ESERCITAZIONE ALGEBRA LINEARE 25 settembre

PRODOTTO TRA MATRICI

1) $A \in Mat(2,3;\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B \in Mat(3,3;\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B \times A$ è calcolabile? No, il numero di colonne della prima (3) è diverso dal numero di righe della prima (2).

$B^T \times A^T$ è calcolabile? Sì, il numero di colonne (3) della prima è uguale a quello di righe della seconda (3)

$A \times B$ è calcolabile?

Sì: $n_A = m_B$

Quanto vale AB?

$AB \in Mat(2;3;\mathbb{R})$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+0-4 & 2+0+0 & 0+0+0 \\ 0-1-2 & -2+1+0 & 0-1+0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ ✓

Riduzione a Scala

(2) Riduci la matrice A a scala e calcolane il rango.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1^{p} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2^{p} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{a SCALA}} \Rightarrow r(A) = 2$$

(3) Studia il rango di A_K al variare di K in $\mathbb{R}$.

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & K & 2 \\ 1 & K+1 & K \\ 1 & K+1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & K & 2 \\ 0 & 1 & K-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1^{p} & K & 2 \\ 0 & 1^{p} & K-2 \\ 0 & 0 & 2-K^{\,p} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Il numero di pivot dipende da K:

$K=2 \rightarrow \#\,\text{pivot} = 2 \rightarrow r(A) = 2$

$K \neq 2 \rightarrow \#\,\text{pivot} = 3 \rightarrow r(A) = 3$

Sistemi Lineari

(4) Risolvi
$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 4 \\ -x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \qquad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

concatenando

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right]$$

Il sistema ha soluzioni se $r(A) = r(A|B)$. Poiché è anche uguale a n di A, avrà 1 soluzione (∞^0)

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 4 \\ y + 3z = 6 \\ -11z = -22 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

(5) Risolvi
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2x - y + z = -1 \\ -5x - 7y + 7z = 2 \end{cases} \qquad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -7 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -12 & 12 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = 2$; $r(A|B) = 2$ ∴ Il rango è, però, inferiore al numero di colonne, quindi avremo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

⑥ ... $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -x + y + 4z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ $[A|B] \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

$r(A) = 2$; $r(A|B) = 3 \Rightarrow$ poiché $r(A) \neq r(A|B)$, il sistema <u>non ha soluzioni</u>

⑦ Dimostrare che esistono infiniti polinomi di terzo grado $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ tali che 2 è una radice e $P(1) = P(-1) = 3$. Cosa succede se imponiamo che $P(x)$ sia pari?

1) $P(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{una radice è } 2}(ax^2+bx+c)$, $P(1) = -a-b-c=3$, $P(-1) = -3a+3b-3c=3$

$\begin{cases} -a-b-c=3 \\ \cancel{-3}a + \cancel{3}b - \cancel{3}c = \cancel{3} \\ \;\; -1 \quad\; 1 \quad -1 \quad\; 1 \end{cases}$ $[A|B] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$

$r(A) = 2$; $r(A|B) = 2 \Rightarrow \infty^{3-2} = \infty$

$\Downarrow$

esistono infinite soluzioni e quindi poli.

$\hookrightarrow P(x) = (x-2)((-2-c)x^2 - x + c)$

2) Poiché $P(2)=0$, affinché sia pari $P(-2)=0 \Rightarrow$ $P(-2) = -4(-8-4c+2+c) = 0$

$\cancel{-4}(-3c-6) = 0$

$-3c-6=0$

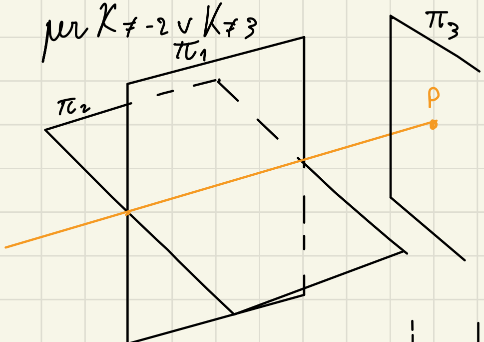
$c = -2 \Rightarrow P_c(x) = (x-2)(-x-2)$

La parità riduce il polinomio a grado 2, quindi $P(x)$ non può essere pari (deve essere di 3° grado per Hp)

② Discutere al variare di $K \in \mathbb{R}$ il sistema e interpretarlo geometricamente.

$$\begin{cases} x + y + Kz = 2 \\ Ky + 6z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & K & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & K & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1-K & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & -1 & 1-K & 1 \\ 0 & K & 6 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & -1 & 1-K & 1 \\ 0 & 0 & 6-K(K-1) & 3-K \end{array}\right]$$

per $K \neq -2 \vee K \neq 3$



il rango dipende da K: 1) $6-K(K-1)=0 \quad 6-K^2+K=0 \quad K^2-K-6=0 \quad K=\frac{1\pm5}{2}$ $K_1=3$, $K_2=-2$

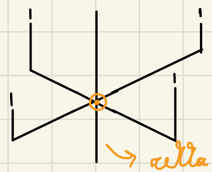
2) $3-K=0 \quad K=3$

per $K=3$ $\quad r(A)=r(A|B)=2<3 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni $(z=t;\ y=1-2t;\ x=1-t)$

per $K=-2$ $\quad r(A)=2;\ r(A|B)=3 \Rightarrow$ sistema impossibile

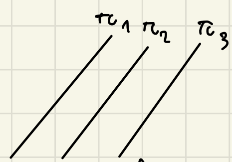
per $K\neq-2 \wedge K\neq3$ $\quad r(A)=r(A|B)=3=3 \Rightarrow 1$ soluzione $\begin{cases} z=\frac{1}{K+2} \\ y=\frac{3}{K+2} \\ x=\frac{K+1}{K+2} \end{cases}$

per $K = 3$



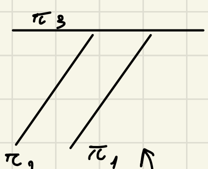
retta a supporto del fascio

per $K = 2$



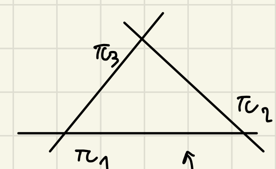
[...] NO

o



[...] NO

o



[..] SÌ

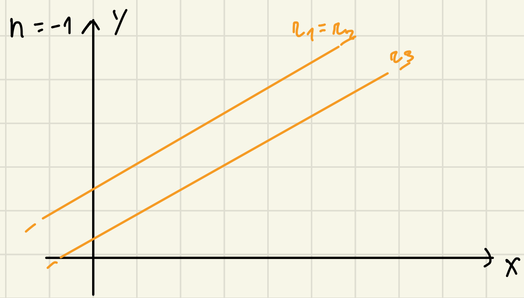
→ per decidere studi le varie coppie di equazioni del sistema

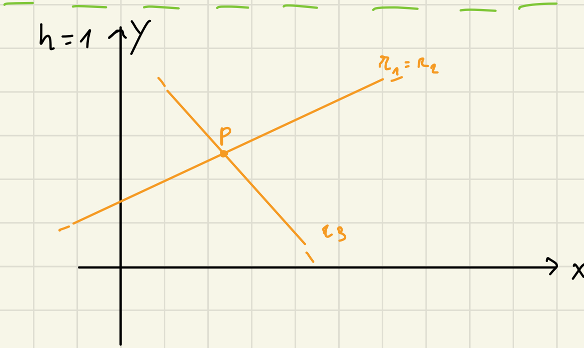
9. Uguale ad 8.

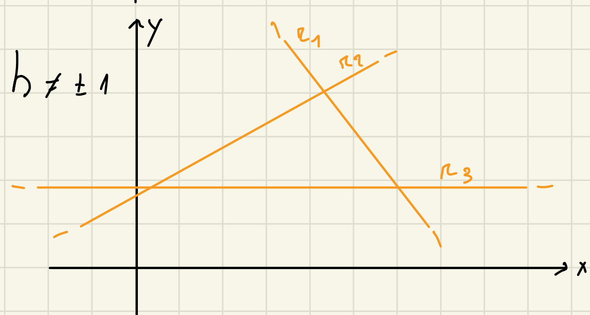
$$\begin{cases} x + hy = 1 \\ hx + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & h+1 & 2 \\ h & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & h+1 & 2 \\ 0 & 0 & h-1 \end{array}\right]$$

Il rango varia in base ad h

- per $h = 1$ $\quad r(A) = 2, \; r(A|B) = 2 \Rightarrow$ esiste una soluzione
- per $h = -1$ $\quad r(A) = 1, \; r(A|B) = 2 \Rightarrow$ sistema impossibile
- per $h \neq \pm 1$ $\quad r(A) = 2, \; r(A|B) = 3 \Rightarrow$ — — —







(10) Sia $A \in Mat(2,2;\mathbb{R})$. Definiamo $\mathcal{C} = \{ B \in Mat(2,2,\mathbb{R}) \mid AB = BA \}$.

Dimostra che:
1) $O_2 \in \mathcal{C}$
2) $I_2 \in \mathcal{C}$
3) $B_1, B_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow B_1 + B_2 \in \mathcal{C}$
4) $B \in \mathcal{C}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda B \in \mathcal{C}$
5) $B_1, B_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow B_1 B_2 \in \mathcal{C}$

1) $AO_2 = O_2 \quad , \quad O_2 A = O_2 \Rightarrow O_2 \in \mathcal{C}$

2) $AI_2 = A \quad , \quad I_2 A = A \Rightarrow I_2 \in \mathcal{C}$

3) $A(B_1+B_2) \underset{\text{dist}}{=} AB_1 + AB_2 = B_1 A + B_2 A \underset{\text{dist}}{=} A(B_1+B_2) \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathcal{C}$

4) $A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda BA = (\lambda B)A \Rightarrow \lambda B \in \mathcal{C}$

5) $A(B_1B_2) = (AB_1)B_2 = (B_1A)B_2 = B_1(AB_2) = B_1(B_2A) = (B_1B_2)A \Rightarrow B_1B_2 \in \mathcal{C}$

(11) Risolvere ed interpretare graficamente il sistema al variare di $h \in \mathbb{R}$

Homework

$$\begin{cases} x + (h-1)y = 1 \\ hx + 2y = h \end{cases}$$

APPROFONDIMENTO: MATRICI E IMAGE PROCESSING

IMMAGINE DIGITALE: un insieme di pixel organizzato in una scacchiera

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È una matrice di pixel. Ogni pixel, quindi, è un'elemento della matrice

Es. retta in un'immagine 4×4 in B & W dove 0 è nero e 1 è bianco

Per aggiungere più info, si estende il range: $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ dove n è la profondità. L'immagine sopra ha profondità di 1 bit.

IL COLORE? Il colore viene scomposto in R, G, B. Le matrici, allora, saranno 3: una matrice per R, una per G e una per B.

DISSOLVENZA TRA IMMAGINI: Lavoriamo con le matrici A e B. La dissolvenza possiamo sintetizzarla con: $M(t) = (1-t) \cdot A + tB$, $t \in [0,1]$. Più t tende ad 1, più il risultato assomiglierà a B, più tende a 0 più assomiglia ad A. Questa è la COMBINAZIONE LINEARE di due matrici.

COMPRESSIONE DI IMMAGINE: Data $A \in Mat(m, 2n; \mathbb{K})$. Visto che le colonne sono pari, le prendo 2 a 2 e ne faccio la media aritmetica.

Definiamo $B = \begin{bmatrix} 0,5 & \cdots & 0 \\ 0,5 & \ddots & \\ \vdots & & 0,5 \\ & \cdots & 0,5 \end{bmatrix} \in Mat(2n; m; \{0; 0,5\})$. Facendo AB, la

matrice risultante $I \in Mat(m, n, \mathbb{R})$ avrà le caratteristiche che vogliamo.
Se vogliamo dimezzare anche le righe, facciamo una matrice simile a B^T e poi eseguiamo il prodotto. La compressione sarà, quindi,: $B^T(AB)$