Criterio del rapporto o della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ o $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se

1) $b > 1 \Rightarrow$ a_n non tende a 0, quindi la serie diverge

2) $b < 1 \Rightarrow$ a_n tende a 0, quindi la serie converge.

3) $b = 1 \Rightarrow$ NULL

DIM. RAD) Sia $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se $b > 1$, allora $\lim a_n = +\infty$. Se $b < 1$, esiste $q \in \mathbb{R}$ compreso tra b e 1 $b < q < 1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |\sqrt[n]{a_n} - b| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - b < \varepsilon \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q \rightarrow a_n < (\varepsilon + q)^n$. Per ε piccolo, $\varepsilon + q < 1$. Usando il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (q+\varepsilon)^n$ è una serie geometrica che converge. Poiché a_n è minorata da $(q+\varepsilon)^n$, anche a_n converge.

RAP) Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Esiste allora $b < q < 1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |\frac{a_{n+1}}{a_n} - b| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - b < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q$. Poiché lavoriamo con termini positivi, abbiamo che: $a_{n+1} < a_n(\varepsilon + q)\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0+1} < a_{n_0}(\varepsilon + q)$, $a_{n_0+2} < a_{n_0+1}(\varepsilon + q) < a_{n_0+1}(\varepsilon + q)^2$. Così possiamo dire che $a_k < (\varepsilon + q)^{k-n_0} a_{n_0}\ \forall k > n_0$. Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon + q)^{k-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{(\varepsilon+q)^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon - q)^k$. La serie è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge. Di conseguenza anche a_n converge in quanto minorata da una serie convergente.

Criterio di Condensazione (sostituzione)

Sia una serie a termini positivi con a_n non crescente. La serie converge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

Divergenza Serie Armonica

Consideriamo $b_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Supponiamo che definitivamente $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e$ $(\forall k > \bar{k})$. Avremo $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq \ln e \rightarrow k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 1 \rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \rightarrow \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k} \rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{\ln k+1 - \ln k \leq \frac{1}{k}}_{\text{Succ. telescopica}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow$ la serie $\ln(k+1) - \ln(k)$ diverge. Anche $\frac{1}{k}$, allora divergerà $\forall k > \bar{k}$

$-(\ln k - \ln k+1) \Rightarrow -(-\ln k+1) = \ln(k+1)$

Serie Armonica Generalizzata

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per $\alpha \leq 1$ la serie diverge e per $\alpha > 1$ la serie converge

DIM: Se $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ perché $n^\alpha \leq n$. Allora per il criterio del confronto la serie diverge.

Se $\alpha > 1$, definiamo la successione delle somme parziali $S_k = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \dots\right. \leq 1 + 2\frac{1}{2^\alpha} + 4\frac{1}{4^\alpha} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots = \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p$

$S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \leq \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p \Rightarrow \lim \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \lim \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p$. Il secondo, però, è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, quindi converge. Perciò, per criterio del confronto anche S_k converge e quindi la serie converge.