Appunti Analisi 1

Alexandru Gabriel Bradatan

Data compilazione: 19 settembre 2019

1 Insiemi

Non viene definito (concetto primitivo): una collezione, famiglia, classe di oggetti (non necessariamente numeri). Indicato solitamente con una lettera maiuscola.

Rappresentati per:

- elencazione: $A = \{a, b, c\}$
- condizione: $A = \{letterealfabeto\}$

Un oggetto può appartenere ($\in$) o non appartenere ($\notin$) ad un insieme.

1.1 Uguaglianza

A e B sono uguali ($A = B$) se hanno gli stessi elementi. *Osserva:* $A = B \iff \subseteq B \wedge B \subseteq A$

1.2 Inclusione

A può essere contenuto o uguale in B ($A \subseteq BorA \subset B$). A è un sotto insieme di B se $\forall a \in Aa \in B$. Il simbolo è detto inclusione. L'inclusione è una relazione d'ordine.

1.3 Operazioni sugli insiemi

Le operazioni sono unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano, insieme complementare.

Unione : $A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$

Intersezione : $A \cap B = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$

Complementare : $A^c = \bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$

Differenza : $A \setminus B = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

Prodotto cartesiano : $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge x \in B\}$

Intersezione e unione sono commutative e associative.

1.4 Insiemi particolari

- Insieme vuoto: $\emptyset$
- Insieme universo: U, contiene tutto

2 Numeri

2.1 Numeri naturali

Sono tutti i numeri interi positivi incluso lo 0.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Può essere costruito a partire da un solo numero: basta aggiungere un'unità ogni volta.

Ha la proprietà di contenere sempre il successore a un numero: ci permette di usare il principio di induzione. Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ godono del principio del minimo intero. Poiché è valido il principio del minimo intero, $\mathbb{N}$ è un insieme ben ordinato.

Il principio di induzione Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme tale che:

- $0 \in S$
- $\forall n \in S \implies n + 1 \in S$ (S ha sempre un successore)

Allora S coincide con $\mathbb{N}$.

Il principio di induzione ha una traduzione in termini logici. Il principio di induzione può essere usato per dimostrare teoremi in $\mathbb{N}$.

Il principio di induzione (logica) Sia $P(n)$ un predicato (proposizione) che dipende da $n \in \mathbb{N}$ tale che:

- quando $P(0)$ è vero
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \implies P(n+1)$: assumendo $P(n)$ come vero, riesco a dimostrare che il successore è vero

Esempio Dimostra $P(n) = 2^n > n \forall n \in \mathbb{N}$. $P(0)$ è vera: $2^0 > 0$. Suppongo che $P(n)$ sia vera, dimostro $P(n+1)$: $2^n \cdot 2 > 2n \geq n + 1$ quindi $P(n+1)$ è vera. Se $P(n+1)$ è vera, allora vale il principio di induzione e tutto il predicato è vero in $\mathbb{N}$.

Principio del minimo intero Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha un elemento minimo (più piccolo di tutti gli altri).

Definizioni delle operazioni in $\mathbb{N}$

Somma

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$somma(n1, n2) \to n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

Prodotto

$$* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$prodotto(n1, n2) \to n1 \cdot n2 \in \mathbb{N}$$

Proprietà delle operazioni

commutativa $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

associativa $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$

distributiva $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$

2.1.1 Sommatoria

Si indica con la sigma maiuscola:

$$\sum_{i \in I} a_i$$

Dove:

- I è un insieme finito. I suoi elementi sono chiamati indici (segnaposti: indicano una posizione)
- $(a_i)_{a \in I}$ è una famiglia di numeri che dipendono da i

Esempio Dati $I = 1, 2, 3, a_i = 2^i$, possiamo scrivere $\sum_{i \in I} a_i = 2^1 + 2^2 + 2^3$

Alcune sommatorie famose

Formula di Gauss $\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Somma di una progressione geometrica

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a\sum_{i=0}^{n} q^i &= \\
&= a(\frac{1 - q^n + 1}{1 - q}) \\
\text{se } q = 1 \ &= a(n+1)
\end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\cancel{a}\sum_{i=0}^{n} q^i &= \cancel{a}\left(\frac{1 - q^n + 1}{1 - q}\right) \\
\text{Dimostriamo che: } (1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i &= 1 - q^n + 1 \\
(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i - q\sum_{i=0}^{n} q^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n+1} q^i \\
&= (q^0 + \sum_{i=1}^{n+1} q^i) - (\sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} q^i) - \sum_{i=0}^{n} q^i - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+1} \implies \text{ è dimostrato}
\end{aligned}$$

Le proprietà della sommatoria

- La sommatoria è un operatore lineare
- l'indice è muto: non importa il nome dell'indice

- traslando gli indici, la sommatoria non cambia: è importante che il numero di elementi sia uguale
- si definiscono sommatorie anche su due o più famiglie di indici: prima sommo una famiglia, poi l'altra: $\sum_{i\in I, j\in J} a_{ij}$

  Esempio: $\sum_{i\in I, j\in J}(i)^J = \sum_{i=1}^{2}(\sum_{j=0}^{3}(i)^j)$
- vale la proprietà dissociativa: $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I}(a_i) + \sum_{i\in I}(b_i)$
- le costanti possono essere portate fuori: $\sum_{i\in I} Ka_i = K \cdot \sum_{i\in I} a_i$
- scomposizione di una sommatoria: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
- riflessione degli indici: $\sum_{i=0}^{n} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$

2.1.2 La produttoria

Si indica con un grande pi greco. E' uguale alla sommatoria ma al posto di fare la somma fa il prodotto.

Proprietà

- $\prod_{i\in I} ka_i = k^{\#i} \prod_{i\in I} a_i$ - Non vale la dissociativa