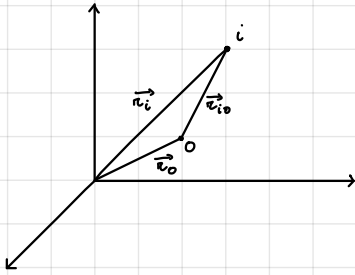


### 5.3 SECONDA EQ. CARDINALE

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali ed un polo  $O$ :



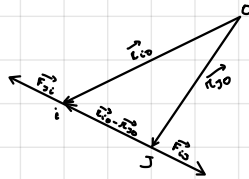
$$\vec{L}_{iO} = \vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{i=1}^N \vec{L}_{iO} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d\vec{r}_{iO}}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{iO} \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_{iO} \times \frac{d\vec{F}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i \right] \\ &= -\vec{v}_O \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iO} \times (\vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i) \\ &= -\vec{v}_O \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i^i \\ &= -\vec{v}_O \times \vec{P} + \vec{M}^E + \vec{M}^i \end{aligned}$$

Dimostriamo che  $\vec{M}^i$  è nullo:

$$\vec{M}^i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i^i \rightarrow \text{poiché parliamo di forze interne, prendiamo le forze a due a due (uguali e opposte per 3° p.d.)}$$

$$\vec{M}_{12}^i = \vec{r}_{1O} \times \vec{F}_{21}^i + \vec{r}_{2O} \times \vec{F}_{12}^i = (\vec{r}_{1O} - \vec{r}_{2O}) \times \vec{F}_{12}^i \rightarrow \vec{r}_{1O} - \vec{r}_{2O} \parallel \vec{F}_{12}^i \rightarrow \vec{M}^i = 0$$

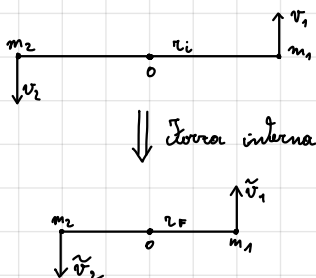


L'espressione  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times \vec{P} + \vec{M}^E$  è detta 2ª eq. cardinale. Il primo termine è nullo, quindi rimane solo il momento delle forze esterne. Noi superiamo di esso in uno di questi casi, richiedendo la seconda legge cardinale a:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

È ovvio che se  $\vec{M}^E = 0$ , allora il momento angolare risulterà costante.

### ESERCIZIO



$$m_1 = m_2 = m$$

$$v_1 = v_2 = v$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

$$r_i > r_F$$

$$L = |m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2| = 2m r v$$

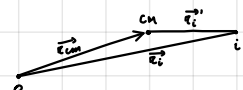
$$e \perp v, \vec{r}_1 = -\vec{r}_2, \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

$$L_i = L_F \rightarrow 2m r_i v_i = 2m r_F v_F \rightarrow v_F = \frac{r_i}{r_F} v_i \Rightarrow v_F > v_i$$

### 5.4 TEOREMI DI KÖNIG

Definiamo il sistema del centro di massa come un sistema di riferimento che ha origine nel centro di massa e gli assi sono paralleli al sistema inerziale. Come varia il momento angolare tra i due sistemi?

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') = \\ &= \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i' + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \\ &= \vec{r}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}' = \vec{L}_{cm} + \vec{L}' \end{aligned}$$



Studiamo l'energia cinetica:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' =$$
$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + E_c'$$

↓  
energia cin. calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa.  
 $E_c^{cm} \rightarrow$  energia cinetica centro di massa

## 10 URTI

### 10.1 FORZA IMPULSIVA, URTO E IMPULSO

Si definisce forza impulsiva una forza che agisce per un periodo molto breve e con intensità più grande di tutte le altre forze.  
Si definisce, quindi, urto (evento impulsivo) quando due corpi interagiscono mediante una forza impulsiva. Il contatto tra i due corpi non è necessario!

Dato una forza  $\vec{F}$ , si definisce impulso di  $\vec{F}$ :

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} d\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$
$$[I] = [F][t] = [m][L][T^{-1}][T] = [m][L][T^{-1}] \rightarrow \text{quantità di moto.}$$

La relazione  $\vec{I} = \Delta \vec{p}$  è detta teorema dell'impulso.