Rapport de MT12 : Techniques mathématiques de l'ingénieur
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Printemps 2016

Alexandre BALLET et Simon LAURENT

Sujet du rapport :

Transformée de Fourier discrète

Département des étudiants :

Génie Informatique

Professeur :

M. Djalil KATEB

Table des matières

Chapitre 1

Présentation de la transformée de Fourier et ses applications

Chapitre 2

Définition de la DFT

2.1 Définition

Definition 1. *On appelle transformée de Fourier discrète de la suite* $(y_k),\ k = 0,\ ldots, N-1$ *la suite* (z_k) *définie par*

$$z_k = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

où $\omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}}$. *On notera* $z[k] = DFT[f]k],\ k = 0, ..., N-1$.

Nous cherchons à montrer que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq p' \\ N & \text{si} \quad p = p' \end{cases} \tag{2.1}$$

D'une part, posons $p = p'$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= N \end{aligned}$$

D'autre part, posons $p \neq p'$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(p-p')} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega^{p-p'}\right)^k \\
&= \frac{1-\omega^{(p-p')k}}{1-\omega^{p-p'}} \\
&= \frac{1-e^{-2i\pi(p-p')}}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= \frac{1-e^{-2i\pi k}}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \qquad , \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\
&= \frac{1-1}{1-e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-p')}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nous cherchons ensuite à montrer que $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire, c'est-à-dire :

$$
\overline{B^T}B = I \qquad , \text{ où I est la matrice identité} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{N}\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
\overline{B^T}B &= \frac{\sqrt{N}}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\overline{\omega}) & (\overline{\omega})^2 & \dots & (\overline{\omega})^{N-1} \\ 1 & (\overline{\omega})^2 & (\overline{\omega})^4 & \dots & (\overline{\omega})^{2(N-1)} \\ 1 & (\overline{\omega})^3 & (\overline{\omega})^6 & \dots & (\overline{\omega})^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\overline{\omega})^{N-1} & (\overline{\omega})^{2(N-1)} & \dots & (\overline{\omega})^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{N}}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N}(1 + (\overline{\omega})^{p-1}(\omega)^{p'-1} + ... + (\overline{\omega})^{(N-1)(p-1)}(\omega)^{(N-1)(p'-1)}) \\
&= \frac{1}{N}(1 + (\omega)^{p'-p} + ... + (\omega)^{(N-1)(p'-p)}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{k(p'-p)} \\
&= \frac{1}{N}N \qquad \text{, d'après (2.1)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

D'où $B = \sqrt{N}A$ est une matrice unitaire.

Nous cherchons à présent A^{-1} :

$$\begin{aligned}
\overline{B^T}B &= I \\
N\overline{A^T}A &= I \\
A^{-1} &= N\overline{A^T} \\
A^{-1} &= \overline{\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\
1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\
1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2}
\end{pmatrix}}^T
\end{aligned}$$

A^{-1} est la matrice associèe à la transformation inverse de la DFT, que l'on peut retrouver :

$$z'_k = \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{-pk} \qquad , \text{ où } \omega = e^{-2i\frac{\pi}{N}} \tag{2.3}$$

2.2 DFT d'une fonction

Soit f définie sur une période T (périodique de période T) et soit (y_k) une suite d'échantillons de f en N points uniformément répartis sur une période. La DFT de f d'ordre N est l'application qui associe à la suite $(y_k)_{k=0,\dots,N-1}$ la suite constituée de la DFT appliquée au vecteur $y = (y_k)_{k=0,\dots,N-1}$. On note $(DFT[f](k))_{0,\dots,N-1}$ la suite obtenue et $iDFT$ sa réciproque.

Nous cherchons à montrer que l'on peut approcher le coefficient de Fourier c_n à partir de l'approximation de l'intégrale la déffinissant par une somme de Riemann.

D'après la définition de c_n on a :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi\frac{n}{T}t}dt$$

Si nous discrètisons $f(t)$ en divisant une période T en N segments, on obtient :

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi\frac{n}{T}t}dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-2i\pi\frac{n}{T}k\frac{T}{N}}\frac{T}{N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p e^{-2i\pi n\frac{p}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{np}
\end{aligned}
$$

D'où

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega^{pk}$$

Nous pouvons en déduire que la DFT d'une suite (y_k) est équivalent au coefficient de Fourier c_k de cette série.

Chapitre 3

Une famille de fonctions tests

3.1 Procédure Scilab

```
_T = 1
_alpha=1/3


function [y] = f(x)
    x=[pmodulo(x + _T/2,_T) - _T/2]
    y = zeros(x)
    for i=1:length(x)
        if (x(i) <_T*_alpha/2 & x(i)>-_T*_alpha/2) then
            y(i)=1

         else
            y(i) = 0
        end
    end
endfunction

N = 32


x=[-3*_T/2:_T/N:3*_T/2]
scf(0)
clf
plot(x,f(x),'xr')
```

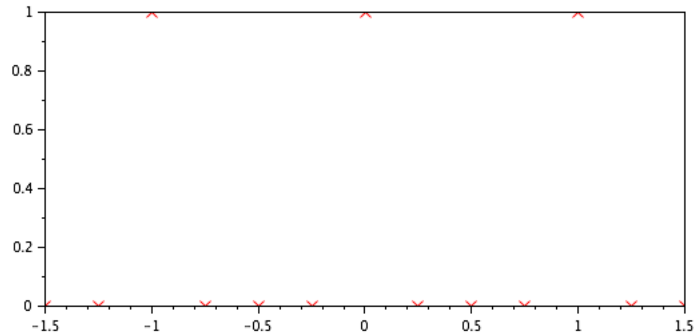

FIGURE 3.1 – *Représentation pour N=4*

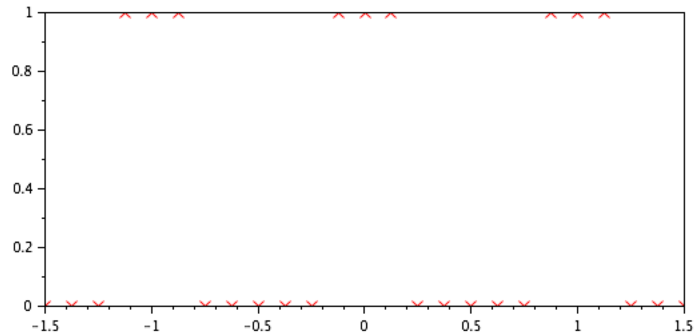

FIGURE 3.2 – *Représentation pour N=8*

L'échantillonnage consiste à transmettre un signal en capturant des valeurs à périodes régulières. Ce dernier produit une suite de valeurs discrètes.

La première étape de de ce processus est l'échantillonnage du signal :
L'échantillonnage d'un signal $f(t)$ analogique représenté par une fonction $f(t)$ consiste à construire, à partir de $f(t)$, un signal à temps discret obtenu en mesurant la valeur de $f(t)$ toutes les t_k secondes tel que : $y_k = f(t_k)$, avec $k = 0..., N-1$ et N le nombre d'échantillons de $f(t)$. On pose $t_k = \frac{ka}{N}$

La seconde étape est la determination de la fréquence :
La cadence à laquelle les valeurs sont capturées est la fréquence d' échantillonnage (taux d'échantillonnage). L' objectif de l'échantillonnage est la transmission de l'information codée dans un signal. La question du choix de la fréquence d'échantillonnage se pose immédiatement :
Si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, les acquisitions seront trop espacées et si le signal comporte des détails pertinents entre deux positions de capture, ceux-ci seront perdus ;
Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, et plus la transmission coûte en puissance de traitement, en capacités de transmission et en espace de stockage. Il faut donc bien choisir sa fréquence F_e d'échantillonnage. Soit F_e la fréquence d'échantillonnage il faut donc que le signal

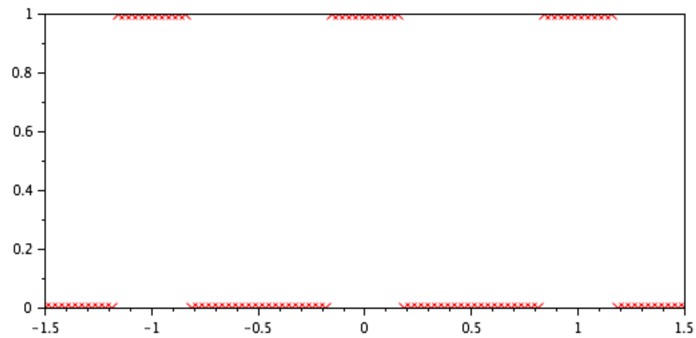

FIGURE 3.3 – *Représentation pour N=32*

soit échantillonné uniformément avec un intervalle de temps égal à $\frac{a}{N}$.

3.2 Signal d'origine

Suite à la modélisation de la fonction ci dessus. on peut utiliser la FFT et son inverse IFFT afin de trouver le signal d'origine. On reprend donc la fonction initiale :

```
//Paramètres
_T = 1
_alpha=1/3
N = 256
x=[-3*_T/2:_T/N:3*_T/2]

//Fonction initiale
function [y] = f(x)
    x=[pmodulo(x + _T/2,_T) - _T/2]
    y = zeros(x)
    for i=1:length(x)
        if (x(i) <_T*_alpha/2 & x(i)>-_T*_alpha/2) then
            y(i)=1

         else
            y(i) = 0
        end
    end
endfunction

//Représentation graphique
scf(0)
```

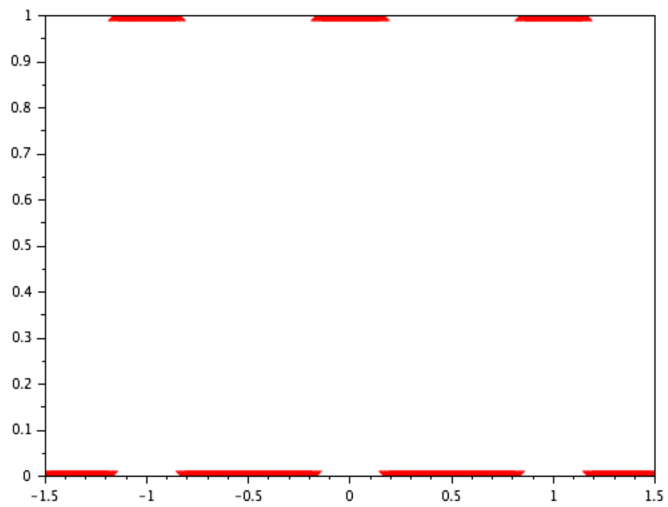

FIGURE 3.4 – *Représentation pour N=256*

```
clf
plot(x,f(x),'xr')
```

On applique ensuite la transformée de Fourier sur la fonction

```
//FFT et représentation
F=fft(f(x))
scf(0)
clf
plot(x,F)
```

On obtient alors le spectre du signal :

Puis la transformée de la fonction inverse

```
//Signal d'origine
F2=ifft(F)
scf(0)
clf
plot(x,F2)
```

On a le résultat suivant :

On remarque que l'on obtient à nouveau la fonction créneau de départ.

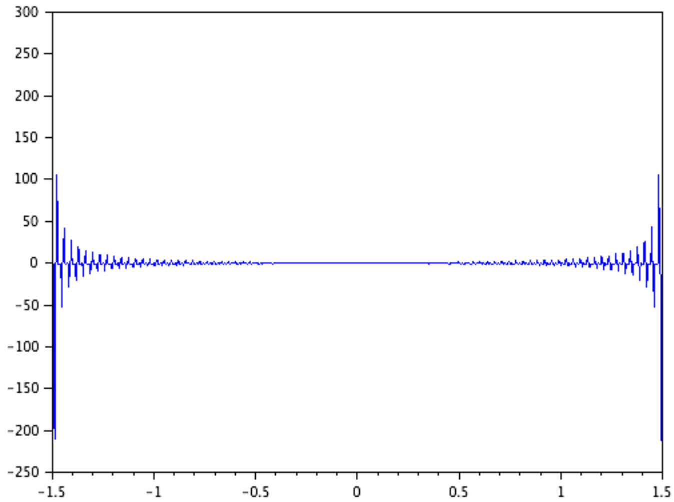

Figure 3.5 – *FFT pour N=256*

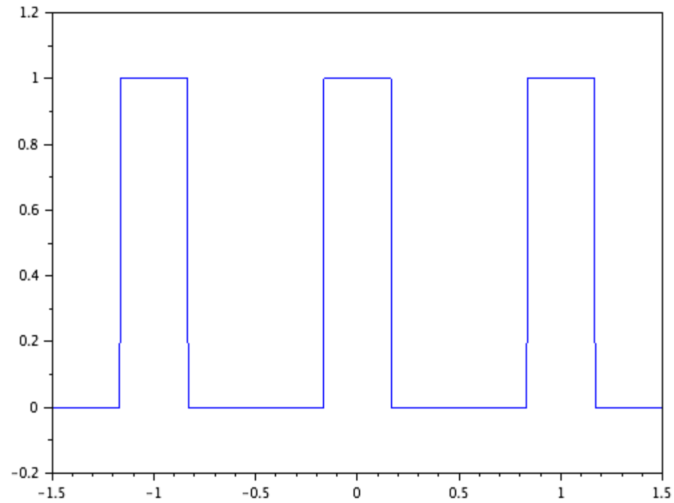

Figure 3.6 – *iFFT pour N=256*

Chapitre 4

Applications de la DFT

4.1 Efficacité de la FFT et Approximation des coefficients de Fourier

Dans cette partie nous allons calculer la transformé de Fourier discrète à partir de la fonction discretisée :

```
//Définition de la DFT
a=-1/2
b=1/2
function S=F(f,p,N)
    // Initialisation à 0
    S=0
        //Pour N échantillons on calcul les valeurs de la dft
        for k=1:N
            S=S+f(a+(k-1)*(b-a)/N)*exp(-2*%i*%pi*p*(k-1)*(b-a)/N)
end
        //On divise la DFT par N
        S=(1/N)*S
endfunction
```

On compare ensuite le résultat avec la FFT

```
//Division par N afin de comparer les résultats
fastFourier = fft(x)/N
```

Enfin on analyse le temps d'execution des deux fonctions grâce au tic() toc() (timer) de Scilab. On obtient :

```
//Calcul de la DFT
```

```
tic()
for p=1:N
   y(p)=F(f,p,N)
end
temps=toc()

//Comparer fft et DFT
tic()
fastFourier=fft(x)/N;
temps2=toc()
```

temps =

23.531

temps2 =

0.001

Ainsi pour N=256, on montre que la FFT est 10^4 fois plus rapide que la DFT. Ceci est du à la complexité des algorithmes. Pour la DFT on est en $O(n^2)$ alors que pour la FFT on est en $O(n * log(n))$. Il nous reste maintenant à comparer les résultats de coefficients.

```
//Calcul des coefficients Cp
sol1(1)=1/3
sol2(N)=sol1(1)
for p=2:N
    sol1(p)=sin(p*1/3*%pi)/(p*%pi)
    sol2((N+1)-p)=sol1(p)
    end
Res=[sol2' sol1']
```

Cependant les coefficients réels de la série de Fourier ont des valeurs sur $\mathbb{Z}$. Et dans notre cas, nous n'avons que des valeurs pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi on corrige en utilisant la propriété que :

$$\begin{cases} Y_n, 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ Y_{n+N}, \frac{-N}{2} \leq n < 0 \end{cases}$$

On calcule donc C_n sur $\mathbb{Z}$ en séparant les négatifs dans un vecteur et les positifs dans un autre. On obtient alors le résultat suivant :

Les figures ci dessus montrent beaucoup de similarité. En effet pour N grand, on a des résultats correctes. Cependant lorsque N est inférieur à 128, les résultats sont médiocres. Comme le montre les graphiques ci dessous :

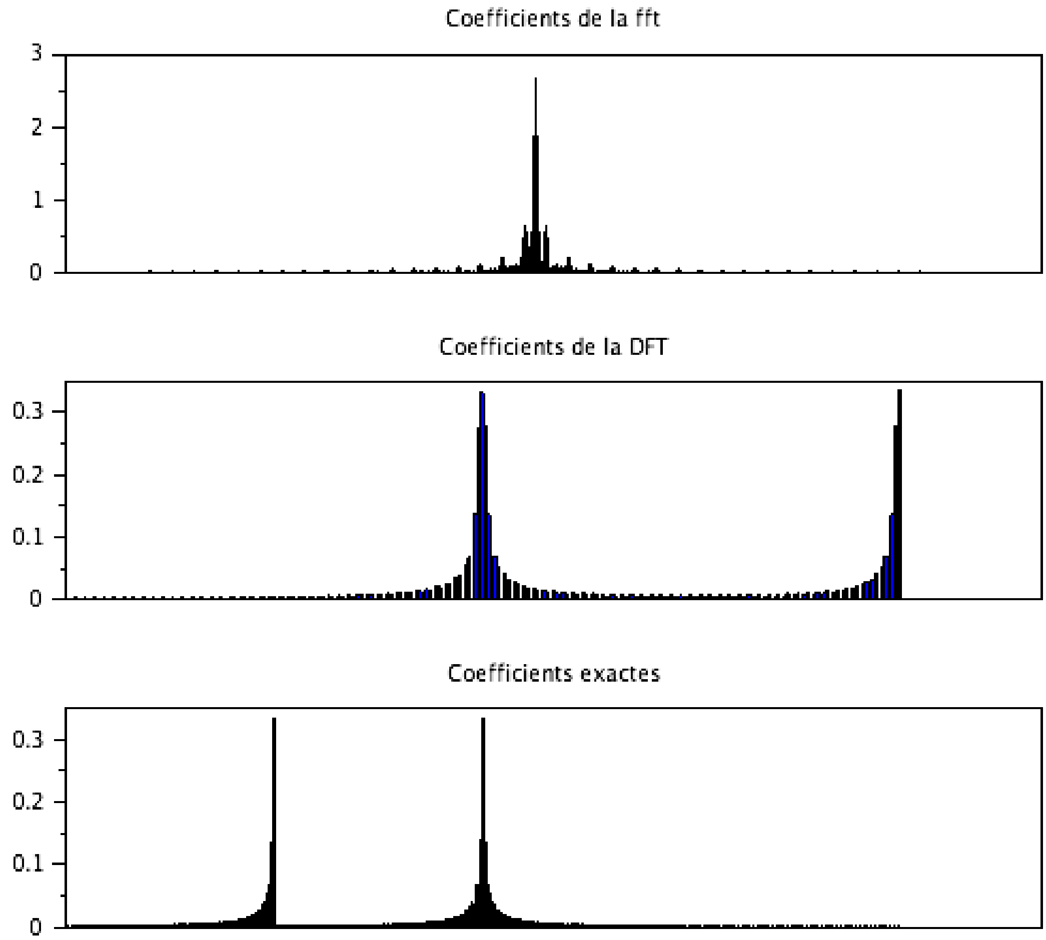

FIGURE 4.1 – *Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour N = 256*

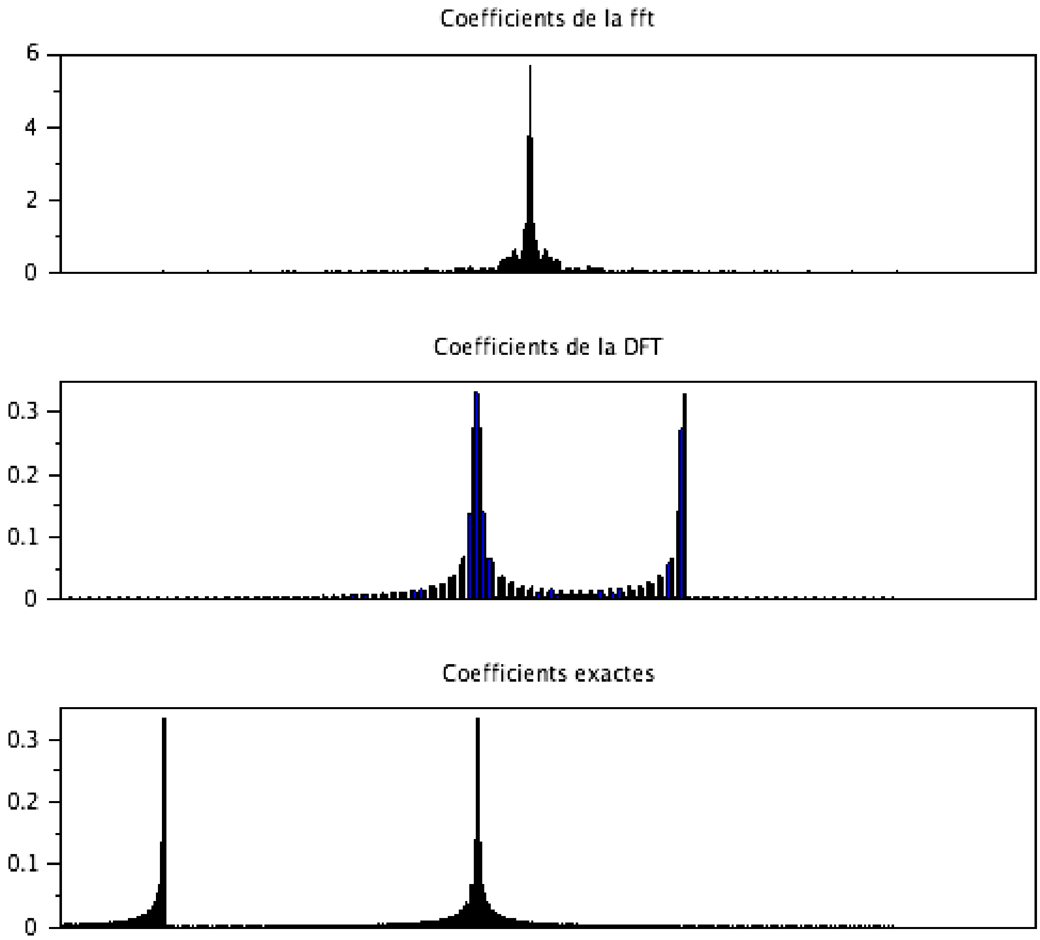

FIGURE 4.2 – *Coefficients via DFT, FFT et Exactes pour* $N = 64$

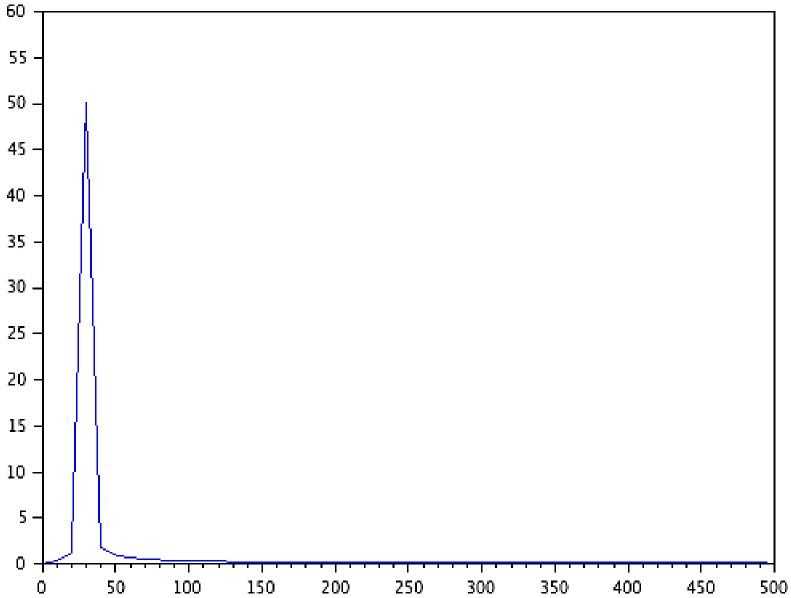

FIGURE 4.3 – *Signal échantilloné à 750Hz*

4.2 Résolution fréquentielle de signaux

Nous étudions un signal s reçu sur un intervalle de temps $[0; 0, 1]$ et échantillonné de manière discrète avec une fréquence $F_e = 1000Hz$. Nous avons alors un pas d'échantillonnage $T_e = \frac{1}{F_e}$ et un nombre d'échantillons $N = F_e T_e$ On commence avec un signal $s(t) = sin(2\pi 30t)$.

```
clf
sample_rate=1000;
t = 0:1/sample_rate:0.1;
//Nombre d'échantillons
N=size(t,'*');
s=sin(2*%pi*30*t);
y=fft(s);
//y est symétrique, on prend fonc N/2 points
//Fréquences associé
f=sample_rate*(0:(N/2))/N;
n=size(f,'*')
clf()
plot(f,abs(y(1:n)))
```

On commence par l'échantillonner en temps. Puis on trace sa FFT. Ce qui donne :

On obtient le pic attendu de fréquence $30Hz$. Si l'on modifie 30 par $k, k \in \mathbb{N}$ on retrouvera

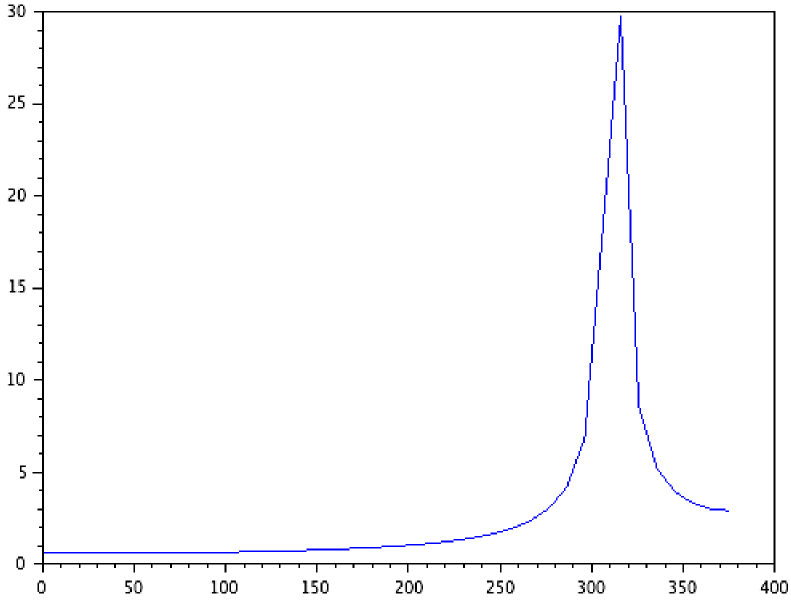

FIGURE 4.4 – *Signal échantilloné à 750Hz*

un pic de fréquence k. Maintenant, nous allons faire varier la fréquence d'échantillonnage. Pour cela, on s'intéresse à une fonction $f(t) = sin(2\pi 312t)$. On démarre l'échantillonnage avec une fréquence $F_e = 750Hz$. On obtient la figure suivante :

Comme prévu. On obtient un pic à 312Hz. De plus, pour des fréquences de 650Hz et plus, on obtient les mêmes figures. Cependant, à partir de 600Hz et moins, le pic de fréquence de fréquence est décalé :

Ici, le pic de fréquence est décalé à 190Hz alors que le signal initial possède un pic à 312Hz. Ainsi tant que la fréquence est deux fois supérieure à 312Hz (624Hz), le signal est correctement reconstitué. En revanche, dès que la fréquence est inférieure, le signal est décalé. Cela illustre le théorème de Shannon.

Théorème d'échantillonnage de Shannon : Soit f à spectre limité : $\widehat{f}(\xi) = 0$ dès que $|\xi| > v_c$
Alors $\forall T_e \leq \frac{1}{2v_c}$

$$f(x) = \sum f(nT_e) \frac{sin(\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e}}$$

Or

$$F_e = \frac{1}{T_e} \text{ donc } \frac{1}{F_e} \leq \frac{1}{2v_c}$$

Ainsi $F_e \geq 2v_c$
La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence la plus élevée d'un

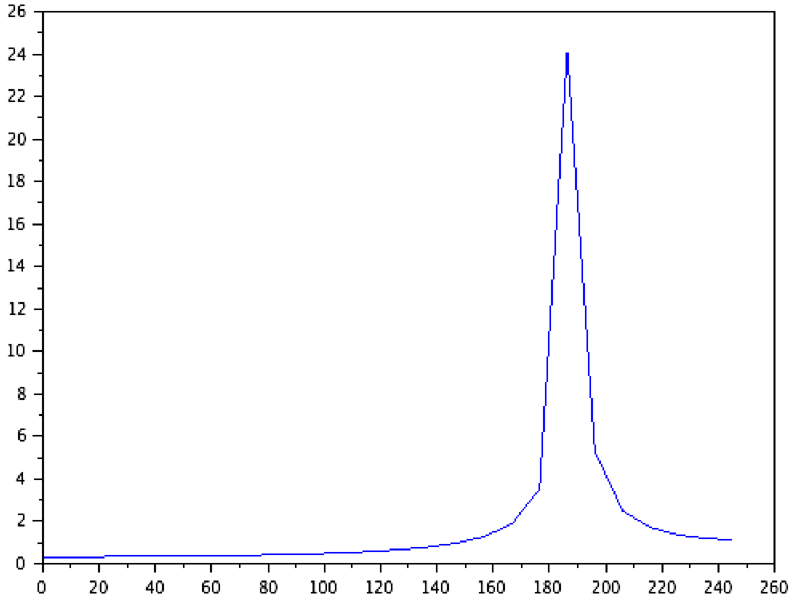

FIGURE 4.5 – *Signal échantilloné à 500Hz*

signal à spectre limité.

$$F_e > 2f_{max}$$

Dans le cas contraire, il y a perte d'informations et déformation du signal reconstitué. C'est pourquoi, tant que la fréquence d'échantillonnage F_e est supérieure à $2 * 312Hz$ (soit deux fois la fréquence), la fréquence est bien construite.

Théorème de Poisson : Soit f une fonction régulière à décroissance rapide vers l'infini, $\forall n$:

$$\parallel f(x) \parallel \leq \frac{c}{(a+x^2)^n}, \parallel x \parallel \to \infty$$

On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\frac{x}{a}) exp(2i\pi n \frac{x}{a})$$

Démonstration du théorème de Shannon :
Pour montrer le théorème, il suffit de comparer $\widehat{f}$ et $\widehat{\Phi}$ où

$$\Phi(x) = \sum f(nT_e) \frac{sin(\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e}}$$

On a

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \sum f(nT_e)\frac{sin(\widehat{\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e}})}{\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e}}(\xi)$$

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \sum f(nT_e)\int_{\mathbb{R}}\frac{sin(\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(x-nT_e)}{T_e}}e^{-2i\pi\xi n}$$

On pose :

$$X = \frac{\pi}{T_e}(x-nT_e)$$

donc $x = \frac{XT_e}{\pi} + nT_e$
Donc

$$\widehat{\Phi}(X) = \sum f(nT_e)\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi(nT_e+\frac{XT_e}{\pi})}\frac{sinX}{X}dX\frac{T_e}{\pi}$$

$$\widehat{\Phi}(X) = \frac{T_e}{\pi}\sum f(nT_e)e^{-2i\xi nT_e}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-2i\pi XT_e}{\pi}}\frac{sinX}{X}dX$$

On pose

$$s = \frac{X}{\pi} \text{ donc } ds = \frac{dX}{\pi}s$$

Ainsi

$$\widehat{\Phi}(X) = T_e\sum f(nT_e)e^{-2i\xi nT_e}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi sT_e}\frac{sin\pi s}{\pi s}ds$$

On sait que

$$\widehat{\chi_{[-\alpha,\alpha]}}(s) = \frac{sin\pi\alpha\xi}{\pi\xi}$$

Or

$$\widehat{\widehat{\chi_{[-\alpha,\alpha]}}}(s) = \frac{sin\widehat{(2\pi\alpha}\xi)}{\pi\xi}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\widehat{\widehat{\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}}(s) = \frac{\widehat{sin\pi\xi}}{\pi\xi}$$

Donc

$$\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \frac{\widehat{sin\pi\xi}}{\pi\xi}$$

Et

$$\widehat{\Phi}(\xi) = T_e[\sum f(xT_e)e^{-2i\pi\xi nT_e}]\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi T_e)$$

$$\widehat{\Phi}(\xi) = T_e[\sum f(xT_e)e^{-2i\pi\xi nT_e}]\chi_{[-\frac{1}{2T_e},\frac{1}{2T_e}]}(\xi T_e) \tag{4.1}$$

En utilisant la formule de Poisson et en rempláÁant f par $\widehat{f}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum \widehat{f}(x+na) &= \frac{1}{a}\sum \widehat{f}(\frac{n}{a})e^{\frac{2i\pi nx}{a}}\\ \sum \widehat{f}(x+na) &= \frac{1}{a}\sum f(\frac{-n}{a})e^{\frac{2i\pi nx}{a}}\\ \sum \widehat{f}(x+na) &= \frac{1}{a}\sum f(\frac{n}{a})e^{\frac{-2i\pi nx}{a}}\end{aligned}$$

Si $a = \frac{1}{T_e}$ alors on a :

$$T_e \sum f(nT_e)e^{-2i\pi nxT_e} = \sum \widehat{f}(x + \frac{n}{T_e})$$

Donc d'après (4.1) :

$$\widehat{\Phi}(\xi) = (\sum \widehat{f}(\xi + \frac{n}{T_e}))\chi_{[-\frac{1}{2T_e},\frac{1}{2T_e}]}(\xi T_e)$$

On a :

$$\frac{-1}{2T_e} \leq \xi \leq \frac{1}{2T_e}$$

Donc

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\ ,\ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

La condition $0 \leq T_e \leq \frac{1}{2v_c}$ s'appelle condition de Shannon-Nyquist.

Démonstration du théorème de Poisson :

Soit $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+na)$

La fonction est a-périodique, en effet

$g(x+a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+a+na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+(1+n)a) = \sum f(x+na) = g(x)$

De plus, g satisfait les conditions de Dirichlet donc :

$$g(x) = S_g(x) = \sum c_k e^{\frac{2i\pi kx}{a}}$$

Où

$$c_k = \frac{1}{a}\int_0^a g(x)e^{\frac{-2i\pi kx}{a}}dx$$

On injecte l'expression de $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+na)$ dans l'expression de c_k pour avoir :

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{a}\int_0^a (\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+na))e^{\frac{-2i\pi kx}{a}}dx\\ &= \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^a f(x+na)e^{\frac{-2i\pi kx}{a}}dx\end{aligned}$$

On pose $X = x + na$, $dX = dx$ et on a les bornes $\begin{cases} x & = & a \quad X = (1+n)a \\ x & = & 0 \quad X = na \end{cases}$

$$c_k = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{na}^{(n+1)a} f(X) e^{\frac{-2i\pi k(X-na)}{a}} dX$$

$$c_k = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{na}^{(n+1)a} f(X) e^{\frac{-2i\pi kX}{a}} dX$$

On sait que f est intégrable

$$\sum \int_{na}^{(n+1)a} f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \text{ d'après Chasles car } \mathbb{R} = U_{n \in \mathbb{Z}}(na, (n+1)a)$$

Donc

$$_k = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\frac{-2i\pi kx}{a}} dx = \frac{1}{a} \widehat{f}(\frac{k}{a})$$

Ainsi

$$g(x) = S_g(x) = \sum c_k e^{\frac{2i\pi kx}{a}} = \sum_k \frac{1}{a} \widehat{f}(\frac{k}{a}) e^{\frac{2i\pi kx}{a}}$$

On a bien

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + na) = \sum_k \frac{1}{a} \widehat{f}(\frac{k}{a}) e^{\frac{2i\pi kx}{a}}$$

Chapitre 5

DFT et convolution

La convolution est une méthode pour combiner deux signaux afin d'en produire un troisième. La convolution permet de calculer la sortie d'un système étant donnés l'entrée et la réponse impulsionnelle. Un signal discret peut être représenté comme une somme d'impulsions. On peut donc ainsi donner la définition de la convolution discrètes : Soit l'opération de convolution discrète de f(t) par h(t) par le filtre à réponse impulsionnelle h(t) on a :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante grâce à la commutativité :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x)$$

Definition 2. *Le produit de convolution $x * y$ de deux suites $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ périodiques de période N est la suite N-périodique $x * y$ définie par*

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

Elle est appelée convolution circulaire.

Nous nous interessons à présent à la relation entre DFT et convolution. Nous pouvons montrer que :

$$DFT(x * y) = N.DFT(x).DFT(y)$$

En effet :

Soit h la convolution circulaire de x et y :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k) \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

D'où,

$$\begin{aligned}
DFT(h)(t) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-tn} h(n) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-tn} (\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)y(k)) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-t(n-k)} x(n-k)\omega^{-tk} y(k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-tk} y(k)(\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-t(n-k)} x(n-k))
\end{aligned}$$

On pose $m = n - k$:

$$\begin{aligned}
DFT(h)(t) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-tk} y(k)(\sum_{m=-k}^{N-1-k} \omega^{-tm} x(m)) \\
&= N(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-tk} y(k))(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-tm} x(m)) \\
&= N.DFT(x).DFT(y)
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Phénomène de Gibbs

Chapitre 7

Effet du fenêtrage

Table des figures