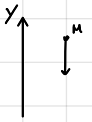
5.3 TEOREMA ENERGIA CINETICA (FORZE VIVE)

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_T \hat{u}_T \cdot ds\, \hat{u}_T + \cancel{F_N \hat{u}_N \cdot ds\, \hat{u}_T} = F_T ds = m a\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m\, dv \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{m v\, dv}$$

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_A^B dL = \int_{v_A}^{v_B} m v\, dv = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \underline{\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_B^2}$$

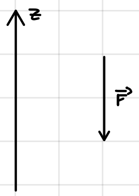
Si definisce energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Quindi $L^{\gamma}_{AB} = \Delta E_c$.
L'energia cinetica ha unità di misura pari al lavoro (Joule)

5.4 LAVORO FORZA PESO, FORZA COSTANTE E FORZE CONSERVATIVE



$$\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{j}$$

$$L = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -m \cdot g\, \underbrace{\hat{j}\cdot d\vec{r}}_{dy} = -mgh$$ ⇒ il lavoro della forza peso non dipende dal cammino

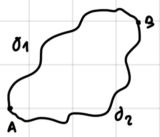


$z \parallel \vec{F}$ discorde in verso.

$$L = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\, \hat{k}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\, dz = -mg(z_b - z_a)$$

Possiamo definire questo tipo di forza come FORZA CONSERVATIVA: $\vec{F}$ conservativa se $L^{\gamma_1}_{AB} = L^{\gamma_2}_{AB} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$
Possiamo anche definire una forza conservativa osservando che:

$\vec{F}$ cons. $\rightarrow L^{\gamma_1}_{AB} = L^{\gamma_2}_{AB} \rightarrow L^{\gamma_1}_{AB} - L^{\gamma_2}_{AB} = L^{\gamma_1}_{AB} + L^{\gamma_2}_{BA} = 0$ ma $\gamma_1 + \gamma_2$ è un percorso chiuso



$$\downarrow$$
$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

il lavoro lungo un percorso chiuso è detto circuitazione

Il contrario si dimostra in modo equivalente.

Quindi una forza è conservativa se e solo se ha circuitazione nulla.

5.5 ENERGIA POTENZIALE

Se una forza è conservativa, contano solo i punti A e B. Allora esso dipende da una proprietà dei punti A e B. Quindi deve esistere una funzione di stato, chiamata energia potenziale, tale che:

$$dL = -dE_p \quad \text{con} \quad E_p(x,y,z)$$
$$\downarrow$$
$$L_{AB} = \int_A^B -dE_p = -(E_{pB} - E_{pA})$$

5.6 CONSERVATIVITÀ DELLE FORZE

5.6.1 FORZA ELASTICA

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_{A\gamma}^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma}^B -Kx\, \underbrace{\hat{u}_x \cdot d\vec{r}}_{dx} = -K \int_A^B x\, dx = -\left(\frac{1}{2} K x_b^2 - \frac{1}{2} K x_A^2\right) \rightarrow E_p = \frac{1}{2} K x^2$$

5.6.2 FORZA GRAVITAZIONALE E CENTRALI A SIMMETRIA SFERICA

La forza gravitazionale è una forza centrale a simmetria sferica:
- la direzione è la retta congiungente il centro della forza con il punto
- il modulo dipende solo dalla distanza dei due punti.

Le osservazioni fatte per questa classe di forze vale anche per la gravitazionale e viceversa.

$$L^{g}_{AB} = \int_{A\,g}^{B} \underbrace{f(r)\,\hat{u}_{r}}_{-g\frac{m_1 m_2}{r'^2}} \cdot d\vec{r} = \int_{A}^{B} -\frac{m_1 m_2}{r'^2}\,dr' = -g m_1 m_2 \int_A^B \frac{1}{r^2}\,dr = -\left(\frac{g m_1 m_2}{r_B} + \frac{g m_1 m_2}{r_A}\right) \rightarrow E_p = -g\frac{m_1 m_2}{r}$$

5.6.3 FORZA ATTRITO RADENTE

$$L^{g}_{AB} = \int_{A\,g}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,g}^{B} -\mu_D N\,\hat{u}_v \cdot dr = \int_{A\,g}^{B} -\mu_D N\,\hat{u}_T \cdot ds\,\hat{u}_T = -\mu_D N \int_{A\,g}^{B} ds \rightarrow \text{non è conservativa}$$

5.7 CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

Date forze conservative sappiamo che: $L^{g}_{AB} = E_c^B - E_c^A$ e $L_{AB} = -(E_p^B - E_p^A)$. Quindi avremo:

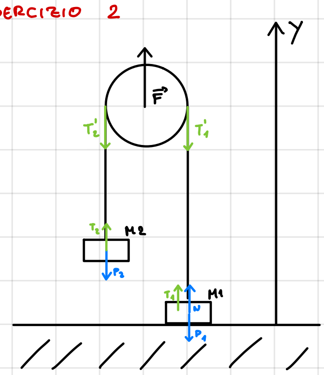
$$E_c^B + E_p^B = E_c^A + E_p^A$$

Deve allora esistere una grandezza costante del moto pari alla somma di energia cinetica e potenziale: l'energia meccanica.

Questo è detto teorema dell'energia meccanica.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2



$$\begin{cases} -m_1 g + N + \cancel{T_1}^{T} = \cancel{m_1 a_1}^{0} \text{ per Hp} \\ -m_2 g + \cancel{T_2}^{T} = m_2 a_2 \\ F - \cancel{T_1'}^{T} - \cancel{T_2'}^{T} = \cancel{m_c a_c}^{0} \text{ per Hp} \end{cases}$$

$T = T_1 = T_1' = T_2 = T_2'$ perché la fune è inestensibile

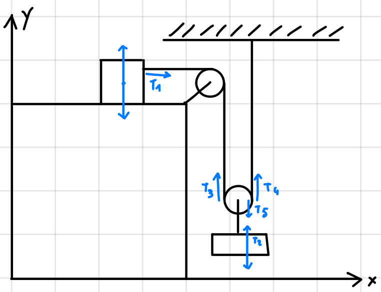
$$\downarrow$$

$$\begin{cases} -m_1 g + N + T = 0 \\ -m_2 g + T = m_2 a_2 \\ F = 2T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m_1 g + N + F/2 = 0 \\ \sim \\ T = F/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = m_1 g + F/2 \\ \sim \\ \sim \end{cases}$$

$N \geq 0$ $\quad$ $N \geq 0$ $\quad$ $N \geq 0$

$F \leq 2 m_1 g \rightarrow$ il max è $F = 2 m_1 g$

ESERCIZIO 4

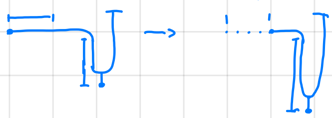


$$\begin{cases} \begin{cases} T_1 = m_1 a_{1x} \\ N - m_1 g = \cancel{m_1 a_{1y}} \end{cases} \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y} \\ T_3 + T_4 - T_5 = \cancel{m_c a_{cy}} \end{cases}$$

$T = T_1 = T_3 = T_4$, $T' = T_2 = T_5$ perché fune ideale

$\Delta y = -\frac{1}{2}\Delta x \rightarrow a_{2y} = -\frac{1}{2} a_{1x}$

(visto che la fune ha lunghezza fissa, quindi bisogna contare come la lunghezza si ripartisce:



$$\begin{cases} T = m_1 a_{1x} \\ N = m_1 g \\ T' - m_2 g = -m_2 \frac{1}{2} a_{1x} \\ T' = 2T \end{cases} \rightarrow 2T - m_2 g = -\frac{1}{2} m_2 a_{1x} \rightarrow 2 m_1 a_{1x} - m_2 g = -\frac{1}{2} m_2 a_{1x}$$

$$(2 m_1 + \tfrac{1}{2} m_2)\, a_{1x} = m_2 g \rightarrow a_{1x} = \frac{m_2 g}{2 m_1 + \frac{1}{2} m_2}, \quad a_{2x} = -\frac{m_2 g}{4 m_1 + m_2}$$