Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Prima prova in itinere 27 Novembre 2015

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Fissato un sistema di riferimento $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo i seguenti tre piani dipendenti dal parametro reale h :

$$\Pi_1|_{\mathcal{B}_O}:\ x-y+hz-h=0, \qquad \Pi_2|_{\mathcal{B}_O}:\ hx+(h+1)y+z=0, \qquad \Pi_3|_{\mathcal{B}_O}:\ x+y-z-1=0.$$

i. Determinare la mutua posizione dei tre piani per ogni $h \in \mathbb{R}$.

ii. Per ogni valore di h per cui i tre piani appartengono ad un medesimo fascio, scrivere una forma parametrica della retta sostegno del fascio.

iii. Verificare se la retta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ con $h = -1$ e la retta

$$s|_{\mathcal{B}_O}:\ \begin{cases} x-y-z+1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

sono complanari, ed in tal caso trovare il piano che le contiene entrambe.

2. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \ker\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\right).$$

i. Scrivere una rappresentazione algebrica di U.

ii. Trovare la dimensione ed una base di $U \cap W$.

iii. Trovare la dimensione ed una base di $U + W$.

3. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito come $f_k(\mathbf{x}) = A_k \cdot \mathbf{x}$, dove k è un parametro reale e

$$A_k = \begin{pmatrix}1 & -k & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2k & -1\end{pmatrix}.$$

i. Determinare la dimensione ed una base del nucleo dell'applicazione, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

ii. Verificare se per $k = 1$ il vettore $(0\ 1\ 0)^T$ appartiene all'immagine dell'applicazione.

iii. Verificare se per $k = 0$ l'applicazione è un automorfismo ed in tal caso scrivere l'applicazione inversa.

Soluzioni

1. i. Studiamo il sistema lineare definito dalle equazioni dei tre piani:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & h \\ h & h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+h & -h \\ 0 & -2 & 1+h & -1+h \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+h & -h \\ 0 & 0 & 3(1+h) & -1-h \end{array}\right).$$

Se $h \neq -1$, i piani si intersecano in un punto. Se $h = -1$, esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro, quindi i piani si intersecano lungo una retta.

ii. I tre piani appartengono ad un fascio se e solo se $h = -1$. In tal caso la retta l sostegno del fascio è la soluzione del sistema lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad l|_{\mathcal{B}_O} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii. Le rette r ed s hanno rappresentazione algebrica

$$r|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}, \qquad s|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto entrambe le rette sono contenute in Π_1.

2. i. Il sottospazio U è l'insieme dei vettori del tipo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

La rappresentazione algebrica di U si ottiene eliminando i parametri t_1, t_2.

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \\ z = 2t_1 - t_2 \\ w = t_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = x \\ t_2 = y \\ 2x - y - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}.$$

ii. L'intersezione $U \cap W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

iii. Per la formula di Grassmann, la dimensione della somma $U + W$ è

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

La soluzione del sistema lineare che definisce W è

$$\begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = t_1 + 2t_2 \\ z = t_1 \\ w = t_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sappiamo che

$$U+W=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right),$$

ma il secondo generatore di U appartiene anche a W e quindi è combinazione lineare degli ultimi due vettori. Eliminandolo otteniamo una base di $U+W$:

$$\mathcal{B}_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

3. i. Il determinante dell'applicazione è

$$\det(f_k)=\det(A_k)=-1+2k-k=k-1.$$

Pertanto il nucleo dell'applicazione è il sottospazio banale per ogni $k\neq 1$, per il quale $\dim(\ker(f_k))=0$ e non esiste una base. Per $k=1$ abbiamo

$$\ker(f_1)=\ker\left(\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\right)=\ker\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\right)=\ker\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\right).$$

Quindi $\dim(\ker(f_1))=3-2=1$ ed una base del nucleo è

$$\mathcal{B}_{\ker(f_1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

ii. Il vettore appartiene all'immagine di f_1 se e solo se esiste la soluzione del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\1&1&0&1\\0&2&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-1&1\\0&2&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

Quindi il vettore non appartiene all'immagine.

iii. Dal punto i, l'applicazione è invertibile per $k=0$ e l'applicazione inversa è $f_0^{-1}(\mathbf{x})=A_0^{-1}\cdot\mathbf{x}$. Possiamo calcolare la matrice inversa tramite l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$(A_0|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)=\left(I_3|A_0^{-1}\right).$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Seconda prova in itinere 11 Febbraio 2016

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i. Calcolare autovalori e autospazi di A.

ii. Determinare dimensioni e basi ortonormali del nucleo di A e del suo complemento ortogonale.

iii. Dire se esiste, ed in caso positivo trovare, una matrice ortogonale Q che diagonalizza A.

2. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo le due rette dipendenti dal parametro reale h :
$$r|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \qquad s_h|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x + y - 2h = 0 \\ y - h = 0 \end{cases}.$$

i. Costruire la superficie $\mathcal{Q}_h$ ottenuta dalla rotazione di s_h rispetto all'asse r.

ii. Classificare $\mathcal{Q}_h$ per ogni h.

iii. Trovare le rette contenute in $\mathcal{Q}_1$ ed intersecanti nel punto $R|_{\mathcal{B}_O} = (1\ 1\ 1)^T$.

3. Dato $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento ortonormale nel piano, consideriamo
$$r|_{\mathcal{B}_O} :\ x - y + 2 = 0, \qquad F|_{\mathcal{B}_O} = (-3 \quad 2)^T.$$

i. Trovare l'equazione del luogo $\mathcal{C}$ di punti P nel piano la cui distanza dalla retta r è metà della distanza dal punto F.

ii. Trovare il cambiamento di coordinate necessario a ridurre la curva in forma canonica e scrivere la relativa equazione.

iii. Trovare la rappresentazione algebrica degli assi di simmetria della conica.

4. Sia h un parametro reale ed $S_3 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

i. Provare che per ogni h esiste un unico $f_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tale che
$$f_h(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} - h\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \quad f_h(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + h\mathbf{e_3}, \quad f_h(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$$
e scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto ad S_3.

ii. Determinare, se esistono, i valori di h per cui f_h non è un automorfismo e scrivere la matrice che rappresenta f_0^{-1} rispetto ad S_3.

iii. Scrivere le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f_1)$ rispetto ad S_3.

Soluzioni

1. i. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2.$$

Pertanto esiste un autovalore semplice $\lambda_1 = 0$ ed un autovalore doppio $\lambda_2 = 3$, i cui relativi autospazi sono:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

ii. Osserviamo che il nucleo della matrice corrisponde all'autospazio V_0 e quindi la sua dimensione è 1 ed una sua base ortonormale è

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre, poiché A è una matrice simmetrica, l'autospazio V_3 è ortogonale a V_0 e quindi corrisponde al suo complemento ortogonale in $\mathbb{R}^3$. Quindi la dimensione di $\ker(A)^\perp$ è 2 ed una sua base ortogonale si ottengono partendo dalla base di V_3 ed applicando l'algoritmo di Gram–Schmidt:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver normalizzato, otteniamo la base ortonormale richiesta:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

iii. Essendo A simmetrica allora è ortogonalmente diagonalizzabile e la matrice Q è costruita a partire dalla base ortonormale di autovettori:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

2. i. Costruiamo una rappresentazione parametrica di r, da cui otteniamo un punto $Q \in r$ ed un vettore $\mathbf{v}$ parallelo alla retta:

$$r|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Q|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siano P_0 il generico punto sulla retta s_h di coordinate $P_0|_{\mathcal{B}_O} = (x_0\ y_0\ z_0)^T$ e P il generico punto sulla superficie di rotazione di coordinate $P|_{\mathcal{B}_O} = (x\ y\ z)^T$. La distanza di P da r è

$$d(P,r) = \frac{\|\langle \mathbf{v} \wedge [\overrightarrow{QP}] \rangle\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{2x^2 + (y-z)^2}{2}}.$$

ed analogamente per $d(P_0, r)$. L'equazione della superficie $\mathcal{Q}_h$ si ottiene eliminando i parametri x_0, y_0, z_0 dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}, [\overrightarrow{P_0P}] \rangle = 0 \\ d(P, r) = d(P_0, r) \\ x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z - y_0 - z_0 = 0 \\ 2x^2 + (y - z)^2 - 2x_0^2 - (y_0 - z_0)^2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = h \\ y_0 = h \\ z_0 = y + z - h \\ 2x^2 + (y - z)^2 - 2h^2 - (2h - y - z)^2 = 0 \end{cases}$$

da cui $\mathcal{Q}_h|_{\mathcal{B}_O} : \ x^2 - 2yz + 2hy + 2hz - 3h^2 = 0$.

ii. Le matrici associate alla quadrica $\mathcal{Q}_h$ rispetto a $\mathcal{B}_O$ sono:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & h & h & -3h^2 \end{pmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 1,\ I_2 = -1,\ I_3 = -1,\ I_4 = h^2$. Segue che $\mathcal{Q}_h$ è un iperboloide ad una falda per $h \neq 0$, mentre è un cono reale per $h = 0$.

iii. Il piano tangente a $\mathcal{Q}_1$ nel punto R è

$$\Pi|_{\mathcal{B}_0} : \ (1\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = x - 1 = 0.$$

Le rette contenute in $\mathcal{Q}_1$ ed intersecanti in R sono le due rette costituenti la quadrica degenere $\mathcal{Q}_1 \cap \Pi$ e si ottengono fattorizzando il relativo polinomio:

$$\mathcal{Q}_1 \cap \Pi|_{\mathcal{B}_O} : \ \begin{cases} x^2 - 2yz + 2y + 2z - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - 1)(z - 1) = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui le due rette sono

$$r_1|_{\mathcal{B}_O} : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \qquad r_2|_{\mathcal{B}_O} : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}.$$

3. i. Il luogo $\mathcal{C}$ è descritto da

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O} : \ \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}}{2}$$

Dopo avere elevato al quadrato entrambi i lati ed aver semplificato, otteniamo l'equazione quadratica

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$$

ii. Le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo autovalori e autovettori di A. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Di conseguenza i due autovalori sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ e quindi la conica è a centro. I relativi autospazi sono

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi la matrice $Q \in SO(2)$ associata alla rotazione del sistema di riferimento è quella che diagonalizza A :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Essendo la conica a centro, il vettore di traslazione $\mathbf{v}$ corrisponde alle coordinate del centro di simmetria, che si ricavano risolvendo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione di coordinate che pone $\mathcal{C}$ in forma canonica è $\mathbf{x} = Q\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v}$ da cui si ottiene

$$\mathcal{C}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \ \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

Gli invarianti valgono $I_2 = \lambda_1 \lambda_2 = -3$ ed $I_3 = 18$, da cui otteniamo l'equazione

$$-\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 6 = 0.$$

Di conseguenza la curva $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

iii. Il centro di simmetria ha coordinate $C|_{\mathcal{B}_O} = (-1\ 0)^T$. I due assi di simmetria r_{-1}, r_3 contengono C e sono paralleli ai corrispondenti autospazi. Le loro equazioni sono

$$r_{-1}|_{\mathcal{B}_O} : \ \langle \mathbf{v_3}, [\overrightarrow{CP}] \rangle = x - y + 1 = 0, \qquad\qquad r_3|_{\mathcal{B}_O} : \ \langle \mathbf{v_{-1}}, [\overrightarrow{CP}] \rangle = x + y + 1 = 0.$$

4. i. Verifichiamo che i tre vettori $\mathbf{v_1} = \mathbf{e_1},\ \mathbf{v_2} = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3},\ \mathbf{v_3} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\det((\mathbf{v_1}|_{S_3} \quad \mathbf{v_2}|_{S_3} \quad \mathbf{v_3}|_{S_3})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

L'esistenza ed unicità di f_h è quindi una conseguenza del teorema di interpolazione. Per ottenere la matrice che rappresenta f_h, osserviamo che $\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1},\ \mathbf{e_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3},\ \mathbf{e_3} = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} &f_h(\mathbf{e_1}) = f_h(\mathbf{v_1}) = \mathbf{e_1} - h\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \\ &f_h(\mathbf{e_2}) = f_h(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}) = f_h(\mathbf{v_1}) - f_h(\mathbf{v_3}) = (1-h)\mathbf{e_2}, \\ &f_h(\mathbf{e_3}) = f_h(-\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = -f_h(\mathbf{v_1}) + f_h(\mathbf{v_2}) + f_h(\mathbf{v_3}) = \mathbf{e_1} + (h-1)\mathbf{e_2} + h\mathbf{e_3}. \end{aligned}$$

e quindi

$$F_h|_{S_3} = (f_h(\mathbf{e_1})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_2})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_3})|_{S_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -h & 1-h & h-1 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

ii. L'applicazione non è un automorfismo se e solo se il determinante di f_h è uguale a zero:

$$\det(f_h) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -h & 1-h & h-1 \\ 1 & 0 & h \end{vmatrix} = -(1-h)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = 1.$$

L'applicazione f_0^{-1} è rappresentata dalla matrice inversa di $F_0|_{S_3}$ che si può calcolare con l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Di conseguenza
$$F_0^{-1}|_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. La matrice che rappresenta f_1 è
$$F_1|_{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pertanto la sua immagine è generata dalla prima e terza colonna della matrice. Di conseguenza un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(f_1)$ è una combinazione
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione algebrica di $\mathbf{x}$ si ottiene eliminando i parametri t_1, t_2 :
$$\begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = -t_1 \\ z = t_1 + t_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t_1 = -y \\ t_2 = x + y \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana cercata è quindi $x - z = 0$.

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 25 Febbraio 2016		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,2,0,-1),(1,-2,-1,1)), \qquad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+t=0, x-y+z+2t=0\}.$$

i. Determinare una base di W ed una base di $U+W$.

ii. Dato il vettore $\mathbf{v} = (3,k,-1,k-3)$, determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} \in U$.

iii. Trova una base di un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

2. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$, consideriamo la sfera $S|_{\mathcal{B}_O}: \; x^2+y^2+z^2-6x=0$.

i. Determinare centro e raggio della circonferenza Γ intersezione di S con il piano di equazione $x=2$.

ii. Scrivere l'equazione del cono C con vertice $V|_{\mathcal{B}_O} = (4,0,0)$ e direttrice Γ.

iii. Riconoscere la conica intersezione del cono C col piano di equazione $y=x+2$.

3. Dato $h \in \mathbb{R}$, sia $f_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definito da $f_h(x,y,z) = (x-z, y+hz, x+y+3z)$.

i. Determinare la matrice F_h che rappresenta f_h rispetto alla base canonica.

ii. Trovare per quali h l'applicazione f_h é diagonalizzabile.

iii. Posto $h=0$, stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (0,2,1)$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f_0)$.

Soluzioni

1. i. W è il nucleo della matrice associata al sistema lineare:

$$W = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il sottospazio somma è generato dai due generatori di U e dai due vettori in $\mathcal{B}_W$. Andiamo a verificarne l'indipendenza lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pertanto i quattro vettori sono indipendenti e costituiscono una base di $U + W = \mathbb{R}^4$.

ii. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene ad U se può essere scritto come combinazione dei suoi generatori, e quindi se e solo se il seguente sistema lineare ammette soluzione

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & k \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & k-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & k-6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pertanto $\mathbf{v} \in U$ se e solo se $k = 2$.

iii. Osserviamo che dal punto i si ha $\mathbb{R}^4 = U + W$. Inoltre, per la formula di Grassman abbiamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 4 = 0$$

e quindi $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ e quindi possiamo prendere $V = W$.

2. i. Possiamo riscrivere l'equazione della sfera come

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

da cui il centro di S è il punto di coordinate $P|_{\mathcal{B}_O} = (3,0,0)^T$ mentre il suo raggio è $R = 3$. La distanza di P dal piano $x = 2$ è $d = 1$ e quindi, per il teorema di Pitagora, il raggio della circonferenza Γ è $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. La retta passante per P ed ortogonale al piano interseca il piano stesso nel punto $Q|_{\mathcal{B}_O} = (2,0,0)^T$, che corrisponde al centro di Γ.

ii. C è il luogo di punti S le cui coordinate $S|_{\mathcal{B}_O} = (x,y,z)^T$ si ottengono eliminando i parametri $S_0|_{\mathcal{B}_O} = (x_0, y_0, z_0)^T$ e t dal seguente sistema:

$$\begin{cases} [\overrightarrow{VS}] = t[\overrightarrow{VS_0}] \\ (x_0-3)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \\ x_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 4 = t\,(x_0 - 4) \\ y = t\,y_0 \\ z = t\,z_0 \\ (x_0-3)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \\ x_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = \frac{y}{t} \\ z_0 = \frac{z}{t} \\ t = \frac{x-4}{x_0-4} = \frac{4-x}{2} \\ 1 + \frac{y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2} = 9 \end{cases}.$$

Sostituendo nell'ultima equazione si ottiene

$$C|_{\mathcal{B}_O} : \; 2x^2 - y^2 - z^2 - 16x + 32 = 0.$$

iii. Chiamiamo $\mathcal{C}$ la conica ottenuta dall'intersezione di C con il piano $y = x + 2$. La classificazione di $\mathcal{C}$ si ricava studiando l'equazione ottenuta da C dopo aver sostituito $y = x + 2$:

$$2x^2 - (x+2)^2 - z^2 - 16x + 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - z^2 - 20x + 28 = 0.$$

Le matrici associate alla conica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & 0 & 28 \end{pmatrix},$$

da cui gli invarianti $I_1 = 0, I_2 = -1, I_3 = 72$. Segue che la conica è un'iperbole equilatera.

3. i. Per il teorema di rappresentazione, abbiamo

$$F_h|_{S_3} = (f_h(\mathbf{e_1})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_2})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_3})|_{S_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii. Il polinomio caratterstico di f_h è

$$P_h(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & h \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)-h)+(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4-h).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2+\sqrt{h}, \lambda_3 = 2-\sqrt{h}$.

- Se $h < 0$ l'applicazione non è diagonalizzabile.
- Se $h = 0$ abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

  Pertanto la molteplicità geometrica è minore di quella algebrica e l'applicazione non è diagonalizzabile.
- Se $h = 1$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$. L'autospazio associato è

$$V_1 = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

  Come prima, l'applicazione non è diagonalizzabile.
- Se $h > 0$ ed $h \neq 1$ allora gli autovalori sono reali e distinti e quindi f_h è diagonalizzabile.

iii. Il nucleo di f_0 non è banale se e solo se 0 è un autovalore. Dato che ciò non è vero, segue che l'applicazione è iniettiva e quindi, per il teorema del rango, anche suriettiva. Pertanto qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ appartiene all'immagine dell'applicazione.

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 07 Luglio 2016		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Consideriamo il sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} x + y - hz = 4 \\ y + hz = h + 1 \end{cases}.$$

Fissiamo un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ le cui coordinate sono x, y, z.

i. Provare che per ogni h il sistema descrive una retta r_h e se ne calcoli una rappresentazione parametrica.

ii. Trovare i valori di h per cui r_h è parallela, ma non contenuta, al piano $\pi_h|_{\mathcal{B}_O}\ :\ hx+(h-1)y-2z = h+1$.

iii. Riconoscere la superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione di r_1 rispetto ad r_0 e scrivere una sua forma canonica.

2. Consideriamo la matrice dipendente dal parametro reale h

$$A_h = \begin{pmatrix} h & h+1 & 0 \\ 2h & 1 & h-1 \\ 2h-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i. Trovare i valori di h per cui A_h è ortogonalmente diagonalizzabile.

ii. Per i valori del punto precedente, diagonalizzare A_h e scrivere la corrispondente matrice diagonalizzante.

iii. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$, si classifichi e si porti in forma canonica la conica

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O}\ :\ (x \quad y \quad 1) \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

determininando anche l'eventuale centro e gli assi di simmetria.

3. Si consideri il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da $x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0$.

i. Determinare la dimensione di V ed una sua base.

ii. Dati $\mathbf{u} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$ e $\mathbf{w} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$, dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

iii. Verificare l'esistenza ed unicità di $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tale che

$$f(\mathbf{u}) = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T, \qquad f(\mathbf{w}) = (1 \quad 1 \quad -1 \quad -1)^T, \qquad \ker(f) = V.$$

Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica S di $\mathbb{R}^4$.

Soluzioni

1. i. La matrice associata al sistema lineare è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -h & 4 \\ 0 & 1 & h & h+1 \end{array}\right),$$

il cui rango è 2 per ogni h. Per il teorema di Rouchè–Capelli, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e quindi geometricamente corrisponde ad una retta. La rappresentazione parametrica di r_h si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$r_h|_{\mathcal{B}_O}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-h \\ 1+h \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii. Sostituiamo la rappresentazione parametrica di r_h nell'equazione del piano. Dopo aver semplificato, otteniamo l'equazione

$$2h - 2 + (h^2 + h - 2)t = 0.$$

Questa non ha soluzione se, e solo se,

$$\begin{cases} h^2 + h - 2 = 0 \\ 2h - 2 \neq 0 \end{cases}$$

e quindi se, e solo se, $h = -2$. Pertanto la retta r_{-2} è l'unica ad essere parallela al piano π, ma non contenuta in esso.

iii. L'asse di rotazione ha descrizione parametrica

$$r_0|_{\mathcal{B}_O}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi è parallelo all'asse z ed è descritto dalle equazioni $x = 3,\ y = 1$. Dato il punto $P_0 \in r_1$ di coordinate $(x_0\ y_0\ z_0)^T$, il generico punto P di coordinate $(x\ y\ z)^T$ appartiene alla superficie di rotazione se, e solo se, le sue coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = (x_0-3)^2 + (y_0-1)^2 \\ z = z_0 \\ x_0 = 2 + 2t \\ y_0 = 2 - t \\ z_0 = t \end{cases}.$$

Eliminando x_0, y_0, z_0, t otteniamo l'equazione della superficie

$$\mathcal{S}|_{\mathcal{B}_O}: \quad x^2 + y^2 - 5z^2 - 6x - 2y + 6z + 8 = 0.$$

La matrice completa della quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo $I_4 = 1$ e $I_3 = -5$. Segue che una forma canonica di $\mathcal{S}$ è

$$X^2 + Y^2 - 5Z^2 - \frac{1}{5} = 0$$

e quindi $\mathcal{S}$ è un iperboloide iperbolico.

2. i. A_h è ortogonalmente diagonalizzabile se, e solo se, è simmetrica e quindi se, e solo se, $h = 1$.

ii. Il polinomio caratteristico di A_1 è

$$P_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-4) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda).$$

Gli autospazi relativi ai tre autovalori $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$ sono:

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Di conseguenza la matrice diagonalizzante è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la corrispondente matrice diagonale è

$$D = Q^T A_1 Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. L'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_\mathcal{O}}: \quad x^2 + y^2 + 4xy + 1 = 0.$$

Gli invarianti metrici della conica sono $I_1 = 2,\ I_2 = -3,\ I_3 = -3$, da cui segue che $\mathcal{C}$ è un'iperbole. Una sua forma canonica è

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}'_\mathcal{O}}: \quad 3X^2 - Y^2 + 1 = 0.$$

Dato che rispetto a $\mathcal{B}_\mathcal{O}$ non compaiono termini lineari nell'equazione di $\mathcal{C}$, per ottenere il sistema di riferimento canonico $\mathcal{B}'_\mathcal{O}$ è sufficiente effettuare la rotazione degli assi che diagonalizza la matrice dei termini di secondo grado. Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Il centro dell'iperbole è l'origine, mentre gli assi di simmetria sono le due rette bisetrici dei quattro quadranti.

3. i. Lo spazio V corrisponde a

$$V = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi $\dim(V) = 2$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_V = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Chiamiamo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ i due vettori di $\mathcal{B}_V$.

ii. $\mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \oplus V$ se, e solo se, $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{u}\} \cup \mathcal{B}_V$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Questo è confermato dallo studio del rango della matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{u} & \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è ovviamente 4.

iii. Essendo f definita sui vettori della base $\mathcal{B}$, l'esistenza ed unicità seguono dal teorema di interpolazione. La matrice che rappresenta f rispetto alla coppia di basi $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza ed S dello spazio di arrivo è immediata:

$$F|_{\mathcal{B},S} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{w})|_S & f(\mathbf{u})|_S & f(\mathbf{v_1})|_S & f(\mathbf{v_2})|_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la regola del cambiamento di base abbiamo

$$F|_S = F|_{\mathcal{B},S}\, M|_{S,\mathcal{B}}.$$

La matrice del cambiamento di base $M|_{S,\mathcal{B}}$ la si ottiene invertendo

$$M|_{\mathcal{B},S} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}|_S & \mathbf{u}|_S & \mathbf{v_1}|_S & \mathbf{v_2}|_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'algoritmo di Gauss–Jordan abbiamo:

$$(M|_{\mathcal{B},S}|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_4|M|_{S,\mathcal{B}})\,.$$

Quindi

$$F|_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 28 Settembre 2016		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Si consideri il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ definito da $x - y + 3z - t = 0$.

   i. Dopo aver verificato che $\mathbf{u_1} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$ e $\mathbf{u_2} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad -2)^T$ sono vettori linearmente indipendenti ed appartenenti ad U, trovare $\mathbf{u_3} \in U$ tale che $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ sia una base di U.

   ii. Costruire una base ortonormale di U.

   iii. Dato il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{w_1} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)^T$ e $\mathbf{w_2} = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)^T$, determinare una base di $U \cap W$.

2. Consideriamo la matrice dipendente dal parametro reale h

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   i. Calcolare gli autovalori di A_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

   ii. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile sul campo reale.

   iii. Per $h = 0$ trovare una matrice Q tale che $Q^{-1} A_0 \, Q$ sia diagonale.

3. In un sistema di riferimento ortonormale, consideriamo la conica $\mathcal{C}$ definita dal sistema:

$$\begin{cases} 2xz + y^2 - z^2 + x - 1 = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

   i. Riconoscere tale conica.

   ii. Scrivere l'equazione del cono che ammette $\mathcal{C}$ come direttrice ed il cui vertice ha coordinate $(0, 0, 1)^T$.

   iii. Verificare che il cono del punto precedente è una quadrica di rotazione e trovarne il corrispettivo asse.

Soluzione

1. i. I vettori $\mathbf{u_1} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$ e $\mathbf{u_2} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad -2)^T$ appartengono ad U in quanto le loro componenti soddisfano l'equazione $x - y + 3z - t = 0$ che è l'equazione cartesiana di U. Inoltre non esiste alcun $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u_1} = k\mathbf{u_2}$ e pertanto i due vettori sono linearmente indipendenti. U essendo definito da una sola equazione lineare ha dimensione 3 e il suo generico vettore è

$$\mathbf{u} = (h - 3k + l \quad h \quad k \quad l)^T \text{ con } h,\ k,\ l \in \mathbb{R}.$$

Prendendo $h = l = 0,\ k = 1$ otteniamo il vettore $\mathbf{u_3} = (-3 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T$ che non può essere scritto come combinazione lineare di $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2}$ in quanto ha terza componente diversa da 0, pertanto $\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}\}$ è una base di U.

ii. Si verifica immediatamente che i vettori $\mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$ del punto precedente sono fra loro ortogonali. Pertanto per trovare una base ortogonale di U basta usare il procedimento di Gram-Schmidt su $\mathbf{u_1}$. Un vettore ortogonale a $\mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$ è quindi

$$\mathbf{v} = \mathbf{u_1} - \frac{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle}{\|\mathbf{u_2}\|^2}\mathbf{u_2} - \frac{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_3}\rangle}{\|\mathbf{u_3}\|^2}\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{-3}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/2 \\ 3/10 \\ 1/2. \end{pmatrix}$$

Per trovare una base ortonormale, basta moltiplicare ogni vettore della base ortogonale per l'inverso della sua norma. Una base ortonormale è dunque

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{60}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base ortogonale di U si può anche trovare imponendo al generico vettore di U di essere ortogonale a $\mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$. Si ha

$$\begin{cases} h - l = 0, \\ -3h + 9k - 3l + k = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad h = l = 10,\ k = 6,$$

quindi una base ortogonale è $\{\mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3},\ (2 \quad 10 \quad 6 \quad 10)^T\}$.

iii. Un vettore $\mathbf{w}$ appartiene al sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{w_1} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)^T$ e $\mathbf{w_2} = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)^T$, se e solo se $\mathbf{w} = a\mathbf{w_1} + b\mathbf{w_2}$ per qualche $a,\ b \in \mathbb{R}$. Un vettore appartenente a $U \cap W$ deve quindi soddisfare alla condizione $a\mathbf{w_1} + b\mathbf{w_2} = (h - 3k + l \quad h \quad k \quad l)^T$. Si trova quindi un sistema lineare omogeneo di quattro equazioni nelle cinque incognite $a,\ b,\ h,\ k,\ l$:

$$\begin{cases} h - 3k + l = 0, \\ b - h = 0, \\ a - b - k = 0, \\ a - l = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

che ammette ∞^1 soluzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ h \\ k \\ l \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto una base di $U \cap W$ è $\{(0 \quad 1 \quad 1 \quad 2)^T\}$.

2. i. Il polinomio caratteristico della matrice A_h è

$$P_h(\lambda) = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(-3 - \lambda) - h] = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3 - h).$$

Gli autovalori di A_h sono allora $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1 + \sqrt{4 + h},\ \lambda_3 = -1 - \sqrt{4 + h}$.

ii. In primo luogo osserviamo che i due autovalori λ_2, λ_3 sono complessi coniugati per $h < 4$, pertanto A_h non è diagonalizzabile sul campo reale. Per $h \geq 4$, abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3$ se e solo se $h = -4$, mentre $\lambda_3 \neq \lambda_1$, in quanto $-1 - \sqrt{4+h} \leq 0$. Da ultimo si ha $\lambda_1 = \lambda_2$ se e solo se $h = 5$. Quindi, per $h > 4$ e $h \neq 5$ gli autovalori sono distinti e la matrice è diagonalizzabile. Studiamo a parte i due casi particolari.

- $h = 4$: abbiamo $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. L'autovalore 2, essendo semplice, è regolare, l'autovalore -1 ha molteplicità geometrica data da

$$3 - rk\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = 3 - rk\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

  e quindi non è regolare. La matrice perciò non è diagonalizzabile.

- $h = 5$: abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -4$. L'autovalore -4, essendo semplice, è regolare, l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica data da

$$3 - rk\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\right) = 3 - rk\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

  e quindi non è regolare. La matrice perciò non è diagonalizzabile.

iii. La matrice A_0 ha come autovalori $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -3$. Gli autovettori associati all'autovalore 2 sono le soluzioni del sistema lineare $(A_0 - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi $\{(h \quad 0 \quad 0)^T \,|h \neq 0\}$, quelli associati all'autovalore 1 sono le soluzioni del sistema lineare $(A_0 - I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ovvero $\{(k \quad 4k \quad k)^T \,|k \neq 0\}$, infine quelli associati all'autovalore -3 sono le soluzioni del sistema lineare $(A_0 + 3I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cioè $\{(3t \quad 0 \quad t)^T \,|t \neq 0\}$. La matrice diagonalizzante ricercata è pertanto

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. i. Il sistema:

$$\begin{cases} 2xz + y^2 - z^2 + x - 1 = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} y^2 + 3z^2 + 2z - 1 = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

la cui prima equazione rappresenta un cilindro avente la conica $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele all'asse x. Il sistema

$$\begin{cases} y^2 + 3z^2 + 2z - 1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

rappresenta dunque la proiezione ortogonale $\mathcal{C}'$ della conica $\mathcal{C}$ sul piano yz. Studiamo gli invarianti per la conica $\mathcal{C}'$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 3 > 0,\ I_1 I_3 = 4 \cdot (-4) = -16 < 0.$$

Quindi $\mathcal{C}'$ è un'ellisse con punti reali e pertanto anche $\mathcal{C}$ è un'ellisse con punti reali (eventualmente una circonferenza).

ii. Il cono che ammette $\mathcal{C}$ come direttrice ed il cui vertice ha coordinate $(0, 0, 1)^T$, può essere rappresentato dalle seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = 1 + (z_0 - 1)t, \\ x_0 = 2z_0, \\ 3z_0^2 + y_0^2 + 2z_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Si tratta quindi di eliminare i parametri t, x_0, y_0, z_0. Dalla prima, seconda e quarta equazione otteniamo

$$t = \frac{x - 2z + 2}{2}.$$

Quindi, dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$y_0 = \frac{2y}{x - 2(z-1)} \qquad \text{e} \qquad z_0 = 1 + \frac{2(z-1)}{x - 2(z-1)}.$$

Sostituendo nell'ultima equazione, otteniamo la descrizione cartesiana del cono

$$3\left(1 + \frac{2(z-1)}{x-2(z-1)}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x-2(z-1)}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{2(z-1)}{x-2(z-1)}\right) - 1 = 0,$$

che è equivalente a

$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0.$$

iii. L'intersezione del cono appena trovato con un piano perpendicolare all'asse z è una circonferenza. Infatti, il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0, \\ z = k \end{cases}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (k-1)^2, \\ z = k. \end{cases}$$

La congiungente il centro della circonferenza con il vertice del cono risulta essere l'asse z, che è perpendicolare al piano della circonferenza. Pertanto il cono è circolare retto e l'asse z è il suo asse.

Alternativamente, cerchiamo gli autovalori della matrice associata ai termini di secondo grado dell'equazione del cono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente essi sono 1 con molteplicità algebrica 2 e -1. L'esistenza di un autovalore non nullo doppio implica che la quadrica è di rotazione. Inoltre, l'autovettore relativo all'autovalore semplice ha la direzione dell'asse, che risulta essere quindi l'asse coordinato z.