LEZIONE DI ANALISI 1 DEL 16 OTTOBRE

SUCCESSIONI

SUCCESSIONE INFINITESIMA: Una successione si dice infinitesima se diverge a 0

" INFINITA : Una successione si dice infinita se diverge a ∞

CONFRONTO TRA INFINITI: Siano a_n, b_n due infiniti, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine SUPERIORE} \\ \infty \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine INFERIORE} \\ l \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine.} \end{cases}$$

Se $\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ allora i due infiniti non sono confrontabili.

CONFRONTO TRA INFINITESIMI: Siano a_n, b_n due infinitesimi, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine INFERIORE} \\ \infty \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE} \\ l \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine} \end{cases}$$

Se $\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ allora i due infinitesimi non sono confrontabili.

SUCCESSIONI ASINTOTICHE: Due successioni si dicono asintotiche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. L'asintotismo è una relazione di equivalenza, infatti:

1) $a_n \sim a_n$ (asint. a se stessa)
2) $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ (se b_n è asintotica rispetto ad a_n, allora anche a_n è asintotica rispetto a b_n).
3) $a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1$

OSS: Se $a_n \sim b_n$ non è detto che $a_n \pm c_n \sim b_n \pm c_n$

CRITERIO DEL RAPPORTO: Sia una successione positiva a_n. Sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Se:

1) $l < 1$ allora a_n è un infinitesimo
2) $l > 1$ allora a_n è un infinito
3) $l = 1$ allora il criterio fallisce (carattere della successione non è noto)

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ Sia $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 \Rightarrow$ $n!$ è di ordine maggiore

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ Sia $c_n = \frac{n!}{n^n} > 0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n\cancel{!}} = \lim \frac{n^n \cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n\cancel{+1}}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

Per il criterio n^n è di ordine superiore.

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$ Consideriamo $b > 0$, $n^{b/2} \geq 1$, $0 \leq \log_a(n^{b/2}) \leq n^{b/2}$ quindi $\frac{\frac{b}{2} \cdot \log_a(n)}{\frac{b}{2}\, n^b} = \frac{\log_a(n^{b/2})}{\frac{b}{2}\, n^b} < \frac{n^{b/2}}{\frac{b}{2}\, n^b} = \frac{2}{b n^{b/2}}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{b n^{b/2}} = 0$ quindi per il teorema del confronto, chiamato $a_n = 0$, $c_n = \frac{2}{b n^{b/2}}$ e $b_n = \frac{\log_a(n)}{n^b}$ $\Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ Tralasciamo la c in quanto non influente. $\frac{n^b}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/b}}\right)^b = \left(\frac{\log_a(a^n)}{a^{n/b}}\right)^b$ equivale a $\frac{\log_a(\infty)}{\infty^{1/b}}$ e possiamo applicare la 3 scrivendo $(0)^b = 0$

FORMA DI INDETERMINAZIONE 1^∞: Causata principalmente da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si può scrivere che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

PROPOSIZIONI DA DIMOSTRARE: a_n è monotona crescente, a_n converge a $2 \le l \le 4$

1) dobbiamo dimostrare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \ge 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) \overset{\text{dis. Bernoulli}}{\ge} \left[1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\cancel{\frac{n-1}{n}}\right)\left(\cancel{\frac{n}{n-1}}\right) = 1$

2) a_n è crescente (vedi 1) $\Rightarrow a_1 < \dots < a_n \Rightarrow a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Costruiamo $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow b_n > a_n \ \forall n \ge 1$. Si può dimostrare che b_n è strettamente decrescente. Ciò vuol dire che $b_1 > \dots > b_n > a_n$. Quindi $b_1 > a_n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > a_n$