Prima prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare cod. 082747**
Ingegneria Automatica - 4 Maggio 2010
Versione **A**

Esercizio 1. $(5+2+3$ punti) Sia dato il sistema lineare $AX=B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2-a & -1 & a \\ a+1 & 2 & -a-1 & 2 \end{array}\right).$$

(1) Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni ammette il sistema.
(2) Calcolare le soluzioni del sistema quando queste sono infinite.
(3) Posto $a=-1$, verificare che A è invertibile, e calcolare A^{-1}.

Svolgimento. Effettuiamo le operazioni elementari $R_2 - R_1 \to R_2, R_3 - (a+1)R_1 \to R_3$ sulle righe della matrice $(A|B)$, ed otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 1-a & 1-a & 0 & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 0 & 1-a \end{array}\right).$$

Sia allora $1-a \neq 0$, ed effettuiamo l' ulteriore operazione elementare $R_3 - R_2 \to R_3$. Si ottiene allora la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 1-a & \boxed{\text{1-a}} & 0 & a-1 \\ a-a^2 & 0 & 0 & 2-2a \end{array}\right).$$

Se invece $a=1$, si ottiene la matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, le matrici A ed $(A|B)$ hanno rango rispettivamente

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } a=1 \\ 2 & \text{se } a=0 \\ 3 & \text{se } a \neq 0,1 \end{cases} \qquad r(A|B) = \begin{cases} 1 & \text{se } a=1 \\ 3 & \text{se } a \neq 1. \end{cases}$$

Il sistema ha allora ∞^2 soluzioni se $a=1$, non ha soluzioni se $a=0$, ed ha una sola soluzione se $a \neq 0$.

Posto $a=1$, il sistema diventa $x+y-z=1$, ossia $x=1-y+z$ con $y,z \in \mathbb{R}$. Quindi, le soluzioni del sistema sono

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Posto infine $a=-1$, la matrice dei cofattori di A è uguale a

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

ed essendo $\det(A) = -4$, otteniamo la matrice inversa di A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. $(3+6+2$ punti) Sia data l' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, 2x - 2y + 3z).$$

(1) Calcolare la matrice $A = M_{B,B}(T)$ associata a T rispetto alla base $B = ((0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dopo aver calcolato il polinomio caratteristico di T, gli autovalori di T ed una base per ogni autospazio, stabilire se T è semplice, ed in caso affermativo, costruire una matrice P invertibile che diagonalizza A e la matrice diagonale D associata.
(3) Infine, determinare se esiste una base B' di $\mathbb{R}^3$ per cui $M_{B,B'}(T) = I$, giustificando opportunamente la risposta.

Svolgimento. Le immagini dei vettori della base B sono $T(0, 0, 1) = (1, 1, 3), T(1, 1, 0) = (1, 1, 0), T(1, 0, 1) = (3, 2, 5)$, come si ottiene usando la definizione di T. Sempre con facili calcoli, si ha che $T(0, 0, 1) = 3(0, 0, 1)+(1, 1, 0), T(1, 1, 0) = (1, 1, 0), T(1, 0, 1) = 4(0, 0, 1) + 2(1, 1, 0) + (1, 0, 1)$. Quindi, la matrice cercata è

$$A = M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è $p(t) = \det(A - tI) = (1 - t)^2(3 - t)$, e quindi le sue radici sono $t_1 = 1, t_2 = 3$, di molteplicità rispettivamente $m(1) = 2, m(3) = 1$. Essendo entrambe reali, esse sono autovalori di T.

L' autospazio $V(1)$ è costituito da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{v}$ le cui componenti $[\overrightarrow{v}]_B$ rispetto alla base B verificano il sistema lineare omogeneo $(A - I)[\overrightarrow{v}]_B = O$. Con facili calcoli, si ha $[\overrightarrow{v}]_B = y\ {}^t(0, 1, 0) + z\ {}^t(-2, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}$. I due vettori aventi componenti ${}^t(0, 1, 0)$, ${}^t(-2, 0, 1)$ rispetto alla base B sono $\overrightarrow{e_1}= (1, 1, 0), \overrightarrow{e_2}= (1, 0, -1)$, e quindi una base di $V(1)$ è $B_1 = ((1, 1, 0), (1, 0, -1))$.

L' autospazio $V(3)$ è costituito da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{v}$ le cui componenti $[\overrightarrow{v}]_B$ rispetto alla base B verificano il sistema lineare omogeneo $(A - 3I)[\overrightarrow{v}]_B = O$. Con facili calcoli, si ha $[\overrightarrow{v}]_B = y\ {}^t(2, 1, 0), y \in \mathbb{R}$. Il vettore avente componenti ${}^t(2, 1, 0)$ rispetto alla base B è $\overrightarrow{e_3}= (1, 1, 2)$, e quindi una base di $V(3)$ è $B_3 = ((1, 1, 2))$.

T è semplice perché le radici di $p(t) = 0$ sono tutte reali, ed ogni autospazio ha dimensione uguale alla molteplicità del corrispondente autovalore. Detta E la base $E = ((1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 2))$ di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata a T rispetto a tale base è diagonale e si ha

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice di cambio base P per cui $P^{-1}AP = D$ è

$$P = M_{E,B}(1_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che 0 non è autovalore per T, T è iniettiva, e quindi $T(0,0,1), T(1,1,0), T(1,0,1)$ sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $B' = (T(0,0,1), T(1,1,0), T(1,0,1))$. Allora $M_{B,B'}(T) = I$, come si ottiene immediatamente dalla definizione di matrice associata ad un' applicazione lineare scelte le basi.

Esercizio 3. $(5+4+2$ punti$)$ Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}[x]_3$ i sottospazi definiti come

$$U = \mathcal{L}(1+x^3) \qquad V = \{P \mid x^2P'' - 2xP' = 0\}.$$

(1) Verificare che $U \subseteq V$. Calcolare poi una base B di U e la dimensione di U, ed una base B' di V contenente B e la dimensione di V.
(2) Esibire un' applicazione lineare $L : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ che verifica $V = \ker(L) = \mathrm{Im}(L)$, e calcolare $L^{-1}(1+x^3)$.
(3) Scelta una base E di $\mathbb{R}[x]_3$, calcolare la matrice $M_{E,E}(L \circ L)$.

Svolgimento. Chiaramente, $U \subseteq V$ se, e solo se, $1 + x^3 \in V$. D'altra parte, se $P = 1 + x^3$, si ha $P' = 3x^2, P'' = 6x$, e quindi P verifica l' equazione $x^2P'' - 2xP' = 0$. In conclusione, $U \subseteq V$.

È ancora evidente che $\dim(U) = 1$ ed una sua base è $B = (1 + x^3)$.

Detto $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, l' equazione differenziale che definisce V diventa $-2a_1x - 2a_2x^2 = 0$, da cui $a_1 = a_2 = 0$, e quindi $V = \mathcal{L}(1, x^3)$. Una base di V che contiene il vettore $1 + x^3$ è, ad esempio, $B' = (1 + x^3, x^3)$. Ovviamente, $\dim(V) = 2$.

Sia $E = (1 + x^3, x^3, x, x^2)$ una base di $\mathbb{R}[x]_3$. Definiamo L assegnando

$$L(1 + x^3) = 0, L(x^3) = 0, L(x) = 1 + x^3, L(x^2) = x^3.$$

Quindi, $\mathrm{Im}(L) = \mathcal{L}(1+x^3, x^3) = V$, come richiesto, e $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2$. Dal Teorema del Rango, ricaviamo che $\dim(\ker(L)) = 2$. Visto che $1 + x^3, x^3 \in \ker(L)$, si ha $V \subseteq \ker(L)$, ed avendo la stessa dimensione, essi sono uguali. Usando il Teorema di struttura delle controimmagini, si ha che $L^{-1}(1+x^3) = \{x + a(1+x^3) + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, essendo $V = \ker(L)$.

Infine, per ogni $P \in \mathbb{R}[x]_3$, $L \circ L(P) = L(L(P)) = 0$, essendo $L(P) \in \ker(L)$. Quindi $L \circ L$ è l' applicazione nulla, e quindi $M_{E,E}(L \circ L) = O$ matrice nulla di ordine 4 qualunque sia la base E scelta.

Prima prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare cod. 082747**
Ingegneria Automatica - 4 Maggio 2010
Versione **B**

Esercizio 4. (5 + 2 + 3 punti) Sia dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1-a & -1 \\ -1 & 3-a & 1 & a-1 \\ -a & 2 & a & 2 \end{array}\right).$$

(1) Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni ammette il sistema.
(2) Calcolare le soluzioni del sistema quando queste sono infinite.
(3) Posto $a = 0$, verificare che A è invertibile, e calcolare A^{-1}.

Esercizio 5. (3 + 6 + 2 punti) Sia data l' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$T(x, y, z) = (x + 2y - 2z, x - z, x + y - 2z).$$

(1) Calcolare la matrice $A = M_{B,B}(T)$ associata a T rispetto alla base $B = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dopo aver calcolato il polinomio caratteristico di T, gli autovalori di T ed una base per ogni autospazio, stabilire se T è semplice, ed in caso affermativo, costruire una matrice P invertibile che diagonalizza A e la matrice diagonale D associata.
(3) Infine, determinare se esiste una base B' di $\mathbb{R}^3$ per cui $M_{B,B'}(T) = I$, giustificando opportunamente la risposta.

Esercizio 6. (5 + 4 + 2 punti) Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}[x]_3$ i sottospazi definiti come

$$U = \mathcal{L}(2 + x^2) \qquad V = \{P \mid x^2P'' - xP' = 0\}.$$

(1) Verificare che $U \subseteq V$. Calcolare poi una base B di U e la dimensione di U, ed una base B' di V contenente B e la dimensione di V.
(2) Esibire un' applicazione lineare $L : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ che verifica $V = \ker(L) = \mathrm{Im}(L)$, e calcolare $L^{-1}(2 + x^2)$.
(3) Scelta una base E di $\mathbb{R}[x]_3$, calcolare la matrice $M_{E,E}(L \circ L)$.

Seconda prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare cod. 082747**
Ingegneria Automatica - 28 Giugno 2010
Versione **A**

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 7. (2+5+3) Sia data la famiglia di coniche di equazione

$$\Gamma_h : x^2 + (1-h)xy + y^2 - 3x + hy = 0, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

(1) Si calcolino i valori di h per cui Γ_h rappresenta una parabola, specificando se risulta degenere o meno.
(2) Posto $h = -1$, calcolare una forma canonica per Γ_{-1}, il relativo cambio di coordinate, e tracciarne un grafico qualitativo.
(3) Verificare che $(0,0) \in \Gamma_h$ per tutti i valori di h, mentre la retta tangente a Γ_h in $(0,0)$ dipende dalla conica scelta. Specificare se si ottengono tutte le rette per $(0,0)$ oppure se qualche retta è esclusa. Ci sono altri punti che appartengono a tutte le coniche Γ_h?

Svolgimento. Moltiplichiamo per 2 l' equazione di Γ_h e scriviamo le matrici ad essa associata:

$$B_h = \begin{pmatrix} 2 & 1-h & -3 \\ 1-h & 2 & h \\ -3 & h & 0 \end{pmatrix} \qquad A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1-h \\ 1-h & 2 \end{pmatrix}.$$

Γ_h è una parabola, eventualmente degenere, se $\det(A_h) = 0$, e quindi se $(1+h)(3-h) = 0$. Per $h = 3$, si verifica facilmente che $r(B_3) = 2$ e quindi che $\det(B_3) = 0$. Invece, per $h = -1$, $r(B_{-1}) = 3$ e $\det(B_{-1}) = -8$. In conclusione, Γ_h è una parabola per $h = -1$, ed è una conica degenere di tipo parabolico per $h = 3$.

Posto $h = -1$, calcoliamo gli autovalori di $A = A_{-1} : p(t) = \det(A - tI) = t(t-4) = 0$, da cui si ricava che gli autovalori di A sono $t_1 = 0, t_2 = 4$, entrambi di molteplicità 1. Detto $[\overrightarrow{v}]_B = {}^t(x,y)$, dove B è la base ortonormale fissata inizialmente per dare coordinate ai punti dello spazio euclideo $\mathbb{A}(V)$, l' autospazio $V(0)$ è formato da tutti e soli i vettori le cui componenti verificano l' equazione $x + y = 0$. Una base ortonormale di $V(0)$ è allora $(\overrightarrow{e_1})$ dove $[\overrightarrow{e_1}]_B = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La matrice P di cambio base tra la base ortonormale $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ di autovettori e la base B è allora

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo il cambio di coordinate $\underline{x} = P\underline{x'}$ ed otteniamo che Γ_{-1} è descritta dall' equazione $4y'^2 - 2\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' = 0$. Usando il completamento dei quadrati, riscriviamo l' equazione come $4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. La traslazione che riporta Γ_{-1} in forma canonica è allora $\underline{X} = \underline{x'} + \underline{c'}$ dove $\underline{c'} = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Il cambio di riferimento è allora descritto da $\underline{x} = P\underline{X} - P\underline{c'} = P\underline{X} + {}^t(0,1)$, e l' equazione canonica di Γ_{-1} è $4Y^2 - 2\sqrt{2}X = 0$.

Sostituendo le coordinate di $O(0,0)$ nell' equazione di Γ_h otteniamo $0 = 0$ e quindi $O \in \Gamma_h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. La retta tangente a Γ_h ha equazione $(0\,0\,1)B_h\,{}^t(x\;y\;1) = 0$ da cui $-3x + hy = 0$. Essa dipende da h e quindi la retta tangente dipende dalla conica scelta. Le rette per l' origine sono il fascio di equazione $ax+by=0$ e quindi l' unica che non si può ottenere come retta tangente è quella di equazione $y=0$.

Infine, i punti che appartengono a tutte le coniche Γ_h sono quelli le cui coordinate rendono l' equazione in h $(x^2+xy+y^2-3x)-h(xy-y)=0$ identicamente vera, ossia quelli che risolvono il sistema

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-3x=0 \\ xy-y=0 \end{cases}.$$

Svolgendo i calcoli, tali punti hanno coordinate $(0,0),(3,0),(1,1),(1,-2)$.

Esercizio 8. (4+4+3) Siano dati il piano $\alpha : x+y-2z=1$ ed i punti $A(1,2,-1), B(1,1,0)$.

(1) Si calcoli l' equazione di una retta r per B parallela ad α, e l' equazione della retta r' proiezione di r su α da A.
(2) Si calcolino gli angoli formati dalla retta s per A e B con il piano α e con la retta r'. Spiegare per quali scelte di r tali angoli sono uguali.
(3) Secondo quali direzioni la retta r' è proiezione di r su α?

Svolgimento. Il piano α è ortogonale al vettore $\vec{n}$ di componenti $[\vec{n}]_B = {}^t(1,1,-2)$ dove B è la base ortonormale fissata per coordinare lo spazio euclideo $\mathbb{A}(V)$. Le rette per B parallele ad α formano il piano per B parallelo ad α e sono quindi infinite. Per individuarne una, basta scegliere un vettore $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{n}$. Tra gli infiniti vettori, scegliamo quello di componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(1,-1,0)$. La retta r ha allora equazione parametrica $r : x=1+t, y=1-t, z=0, t\in\mathbb{R}$. La retta r' proiezione di r da A su α si ottiene intersecando α con il piano per r ed A. Il fascio di piani di asse r ha equazione $a(x+y-2)+bz=0$ essendo $\begin{cases} x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$ equazione cartesiana di r, e si ottiene eliminando t dall' equazione parametrica di r. L' unico di tali piani che contiene il punto A verifica l' equazione $a-b=0$ e quindi possiamo scegliere $a=b=1$. In conclusione, il piano che contiene r ed A ha equazione $\beta : x+y+z-2=0$. La retta r' ha allora equazione cartesiana r' : $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y-2z-1=0 \end{cases}$ ed equazione parametrica $r' : x=t, y=\frac{5}{3}-t, z=\frac{1}{3}, t\in\mathbb{R}$. Si osserva che r' è parallela al vettore $\vec{v}$, e questo è ovvio, essendo r ed r' rette parallele.

La retta s è parallela al vettore $\vec{AB}$ le cui componenti sono $[\vec{AB}]_B = {}^t(0,-1,1)$. L' angolo tra s ed α verifica la condizione

$$\sin \widehat{s,\alpha} = \frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{AB}|\,|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui $\widehat{s,\alpha} = \frac{\pi}{3}$. L' angolo tra s ed r' verifica la condizione

$$\cos \widehat{s,r'} = \frac{|\vec{AB}\cdot\vec{v}|}{|\vec{AB}|\,|\vec{v}|} = \frac{1}{2}$$

da cui $\widehat{s,r'} = \frac{\pi}{3}$. Gli angoli $\widehat{s,\alpha}$ e $\widehat{s,r'}$ sono uguali se, e solo se, r' è la proiezione ortogonale di s su α e questo capita se, e solo se, la retta r è la proiezione ortogonale di s sul piano per B parallelo ad α, ovvero se, e solo se, $\vec{v}$ è parallelo alla proiezione ortogonale di $\vec{AB}$ su $\mathcal{L}(\vec{n})^{\perp}$.

La retta r' è proiezione di r secondo una qualunque direzione parallela al piano per r ed A, ma non parallela al piano α.

Esercizio 9. (4+4+3) Si considerino la rette $r : x = -2, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}$, ed il punto $A(1, 0, 0)$.

(1) Si calcoli l' equazione del luogo S dei punti P che verificano la relazione $2d(A, P) = d(P, r)$, e si verifichi che S è una quadrica.
(2) Si classifichi S e si calcoli una sua forma canonica.
(3) Nel sistema di riferimento dato inizialmente, determinare, se esiste, l' equazione di un piano che taglia S lungo una circonferenza. Esistono piani che tagliano S lungo un' iperbole?

Svolgimento. Scegliamo $B(-2, 0, 0) \in r$, e $[\vec{v}]_B = {}^t(0, 1, 1)$ come vettore parallelo ad r. Visto che $d(P, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{BP}|}{|\vec{v}|}$, e che $\vec{v} \wedge \overrightarrow{BP}$ ha componenti ${}^t(z - y, x + 2, x + 2)$ rispetto alla base ortonormale B fissata per dare coordinate ai punti dello spazio euclideo $\mathbb{A}(V)$, allora

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{(z - y)^2 + 2(x + 2)^2}}{\sqrt{2}}.$$

La distanza tra A e P è invece uguale a $d(A, P) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}$, e quindi i punti di S verificano l' equazione ottenuta uguagliando $2d(A, P)$ a $d(P, r)$, elevando al quadrato e semplificando, ossia

$$S : 6x^2 + 7y^2 + 2yz + 7z^2 - 24x = 0.$$

Le matrici associate ad S sono

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Visto che $\det(B) = -6912 < 0$ allora S è una quadrica liscia ed ha punti ellittici. Visto che $p(t) = \det(A - tI) = (6 - t)^2(8 - t)$ allora gli autovalori di A sono concordi, e quindi S è un ellissoide reale. Inoltre, gli autovalori di A sono $t_1 = 6$ di molteplicità 2, e $t_2 = 8$ di molteplicità 1, e quindi S è un ellissoide reale di rotazione. La sua equazione canonica è $6X^2 + 6Y^2 + 8Z^2 + d = 0$ con d che verifica $288d = -6912$, da cui $d = -24$. Quindi $S : 6X^2 + 6Y^2 + 8Z^2 - 24 = 0$.

Essendo S di rotazione, per ottenere una circonferenza basta intersecare S con un piano ortogonale all' asse Z ovvero con un piano ortogonale all' autospazio $V(8)$ di A. Visto che $V(8) = V(6)^\perp$, e che $V(6)$ contiene tutti e soli i vettori $\vec{v}$ le cui componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(x, y, z)$ verificano l' equazione $y + z = 0$, allora $V(8) = \mathcal{L}(\vec{v})$ con $[\vec{v}]_B = {}^t(0, 1, 1)$. Un piano che taglia S lungo una circonferenza è allora $y + z = 0$ avendo scelto tra gli infiniti piani paralleli quello che passa per l' origine O. La circonferenza ha allora equazione

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 6x^2 + 7y^2 + 2yz + 7z^2 - 24x = 0 \end{cases}$$

che si può anche riscrivere come

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + (y+z)^2 - 24x = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

confermando che è proprio una circonferenza, essendo intersezione di una sfera con un piano. Non esistono piani che tagliano S lungo un' iperbole, essendo S una superficie compatta.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Quinta Facoltà-Docenti:Dulio-Notari-Scapellato

TEMA D'ESAME DEL 12/07/2010 - Versione A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 10. $(1+7+3$ punti) Si consideri l' endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$T(x, y, z) = (-x - y - 2z, x + y + 2z, 2x + 2y + 2z).$$

(a) Si calcoli la matrice A associata a T rispetto alla base canonica B di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si calcolino il polinomio caratteristico di T, gli autovalori di T, ed una base per ogni suo autospazio. Stabilire infine se A è diagonalizzabile, ed in caso affermativo determinare una matrice invertibile P per cui $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

(c) Si calcoli il nucleo di $T^2 = T \circ T$.

Svolgimento.

(a) Con facili calcoli, ed usando la definizione della matrice associata ad un' applicazione lineare rispetto a delle basi fissate, si ha

$$A = M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico di T risulta $p_T(t) = \det(A - tI) = t^2(2 - t)$. Visto che le sue radici sono $t_1 = 0, t_2 = 2$, entrambe reali, esse sono entrambe autovalori, e quindi abbiamo l'autovalore semplice $\lambda = 2$, e l'autovalore $\lambda = 0$, di molteplicità algebrica 2. Ad essi corrispondono gli autospazi $V(2) = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$ di dimensione 1 e base $B_2 = ((-1, 1, 1))$, e $V(0) = \mathcal{L}((-1, 1, 0))$ di dimensione 1 e base $B_0 = ((-1, 1, 0))$. Poiché $V(2)$ e $V(0)$ hanno entrambi dimensione 1, ed in particolare $\lambda = 0$ non è regolare, allora A non è diagonalizzabile.

(c) L'endomorfismo T^2 è rappresentato, rispetto alla base canonica B, dalla matrice A^2, data da

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

e quindi $\ker(T^2) = \mathcal{L}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

Esercizio 11. $(5+3+3$ punti) Sia data la sfera $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(a) Si determini un piano α contenente la retta $r : x = \sqrt{3} - t, y = \sqrt{3}, z = t$ e tangente a σ. Determinare poi un punto A di σ in modo che σ sia la sfera di raggio minimo passante per A e tangente ad α.

(b) Sia β il piano di equazione $y - z = 0$. Calcolare la proiezione della circonferenza $\Gamma = \sigma \cap \beta$, dal punto $V(0, 0, 1)$, sul piano $[xy]$.

(c) Dopo aver verificato che Γ è una conica, classificarla, determinarne un' equazione canonica e determinare il cambio di riferimento che la riporta in forma canonica.

Svolgimento. (a) Un' equazione cartesiana di r è $\begin{cases} x+z-\sqrt{3}=0 \\ y-\sqrt{3}=0 \end{cases}$ e quindi i piani che la contengono sono tutti e soli quelli di equazione $a(x+z-\sqrt{3})+b(y-\sqrt{3})=0$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$. Imponendo che uno di tali piani abbia distanza da $O(0,0,0)$, centro di σ, uguale a 2, raggio di σ, otteniamo l' equazione

$$\frac{|-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=2$$

le cui soluzioni sono $b=5a, b=a$. I due piani contenenti r e tangenti a σ hanno allora equazioni $\alpha_1 : x+5y+z-6\sqrt{3}=0$ e $\alpha_2 : x+y+z-2\sqrt{3}=0$. Scegliamo α_2. Il punto in cui α_2 incontra σ è $B(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$. Il punto A richiesto è allora l' altro estremo del diametro di σ che contiene B. Visto che σ ha centro nell' origine, il punto A ha coordinate $A(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}})$.

(b) Sia $P(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$. La retta per V e P ha equazione parametrica $x=x_0t, y=y_0t, z=1+(z_0-1)t, t\in\mathbb{R}$. L' appartenenza di P a Γ equivale alle due equazioni $y_0-z_0=0, x_0^2+y_0^2+z_0^2=4$. Eliminando i parametri x_0,y_0,z_0,t tra le 5 equazioni, si ricava l' equazione del cono di vertice V e direttrice Γ. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\mathcal{C} : x^2-2y^2+8yz-4z^2-8y+8z-4=0$. La proiezione $p(\Gamma)$ di Γ sul piano $[xy]$ si ottiene intersecando $\mathcal{C}$ con $z=0$, e quindi

$$p(\Gamma) : \begin{cases} z=0 \\ x^2-2y^2-8y-4=0 \end{cases}.$$

(c) $p(\Gamma)$ è una conica, essendo intersezione di un piano e di un cono quadrico. Lavorando nel piano $z=0$, possiamo dimenticare la prima equazione, e lavorare solo con la seconda. Si nota che la parte quadratica dell' equazione, ossia x^2-2y^2, è già in forma canonica. Per riportare la conica in forma canonica, basta allora usare il completamento dei quadrati, e si ha: $x^2-2(y+2)^2=-4$. Quindi, il cambio di coordinate è $x=X, y=Y-2$, ed è una traslazione, mentre la forma canonica risulta $X^2-2Y^2=-4$. La conica $p(\Gamma)$ è quindi un' iperbole.

Esercizio 12. $(6+5$ punti$)$ Sia dato il sottospazio $U=\mathcal{L}((1,1,1),(1,2,2))$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l' endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta la simmetria ortogonale rispetto ad U, calcolando la matrice P ad esso associata rispetto alla base canonica.
(b) Verificare che P è una matrice sia ortogonale, sia simmetrica, e determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Svolgimento. I due generatori di U sono indipendenti, quindi U ha dimensione 2. L' endomorfismo f ha U come autospazio relativo all' autovalore 1, e $U^\perp$ come autospazio relativo all' autovalore -1. Visto che $U\oplus U^\perp=\mathbb{R}^3$, f è diagonalizzabile. Scriviamo allora f rispetto alla base ortonormale $B=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ con $\vec{e_1}\in U^\perp$, e $\vec{e_2},\vec{e_3}\in U$. Per ottenere un vettore di $U^\perp$ basta considerare $\vec{u}\wedge\vec{v}$ con $\vec{u}=(1,1,1)$ e $\vec{v}=(1,2,2)$. Visto che la base canonica $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ è una base ortonormale, abbiamo

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vec{i} \\ 1 & 2 & \vec{j} \\ 1 & 2 & \vec{k} \end{pmatrix}=-\vec{j}+\vec{k}=(0,-1,1).$$

Normalizzando $\vec{u} \wedge \vec{v}$ otteniamo $\vec{e_1}= (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Per ottenere $\vec{e_2}$, basta scegliere un vettore in U e normalizzarlo. Osservando che $(1, 0, 0) \in U$, allora $\vec{e_2}= (1, 0, 0)$. Usando ancora il prodotto vettoriale, $\vec{e_3}=\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}= (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Detta C la base canonica, abbiamo che

$$Q = M_{B,C}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e che

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la formula per il cambio base, abbiamo che

$$P = M_{C,C}(f) = QM_{B,B}(f)\ {}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È evidente allora che $M_{C,C}(f)$ è simmetrica. Essa è anche ortogonale perchè C è una base ortonormale, ed f trasforma la base B in $(-\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ che è ancora una base ortonormale, ossia f conserva il prodotto scalare.

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Quinta Facoltà-Docenti:Dulio-Notari-Scapellato

TEMA D'ESAME DEL 12/07/2010 - Versione B

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 13. $(1+7+3$ punti) Si consideri l' endomorfismo $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito come

$$T(x,y,z)=(2x+y+z,-2x-y-z,2x+2y+2z).$$

(a) Si calcoli la matrice A associata a T rispetto alla base canonica B di $\mathbb{R}^3$.
(b) Si calcolino il polinomio caratteristico di T, gli autovalori di T, ed una base per ogni suo autospazio. Stabilire infine se A è diagonalizzabile, ed in caso affermativo determinare una matrice invertibile P per cui $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
(c) Si calcoli il nucleo di $T^2=T\circ T$.

Esercizio 14. $(5+3+3$ punti) Sia data la sfera $\sigma: x^2+y^2+z^2=4$.

(a) Si determini un piano α contenente la retta $r: x=-\sqrt{3}-t, y=-\sqrt{3}, z=t$ e tangente a σ. Determinare poi un punto A di σ in modo che σ sia la sfera di raggio minimo passante per A e tangente ad α.
(b) Sia β il piano di equazione $x-z=0$. Calcolare la proiezione della circonferenza $\Gamma=\sigma\cap\beta$, dal punto $V(0,0,1)$, sul piano $[xy]$.
(c) Dopo aver verificato che Γ è una conica, classificarla, determinarne un' equazione canonica e determinare il cambio di riferimento che la riporta in forma canonica.

Esercizio 15. $(6+5$ punti) Sia dato il sottospazio $U=\mathcal{L}((1,1,1),(2,2,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l' endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta la simmetria ortogonale rispetto ad U, calcolando la matrice P ad esso associata rispetto alla base canonica.
(b) Verificare che P è una matrice sia ortogonale, sia simmetrica, e determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Tema d' esame di **Geometria ed algebra lineare** - 15 Settembre 2010
Quinta Facoltà - Docenti: Dulio, Notari, Scapellato

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 16. (5 + 3 + 3 punti) Al variare del parametro reale a, si consideri il sistema lineare $AX = B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & a \\ 3-a & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & a+1 \end{array}\right).$$

(1) Studiare la risolubilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, precisando anche il numero di parametri liberi.
(2) Determinare i valori del parametro per cui $X = {}^t(2, -1, 1)$ è soluzione del sistema.
(3) Interpretando ogni equazione del sistema come quella di un piano in uno spazio affine di dimensione 3, discutere la posizione mutua dei piani al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (1) Effettuando le operazioni elementari $R_2 - (3-a)R_1 \to R_2, R_3 - R_1 \to R_3$ sulle righe di $(A|B)$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & a \\ 0 & a^2-3a+2 & a^2-4a+4 & a^2-3a+3 \\ 0 & 0 & 2-a & 1 \end{array}\right).$$

Visto che $a^2 - 3a + 2 = 0$ se, e solo se, $a = 1$ oppure $a = 2$, e che $2 - a = 0$ se e solo se $a = 2$, abbiamo che la nuova matrice è ridotta per righe se $a \neq 1, 2$. In particolare, se $a \neq 1, 2$, allora $r(A) = r(A|B) = 3$, e quindi il sistema $AX = B$ ha una sola soluzione.

Se $a = 2$, la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Effettuando l' operazione elementare $R_3 - R_2 \to R_3$ otteniamo una matrice ridotta per righe, e si ha $r(A) = 1 \neq 2 = r(A|B)$. Quindi, se $a = 2$, il sistema non ha soluzioni.

Infine, se $a = 1$, la matrice calcolata dopo le prime due operazioni elementari diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Effettuando l' operazione elementare $R_3 - R_2 \to R_3$ otteniamo una matrice ridotta per righe, e si ha $r(A) = r(A|B) = 2$. Il sistema ha quindi infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero.

(2) Riscriviamo il sistema dando alle incognite i valori $2, -1, 1$, rispettivamente, come richiesto dal testo. Il sistema diventa allora

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ -2a = -2 \end{cases}$$

che ha l' unica soluzione $a = 1$.

(3) Siano α, β, γ i piani di equazione $x + ay + (a-1)z = a, (3-a)x + 2y + z = 3, x + ay + z = a + 1$, rispettivamente. Per $a \neq 1, 2$, i tre piani si intersecano in un punto solo, avendo il sistema un' unica soluzione. Per $a = 1$, i tre piani hanno in comune una retta, avendo il sistema infinite soluzioni che dipendono da un unico parametro libero. Per $a = 2$, le equazioni dei tre piani diventano $\alpha : x + 2y + z = 2, \beta : x + 2y + z = 3, \gamma : x + 2y + z = 3$. Quindi, β e γ sono coincidenti, mentre α e β sono paralleli e distinti.

Esercizio 17. $(5 + 4 + 2$ punti$)$ Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} .$$

(1) Discutere la loro mutua posizione.
(2) Verificare che i punti P che verificano la condizione $d(P, r) = d(P, s)$ giacciono su una quadrica S.
(3) Classificare la quadrica S.

Svolgimento. (1) La retta s ha equazione parametrica $s : 1 - \tau, y = \tau, z = 1 - \tau, \tau \in \mathbb{R}$. Il sistema che descrive l' intersezione tra r ed s è allora

$$\begin{cases} t - \tau = 0 \\ t - \tau = -1 \\ t + \tau = 1 \end{cases}$$

che si riscrive, usando le matrici, come $AX = B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Riducendo la matrice con operazioni elementari sulle sue righe, si ha che $r(A) = 2, r(A|B) = 3$, e quindi abbiamo che r ed s sono sghembe.

(2) Sia $P(x, y, z)$ un punto qualsiasi. La retta r è parallela al vettore $\vec{v}$ di componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormale B fissata per assegnare coordinate ai punti, mentre $A(1, 1, 0) \in r$. La distanza tra P ed r è data da

$$d(P, r) = \frac{|\ \vec{AP} \wedge \vec{v}\ |}{|\ \vec{v}\ |} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(y - z - 1)^2 + (-x - z + 1)^2 + (x + y - 2)^2}.$$

La retta s è parallela al vettore $\vec{u}$ di componenti $[\vec{u}]_B = {}^t(-1, 1, -1)$ e contiene il punto $B(1, 0, 1)$. La distanza tra P ed s è allora uguale a

$$d(P, s) = \frac{|\ \vec{BP} \wedge \vec{u}\ |}{|\ \vec{u}\ |} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(-y - z + 1)^2 + (x - z)^2 + (x + y - 1)^2}.$$

Uguagliando le due espressioni, elevando al quadrato e semplificando, si ha che le coordinate di P verificano l' equazione

$$Q : 4xz - 4yz - 4x - 2y + 2z + 4 = 0$$

e quindi P giace su una quadrica.

(3) Per classificare Q, costruiamo le matrici ad essa associate. Abbiamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, si ha che $\det(B) = 36 > 0$ e quindi Q è una quadrica liscia a punti iperbolici, mentre il polinomio caratteristico di A è $p(t) = -t^3 + 8t$ da cui gli autovalori di A sono $t_1 = 0, t_2 = \sqrt{8}, t_3 = -\sqrt{8}$. In conclusione, Q è un paraboloide iperbolico o a sella.

Esercizio 18. $(2 + 5 + 4$ punti$)$ Si consideri l' endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$T(x, y, z) = (5x + 2y - 2z, 2x + 2y + 4z, -2x + 4y + 2z)$$

essendo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico.

(1) Verificare che T è un endomorfismo simmetrico.
(2) Dopo aver verificato che $(0, 1, 1)$ è autovettore per T, calcolare gli autovalori di T ed una base per ogni suo autospazio.
(3) Detta A una matrice simmetrica associata a T, esibire una matrice ortogonale P che diagonalizza ortogonalmente A.

Svolgimento. (1) La base canonica C è una base ortonormale per il prodotto scalare scelto. La matrice associata a T rispetto a C è

$$A = M_{C,C}(T) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi T è simmetrico, essendo C ortonormale ed A simmetrica.

(2) + (3) Con calcolo diretto, si ha che $T(0, 1, 1) = 6(0, 1, 1)$, e quindi $(0, 1, 1)$ è autovettore per T relativo all' autovalore $\lambda = 6$. Il polinomio caratteristico di T è $p(t) = \det(A - tI) = -(t - 6)^2(t + 3)$, e quindi gli autovalori di T sono $\lambda = 6$ con $m(6) = 2$, e $\mu = -3$ con $m(-3) = 1$.

L' autospazio $V(6)$ è costituito da tutti e soli i vettori che verificano l' equazione $-x + 2y - 2z = 0$, e quindi sono tutti ortogonali al vettore $\vec{u}$ di componenti $[\vec{u}\,]_C = {}^t(-1, 2, -2)$. Visto che T è simmetrico, allora $\dim V(6) = 2, \dim V(-3) = 1$, e quindi $V(-3) = V(6)^{\perp}$. In conclusione, $V(-3) = \mathcal{L}(\vec{u})$ ed una sua base ortonormale è costituita dal solo vettore $\vec{e_1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Sapendo che $(0, 1, 1) \in V(6)$, il primo vettore di una base ortonormale di $V(6)$ è $\vec{e_2} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. L' ultimo vettore della base ortonormale di $V(6)$ è allora $\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$. Quindi, $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ è una base ortonormale di $V(6)$, e $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Una matrice P ortogonale che diagonalizza A è allora

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{e si ha} \qquad {}^tPAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Quinta Facoltà-Docenti:Dulio-Notari-Scapellato

TEMA D'ESAME DEL 24/01/2011

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 19. (6+5 punti) Nel piano euclideo, sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale Oxy.

(1) Scrivere l'equazione dell'ellisse γ avente centro nel punto $C(1,2)$ e semiassi paralleli agli assi cartesiani, di lunghezze $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 1$.
(2) Scrivere l' equazione dell' ellisse Γ ottenuta ruotando γ in maniera che il semiasse maggiore appartenga alla retta $r : x - y + 1 = 0$.

Svolgimento.
(1) Cominciamo a scrivere l'equazione canonica di una ellisse avente semiassi di lunghezze $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 1$. Nel sistema di riferimento intrinseco, essa ha equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad \text{e quindi} \quad \frac{X^2}{8} + Y^2 = 1.$$

Per ottenere l'equazione di γ dobbiamo ora traslare l'origine nel punto $C(1,2)$. Le equazioni di tale traslazione sono

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2. \end{cases}$$

Sostituendo nella precedente equazione otteniamo

$$\gamma : \frac{(x-1)^2}{8} + (y-2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma : x^2 + 8y^2 - 2x - 32y + 25 = 0.$$

(2) Per ottenere l'equazione di Γ effettuiamo il cambio di coordinate che ha come versore dell' asse X il versore $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$, parallelo alla retta r, e come secondo versore $\vec{e_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$, ortogonale al precedente. Osserviamo che la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ è orientata come la base $(\vec{i}, \vec{j})$ del riferimento iniziale. Il cambio di riferimento è allora descritto da

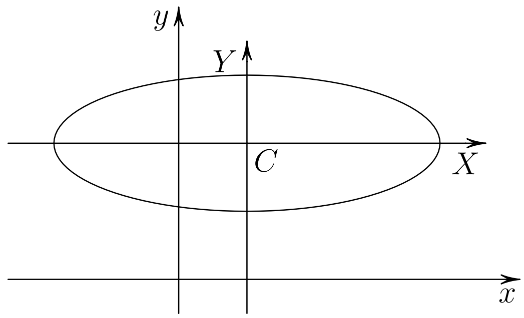
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

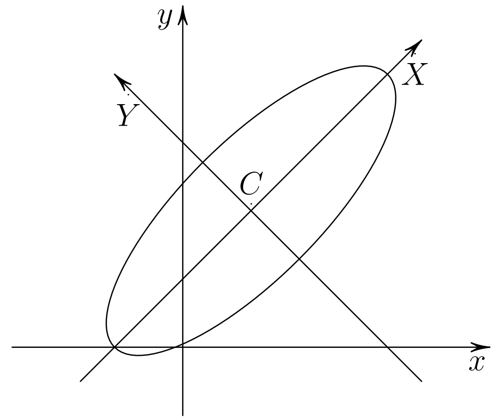
Il cambio inverso è quindi

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix},$$

essendo la matrice P ortogonale. Sostituendo nell' equazione $\frac{X^2}{8} + Y^2 = 1$, otteniamo $\Gamma : 9x^2 - 14xy + 9y^2 + 10x - 22y + 1 = 0$.

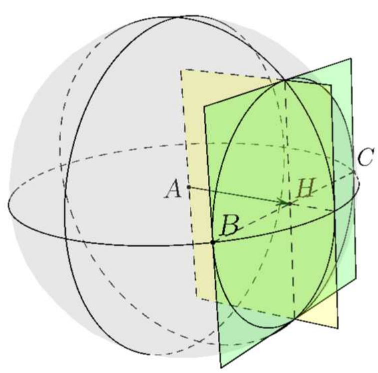
Esercizio 20. (6 + 5 punti) Siano dati il punto $A(1, 1, -1)$ e la retta $r : x = 1 + t, y = 2, z = 2t, t \in \mathbb{R}$.

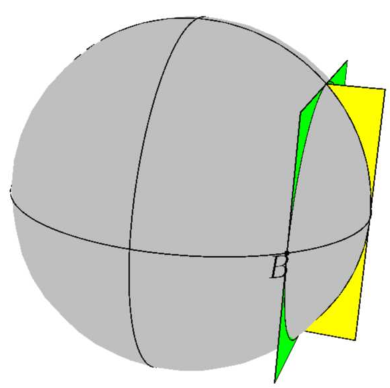




(1) Determinare l' equazione della sfera S di centro A e che interseca r lungo una corda BC di lunghezza $4/\sqrt{5}$.
(2) Scrivere l' equazione del piano α che taglia su S una circonferenza avente BC come diametro.

Svolgimento.
(1) Il piano π, passante per A ed ortogonale alla retta r, ha equazione $x+2z+1=0$. L'intersezione tra π e la retta r fornisce il punto H proiezione ortogonale di A su r. Con facili calcoli, si ha $H\left(\frac{3}{5}, 2, -\frac{4}{5}\right)$. La distanza tra A ed r è uguale alla distanza tra A ed H, e quindi $d(A,r) = \overline{AH} = \sqrt{\frac{6}{5}}$. Per ragioni di simmetria, H è anche il punto medio della corda che la sfera cercata taglia su r, e quindi il triangolo AHB è rettangolo in H, e l' ipotenusa AB è il raggio della sfera. Dal Teorema di Pitagora otteniamo $AB = \sqrt{\frac{6}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{2}$. (vedere figura). Pertanto l'equazione di S risulta $(x-1)2 + (y-1)2 + (z+1)2 = 2$.
(2) Il piano α passa per H ed è ortogonale alla retta AH (si veda ancora la figura).





Conoscendo le ccordinate di A ed H, si ha l' uguaglianza $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{5}\vec{k}$. L'equazione richiesta risulta

$$\frac{2}{5}\left(x-\frac{3}{5}\right)-(y-2)-\frac{1}{5}\left(z+\frac{4}{5}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha : 2x-5y-z+8=0.$$

Esercizio 21. (11 punti) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo associato alla matrice

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $B = ((1,1,0),(0,1,1),(0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$. Calcolare gli autovalori di T, una base per ogni suo autospazio, e, se possibile, una matrice P invertibile tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di T risulta

$$p(t) = \det(M_{B,B}(T) - tI) = (1-t)^2(2-t).$$

Le radici del polinomio sono $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, entrambe reali, e quindi entrambe autovalori. Abbiamo quindi l'autovalore semplice $t_2 = 2$, e l'autovalore $t_1 = 1$, di molteplicità 2. Ad essi corrispondono gli autospazi $V_2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0, \text{ con } [\vec{v}]_B = {}^t(x,y,z)\}$ e $V_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = -3z \text{con } [\vec{v}]_B = {}^t(x,y,z)\}$. Una base di V_2 è, per esempio, $(\vec{v_1} = (0,1,1))$, mentre una base di V_1 è $(\vec{v_2} = -3(0,1,1)+(0,0,1))$. Poiché l'autospazio V_1 ha dimensione 1, mentre la molteplicità dell'autovalore $t_1 = 1$ è 2, l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Pertanto non esiste alcuna matrice del tipo richiesto.