Basi e Dimensione

Prof.
Marco
Compagnoni

BASI :

- Definizione — SEZIONE 4.3
- Esempi
- Mappa delle componenti

- Vettori generatori — SEZIONE 4.4
- Vettori indipendenti
- Caratterizzazione delle basi

- Esistenza delle basi — SEZIONE 4.5
- Dimensione

COMBINAZIONI LINEARI (DEFINIZIONE 4.21)

$\underline{v} = t_1 \cdot \underline{u}_1 + \ldots + t_m \cdot \underline{u}_m$ è detta combinazione lineare di vettori.

BASI (DEFINIZIONE 4.22)

$B = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subset V$ è detta base di V se per ogni $\underline{v} \in V$ esiste unica la decomposizione $\underline{v} = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + t_n \cdot \underline{v}_n$.

BASI CANONICHE (ESEMPIO 4.23)

- $Mat(m, n; \mathbb{K})$: $B_{mn} = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, E_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot E_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{11}} + b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}} + c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}} + d \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{22}}$$

- $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B}_n = \{\underline{e}_1=(1,0,\dots,0),\ \underline{e}_2=(0,1,\dots,0),\ \dots,\ \underline{e}_n=(0,0,\dots,1)\}$.

  $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdot\underline{e}_1+\dots+x_n\cdot\underline{e}_n$.

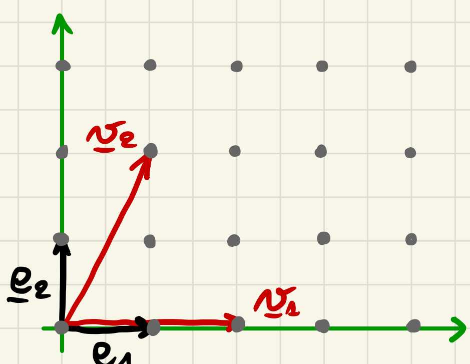
- $\mathbb{K}[x]$: $\mathcal{B}=\{1,x,\dots,x^n,\dots\}$.

  $\mathbb{K}[x]_n$: $\mathcal{B}_n=\{1,x,\dots,x^{n-1},x^n\}$.

  $P(x)=1+x^2\in\mathbb{K}[x]_2$, $\mathcal{B}_2=\{1,x,x^2\}$ $\Longrightarrow$ $P(x)=1\cdot1+0\cdot x+1\cdot x^2$.

- $V=\{\underline{0}\}$ non ha una base.

$V=\mathbb{R}^2$



$\mathcal{B}_2=\{\underline{e}_1=(1,0),\ \underline{e}_2=(0,1)\}$ base canonica

$\mathcal{B}=\{\underline{v}_1=(2,0),\ \underline{v}_2=(1,2)\}$ è base di V?

$\underline{v}=(x,y)=x\cdot\underline{e}_1+y\cdot\underline{e}_2=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)\cdot\underline{v}_1+\frac{y}{2}\cdot\underline{v}_2$

Se scegliessimo $V=\mathbb{Z}^2$? $\mathcal{B}_2$ sarebbe ancora una base, ma $\mathcal{B}$ no!

$\mathbb{Z}^2$ non è uno spazio vettoriale, è un modulo.

MAPPA DELLE COMPONENTI (DEFINIZIONE 4.24)

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V e $\underline{v} = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + t_n \cdot \underline{v}_n \Rightarrow$

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K})$$
$$\underline{v} \longmapsto \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \underline{v}_{|\mathcal{B}}$$

è detta mappa delle componenti.

ESEMPIO 4.25

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{K})$, $\phi_{\mathcal{B}_{22}}(A) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ c \end{bmatrix} = A_{|\mathcal{B}_{22}}$.

  A appartiene anche a $\mathcal{S}(2;\mathbb{K})$, una cui base è

$$\mathcal{B} = \left\{ S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$A = a \cdot S_{11} + 2b \cdot S_{12} + c \cdot S_{22} \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} a \\ 2b \\ c \end{bmatrix} = A_{|\mathcal{B}}.$$

- $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \phi_{B_n}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{v}|_{B_n}$.

- $P(x) = a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \in \mathbb{K}[x]_2 \Rightarrow \phi_{B_2}(P) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

  $P(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \in \mathbb{K}[x]_3 \Rightarrow \phi_{B_3}(P) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$.

TEOREMA 4.26

ϕ_B è un isomorfismo di spazi vettoriali da V in $\mathrm{Mat}(n, 1; \mathbb{K})$.

DIM: • ϕ_B è biunivoca, con $\phi_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}\right) = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + t_1 \cdot \underline{v}_n$.

- siano $\underline{v}, \tilde{\underline{v}} \in V \Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \underline{v}_i$, $\tilde{\underline{v}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i \cdot \underline{v}_i \Rightarrow$

$$\phi_B(\alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \tilde{\underline{v}}) = \phi_B\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha t_i + \beta \tilde{t}_i) \cdot \underline{v}_i\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha t_1 + \beta \tilde{t}_1 \\ \vdots \\ \alpha t_n + \beta \tilde{t}_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \vdots \\ \tilde{t}_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \phi_B(\underline{v}) + \beta \cdot \phi_B(\tilde{\underline{v}}) .$$

$\square$

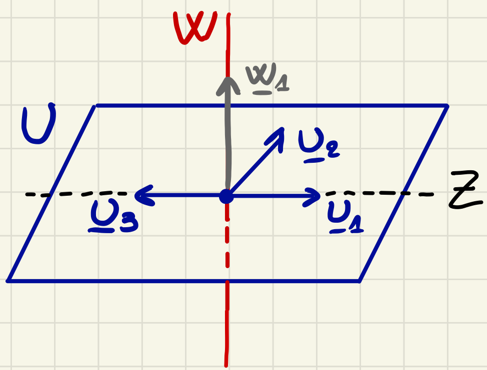
CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI (4.4)

SPAZIO GENERATO E VETTORI GENERATORI (DEFINIZIONE 4.27)

$U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \subseteq V$. Lo spazio generato da U è:

$$\mathrm{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m) = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m) = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} = t_1 \cdot \underline{u}_1 + \dots + t_m \cdot \underline{u}_m\} = \mathcal{L}(U).$$

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ si dicono vettori generatori di $\mathcal{L}(U)$.



$$U = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) =$$
$$= \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \mathcal{L}(\underline{u}_2, \underline{u}_3) \neq \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_3) = Z$$

$$W = \mathcal{L}(\underline{w}_1) = \mathcal{L}(\underline{w}_1, \underline{0})$$

PROPOSIZIONE 4.28

$\mathcal{L}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m)$ è un sottospazio di V.

INDIPENDENZA LINEARE (DEFINIZIONE 4.29)

$U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ è linearmente indipendente se l'unica combinazione lineare nulla è quella banale: $\underline{0} = 0 \cdot \underline{u}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{u}_m$.

$V = \mathbb{R}^3$, $U = \{\underline{u}_1 = (1,-1,0), \underline{u}_2 = (2,0,-2), \underline{u}_3 = (0,3,-3)\} \subset V$.

$6 \cdot \underline{u}_1 - 3 \cdot \underline{u}_2 + 2 \cdot \underline{u}_3 = (6-6, -6+6, 6-6) = \underline{0} \Rightarrow$

U è linearmente dipendente $\Rightarrow \underline{u}_3 = \frac{1}{2} \cdot (-6 \cdot \underline{u}_1 + 3 \cdot \underline{u}_2)$

$\mathcal{L}(U) = \{\underline{u} = a \cdot \underline{u}_1 + b \cdot \underline{u}_2 + c \cdot \underline{u}_3\} = \{\underline{u} = (a-3c) \cdot \underline{u}_1 + (b + \frac{3}{2}c) \cdot \underline{u}_2\} = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$.

PROPOSIZIONE 4.30

U è dipendente sse esiste $\underline{u}_i \in \mathcal{L}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{i-1}, \underline{u}_{i+1}, \dots, \underline{u}_m)$.

LEMMA 4.31

Se $\underline{0} \in U \Rightarrow U$ è dipendente.

CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI (TEOREMA 4.32)

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subseteq V$ è una base di V se e solo se:

i) $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V;

ii) $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

DIM: • la richiesta che $\mathcal{B}$ sia un insieme di generatori è equivalente all'esistenza per ogni vettore di $\underline{v} = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + t_n \cdot \underline{v}_n$;

• l'indipendenza lineare è equivalente all'unicità:

$\Rightarrow$ se $\mathcal{B}$ è base, esiste un unica combinazione $\underline{0} = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + t_n \cdot \underline{v}_n$, che ovviamente è $t_1 = \dots = t_n = 0$;

$\Leftarrow$ se $\mathcal{B}$ è indipendente, siano $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i \underline{v}_i \Rightarrow$

$\underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \tilde{t}_i) \underline{v}_i \Rightarrow t_i = \tilde{t}_i$. $\blacksquare$

$$U = \{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_3} \} \subset V = \mathrm{Mat}(2,1;\mathbb{Q})$$

- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \underline{u}_1 + b \cdot \underline{u}_2 + 0 \cdot \underline{u}_3 \Rightarrow V = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$

- $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3 = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a + c)\underline{u}_1 + (b + c)\underline{u}_2 + c\,\underline{u}_3$

$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}, \{\underline{u}_1, \underline{u}_3\}, \{\underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono basi di V

TEOREMA 4.31

$U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$, $U_k = \mathcal{L}(\underline{u}_k)$, $U_{\hat{k}} = \sum_{i=1}^{m} U_i$ con $i \neq k$.

i) U è un insieme di generatori sse $V = \sum_{i=1}^{m} U_i$;

ii) se $\underline{0} \notin U$, U è l.i. sse $U_k \cap U_{\hat{k}} = \{\underline{0}\}$ $\forall k$;

iii) se $\underline{0} \notin U$, U è base sse $V = \bigoplus_{k=1}^{m} U_k$.

ESISTENZA DELLE BASI E DIMENSIONE

SPAZI FINITAMENTE GENERATI (DEFINIZIONE 4.35)

V è finitamente generato se $V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ con $m \in \mathbb{N}$.

ESEMPI 4.36

- $Mat(m,n;\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[x]_n$ sono finitamente generati, perché hanno tutti delle basi composte da un numero finito di elementi (le basi canoniche).
- $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ non sono finitamente generati. In generale, gli spazi di funzioni non sono finitamente generati ($C^0(\mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R})$, etc.).

TEOREMA 4.37: ALGORITMO DI ELIMINAZIONE

Sia $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ finito tale che $V = \mathcal{L}(U) \neq \{\underline{0}\}$.

Allora esiste $B \subseteq U$ base di V.

$U = \{\underline{u}_1 = (1, -1, 0), \underline{u}_2 = (2, 0, -2), \underline{u}_3 = (0, 3, -3), \underline{u}_4 = (3, 2, -5)\}$

$V = \mathcal{L}(U) \subseteq \mathbb{R}^4$ è uno spazio finitamente generato.

- $\underline{u}_4 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3 \Rightarrow U$ è dipendente $\Rightarrow U$ non è una base

$U_{\hat{4}} = U \setminus \{\underline{u}_4\} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, $\mathcal{L}(U_{\hat{4}}) = V$.

- $\underline{u}_3 = \frac{1}{2} \cdot (-6 \cdot \underline{u}_1 + 3 \cdot \underline{u}_2) \Rightarrow U$ è dipendente $\Rightarrow U$ non è una base

$U_{\widehat{3,4}} = U \setminus \{\underline{u}_3, \underline{u}_4\} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$, $\mathcal{L}(U_{\widehat{3,4}}) = V$.

$\alpha \cdot \underline{u}_1 + \beta \cdot \underline{u}_2 = (\alpha + 2\beta, -\alpha) = (0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow$

$U_{\widehat{3,4}}$ è indipendente $\Rightarrow U_{\widehat{3,4}}$ è base di V.

OSS: l'algoritmo termina sempre perché per ipotesi $|U| < +\infty$.

LEMMA DI STEINITZ O DELLO SCAMBIO (LEMMA 4.39)

Sia $V = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) \Rightarrow$ ogni $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q\}$ con $q > m$ è l.d.

DIM: se $V = \{\underline{0}\}$ ovvio. Supponiamo $V \neq \{\underline{0}\}$.

Allora esiste base $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ con $n \leq m$ $\Rightarrow$

$\underline{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underline{v}_i$, per ogni $j = 1, \dots, q$. Consideriamo la c.l.

$$\underline{0} = \sum_{j=1}^{q} t_j \underline{u}_j = \sum_{j=1}^{q} t_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underline{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} t_j \right) \underline{v}_i .$$

È una c.l. di vettori di B, che è linearmente indipendente $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{q} a_{ij} t_j = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ abbiamo un sistema lineare omogeneo in $t_1, \dots, t_q$, con $A = [a_{ij}] \in Mat(n, q; \mathbb{K})$.

Ma $r(A) \leq \min(n, q) = n < q \Rightarrow \exists\ \infty^{q - r(A)}$ soluzioni $\Rightarrow$ esistono soluzioni non banali in $t_1, \dots, t_q \Rightarrow U$ è l.d. $\blacksquare$

Teorema della Dimensione (Teorema 4.40)

V finitamente generato $\Rightarrow$ ogni base di V ha lo stesso numero di vettori.

Dim: siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi con $n_1 = |\mathcal{B}_1|$, $n_2 = |\mathcal{B}_2|$.

- $\mathcal{B}_1$ è un insieme di generatori e $\mathcal{B}_2$ è l.i. $\Rightarrow n_2 \leq n_1$;
- $\mathcal{B}_2$ è un insieme di generatori e $\mathcal{B}_1$ è l.i. $\Rightarrow n_1 \leq n_2$;

$\Rightarrow n_1 = n_2$. $\blacksquare$

Dimensione di uno Spazio Vettoriale (Definizione 4.41)

$$\dim(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\}; \\ |\mathcal{B}| & \text{se } V \neq \{\underline{0}\} \text{ finitamente generato}; \\ +\infty & \text{se } V \text{ non è finitamente generato}. \end{cases}$$

Esempio 4.42

- $V = \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ $\quad \mathcal{B}_{mn} = \{E_{11}, \dots, E_{mn}\} \Rightarrow \dim(V) = mn$.
- $V = \mathbb{K}^n$ $\quad \mathcal{B}_n = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \Rightarrow \dim(V) = n$.
- $V = \mathbb{K}[x]_n$ $\quad \mathcal{B}_n = \{1, x, \dots, x^n\} \Rightarrow \dim(V) = n+1$.

Corollario 4.43

Sia V con $\dim(V) = n > 0$. $U \subseteq V$ con $|U| = m$. Allora:

i) U indipendente $\Rightarrow m \leq n$. Se $m = n$, U è una base;

ii) $V = \mathcal{L}(U) \Rightarrow m \geq n$. Se $m = n$, U è una base.

Algoritmo di completamento (Proposizione 4.44)

Sia V con $\dim(V) = n > 0$. $U \subseteq V$ indipendente.

Allora U può essere esteso ad una base di V.

$V = \mathbb{R}[x]_2 \qquad U = \{1+x+x^2,\ 1-x+x^2\}$

$$a(1+x+x^2) + b(1-x+x^2) = (a+b)\cdot 1 + (a-b)\cdot x + (a+b)\cdot x^2 =$$
$$= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow U \text{ è l.i.}$$

$$|U| = 2 < 3 = \dim(V) \Rightarrow V \neq \mathcal{L}(U)$$

Ad esempio, $1 \notin \mathcal{L}(U)$: $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ IMP.

$$\Rightarrow \tilde{U} = U \cup \{1\} = \{1+x+x^2,\ 1-x+x^2,\ 1\} \text{ è l.i.}$$

$|\tilde{U}| = 3 = \dim(V) \Rightarrow \tilde{U}$ è una base di V, ottenuta completando l'insieme U.