Integrali generalizzati

Sia $[a;x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Sia $g: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ continua con f, g non positive.
Se $f(x) \le 0 \ \forall x \in [a;x_0)$ e $g(x) \le 0 \ \forall x \in [a;+\infty)$ si ha: $\int_a^{x_0} f(x)dx = -\int_a^{x_0} [-f(x)]dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) = -\int_a^{+\infty} [-g(x)]dx$

Siano $f: [a;x_0) \to \mathbb{R}$, $g: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Studio f il segno nell'intorno di x_0. Se esiste $c \in [a;x_0]$ tale che f ha segno costante allora: $\int_a^{x_0} f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c} f(x)dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_c^{x_0} f(x)dx}$

→ o positivo o negativo (vedi prec.)

Sia $g: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Se esiste $c \in [a;+\infty)$ tale che g abbia segno costante per $x \in [c;+\infty)$ ha segno costante allora
$\int_a^{x_0} g(x)dx = \int_a^{c} g(x)dx + \int_c^{+\infty} g(x)dx$

Criterio di convergenza assoluta

Sia $f: [a;x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Se converge $\int_a^{x_0} |f(x)|dx$ allora converge $\int_a^{x_0} f(x)dx$.
Vale inoltre la disuguaglianza $\left|\int_a^{x_0} f(x)dx\right| = \int_a^{x_0} |f(x)|dx$

Sia $g: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Se $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ converge allora $\int_a^{+\infty} g(x)$ converge.
Vale inoltre la disuguaglianza $\left|\int_a^{+\infty} g(x)dx\right| = \int_a^{+\infty} |g(x)|dx$

Legame integrale-serie

Sia $f: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ non crescente. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ e $\left\{\int_a^{n} f(x)dx\right\}_{n \in \mathbb{N}, n > a}$.
In caso di convergenza $\lim_{n\to+\infty} \left\{\int_0^{n} f(x)dx\right\}_{n \in \mathbb{N}, n > a} \le \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) < f(0) + \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} f(x)dx$

$F(x) = \int_0^{x} \frac{te^t}{(1-t)^2} dt \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} \int_0^{x} \frac{te^t}{(1-t)^2} dt \Rightarrow$ diverge $\Rightarrow D_F = (-\infty; 1) \Rightarrow$ si ferma a 1 perché per il teorema fondamentale del calcolo la primitiva deve essere continua.

$f(t) \sim \frac{e}{(1-t)^2} \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e}{(1-t)^2} = +\infty$