

Théorie des groupes

Bcp de monde ...

September 2024

Table des matières

0.1	Section1	2
0.1.1	Sous-section1	2
0.1.2	Comment faire un lemme	2
1	Notion de groupe, morphisme, produit direct	3
1.1	Groupes, sous-groupes, exemples	3
1.1.1	Définitions	3
1.1.2	Sous-groupes	3
1.1.3	Sous-groupe engendré	3
1.2	morphismes de groupes	4
1.2.1	Isomorphismes	4
1.3	Produits directs	5
2	Classes modulo un sous-groupe, sous-groupes distingués	8
2.1	Classes à droite, classes à gauche	8
2.2	Sous-groupes distingués	9
2.2.1	Sous-groupes distingués et noyaux	10
3	Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de \mathcal{S}_n, de \mathbb{D}_n	11
3.1	J'ai pas le nom...	11
3.1.1	Autres exemples de sous groupes normaux	11
3.2	Groupes Monogènes, cycliques, symétriques, diédraux	12
3.2.1	Groupes Monogènes	12
3.2.2	Sous-groupes d'un groupe monogène	13
3.3	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	14
3.4	Produits directs de groupes cycliques, calcul de $\varphi(n)$	14
3.5	Structure des groupes abéliens finis (admis)	15
3.6	Groupes symétriques	15
3.6.1	Support et Orbite	16
3.6.2	Notion de cycle	16
3.6.3	Formules importantes	16
3.6.4	Générateurs	17
3.6.5	Centre	17
3.6.6	Signature	17
3.7	Groupes Diédraux	19
3.8	Classification des groupe d'ordre 8	21
3.8.1	Définition de Q_8	21
3.9	Action de groupes	22
3.9.1	Stabilisateur, orbite	23

Exemples en tout genres

0.1 Section1

Définition :

distance mdr a definition d'une distance

0.1.1 Sous-section1

Preuve :

exemple de preuve

□

0.1.2 Comment faire un lemme

Lemme :

avec la box noire sans nom

Lemme : nom

sasn la box mais avec le nom

Chapitre 1

Notion de groupe, morphisme, produit direct

1.1 Groupes, sous-groupes, exemples

1.1.1 Définitions

Définition :

Groupe Un groupe est un ensemble non vide G munis d'une loi $*$ telle que :

- (i) $*$ est associative
- (ii) $*$ possède un neutre $e \in G$
- (iii) Tout élément possède un inverse pour $*$

Définition : Groupe abélien

Un groupe G est dit abélien si : $\forall (x, y) \in G, xy = yx$

1.1.2 Sous-groupes

Définition : Sous-groupe

Un sous-ensemble H de G est appelé sous-groupe si :

- $e \in H$
- $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$

Définition : Groupe fini

G est dit fini si il est cardinal fini, on note alors $o(G) = |G|$, appelé ordre de G .

1.1.3 Sous-groupe engendré

Définition : Sous-groupe engendré par une partie

Soient G un groupe et $S \subset G$

Soit G_S l'ensemble des sous groupes de G qui contiennent S .

On appelle sous groupe engendré par S l'ensemble : $\langle S \rangle := \bigcap_{H \in G_S} H$

Si de plus $\langle S \rangle = G$ on dit que S est une partie génératrice de G ou que S engendre G

Définition : Groupe de type fini

Si G est engendré par un singleton, on dit que G est monogène.

Un groupe monogène fini est dit cyclique.

Si il existe une partie finie $S \subseteq G$ qui engendre G , on dit que G est de type fini.

Définition : Ordre d'un élément

- Si $\langle x \rangle$ est infini, on dit que x est d'ordre infini.
- Si $\langle x \rangle$ est fini, on dit que x est d'ordre $|\langle x \rangle|$

Si $x^n = e$ alors $o(x) | n$

1.2 morphismes de groupes

Définition : Morphisme de groupe

Soit $(G, *)$, (H, \cdot) deux groupes. Un morphisme de groupes de G dans H est une application $f: G \longrightarrow H$ tel que $\forall x, y \in G, f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$

Exercice :

1. $f(e_G) = e_H$
2. $f^{-1}(x) = f(x^{-1})$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(x) = f(x^n)$
4. Si $K < G$, alors $f(K) < H$
5. Si $K < H$, alors $f^{-1}(K) < G$

Exemple :

1. $\epsilon: \mathcal{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$
2. $\det: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$
3. $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$
4. Mais $\exp: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow (\text{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$

1.2.1 Isomorphismes

Définition : Isomorphisme

1. Un isomorphisme de G dans H est un morphisme de groupes bijectif.
2. G et H sont isomorphe ssi il existe un isomorphisme entre les deux.

Exercice :

Si f est un isomorphisme alors f^{-1} aussi

Exercice :

1. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphe
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et \mathbb{S}_n ne sont pas isomorphe (car l'un est abélien et l'autre non).
3. $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphe ssi $m \wedge n = 1$

Définition : Automorphisme

Un automorphisme est un isomorphisme d'un groupe G dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de G se note $Aut(G)$.

Exercice :

Montrer que $Aut(G) < \mathbb{S}_G$, où \mathbb{S}_G désigne l'ensemble des bijections de G dans lui-même

Exercice :

$\forall g \in G$, on note $\sigma_g : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto gxg^{-1} \end{cases}$ (automorphisme intérieur associé à g), montrer que $\sigma_g \in Aut(G)$

Exercice :

On note $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G , montrer que $Int(G) < Aut(G)$

Théorème : Théorème de Cayley

Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de \mathbb{S}_G . En particulier, si $|G| = n$, alors G est isomorphe à un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

Preuve :

Pour tout $g \in G$, on pose $\tau_g : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto gx \end{cases}$ τ_g est une bijection de G dans G . Notons $T_G := \{\tau_g, g \in G\} \subseteq \mathbb{S}_G$.

Vérifions que :

1. $T_G < \mathbb{S}_G$
2. G est isomorphe à T_G

Preuve de 1 :

- $Id_G = \tau_e \in T_G (T_G \neq \emptyset)$
- $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in G, \tau_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2 x = g_1(g_2 x) = \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(x))$, donc on a bien $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \tau_{g_2}$
- $\forall g \in G, \tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = Id_G$ Donc $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}} \in T_G$

Preuve de 2 :

Notons $\phi : \begin{cases} G & \longrightarrow T_G \\ g & \longmapsto \tau_g \end{cases}$ Alors ϕ est un morphisme (d'après la preuve de 1) ϕ est immédiatement surjectif, mais il est également injectif :

Soit $g \in G$ tel que $\tau_g = Id_G$. Alors $\forall x \in G, gx = x$. Si on prend $x = e_G$, on obtient $g = e_G$. Donc $\ker(\phi) = e_G$, et donc ϕ est injectif.

□

1.3 Produits directs

Définition : Produit direct

Le groupe "produit direct" de deux groupes G_1, G_2 est l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi :

$$\cdot : \begin{cases} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto (x_1 y_1, x_2 y_2) \end{cases}$$

Exercice :

vérifier que $G_1 \times G_2$ muni de cette loi est bien un groupe.

Définition : Projections et injections canoniques

1. Projections canoniques $p_i : \begin{array}{c|c} G_1 \times G_2 & \longrightarrow G_i \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_i \end{array}$
2. Injections canoniques : $q_1 : \begin{array}{c|c} G_1 & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ x_1 & \longmapsto (x_1, e_2) \end{array}$ et $q_2 : \begin{array}{c|c} G_2 & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ x_2 & \longmapsto (e_1, x_2) \end{array}$

Remarque :

$\text{Im}(q_i)$ est isomorphe à G_i . Ainsi $G_1 \times G_2$ contient un sous-groupe isomorphe à G_1 , de même pour G_2 .

Remarque :

$\forall x = (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, on a :

$$x = (p_1(x), p_2(x)) = (x_1, x_2) = (x_1, e_2)(e_1, x_2) = (e_1, x_2)(x_1, e_2) = q_1(x_1)q_2(x_2) = q_2(x_2)q_1(x_1)$$

Théorème :

Un groupe G est isomorphe au produit direct $G_1 \times G_2$ ssi G contient deux sous-groupes H_1, H_2 tel que :

1. H_i est isomorphe à $G_i (i = 1, 2)$
2. $h_1 h_2 = h_2 h_1, \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2$
3. $G = H_1 H_2$
4. $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$

Preuve :

\Rightarrow Supposons qu'il existe $\phi : G_1 \times G_2 \longrightarrow G$ isomorphe.

1. On a que $G_1 \simeq \{G_1, e_2\} \simeq \phi(\{G_1, e_2\}) := H_1$ il suffit alors de remarquer que H_1 est un sous groupe de G . On construit de même H_2
2. $\forall (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$, on note $h'_1 = (h_1, e_2)$ idem pour h'_2 , on a alors :

$$h_1 h_2 = \phi(h'_1 h'_2) = \phi(h'_2 h'_1) = h_2 h_1$$

3. $\forall x \in G, \exists ! x' = (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$ tel que $\phi(x') = x$. On a alors :

$$x = \phi(x') = \phi(h'_1 h'_2) = h_1 h_2$$

4. Immédiat

\Leftarrow Construisons un isomorphisme de G dans $G_1 \times G_2$

Fait : $\forall g \in G, \exists ! (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $g = h_1 h_2$

En effet : l'existence vient de 3), l'unicité vient de 4) : $g = h_1 h_2 = k_1 k_2$ alors $(k_1)^{-1} h_1 = k_2 (h_2)^{-1}$.

Comme $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ on obtient $(k_1)^{-1} h_1 = k_2 (h_2)^{-1} = e_G \Rightarrow h_1 = k_1$ et $h_2 = k_2$

Notons $\phi_1 : H_1 \longrightarrow G_1$ et $\phi_2 : H_2 \longrightarrow G_2$ les isomorphismes données par 1).

Posons $\phi : \begin{array}{c|c} G & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ h_1 h_2 & \longmapsto (\phi_1(h_1), \phi_2(h_2)) \end{array}$

Mq ϕ est un morphisme (α), injectif (β), surjectif (γ)

(α) : $\phi(h_1 h_2 h'_1 h'_2) = \phi(h_1 h'_1 h_2 h'_2) = (\phi_1(h_1 h'_1), \phi_2(h_2 h'_2)) = (\phi_1(h_1), \phi_1(h'_1), \phi_2(h_2) \phi_2(h'_2)) = (\phi_1(h_1), \phi_2(h_2))(\phi_1(h'_1), \phi_2(h'_2)) = \phi(g) \phi(g')$

(β) : Soit $x = h_1 h_2$ tel que $\phi(x) = (\phi_1(h_1), \phi_2(h_2)) = (e_1, e_2)$

Alors $\phi_1(h_1) = e_1$ et $\phi_2(h_2) = e_2 \Rightarrow h_1 = h_2 = e_G$

(γ) : Soit $x = (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, soit (h_1, h_2) tel que $\phi_i(h_i) = x_i$, alors $x = (\phi_1(h_1), \phi_2(h_2)) = \phi(h_1, h_2)$, cela montre la surjectivité de ϕ .

□

Exemple :

$(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}, +, \times)$ est anneau. On note $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau (pour la loi \times). Si $\alpha \geq 3$, $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Chapitre 2

Classes modulo un sous-groupe, sous-groupes distingués

2.1 Classes à droite, classes à gauche

Soit $H < G$. On définit $x\mathcal{R}_Hy \iff xy^{-1} \in H$ et $x_H\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H$

Exemple :

1. \mathcal{R}_H et $_H\mathcal{R}$ définissent deux relations d'équivalences
2. La classe d'équivalence de x pour \mathcal{R}_H est Hx appelée classe à droite de x modulo H , idem pour $_H\mathcal{R}$

Exemple :

On se place dans \mathcal{S}_3 , on pose $\sigma = (1, 2, 3)$ et $\tau = (1, 2)$, on a alors $\mathbb{S}_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \sigma\tau\}$.

Pour $H = \{e, \tau\}$, on a :

$$H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}, H\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\sigma^2 (= \sigma\tau)\}$$

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma\tau\}, \sigma^2 H = \{\sigma^2, \sigma^2\tau (= \tau\sigma)\}$$

donc $\sigma H \neq H\sigma$.

Exemple :

Si G est abélien, on a $xH = Hx, \forall x \in G$.

Remarque :

$\forall g \in G, \tau_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx \end{cases}$ est une bijection. En particulier, $\tau_g|_H$ est une bijection de H sur gH . De même, $\rho_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xg \end{cases}$, alors $\rho_g|_H$ est une bijection de H sur Hg .

Remarque :

Soit $\{e\} \cup \{x_i, i \in I\}$ un système de représentants des classes à gauche modulo H . On a alors $G = H \sqcup \bigsqcup_{i \in I} x_i H$ (union disjointe).

Remarque :

L'application $: x_i H \longrightarrow H(x_i)^{-1}$ est une bijection de l'ensemble des classes à gauche sur l'ensemble des classes à droite.

Définition : Indice de H dans G

L'indice de H dans G est le cardinal (fini ou infini) de l'ensemble des classes à gauche (= cardinal de l'ensemble des classes à droite), il est noté $[G : H]$

On en déduit le théorème de Lagrange :

Théorème : Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et $H < G$. Alors :

1. $|G| = |H|[G : H]$
2. $\forall x \in G, o(x) \mid |G|$

2.2 Sous-groupes distingués

Définition :

Soit G un groupe fini, $H < G$ est dit distingué (ou normal) dans G ssi $\forall x \in G, xH = Hx$.
Le cas échéant on note : $H \triangleleft G$

Définition :

Un groupe G est dit simple ssi ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G .

Remarque :

Si G est abélien, tout $H < G$ est distingué.

Exemple :

Soit $H < G$. Alors $H \triangleleft G \iff \forall g \in G, gHg^{-1} = H$

Propriété :

Soit $H \backslash G$ l'ensemble des classes à gauche modulo H .

L'application : $(xH, yH) \longrightarrow xyH$ est bien définie ssi $H \triangleleft G$.

Idem pour les classes à droites G/H .

Preuve :

\Rightarrow : Soit $h \in H, y \in G$, l'application est bien définie, donc $egH = hgH$ donc $yH = hgH$ donc $H = y^{-1}hyH$, donc $y^{-1}hy \in H$.

\Leftarrow : Si $x, x' \in G$ tel que $xH = x'H$, et si $y, y' \in G$ tel que $yH = y'H$, alors on a $h, h' \in H$ vérifiant : $x' = xh$ et $y' = yh'$. Donc $x'y' = xy y^{-1} h y h'$, avec $y^{-1} h y h' \in H$ car $H \triangleleft G$. Donc $x'y'H \subseteq xyH$, par symétrie on a \supseteq

□

Théorème : Groupe quotient

Soit G un groupe, $H \triangleleft G$. On note \bar{x} la classe de x modulo H , $\frac{G}{H}$ l'ensemble des classes modulo H . Alors :

1. L'application $*$: $\left(\frac{G}{H} \right) \times \left(\frac{G}{H} \right) \longrightarrow \frac{G}{H}$
 $(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \bar{x} * \bar{y} := \overline{xy}$ munit $\frac{G}{H}$ d'une structure de groupe tel que $\bar{e} = H$ est l'élément neutre.

2. En particulier, l'application $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ est un morphisme de groupes de noyau H .

2.2.1 Sous-groupes distinguées et noyaux

Propriété :

Si $\phi : G \longrightarrow G'$ un morphisme, alors $\ker(\phi) \triangleleft G$.

Preuve :

Si $h \in \ker(\phi)$, $g \in G$, $\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e_{G'}$, donc $ghg^{-1} \in \ker(\phi)$.

□

Théorème : Groupes distingués et morphismes

Soit G un groupe. Alors $H \triangleleft G$ ssi $\exists G'$ groupe, $\exists \phi : G \longrightarrow G'$ morphisme tel que $H = \ker(\phi)$

Exemple :

1. $\varepsilon : \mathbb{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ (*signature*), alors $A_n := \ker(\varepsilon) \triangleleft \mathbb{S}_n$
2. $\det : \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, alors $\mathbb{SL}_n(\mathbb{R}) := \ker(\det) \triangleleft \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème : Premier théorème d'isomorphisme

Soit $\phi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors, $G/\ker(\phi)$ est isomorphe à $Im(\phi)$.

Chapitre 3

Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de \mathcal{S}_n , de \mathbb{D}_n

3.1 J'ai pas le nom...

3.1.1 Autres exemples de sous groupes normaux

- j'ai pas le premier...
- Le centre d'un groupe $Z(G) = \{g \in G, gx = gx \forall x \in G\}$ est un sous groupe normal de G . (preuve en exercice (feuille 3)). $Z(G)$ est en fait caractéristique c'est à dire qu'il est invariant par tout automorphisme intérieur
- Le groupe dérivé de G est le sous-groupe (noté $D(G)$) qui est engendré par les commutateurs de G c'est à dire les éléments de la forme $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ est aussi un sous-groupe normal.

Exemple :

1. Si G est abélien alors $Z(G) = G$
2. Si $n \leq 3$ alors $Z(\mathcal{S}_n) = \{e\}$

Preuve :

Preuve du deuxième point :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ avec $\sigma \neq e$.

Soit alors $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que l'on ait $\sigma(i) := j \neq i$

Soit enfin $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, on pose $\tau = (j, k)$.

On a bien $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, car $\sigma\tau(i) = j \neq \tau\sigma(j) = k$

□

Exercice :

- $D(G) \triangleleft G$ et $G/D(G)$ est abélien
- Soit $H \triangleleft$ alors G/H est abélien $\Leftrightarrow D(G) < H$
- $D(G)$ est un sous groupe caractéristique de G
- $\forall n \leq 3$ $D(\mathcal{S}_n) = A_n$ ou A_n est le groupe alterné, désigne les permutations de signature paire

Définition : Normalisateur d'un sous-groupe

Soit $H < G$, on note $N_G(H) = \{g \in G, gH = Hg\}$, on l'appelle le normalisateur de H dans G

Exercice :

Mq $H \triangleleft N_g(H)$ et que $N_g(H) < G$

Exemple :

Dans A_4

Soit $H = \{e, (1, 2), (3, 4)\} < A_4$, $|H| = 2$.

O a $H < D(A_4)$ et $H \triangleleft D(A_4)$ car $\frac{|D(A_4)|}{|H|} = 2$.

Verifier que $N_{A_4}(H) = D(A_4)$:

Soit $N = N_{A_4}(H)$ pour simplifier. On sait que $D(A_4) < N$ donc $|D(A_4)| = 4$ divise $|N|$ donc $|N| \in \{4, 8, 12\}$, mais vu $N < A_4$, $|N|$ divise 12, donc $|N| = 4$ où $|N| = 12$. Mais $N \neq A_4$ car $(1, 2, 3)H(1, 2, 3) \neq H$

3.2 Groupes Monogènes, cycliques, symétriques, diédraux

3.2.1 Groupes Monogènes

Définition : Groupe monogène

Un groupe G est dit *monogène* s'il est engendré par une unique élément

Théorème :

Soit G un groupe monogène alors :

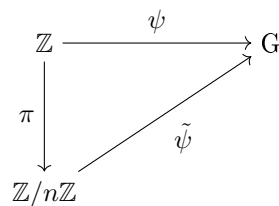
- Ou bien G est isomorphe à \mathbb{Z}
- Ou bien G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$

Preuve :

Soit $G = \langle x \rangle$ et soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ k & \longmapsto & x^k \end{cases}$. ψ est un morphisme de groupe, il est surjectif.

Si il est injectif on a bien $G \simeq \mathbb{Z}$.

Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\ker \psi = n\mathbb{Z}$



Et d'après le premier théorème d'isomorphisme, il existe un isomorphisme de groupe $\tilde{\psi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Im}(\psi) = G$ tel que le diagramme ci-dessus commute.

□

Propriété :

Tout groupe fini d'ordre p avec p premier est cyclique

Preuve :

Il suffit d'utiliser le théorème de Lagrange.

□

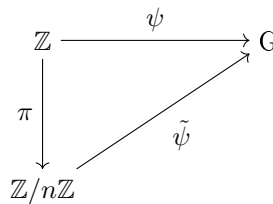
3.2.2 Sous-groupes d'un groupe monogène

Propriété :

1. Tout sous-groupe non trivial d'un groupe monogène infini est infini
2. Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est monogène et cyclique

Preuve :

1. Ici $G \simeq \mathbb{Z}$, donc tout $H < G$ est isomorphe à un sous-groupe de \mathbb{Z} ie. un groupe de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \neq 0$, donc H est infini
2. On reprend le diagramme :



Soit $K < G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a $K = \pi(\pi^{-1}(K))$ car π est surjective. Comme $\pi^{-1}(K)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} il existe $k > 0$ tq $\pi^{-1}(K) = k\mathbb{Z}$.

Alors $K = \pi(k\mathbb{Z})$ est le sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par $\pi(k)$, K est donc monogène et fini

□

Remarque :

Si on reprend la preuve précédente on a $\pi^{-1}(0) = n\mathbb{Z} \subset \pi^{-1}(K) = k\mathbb{Z}$.

Ainsi, $n\mathbb{Z} \subset k\mathbb{Z}$ et donc $k|n$. Par conséquent, pour tout sous-groupe K de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe un diviseur k de n tel que $\pi(k)$ engendre K , l'ordre de $\pi(k)$ étant $\frac{n}{k}$, on a $|K| = \frac{n}{k}$ en particulier ce diviseur est unique on a donc le théorème suivant.

Théorème :

Soit $G = \langle x \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n alors :

Pour tout diviseur d de n , il existe un unique sous-groupe d'ordre d de G et ce sous-groupe est engendré par $x^{n/d}$

Propriété :

Soit G un groupe non trivial alors :

G n'a pas de d'autres sous-groupes que G et $\{e\} \iff G$ est cyclique d'ordre p premier

Preuve :

⊆ évident par Lagrange

⊇ Soit $x \in G \setminus \{e\}$ alors $\langle x \rangle = G$ par hypothèse. Si G était infini, il posséderait des sous-groupes non triviaux de type $n\mathbb{Z}$, donc G est fini. Comme il n'a pas d'autres sous-groupes que $\{e\}$ et G on a forcément $|G| = p$ premier par le théorème précédent.

□

Théorème :

Soit G un groupe monogène : $G = \langle x \rangle$

1. Si G est infini, alors les seuls générateurs de G sont x et x^{-1}
2. Si G est fini (il est cyclique d'ordre n) alors l'ensemble de ses générateurs est donné par $\{x^k : k \in \mathbb{Z}, k \wedge n = 1\}$

Preuve :

1. Soit $\psi : k \in \mathbb{Z} \rightarrow x^k \in G$ (vue précédemment) qui est un isomorphisme de groupes. En particulier, ψ échange les générateurs. Comme les seuls générateurs de \mathbb{Z} sont 1 et -1 , on conclut.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\begin{aligned}
 G = \langle x \rangle &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, x^{km} = x \\
 &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, n \mid km - 1 \\
 &\iff \exists (m, q) \in \mathbb{Z}, km - nq = 1 \\
 &\iff \text{pgcd}(k, n) = 1
 \end{aligned}$$

□

Exercice :

L'ensemble des générateurs de $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est aussi égal à $\{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : 0 \leq k \leq n-1, k \wedge n = 1\}$

Définition : Fonction d'Euler

La fonction d'Euler est la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que :

- $\varphi(1) = 1$
- $\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, k \wedge n = 1\}|$

3.3 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On rappelle que les opérations d'addition et de multiplication sont bien définies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pas de dépendance des représentants) et que cet anneau est unitaire.

Définition : Inverse modulo n

On dit que $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible s'il existe $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\bar{k}\bar{m} = \bar{1}$

Propriété :

Soit $n \geq 2$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont exactement les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. L'ensemble des éléments inversibles est alors un groupe abélien fini d'ordre $\varphi(n)$.

Preuve :

Utiliser la caractérisation précédente avec Bézout.

□

3.4 Produits directs de groupes cycliques, calcul de $\varphi(n)$

On considère le morphisme d'anneaux unitaires :

$$f : k \in \mathbb{Z} \rightarrow (\bar{k}, \bar{k}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

Théorème :

Le morphisme d'anneaux unitaires f induit par passage au quotient par son noyau un isomorphisme d'anneaux unitaires $\bar{f} : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si $m \wedge n = 1$

Preuve :

Il faut vérifier \bar{f} est bijective ssi $m \wedge n = 1$:

$$\begin{aligned}
 f \text{ est surjective} &\iff |Im(f)| = mn \\
 &\iff |\mathbb{Z}/\ker(f)| = mn \text{ (grâce au théorème d'isomorphisme)} \\
 &\iff \ker(f) = mn\mathbb{Z} \\
 &\iff m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z} \\
 &\iff m \wedge n = 1
 \end{aligned}$$

□

Propriété :

Si $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Théorème :

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, décomposé en facteur premiers. Alors :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Preuve :

Il nous suffit de calculer $\varphi(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
 \varphi(p^\alpha) &= |\{k \in \{1, \dots, p^\alpha\} : k \wedge p^\alpha = 1\}| \\
 &= |\{1, \dots, p^\alpha\} \setminus \{p, 2p, \dots, p^{\alpha-1}p\}| \\
 &= p^\alpha - p^{\alpha-1}
 \end{aligned}$$

□

3.5 Structure des groupes abéliens finis (admis)

Référence : Livre de F. Ulmer "Théorie des groupes" chapitre 12

Soit G un groupe fini abélien d'ordre N . Il existe une décomposition unique $N = d_1 \cdots d_n$ avec $d_n \geq 2$ et $d_{i+1} | d_i$ telle que :

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

Exemple :

On peut lister, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre $72 = 3^2 \times 2^3$ avec les séquences suivantes : $(3^2 \times 2^2, 2), (3 \times 2, 3 \times 2, 2), (3 \times 2^3, 3), (2^2 \times 3, 2 \times 3), (3^2 \times 2, 2, 2)$

3.6 Groupes symétriques

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ que l'on munit de la loi de composition : c'est un groupe d'ordre $n!$

3.6.1 Support et Orbite

Définition : Support

Le support de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est l'ensemble $\{i \in \{1, \dots, n\} ; \sigma(i) \neq i\}$

Exercice :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que

- σ et σ^{-1} ont le même support
- Deux permutations dont les supports sont disjoints commutent

Définition : Orbite

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On définit la relation d'équivalence sur $\{1, \dots, n\}$:

$$i\mathcal{R}j \iff \exists r \in \mathbb{Z} \mid \sigma^r(i) = j.$$

La classe de i est notée $\Omega(i) = \{\sigma^r(i), r \in \mathbb{Z}\}$ et est appelée σ -orbite de i .

3.6.2 Notion de cycle

Définition : r-cycle

$\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un r -cycle si il existe j_1, \dots, j_r dans $\{1, \dots, n\}$ tq $\sigma(j_1) = j_2, \dots, \sigma(j_{r-1}) = j_r, \sigma(j_r) = j_1$, et si pour $k \notin \{j_1, \dots, j_r\}, \sigma(k) = k$.

Alors le support de σ est $\{j_1, \dots, j_r\}$. On notera $\sigma = (j_1, \dots, j_r)$

Définition : Transposition et permutation circulaire

1. Un 2-cycle est appelé transposition
2. le n -cycle $(1, \dots, n)$ est appelé permutation circulaire

Exemple :

Si $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow i$
alors $\sigma_0 = (1, 3, 2)(4, 6)$.

Théorème :

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{e\}$ se décompose sous la forme $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$, et où les γ_i sont des cycles différents de e dont les supports sont disjoints deux à deux. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Exercice :

1. Montrer que l'ordre de σ est égal au ppcm des longueurs des cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_s$.
2. Calculer σ_0^{1000} .

3.6.3 Formules importantes

Propriété :

Pour tout $\tau \in \mathcal{S}_n$, $\tau(j_1, \dots, j_r)\tau^{-1} = (\tau(j_1), \dots, \tau(j_r))$.

Propriété :

On a : $(j_1, \dots, j_r) = (j_1, j_2)(j_2, j_3) \dots (j_{r-1}, j_r)$

Cas particulier : $(a, b, c) = (a, b)(b, c)$

Applications de ces deux propriétés :

1. Deux r -cycles de \mathcal{S}_n sont conjugués dans \mathcal{S}_n
2. $(1, i)(1, j)(1, i) = (1, i)(1, j)(1, i)^{-1} = (i, j)$
3. \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions du type $(j, j+1)$ où $j \in \{1, \dots, n-1\}$
 preuve : laissée en exercice au lecteur, l'idée est de montrer que (i, j) est un produit de transpositions du type $(k, k+1)$ par récurrence sur $j-i$ en utilisant $(i, j) = (j-1, j)(i, j-1)(j-1, j)$
4. \mathcal{S}_n est engendré par $(1, 2)$ et $\eta = (1, 2, \dots, n)$
 preuve : $\eta^i(1, 2)\eta^{-i} = (i+1, i+2)$

3.6.4 Générateurs

Soit $n \geq 2$.

Théorème :

1. \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions
2. \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions du type $(1, j)$ où $j \in \{2, \dots, n\}$

3.6.5 Centre**Théorème :**

$Z(\mathcal{S}_n) = \{e\}$ pour $n = 1$ et $n \geq 3$.

3.6.6 Signature**Définition :** Signature

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-t}$ où t est le nombre de σ -orbites différentes.

Exemple :

- $\sigma = e$: on a $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, chaque point est une orbite donc $t = n$ et $\epsilon(\sigma) = 1$
- $\sigma = (1, 2)$: ici il y a $n-2$ éléments fixés qui donnent chacun une orbite, et $\{1, 2\}$ est une autre orbite donc $\epsilon(\sigma) = -1$.
- $\sigma = (1, \dots, r)$: $\epsilon(\sigma) = (-1)^{r-1}$

Propriété :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ où $n \geq 2$. Alors $\epsilon(\sigma \circ \tau) = (-1) \times \epsilon(\sigma)$ pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$.
 En particulier, si σ est un produit de k transpositions, on a $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$.

Remarque :

Ainsi, la parité du nombre de transpositions nécessaires pour décomposer σ ne dépend que de σ .

Théorème :

Si $n \geq 2$, $\epsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{1, -1\}$ est un morphisme de groupes surjectif.

Preuve :

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. On décompose $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ et $\sigma' = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_{k'}$ en produits de transpositions. Alors $\epsilon(\sigma \circ \sigma') = (-1)^{k+k'} = \epsilon(\sigma) \times \epsilon(\sigma')$.

□

Définition : Groupe alterné

Soit $n \geq 2$. \mathcal{A}_n est le noyau de ϵ , on le nomme groupe alterné.

Remarque :

C'est un sous groupe distingué de \mathcal{S}_n d'indice 2, car le noyau d'un morphisme

Remarque :

Si τ est une transposition, $(\tau \mathcal{A}_n) \cap \mathcal{A}_n = \emptyset$, d'où $\mathcal{S}_n = (\tau \mathcal{A}_n) \sqcup \mathcal{A}_n$.

Théorème :

1. Si $n \geq 3$, \mathcal{A}_n est engendré par les 3-cycles.
2. Si $n \geq 5$, deux 3-cycles sont conjugués dans \mathcal{A}_n
3. Si $n \geq 2$, alors $D(\mathcal{S}_n) = \mathcal{A}_n$, si $n \geq 5$ alors $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.

Preuve :

1. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ est un produit d'un nombre pair de transpositions, or $(i, j)(j, k) = (i, j, k)$ et $(i, j)(k, l) = (i, j, k)(j, k, l)$.
2. Soient $(i, j, k), (i', j', k')$ deux 3-cycles. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma(i) = i', \sigma(j) = j', \sigma(k) = k'$. Alors $\sigma(i, j, k)\sigma^{-1} = (i', j', k')$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\sigma \in \mathcal{A}_n$, en effet $n \geq 5$, donc il existe une transposition $\tau = (r, s)$ avec $r, s \notin \{i, j, k\}$, et on peut remplacer σ par $\sigma\tau$.
3. $D(\mathcal{A}_n) \subset D(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{A}_n$ car si $a, b \in \mathcal{S}_n$, alors $\epsilon([a, b]) = 1$.
Montrons que si $n \geq 5$, les 3-cycles, qui engendrent \mathcal{A}_n , sont des commutateurs (de \mathcal{A}_n).
Soit $\sigma = (i, j, k)$ un 3-cycle. σ^2 est aussi un 3-cycle donc d'après 2. les deux sont conjugués : il existe $\eta \in \mathcal{A}_n$ tel que $\sigma^2 = \eta\sigma\eta^{-1}$ i.e. $\sigma = [\eta, \sigma]$.

□

Cas particuliers :

1. $D(\mathcal{A}_3) = \{e\}$
2. $D(\mathcal{A}_4) = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$

Preuve :

1. $\mathcal{A}_3 = \langle (1, 2, 3) \rangle$ donc $\mathcal{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est abélien
2. On note $V = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$, c'est un sous groupe distingué de \mathcal{A}_4 . Alors le groupe quotient \mathcal{A}_4/V est d'ordre 3 donc isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui est abélien. Ainsi $D(\mathcal{A}_4)$ est un sous-groupe de V . Par le théorème de Lagrange, $D(\mathcal{A}_4)$ est de cardinal 1, 2, ou 4. \mathcal{A}_4 n'est pas abélien donc ce n'est pas 1. Si c'était 2, $D(\mathcal{A}_4)$ serait de la forme $\{e, (i, j)(k, l)\}$ qui n'est pas distingué.

□

Propriété :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, avec $n \neq 2$ alors : $\epsilon(\sigma \circ \tau) = (-1)\epsilon(\sigma)$

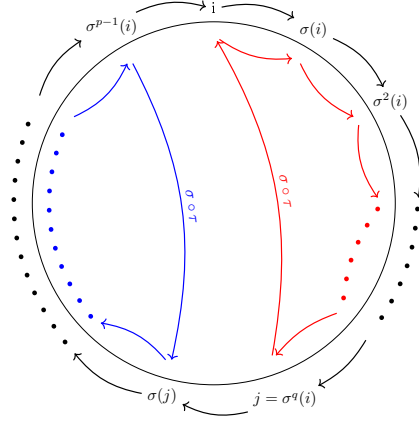
Preuve :

On veut étudier les orbites de $\sigma \circ \tau$. Seules les σ -orbites qui contiennent i ou j seront modifiées par τ . τ agit comme l'identité sur les autres orbites.

- Premier cas : i et j appartiennent à la même orbite O :

$O = \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^q(i) = j, \sigma^{q+1}(i), \dots, \sigma^{p-1}(i)\}$, ou $p = |O|$. Vérifions alors que $\sigma \circ \tau$ sépare O en deux $\sigma \circ \tau$ -orbites :

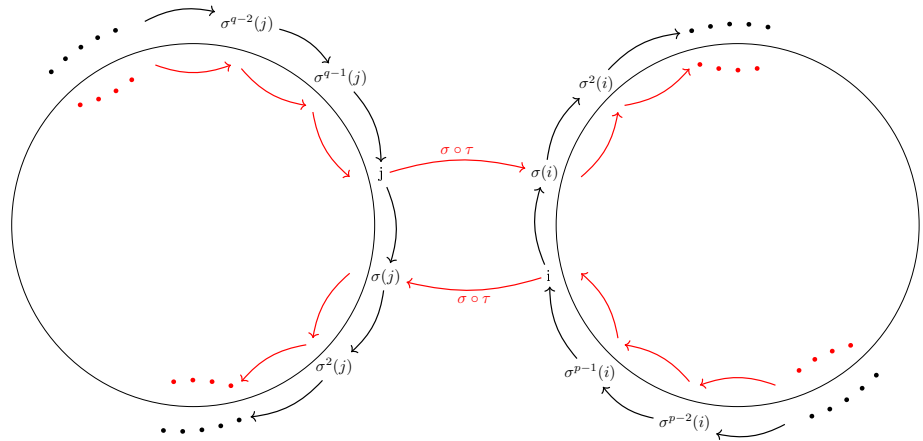
- L'orbite de i par $\sigma \circ \tau$ noté O_i vaut : $O_i = \{i, \sigma \circ \tau(i) = \sigma(j) = \sigma^{q+1}(i), \dots, \sigma^{p-1}(i)\}$
- L'orbite de i par $\sigma \circ \tau$ noté O_j vaut : $O_j = \{j, \sigma \circ \tau(j) = \sigma(i), \dots, \sigma^{q-1}(i)\}$



On a bien montré que $O_i \cap O_j = \emptyset$

- Deuxième cas, i et j sont dans deux orbites différentes :

On note $O' = \{j, \sigma(j), \dots, \sigma^{q-1}(j)\}$ l'orbite de j sous σ et $O = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{p-1}(i)\}$ l'orbite de i sous σ . À compléter...



□

3.7 Groupes Diédraux

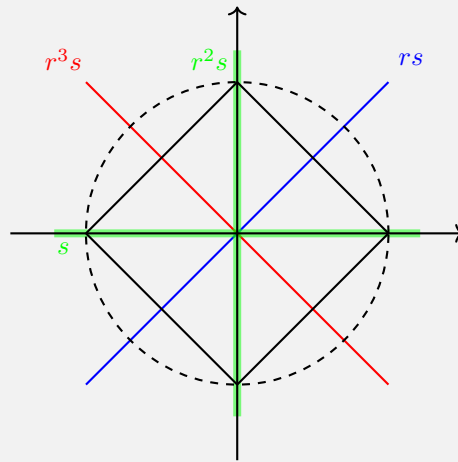
$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On note aussi $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la symétrie d'axe (O_x)

Propriété :

1. $\Omega^n = e$ et $S^2 = e$
2. $S\Omega S = \Omega^{-1}$, et donc $S\Omega^{-1} = \Omega S$

Exemple :

- $n = 2$: $D_2 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $n = 3$:
On a $\Omega^{-1}S\Omega = S\Omega^2 = Sr^{-1} = rS$ et
 $r^{-2}sr^2 = r^{-2}r^{-2}s = r^2s$
Et donc $D_3 \simeq \mathcal{S}_3$
- $n = 4$:

**Théorème :**

Soit $n \neq 2$, $D_n = \langle s, r \rangle$ alors :

$$D_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$$

En particulier, $|D_n| = 2n$ et $\langle r \rangle$ est distingué dans D_n

Preuve :

Les éléments $e, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ sont distincts deux à deux, de même que le sont $s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$. Il reste alors qu'à remarquer que ces deux ensembles sont disjoints, par exemple au moyen d'un déterminant de matrice.

□

Soit $g \in \langle r, s \rangle$: c'est un mot en r, s, r^{-1} , en utilisant $sr = r^{-1}s$ on se ramène à un mot de "réduit" de la forme $e, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ ou $s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$.

Remarque :

D_n est aussi engendré par r et rs , en effet $r = rs \dots$

Exercice :

Soit G un groupe engendré par deux éléments a et b qui vérifient, $o(a) = n$, $o(b) = 2$ et $o(ab) = 2$ alors G est isomorphe à D_n

Preuve :

$ab = ba^{-1} \Rightarrow b \notin \langle a \rangle$ et $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ba, \dots, a^{n-1}b\}$ Par exemple J calais (Chapitre groupes diédraux)

□

Remarque :

En TD on identifiera la liste des sous groupes normaux de D_n

Exercice :

- Soit $n \neq 3$, alors $Z(D_n) = \{e, r^{n/2}\}$ si n est pair et e sinon.
- $D(D_1) = \{e\}$ et $D(D_2) = \{e\}$
- $\forall n \neq 3, D(D_n) = \langle r^2 \rangle$

Preuve :

- $[r^i, r^j] = e$
- $[r^i, r^j s] = r^i r^j s r^{-i} (r^j s)^{-1} = r^{i+j} s r^{-i} s r^{-j} = r^{2i}$
- $[r^i s, r^j s] = r^{i-j}$ On a bien $D(D_n) = \langle r^2 \rangle$

□

3.8 Classification des groupe d'ordre 8

3.8.1 Définition de Q_8

$Q_8 = \langle I, J \rangle$ où $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété :

1. $o(I) = 4, J^2 = -I (\Leftarrow o(J) = 4)$
2. $JI = I^{-1}J$

Propriété :

$Q_8 = \{e, I, I^2, I^3, J, IJ, I^2J, I^3J\}$

Preuve :

Similaire à celle faite pour D_n

□

Théorème :

Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

Si G possède un seul élément d'ordre 2 alors : $G \simeq Q_8$, sinon, $G \simeq D_4$

Preuve :

Tout les éléments de G ne peuvent être abéliens à la fois, car G est non abélien. Dès lors, il existe un élément i d'ordre 4 (8 étant exclu car $G \neq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ abélien). On note $H := \langle i \rangle$

Soit $j \in G, j \notin H$, on a $G = \{1, i, i^2, i^3\} \cup \{j, ji, ji^2, ji^3\} = H \cup jH$.

Comme $H \triangleleft G$ vu $[G : H] = 2$, on a $ji j^{-1} \in H$

1. Si G possède un seul élément d'ordre 2, c'est $i^2 \in \langle i \rangle$. On a de plus $o(j) = o(ij) = o(i^2j) = o(ij^3) = 4$, et $ji = i^{-1}j$, on vérifie alors que $G \simeq Q_8$
2. Si G possède au moins 2 éléments d'ordre 2 alors il existe dans $\{j, ji, ji^2, ji^3\}$ un élément d'ordre 2, notons le j_0 , (par exemple i^2j fonctionne) Comme précédemment

□

3.9 Action de groupes

Définition : Action

Soit G un groupe et X un ensemble non vide. Une opération de G sur un ensemble X est une application $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ qui vérifie

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in X$
- $e \cdot x = x$, $\forall x \in X$

Remarque :

On a défini ici une action de G à gauche. On peut définir une action de G à droite en demandant cette fois ci : $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$

Propriété :

- $\forall g \in G$, l'application $\gamma_g : X \longrightarrow X$, $x \mapsto g \cdot x$ est une bijection (d'inverse $\gamma_{g^{-1}}$)
- L'application $G \longrightarrow \text{Bij}(X)$, $x \mapsto \gamma_x$ est un morphisme de groupes. Réciproquement, tout morphisme de groupes $\lambda : G \longrightarrow \text{Bij}(X)$ définit une action de G sur X en posant $g \cdot x = (\lambda(g))(x)$.

Remarque :

On étudiera le cas particulier où $X = G$, il s'agit d'un cas très intéressant. On peut avoir $G \longrightarrow \text{Bij}(G)$ et même des exercices où $G \longrightarrow \text{Aut}(G)$.

Exemple :

- 1) G opère sur G par translation à gauche $G \times G$, $(g, x) \longrightarrow g \cdot x = gx$.
- 2) G opère sur G par conjugaison $G \times G \longrightarrow G$, $(g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$. Ici, l'application $G \longrightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ est un automorphisme de G . Donc on a ici $G \longrightarrow \text{Aut}(G)$.

Définition : automorphisme intérieur

L'application $i_g : G \longrightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ s'appelle l'automorphisme intérieur associé à g .

Exercice. L'ensemble $\text{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs de G forme un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$.

Lemme. $\text{Int}(G) \simeq G/Z(G)$

Preuve :

On considère le morphisme

$$\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow & \text{Int}(G) \\ g & \longmapsto & i_g \end{cases}$$

- L'application φ est évidemment surjective.

$$\begin{aligned}
g \in \ker(\varphi) &\iff i_g = \text{Id}_G \\
&\iff \forall x \in G, i_g(x) = gxg^{-1} = x \\
&\iff \forall x \in G, gx = xg \\
&\iff g \in Z(G).
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le 1er théorème d'isomorphisme. □

Exemple :
(Suite des exemples)

3) Soit $H < G$ (pas forcément distingué). Soit l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} G \times (G/H)_{\text{gauche}} & \longrightarrow & (G/H)_{\text{gauche}} \\ (g, xH) & \longmapsto & (gx)H \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie. En effet, si $gH = xH$ alors $y = xh$ où $h \in H$, et ensuite $g(yH) = g(xhH) = g(xH) = (gx)H$.

4) $G := \text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ via

$$f : \left| \begin{array}{ccc} G \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$$

5) $O_n(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}), M^T M = I_n\}$ agit sur $\mathbb{S}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ via

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ (M, x) & \longmapsto & Mx \end{array} \right.$$

6) D_n (groupe diédral) agit sur l'ensemble des sommets du polygône régulier à n côtés.

7) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ via

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n \\ (g, x) & \longmapsto & g^T x g \end{array} \right.$$

3.9.1 Stabilisateur, orbite

Définition : stabilisateur

Soit $x \in X$. Le stabilisateur de x dans G est

$$\text{Stab}_G(x) := \{g \in G, g \cdot x = x\}.$$

Exercice. $\text{Stab}_G(x) < G$.

Maintenant, introduisons la relation sur X suivante :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G, y = g \cdot x.$$

Exercice. \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Définition :

Soit $x \in X$. $\text{Orb}_G(x)$ est la classe d'équivalence de x par la relation \mathcal{R} . Autrement dit :

$$\text{Orb}_G(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$$

Retour sur les 7 exemples.

- 1) $\text{Stab}_G(x) = \{x\}$ et $\text{Orb}_G(x) = G$.
 2) $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G, gx = xg\}$, appelé le "centraliseur" de x , noté $C_G(x)$.

$$\text{Orb}_G(x) := \{gxg^{-1}, g \in G\}$$

est la "classe de conjugaison" de x .

3)

$$f : \begin{cases} G \times (G/H)_{\text{gauche}} & \longrightarrow & (G/H)_{\text{gauche}} \\ (g, xH) & \longmapsto & (gx)H \end{cases}$$

$$\text{Stab}_G(xH) = xHx^{-1}$$

$$\text{Orb}_G(xH) := (G/H)_{\text{gauche}}$$

4)

$$f : \begin{cases} \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

$$\text{Stab}_G(i) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \simeq \text{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Orb}_G(i) := \mathbb{H}.$$

6)

7)

$$h : \begin{cases} \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ (g, M) & \longmapsto & g^T M g \end{cases}$$

$\text{Stab}_G(M) = \{\text{groupes des isométries par la forme quadratique induite par } M\}$

$$\text{Orb}_G(xH) := \{M^\top \in S_n(\mathbb{R}), \text{signature}(M) = \text{signature}(M')\}$$

Fait important : Si $y \in \text{Orb}_G(x)$ alors on peut relier $\text{Stab}_G(x)$ et $\text{Orb}_G(y)$. On a

$$\text{Stab}_G(x) = g\text{Stab}_G(y)g^{-1}.$$

Autre propriété importante :

Théorème :

Soit $x \in X$. L'application

$$V : \begin{cases} (G/\text{Stab}_G(x))_{\text{gauche}} & \longrightarrow & \text{Orb}_G(x) \\ g\text{Stab}_G(x) & \longmapsto & g \cdot x \end{cases}$$

est bien définie et c'est une bijection. Attention, V n'est pas un morphisme de groupes.

Preuve :

Soit $S := \text{Stab}_G(x)$. Soit $(g, g') \in G^2$ tel que $g'S = Sg$. Alors $g' = gS$ où $s \in S$. Ainsi, $g' \cdot x = (gS) \cdot x = g \cdot (x \cdot s) = g \cdot x$.

V est surjective par définition.

V est injective : Soit $(g, g') \in G^2$ tel que $g \cdot x = g' \cdot x$. On a $(g')^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$. Or $(g')^{-1} \cdot (g \cdot x) = ((g')^{-1}g) \cdot x$, donc $(g')^{-1}g \in S$, donc $g \in g'S$, donc $gS = g'S$.

□

Théorème :

- 1) $\forall x \in X, |\text{Orb}_G(x)| = \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x)|} = [G : \text{Stab}_G(x)]$.
 2) Si X est fini et si $\{x_1, \dots, x_r\}$ est un ensemble de représentants des orbites par la relation \mathcal{R} , alors

$$|X| = \sum_{i=1}^r |\text{Orb}_G(x_i)| = \sum_{i=1}^r \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x_i)|}.$$