Teoremi sulle funzioni continue

Conseguenze

1) Se una funzione è crescente/decrescente in $[a;b]$, allora $\exists f^{-1}$ ed essa è continua

Per il teorema dei valori intermedi e per la definizione di cr/decr. allora possiamo affermare che f è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: [f(a); f(b)] \to [a;b] \subseteq \mathbb{R}$ $(f\ cr.)$ anch'essa continua e crescente.

Massimo e Minimo Assoluti

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>non necessariamente continua</u>. Preso $x_0 \in A$ esso è:

1) punto di <u>massimo assoluto</u> se $\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$
2) punto di <u>minimo assoluto</u> se $\forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$

Teorema di Weierstrass

Sia $f: \overbrace{[a;b]}^{\text{COMPATTO} \to \text{INS. CHIUSO E LIM.}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f ammette almeno un <u>massimo e un minimo assoluti</u>.

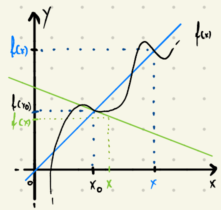
DIM: (MAX) f è superiormente limitata $\Rightarrow$ prendo $\sup(f(x)) = M \ \forall x \in [a;b]$. M è un estremo superiore, quindi $\forall x \in [a;b] \ f(x) \leq M$ e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in [a;b]: f(x) > M - \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prendo $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \ \exists a_\varepsilon = a_n \Rightarrow$ costruisco una successione $(a_n \in [a;b]) \Rightarrow M - \frac{1}{n} < f(a_n) < M \Rightarrow$ per confronto $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = M$ (!! Supponiamo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = c \in [a;b]$!!)

Poiché $f(x)$ è continua: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = M \iff \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) = M \ \forall a_n \to c$

Derivabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. La retta passante per $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x, f(x))$ avrà forma $r: y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} x + q$. Al tendere di x a x_0, la retta tende alla tangente in x_0.



Possiamo dire che f è derivabile se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}} = f'(x) \quad (h = x - x_0)$$

Differenziabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. f è differenziabile se $\exists$ tg a f in $(x_0; f(x_0))$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Se $f(x)$ è derivabile, è anche differenziabile e viceversa

DIM: per hp: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow$ tg a $f(x)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

Se f è differenziabile, $\exists\ y = f(x_0) + f'(x_0) + m(x - x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{m\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \Rightarrow f$ è derivabile

Teorema differenziabilità - continuità

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0, allora è anche continua in x_0

DIM: Th: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$