ESERCITAZIONE ANALISI 1 1° OTTOBRE

Binomio di Newton

① Nello sviluppo di $\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^7$ esistono i termini x^3 e $\sqrt{x}$? Se sì, calcolarne i coefficienti.

$$\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2\sqrt{x}^{\,7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{7-k}x^{\frac{7-k}{2}-k}(-3)^{k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{7-k}x^{\frac{7-3k}{2}}(-3)^{k}$$

- per trovare x^3 dobbiamo fare $\frac{7-3k}{2}=3$ $\quad 7-3k=6 \quad k=\frac{7-6}{3}\notin\mathbb{N} \Rightarrow$ non c'è
- per trovare $\sqrt{x}$ dobbiamo fare $\frac{7-3k}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad 7-3k=1 \quad k=2\in\mathbb{N} \Rightarrow$ $\sqrt{x}$ è nello sviluppo
- qual è il suo coefficiente: $\binom{7}{2}2^{7-2}(-3)^2=\frac{7!}{2!\,5!}\cdot2^5\cdot9=\frac{7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{2!\,\cancel{5!}}\cdot32\cdot9=21\cdot32\cdot9=6048$

Estremi di un insieme

② Determinare se esistenti min, max, inf, sup di $E=\{x\in\mathbb{R}\mid\sqrt{x^2-4x+3}\geq2-x\}$

Risolvo la disequazione: $\begin{cases}x^2-4x+3\geq0\\2-x\geq0\\x^2-4x+3\geq(2-x)^2\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-4x+3\geq0\\2-x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(x-1)(x-3)\geq0\\x\leq-2\\\cancel{x^2}-\cancel{4x}+3\geq4+\cancel{x^2}-\cancel{4x}\end{cases}\cup\begin{cases}(x-1)(x-3)\geq0\\x>2\end{cases}\rightarrow$

$\rightarrow\varnothing\quad\cup\begin{cases}x\leq1\cup x\geq3\\x>2\end{cases}\Rightarrow x\geq3\Rightarrow E=[3;+\infty)$

$\inf(E)=\min(E)=3$; Non esistono maggioranti $\Rightarrow\nexists\ \sup(E),\max(E)$ $(\sup(E)=+\infty)$

③ // $E = \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2} \leq 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ (per quali a la disequazione ha soluzioni in tutto $\mathbb{R}$)

Risolvo la disequazione: $1-x^2+x^2>0$ $\Delta<0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso moltiplicare:

$2-ax-x^2 \leq 3-3x+3x^2$ $\quad 4x^2+(a-3)x+1 \geq 0$ $\quad \Delta \leq 0 \Rightarrow (a-3)^2-4\cdot4\cdot1 = a^2+9-6a-16$

$= a^2-6a-7 = (a-7)(a+1) \leq 0$

$\Downarrow$

$E: [-1;7]$

$\inf(E) = \min(E) = -1$; $\sup(E) = \max(E) = 7$

④ // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \geq \sqrt{5-2x} \right\}$ HOMEWORK

⑤ // $E = \left\{ \frac{n+2}{n+1},\; n \in \mathbb{N}-\{0\} \right\}$

Di sicuro è inferiormente limitato perché $\mathbb{N}-\{0\}$ è inferiormente limitato.

0 è minorante: $\frac{n+2}{n+1}>0$; 1 è minorante: $n+2>n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1}>1$.

Consideriamo $1+\varepsilon$, con $\varepsilon>0$, e vediamo se è minorante: $\frac{n+2}{n+1} \geq 1+\varepsilon$ $\quad \frac{n+2-n-1}{n+1} \geq \varepsilon$ $\quad \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$ $\quad n+1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}+1$

$\downarrow$

La disuguaglianza non vale $\forall x \geq 1 \Rightarrow 1+\varepsilon$ non è minorante $\Rightarrow \inf(E)=1$

$\nexists \min(E)$

Scriviamo $\frac{n+2}{n+1}$ come $1+\frac{1}{n+1}$. $\frac{1}{n+1}$ decresce all'aumentare di n, quindi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2}$

Per $n=1$ $\frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2}$ quindi $\frac{3}{2}$ è massimo ed estremo superiore $\Rightarrow$ $\max(E) = \sup(E) = \frac{3}{2}$

⑥ // $E = \left\{ \frac{m}{n}+1 ,\ m \in \mathbb{N} ,\ n \in \mathbb{N}-\{0\} \right\}$

1 è minorante: per $m=0$ abbiamo $\frac{0}{n}+1=1 \Rightarrow$ $\mathrm{Inf}(E) = \min(E) = 1$

Esiste un maggiorante M tale che $\frac{m}{n}+1 \leq M$?

$\frac{m}{n}+1 \leq M$ $\quad \frac{m}{n} \leq M-1$ $\quad m \leq n(M-1) \Rightarrow$ condizione non valida per tutti gli m, n, quindi $\nexists\ \mathrm{Sup}(E) = \max(E)$

⑦ // $E = \left\{ \frac{r}{r^2+1} ,\ r \in \mathbb{Q}^+ \right\}$ $\quad (\mathbb{Q}^+ = \{ r \geq 0 ,\ r \in \mathbb{Q} \})$

? Poiché $\mathbb{Q}^+$ è inferiormente limitato, $\frac{r}{r^2+1} > 0 \Rightarrow \exists$ Inf? Se consideriamo $(r-1)^2 \geq 0$ abbiamo $\frac{r^2+1}{r} \geq \frac{2r}{r}$ $\quad \frac{r}{r^2+1} \leq \frac{1}{2}$

quindi $\frac{1}{2}$ è maggiorante. Però, per $r=1$ $\frac{r}{r^2+1} = \frac{1}{2}$ quindi $\frac{1}{2}$ è anche massimo $\Rightarrow$ $\mathrm{Sup}(E) = \max(E) = \frac{1}{2}$

$\emptyset$ è minorante, lo è anche $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{r}{r^2+1} \geq \varepsilon$ $\quad r \geq \varepsilon r^2 + \varepsilon$ $\quad \varepsilon r^2 - r + \varepsilon \leq 0$ $\quad \Delta = 1-4\varepsilon^2$ $\begin{cases} >0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ =0 & \varepsilon^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon = \pm\frac{1}{2} \\ <0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon < -\frac{1}{2} \vee \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$

L'espressione non vale $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, quindi ε non è un minorante e quindi $\mathrm{Inf}(E) = 0$, $\nexists \min(E)$

⑧ // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{\sqrt{2x+9}} \leq 2^{9-x} \right\}$ $\quad \left(E = \left[-\frac{9}{2} ; 10-2\sqrt{7} \right] \right)$

⑨ Considero $E_1 = E \cap \mathbb{Q}$, $E_2 = E \cap \mathbb{N}$ con E uguale a ⑧.

$-\frac{9}{2}$ sarà ancora minimo ed estremo inferiore poiché è razionale.

$10-2\sqrt{7}$ non è razionale quindi non potrà più essere massimo però è ancora estremo superiore in quanto il più piccolo dei maggioranti.

E_2, invece, ha un numero finito di elementi, quindi ha sicuramente il massimo ed il minimo.

Per calcolarli devo trovare il più piccolo e il più grande intero all'interno di E_2.

Posso prendere $\emptyset$ come più piccolo ($\min(E)$ è negativo) e 4 come più grande (trovo la più piccola approssimazione del $\max(E)$).