8/10/20

1) Sia $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in R \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\alpha K$. Provare che R è di equivalenza e descrivere $\mathbb{N}_0/_R$

1) Sia $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che associa a n la massima potenza di 2 che divide n, quindi possiamo dire che $(n,m) \in R \iff f(n) = f(m)$. Avremo, quindi, che $R = Ker(f)$ e siccome $Ker f$ è di equivalenza, allora R è di equivalenza
$\mathbb{N}_0/_R = \{ [2^n]_R \mid n \in \mathbb{N} \}$ con $[2^n]_R \cdot \mathbb{D}$ con $\mathbb{D} = \{ 2m+1 \mid m \in \mathbb{N} \}$

2) Consideriamo $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\beta K \wedge \alpha \le \beta$. Provare che S è di ordine.

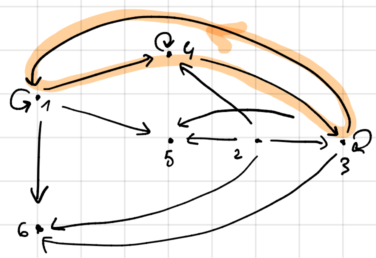
1) riflessiva: Sia $n \in \mathbb{N}_0$, allora $f(n) \le f(n)$ ($f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che abbiamo visto in 1) quindi $(n,n) \in S$
transitiva: Siano $n, m, l \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S$ e $(m,l) \in S$ dunque $f(n) \le f(m) \le f(l) \Rightarrow f(n) \le f(l) \Rightarrow (n,l) \in S$
antisimmetrica: Siano $n, m \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \wedge (m,n) \in S$ dunque $f(n) \le f(m) \wedge f(m) \le f(n) \Rightarrow f(n) = f(m)$. Dobbiamo ora dimostrare che f è iniettiva. In 1, però, abbiamo visto che è possibile che $[n]_R = [m]_R$, quindi l'antisimmetria non è valida.
↳ non è una relazione d'ordine.

3) Considera $T \subseteq \mathbb{N}_0/_R \times \mathbb{N}_0/_R$: $([n]_R, [m]_R) \in T \iff (n,m) \in S$, essa è d'ordine? (R ed S definiti in 1 e 2).
Dimostra che T è d'ordine.

1) Bisogna prima dimostrare che T è ben definita, ossia se $n' \in [n]_R$ e $m' \in [m]_R$, allora $(n,m) \in S \iff (n',m') \in S$. Sia $(n,m) \in S \iff f(n) \le f(m) \iff f(n') \le f(m') \iff (n',m') \in S$.
Dimostrare le proprietà è facile.

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

$$A \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



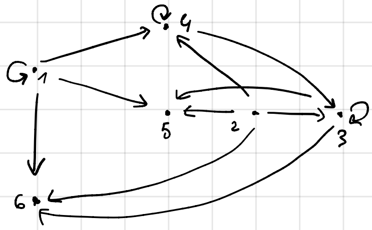
Dire:
1) Quali proprietà ha R
2) Qual'è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
4) R contiene funzioni? Quante? R è contenuta in una funzione? Quale?

1) antisimmetrica
2) La chiusura d'equivalenza è ω_A, quindi $A/_{\omega_A} = \{A\}$: Esiste solo 1 componente connessa
3) La chiusura d'ordine non esiste perché nel ciclo orientato si formeranno delle frecce doppie, invalidando l'antisimmetria
4) Togliendo archi non si ottiene nessuna funzione, neanche aggiungendo archi

PRO TIP! Se hai un ciclo, la chiusura transitiva conterrà il ciclo in direzione opposta

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

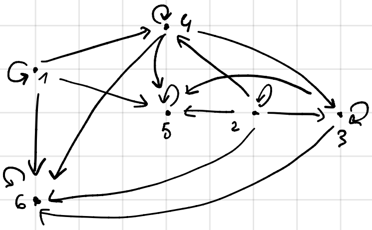
$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

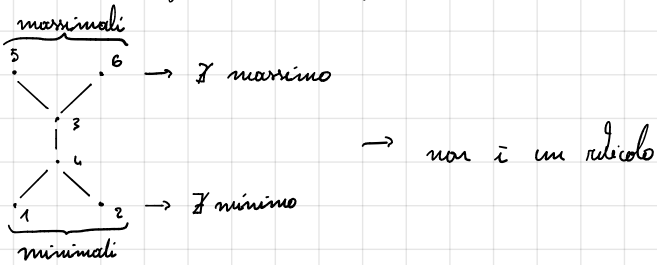


Dire:

1) Quali proprietà ha R
2) Qual è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
4) Sia T la chiusura d'ordine, T contiene funzioni? Quante? T è contenuta in una funzione? Quale?

1) N.A.
2) ω_A ; $A/\omega_A = \{A\}$
3) Chiudiamo riflessivamente, transitivamente e disegnamo il diagramma di Hasse





4) T non è contenuta in funzioni, ma contiene funzioni in quanto seriale. Ci sono $5^2 \cdot 4 \cdot 3$