ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 16 OTTOBRE

MATRICI

① Studia, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il rango di:

$$\begin{array}{cccc} A' & A'' & A''' & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -h^2 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & +h+2 \end{bmatrix}$$

$|A'| = 1 \Rightarrow r(A) \geq 1$; $|A''| = 0$; $|A'''| = -8 + 2h^2 = \underbrace{2(h+2)(h-2)}_{|A'''|=0 \text{ per } h=\pm 2} \Rightarrow r(A) \geq 2$

se $h=2 \Rightarrow A_h \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & +4 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A_h) = 1 \Rightarrow |A| = 0$

se $h=-2 \Rightarrow A_h \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A_h) = 2$

$|A'''| \neq 0$

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{per } h = 2 \\ 2 & \text{per } h = -2 \end{cases}$$

② Studia il rango di

$$B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & 1+h \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & 2h \end{bmatrix} \quad B',\ B'',\ B'''$$

$|B'| = h \Rightarrow r(B) \geq 2$ per $h \neq 0$

$|B''| = 0$

$|B'''| = h^2 - h = h(h-1) \Rightarrow r(B) = n = 3$ per $h \neq 0$, $h \neq 1$

$B_h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |B_h| = 0 \Rightarrow r(B_h) < n \Rightarrow r(B_h) = 2$

$B_h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B_h| = 0 \Rightarrow r(B_h) < n \Rightarrow r(B_h) = 2$

③ Determinare $h \in \mathbb{R}$ tale che $A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2+h & h \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5+2h & -1 \end{bmatrix}$ $C \begin{bmatrix} h & 0 \\ 1 & 1+h \end{bmatrix}$ siano lin. dipendenti.

$$aA + bB + cC = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+4b+ch & -a-3b \\ 2a+ah+5b+2bh+c & ah-b+c+h \end{bmatrix} = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b+ch=0 \\ -a-3b=0 \\ (2+h)a+(5+2h)b+c=0 \\ ah-b+(1+h)c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & h \\ -1 & -3 & 0 \\ 2+h & 5+2h & 1 \\ h & -1 & 1+h \end{bmatrix}$$

M', M'', M'''

Studiamo il rango di M: $r(M') \neq 0 \Rightarrow r(M) \geq 2$; $r(M'') \neq 0$ per $h \neq -2, h \neq +1 \Rightarrow r(M)=3 \Rightarrow$ 1 sola soluzione $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A, B, C lin. ind.

per $h=-2$, consideriamo $M''' \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|M'''| = 12 \neq 0 \Rightarrow r(M)=3$

per $h=1$, consideriamo $M''' \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ +1 & +1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|M'''| = 0 \Rightarrow r(M)=2 \Rightarrow$ esistono ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ A, B, C sono lin. dip.

④ In $\mathbb{R}^4$ si considerino $V_1=(0,1,1,2)$, $V_2=(-1,0,1,2)$, $V_3(1,2,K,K+1)$. Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente indipendenti?

$A \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & K \\ 2 & 2 & K+1 \end{bmatrix}$ A', A''. Se $r(A)=3$ i vettori sono lin. ind. Se no sono lin. dip.

$|A'| \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

$|A''| \neq 0$ per $K \neq 1$

$A_K \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ A''' $|A'''|=0$ $(-2C_1+2C_2=C_3)$

$\hookrightarrow r(A)=2$

per $K \neq 1$ i 3 vettori saranno linearmente indipendenti.

(5) Si considerino le seguenti matrici 3x1 a val. reali: $P \begin{bmatrix} h \\ h^2-1 \\ 1-h^2 \end{bmatrix}$ $Q \begin{bmatrix} 0 \\ h+1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $R \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(5.1) Determina h tale per cui P, Q, R siano lin. ind..

(5.2) Sia $x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, discuti il sistema $AX=B$ con A pari a $[P|Q|R]$.

1) Studiamo il rango di $A=[P|Q|R]=\begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ h^2-1 & h+1 & 2 \\ 1-h^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcoliamo $|A| = h(h+1-2) = h(h-1)$. Per $h\neq 0, h\neq 1$ la matrice A avrà rango massimo e P, Q, R sono lin. ind.

2) La matrice $[A|B]$ sarà $\left[\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 0 & h \\ h^2-1 & h+1 & 2 & 1 \\ 1-h^2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Poiché $|A|\neq 0$ per $h\neq 0, h\neq 1$, il sistema avrà 1 soluzione.

per $h=0$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Il $r([A|B])=2$ e $r(A)=2 \Rightarrow$ abbiamo ∞^1 soluzioni

per $h=1$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Il $r(A)=2$ e $r([A|B])=3 \Rightarrow \nexists$ soluzioni

(6) Considera le seguenti matrici di ordine 3 a valori reali $A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(6.1) verifica che $r(A)=2$ e $r(B)=3$

(6.2) $C(AB) \subseteq C(A)$ e $R(AB) \subseteq R(B)$

(6.3) Cosa si può dire del rango di AB? Calcola AB e verifica.

1) Calcoliamo con Kronecker i due ranghi: $r(A) = [\dots] = 2$, $r(B) = [\dots] = 3$

2) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $(AB)_{R(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{R(k)}$, $(AB)_{C(j)} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} A_{C(k)}$. Le righe di AB sono comb. lineari delle righe di B, quindi lo spazio generato dalle righe di AB è contenuto in quello delle righe di B. Stessa cosa vale anche per le colonne.

3) $r(A) = \dim(C(A))$ e $r(B) = \dim(R(B))$ quindi $r(AB) \leq 2$ e $r(AB) \leq 3 \Rightarrow r(AB) \leq 2$.

AB [Homework] $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AB'' & AB' & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \\ 6 & -8 & -12 \end{bmatrix} \end{array}$. Usando Kronecker, avremo che: $|A'| \neq 0 \Rightarrow r(AB) \geq 2$; $|A''| = 0 \Rightarrow r(AB) = 2 \Rightarrow$ le nostre osservazioni sono confermate.

(7) Si considerino i seguenti polinomi: $P_1 = x^2+2$, $P_2 = 3x+4$, $P_3 = x^2+6x+6$ e sia $W = Span(P_1, P_2, P_3) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

(7.1) Determinare base e dimensione di W.

(7.2) Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ $Q_K = (K+1)x^2 + 3Kx + 4 \in W$

1) Usiamo $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$ e scriviamo le componenti: $P_1 = (2, 0, 1)$, $P_2 = (4, 3, 0)$, $P_2 = (6, 6, 1)$. Mappiamo i tre vettori e studiamone il rango. $A \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[\dots]$ $r(A) = 2 \Rightarrow \dim(W) = 2$. La riduzione a scala di A è $S \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Prendiamo le prime due colonne di A come base: $B_W = \{x^2+2, 3x+4\}$

2) Affinché Q_K possa essere espressa come comb. lineare di P_1 e P_2 $\{P_1, P_2, Q_K\}$ devono essere dipendenti. Usiamo lo stesso metodo di 1 per trovare il $r(A^K)$: $A^K \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3K \\ 1 & 0 & K+1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\dots]$ $r(A^K) = 2$ con $K = \frac{1}{3} \Rightarrow Q_K \in W$ per $K = \frac{1}{3}$

8 Siano $U = \{ P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0 \}$, $W = \{ P_1(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P_1(0) = 0 \, , \, P_1''(0) = 0 \}$

8.1 Calcola una base e la dimensione di U e W

8.2 " " " " " " " $U + W$

1) $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. $P(x) \in U$ se $P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \Rightarrow \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1)$ con $d = -\alpha - \beta - \gamma$. $U = Span((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$. Sono i 3 vettori lin. ind? Homework.
Una base di U saranno i tre vettori e quindi $B_U = \{1 - x^3, x - x^3, x^2 - x^3\}$, U avrà dimensione 3.
$P_1(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. $P(x) \in U$ se $\begin{cases} P''(0) = 2c = 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow W = Span((0,1,0,0),(0,0,0,1))$. Le basi saranno $B_W = \{x, x^3\}$ e avrà dimensione 2

2) $U + W = Span(1 - x^3, \cancel{x - x^3}, x^2 - x^3, x, x^3)$. dip. Scriviamo $S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e ne calcoliamo il rango: [...] $r(S) = 4 \Rightarrow dim(U+W) = 4$

9 Sia $V = Span(A,B,C)$ dove $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $C \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ $D \begin{bmatrix} 6 & K-2 \\ 2 & K+2 \end{bmatrix}$

9.1 Determina base e dim. di V

9.2 Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ $D \notin V$.

1) Scriviamo le matrici in base canonica e le mettiamo nella solita matrice: $S \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcoliamo il rango di S: [...] $r(S) = 2 \Rightarrow dim(V) = 2$. La base sarà $B_V = \{A, B\}$

2) Homework