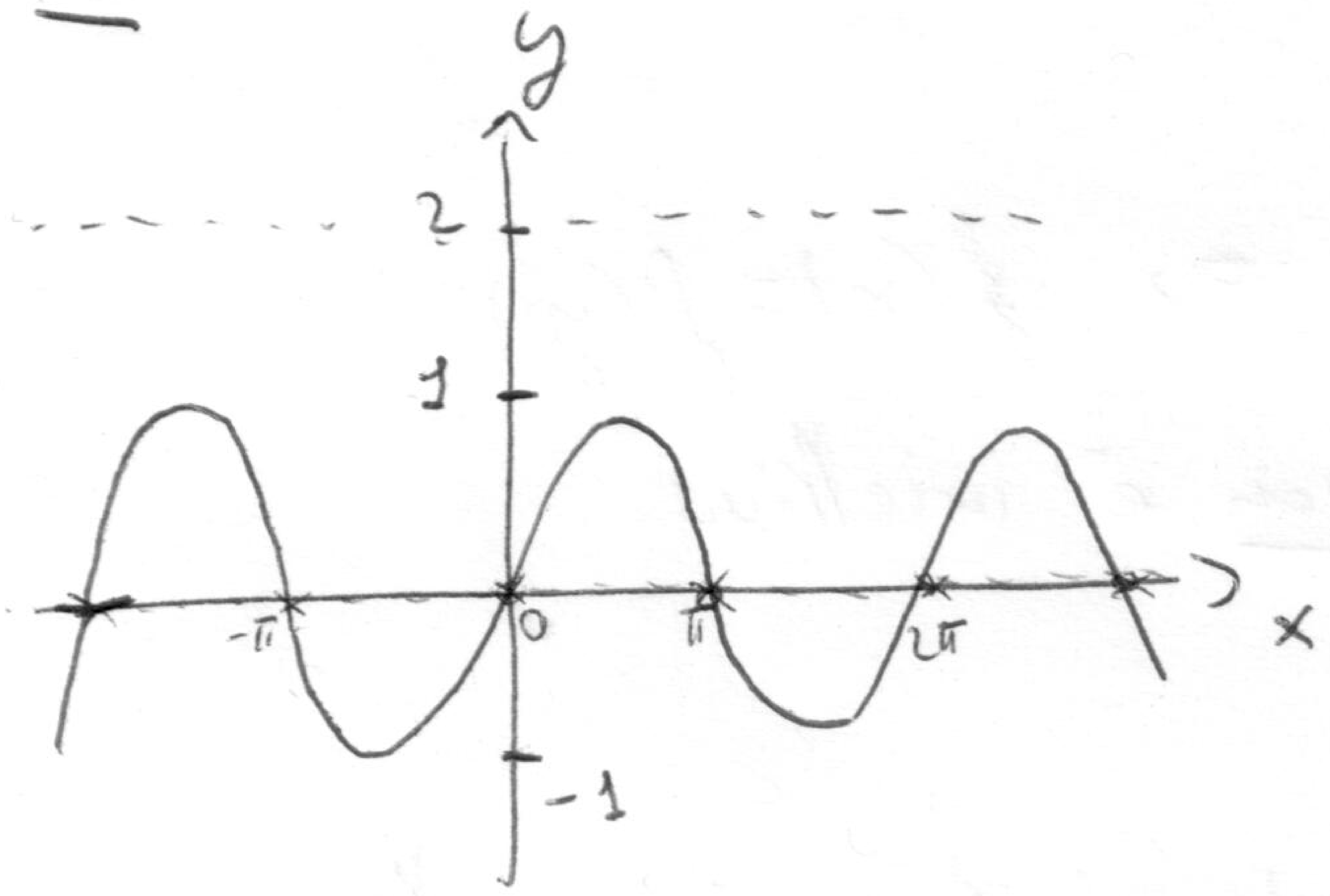
FUNZIONI

Es 1

Si consideri $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin(x)$

① Calcolare: l'immagine di 0
la controimmagine di 2
" " " 0
e l'insieme immagine

Sol



$f(0) = 0$

$f^{-1}[2] = \emptyset$

$f^{-1}[0] = \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

$Im(f) = [-1, 1]$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva? Può essere resa tale?

Sol

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ ← DEF. SURRIETTIVITÀ

ad esempio se $y = 2 \Rightarrow f^{-1}[2] = \emptyset$

$\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 2 \Rightarrow$ $f(x) = \sin$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva

$f(x) = \sin(x)$

$g(x): \mathbb{R} \to [0,1]$ è suriettiva

(3) f è iniettiva?

<u>Sol</u>

DEF INIETTIVITÀ $\to$ $f: A \to B$ è iniettiva

se $\forall\, x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

se $x = 0$ e $y = \pi$

$\sin(x) = 0 \qquad \sin(y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f = \sin(x)$ <u>non</u> è iniettiva

$h: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \sin(x)$ è iniettiva

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biiettiva?

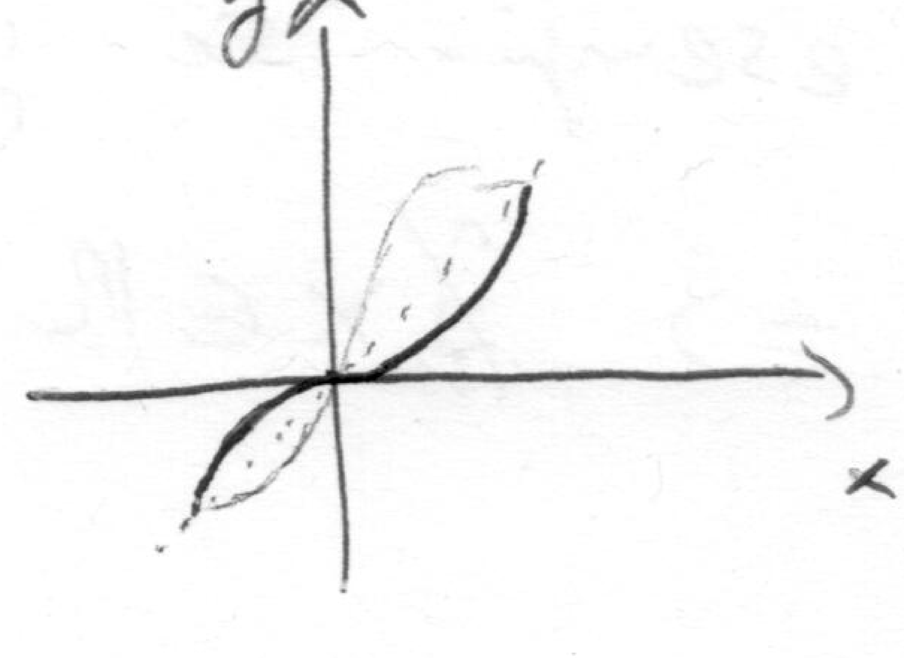
<u>Sol</u>

No perché non è né suriettiva né iniettiva

$g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ è biiettiva

$g^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$g^{-1}(x): [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



<u>OSS</u>

Risolvere $\sin(x)=y$

è diverso da calcolare $x=\arcsin(y)$

$\hat{}$ definita solo

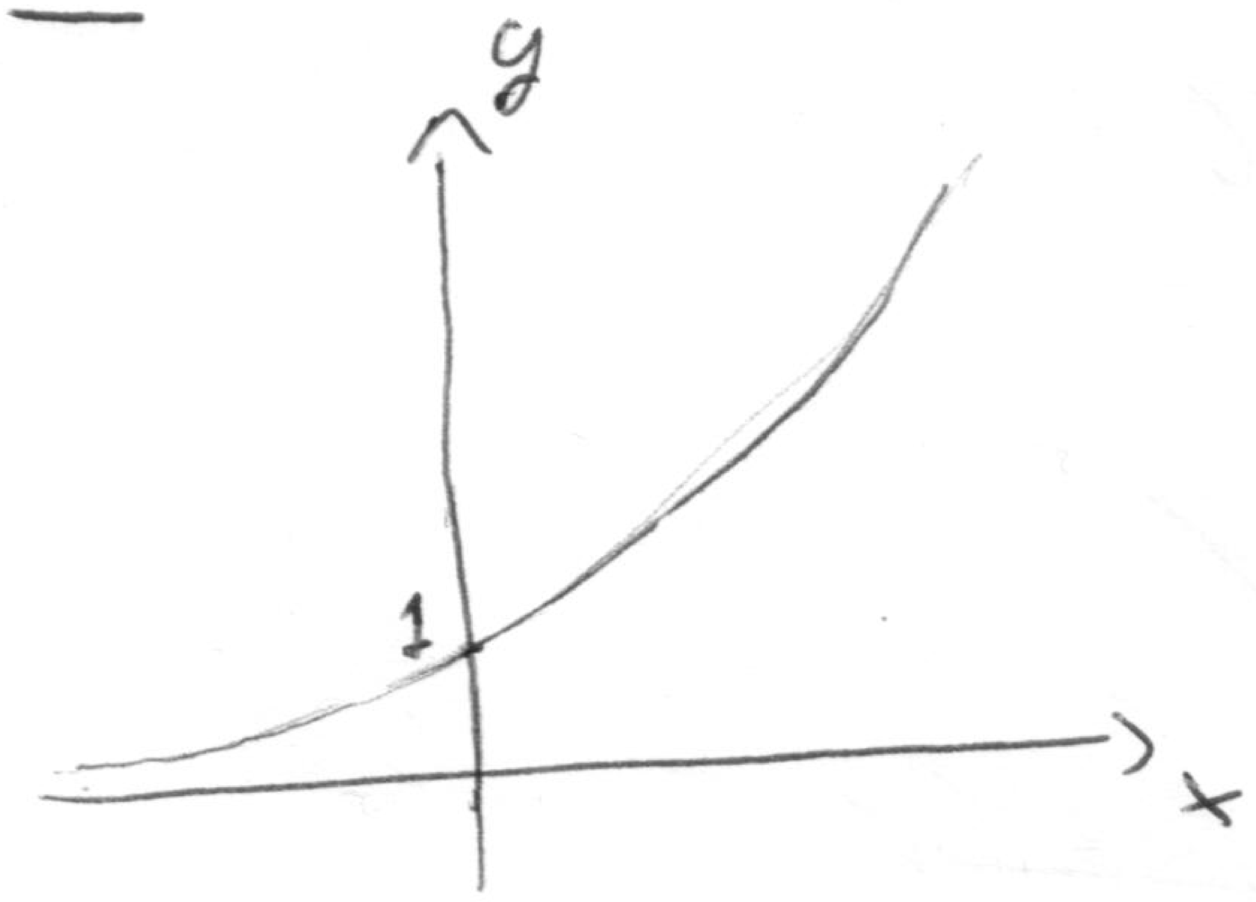
su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Es 2

Si consideri $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$

① È iniettiva?

sol



Si è iniettiva perché

$e^x = e^y \Rightarrow e^x - e^y = 0$

$\Rightarrow \cancel{e^x}(1 - e^{y-x}) = 0$

$\Rightarrow e^{y-x} = 1 \Rightarrow y - x = 0$

$\Rightarrow x = y$

② È suriettiva!

sol

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e^x non è suriettiva perché ad esempio se $y = -1$

$e^x = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$h(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
$h(x) = e^x$
è suriettiva

③ È invertibile?

<u>Sol</u>

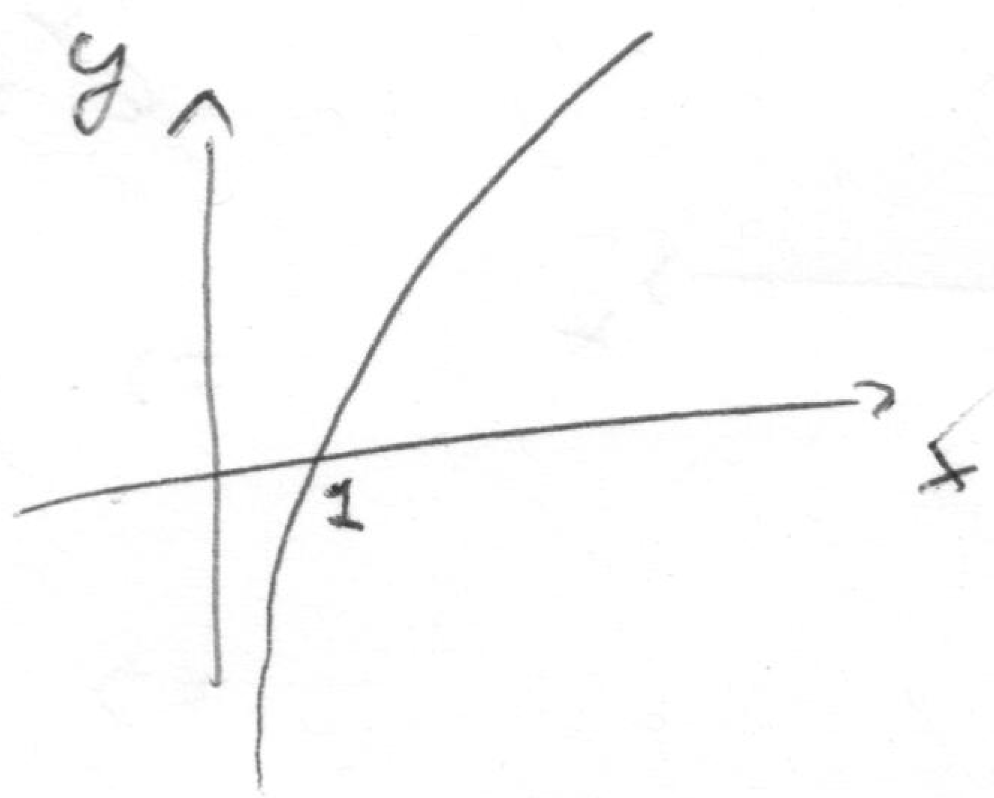
$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è invertibile (perchè non è suriettiva).

ma $h(x) = e^x$

$h(x): \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è invertibile

$h^{-1}(x) = \log(x)$

$h^{-1}(x): (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



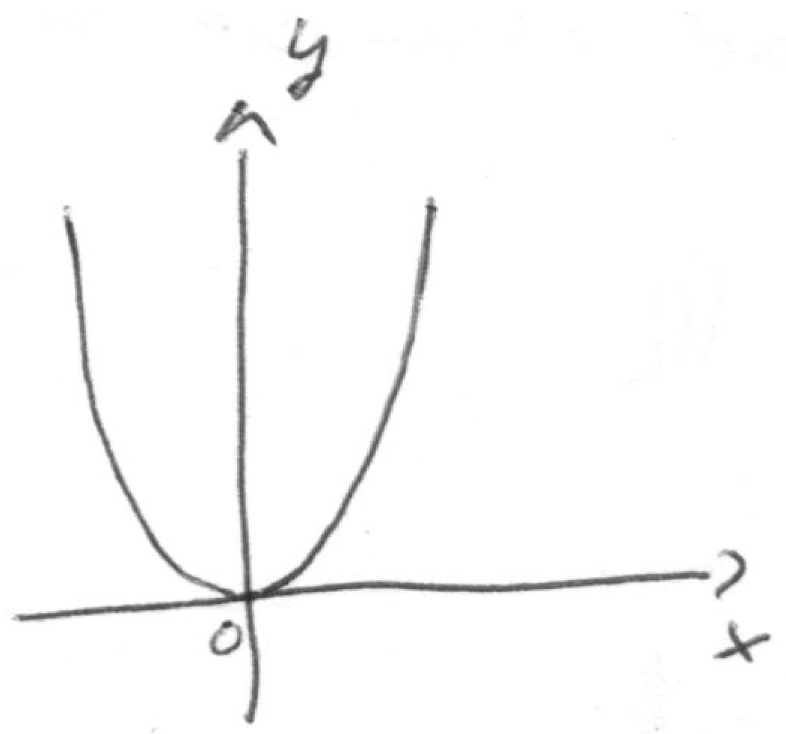
<u>Es 3</u>

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

① È iniettiva?

<u>Sol</u>



Se $x = 1$ e $y = -1$

$x^2 = 1$

$y^2 = 1$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>non</u> è iniettiva

$h(x): [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è iniettiva

$h(x) = x^2$

② È suriettiva?

<u>Sol</u>

se $y = -1$

$x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva

$f(x) = x^2$

$f(x) : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è suriettiva

③ È biiettiva?

<u>Sol</u>

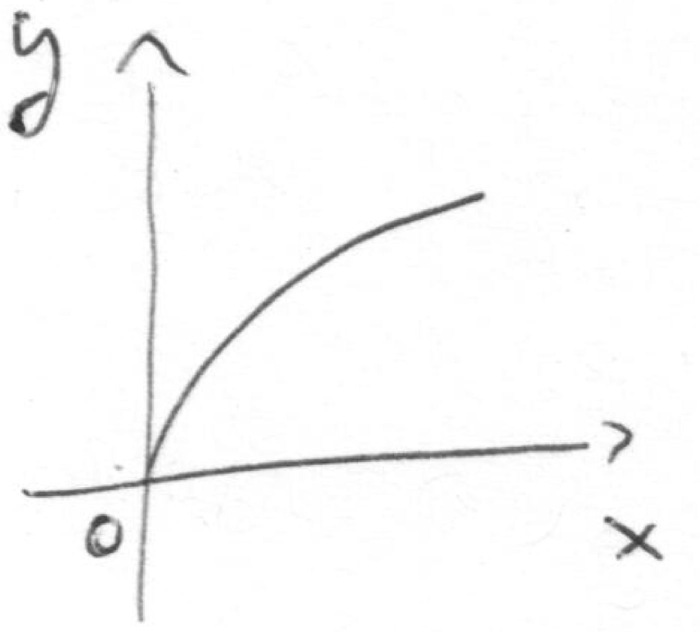
No perché non è né suriettiva né iniettiva

$f(x) = x^2$

$f(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ← è biiettiva

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

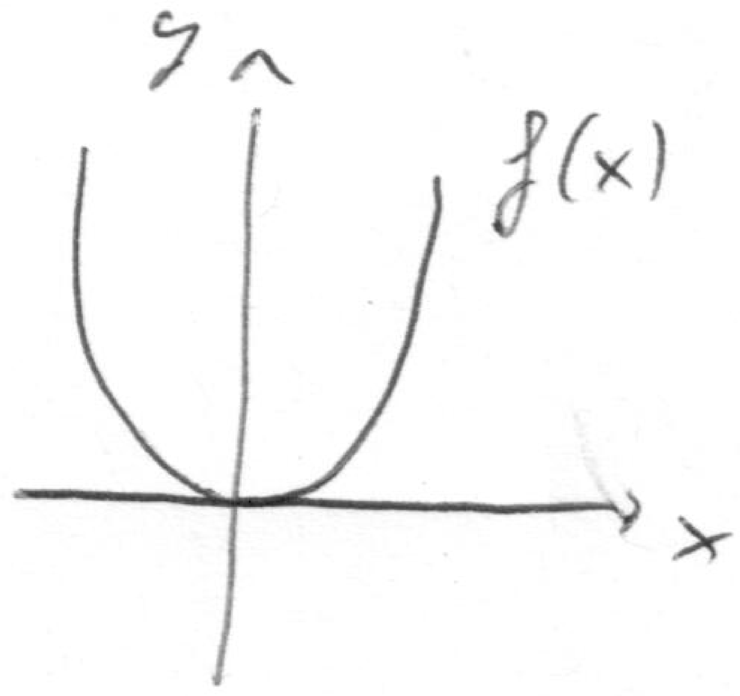
$f^{-1}(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$



OSS

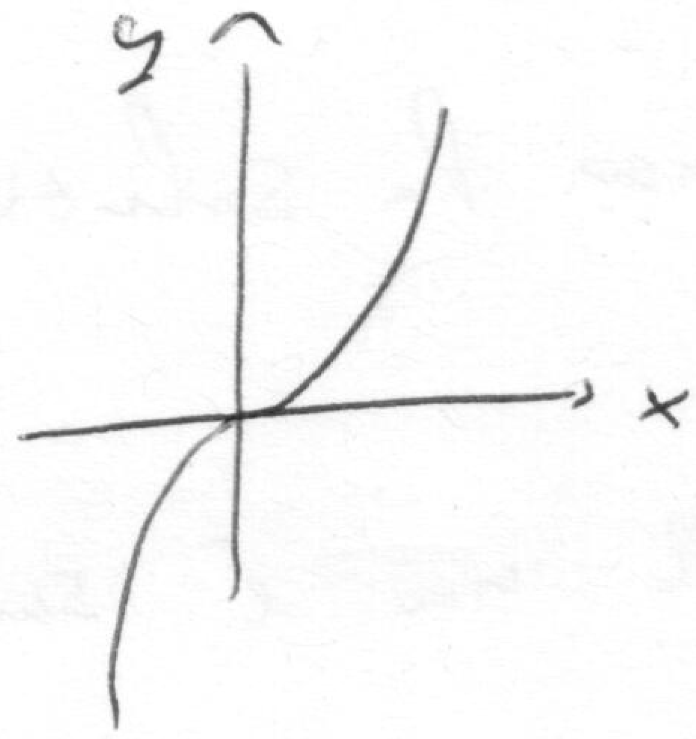
$$f(x) = x^n \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

se n è pari



l'inversa è definita solo in $[0, +\infty)$

se n è dispari



l'inversa è definita su tutto $\mathbb{R}$

Def POLINOMIO

Un polinomio $P(x)$ è una scrittura del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ ← campo $\quad \left(k^n = \overbrace{k \times k \times \dots \times k}^{n \text{ volte}} \right)$

L'insieme di tutti i polinomi con coefficienti in $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}[x]$

Oss

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$\mathbb{R}[x]$ è l'insieme di tutti i polinomi con coefficienti reali

Teo DIVISIONE DI POLINOMI

Sia $A, B \in \mathbb{K}[x]$, $B \neq 0$
Allora esiste un'unica coppia $Q, R \in \mathbb{K}[x]$ tale che

$$A = BQ + R \quad \text{e} \quad \text{grado}(R) < \text{grado}(B) \quad \text{o} \quad \text{grado}(B) = 0$$

Q è detto quoziente della divisione
R è detto resto " "

Se $R = 0$ si dice che B divide A

Esempio 1

$$A(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad B(x) = x - 1$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -2x & +2 & x-1 \\
-x^2 & +x & & \\ \cline{1-3}
0 & -x & +2 & x-1 \leftarrow Q(x) \\
// & +x & -1 & \\ \cline{1-3}
// & 0 & 1 & \\
 & & \nwarrow R &
\end{array}$$

grado $(R) = 0$

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R = (x-1)(x-1) + 1$$

Esempio 2

$$A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad B(x) = x + 2$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -x & -2 & x+2 \\
-x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{1-4}
0 & 0 & -x & -2 & x^2 - 1 \\
 & & +x & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow B$ divide A

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^2 - 1)(x + 2)$$

Def RADICE

Sia $P(x) = (x-r)^m Q(x)$ con $Q(x)$ non divisibile per $(x-r)$.

Se $m \geq 1$ si dice che r è radice di P.
Se $m = 1$ " " " r è radice semplice di P
m è detta molteplicità algebrica di r rispetto a P

Esempio

$$P(x) = x(x-1)^3(x+1)$$

$x=0$ è radice semplice
$x=1$ è radice con m. a. $= 3$
$x=-1$ è radice semplice

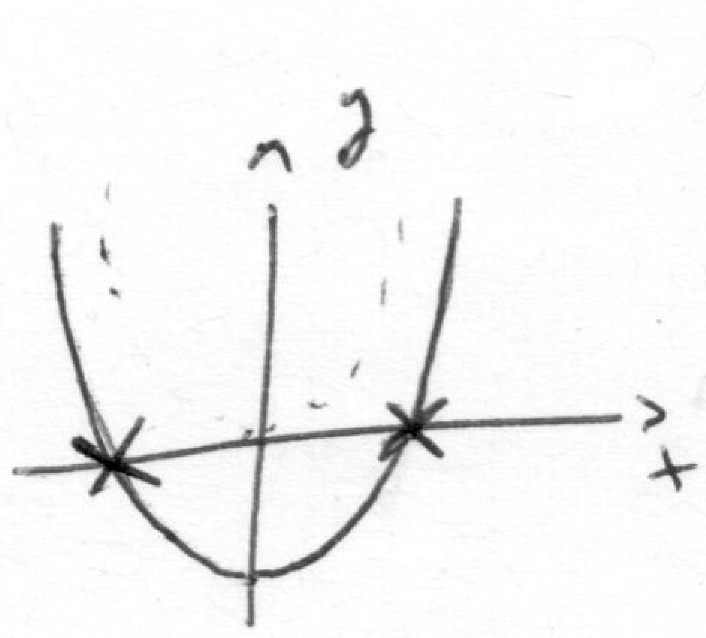
OSS

r è radice di $P(x) \iff P(r)=0 \iff (x-r)$ divide $P(x)$

OSS
Le radici di un polinomio sono le intersezioni fra il suo grafico e l'asse delle x

Esempio

$P(x) = x^2-1 = (x-1)(x+1)$



$x=1$ è radice
$x=-1$ è radice

OPERAZIONI

Consideriamo le due operazioni binarie fondamentali in $\mathbb{R}$ "$+$" e "$\cdot$".

non sono altro che funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

① $+ : (x,y) \longmapsto x+y$

② $\cdot : (x,y) \longmapsto x \cdot y$

①. L'operazione somma è commutativa

infatti: $x+y = y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

· La somma è distributiva

infatti: $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

· La somma ha elemento neutro $e=0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x+e = x \Rightarrow e=0$

· $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y$ elemento inverso tale che

$$x+y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento} \\ \text{neutro}}}{0} \Rightarrow y=-x$$

② · Il prodotto è commutativo

· " " " distributivo

· Il prodotto ha un elemento neutro

$\forall x \quad x \cdot e = x \Rightarrow e = 1$

e $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ $\exists$ l'inversa secondo il prodotto

$$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

Fra la somma e il prodotto vale la proprietà distributiva

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Es 1

Consideriamo la differenza in $\mathbb{R}$

① È commutativa?

Sol

$x = 1$ $\quad x - y = 1 - 2 = -1$

$y = 2$ $\quad y - x = 2 - 1 = 1$

$x - y \neq y - x \Rightarrow$ non è commutativa

② È associativa?

Sol

$x = 1$ $\quad x - (y - z) = 1 - (2 - 3) = 2$

$y = 2$

$z = 3$ $\quad (x - y) - z = (1 - 2) - 3 = -4$

$x - (y - z) \neq (x - y) - z \Rightarrow$ non è associativa

③ $\exists$ l'elemento neutro?

Sol

$\forall x \quad \exists u : \quad x - u = x$

$\Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow$ 0 è el. neutro per la diff.

④ $\exists$ l'elemento inverso?

Sol

$x - y = u \, (= 0)$

$\Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \forall x \quad x$ è l'elemento inverso per la diff.

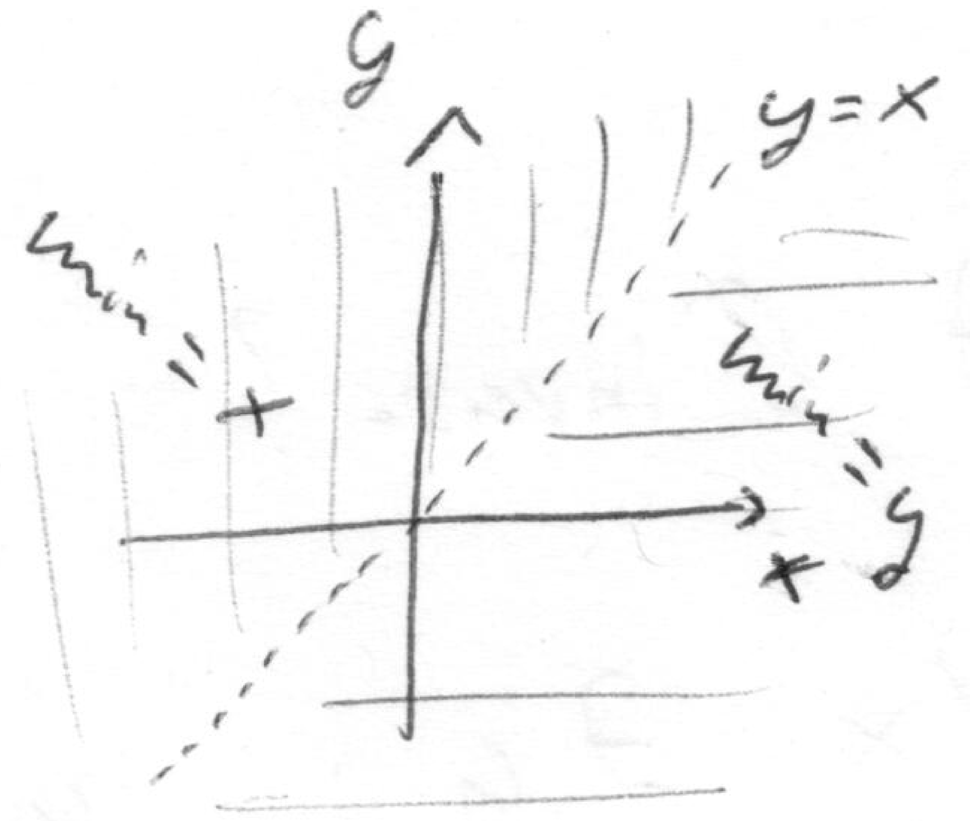
Es 2

Consideriamo $x \oplus y = \min(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$

① È commutativa?

sol

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \le y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}$$



Sì è commutativa

$$\min(x, y) = \min(y, x) \Rightarrow x \oplus y = y \oplus x$$

② È associativa?

sol

$$\min(x, \min(y, z)) = \min(x, y, z) = \min(\min(x, y), z)$$

$$\Rightarrow x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

Sì è associativa

③ ∃ l'elemento neutro?

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists u \in \mathbb{R} : \min(x, u) = x \quad \Updownarrow \quad (x \oplus u = x)$$

in $\mathbb{R}$ non esiste

ma se consideriamo il $\min(\cdot,\cdot)$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\exists$ l'elemento neutro ed esso è uguale a $+\infty$

$$\min(x, +\infty) = \begin{cases} x & x < +\infty \\ +\infty (= x) & x = +\infty \end{cases}$$

④ $\exists$ l'inversa?

$$\forall x \ \exists y : \quad \min(x, y) = +\infty$$

No non esiste $(x \oplus y = u)$

<u>Es 3</u>

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e le seguenti due operazioni:

- $x \oplus y = \min(x, y)$

- $x \circledast y = x + y$

Dimostrare che $\circledast$ è distributiva rispetto a $\oplus$

<u>sol</u>

Def $\rightarrow \quad x \circledast (y \oplus z) = (x \circledast y) \oplus (x \circledast z) \quad \forall x, y, z \in S$

$$\underset{ⓐ}{x + \min(y, z)} \overset{?}{=} \underset{ⓑ}{\min(x+y, x+z)} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$ⓐ = \begin{cases} x+y & y \le z \\ x+z & y > z \end{cases}$$

$$ⓑ = \begin{cases} x+y & \cancel{x}+y \le \cancel{x}+z \\ x+z & \cancel{x}+y > \cancel{x}+z \end{cases} \Rightarrow ⓐ = ⓑ$$

$\Rightarrow$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la somma è distributiva rispetto al minimo

SISTEMI LINEARI

Es1

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 1-y-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ \cancel{2}y=-\cancel{2}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

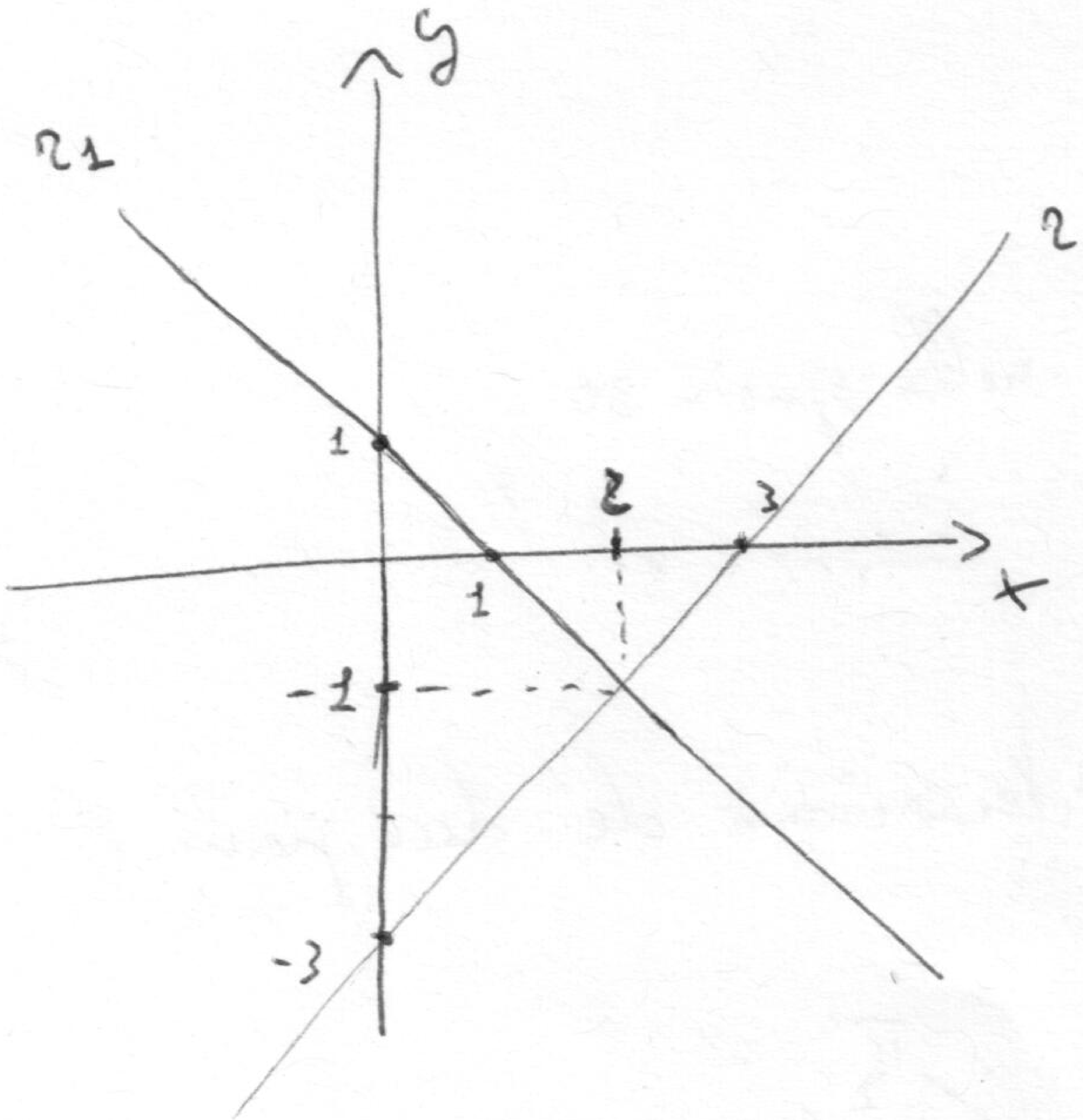
interpretazione geometrica

$r_1: \quad x+y=1 \Rightarrow y=-x+1$

x	y
0	1
1	0

$r_2: \quad x-y=3 \Rightarrow y=x-3$

x	y
0	-3
3	0



due rette che si intersecano in un punto

Es2

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ -\cancel{4x}+\cancel{4x}+6=2 \end{cases} \leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

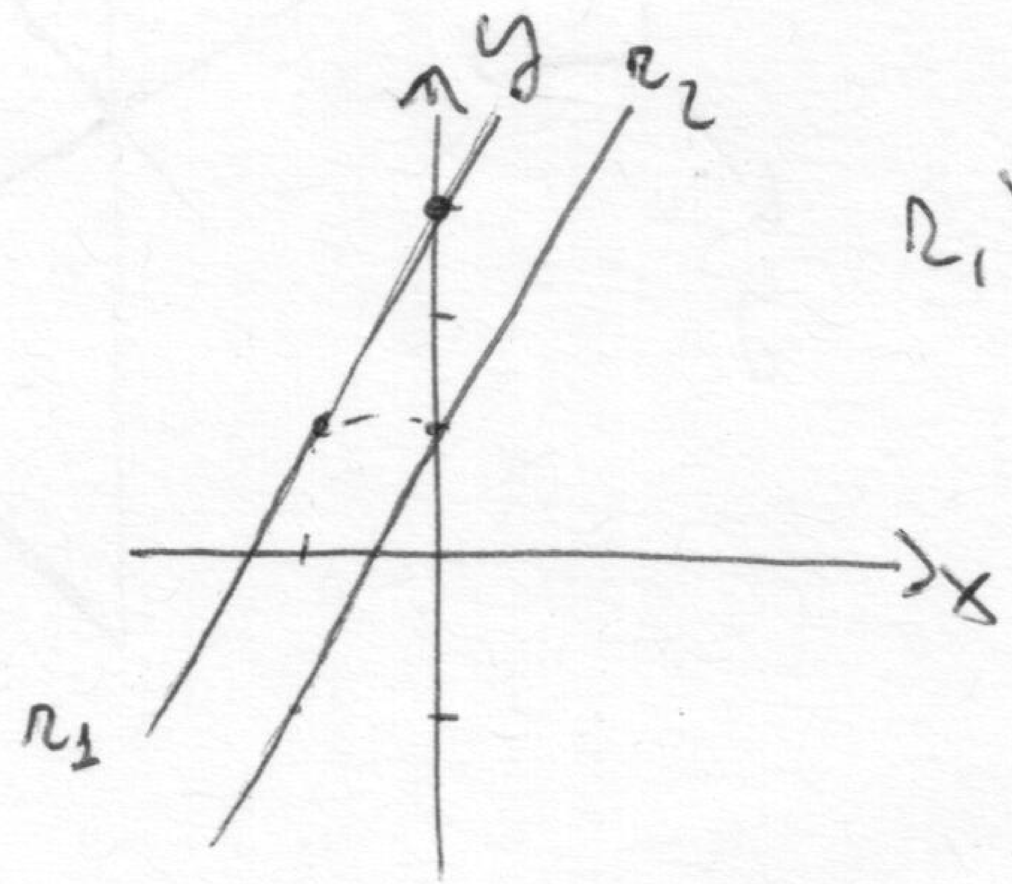
interpretazione geom.

$r_1 \quad y=2x+3$

x	y
0	3
-1	1

$r_2 \quad \cancel{2}y=\cancel{4}_2x+\cancel{2}_1$

x	y
0	1
-1	-1



$r_1 \parallel r_2$

Es 3

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+0+0=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}+y-z=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y-z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=t-\frac{1}{2} \\ z=t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICA DI UNA RETTA NEL PIANO

Int. geom.

π_1: $x+y-z=1$ piano nello spazio 3D

π_2: $x-y+z=2$ " " " "

r: $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ z=t\in\mathbb{R} \\ y=r-\frac{1}{2} \end{cases}$ retta intersezione dei due piani