Formulario di probabilità e statistica per 099319–PSI
AA 2020/21, Docenti Bassetti, Epifani, Ladelli

Notazioni

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ se } k \in \{0, \ldots, n\}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} dx \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \forall \alpha > 0 \quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$$

Regole di conteggio. Cardinalità di

disposizioni senza ripetizione di n oggetti di ordine k, cioè stringhe di k oggetti ordinati e distinti estratti da un insieme di n: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$

permutazioni di n oggetti senza ripetizione: $n! = n(n-1) \times 2 \times 1$

disposizioni con ripetizione di n oggetti di ordine k, cioè stringhe di k elementi ordinati e ripetibili estratti da un insieme di n: n^k

combinazioni (senza ripetizione) cioè sottoinsiemi di k elementi estratti da un insieme di n: $\binom{n}{k}$

Densità discrete univariate

$X \sim$ **Be**(p)**: Benoulliana di parametro** $p \in (0,1)$

$$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}\mathbf{1}_{\{0,1\}}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p), \qquad m_X(t) = (1-p+pe^t)$$

$X \sim$ **Bi**(n,p)**: Binomiale di parametri** $n \in \mathbb{N}$**,** $p \in (0,1)$

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}\mathbf{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x), \quad \mathrm{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p), \quad m_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

$X \sim$ **Iperg**$(b+r, r, n)$**: Ipergeometrica di parametri** $b+r, r, n \in \mathbb{N}$

$$f_X(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{r+b}{n}} \mathbf{1}_{\{\max(0,n-b),\max(0,n-b)+1,\ldots,\min(n,r)\}}(x),$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{nr}{b+r}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{nbr}{(b+r)^2}\left(1 - \frac{n-1}{b+r-1}\right)$$

$X \sim$ **Geom**(p)**: Geometrica di parametro** $p \in (0,1)$

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1}\mathbf{1}_{\{1,2,\ldots\}}(x), \quad \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$m_X(t) = \frac{p\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\mathrm{e}^t} \quad \text{per } t < -\log(1-p)$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: **Poisson di parametro** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathbf{1}_{\{0,1,\dots\}}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda, \qquad m_X(t) = \exp(\lambda(\mathrm{e}^t - 1))$$

Densità assolutamente continue univariate

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: **Normale di parametri** $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \qquad m_X(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$X \sim$ **Lognorm**(μ, σ): **Lognormale di parametri** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$: **Uniforme in** $[a, b]$**,** $a < b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad m_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$: **Gamma di parametri** $\alpha > 0$**,** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \qquad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \quad \text{per } t < \lambda$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: **Esponenziale di parametro** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \quad \text{per } t < \lambda$$

$X \sim \chi^2(m)$: **Chi quadrato con** $m = 1, 2, \dots$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{m/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathrm{E}(X) = m, \quad \mathrm{Var}(X) = 2m, \quad m_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{m}{2}}} \quad \text{per } t < \frac{1}{2}$$

$X \sim$ **Weib**(α, λ): **Weibull di parametri** $\alpha > 0$**,** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{1/\alpha}}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\lambda^{2/\alpha}}$$

$X \sim t(m)$: **t di student con** $m \in \mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}, \quad \mathrm{E}(X) = 0 \text{ per } m > 1, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{m}{m-2} \text{ per } m > 2$$

$X \sim F(m, n)$: F **di Fisher con** $m, n \in \mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{(m-2)/2}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{(m+n)/2}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{n}{n-2} \text{ per } n > 2,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad \text{per } n > 4$$

Densità assolutamente continue bivariate

$(X,Y)^T \sim \mathcal{N}(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)$: **densità gaussiana bivariata**

$$f_{X\,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}, \quad \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(R)$: **densità congiunta uniforme su $R \subset \mathbb{R}^2$ limitato**

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Area(R)} & (x,y)\in R \\ 0 & (x,y)\notin R \end{cases}$$

Intervalli di confidenza

$1-\alpha$ = livello di confidenza (esatto o asintotico) degli intervalli $(0<\alpha<1/2)$

Media

Con varianza nota σ_0^2, campione casuale normale o numeroso

$$\left(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \qquad \left(\overline{X}_n - z_{\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_n + z_{\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Con varianza incognita, campione casuale normale

$$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \qquad \left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Con varianza incognita, campione casuale non normale numeroso

$$\left(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \qquad \left(\overline{X}_n - z_{\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_n + z_{\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Campione casuale di Bernoulli numeroso

$$\left(\max\left\{0, \overline{X}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right\}\ ,\ \min\left\{1, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right\}\right)$$

$$\left(\max\left\{0, \overline{X}_n - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right\}\ ,\ 1\right] \qquad \left[0\ ,\ \min\left\{1, \overline{X}_n + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right\}\right)$$

Differenza tra medie $\mu_X - \mu_Y$

Con varianze note σ_X^2, σ_Y^2, campioni casuali indipendenti normali o numerosi

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$$

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}\right)$$

Con varianze incognite ma uguali, campioni casuali indipendenti normali

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - t_{\alpha/2,m+n-2} S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + t_{\alpha/2,m+n-2} S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right)$$

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - t_{\alpha,m+n-2} S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + t_{\alpha,m+n-2} S_P \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right)$$

Con varianze incognite, campioni casuali indipendenti numerosi

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}\right)$$

$$\left(\overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha} \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(-\infty\ ,\ \overline{X}_m - \overline{Y}_n + z_{\alpha} \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}\right)$$

Campioni casuali indipendenti di Bernoulli numerosi

$$\left(\max\left\{-1, \overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}_m(1-\overline{X}_m)}{m} + \frac{\overline{Y}_n(1-\overline{Y}_n)}{n}}\right\},\right.$$

$$\left.\min\left\{1, \overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}_m(1-\overline{X}_m)}{m} + \frac{\overline{Y}_n(1-\overline{Y}_n)}{n}}\right\}\right)$$

$$\left(\max\left\{-1, \overline{X}_m - \overline{Y}_n - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\overline{X}_m(1-\overline{X}_m)}{m} + \frac{\overline{Y}_n(1-\overline{Y}_n)}{n}}\right\}\ ,\ 1\right]$$

$$\left[-1\ ,\ \min\left\{1, \overline{X}_m - \overline{Y}_n + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\overline{X}_m(1-\overline{X}_m)}{m} + \frac{\overline{Y}_n(1-\overline{Y}_n)}{n}}\right\}\right)$$

Varianza

Con media nota, campione casuale normale

$$\left(\frac{nS_{0n}^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}}\ ,\ \frac{nS_{0n}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right) \qquad \left(\frac{nS_{0n}^2}{\chi^2_{\alpha,n}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(0\ ,\ \frac{nS_{0n}^2}{\chi^2_{1-\alpha,n}}\right)$$

Con media incognita, campione casuale normale

$$\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\ ,\ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) \qquad \left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}\ ,\ +\infty\right) \qquad \left(0\ ,\ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right)$$

Rapporto tra varianze σ_X^2/σ_Y^2

Con medie note, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\frac{1}{f_{\alpha/2,m,n}}\ ,\ \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2,m,n}}\right)=\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}f_{1-\alpha/2,n,m}\ ,\ \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}f_{\alpha/2,n,m}\right)$$
$$\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\frac{1}{f_{\alpha,m,n}}\ ,\ +\infty\right)=\left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}f_{1-\alpha,n,m}\ ,\ +\infty\right)$$
$$\left(0\ ,\ \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}\frac{1}{f_{1-\alpha,m,n}}\right)=\left(0\ ,\ \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}f_{\alpha,n,m}\right)$$

Con medie incognite, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{f_{\alpha/2,m-1,n-1}}\ ,\ \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}}\right)=\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}\ ,\ \frac{S_X^2}{S_Y^2}f_{\alpha/2,n-1,m-1}\right)$$
$$\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{f_{\alpha,m-1,n-1}}\ ,\ +\infty\right)=\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}f_{1-\alpha,n-1,m-1}\ ,\ +\infty\right)$$
$$\left(0\ ,\ \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{f_{1-\alpha,m-1,n-1}}\right)=\left(0\ ,\ \frac{S_X^2}{S_Y^2}f_{\alpha,n-1,m-1}\right)$$

Test statistici di significatività α

Media

Con varianza nota σ_0^2, campione casuale normale o numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu\neq\mu_0$ se $|z_0|\geq z_{\alpha/2}$; p-value$=2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ o $H_0\colon \mu\geq\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu<\mu_0$ se $z_0\leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$=\Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ o $H_0\colon \mu\leq\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu>\mu_0$ se $z_0\geq z_\alpha$; p-value$=1-\Phi(z_0)$

Con varianza incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu\neq\mu_0$ se $|t_0|\geq t_{\alpha/2,n-1}$; p-value$=2P(T_{n-1}\geq|t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ o $H_0\colon \mu\geq\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu<\mu_0$ se $t_0\leq -t_{\alpha,n-1}=t_{1-\alpha,n-1}$;
  p-value$=P(T_{n-1}\leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu=\mu_0$ o $H_0\colon \mu\leq\mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu>\mu_0$ se $t_0\geq t_{\alpha,n-1}$; p-value$=P(T_{n-1}\geq t_0)$

Con varianza incognita, campione casuale non normale numeroso

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ a favore di $H_1 : \mu \neq \mu_0$ se se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1 : \mu < \mu_0$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1 : \mu > \mu_0$ se $t_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(t_0)$

Proporzione con campione casuale di Bernoulli numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ a favore di $H_1 : p \neq p_0$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ o $H_0\colon p \geq p_0$ a favore di $H_1 : p < p_0$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ o $H_0\colon p \leq p_0$ a favore di $H_1 : p > p_0$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(z_0)$

Differenza tra medie $\mu_X - \mu_Y$

Con varianze note σ_X^2, σ_Y^2, campioni casuali indipendenti normali o numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(z_0)$

Con varianze incognite ma uguali, campioni casuali indipendenti normali

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2,m+n-2}$; p-value$= 2P(T_{m+n-2} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha,m+n-2} = t_{1-\alpha,m+n-2}$; p-value$=$ $P(T_{m+n-2} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha,m+n-2}$;
p-value$= P(T_{m+n-2} \geq t_0)$

Con varianze incognite, campioni casuali indipendenti numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(z_0)$

Campioni casuali bivariati normali, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i,\ i = 1, \dots, n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{D}_n}{\sqrt{S_D^2}}\sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1\colon \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2,n-1}$;
  p-value$= 2P(T_{n-1} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha,n-1} = t_{1-\alpha,n-1}$;
  p-value$= P(T_{n-1} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha,n-1}$;
  p-value$= P(T_{n-1} \geq t_0)$

Campioni casuali bivariati non normali numerosi, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i,\ i = 1, \dots, n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{D}_n}{\sqrt{S_D^2}}\sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1\colon \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(t_0)$

Differenza tra proporzioni $p_X - p_Y$ con campioni casuali di Bernoulli numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \quad \text{con} \quad \hat{P} := \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X \neq p_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ o $H_0\colon p_X \geq p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X < p_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ o $H_0\colon p_X \leq p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X > p_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1 - \Phi(z_0)$

Varianza

Con media nota, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{nS_{0n}^2}{\sigma_0^2}, \qquad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha/2,n}$ o $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n}$;
  p-value$= 2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n}$; p-value$= P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,n}$; p-value$= P(\chi_n^2 \geq x_0^2)$

Con media incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}, \qquad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ o $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$;
  p-value$= 2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi^2_{n-1} \leq x_0^2)\}$ e $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$;
  p-value$= P(\chi^2_{n-1} \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,n-1}$;
  p-value$= P(\chi^2_{n-1} \geq x_0^2)$

Rapporto tra varianze σ_X^2/σ_Y^2

Con medie note, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}, \qquad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2,m,n}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2,m,n}$;
  p-value$= 2\min\{p_1, p_2\}$, con $p_1 = P(F_{m,n} \leq f_0)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha,m,n}$;
  p-value$= P(F_{m,n} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha,m,n}$;
  p-value$= P(F_{m,n} \geq f_0)$

Con medie incognite, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \qquad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2,m-1,n-1}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$;
  p-value$= 2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(F_{m-1,n-1} \leq f_0)$ e $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha,m-1,n-1}$;
  p-value$= P(F_{m-1,n-1} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha,m-1,n-1}$;
  p-value$= P(F_{m-1,n-1} \geq f_0)$

Test di buon adattamento del chi quadrato

$X_1, \ldots, X_n$ campione casuale numeroso da una f.d.r. F, raggruppato in classi

Ipotesi: $H_0\colon F = F_0$ contro $H_1\colon$ "H_0 è falsa"

$k =$ "numero di classi in cui sono raggruppati i dati"

$p_i^0 := P_{H_0}($"X_1 cade nella classe i"$)$

$N_i =$ "numero di $X_1, \ldots, X_n$ che cadono nella classe i"

Adattamento a distribuzione completamente specificata

Ogni p_i^0 è completamente specificato (cioè ogni p_i^0 è un numero)

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{np_i^0}\right) - n, \quad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$; p-value $\simeq P(\chi^2_{k-1} \geq x_0^2)$

Adattamento a distribuzione con parametri incogniti

$h =$ "numero di parametri incogniti presenti nella distribuzione ipotizzata sotto H_0 e stimati con i dati"

$\hat{p}_i^0 =$ stimatore di p_i^0, $\quad i = 1, \ldots, k$

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{n\hat{p}_i^0} - n, \quad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1-h}$; p-value $\simeq P(\chi^2_{k-1-h} \geq x_0^2)$

Test di indipendenza del chi quadrato

Campione casuale bivariato $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ da una di densità incognita $p_{ij} := P(X = i, Y = j)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$

$N_{ij} :=$ "numero di coppie $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ che assumono valore (i, j)"

$N_{i\cdot} = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} N_{ij} =$ "numero di $X_1, \dots, X_n$ che assumono valore i"

$N_{\cdot j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_{ij} =$ "numero di $Y_1, \dots, Y_n$ che assumono valore j"

$\hat{p}_i := N_{i\cdot}/n$

$\hat{q}_j := N_{\cdot j}/n$

Statistica test: $X_*^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{ij} - n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j} = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{N_{ij}^2}{N_{i\cdot}N_{\cdot j}} - n$, $\quad x_*^2 =$ valore assunto da X_*^2

- Si rifiuta H_0: "X, Y *sono indipendenti*" a favore di H_1: "X, Y *non sono indipendenti*" se $x_*^2 \geq \chi^2_{\alpha,(r-1)\times(s-1)}$; $\quad p$-value $\simeq P(\chi^2_{(r-1)\times(s-1)} \geq x_*^2)$