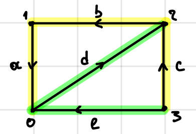
...

## 3.6 TAGLI E MAGLIE FONDAMENTALI

Le maglie fondamentali sono quelle maglie contenenti un solo lato di co-albero. Esse sono in tutto $l-n+1$. Un co-albero è il grafo formato dai lati che non fanno parte dell'albero.

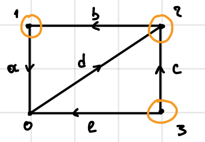
Un taglio fondamentale è un taglio che contiene solo un lato di albero. Essi sono $n-1$.

Un taglio nodale è un taglio che contiene un solo nodo ad esclusione del nodo fondamentale. Essi sono $n-1$.

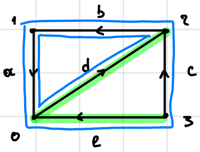


albero: a-b-c

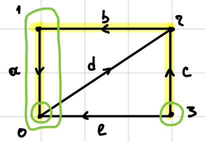
coalbero: d-e



TAGLI NODALI



MAGLIE FONDAMENTALI

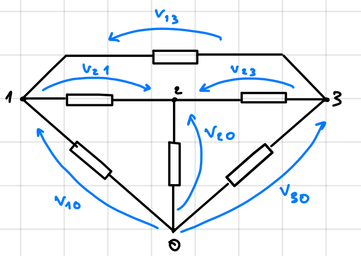


TAGLI FONDAMENTALI

Se l'albero è a stella, allora i tagli nodali sono anche fondamentali.

I tagli fondamentali ci permettono di scrivere $n-1$ KCL linearmente indipendenti. Stessa cosa per le maglie fondamentali: ci permettono di scrivere $l-n+1$ KVL linearmente indipendenti.

### ESERCIZIO

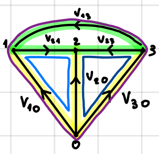



$V_{21} = 3\,V$

$V_{10} = 2\,V$

$V_{30} = -1\,V$

$n=4\,,\ l=6$



- MAGLIA 1 →
- MAGLIA 2 →
- MAGLIA 3 →

(senso antior.)

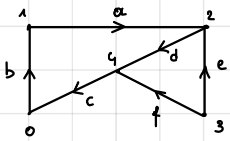
$$\begin{cases} V_{30} + V_{13} - V_{10} = 0 \\ V_{30} + V_{23} - V_{20} = 0 \\ V_{20} - V_{21} - V_{10} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} V_{13} = 3\,V \\ V_{23} = 6\,V \\ V_{20} = 5\,V \end{cases}$$

## 4.7 MATRICE D'INCIDENZA

È un modo compatto per rappresentare un grafo orientato. Usando le matrici di incidenza è facile scrivere le equazioni per risolvere un circuito.

Dato un grafo connesso di $n$ nodi e $l$ lati la matrice d'incidenza $A_a \in Mat(n; l; \mathbb{R})$ avrà elementi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ incide su } i \text{ ed è uscente} \\ -1 & \text{se } j \text{ incide su } i \text{ ed è entrante} \\ 0 & \text{se } j \text{ non incide su } i \end{cases}$$



$n=5,\ l=6$ →

$$A_a \quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

### 4.7.1 PROPRIETÀ

1) $n-1$ colonne linearmente indipendenti di $A_a$ costituiscono un albero
2) Le righe sono tutte linearmente dipendenti

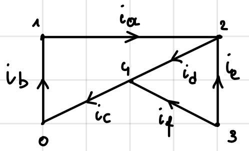
### 4.7.2 MATRICE D'INCIDENZA RIDOTTA

A causa della ② in 4.7.1, è possibile definire la matrice d'incidenza ridotta $A \in Mat(n-1; l; \mathbb{R})$ ottenuta rimuovendo una riga dalla matrice d'incidenza completa.

Il nodo superfluo si sceglie in modo arbitrario

### 4.7.3 MATRICE D'INCIDENZA RIDOTTA E CIRCUITI

Consideriamo il seguente grafo delle correnti in convenzione normale:

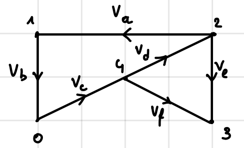



$\longrightarrow \quad A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix}}^{\underline{i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_a - i_b \\ -i_a + i_d - i_e \\ i_e + i_f \\ i_c - i_d - i_f \end{bmatrix}}_{\text{KCL necessarie}} = \underline{0}$$

Possiamo, così, scrivere le $n-1$ KCL come $A\underline{i}=0$ dove $\underline{i}$ è il vettore delle intensità caratteristiche.

Visto che usiamo la convenzione normale, è facile passare al grafo delle tensioni:




$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^T \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 \\ v_4 \\ v_2 - v_4 \\ -v_2 + v_3 \\ v_3 + v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ V_f \end{bmatrix}$$

Possiamo, così, scrivere le $l-n+1$ KVL come $A^T \cdot \underline{v} = \underline{V}$ dove:

- $\underline{v}$ è il vettore dei potenziali di nodo aventi nodo fondamentale quello rimosso nel passare da $A_a$ ad $A$;
- $\underline{V}$ il vettore con tutti i voltaggi di lati

### 4.8 EQUAZIONI DI TABLEAU

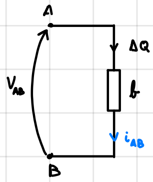
Per equazioni di Tableau si intende il seguente sistema:

$$\begin{cases} A\underline{i} = 0 \\ \underline{V} - A^T\underline{v} = 0 \end{cases}$$

Questo sistema avrà: $2l + n - 1$ incognite, $n-1+l$ equazioni (le $l$ mancanti sono le equazioni costitutive)

### 4.9 POTENZA ED ENERGIA ELETTRICA

Consideriamo un bipolo $b$ attraversato da carica $\Delta Q$ in un intervallo $\Delta t$ e che $\Delta Q > 0$ scorre da A a B:




$$\mathcal{L}_{AB} = \Delta Q \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

$$V_{AB} = -\int_{BA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\mathcal{L}_{AB}}{\Delta Q}$$

Man mano che la carica si sposta, perde energia potenziale. L'energia persa per andare da A a B è pari al lavoro compiuto da $\vec{E}$ per spostare $\Delta Q$ da A a B:

$$\Delta W = \mathcal{L}_{AB} = V_{AB} \Delta Q$$

Definiamo, allora, la POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA DA UN BIPOLO

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_{AB} \Delta Q}{\Delta t} = V_{AB} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = V_{AB} \frac{dQ}{dt} = V_{AB}\, i_{AB}$$

$[W] = [V][A]$ (Watt)

NOTE:
- viene utilizzata la convenzione normale.
- se $p_a(t) > 0$ viene assorbita potenza. Se $p_a(t) < 0$ il bipolo sta cedendo energia

La POTENZA EROGATA DA UN BIPOLO è: $p_e(t) = -p_a(t)$

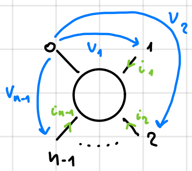
Se viene utilizzata la convenzione dei generatori dobbiamo invertire i segni:

$$p_a(t) = -Vi$$

$$p_e(t) = Vi$$

### 4.9.1 GENERALIZZAZIONE PER UN N-POLO

Prendiamo un n-polo con polo di riferimento 0 e la stessa situazione di prima:




$$p_a(t) = \sum_{K=1}^{n-1} V_K i_K$$

$$p_e(t) = -p_a(t)$$

Sempre usando convenzione normale.