# ISOMETRIE (DEFINIZIONE 9.1)

$(V, \langle , \rangle_V), (W, \langle , \rangle_W)$ s.v.e. $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi euclidei, o isometria, se $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e

$$\langle f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2) \rangle_W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle_V \qquad \forall\, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V.$$

OSS: grazie alla formula di polarizzazione, $f$ è un'isometria sse

$$\| f(\underline{v}) \|_W = \| \underline{v} \|_V \qquad \forall\, \underline{v} \in V$$

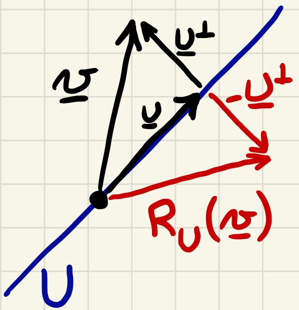
$\Rightarrow$ $f$ è un isometria sse non cambia norme ed angoli.

## ESEMPI

- $U$ sottospazio di $V$, $R_U : V \to V$ riflessione ortogonale è un'isometria.

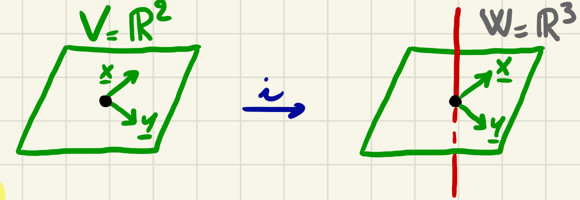
$$\| R_U(\underline{v}) \|^2 = \| \underline{u} - \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{u} \|^2 + \| - \underline{u}^\perp \|^2 =$$

$$= \| \underline{u} \|^2 + \| \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{u} + \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{v} \|^2$$




$\boxed{P_U\ ?}$

• $V=\mathbb{R}^2 \quad W=\mathbb{R}^3 \qquad i: V \hookrightarrow W$
$\qquad (x_1,x_2) \longmapsto (x_1,x_2,0)$




$\underline{x}=(x_1,x_2),\ \underline{y}=(y_1,y_2)\in V \Rightarrow \langle \underline{x},\underline{y}\rangle_E = x_1y_1+x_2y_2$

$i(\underline{x})=(x_1,x_2,0),\ i(\underline{y})=(y_1,y_2,0) \Rightarrow \langle i(\underline{x}),i(\underline{y})\rangle_E = x_1y_1+x_2y_2$

• $f_A$ con $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ruota tutti i vettori di $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ isometria.

## PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 9.3)

i) se $f$ è un'isometria allora è iniettiva;

ii) $\dim(V)=\dim(W)<\infty \Rightarrow$ se $f$ è un'isometria allora è un isomorfismo;

iii) $\dim(V)=\dim(W)<\infty \Rightarrow f$ è un'isometria sse l'immagine di una base o. n. di $V$ è una base o. n. di $W$.

IDEA DIM: (i) $f(\underline{v})=\underline{0}$ sse $\|f(\underline{v})\|=\|\underline{v}\|=0$ sse $\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow$

(ii) $\Rightarrow$ isometria = isomorfismo che non altera angoli e distanze $\Rightarrow$ (iii) $\boxtimes$

# Isometrie "Speciali"

## Endomorfismi Isometrici (Definizione 9.5)

$V$ s.v.e. Un endomorfismo isometrico è un'isometria $f \in End(V)$.

L'insieme degli endomorfismi isometrici si indica con $O(V)$.

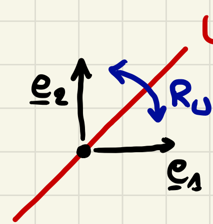
## Rotazioni (Definizione 9.13)

$(V, \xi)$ s.v.e.o. Una rotazione è un endomorfismo isometrico che preserva l'orientazione, cioè tale che $\xi([f(B)]) = \xi([B])$.

L'insieme delle rotazioni si indica con $SO(V)$.

## Proposizione 9.6, Teorema 9.15

- $\underset{\text{G. ortogonale}}{O(V)}$ è un sottogruppo di $GL(V)$.
- $\underset{\text{G. ortogonale speciale}}{SO(V)}$ è un sottogruppo di $O(V)$.




$R_U \in O(V) \setminus SO(V)$

Remind: $GL(V)$ = gruppo automorfismi di $V$.

PROBLEMA: come sono fatte le matrici rappresentative di $O(V)$ ed $SO(V)$?

MATRICI ORTOGONALI (DEFINIZIONE 9.7)

$Q \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ si dice ortogonale se $QQ^T = I_n$. L'insieme delle matrici ortogonali è $O(n;\mathbb{R})$.

$Q^T = Q^{-1} \Rightarrow Q Q^T = Q^T Q = I_n$

- $I_n I_n^T = I_n^2 = I_n \Rightarrow I_n$ è ortogonale

- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow QQ^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 9.9)

- $I_n \in O(n;\mathbb{R})$
- $Q_1, Q_2 \in O(n;\mathbb{R}) \Rightarrow Q_1 \cdot Q_2 \in O(n;\mathbb{R})$

i) $Q \in O(n;\mathbb{R})$ sse $Q^T \in O(n;\mathbb{R})$ ed in tal caso $Q^{-1} = Q^T$;

ii) $Q \in O(n;\mathbb{R})$ sse le righe e le colonne di $Q$ formano basi o.n.;

iii) $Q \in O(n;\mathbb{R}) \Rightarrow |Q| = \pm 1$.

DIM: iii) $QQ^T = I_n \Rightarrow |QQ^T| = |Q||Q^T| = |Q|^2 = |I_n| = 1$ $\square$

# Matrici Ortogonali Speciali

$SO(n;\mathbb{R}) = \{ Q \in O(n;\mathbb{R}) \mid |Q| = 1 \}$.

gruppo matrici invertibili

Proposizione 9.10, Lemma 9.14

$O(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $GL(n;\mathbb{R})$, detto gruppo ortogonale.

$SO(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $O(n;\mathbb{R})$, detto gruppo ortogonale speciale.

Rappresentazione delle Isometrie (Teoremi 9.11 - 9.15)

$V$ s.v.e.(o.) f.g., $\mathcal{B}$ base o.n. $\Rightarrow$

i) $\phi_{\mathcal{B}} : O(V) \longrightarrow O(n;\mathbb{R})$ è un isomorfismo di gruppi;

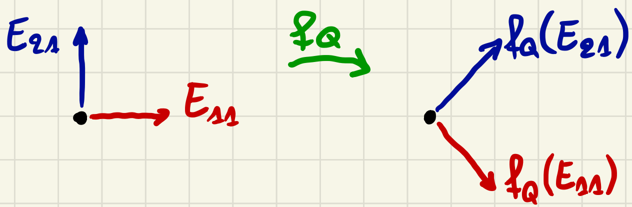
ii) $\phi_{\mathcal{B}} : SO(V) \longrightarrow SO(n;\mathbb{R})$ è un isomorfismo di gruppi.

Idea Dim: $f \in O(V)$ sse $f(\mathcal{B})$ è base ortonormale sse $F_{|\mathcal{B}} = [\, f(\underline{v}_1)_{|\mathcal{B}} \dots f(\underline{v}_n)_{|\mathcal{B}} \,]$ ha colonne ortonormali, cioè sse $F_{|\mathcal{B}} \in O(n;\mathbb{R})$. $\square$

$B=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ o.n. $\qquad f\in O(V) \iff f(B)$ o.n. $\iff$

$F_{|B} = [\, f(\underline{v}_1)_{|B} \;\dots\; f(\underline{v}_n)_{|B} \,] \in O(n;\mathbb{R})$

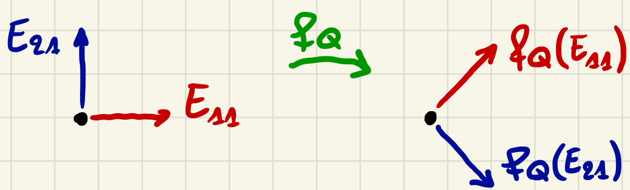
- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow f_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad f_Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$




$|Q| = 1 \Rightarrow Q \in SO(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$f_Q \in SO(\mathbb{R}^2)$ rotazione

- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow f_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad f_Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$




$|Q| = -1 \Rightarrow Q \notin SO(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$f_Q \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$

## Rotazioni e Duale di Hodge (Proposizione 9.17)

$f \in SO(V) \Rightarrow *(f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_{n-1})) = f(*(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n))$.

# ISOMETRIE IN DIMENSIONE 2 E 3

## LEMMA 9.18

$V$ s.v.e, $\dim(V) = n < \infty$, $f \in O(V)$. Allora:

i) $1, -1$ sono gli unici possibili autovalori di $f$;

ii) $n$ dispari: $\begin{cases} |f| = 1 \Rightarrow 1 \text{ è autovalore}, \\ |f| = -1 \Rightarrow -1 \text{ è autovalore}; \end{cases}$

iii) $n$ pari, $|f| = -1 \Rightarrow 1, -1$ sono autovalori.

DIM: i) $\lambda$ autovalore $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Rightarrow$

$$\|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

ii) $P_f(\lambda) = |f| + \ldots + (-1)^n \lambda^n = 1 + \ldots + (-1)^n \lambda^n \in C^0(\mathbb{R})$

$P_f(0) = 1$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P_f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} (-1)^n \lambda^n = -\infty \Rightarrow$

esiste una radice in $[0, +\infty) \Rightarrow 1$ è autovalore. $\blacksquare$

# TEOREMA 9.19 ( $f \in O(V)$ con $\dim(V)=2$ )

i) $|f|=1 \Rightarrow f$ ruota ogni vettore di un angolo $\vartheta$ t.c. $\boxed{\mathrm{Tr}(f)=2\cos\vartheta}$;

ii) $|f|=-1 \Rightarrow f$ è la riflessione ortogonale rispetto a $V_+$.

Dim: $\mathcal{B}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ base o.n. di $V$ $\Rightarrow$ $F_{|\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

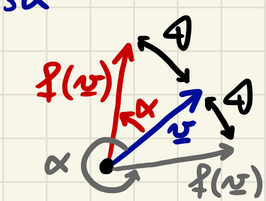
$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\cos\alpha \quad b=\operatorname{sen}\alpha \\ c=\cos\beta \quad d=\operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}.$$

• $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ : $F_{|\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |f|=1$ $\quad \boxed{\mathrm{Tr}(f)=2\cos\alpha}$.

Sia $\underline{v}=t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2 \in V \Rightarrow \vartheta=\widehat{\underline{v}\, f(\underline{v})}=\arccos\dfrac{\langle \underline{v}, f(\underline{v})\rangle}{\|\underline{v}\|\cdot\|f(\underline{v})\|}$

- $\|\underline{v}\|=\|f(\underline{v})\|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}$
- $\langle \underline{v}, f(\underline{v})\rangle = \underline{v}_{|\mathcal{B}}^T F_{|\mathcal{B}}\, \underline{v}_{|\mathcal{B}} = (t_1^2+t_2^2)\cos\alpha$

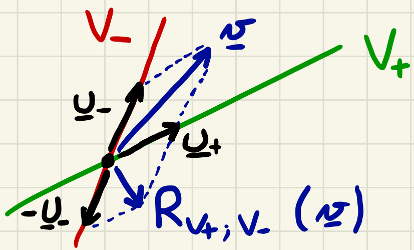
$$\Rightarrow \boxed{\vartheta=\arccos(\cos\alpha)}=\begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha\in[0,\pi] \\ 2\pi-\alpha & \text{se } \alpha\in[\pi,2\pi) \end{cases}$$



- $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ : $F_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |f| = -1 \overset{\text{LEMMA}}{\Longrightarrow} \pm 1$ autovalori $\Rightarrow$

- esiste base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\underline{v}_+, \underline{v}_-\}$ di autovettori di $f$;

- $f(\underline{v}_+) = \underline{v}_+$ , $f(\underline{v}_-) = -\underline{v}_- \Rightarrow f$ è la riflessione $R_{V_+;V_-}$;




- $\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle \overset{O(V)}{=} \langle f(\underline{v}_+), f(\underline{v}_-) \rangle = \langle \underline{v}_+, -\underline{v}_- \rangle = -\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle \Rightarrow$

$\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle = 0 \Rightarrow \underline{v}_+ \perp \underline{v}_- \Rightarrow V_+^{\perp} = V_- \Rightarrow$

$f = R_{V_+;V_-} = R_{V_+}$ .

NON FATTO

$\boxtimes$