Prova di recupero 23/05/2012

Esercizio 1

Siano

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{b_1}) = \mathbf{b_1} + 2\mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}, \qquad f(\mathbf{b_2}) = 2\mathbf{b_1} + 3\mathbf{b_2}, \qquad f(\mathbf{b_3}) = 3\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}.$$

- Dimostrare che $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$.
- Si scriva la matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alla base B.
- Si calcoli la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.
- Si dica se l'applicazione f é iniettiva e/o suriettiva.
- Esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$? In caso affermativo calcolare $\mathbf{v}|_B$.

Esercizio 2

Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + 2z = 5 \\ ky + kz = 2 + 2k \\ x + kz = -1 + 2k \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale k.

- Discutere l'esistenza ed il numero delle soluzione del sistema al variare di k.
- Quando possibile risolvere il sistema.
- Interpretare geometricamente i risultati.
- Dimostrare che la prima e la terza equazione del sistema determinano una retta per ogni valore di k.