=1,\dots,N}$ sont à valeurs complexes).

3. En déduire A^{-1} et l'expression de l'inverse de la transformée inverse de la DFT. On se rappellera de la question 1) que $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire et donc que l'inverse de B est égale à sa transconjuguée : $B^{-1} = (\overline{B})^T$.

2.1 DFT d'une fonction

Soit f définie sur une période T (périodique de période T) et soit y_k une suite d'échantillons de f en N points uniformḿent répartis sur une période. La DFT de f d'ordre N est l'application qui associe ̀la suite $(y_k)_{k=0,\dots,N-1}$ la suite constituée de la DFT appliquée au vecteur $y = (y_k)_{k=0,\dots,N-1}$. On note $(DFT[f](k))_{0,\dots,N-1}$ la suite obtenue et $iDFT$ sa réciproque.

1. Montrer comment approcher le coefficient de Fourier c_n à partir de l'approximation de l'intégrale la définissant par une somme de Riemann.

2. Quelle relation peut-on établir entre coefficients de Fourier et lDFT?

2.2 Une famille de fonctions tests

Dans cette partie, nous définissons une "bibliothèque" de fonctions tests indexés : pour $\alpha > 0$ et $T > 0$ (ce sera la période), on considère la fonction $f_{\alpha,T}$ T périodique définie sur une période par

$$f_{\alpha,T}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left] -\frac{\alpha T}{2}, \frac{\alpha T}{2} \right[\\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \backslash \left] -\frac{\alpha T}{2}, \frac{\alpha T}{2} \right[\end{cases}$$

1. Ecrire une procédure SCILAB permettant de construire $f_{\alpha,T}$ sur un vecteur de coordonnées.

2. Quel pas d'échantillonnage doit on prendre pour récupérer des signaux discrets périodiques de période N.

3. On suppose $T = 1$ et $\alpha = \frac{1}{3}$. Tracer le graphe de $f_{\alpha,T}$ sur k périodes, avec $k = 1,2,3$ et ses versions échantillonnées avec $N = 4, 8, 32$.

2.3 Efficacité de la FFT pour l'approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction echantillonnée sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ par N échantillons uniformḿent espacés : le pas d'échantillonnage est $T_e = \frac{a}{N}$.

- Ecrire un programme Scilab permettant de calculer la transformée DFT de f (et donc $F_e = \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage). Appliquer à $f = f_{\alpha,T}$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $T = 1$.

- Comparer avec la commande FFT de scilab (attention : on devra diviser le vecteur FFT par N). On utilisera le commande **timer** de Scilab pour la comparaison de la vitesse d'exécution.

- Sur 3 graphiques séparés générés à l'aide de la commande subplot, tracer les histogrammes permettant de représenter les coefficients de Fourier, la DFT appliquée à la suite formée des échantillons ainsi que la FFT. On fera varier $N = 2^k,\ k = 2, \ldots, 16$.

2.4 Transformée de Fourier discrète et résolution fréquentielle de signaux

Un premier exercice d'application ou de deuxième "mise en jambes"
Le but de l'exercice est de montrer comment la TFD permet de retrouver le spectre d'un signal. On considère le signal

$$s(t) = \sin(2\pi 50t) + 3\sin(2\pi 120t).$$

1. Déterminer la période T du signal.

2. Quelles sont les fréquences présentes dans le signal?

3. Pour pouvoir calculer la TFD, on va prélever un échantillon de N points pris tous les temps T_e. Donner une relation entre N, T et T_e. Le but de la question est de saisir la difféerrence entre T et T_e.

4. Comment choisir T_e? (Penser à la condition de Shannon permettant de donner une fréquence F_e d''echantillonnage compatible et prendre ensuite $T_e = \dfrac{1}{T_e}$).

5. A l'aide de la TFD, visualiser les raies spectrales en affichant le spectre d'amplitude.

6. Comparer avec les résultats donnés par la fft de scilab

Un exercice de la même trempe"
Dans cette partie, vous devrez échantillonner le signal (ou la fonction) comme lors de l'acquisition en numérique à partir de l'analogique (analogique signifie que le signal est connu en continu et est fonction d'une variable t (exemple $t \in [0, 1]$. On l'échantillonne en temps avec un pas $T_e = \dfrac{1}{F_e}$, le nombre d'échantillons sur $[0, T]$ est donné par $N = F_eT$. On définit alors un vecteur de coordonnées temporel : la première composante de ce vecteur est la valeur du signal au temps $t = 0$ et les autres composantes s'obtiennent comme la valeur du signal en les points uniformḿent répartis séparés de $T_e = \dfrac{1}{F_e}$ (échantillonnage en temps). On a un vecteur de $\mathbb{R}^N$. Dans le domaine fréquentiel, on a aussi un vecteur de coordonnées en fréquence.
Soit s un signal de durée T (on supposera qu'on le connait sur $[0, T]$). On suppose qu'il est acquis en discret après l'avoir échantillonné en pas de fréquence d'échantillonnage F_e. Après avoir échantillonné un signal non périodique dans le domaine temporel on obtient un spectre périodique discret de période N. Vous testerez à titre d'exercice le problème suivant

1. Construire un "vecteur temps" d'une durée $T = 1/10$ secondes échantillonné à une fréquence $F_e =$ 1000 Hz .

2. Tracez (à l'aide de la commande bar en scilab ou stem en matlab) en temps les valeurs que prend le signal aux points d'échantillons. On prendra un signal sinusoidal $s(t) = \sin 2\pi\ 30t$ de fréquence 30 Hz .

3. Tracez la fft (ou la DFT) du "vecteur temps".

4. Même question pour $s_1(t) = \sin 2\pi 40$ de fréquence 40 Hz.

5. Tracez la DFT des vecteurs temps correspondant à s et à s_1.

6. Nous prenons un signal (sinusoidal) de fréquence 312 Hz à une fréquence F_e variant de 750 Hz à 500 Hz avec un pas de 50 hz. Montrez que la fréquence est bien construite (donc via la FFT normalisée) tant que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à $624 = 2 \times 312$ Hz.

7. Bien réxiger cette partie en recopiant la preuve des théorm̀es de Poisson et de Shannon. On l'illustrera avec le programme $essai_DFT.sce$ **Indications:** Pour générer un son de fréquence F pendant n secondes, on utilisera la commande $t = soundsec(n, F)$. Pour l'écouter, on tapera $playsnd(s)$ après avoir défini le signal s.

2.5 DFT et Convolution

1. Définir le produit de convolution $x * y$ de deux suites discrètes $x = (x_n)_{n=0,\dots}$ et $y = (y_n)_{n=0,\dots,N-1}$ périodiques de période N.

2. Montrer qu'il existe une relation entre $DFT(x * y)$ et le produit des DFT $DFT(x).DFT(y)$.

3. Illustrer sur l'exemple $f_{\alpha,T} * f_{\alpha,T}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $T = 1$. On prendra N grand et on représentera les échantillons de $f_{\alpha,T} * f_{\alpha,T}$.

2.6 Phénomène de Gibbs

Soit la fonction de Heaviside $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = -1$ sinon. On échantillonne f sur un intervalle $[-a, a],\ a > 0$ avec un pas h.

1. Calculer la FFT de f.

2. On ne voudrait conserver que les coefficients de la FFT dont la fréquence est dans l'intervalle $(-\lambda_0, \lambda_0),\ \lambda < \dfrac{\pi}{h}$. Par exemple prendre h tel que la fréquence d'échantillonage est autour 14000Hz avec une fréquence de coupure $\lambda \simeq 650$ Hz .

3. Qu'observe-t-on lorsqu'on reconstruit le signal avec la FFT inverse?

4. Faire varier λ_0 et commenter.

2.7 Facultatif :Analyse d'un signal audio

1. Charger un signal audio de votre choix (son d'un instrument par exemple) et l'échantillonner à une fréquence $F_e = 8000$ Hz . On notera T sa durée.

2. Représenter sur un même graphique le signal sur $1s$,$0.5s$ sur $0.1s$ et $0.01s$. Observez vous une périodicité?

3. Faire la FFT sur ces différents temps.

4. Afficher la tranche de fréquences situées dans $[50, 1000]$.

2.8 Effet du fenêtrage

Un signal est défini sur $\mathbb{R}$ en général. Le fait de ne l'observer que sur une plage de temps finie et de ne traiter qu'un nombre fini d'échantillons engendre des erreurs. Le but de l'exercice est de mettre en évidence ces erreurs.

La fonction cible est $f(t) = Ae^{-2i\pi\lambda t}$. Ce signal est monochromatique

(a) Calculer la DFT de f avec un échantillonnage $N = 2^p,\ 4 \leq p \leq 9$.

(b) Comparer avec la transformée exacte

2.9 Facultatif : Comment enlever du bruit d'un signal

Soit $s = (s_i)_{i=1,\ldots,n}$ un signal "propre" échantillonné auquel on ajoute un vecteur $r = (r_i)_{i=1,\ldots,n}$ de même taille. On a donc $x = s + r$ un signal bruité et on nous demande de trouver s (ou du moins une approximation) Bien sûr r est non corrélé avec s ce qui signifie que $s^T r = 0$. L'idée de Norbert Wiener est de construire un filtre optimal permettant de se débarrasser du bruit; pour cela il suggéra la construction d'une matrice diagonale D telle que

$$\| \mathcal{F}^{-1} D \mathcal{F} x - s \|_2$$

soit la plus petite possible. C'est un critère dit au sens des moindres carrés. L'idée est d'appliquer la transformée de Fourier au signal x, d'opérer en fréquence et d'appliquer une transformée de Fourier inverse. On note $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $C = \mathcal{F}c$ et $R = \mathcal{F}r$.

(a) Montrer que

$$\| \mathcal{F}^{-1} D \mathcal{F} x - s \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big((d_i - 1)^2 \mid C_i \mid^2 + d_i^2 \mid R_i \mid^2 \Big).$$

(b) En dérivant par rapport à d_i, montrer que la matrice diagonale D optimale est celle dont les éléments diagonaux vérifient

$$d_i = \frac{\mid C_i \mid^2}{\mid C_i \mid^2 + \mid R_i \mid^2},\ i = 1, \ldots, n.$$

(c) Dites pourquoi on peut approcher $\mid X_i \mid^2 \sim \mid C_i \mid^2 + \mid R_i \mid^2$, i=1,...,n?

(d) En déduire l'approximation

$$d_i \sim \frac{\mid X_i \mid^2 - \mid R_i \mid^2}{\mid X_i \mid^2}$$

(e) Nous devons avoir les informations à propos du bruit. Par exemple, le bruit est Gaussien : on suppose que $R_i = (p\sigma)^2$ où $p \simeq 1.3$ et σ est la déviation standard du bruit. On pourra ajouter cinquante pour cent de bruit au signal.

(f) Ecrire un programme scilab permettant de débruiter un son de votre choix que vous aurez échantillonné sur 40000échantillons. On comparera les sons du signal de départ, le signal bruité et le signal "nettoyé".

2.10 Facultatif: Compression d'images

- Charger lena.scv l'image 512×512 dans une matrice l.
- Afficher le module de la FFT de l'image. Vérifier la symétrie des modules, la décroissance des coefficients.
- Vérifier l'identité de Parseval.
- A l'aide de la commande fft2, calculer la FFT de l'image.
- Afficher $(log(abs(fftshift(l))))$.
- Mettre à zéro toute composante de module inférieure à un seuil que vous aurez choisi.
- Que remarque-t-on après l'application de la transformée inverse?