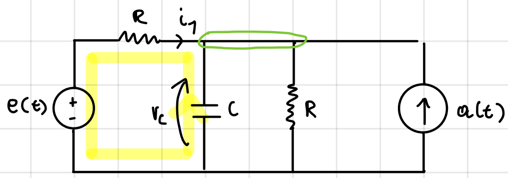
ESERCIZIO



$a(t) = A\cos(\omega t)$

$e(t) = Mt$

$V_c(0) = 0$, $\omega = 2\pi f$, $f = 50\,Hz$

$V_c(t)$? $i_1(t)$?

$e(t) = R i_1 + V_c \rightarrow i_1 = \dfrac{e(t) - V_c}{R}$

$i_1 + a(t) = C\dfrac{dV_c}{dt} + \dfrac{V_c}{R}$

$\hookrightarrow \dfrac{e(t) - V_c}{R} + a(t) = C\dfrac{dV_c}{dt} + \dfrac{V_c}{R}$

$RC\dfrac{dV_c}{dt} + 2V_c = e(t) + R\,a(t) \longleftarrow$ eq. di stato

$\hookrightarrow \dfrac{dV_c}{dt} = \underbrace{-\dfrac{2}{RC}}_{\lambda<0\ \rightarrow\ \text{stabile}} V_c + \dfrac{e(t)}{RC} + \dfrac{a(t)}{C} \implies$

poiché a sinistra dell'uguale vi è una costante, i termini in t devono annullarsi e le due costanti devono eguagliarsi

$$\begin{cases} \dfrac{dV_{c_0}}{dt} = -\dfrac{2}{RC}V_{c_0} \rightarrow V_{c_0} = Ke^{-\frac{2}{RC}t} \\ \dfrac{dV_{IP}^E}{dt} = \lambda V_{IP}^E + \dfrac{Mt}{RC} \rightarrow V_{IP}^E = \gamma_0 + \gamma_1 t \implies \gamma_1 = \lambda\gamma_0 + \lambda\gamma_1 t + \dfrac{Mt}{RC} \rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \lambda\gamma_0 \rightarrow \gamma_0 = -\dfrac{M}{\lambda^2 RC} \\ \lambda\gamma_1 = -\dfrac{M}{RC} \rightarrow \gamma_1 = -\dfrac{M}{\lambda RC} \end{cases} \\ \dfrac{dV_{IP}^A}{dt} = \lambda V_{IP}^A + \dfrac{A\cos(\omega t)}{C} \rightarrow V_{IP}^A = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t \implies \dots \rightarrow \begin{cases} \alpha\omega = \dfrac{2}{RC}\beta \rightarrow \alpha = \dfrac{RA}{4 + R^2C^2\omega^2} \\ \beta\omega = -\dfrac{2}{RC}\alpha + \dfrac{A}{C} \rightarrow \beta = \dfrac{R^2C\omega A}{4 + R^2C^2\omega^2} \end{cases} \end{cases}$$

Essendo un circuito lineare, possiamo usare il principio di sovrapposizione e calcolare l'integrale particolare come la somma degli integrali particolari dei vari ingressi isolati:

$$V_c(t) = V_{c_0}(t) + \sum_{i=0}^{n} V_{c_{IP}}^{n}(t)$$

$\downarrow$

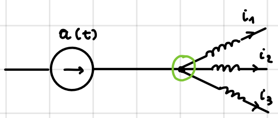
$$V_c(t) = V_{c_0}(t) + V_{c_{IP}}^E(t) + V_{c_{IP}}^A(t)$$
$$= Ke^{-\frac{2}{RC}t} - \frac{MRC}{4} + \frac{M}{2}t + \frac{RA}{4 + R^2C^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{R^2C\omega A}{4 + R^2C^2\omega^2}\sin\omega t$$

$\hookrightarrow v_c(0) = 0 \rightarrow \dots \rightarrow K = \dfrac{MRC}{4} - \dfrac{RA}{4 + R^2C^2\omega^2}$

8.5 CIRCUITI RLC (N POSSIBILI VARIABILI DI STATO)

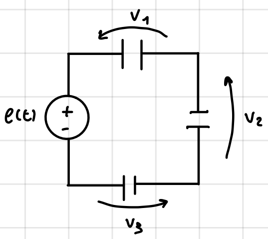
Delle N possibili variabili di stato alcune possono essere scartate a causa di situazioni patologiche:

- TAGLI LA:



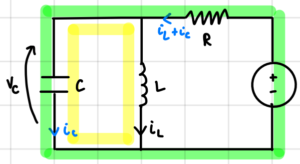
$a(t) = i_1 + i_2 + i_3$

- MAGLIE CE:



$e(t) = V_1 + V_2 + V_3$

Studiamo un semplice circuito RLC di questa forma:



$\rightarrow \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{v}(t)$ con: $\underline{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix}$

$A \in Mat(2,2;\mathbb{R})$

$v(t) \in Mat(2,1;\mathbb{R})$

$$\begin{cases} V_c = L\dfrac{di_L}{dt} \\ V_c + Ri_L + RC\dfrac{dV_c}{dt} = e(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}V_c \\ \dfrac{dV_c}{dt} = -\dfrac{1}{C}i_L - \dfrac{1}{RC}V_c + \dfrac{e(t)}{RC} \end{cases}$$

$\downarrow$

$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e(t)}{RC} \end{bmatrix}$

La matrice A gioca lo stesso ruolo del coefficiente λ nei circuiti RC/RL. Per studiare la stabilità asintotica del circuito mettiamo una condizione su A: affinché RLC sia stabile, $Re(\lambda_A)<0$ (parte reale degli autovalori di A <0). Considerando le matrici sopra abbiamo che:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2-4R^2LC}}{2RLC} \qquad \begin{cases} L^2-4R^2LC<0 & \lambda_{1,2}<0 \\ L^2-4R^2LC>0 & L^2 > L^2-4R^2LC \rightarrow R,L,C>0 \end{cases}$$

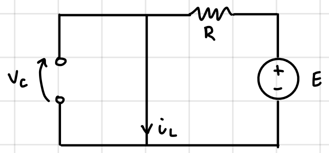
In regime stazionario possiamo calcolare la risposta forzata:

$e(t) = E \longrightarrow v_c(+\infty),\ i_L(+\infty)$? Abbiamo due strade:

1) partiamo dalle eq. di stato:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{L} v_C \\ 0 = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} v_C + \frac{E}{RC} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_C = 0 \\ i_L = \frac{E}{R} \end{cases}$$

2) analizzo il circuito a regime sostituendo a condensatori circuiti aperti e induttori circuiti chiusi:



$$\begin{cases} v_C = 0 \\ i_L = \frac{E}{R} \end{cases}$$