LEZIONE GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 17 OTTOBRE

Applicazioni Lineari

La definizione è già stata data in precedenza. Un'applicazione lineare importante è la mappa delle componenti. Anche la traccia è un'applicazione lineare.

Esempi di applicazioni lineari:

1) Sia $A \in Mat(m, n; \mathbb{K})$, l'applicazione naturale associata è $f_A: \begin{array}{l} Mat(n,1;\mathbb{K}) \to Mat(m,1;\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array}$. Anch'essa è un'applicazione lineare.
2) Considerando $\mathbb{R}[x]$, la derivata di un polinomio è un applicazione lineare (per definizione). Osservazione: una volta che conosco la derivata di una base, conosco la derivata di ogni polinomio (per definizione di base).

Nucleo ed Immagine di un'applicazione (5.2)

Lo studio di nucleo e immagine di un'applicazione lineare ci permette di estrapolare numerose caratteristiche della nostra applicazione.

DEFINIZIONE: $f \in Hom(V, W)$, $Ker(f) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = 0_W \} \subseteq V$

$f \in Hom(V, W)$, $Im(f) = \{ \underline{w} \in W \mid \underline{w} = f(\underline{v}) \ \forall \underline{v} \in V \} \subseteq W$.

PROPRIETÀ. Sia il nucleo che l'immagine di un'applicazione sono sottospazi di V e W rispettivamente.

DIM.: Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in Ker(f)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$. Dimostriamo che $t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 \in Ker(f)$: $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) = t_1 \cdot \underline{0}_v + t_2 \cdot \underline{0}_v = 0_v$.
Dimostriamo che lo 0 è contenuto: $f(0_v) = f(\underline{v} - \underline{v}) = f(\underline{v}) - f(\underline{v}) = 0_W \Rightarrow 0_v \in Ker(f)$. Per l'immagine la dimostrazione è analoga.

ESEMPI: $Ker(f_A) = Ker(A)$; $Im(A) = C(A)$

Struttura delle controimmagini (5.6)

Presa $f \in Hom(V, W)$, sia $\underline{w} \in Im(f)$ e $\underline{v}_p \in f^{-1}(\underline{w}) \Rightarrow f^{-1}(\underline{w}) = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_0 \text{ dove } \underline{v}_0 \in Ker(f) \}$.

DIM. $\underline{v} \in f^{-1}(\underline{w})$ se e solo se $f(\underline{v}) = \underline{w}$ se e solo se $f(\underline{v}) - \underline{w} = \underline{w} - \underline{w}$ se e solo se $f(\underline{v}) - f(\underline{v}_p) = \underline{0}_W$ se e solo se $f(\underline{v} - \underline{v}_p) = 0_W$ se e solo se $\underline{v} - \underline{v}_p \in Ker(f)$.

COROLLARIO f è iniettiva se e solo se $Ker(f) = \{ \underline{0}_v \}$ (ciò significa che esiste solo un vettore $\underline{v}$: $f(\underline{v}) = 0_v$. Non fosse così, ci sarebbero più controimmagini di 0_v, violando la definizione di iniettività.)

ALGEBRA DELLE APPLICAZIONI LINEARI

SOMMA DI FUNZIONI: Viene definita somma $(f_1+f_2)(\underline{v}) = f_1(\underline{v}) + f_2(\underline{v})$.

PRODOTTO DI FUNZIONI: Viene definito prodotto $(t f_1)(v) = t \cdot f_1(v_1)$

La struttura algebrica $(\mathrm{Hom}(V,W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ è <u>anch'essa uno spazio vettoriale</u>.

DIM.: Verifichiamo che la funzione somma $f_1+f_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$ se $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Svolgiamo i seguenti passi algebrici

$(f_1+f_2)(t_1v_1+t_2v_2) = f_1(t_1v_1+t_2v_2) + f_2(t_1v_1+t_2v_2) = t_1 f_1(v_1) + t_2 f_1(v_2) + t_1 f_2(v_1) + t_2 f_2(v_2) = t_1(f_1(v_1)+f_2(v_1)) + t_2(f_1(v_2)+f_2(v_2)) = t_1(f_1+f_2)(v_1) + t_2(f_1+f_2)(v_2)$

Analogamente $(tf)(t_1v_1+t_2v_2) = t_1(tf)(v_1) + t_2(tf)v_2 \Rightarrow (tf) \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

OPERAZIONI: Le proprietà delle operazioni si verificano facilmente. Gli elementi notevoli sono:

1) $0_{VW}: \begin{array}{l} V \to W \\ v \mapsto 0_W \end{array}$ è l'elemento neutro della somma

2) $-f: \begin{array}{l} V \to W \\ v \mapsto -v \end{array}$ è l'inverso della somma.

ESEMPIO: Se consideriamo A ed f_A, studiando le operazioni su f_A, possiamo definire una nuova applicazione,

$\Upsilon: \begin{array}{l} \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}(V,W) \\ \quad A \longmapsto f_A \end{array}$. Υ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

COMPOSIZIONE: Tra funzioni esiste una terza operazione: la composizione: $f \circ g = f(g)$. Anche la composizione ha alcune proprietà interessanti

1) se f e g sono lineari, anche $g \circ f$ lo sarà

2) gode dell'associatività

3) gode della distributività con la somma

4) è omogenea rispetto al prodotto

5) $\mathrm{Id}_W \circ f = f$, $f \circ \mathrm{Id}_V = f$

Le proprietà della composizione la fanno assomigliare molto al prodotto matriciale:

$$\overset{W}{x} \xrightarrow[f_B]{} \overset{U}{f_B(x)} \xrightarrow[f_A]{} \overset{V}{f_A(f_B(x))}$$

$W = \mathrm{Mat}(p,1,\mathbb{K})$ $U = \mathrm{Mat}(n,1,\mathbb{K})$ $V = \mathrm{Mat}(m,1,\mathbb{K})$

$A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n,p,\mathbb{K})$.

$\Upsilon(AB) = \Upsilon(A) \circ \Upsilon(B) \Rightarrow \Upsilon$ è un OMOMORFISMO DI ALGEBRA

$(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = f_{AB}(x) \Rightarrow (f_A \circ f_B)(x) = f_{AB}(x) \Rightarrow$ la composizione di funzioni corrisponde al prodotto tra matrici

$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$