Rappresentazione Algebrica e Parametrica

In $A^3_{\mathbb{R}}$, costruiamo π contenente $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$. π è determinato da un suo punto, ad esempio P_1, e dalla sua giacitura $U = \{\overrightarrow{P_1Q} \in \mathbb{R}^3 \mid Q \in \pi\}$. Costruiamo una base della giacitura: $\mathcal{B}_U = \{\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,1,0), \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,0,1)\}$

Il generico $\overrightarrow{P_1Q}$ sarà: $t_1\overrightarrow{P_1P_2} + t_2\overrightarrow{P_1P_3}$. Il sistema di riferimento del piano è $\mathcal{B}_{P_1} = \{P_1, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\}$. Avremo $Q_{|\mathcal{B}_{P_1}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$

Per avere le rappresentazioni consideriamo l'intero spazio. Usiamo il sistema di riferimento canonico. Cerchiamo come scrivere il generico $Q \in \pi$ rispetto a $\mathcal{B}_0$.

$$Q_{|\mathcal{B}_0} = P_{1|\mathcal{B}_0} + \overrightarrow{P_1Q}_{|\mathcal{B}_0} = P_{1|\mathcal{B}_0} + t_1\overrightarrow{P_1P_2}_{|\mathcal{B}_0} + t_2\overrightarrow{P_1P_3}_{|\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-t_1-t \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\pi: \begin{cases} x = 1-t_1-t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \rightarrow \underline{\text{RAPP. PAR.}}}$$

Se andiamo a risolvere il sistema, otteniamo la $\boxed{\underline{\text{RAPP. ALG}}: \ \pi: x+y+z-1=0}$

Le rappresentazioni variano in base a sistema di riferimento e basi scelte.

Mutua Posizione

Siano S, T due sottospazi di A con giacitura U, W non banali. Essi si dicono:

PARALLELI: $U \subseteq W \ \vee \ W \subseteq U$

INCIDENTI: Se non sono paralleli e $S \cap T \neq \emptyset$.

SGHEMBI: Se non sono né paralleli né incidenti.

Consideriamo A spazio affine con $\dim(A) = n$ e $\mathcal{B}_0$ sistema di riferimento.

- Prendiamo S sottospazio con $\dim(S) = p$, allora $S_{|\mathcal{B}_0}$: $[A|B] \in Mat(n-p, n+1; \mathbb{K})$

  OSS.: $r([A|B]) = r(A)$. Voglio ∞^p soluzioni $\Rightarrow p = n - r(A)$. Se tutte le righe sono indipendenti, allora $r(A) = n-p$.

- Prendiamo T sottospazio con $\dim(T) = q$, allora $T_{|\mathcal{B}_0}$: $[A|B] \in Mat(n-q, n+1; \mathbb{K})$.

Definiamo $[\tilde{A}|\tilde{B}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ A' & B' \end{array}\right] \in Mat(2n-p-q; n+1; \mathbb{K})$. Questo sistema ha soluzioni pari a $S \cap T_{|\mathcal{B}_0}$. Supponiamo $p \geq q$. Allora

- $S // T$ con $T \subseteq S$ se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) = n-q$;
- S e T sono paralleli disgiunti se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) = n-q$
- S e T sono incidenti se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) > n-q$;
- S e T sono sghembe se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) > n-q$;

DIM.: per Hp $r([A|B]) = r(A) = n-p$; $r([A'|B']) = r(A') = n-q$

Le giaciture di S e T sono i nuclei delle rispettive matrici: $U \sim Ker(A)$; $W \sim Ker(A')$. $U \cap W$ sarà la giacitura di $S \cap T \sim Ker(\left[\begin{smallmatrix} A \\ A' \end{smallmatrix}\right]) = Ker(\tilde{A})$.

PAR. Poiché $p \geq q$, $U \not\subseteq W$ quindi $S // T$ se e solo se $W \subseteq U$. Ciò è possibile se e solo se $U \cap W = W$ e quindi $r(\tilde{A}) = r(A') = n-q$

INC. Si ha incidenza se $T \cap S \neq \emptyset$, ossia se $[\tilde{A}|\tilde{B}]$ ha soluzione, ossia quando $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A})$ (per Rouché-Capelli).

Fasci di Iperpiani

Presi A, S, T con $\dim(A) = n \geq 2$, $\dim(S) = n-2$, $\dim(T) = n-1$.

1) Il fascio proprio di iperpiani con sostegno S è l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti S;
2) Il fascio improprio di iperpiani paralleli a T è l'insieme di tutti gli iperpiani paralleli a T;

Caratterizzazione Algebrica dei Fasci

Siano T_1, T_2 due iperpiani distinti del fascio di equazioni $[A_1|B_1]$, $[A_2|B_2]$, allora T appartiene al fascio se e solo se la sua equazione è combinazione lineare dei due: $[t_1A_1 + t_2A_2 | t_1B_1 + t_2B_2]$.

PR. 7.22
CO. 7.23
$\rightarrow$ VEDI APPUNTI BEEP(11-GEOMETRIA-AFFINE.PDF)

1) In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, scrivere rapp. alg. e par. di:

1) retta contenente $P=(1,0,1)$, $Q=(0,1,1)$
2) piano π contenente r ed $R=(-1,h,1)$ $\forall h \in \mathbb{R}$

1) partiamo dalla parametrica: $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)$, $v=\mathcal{L}((-1,1,0)) \Rightarrow r=(x,y,z)=(1,0,1)+t_1(-1,1,0)=\underline{(1-t,t,1)}$.

Per l'algebrica, partiamo dal definire $\mathcal{B}_0=\{(0,0,0),e_1,e_2,e_3\} \Rightarrow (1-t,t,1) \Rightarrow \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t\\ t\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$

Risolviamo il sistema in funzione di t: $\left[\begin{array}{c|c} -1 & x-1\\ 1 & y\\ 0 & z-1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} -1 & x-1\\ 0 & x+y-1\\ 0 & z-1\end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x+y=1 & \leftarrow \pi_1\\ z=1 & \leftarrow \pi_2\end{cases}} \Rightarrow r=\pi_1\cap\pi_2$

2) Prendiamo la giacitura di π: $W=\mathcal{L}(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=\mathcal{L}((-1,1,0),(-2,h,0)) \Rightarrow \pi=(x,y,z)=\underline{(1,0,1)+t_1(-1,1,0)+t_2(-2,h,0)}$ $\boxed{\text{!! SE I DUE VETTORI NON SONO INDIPENDENTI, ALLORA NON OTTENIAMO UN PIANO !!}}$

per $h=2$, i due vettori generano r in quanto proporzionali. Verifichiamo che $R \in r \Rightarrow \begin{cases} -1+2=1 \checkmark\\ 1=1\end{cases} \Rightarrow$ Tutti piani del fascio con supporto r contengono r e R.

Scriviamo l'equazione del fascio: $\mathcal{F}_r$: $\boxed{\alpha(x+y-1)+\beta(z-1)=0}$, $\alpha,\beta\neq 0$

↳ più coppie di parametri corrispondono allo stesso piano. Definiamo $K=\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow (x+y+z-1)+K(z-1)=0 \Rightarrow$ non è ambiguo MA ho perso tutti i piani $(0,\beta)=\pi_2$

Dobbiamo aggiungere a parte π_2

per $h\neq 2$: $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t_1-2t_2\\ t_1+ht_2\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t_1-2t_2\\ y=t_1+ht_2\\ z=1\end{cases}$ Per trovare l'algebrica, risolviamo $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x-1\\ 1 & h & y\\ 0 & 0 & z-1\end{array}\right] \to \underline{z=1}$

$(x,y,z)-P$

2) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ r: $\begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=0\end{cases}$.

1) Scrivere $\boxed{s \text{ avente la stessa giacitura a } r}$ e contenente $P=(1,1,1)$

↳ $r \parallel s$

1.1) Calcoliamo la rapp. parametrica di r (risolvo il sistema): $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \to [\dots] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ -y+2z=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=\underbrace{\overset{x_0}{\boxed{(0,1,0)}}}_{Q}+\underbrace{\overset{x_p}{\boxed{t(-1,2,1)}}}_{v}$

La giacitura di s è $\mathcal{L}(v)$: $(1,1,1)+t(-1,2,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1-t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases} \Rightarrow$ [risolvo in t] $\Rightarrow \underline{\begin{cases} 2x+y=3\\ x+z=2\end{cases}}$

1.2) Usiamo il fascio improprio di r: $\begin{cases} x+y-z-1=0 \to \pi_1\\ x+z=0 \to \pi_2\end{cases}$. Se sposto uno dei due piani parallelamente, ottengo una retta parallela r.

Scriviamo tutti piani paralleli a π_1 ($\mathcal{F}_1$) e a π_2 ($\mathcal{F}_2$):

$\mathcal{F}_1$: $x+y-z=K_1$ $\quad$ $\mathcal{F}_2$: $x+z=K_2$

La generica r_{K_1,K_2} sarà $\begin{cases} x+y-z=K_1\\ x+z=K_2\end{cases}$. Impongo il passaggio per P: $\begin{cases} 1+1-1=K_1\\ 1+1=K_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1=1\\ K_2=2\end{cases}$. La retta s sarà $\underline{\begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=2\end{cases}} \Rightarrow$ Le due rappresentazioni sono equivalenti: $\begin{cases} 2x+y=3\\ x+z=2\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=2\end{cases}$ $2x+y=3$

3) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $h\in\mathbb{R}$, π_1: $x+y-z=-1$, π_2: $x+hy-hz=-3h$, π_3: $hy+z=1-h$

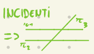
1) Mutua posizione dei piani
2) per $h=2$, trova $P=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$
3) per $h=-1$, verifica che i piani appartengono al medesimo fascio

trovare r sostegno del fascio e la parallela contenente P.

1) prendiamo $[A_h|B_h]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & h & -h & -3h\\ 0 & h & 1 & 1-h\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & h-1 & -h+1 & 1-3h\\ 0 & h & 1 & 1-h\end{array}\right] \to \begin{vmatrix} h-1 & -h+1\\ h & 1\end{vmatrix} = 3$

per $h\neq\pm 1 \Rightarrow \exists$ soluzione di $[A_h|B_h] \Rightarrow$ i piani si intersecano $\Rightarrow$ INCIDENTI

per $h=1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \Rightarrow$ impossibile $\quad$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1-h\end{array}\right]$ $\to \parallel$, $\to \times \Rightarrow$



per $h=-1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow$ i piani si intersecano lungo una retta.

2) $h=2$: $[A_2'|B_2'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-1 \\ y-z=-5 \\ 3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow P=(4,-2,3)$

3) $h=-1$: $[A_{-1}'|B_{-1}'] = [\dots] \to r: \begin{cases} x+y-z=-1 \\ -y+z=2 \end{cases}$. Troviamo la parametrica: $\begin{cases} x=1 \\ y=t-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow r: (1,-2,0)+t(0,1,1)$.

Scriviamo s con la stessa giacitura ma punto di partenza P: $s: (4,-2,3)+t(0,1,1)$

4) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $r_1: \begin{cases} x+hy+z=1 \\ y-z=h \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$

1) Mutua posizione di r_1 e r_2

2) $\exists h: \exists \pi \supseteq r_1, r_2$. Rappresentazione alg/par. di π

1.1) Studiamo $r_1 \cap r_2$: $\begin{cases} -2t+h(-1+t)+\cancel{1}+t=\cancel{1} \\ -1+\cancel{t}-1-\cancel{t}=h \end{cases} \to \begin{cases} -2t+2-2t+t=0 \\ h=-2 \end{cases} \to \begin{cases} t=\frac{2}{3} \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow$ sistema risolvibile solo se $h=-2 \Rightarrow$ le due rette sono incidenti per $h=-2$ in $P=(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, +\frac{5}{3})$

Calcoliamo le giaciture ($r_1 // r_2$). La giacitura di r_2 è $U=\mathcal{L}(-2,1,1)$. Calcoliamo quella di r_1: $(1-h^2-ht_1, -t_1, h+t_1, t_1) = \mathcal{L}((-1-h, 1, 1))$. Le due giaciture sono uguali se e solo se $-2=-1-h \Rightarrow$ $h=1 \Rightarrow$ PARALLELE

Per $h \neq 1$, $h \neq -2$ le rette sono sghembe.

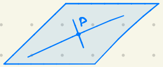
1.2) Scriviamo r_2 in forma alg.: $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ -y+z-2=0 \end{cases}$. Scriviamo $[\hat{A}|\hat{B}]$ e studiamone il rango:

$[\hat{A}|\hat{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & h \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & h-2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h-1 & 2h-1 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{array}\right]$

per $h=1$: $r(\hat{A}|\hat{B}) > r(\hat{A}) = n-q \Rightarrow$ PAR.
per $h=-2$: $r(\hat{A}|\hat{B}) = r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow$ INC.
per $h \neq 1, h \neq 2$ $r(\hat{A}|\hat{B}) > r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow$ SGH.

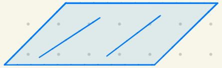
2) Le rette sono contenute in un piano se sono incidenti/parallele $\Rightarrow h=1 \vee h=2$

per $h=-2$ $r_1 \cap r_2 = P$. La giacitura di π è $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \underbrace{(0,-1,1)}_{r_2 \text{ in } t=0} + t_1(1;1,-1)+t_2(-2,1,1)$; $\begin{cases} x=-t_1-2t_2 \\ y=1-t_1+t_2 \\ z=1-t_1+t_2 \end{cases} \to -y+z=2$



per $h=1$ Costruiamo il fascio a supporto su r_1: $\mathcal{F}_\pi: (x+y+z-1)+K(y-z-1)=0$ Impongo che il fascio contenga $r_2 \Rightarrow$ piano per punto $P(0,-1,1) \Rightarrow \cancel{0}-\cancel{1}+1-1+K(-1-1-1)=0$ $K=-\frac{1}{3}$

$\mathcal{F}_{\pi,K}$: $x+y+z-1-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}=0$ $x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z-\frac{2}{3}=0$



5) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ $r_1: \begin{cases} x+iy-z=1+i \\ x-iy-z=1-i \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x-iz=1 \\ iy=i \end{cases}$, π $x+y+z=0$

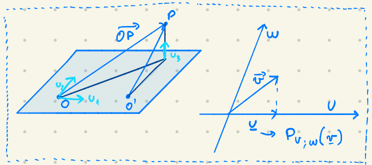
1) Mutua posizione di r_1, r_2

2) Proiettare $P=r_1 \cap r_2$ su π secondo le direzioni di r_1, r_2

3) Trovare i segmenti del triangolo di vertici P, $P_{\pi,r_1}(P)$, $P_{\pi,r_2}(P)$

1) $[\hat{A}|\hat{B}]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 1 & -i & -1 & 1-i \\ 1 & 0 & -i & 1 \\ 0 & i & 0 & i \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 0 & -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 1-i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to r(\hat{A}|\hat{B}) = r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow$ INCIDENTI

2) Calcoliamo P: [risolvo$[\tilde{A}|\tilde{B}]$] $\Rightarrow (1,1,0)$.



Calcoliamo $P_{\pi;\alpha_1}$: $O=(0,0,0) \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(1,1,0)$

Scomponiamo lungo la giacitura di π e di α_1:

$$\left.\begin{aligned} U_{\alpha_1} &= \mathcal{L}((1,\underset{u_3}{0},1)) \\ U_{\pi} &= \mathcal{L}((-1,\underset{u_1}{1},0),(-1,\underset{u_2}{0},1)) \end{aligned}\right] (1,1,0)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1)+\beta(1,0,1)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2+\beta=1 \\ \alpha_1+0+0=1 \\ 0+\alpha_2+\beta=0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-1 \\ \beta=+1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\underbrace{(-1,1,0)+(+1,0,-1)}_{(0,\,1,\,-1)}+\underbrace{(+1,0,+1)}$$

$$(0,1,-1) \to O-(0,1,-1)=(0,-1,1)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per α_2 e otteniamo: $P_{\pi,\alpha_2}(P)=(-i,1,-1+i)$

Per trovare i vertici facciamo:
1) $P_{\pi,\alpha_1}-P_{\pi,\alpha_2}$
2) $P_{\pi,\alpha_1}-P$
3) $P_{\pi,\alpha_2}-P$