$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_K e^{iKx} \quad \text{con} \quad \gamma_K = \begin{cases} \frac{a_K - ib_K}{2} & K>0 \\ \frac{a_K + ib_K}{2} & K<0 \end{cases}$$

Per calcolare direttamente i coefficienti prendiamo $\{e^{iKx}\}$ come sistema fondamentale e usiamo:

$$\gamma_K = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-iKx}dx$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Si definiscono equazioni differenziali ordinarie equazioni in cui come incognita abbiamo una funzione $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e l'equazione contiene almeno una derivata di y. Questa derivata deve essere rispetto a una sola variabile per rendere l'equazione ordinaria. Se ciò non accade avremo equazioni differenziali parziali.

Esempi:

$$y' = Ky \quad ; \quad y'' = Ky' + hy + c \quad ; \quad e^{y'+y''} = (y^2 + \sin t)y'$$

In tutti gli esempi l'equazione può essere riscritta come $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$. In questa forma l'equazione è in forma normale. Non sempre questa scrittura è possibile: $e^{y'+y''} - 7y' + \log(y'')^2 - 3t = 0$ non può essere scritta in forma normale. Noi considereremo solo equazioni scrivibili in forma normale.

Viene detto ordine dell'equazione differenziale il massimo ordine della derivata nell'equazione.

Sia $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{n-1})$ con $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'equazione differenziale ordinaria in forma normale diciamo che $\varphi: I \to \mathbb{R}$ è soluzione su I se

- $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$
- $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t) \quad \forall t \in I$

Diciamo che l'equazione differenziale è lineare se se varie derivate sono legate da f lineare. Se f non dipende da t, l'equazione differenziale è autonoma.

Equazione differenziale scalare del I° ordine

Ha la seguente forma:

$$y' = f(t, y)$$

TEOREMA (di Peano) Data $y' = f(t,y)$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ allora $y' = f(t,y)$ ammette soluzioni

Quante sono le soluzioni possibili? Infinite a meno di una costante. Perciò definiamo

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \to \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Problema di Cauchy. Esso ci permette di isolare solo una di queste soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni è detto integrale generale. Tutte le soluzioni ottenute particolarizzando il valore della costante viene detto soluzione o integrale particolare:

$$\begin{cases} y' = \alpha y \to \text{Integrale generale: } \varphi(t) = Ke^{\alpha t} \\ y(t_0) = y_0 \to \text{Integrale particolare: } \tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)} \end{cases}$$

Dato il problema di Cauchy $\{y' = f(t,y);\ y(t_0) = y_0\}$ enunciamo

TEOREMA (di Peano) Sia $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$ $\exists \delta > 0$, $\exists \varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ soluzione su $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ del problema di Cauchy.

Il teorema di Peano ci assicura l'esistenza, ma per quanto riguarda l'unicità?

TEOREMA (di esistenza e dell'unicità locale della sol.) Sia $\{y' = f(t,y);\ y(t_0) = y_0\}$, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(\Omega)$, allora $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$ $\exists \delta > 0$, $\exists ! \varphi \in \mathcal{C}^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che φ è soluzione del problema di Cauchy su $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Hanno forma:

$$\begin{cases} y' = f(t)\, g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}(J)$, per il teorema di esistenza e unicità locale esiste unica la soluzione. Possono verificarsi 2 casi:

- se $\exists \bar{y} : g(\bar{y}) = 0$ allora $\varphi(t) = \bar{y}$ è soluzione costante e viene chiamata integrale singolare
- se $g(\bar{y}) \neq 0$ allora posso fare:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \to \frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt \to G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt = F(t) + K$$

La funzione $G(y)$ ci da la soluzione implicitamente ossia φ è soluzione su I se $G(\varphi(t)) = F(t) + K$ $\forall t \in I$. Eseguendo i calcoli si trova che:

integrale generale: $\varphi(t) = Ke^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(t)\,dt$

particolare: $\tilde{\varphi}(t) = Ke^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$

Equazioni differenziali lineari ordinarie

Un'equazione differenziale lineare ha forma:

$$Ly = f(t)$$

con L un operatore lineare, ossia:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\, y' + a_n(t)\, y$$

Se $f(t) = 0$, allora l'equazione è detta lineare omogenea, altrimenti completa.

Per le equazioni lineari vale l'importantissimo principio di sovrapposizione: (enunciato e dimostrato al II ordine)

TEOREMA (principio di sovrapp.) Se y_1 è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t)$ e y_2 è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_2(t)$ allora $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$

DIMOSTRAZIONE Grazie alla linearità di L, in generale possiamo fare:

$$(Ly_1 = f_1) \cdot C_1 + (Ly_2 = f_2) \cdot C_2 \to C_1 L y_1 + C_2 L y_2 = C_1 f_1 + C_2 f_2$$

$$\to L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 f_1 + C_2 f_2$$

$$\to L(y) = C_1 f_1 + C_2 f_2$$

$\blacksquare$

Il teorema di sovrapposizione ha delle importanti conseguenze:

1) se φ_1 e φ_2 sono soluzioni dell'equazione lineare omogenea, allora anche $c_1 y_1 + c_2 y_2$ lo è ossia l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n
2) se ψ_1 e ψ_2 sono soluzioni dell'equazione completa, allora $y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea associata

TEORIA DI STRUTTURA

Definiamo:

$\Phi = \{ \varphi \in C^1(I) : L\varphi = 0 \}$ spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea

$\Psi = \{ \psi \in C^1(I) : L\psi = 0 \}$ " " " " della completa

Possiamo affermare che: se $\psi_0 \in \Psi$ e $\varphi \in \Phi$, allora $\varphi + \psi_0 \in \Psi$ e quindi $\Psi = \Phi + \psi_0$.

PROPOSIZIONE Data $Ly = f(t)$, se $a_1, a_2, \dots, a_n, f \in C(I)$, allora $\exists$ soluzioni di $Ly = f(t)$ $\varphi(\psi) \in C^n(I)$.

Equazioni differenziali lineari del I° ordine

Hanno forma $y' + a(t)y = f(t)$. Il relativo problema di Cauchy avrà forma:

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In forma normale, l'equazione lineare di I ordine diventa:

$$y' = F(t,y) \quad ; \quad F(t,y) = -a(t)y + f(t)$$

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità sono soddisfatte se $a, f \in C(I)$ $\forall x_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione lineare omogenea di I ordine è a variabili separabili e quindi ha soluzione $\varphi(t) = c e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(t)\,dt$. La soluzione del problema di Cauchy relativo sarà: $\tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Se riesco a trovare ψ_0 soluzione dell'equazione completa, allora posso usare le conseguenze del principio di sovrapposizione per scrivere l'integrale generale. Per cercare ψ_0 usiamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

1) cerco $\psi_0(t) = c(t) e^{-\int a(t)dt}$
2) sostituisco $\psi_0(t)$ nell'espressione dell'equazione:

$$c'(t)e^{-A(t)} - \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} = f(t) \rightarrow c'(t)e^{-A(t)} = f(t) \rightarrow c'(t) = f(t)e^{A(t)}$$

$$\rightarrow c(t) = \int f(t) e^{A(t)} dt$$

abbiamo così trovato l'espressione di una soluzione particolare $\psi_0 = e^{-A(t)} \int f(t) e^{A(t)} dt$

3) l'integrale generale sarà: $\psi(t) = e^{-A(t)} \left(c + \int f(t) e^{A(t)} dt \right)$

Applicando all'integrale generale il problema di Cauchy otteniamo che la soluzione diventa:

$$\bar{\psi}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\int_{t_0}^{t} a(z)dz} d\tau \right)$$

Equazioni differenziali lineari del 2° ordine

Il problema di Cauchy relativo ha forma:

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Per scrivere l'integrale generale, come nel caso del primo ordine, avremo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e quello particolare della completa. Ciò però non è così facile.

Equazioni differenziali omogenee del 2° ordine a coefficienti costanti

Consideriamo la generica equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $ay'' + by' + cy = 0$. Le soluzioni avranno forma $y = e^{\lambda t}$. Sostituendo y nella nostra equazione otteniamo:

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \cancel{e^{\lambda t}}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall t$$

$$\rightarrow \underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c}_{} = 0$$

↳ polinomio caratteristico associato all'equazione

Abbiamo così ricondotto la ricerca di soluzioni a un'equazione lineare omogenea alla ricerca di radici del polinomio caratteristico, ovvero alla risoluzione della cosiddetta equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$.

La natura delle radici dipende dal discriminante del polinomio caratteristico:

- $\Delta > 0$: il polinomio ammette 2 radici reali distinte

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = e^{\lambda_2 t} \end{matrix}\right\} \text{ linearmente indipendenti} \Longrightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Grazie al teorema di struttura possiamo allora scrivere l'integrale generale.

- $\Delta < 0$: il polinomio ammette 2 radici complesse coniugate:

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + j\beta \\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - j\beta \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y_1 = e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + j\sin(\beta t)] \\ y_2 = e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - j\sin(\beta t)] \end{matrix}$$

Costruiamo due soluzioni reali alla nostra equazione:

$$\left.\begin{matrix} u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ u_2(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{matrix}\right\} \text{ soluzioni reali linearmente indipendenti}$$

↳ $y(t) = e^{\alpha t}[C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)]$

- $\Delta = 0$: il polinomio ammette 2 radici reali coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow y_1 = e^{\lambda t}$$

Così abbiamo solo 1 soluzione. L'altra la possiamo trovare cercando $c(t)$ tale che $y_2 = c(t)e^{\lambda t}$ sia soluzione. La funzione y_2 si dimostra essere soluzione se $c''(t) = 0$ e quindi $y_2 = te^{\lambda t}$. L'integrale generale ottenuto sarà quindi:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Equazioni differenziali lineari complete del II ordine a coefficienti costanti

Per determinare l'integrale generale di un'equazione di tipo $ay''+by'+cy=f(t)$ abbiamo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Il primo lo sappiamo trovare, mentre il secondo non ancora.

Per trovare una soluzione particolare quando il termine noto è una funzione abbastanza semplice usiamo un metodo euristico chiamato metodo di somiglianza. Questo metodo si basa sul fatto che l'operatore lineare associa a un tipo di funzione un'altro tipo. Quindi, in base alla forma della forzante possiamo risalire alla soluzione.

- FORZANTE ESPONENZIALE: $f(t)=Ae^{\alpha t}$
  - $y_p = Ce^{\alpha t}$ se α non è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
  - $y_p = Cte^{\alpha t}$ se α è radice singola del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
  - $y_p = Ct^2e^{\alpha t}$ se α è radice doppia del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
- FORZANTE POLINOMIALE: $f(t)=P_n(t)$
  - $y_p = P_n(t)$ se $a, c \neq 0$
  - $y_p = P_{n+1}(t)$ se $a, b \neq 0$
  - $y_p = P_{n+2}(t)$ se $a \neq 0$
- FORZANTE TRIGONOMETRICA: $f(t) = A\cos(vt) + B\sin(vt)$
  - $y_p = C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt)$ se $b \neq 0$
  - $y_p = t(C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt))$ se l'equazione ha forma $y'' + v^2y = \alpha\cos(vt) + \beta\sin(vt)$, $v = \sqrt{\frac{c}{a}}$
- FORZANTE ESPONENZIALE - TRIGONOMETRICA: $f(t) = e^{\alpha t}(A\cos(vt) + B\sin(vt))$
  - $y_p = e^{\alpha t}(C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt))$
  - $y_p = te^{\alpha t}(C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt))$ se $\alpha \pm iv$ soluzioni del polinomio caratteristico $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

Se cerchiamo una soluzione di un'equazione completa del tipo $ay''+by'+cy = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t)$ oppure $ay''+by'+cy = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t)$ si può:

1) considerare l'equazione $aw''+bw'+cw = Ae^{(\alpha+i\beta)t}$
2) cercare all'equazione sopra la soluzione $w(t) = Ce^{(\alpha-i\beta)t}$ con C incognita complessa.
3) a questo punto otteniamo 2 soluzioni:

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\{Ce^{(\alpha+i\beta)t}\} \mapsto ay''+by'+cy = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$y_2(t) = \mathrm{Im}\{Ce^{(\alpha+i\beta)t}\} \mapsto ay''+by'+cy = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

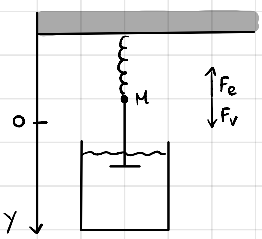
Esiste un caso particolare: se $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni del polinomio caratteristico $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ allora bisogna considerare $w(t) = Cte^{(\alpha+i\beta)t}$ come soluzione generica.

Se abbiamo una forzante del tipo $f = f_1+f_2$ con f_1, f_2 trattabili con il metodo di somiglianza è sufficiente cercare separatamente una soluzione per $Ly=f_1$ e una per $Ly=f_2$ in quanto il principio di sovrapposizione ci assicura che y_1+y_2 somma delle soluzioni particolari è soluzione particolare di $Ly=(f_1+f_2)$.

Modelli fisici

Consideriamo alcuni modelli fisici come applicazioni di ciò che abbiamo visto.

OSCILLATORE ARMONICO



costante elastico — coef. attrito viscoso

Equazione del moto: $my'' = -Ky - hy' \to y'' = -\frac{K}{m}y - \frac{h}{m}y'$

$\hookrightarrow y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

- CASO OSCILLAZIONE LIBERA: $\delta = 0$

$$my'' + w^2 y = 0 \rightarrow \lambda^2 + w^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i w$$
$$\rightarrow \lambda_2 = -i w$$

$$\hookrightarrow y(t) = C_1 \sin(wt) + C_2 \cos(wt) = \frac{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\left[C_1 \sin wt + C_2 \cos wt\right]$$
$$= \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \sin wt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos wt\right] = \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\cos\varphi \sin wt + \sin\varphi \cos wt\right]$$
$$= \sqrt{C_1^2+C_2^2} \sin(wt+\varphi) = \underbrace{A}_{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \sin(\underbrace{w}_{\sqrt{\frac{K}{m}}}t + \underbrace{\varphi}_{\arctan\frac{C_1}{C_2}})$$

- CASO OSCILLAZIONE SMORZATA: $\delta \neq 0$

$$my'' + 2\delta y' + w^2 y = 0 \rightarrow \Delta \text{ dipende dal segno di } \delta^2 - w^2 \,!$$

- $\delta > w$ – sovracritico : $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
- $\delta < w$ – subcritico : $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow y(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 \sin \underbrace{\psi}_{\psi = \sqrt{w^2-\delta^2}} t + C_2 \cos \psi t\right]$
  $= A e^{-\delta t} \sin(\psi t + \varphi)$
- $\delta = w$ – critico : $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = -\delta \Rightarrow y(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)$

OSCILLAZIONI FORZATE

Generica equazione: $y'' + w^2 y = \alpha \cos(vt) \rightarrow y_0 = C_1 \sin(wt) + C_2 \cos wt = A \cos(wt+\varphi)$

Per la soluzione particolare dobbiamo considerare due casi:

- $v \neq w$: $y_p = \frac{\alpha}{w^2-v^2} \cos vt \Rightarrow y(t) = A\cos(wt+\varphi) + \frac{\alpha}{w^2-v^2}\cos vt$
- $v = w$: $y_p = \frac{\alpha}{2w} t \sin(wt) \Rightarrow y(t) = A\cos(wt+\varphi) + \frac{\alpha}{2w} t \sin wt \rightarrow$ RISONANZA

OSCILLAZIONI SMORZATE FORZATE

Generica equazione: $y'' + 2\delta y' + w^2 y = \alpha \cos vt \qquad \delta > 0$

La soluzione dell'omogenea associata è l'equazione delle oscillazioni smorzate che abbiamo già trattato. La soluzione particolare dell'equazione completa usiamo il metodo di somiglianza:

$$y_p = \frac{\alpha\left((w^2-v^2)\cos vt + 2\delta v \sin vt\right)}{(w^2-v^2)^2 + 4\delta^2 v^2} = \dots = \frac{\alpha}{\sqrt{(w^2-v^2)^2+4\delta^2v^2}} \cos(vt+\theta)$$
$$\theta = -\arctan\left(\frac{2\delta v}{w^2-v^2}\right)$$

La soluzione completa sarà:

$$y = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \;\Rightarrow\; \text{TRANSITORIO}} + \frac{\alpha}{\sqrt{(w^2-v^2)^2+4\delta^2v^2}} \cos(vt+\theta) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + K\alpha \cos(vt+\theta)$$

K è massima per $v_{MAX} = \sqrt{w^2 - 2\delta^2}$. $K(v_{max})$ è detta pulsazione di risonanza. La crescita illimitata dell'ampiezza come abbiamo nella risonanza dell'oscillatore forzato in questo caso non è possibile a causa della presenza di un attrito δ. Se $\delta \rightarrow 0$, $K(v_{max}) \rightarrow +\infty$. La pulsazione della forzante che induce risonanza non è pari alla pulsazione propria, ma un po' più piccola.

Se $\delta > \frac{w}{\sqrt{2}}$ l'ampiezza è strettamente decrescente e non si ha risonanza

CIRCUITI RLC IN AC

Equazioni generale: $Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = V_0 \phi \cos \phi t \rightarrow i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{LC} i = \frac{V_0}{L} \phi \cos \phi t$

$\frac{R}{L} \nearrow 2\delta \quad \frac{1}{LC} \nearrow \omega^2 \quad \frac{V_0}{L}\phi \nearrow a$

In caso di $R=0$ avremo $i'' + \omega^2 i = a \cos \phi t$. Se $\omega = \phi$ avremo risonanza con $i = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t$.
Se invece $\phi \neq \omega$ avremo $i = A \cos(\omega t + \varphi) + a \frac{\phi}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\phi t)$

In caso di $R \neq 0$, il circuito avrà regime permanente $i = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2+\phi^2)^2 + 4\delta^2\phi^2}} \cos(\phi t + \theta) = \frac{V_0}{\sqrt{(1/\phi C - L\phi)^2 + R^2}} \cos(\phi t + \theta)$
dove $Z(\phi) = \sqrt{\left(\frac{1}{C\phi} - L\phi\right)^2 - R^2}$ è l'impedenza. L'ampiezza massima la si ha quando $\phi_{max} = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
In questo caso di risonanza il valore massimo della corrente sarà $A_{max} = \frac{V_0}{R}$

Intervallo massimale di definizione delle soluzioni (I° ordine)

Occupiamoci dello studio del massimo intervallo di definizione delle soluzioni. Definiamo intervallo massimale di definizione della funzione φ un intervallo $(\alpha; \beta)$ fuori dal quale φ non può essere prolungata.

Studiamo:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Equazione a variabili separabili}$$

Risolviamo: $\nexists$ integrali singolari
$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt \rightarrow \arctan y = t + c \rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$
$\hookrightarrow \varphi(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$!! $\varphi : \left(-\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$

Quindi la nostra soluzione è definita solo su un certo intervallo. Trovare la soluzione, però, non è sempre possibile. Consideriamo:

$$\begin{cases} y' = \arctan(1+y^5) \\ y(0) = a \end{cases} \rightarrow \text{Equazione a variabili separabili}$$

Non posso scrivere φ poiché non so risolvere $\int \frac{dy}{\arctan(1+y^5)}$

L'unica cosa che possiamo fare in questo caso è eseguire uno studio qualitativo sull'equazione di partenza. Questo è il problema della ricerca dell'intervallo massimale di definizione della funzione.

Siamo in ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Consideriamo una generica funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nel teorema abbiamo affermato l'esistenza di un intervallo $(a;b)$ in cui esiste una sola soluzione definita su questo intervallo. Proviamo ad estendere questo $(a;b)$. Se

$\lim_{t \to b^-} \varphi(t) = y_b$

Allora posso considerare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Poiché siamo ancora sotto le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, possiamo affermare che in un certo $(b-\delta; b+\delta)$ esiste unica φ_b soluzione. Inoltre $\varphi_b \equiv \varphi$ per lo stesso teorema.
Quindi la funzione $\tilde{\varphi}$ così definita:

$$\begin{cases} \varphi(t) & (a;b) \\ \varphi_b(t) & [b; b+\delta) \end{cases}$$

è un prolungamento di φ su $(a; b+\delta)$. Possiamo iterare questo procedimento finché non raggiungo un estremo del dominio.

Se questo dominio è limitato, possono accadere due situazioni:

$$\lim_{t \to \beta} \tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} l_b & \to \text{ posso prolungare ancora} \\ \infty & \to \text{ l'intervallo massimale sarà } (a,\beta) \subset (a,b) \end{cases}$$

Si dice che una soluzione deve uscire da ogni compatto contenuto nel dominio: o esco perché arrivo ai bordi del dominio oppure esco perché ho un asintoto. (supponendo che il limite esista).
Questi ragionamenti posso farli quando riesco a costruire un grafico "a pezzetti" studiandone le proprietà della funzione. In ipotesi del teorema di esistenza ed unicità ogni soluzione ha un intervallo massimale di definizione.

TEOREMA (esistenza e unicità globale della soluzione) Sia il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $f: \underbrace{(a,b) \times \mathbb{R}}_{\text{è una striscia}} \to \mathbb{R}$ e $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a;b] \times \mathbb{R})$ se $|f(t,y)| \leq K|y| + h$ $\quad K,h > 0 \quad \forall (t,y) \in [a;b] \times \mathbb{R}$
allora esiste unica la soluzione φ definita su $[a;b]$

Il teorema sopra funziona bene per funzioni limitate.

TEOREMA (di regolarità delle soluzioni) Sia φ soluzione di $y' = f(t,y)$ appartenente a $C^1([a,b])$ e $f \in C(D)$. Se $f \in C^n(D)$ allora $\varphi \in C^{n+1}([a;b])$.

Equazioni di Eulero

$$t^2 y'' + t a y' + t b y = f(t) \quad \to \quad y'' + \frac{a}{t} y' + \frac{b}{t} y = \frac{f(t)}{t} = \tilde{f}(t)$$

$a, b \in C(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$\tilde{f}$ supponiamo $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Sostituiamo $z(\tau) = y(e^{\tau}) \to y(t) = z(\log(\tau)) \Rightarrow t^2 \left(z''(\log t) \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} z' \log t \right) + t a z' \log t \frac{1}{t} + b z \log t = f(t)$

$\hookrightarrow z'' \log t + (a-1) z' \log t + b z \log t = f(t)$

$\hookrightarrow z''(\tau) + (a-1) z'(\tau) + b z(\tau) = f(e^{\tau})$

COEFF. COSTANTI

Tipo delle soluzioni: $\varphi(\tau) = e^{\lambda\tau} \rightarrow \varphi(t) = t^{\lambda}$

$\varphi(\tau) = \tau e^{\lambda t} \rightarrow \varphi(t) = \log t \cdot t^{\lambda}$

$\varphi(\tau) = e^{\alpha\tau}\cos\beta\tau \rightarrow \varphi(t) = t^{\alpha}(\cos(\beta\log t))$

Equazioni differenziali vettoriali (o sistemi di equazioni differenziali) del I° ordine

Posso scrivere la generica equazione vettoriale come:

$$\underline{Y}' = \underline{f}(t, \underline{Y})$$

TEOREMA Ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale è equivalente ad un sistema di n equazioni differenziali del I° ordine. Ciò vale anche per i problemi di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo il caso $n=2$.

$$y'' = f(t, y, y') \rightarrow \underline{Y}' = \underline{F}(t, \underline{Y}) \text{ con } \underline{Y} = (y_1, y_2) \rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t, y, y_2) \end{cases}$$

Facciamo vedere che φ è soluzione dell'equazione allora $\Phi = (\varphi, \varphi')$ è soluzione del sistema e viceversa.

1) pongo $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi, \varphi') \rightarrow \begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases} \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ soluzione del sistema

2) supponiamo $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sia soluzione del sistema, allora $\Phi \in C^1(I)$.

$$\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2 \\ \varphi_2' = \varphi_1'' = f(t, \varphi_1, \varphi_2) = f(t, \varphi_1, \varphi_1') \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 \text{ soluzione dell'equazione}$$

■

Il problema di Cauchy di sistema si scrive come:

$$\begin{cases} \underline{Y}' = \underline{F}(t, \underline{Y}) \\ Y(t_0) = \underline{\alpha} \end{cases}$$

Equazioni differenziali vettoriali lineari del I° ordine

La definizione di linearità è la stessa che avevamo dato in precedenza. La generica forma è:

$$\left.\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases} \equiv \underline{Y}' = \underline{A}(t)\underline{Y} + \underline{B}(t)\right\} \text{caso } n=2$$

Se $\underline{B}(t) = \underline{0}$ avremo un sistema lineare omogeneo. Anche per i nostri sistemi possiamo definire l'operatore lineare L: $L\underline{Y} = \underline{A}(t)\underline{Y}$ e far valere il principio di sovrapposizione con le seguenti conseguenze:

1) lo spazio delle soluzioni $\underline{\Phi}$ dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale

2) se $\underline{\Psi}_0$ è soluzione dell'equazione completa allora ogni soluzione $\underline{\Psi}$ ha forma $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_0 + \underline{\Phi}$ dove $\underline{\Phi}$ è la soluzione dell'omogenea associata

Il problema di Cauchy ha forma:

$$\begin{cases} \underline{Y}' = \underline{A}(t)\underline{Y} + \underline{B}(t) \\ \underline{Y}(t_0) = \underline{\alpha} \end{cases}$$

TEOREMA Se $A \in C(I)$, $\underline{B} \in C(I)$ allora $\forall t_0 \in I$ $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ soluzione del problema di Cauchy definita su I

Dimostriamo che in ipotesi di esistenza e unicità lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2

DIMOSTRAZIONE Consideriamo

$$\begin{cases} \underline{Y}' = A(t)\,\underline{Y} \\ \underline{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} , \quad \begin{cases} \underline{Y}' = A(t)\,\underline{Y} \\ \underline{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Φ_1 sol. $\qquad \Phi_2$ sol

Sia Φ soluzione qualunque $\Phi(t_0) = (\varphi_1(t_0) = \alpha_0 \,;\, \varphi_2(t_0) = \alpha_1)$. Considero $\tilde{\Phi} = \alpha_0 \Phi_1 + \alpha_1 \Phi_2$; $\tilde{\Phi}(t_0) = (\alpha_0, \alpha_1) = \Phi(t_0)$. Poiché la soluzione esiste unica $\Phi = \tilde{\Phi}$ ossia qualunque soluzione $\Phi = \alpha_0 \Phi_1 + \alpha_1 \Phi_2$ combinazione lineare di Φ_1, Φ_2 indipendenti. Quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. ■

Equazioni differenziali vettoriali lineari del I ordine a coefficienti costanti

TEOREMA $\Phi(t) = \xi e^{\lambda t}$ è soluzione di $\underline{Y}' = A\underline{Y}$ se e solo se λ è autovettore di A e ξ è un autovettore associato

Analizziamo i vari casi:
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: esistono due soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \lambda_2$ regolare: $\exists\ \xi_1, \xi_2$ autovettori indipendenti $\Rightarrow$ esistono 2 soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ($\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$): $\exists\ \xi_1, \xi_2 : \xi_1 = \bar{\xi}_2 \Rightarrow$ esistono 2 soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \lambda_2$ non regolare: si cerca (ed esiste) una soluzione della forma

$$\Phi_2(t) = \underline{K_1}\, e^{\lambda t} + \underline{K_2}\, t\, e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \Phi_1 = \xi e^{\lambda t} \quad \text{con } \xi \text{ l'unico autovettore}$$

Consideriamo il caso $n > 2$. Lo spazio delle soluzioni avrà dimensione n. Supponendo di aver trovato le n soluzioni, sono esse indipendenti? Definiamo la matrice Wronskiana:

$$W(t) = [\,\Phi_1 ; \Phi_2 ; \dots ; \Phi_n\,]$$

Se le soluzioni non sono indipendenti, allora $\det W(t) = 0$. Se il determinante non sarà nullo, allora le soluzioni sono indipendenti.

Una famiglia $\{\Phi_1, \dots, \Phi_2\}$ di soluzioni indipendenti di $\underline{Y}' = A\underline{Y}$ viene detta sistema fondamentale di soluzioni. D'ora in poi indicheremo con $W(t)$ non la generica Wronskiana ma la matrice fondamentale. Ogni Φ soluzione è della forma $\Phi = \sum c_i \Phi_i$. Un modo comodo di scrivere la soluzione è:

$$\Phi = W \cdot \underline{c} \quad \text{con} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W \text{ il Wronskiano}$$

$$\forall\ \Phi \text{ soluzione} \quad \Phi' = \begin{bmatrix} \Phi_1' \\ \vdots \\ \Phi_n' \end{bmatrix} = A\,\Phi \quad \Rightarrow \quad [\,\Phi_1' ; \dots ; \Phi_n'\,] = \underbrace{W' = A \cdot W}_{\text{Scrittura compatta della soluzione}}$$

Consideriamo ora l'equazione completa. Per cercare l'integrale particolare usiamo il metodo di variazione delle costanti. Sappiamo che la generica soluzione sarà $\Phi(t) = W(t)\cdot\underline{c}$. Cerco $\Psi_0(t)$ della forma $\Psi_0(t) = W(t)\,\underline{c}(t)$:

$$\Psi_0' = W'(t)\,\underline{c}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t) = A(t)\,\Psi_0(t) + \underline{B}(t) = A(t)\,W(t)\,\underline{c} + \underline{B}(t)$$

$$\hookrightarrow \cancel{W'(t)\,\underline{c}(t)} + W(t)\,\underline{c}'(t) = \cancel{A(t)\,W(t)\,\underline{c}(t)} + \underline{B}(t) \longrightarrow W(t)\,\underline{c}'(t) = B(t)$$

$$\hookrightarrow W'(t) = A(t)\,W(t)$$

Poiché $\det W \neq 0 \quad \exists\ W^{-1} \Rightarrow \underline{c}(t) = \int W^{-1}(t)\,\underline{B}(t)\,dt$

Quindi la soluzione dell'equazione completa sarà:

$$\Psi(t) = W(t)\left(\underline{c} + \int W^{-1}(t)\, B(t)\, dt \right)$$