Indice

Equazioni differenziali di Bernoulli

Per risolvere questo tipo di equazioni differenziali è necessario oltre a saper derivare e integrare conoscere la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine perché, come vedremo fra poco, le equazioni differenziali di Bernoulli si riconducono, con un semplicissimo artificio, ad esse.

Un'equazione di Bernoulli si presenta nella forma

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)t^{\alpha}(t)$$

Con $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Infatti se:

- Se $\alpha = 0$ riotteniamo un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea della forma $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$
- Se $\alpha = 1$ otteniamo anche qui un'equazione differenziale lineare del primo ordine di forma $y'(t) = [a(t) + b(t)]y(t)$

Come risolvere un'equazione differenziale di Bernoulli

Per risolvere le equazioni differenziali di Bernoulli eseguiamo i seguenti passaggi:

1. Dividiamo entrami i membri per y^{α}:

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} &= a(t)\frac{y(t)}{y^{\alpha}} + b(t) \\ &= a(t)y^{1-\alpha}(t) + b(t) \end{aligned}$$

2. Poniamo $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$
3. Deriviamo entrambi i membri dell'eguaglianza in (2):

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1-\alpha)\frac{y'(t)}{y^{\alpha}} \\ \frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} &= \frac{z'(t)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

4. Sostituire i risultati ottenuti in (3) e (4) in (1) ottenendo:

$$\underbrace{\frac{z'(t)}{1-\alpha}}_{\frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} = \frac{z'(t)}{1-\alpha}} = \overbrace{a(t)z(t) + b(t)}^{y^{1-\alpha}(t) = z(t)}$$

   Ottenendo così un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine che sappiamo risolvere.

5. Una volta risolta l'equazione in $z(t)$ possiamo ritornare alla variabile $y(t)$ ricordandoci della sostituzione effettuata in (2).