Gravitazione.

1. Un satellite artificiale orbitante attorno alla Luna (raggio lunare R_L = 1740 km) lungo un'orbita circolare di raggio pari a due volte il raggio lunare, ha periodo di rotazione pari a 307 minuti. Determinare la accelerazione di gravità sulla superficie lunare, g_L.
[g_L = 1.62 m/s^2]

2. Si vuole portare un satellite artificiale su un'orbita circolare ad una quota h sulla superficie terrestre. Considerando la rotazione della Terra, si calcoli il lavoro minimo necessario se il satellite viene lanciato dall'equatore o dal polo. Si consideri la Terra come una sfera omogenea e si trascurino gli attriti. Si esprimano i risultati in funzione della massa m del satellite, della quota h, della costante di gravitazione universale γ, della massa della Terra M_T, del suo raggio R_T e del suo periodo di rotazione T.
[$L_{polo} = \gamma m M_T/(2R_T+2h) + \gamma m M_T\, h/[R_T(R_T+h)]$, $L_{eq} = L_{polo} - 2\pi^2 m R_T^2/T^2$]

3. Dalla superficie di un pianeta sferico (privo di atmosfera e non rotante) di massa M e raggio R viene lanciato un veicolo spaziale con una velocità iniziale $v_0 = 3/4\sqrt{(2\gamma M/R)}$. Si calcoli la massima distanza H_1 dalla superficie del pianeta raggiunta dal veicolo nel caso in cui la velocità iniziale sia normale alla superficie del pianeta. Si calcoli inoltre la distanza massima H_2 nel caso in cui la velocità iniziale sia tangente alla superficie del pianeta.
[H_1 = 9/7 R; H_2 = 2/7 R]

4. Un corpo viene lanciato dalla superficie di un pianeta di massa *M* e raggio *R* lungo una direzione tangente alla superficie con una velocità

$$v_0 = \sqrt{\frac{3\gamma M}{2R}},$$

dove γ è la costante di gravitazione universale. Trascurando la rotazione del pianeta e l'attrito si calcoli la massima distanza dal centro del pianeta che il corpo raggiunge.

$$\left[R_1 = \frac{R}{\frac{2\gamma M}{R v_0^2} - 1} = 3R \right]$$

5. Un satellite descrive un'orbita ellittica intorno alla terra con distanza del perigeo d_P, = 500 km e distanza dell'apogeo d_A = 3000 km. Calcolare la velocità del satellite nel punto di apogeo e nel punto di perigeo, sapendo che la massa terrestre è pari a 5.98 10^{24} kg ed il raggio terrestre è pari a 6.37 10^6 m.
[v_A = 6 10^3 m/s, v_P = 8.18 10^3 m/s]

6. Una particella di massa m sottoposta alla forza $\mathbf{F} = k\mathbf{r}/r^6$ con k costante è in moto uniforme lungo una circonferenza di raggio R e centro in $\mathbf{r}$ = 0. Calcolare il segno di k ed il periodo del moto; inoltre, se il campo è conservativo calcolare l'espressione dell'energia meccanica, ponendo nulla l'energia potenziale all'infinito.
Che cosa cambierebbe se la forza fosse data da $\mathbf{F} = \beta r^2 \mathbf{r}$
[k<0 ; $T = 2\pi R^3 (m/-k)^{1/2}$; il campo è conservativo; $E_m = -k/4R^4 > 0$; $\beta<0$, in quanto il campo di forze è centrale; $T = 2\pi /R\ (m/ |\beta|)^{1/2}$; $E_m = - 3\ \beta\ R^4/ 4$]

7. Tre corpi di massa m si muovono per effetto dell'interazione gravitazionale lungo un'orbita circolare mantenendosi ai vertici di un triangolo equilatero di lato b. Si determini il periodo di rivoluzione in funzione di m, b e della costante di gravitazione universale γ.
[$T = 2\pi\ (b^3/ 3\gamma m)^{1/2}$]

8. Un meteorite, inizialmente a grande distanza (si consideri ∞) con velocità trascurabile, si avvicina alla Terra. Alla distanza *R* dalla Terra, la sua velocità forma un angolo α rispetto alla congiungente con la Terra. Si determini la minima distanza dalla Terra raggiunta dal meteorite e si indichi il tipo di traiettoria seguita.
[Esprimere il risultato in funzione di *R* e α]
[$R_0 = R\sin^2\alpha$. La traiettoria è una parabola]

9. Un satellite artificiale di massa *m* è in orbita circolare attorno alla Terra (massa *M*) con periodo orbitale T_0. Si calcoli il lavoro necessario per portarlo su una nuova orbita circolare con periodo orbitale $T_1 = 8T_0$.

10. Due stelle di pari massa ruotano di moto circolare con periodo T attorno al loro centro di massa, mantenendosi ad una distanza d. Si calcoli la massa complessiva delle due stelle in funzione di T, d e della costante di gravitazione universale γ.

$$\left[m_{tot} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{d^3}{\gamma} \right]$$

11. Un satellite artificiale è in orbita *circolare* attorno alla Terra (massa M_T) a una distanza dal centro della Terra uguale a *due volte* il raggio terrestre R_T. Si calcoli:

a) il lavoro compiuto dalla forza di gravità terrestre in metà rivoluzione,
b) la velocità del satellite.
c) Supponendo che il satellite venga fermato e cada verso la Terra, si calcoli la velocità nell'istante in cui arriva al suolo. (Trascurare la rotazione terrestre e gli effetti dell'atmosfera. Esprimere i risultati in funzione di R_T, M_T e della costante di gravitazione universale γ.)

$$\left[a)\ L = 0J; \quad b) v = \sqrt{\gamma \frac{M}{2R_T}}; \quad c) v_f = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_T}} \right]$$

12. In un modello atomico semplificato dell'atomo di idrogeno, un elettrone ruota attorno ad un protone ad una distanza pari a $a_0 = 0.53 \cdot 10^{-10} m$. Calcolare il lavoro che deve essere compiuto al sistema per liberare l'elettrone.
[L=$2.17 \cdot 10^{-18}\, J$]