

Rapport de MT12 : Techniques mathématiques de l'ingénieur
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Printemps 2016

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Sujet du rapport :

Transformée de Fourier discrète

Département des étudiants :

Génie Informatique

Professeur :

M. Djalil KATEB

Table des matières

1	Définition de la DFT	4
1.1	Définition	4
1.2	DFT d'une fonction	7
2	Une famille de fonctions tests	9
2.1	Procédure Scilab	9
3	Applications de la DFT	11
3.1	Approximation des coefficients de Fourier	11
3.2	Résolution fréquentielle de signaux	13
3.2.1	Mise en jambes	13
3.2.2	Exercice	13
4	DFT et convolution	14
5	Phénomène de Gibbs	15
6	Effet du fenêtrage	16

Chapitre 1

Définition de la DFT

1.1 Définition

Definition 1. On appelle transformée de Fourier discrète de la suite (y_k) , $k = 0, \text{ldots}, N - 1$ la suite (z_k) définie par

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

où $\omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}}$. On notera $z[k] = DFT[f]k$, $k = 0, \dots, N - 1$.

Nous cherchons à montrer que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq p' \\ N & \text{si } p = p' \end{cases} \quad (1.1)$$

D'une part, posons $p = p'$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= N \end{aligned}$$

D'autre part, posons $p \neq p'$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{p-p'})^k \\
&= \frac{1 - \omega^{(p-p')^N}}{1 - \omega^{p-p'}} \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi(p-p')}}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi k}}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \quad , \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\
&= \frac{1 - 1}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous cherchons ensuite à montrer que $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire, c'est-à-dire :

$$\overline{B^T} B = I \quad , \text{ où } I \text{ est la matrice identité} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{N} \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
\overline{B^T} B &= \frac{\sqrt{N}}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\overline{\omega}) & (\overline{\omega})^2 & \dots & (\overline{\omega})^{N-1} \\ 1 & (\overline{\omega})^2 & (\overline{\omega})^4 & \dots & (\overline{\omega})^{2(N-1)} \\ 1 & (\overline{\omega})^3 & (\overline{\omega})^6 & \dots & (\overline{\omega})^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\overline{\omega})^{N-1} & (\overline{\omega})^{2(N-1)} & \dots & (\overline{\omega})^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{N}}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N} (1 + (\overline{\omega})^{p-1} (\omega)^{p'-1} + \dots + (\overline{\omega})^{(N-1)(p-1)} (\omega)^{(N-1)(p'-1)}) \\
&= \frac{1}{N} (1 + (\omega)^{p'-p} + \dots + (\omega)^{(N-1)(p'-p)}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p'-p)} \\
&= \frac{1}{N} N, \text{ d'après (1.1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire.

Nous cherchons à présent A^{-1} :

$$\begin{aligned}
\overline{B^T} B &= I \\
N \overline{A^T} A &= I \\
A^{-1} &= \overline{N A^T} \\
A^{-1} &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}^T
\end{aligned}$$

A^{-1} est la matrice associée à la transformation inverse de la DFT, que l'on peut retrouver :

$$z'_k = \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{-pk} \quad , \quad \text{où } \omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}} \quad (1.3)$$

1.2 DFT d'une fonction

Soit f définie sur une période T (périodique de période T) et soit (y_k) une suite d'échantillons de f en N points uniformément répartis sur une période. La DFT de f d'ordre N est l'application qui associe à la suite $(y_k)_{k=0,\dots,N-1}$ la suite constituée de la DFT appliquée au vecteur $y = (y_k)_{k=0,\dots,N-1}$. On note $(DFT[f](k))_{0,\dots,N-1}$ la suite obtenue et $iDFT$ sa réciproque.

Nous cherchons à montrer que l'on peut approcher le coefficient de Fourier c_n à partir de l'approximation de l'intégrale la définissant par une somme de Riemann.

D'après la définition de c_n on a :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Si nous discrétisons $f(t)$ en divisant une période T en N segments, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2i\pi \frac{n}{T} k \frac{T}{N}} \frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p e^{-2i\pi n \frac{p}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{np}
\end{aligned}$$

D'où

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

Nous pouvons en déduire que la DFT d'une suite (y_k) est équivalent au coefficient de Fourier c_k de cette série.

Chapitre 2

Une famille de fonctions tests

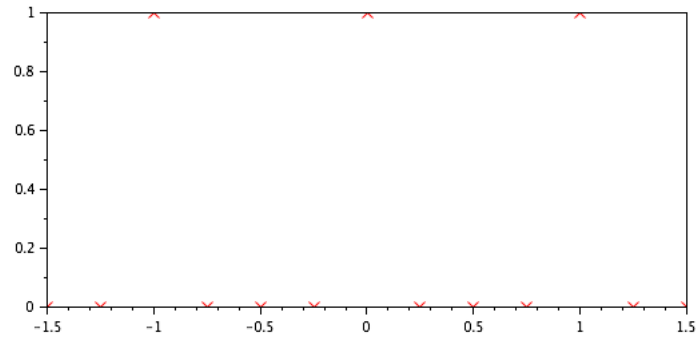
2.1 Procédure Scilab

```
1  _T = 1
   _alpha=1/3

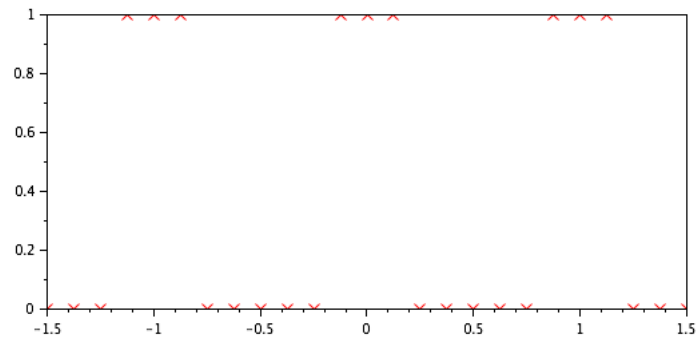
function [y] = f(x)
6     x=[pmodulo(x + _T/2,_T) - _T/2]
       y = zeros(x)
       for i=1:length(x)
           if (x(i) < _T*_alpha/2 & x(i)>-_T*_alpha/2) then
11               y(i)=1
           else
               y(i) = 0
           end
       end
16 endfunction

N = 32

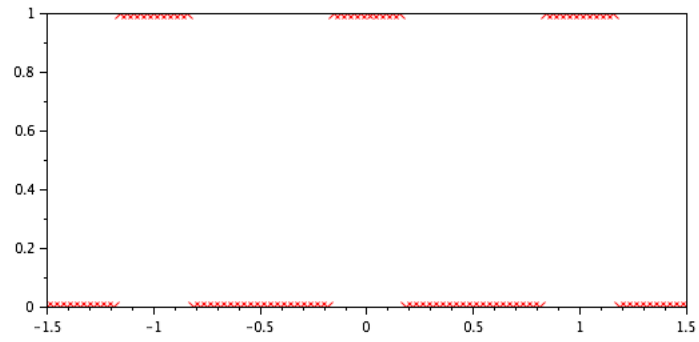
21 x=[-3*_T/2:_T/N:3*_T/2]
   scf(0)
   clf
   plot(x,f(x),'xr')
```



Représentation pour $N=4$



Représentation pour $N=8$



Représentation pour $N=32$

Chapitre 3

Applications de la DFT

3.1 Approximation des coefficients de Fourier

```
1 // *****
// Calcul de la DFT
// *****
f0=312;
N=1024;// numérisation
6 for Fe=2000:-50:500
    //instants de mesure
    t=(0:N-1)/Fe;
    //signal temporel
    x=sin(2*%pi*f0*t)+sin(2*%pi*t*500)
11 //calcul de la FFT du signal;
    X=fft(x);
    [mx,p]=max(abs(X(1:N/2)));
    //trace du spectre entre -Fe/2 et Fe/2
    f=(-fix(N/2):N-fix(N/2)-1)/N*Fe;
16 figure(0)
    //Desactivation des commandes graphiques
    drawlater;
    clf();
    title(['spectre sinusoide de freq'+string(f0)+'Hz numer a '+string(Fe)+'Hz
        '])
21 h=gce();
    plot(f,abs(fftshift(X)))
    drawnow
    //xpause(200000)
```

```
26 | xclick  
    | end
```

3.2 Résolution fréquentielle de signaux

3.2.1 Mise en jambes

3.2.2 Exercice

Chapitre 4

DFT et convolution

Chapitre 5

Phénomène de Gibbs

Chapitre 6

Effet du fenêtrage

Table des figures