

# Appunti Geometria e algebra lineare

Alexandru Gabriel Bradatan

Data di compilazione: 23 settembre 2019

## 1 Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti. Tutta la matematica si basa sulla teoria assiomatica degli insiemi. Un insieme  $A$  si può indicare per elencazione ( $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ) o con una condizione ( $A = \{x | \text{condizione}\}$ ). La cardinalità di  $A$  è il numero di oggetti:  $|A| = n$ . La cardinalità dell'insieme vuoto è 0.

**Esempi**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ ,  $\mathbb{R} = \{\text{x numeri decimali}\}$ .

Un insieme particolare è l'insieme con nessun elemento detto vuoto, indicato con  $\emptyset$ . Un altro insieme particolare è l'insieme di tutti gli tutto detto insieme universo  $U$ .

### 1.1 Sottoinsiemi

Un insieme può essere sottoinsieme di un altro, ossia contenere una parte degli elementi dell'insieme più grande. Formalizzando si può dire che:

$$A \subset B \implies \forall a \in A, a \in B$$

### 1.2 Insiemi numerici

Trattati nel dettaglio negli appunti di Analisi 1.

### 1.3 Operazioni

Le operazioni più usate sono:

**Unione**  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

**Intersezione**  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

**Complementare**  $A^C = \bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$

**Differenza**  $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$  Si può anche trovare indicata con  $\setminus$

**Prodotto cartesiano**  $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$  Le coppie  $(a, b)$  sono anche dette coppie (m-uple per  $m$  elementi)

## 2 Relazioni

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi.

Per indicare che due elementi  $(a_i, b_j)$  sono legati da una relazione  $R$  usiamo  $a_i \sim_R b_j$ . Per rappresentare le relazioni si possono usare i diagrammi di Venn (le patate) con le frecce che collegano i vari elementi tra di loro.

**Esempio** Presi  $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$ , calcoliamo il loro prodotto cartesiano e otterremo 16 possibili sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} R_0 &= \emptyset \\ R_1 &= \{(a_1, b_1)\}, \dots, R_4 \\ R_5 &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}, \dots, R_{10} \\ R_{11} &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}, \dots, R_{14} \\ R_{15} &= A \times B \end{aligned}$$

## 2.1 Relazioni particolari

**Relazione d'ordine** Prendiamo una relazione  $R \subseteq A \times A$ , essa è d'ordine se:

- è riflessiva:  $(a, a) \in R \forall a \in R$
- è antisimmetrica:  $(a, b), (b, a) \in R \implies a = b$
- è transitiva:  $(a, b), (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

**Insieme totalmente e parzialmente ordinato** Siano  $A$  un insieme ed  $R$  una relazione d'ordine su  $A$ . Se per ogni  $a_1, a_2 \in A$  vale  $(a_1, a_2) \in R$  oppure  $(a_2, a_1) \in R$ ,  $R$  si dice relazione d'ordine totale e la coppia  $(A, R)$  si dice insieme totalmente ordinato. In caso contrario si dice che  $R$  è una relazione d'ordine parziale e la coppia  $(A, R)$  si dice insieme parzialmente ordinato.

**Relazione di equivalenza** Prendiamo una relazione  $R \subseteq A \times A$ , essa è di equivalenza se:

- è riflessiva:  $(a, a) \in R \forall a \in R$
- è simmetrica:  $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$
- è transitiva:  $(a, b), (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

Una modo di vedere la relazione di equivalenza è come generalizzazione dell'uguaglianza.

**Classe di equivalenza** Data una relazione di equivalenza  $R$ , preso un elemento  $a$ , la classe di equivalenza di  $a$  sono tutti gli elementi equivalenti equivalenti ad  $a$ , ossia:

$$[a]_R = \{b \in A | a \sim_R b\}$$

La classe di equivalenza è in sostanza l'insieme di tutti gli elementi equivalenti tra di loro.

Teorema: Ogni elemento  $a \in A$  appartiene a una sola classe di equivalenza (dimostrazione nella dispensa, teorema 2.38). Teorema: Un insieme  $A$  sul quale agisce una relazione di equivalenza  $R$  è l'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza.

**Insieme quoziente** L'insieme quoziente  $A/R$  di  $A$  rispetto a una relazione di equivalenza  $R$  è l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

## 3 Funzioni

Le funzioni sono speciali relazioni che associano a ogni elemento del primo insieme un solo elemento del secondo. Una funzione in genere si indica con la lettera minuscola e usa questa notazione:

$$f : A \rightarrow B$$

L'insieme  $A$  è detto dominio,  $B$  il codominio. L'insieme di tutte le possibili funzioni che vanno da  $A$  a  $B$  si indica con  $B^A$ .

Preso  $a \in A, b = f(a)$  sarà la sua immagine. La controimmagine di  $b$  è l'elemento tale che  $f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$

L'insieme di tutte le immagini è detto insieme immagine e si indica con  $Im(f)$ .

**Funzione particolare** La funzione  $A \times A = \Delta A = Id(A) = \{(a, a) | a \in A\}$  è detta funzione identità o insieme diagonale.

**Iniettività** Una funzione è detta iniettiva se  $\forall a, b \in A, a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$ .

**Suriettività** Una funzione è detta suriettiva se  $\forall b \in B, \exists a \in A | f(a) = b$ .

**Funzione biunivoca** Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva è detta biunivoca. Se una funzione è biunivoca può essere invertita ottenendo  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

**Composizione di funzioni** Date due funzioni  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ , la composizione  $g \circ f$  delle due è una nuova funzione tale che  $g \circ f : A \rightarrow C$ . Ciò equivale a dire che  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

## 4 Operazioni

Le operazioni sono delle speciali funzioni: dati  $n + 1$  insiemi  $A_1, \dots, A_{n+1}$  non vuoti, una operazione  $n$ -aria  $*$  è una funzione che:

$$\begin{aligned} * : A_1 \times \dots \times A_n &\rightarrow A_{n+1} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto *(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Se  $A_1 = \dots = A_{n+1}$  allora l'operazione è detta interna, altrimenti è detta esterna. Se  $n = 2$  allora l'operazione è detta binaria e si può indicare con  $a_1 * a_2$ .

**Esempi** La somma  $+$  un'operazione binaria interna a  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n1, n2) &\mapsto n3 = n1 + n2 \end{aligned}$$

La differenza è sempre un'operazione binaria, ma esterna ad  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n1, n2) &\mapsto n3 = n1 - n2 \end{aligned}$$

Le varie operazioni possono essere rappresentate in tabelle che indicano tutti i possibili casi. Ad esempio, esistono  $2^4 = 16$  diverse operazioni binarie interne ( $* : A \times A \rightarrow A$ ) ad  $A = \{a_1, a_2\}$ .

**Proprietà delle operazioni** Le operazioni possono godere di alcune proprietà:

**Elemento neutro**  $a * e = a$

**Inverso**  $a * a^{-1} = e$

**Proprietà commutativa**  $a * b = b * a$

**Proprietà associativa**  $a * (b * c) = (a * b) * c$

**Proprietà distributiva** Lega due operazioni:  $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$

## 5 Struttura algebrica

Dicesi struttura algebrica l'insieme di un certo numero di insiemi  $A_1, \dots, A_n$ , chiamato *supporto della struttura* e delle operazioni  $*_1, \dots, *_n$  su questi insiemi.

Tre importanti strutture sono il gruppo, l'anello e il campo.

### 5.1 Il gruppo

Il gruppo è una struttura algebrica del tipo  $(G, *)$  dove  $G$  è un insieme e  $*$  è un'operazione binaria interna a  $G$  che deve rispettare queste date proprietà  $\forall a \in G$ :

- Deve possedere l'elemento neutro in  $G$
- Deve possedere l'inverso in  $G$
- Deve godere della proprietà associativa

Se l'operazione è anche commutativa il gruppo viene detto abeliano.

### 5.2 L'anello

Un anello è una struttura algebrica del tipo  $(A, *, \cdot)$  dove le due operazioni devono soddisfare le seguenti proprietà:

- $(A, *)$  è un gruppo abeliano
- $\cdot$  deve avere elemento neutro in  $A$
- $\cdot$  deve godere della proprietà associativa
- $\cdot$  e  $*$  devono essere legate dalla proprietà distributiva

Se la seconda operazione è commutativa, allora l'anello si dice commutativo.

### 5.3 Il campo

Un campo è una struttura algebrica del tipo  $(K, *, \cdot)$  dove le due operazioni devono soddisfare le seguenti proprietà:

- $(K, *)$  deve essere un gruppo abeliano con elemento neutro  $e$
- Detto  $K^* = K - e$ ,  $(K^*, \cdot)$  deve essere un gruppo abeliano
- Le due operazioni sono legate dalla proprietà distributiva

Il campo  $(\mathbb{R}, +, \times)$  è uno dei campi più importanti.

### 5.4 Omomorfismo

Un omomorfismo tra due strutture algebriche è una funzione  $f$  che commuta tra le due con le loro operazioni. Se  $f$  è invertibile, allora viene chiamata isomorfismo.

**Omomorfismo di gruppi** Dati due gruppi  $(A, *)$  e  $(B, \cdot)$  la funzione  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo se

$$f(a_1 * a_2) = f(b_1) \cdot f(b_2)$$

**Omomorfismo di campo** Dati due campi  $(A, *_1, \cdot_1)$  e  $(B, *_2, \cdot_2)$  la funzione  $f: A \rightarrow B$  è un omomorfismo se

$$f(a_1 *_1 a_2) = f(a_1) *_2 f(a_2) \wedge f(a_1 \cdot_1 a_2) = f(a_1) \cdot_2 f(a_2)$$

## 6 Polinomi

Un polinomio  $P(x)$  è una particolare funzione della forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Dove  $(a_1, \dots, a_n)$  (i coefficienti) appartengono a un campo  $K^{n+1}$ . L'insieme di tutti i possibili coefficienti si indica con  $K[x]$ . Un polinomio nelle  $m$  variabili  $x_1, \dots, x_m$  è definito induttivamente come l'espressione:

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^n Q_i(x_1, \dots, x_{m-1}) x_m^i$$

dove  $Q_1, \dots, Q_n$  sono polinomi nelle prime  $m-1$  variabili. L'insieme di tutti i polinomi di questo tipo si indica con  $K[x_1, \dots, x_m]$ .

Se il campo  $K$  coincide con il campo dei reali  $((\mathbb{R}, +, \times))$  allora  $K[x] = \mathbb{R}[x]$  e sarà l'insieme di tutti i possibili polinomi con variabile reale.

Un polinomio è generalmente scritto come somma di monomi.

**Il grado di un polinomio** Il grado di un polinomio  $P(x)$  è il massimo grado dei suoi monomi con grado diverso da 0. Il polinomio nullo ha per definizione grado indeterminato.

### 6.1 Divisione tra polinomi

Data la coppia  $(A, B) \in K[x] \times K[x], B \neq 0$ , esiste una sola coppia  $(Q, R) \in K[x] \times K[x]$  tale che  $A = QB + R$  per la quale  $\text{grado}(R) < \text{grado}(Q)$  o  $\text{grado}(R) = 0$ .  $Q$  e  $R$  sono rispettivamente quoziente e resto della divisione di  $A$  e  $B$ .

**Molteplicità algebrica** Dati  $P \in K[x], r \in \mathbb{N}$  esiste un valore  $m < \text{grado}(P)$  tale che  $(x-r)^m$  divida  $P(x)$ . Tale valore è detto molteplicità algebrica di  $r$  rispetto a  $P$ . La  $r$  sarà la radice del polinomio. Se la molteplicità algebrica di  $r$  è 1,  $r$  è una radice semplice.

**Chiusura algebrica** Le radici di un polinomio  $P \in K[x]$  di grado  $n$  rispettano la regola  $m_1 + \dots + m_i \leq n$  dove  $m_i$  è la molteplicità algebrica di  $r_i$  con  $i = 1, \dots, k$ . Per ogni campo  $K$  esisterà un altro campo  $\bar{K}$  che lo contiene tale che ogni polinomio appartenente ad esso abbia le radici che soddisfino  $m_1 + \dots + m_i = n$ . Tale campo è detto chiusura algebrica di  $K$ . Se  $K$  e la sua chiusura coincidono,  $K$  si dice algebricamente completo.

Il campo dei  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso, è la chiusura algebrica di  $\mathbb{R}$  e contiene la chiusura algebrica di  $\mathbb{Q}$ .

## 7 Matrici

Le matrici sono uno strumento fondamentale per fare i conti in matematica.

Dati due insiemi  $M = 1, \dots, m$  e  $N = 1, \dots, n$ , una matrice di ordine  $(m, n)$  ad elementi nel campo  $K$  è una funzione definita come:

$$\begin{aligned} A: M \times N &\rightarrow K \\ (i, j) &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

L'insieme di tutte le matrici di ordine  $(m, n)$  su  $K$  viene indicato con  $\text{Mat}(m, n; K)$ .

**Matrici particolari** La matrice nulla è indicata con  $0_{mn}$ . La matrice identità  $I_{mn}$  è, invece, una matrice del tipo:

$$I_{mn} : \begin{array}{ccc} M \times N & \rightarrow & K \\ (m, n) & \mapsto & \Delta \end{array} \text{ con } \Delta = 1 \text{ se } i = j$$

**Rappresentazione** Una matrice può essere pensata come una tabella di numeri di  $m$  righe ed  $n$  colonne:

$$A = \begin{array}{ccc} & 1 & \cdots & n \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \in & Mat(m, n; K) \end{array}$$

Una matrice si può anche indicare con la notazione  $[a_{ij}]$ .

**Il rango di una matrice** Il rango  $r(A)$  di una matrice  $A$  è il rango di una matrice a scala  $S$  ottenuta tramite riduzione di Gauss di  $A$ .

## 7.1 Operazioni con le matrici

**Somma** È un'operazione binaria interna. Somma gli elementi uno a uno:

$$+ : \begin{array}{ccc} Mat(m, n; K) \times Mat(m, n; K) & \rightarrow & Mat(m, n; K) \\ ([a_{ij}], [b_{ij}]) & \mapsto & [a_{ij} + b_{ij}] \end{array}$$

**Prodotto con scalare** È un'operazione binaria esterna:

$$\cdot : \begin{array}{ccc} K \times Mat(m, n; K) & \rightarrow & Mat(m, n; K) \\ (t, [a_{ij}]) & \mapsto & [t \cdot a_{ij}] \end{array}$$

**Prodotto matriciale** È un'operazione binaria esterna:

$$* : \begin{array}{ccc} Mat(m, p; K) \times Mat(p, n; K) & \rightarrow & Mat(m, n; K) \\ ([a_{ij}], [b_{ij}]) & \mapsto & [\sum_{k=0}^p a_{ik} b_{kj}] \end{array}$$

Osserva: il numero di colonne della prima deve essere uguale al numero di righe della seconda!

**Proprietà della somma** La struttura  $(Mat(m, n; K), +)$  è un gruppo abeliano quindi:

- È commutativa:  $A + B = B + A$
- È associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Esiste l'elemento neutro  $e = 0_{mn}$
- Esiste l'inverso:  $A + (-A) = 0_{mn}$

**Proprietà del prodotto con scalare**

- È distributiva con la somma:  $k(A + B) = kA + kB$
- È distributiva con la somma in  $K$ :  $(j + k)A = jA + kA$
- È omogenea rispetto alla moltiplicazione in  $K$ :  $(jk)A = j(kA)$
- Esiste la normalizzazione  $A = 1 \cdot A$

## Proprietà del prodotto matriciale

- Non vale la proprietà commutativa
- Non esiste l'annullamento
- L'elemento neutro è  $I_m A_{mn} = A, A_{mn} I_n = A$
- Non esiste l'inverso
- É associativo
- É distributivo con la somma:  $A(B + C) = (AB) + (AC)$
- É omogenea con l'altro prodotto:  $t(AB) = (tA)B = A(tB)$

## 7.2 La matrice trasposta

Data una matrice  $A$ , la matrice trasposta è un'altra matrice  $A^T$  che si ottiene trasformando tutte le righe in colonne e viceversa:

$$A \in \text{Mat}(m, n; K); A^T \in \text{Mat}(n, m, K)$$

## 7.3 Pivot e matrice a scala

**Pivot** Un pivot  $P_i$  è il primo elemento non nullo della riga  $i$  della matrice.

**Matrice a scala** Una matrice nella quale il pivot della prima riga compare prima del pivot della seconda riga, che a sua volta compare prima del pivot della terza riga e così andare, con le eventuali righe nulle per ultime, si dice matrice a scala.

$$A = \begin{bmatrix} P1 & * & * & * \\ 0 & P2 & * & * \\ 0 & 0 & P3 & * \\ 0 & 0 & 0 & P4 \\ & & 0_{m-r,n} & \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, n; K)$$

**Il rango di una matrice a scala** Il rango  $r(S)$  di una matrice a scala  $S$  è il numero di pivot in  $S$ .

## 7.4 Eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss ci permette di ridurre qualsiasi matrice in una nuova matrice a scala tramite alcune operazioni. Esisteranno diverse riduzioni, ma tutte hanno lo stesso rango.

### Le operazioni di Gauss

**Permutazione** Scambio due righe tra di loro

**Moltiplicazione per uno scalare non nullo** Moltiplico tutti gli elementi di una riga per un numero diverso da 0

**Somma tra righe** Sommo uno a uno gli elementi di due righe e la riga risultante la inserisco al posto di uno dei due addendi:  $A_{R(i)} \rightarrow A_{R(i)} + tA_{R(j)}$  con  $i \neq j$

## 8 Sistemi lineari

Un sistema lineare è un insieme di espressioni che hanno questa forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Dove:

- $a_{ij}, b_i \in K$
- $x_n$  sono incognite
- $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Un sistema lineare può anche essere scritto come un'equazione matriciale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$AX = B$$

La matrice  $[A|B]$  è detta la matrice completa del sistema.  $[A|0]$  è detta matrice del sistema omogeneo associato.