## GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

### PRIMA PROVA IN ITINERE - 06/05/2011 - VERSIONE A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 1.** (6 + 3 + 2 punti) Si consideri il sistema lineare $AX = B$ dove la matrice completa del sistema è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right),$$

con $a, b$ parametri reali.

(1) Stabilire se e quante soluzioni ammette il sistema, al variare di $a, b$.
(2) Determinare se esistono valori di $a, b$ per i quali il sistema ammette $X = (-4, -4, 5)^t$ tra le soluzioni.
(3) Posto $a = 1$ e $b = 0$, ed interpretando $(A|B)$ come matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche, di un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, determinare due matrici $C$, di tipo $3 \times 2$, e $D$, di tipo $2 \times 4$, che verificano l' uguaglianza $CD = (A|B)$. Le matrici $C$ e $D$ esistono anche se poniamo $a = b = 0$?

*Svolgimento.* (1) Effettuiamo le operazioni elementari $R_2 - R_1 \to R_2, R_3 - R_1 \to R_3$ sulla matrice $(A|B)$ ed otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & b \\ a-1 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & a-1 & 0 & 1-b \end{array}\right).$$

Se $a - 1 \neq 0$, le matrici $A$ ed $(A|B)$ risultano entrambe ridotte per righe ed entrambe di rango 3. Se $a = 1$, la matrice $A$ è ridotta per righe, ed ha rango 1, mentre la matrice $(A|B)$ risulta avere rango 2 se $1 - b \neq 0$ (effettuando l' operazione $R_3 - R_2 \to R_3$ otteniamo una matrice ridotta per righe), mentre risulta avere rango 1 se $1 - b = 0$ (in tal caso risulta anche ridotta per righe). In conclusione,

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases} \qquad \text{mentre} \qquad r(A|B) = \begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 1 \\ 2 & \text{se } a = 1 \text{ e } b \neq 1 \\ 1 & \text{se } a = b = 1 \end{cases}.$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema $AX = B$ ha una sola soluzione se $a \neq 1$, ha $\infty^2$ soluzioni se $a = b = 1$, mentre non ha soluzioni se $a = 1$ e $b \neq 1$.

(2) Sostituendo alle incognite i valori proposti, otteniamo le seguenti equazioni in $a$ e $b$ :

$$\begin{cases} b = -3 \\ -4a = 0 \\ -4a = 0 \end{cases}.$$

È evidente che il sistema ha l' unica soluzione $a = 0, b = -3$.

(3) Per $a = 1$ e $b = 0$, la matrice $(A|B)$ è uguale a

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avendo omesso il separatore tra la matrice $A$ e la matrice $B$. Come già calcolato, essa ha rango 2 ed una base per lo spazio spazio generato dalle sue colonne è data dalle ultime sue 2 colonne, essendo le prime tre colonne uguali tra loro. Sia allora

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $D$ si ottiene facilmente osservando che il prodotto tra la matrice $C$ e le colonne di $D$ deve essere uguale alle colonne di $(A|B)$. Quindi,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, si poteva ottenere una fattorizzazione usando le righe di $(A|B)$. In tal caso,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, si osservi che, trovata una fattorizzazione $(A|B) = CD$, ogni altra fattorizzazione è della forma $\overline{C} \cdot \overline{D}$ con $\overline{C} = CP$, $\overline{D} = P^{-1}D$ e $P$ è una qualunque matrice quadrata invertibile di ordine 2. Per $a = b = 0$, $(A|B)$ non può essere fattorizzata come richiesto. Infatti, $r(A|B) = 3$, mentre il rango di una matrice della forma $CD$ con $C$ di tipo $3 \times 2$ e $D$ di tipo $2 \times 4$ è $\leq 2$.

**Esercizio 2.** $(4 + 5 + 2$ punti) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema lineare omogeneo

$$U : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0. \end{cases}$$

Sia poi $V$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito come

$$V = L((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2), (1, 0, 2, 2)).$$

(1) Calcolare basi e dimensioni di $U$, $V$.
(2) Calcolare basi e dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
(3) Costruire, se possibile, un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = U$ ed $f(V) = L((1, 1, 2), (1, 0, 1))$.

*Svolgimento.* (1) Essendo omogeneo il sistema che definisce $U$, esso ha sempre soluzioni, ed il loro numero dipende dal solo rango della matrice $A$ dei coefficienti delle incognite. La matrice $A$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

e si osserva facilmente che le prime due righe sono linearmente indipendenti, mentre la terza riga è somma delle prime due. In conclusione, $r(A) = 2$ e quindi $\dim(U) = 4-2 = 2$. Calcoliamo le incognite $y, t$ in funzione di $x, z$ ed otteniamo $y = -x+z, t = -x + z$. In conclusione, $U = \{(x, -x + z, z, -x + z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è $B_U = ((1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 1))$.

È evidente che il terzo generatore di $V$ è somma dei primi due generatori, mentre i primi due generatori sono linearmente indipendenti. Quindi, $\dim(V) = 2$, ed una sua base è $B_V = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2))$.

(2) Il sottospazio $U+V$ è generato dai vettori $(1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 2)$. Scriviamo le componenti dei vettori rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ come colonne di una matrice ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando l' operazione elementare $C_3 - C_1 - C_2 \to C_3$ otteniamo la matrice ridotta per colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi $\dim(U+V) = 3$, ed una sua base è $B_{U+V} = ((1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 2))$. Dalla formula di Grassmann, si ricava che $\dim(U \cap V) = 1$. Visto che $(1, 0, 1, 0) \in V$, e che è combinazione lineare dei vettori di $B_U$, ossia è anche in $U$, abbiamo che $U \cap V = L((1, 0, 1, 0))$ e quindi una base di $U \cap V$ è $B_{U \cap V} = ((1, 0, 1, 0))$.

(3) Se l' applicazione lineare esistesse, potremmo considerare la sua restrizione al sottospazio $U + V$ di $\mathbb{R}^4$. Avremmo allora $f : U + V \to \mathbb{R}^3$ lineare, con $U = \ker(f)$. Visto che $f(U + V) = f(U) + f(V)$, e che $f(U) = \{\vec{0}\}$, allora $f(U + V) = f(V)$, ed ha dimensione 2, come si vede facilmente. Usando il teorema del Rango, abbiamo $\dim(U+V) = \dim(U)+\dim(f(V))$ ossia $3 = 2+2 = 4$. Essendo falsa l' uguaglianza ottenuta, otteniamo che non esistono applicazioni lineari che verificano le condizioni richieste.

**Esercizio 3.** $(4 + 4 + 3$ punti) Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+h \end{pmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale $h$.

(1) Posto $h = -2$, determinare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di $A$.
(2) Per quali $h$ la matrice $A$ è diagonalizzabile?
(3) Per quali $h$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili?

*Svolgimento.* (1) Il polinomio caratteristico di $A$ è uguale a $p(t) = \det(A - tI) = (1 - t)^2(-t)$ e quindi le sue radici sono $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ di molteplicità $m(0) = 1$, e $m(1) = 2$, rispettivamente. Essendo entrambe le radici nel campo $\mathbb{R}$ su cui stiamo lavorando, sono entrambe autovalori di $A$. Con facili calcoli, otteniamo che gli autospazi sono $V(0) = L((1, 1, 0))$ e $V(1) = L((3, 2, 0), (0, 0, 1))$, di dimensioni 1 e 2, rispettivamente. In conclusione $A$ è diagonalizzabile per $h = -2$.

(2) Il polinomio caratteristico di $A$ è uguale a $p(t) = (1 - t)(t^2 - (3 + h)t) = -t(t - 1)(t - 3 - h)$ e le sue radici sono $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = h + 3$, tutte reali, e quindi tutte autovalori. Se $h \neq -3, -2$, le radici sono tutte distinte. Se $h = -3$,

$m(0) = 2, m(1) = 1$, ed infine, se $h = -2$, $m(1) = 2, m(0) = 1$. Se gli autovalori hanno tutti molteplicità 1, allora $A$ è diagonalizzabile. Quindi $A$ è diagonalizzabile se $h \neq -3, -2$, e se $h = -2$, grazie ai calcoli precedenti.

Studiamo quindi la diagonalizzabilità di $A$ per $h = -3$. In tal caso, $\dim(V(0)) = 3 - r(A - 0I) = 3 - r(A) = 3 - 2 = 1 \neq m(0)$. Quindi, $A$ non è diagonalizzabile.

In conclusione, $A$ è diagonalizzabile per $h \neq -3$.

(3) Visto che $B$ è triangolare superiore, il suo polinomio caratteristico è $p_B(t) = -t(t-1)(t-h-3)$ e quindi $A$ e $B$ hanno gli stessi autovalori.

Se $h \neq -3, -2$, entrambe le matrici sono diagonalizzabili, e sono simili a

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h+3 \end{pmatrix}$$

e quindi sono simili tra loro.

Se $h = -2$, $A$ è diagonalizzabile. Invece, $V_B(1)$ ha dimensione $3 - r(B - I) = 1 \neq m(1)$ e quindi $B$ non è diagonalizzabile. Quindi, $A$ e $B$ non sono simili.

Se $h = -3$, $A$ non è diagonalizzabile. Invece, $V_B(0)$ ha dimensione $3 - r(B) = 2 = m(0)$ e quindi $B$ è diagonalizzabile. In conclusione, $A$ e $B$ non sono simili.

Riassumendo i risultati, otteniamo che $A$ e $B$ sono simili per $h \neq -3, -2$.

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## PRIMA PROVA IN ITINERE - 06/05/2011 - VERSIONE B

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 4.** (6+3+2 punti) Si consideri il sistema lineare$AX = B$ dove la matrice completa del sistema è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & 2 \end{array}\right),$$

con $a, b$ parametri reali.

(1) Stabilire se e quante soluzioni ammette il sistema, al variare di $a, b$.
(2) Determinare se esistono valori di $a, b$ per i quali il sistema ammette $X = (-4, -4, 5)^t$ tra le soluzioni.
(3) Posto $a = 1$ e $b = 0$, ed interpretando $(A|B)$ come matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche, di un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, determinare due matrici $C$, di tipo $3 \times 2$, e $D$, di tipo $2 \times 4$, che verificano l' uguaglianza $CD = (A|B)$. Le matrici $C$ e $D$ esistono anche se poniamo $a = b = 0$?

**Esercizio 5.** $(4 + 5 + 2$ punti) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema lineare omogeneo

$$U : \begin{cases} x - y - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Sia poi $V$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito come

$$V = L((1, 0, -2, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 2)).$$

(1) Calcolare basi e dimensioni di $U$, $V$.
(2) Calcolare basi e dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
(3) Costruire, se possibile, un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = U$ ed $f(V) = L((1, 1, 2), (1, 0, 1))$.

**Esercizio 6.** $(4 + 4 + 3$ punti) Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -h & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+h \end{pmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale $h$.

(1) Posto $h = -3$, determinare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di $A$.
(2) Per quali $h$ la matrice $A$ è diagonalizzabile?
(3) Per quali $h$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili?

## GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

### PRIMA PROVA IN ITINERE - 06/05/2011 - VERSIONE C

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 7.** (6+3+2 punti) Si consideri il sistema lineare$AX = B$ dove la matrice completa del sistema è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & a & -1 & 1 \end{array}\right),$$

con $a, b$ parametri reali.

(1) Stabilire se e quante soluzioni ammette il sistema, al variare di $a, b$.
(2) Determinare se esistono valori di $a, b$ per i quali il sistema ammette $X = (-4, -4, 5)^t$ tra le soluzioni.
(3) Posto $a = 1$ e $b = 0$, ed interpretando $(A|B)$ come matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche, di un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, determinare due matrici $C$, di tipo $3 \times 2$, e $D$, di tipo $2 \times 4$, che verificano l' uguaglianza $CD = (A|B)$. Le matrici $C$ e $D$ esistono anche se poniamo $a = b = 0$?

**Esercizio 8.** $(4 + 5 + 2$ punti) Sia $U$ il sottospazio di $\mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ costituito dalle matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ che risolvono il sistema lineare omogeneo

$$U : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0. \end{cases}$$

Sia poi $V$ il sottospazio di $\mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ definito come

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

(1) Calcolare basi e dimensioni di $U$, $V$.
(2) Calcolare basi e dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
(3) Costruire, se possibile, un' applicazione lineare $f : \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = U$ ed $f(V) = L((1, 1, 2), (1, 0, 1))$.

**Esercizio 9.** $(4 + 4 + 3$ punti) Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1+h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+h \end{pmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale $h$.

(1) Posto $h = -3$, determinare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di $A$.
(2) Per quali $h$ la matrice $A$ è diagonalizzabile?
(3) Per quali $h$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili?

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## PRIMA PROVA IN ITINERE - 06/05/2011 - VERSIONE D

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 10.** $(6+3+2$ punti) Si consideri il sistema lineare$AX = B$ dove la matrice completa del sistema è

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right),$$

con $a, b$ parametri reali.

(1) Stabilire se e quante soluzioni ammette il sistema, al variare di $a, b$.
(2) Determinare se esistono valori di $a, b$ per i quali il sistema ammette $X = (-4, -4, 5)^t$ tra le soluzioni.
(3) Posto $a = 1$ e $b = 0$, ed interpretando $(A|B)$ come matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche, di un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, determinare due matrici $C$, di tipo $3 \times 2$, e $D$, di tipo $2 \times 4$, che verificano l' uguaglianza $CD = (A|B)$. Le matrici $C$ e $D$ esistono anche se poniamo $a = b = 0$?

**Esercizio 11.** $(4+5+2$ punti) Sia $U$ il sottospazio di $\mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ costituito dalle matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ che risolvono il sistema lineare omogeneo

$$U : \begin{cases} x - y - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Sia poi $V$ il sottospazio di $\mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ definito come

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

(1) Calcolare basi e dimensioni di $U$, $V$.
(2) Calcolare basi e dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
(3) Costruire, se possibile, un' applicazione lineare $f : \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = U$ ed $f(V) = L((1,1,2),(1,0,1))$.

**Esercizio 12.** $(4+4+3$ punti) Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1+h & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+h \end{pmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale $h$.

(1) Posto $h = -1$, determinare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di $A$.
(2) Per quali $h$ la matrice $A$ è diagonalizzabile?
(3) Per quali $h$ le due matrici $A$ e $B$ sono simili?

## GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

### SECONDA PROVA IN ITINERE - 29/06/2011

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 13.** $(4+5+2$ punti) Sia dato il riferimento euclideo $(O,(\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$ dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, e siano date le rette $r$ ed $s$ di equazioni parametriche $r: x = t, y = 1+t, z = 1$, e $s: x = t, y = 1, z = -t$.

(1) Discutere la loro posizione reciproca e determinare l' angolo che esse formano.
(2) Determinare l' equazione cartesiana del piano contenente $r$ e parallelo ad $s$, e determinare la distanza tra $r$ ed $s$.
(3) Determinare il massimo angolo formato da un piano contenente $r$ e la retta $s$. Calcolare quindi l' equazione del piano contenente $r$ che soddisfa tale condizione.

*Svolgimento.* Cambiato il parametro della retta $s$ da $t$ a $\tau$, il sistema che si ottiene per determinare la loro posizione reciproca è formato dalle tre equazioni $t = \tau, 1 + t = 1, 1 = -\tau$. Dopo facili calcoli, la matrice completa del sistema precedente è

$$(M|N) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

e quindi $r(M) = 2, r(N) = 3$. Otteniamo allora che $r$ ed $s$ sono due rette sghembe. La retta $r$ è parallela al vettore $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ mentre la retta $s$ è parallela al vettore $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$, come si ricava facilmente dalle loro equazioni parametriche. L' angolo $\theta$ tra le due rette verifica l' equazione $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ ossia $\theta = \pi/3$.

La retta $r$ contiene il punto $A(0,1,1)$. L' equazione del piano $\alpha$ cercato è allora

$$\vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{AP} = 0, \text{ ossia } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & -1 & z-1 \end{pmatrix} = -x + y - z = 0.$$

È ben noto che $d(r,s) = d(\alpha, s) = d(\alpha, B)$ per ogni $B \in s$. Visto che $s$ contiene il punto $B(0,1,0)$, abbiamo

$$d(r,s) = d(\alpha, B) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sapendo che l' angolo non cambia per parallelismo, sia $s'$ una retta parallela ad $s$ ed incidente $r$. Sia ora $\pi$ un piano che contiene $r$. L' angolo $\varphi$ tra $\pi$ ed $s'$ è l' angolo che la retta $s'$ forma con la sua proiezione ortogonale su $\pi$, ed è inferiore all' angolo che $s'$ forma con una qualunque altra retta contenuta in $\pi$. Quindi, $\varphi \leq \widehat{r,s'} = \widehat{r,s} = \pi/3$. Ovviamente, l' uguaglianza vale se $r$ è la proiezione ortogonale di $s'$ su $\pi$. In questo caso, $\pi$ contiene anche la retta ortogonale ed incidente $r$ ed $s'$, e quindi la sua equazione è $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{AP} = 0$. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\pi : x - y - 2z + 3 = 0$.

**Esercizio 14.** (6+4+1 punti) Sia dato il riferimento euclideo $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ del piano euclideo $\mathbb{E}^2$, e sia dato il fascio di coniche di equazione

$$\mathcal{C}_k : kx^2 + 2(2-k)xy + ky^2 - x - y + 1 - k = 0.$$

(1) Posto $k = 3$, classificare la conica $\mathcal{C}_3$ e determinarne una sua equazione canonica. Calcolare quindi le coordinate del suo centro e gli assi, oppure calcolare il cambio di riferimento che la riporta in forma canonica.
(2) Determinare i valori di $k$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una conica degenere e le coordinate dei punti base del fascio.
(3) Calcolare poi i valori di $k$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un' iperbole equilatera, e quelli per cui essa è una circonferenza.

*Svolgimento.* La conica $\mathcal{C}_3$ ha equazione $3x^2 - 2xy + 3y^2 - x - y - 2 = 0$. Le matrici associate a $\mathcal{C}_3$ sono quindi

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della prima matrice è $\det(B) = -18 \neq 0$ e quindi $\mathcal{C}_3$ è una conica non degenere, mentre il determinate della seconda è $\det(A) = 8 > 0$. In conclusione, $\mathcal{C}_3$ è un' ellisse. Sia $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$ la sua equazione canonica. Allora $\gamma = \det(B)/\det(A) = -\frac{9}{4}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è $p(t) = (t-4)(t-2)$. Le sue radici sono 2 e 4 entrambe di molteplicità 1. Poniamo $\alpha = 2, \beta = 4$. In definitiva, l' equazione canonica di $\mathcal{C}_3$ è $\frac{X^2}{\frac{9}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{16}} = 1$. Il centro si simmetria di $\mathcal{C}_3$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ -x + 3y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. L' autospazio $V(2)$ è costituito da tutti e soli i vettori dipendenti linearmente da $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$. La matrice $P$ è allora

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il cambio di riferimento è allora

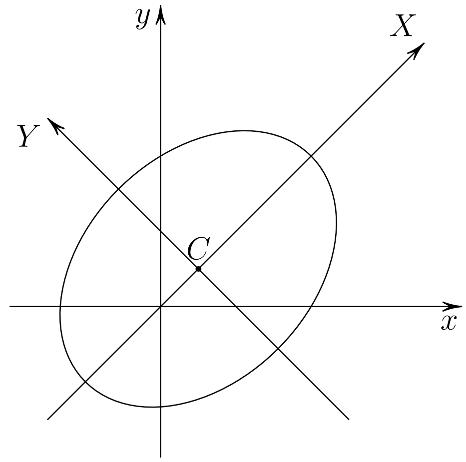
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Visto che nel sistema di riferimento intrinseco di $\mathcal{C}_3$ gli assi di simmetria ortogonale hanno equazioni $X = 0$ e $Y = 0$, essi hanno equazioni $x + y - \frac{1}{2} = 0$ e $x - y = 0$ nel sistema di riferimento dato. Il disegno della conica non è richiesto. Esso comunque è

Le matrici associate a $\mathcal{C}_k$ sono

$$B_k = \begin{pmatrix} k & 2-k & -\frac{1}{2} \\ 2-k & k & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-k \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} k & 2-k \\ 2-k & k \end{pmatrix}.$$

La conica $\mathcal{C}_k$ è degenere se $\det(B_k) = 0$. Con facili calcoli, si ha che $\det(B_k) = (1-k)(4k-3)$ e quindi $\mathcal{C}_k$ è degenere solo se $k = 1$ oppure se $k = \frac{3}{4}$.




I punti base del fascio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \\ 4xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema sono i quattro punti di coordinate $(0, 1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$\mathcal{C}_k$ è un' iperbole equilatera se $A_k$ ha traccia nulla, e $B_k$ ha rango 3. L' unico valore di $k$ per cui la traccia di $A_k$ è nulla è $k = 0$, che non è tra quelli per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere.

Infine, $\mathcal{C}_k$ è una circonferenza se $A_k$ è della forma $cI$ e $B_k$ ha rango 3. L' unico valore per cui questo accade è $k = 2$.

**Esercizio 15.** $(4 + 5 + 2$ punti) Sia dato il riferimento euclideo $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, e siano dati il punto $F(0, 0, 1)$ ed il piano $\alpha : x - y = 1$. Determinare l' equazione del luogo $S$ formato dai punti $P \in \mathbb{E}^3$ che verificano la condizione

$$d(P, F) = \sqrt{2} d(P, \alpha).$$

(1) Calcolare l' equazione cartesiana di $S$, e verificare che $S$ è una quadrica.
(2) Classificare $S$, calcolare una sua equazione canonica, e specificare se è una quadrica di rotazione.
(3) Determinare un piano che incontra $S$ lungo una circonferenza, e l' equazione dell' eventuale asse di rotazione della quadrica.

*Svolgimento.* Sia $P$ il punto di coordinate $(x, y, z)$. Allora $P \in S$ se le sue coordinate verificano l' equazione

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{2} \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{2}}.$$

Svolgendo i facili calcoli, si ottiene l' equazione che descrive $S$ ed essa è

$$S : 2xy + z^2 + 2x - 2y - 2z = 0$$

e quindi $S$ è una quadrica.

Le matrici associate ad $S$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, si ricava che $r(B) = 4$, e $\det(B) = -1 < 0$. Quindi $S$ è una quadrica liscia a punti ellittici. Il polinomio caratteristico di $A$ è $p(t) = -t^3+t^2+t-1$ e quindi abbiamo 2 autovalori positivi ed uno negativo. In conclusione, $S$ è un iperboloide ellittico, o a 2 falde. Con pochi altri calcoli, si ricava che gli autovalori di $A$ sono $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$, con molteplicità $m(1) = 2, m(-1) = 1$. Quindi, $S$ è di rotazione. Una sua equazione canonica è $X^2 + Y^2 - Z^2 + \delta = 0$ con $-\delta = -1$. L' equazione canonica cercata è allora $X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 = 0$.

I piani che incontrano $S$ lungo una circonferenza sono quelli di equazione $Z = c$ nel nuovo sistema di riferimento, ossia quelli ortogonali all' asse $Z$. Tale asse è parallelo all' autospazio $V(-1) = V(1)^{\perp}$ e quindi i piani cercati sono paralleli all' autospazio $V(1)$. Le componenti dei vettori di tale autospazio verificano l' equazione $x - y = 0$ e quindi i piani richiesti hanno equazione $x - y + h = 0$ con $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, l' autospazio $V(-1)$ ha $(\vec{i} - \vec{j})$ come base (non ortonormale). Il centro di simmetria di $S$ ha coordinate $C(1, -1, 1)$ e quindi l' asse di rotazione di $S$ ha equazione $a : x = 1 + t, y = -1 - t, z = 1$. È facile intuire che l' asse di rotazione di $S$ è la retta per $F$ ortogonale al piano $\alpha$, mentre i piani paralleli ad $\alpha$ tagliano $S$ lungo circonferenze.

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## TEMA D'ESAME- 14/07/2011

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 16.** ($5+5+1$ punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$f(x, y, z, t) = (x + y - 2z + t, x - y + z + t, x - 2z, y + t).$$

(1) Determinare una base e la dimensione del nucleo e dell' immagine di $f$.
(2) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato definito come

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = 0, x - y = 0\}.$$

Determinare una base di $U$, e stabilire se esistono vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ che non appartengono a $\ker(f) + U$.
(3) Verificare che $f$ ammette $\lambda = 0$ come autovalore.

*Svolgimento.* Cominciamo col calcolare base e dimensione di $\ker(f)$. Dalla sua definizione, sappiamo che i vettori $(x, y, z, t)$ appartenenti a $\ker(f)$ sono tutti e soli quelli che verificano l' uguaglianza $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, ossia tutti e soli quelli che risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x - 2z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}.$$

Detta $A$ la matrice dei coefficienti delle incognite, possiamo ridurla effettuando, nell' ordine indicato, le operazioni elementari $R_2 - R_1 \to R_2$, $R_3 - R_1 \to R_3$, $R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to R_3$, $R_4 + \frac{1}{2}R_2 \to R_4$, $R_4 + R_3 \to R_4$. Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $r(A) = 3$, ossia $\dim(\ker(f)) = 1$. I vettori di $\ker(f)$ sono quindi $\ker(f) = \{z(2, \frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e in conclusione una base di $\ker(f)$ è $B_1 = ((4, 3, 2, -3))$.

Sia $B = ((4, 3, 2, -3), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ una base di $\mathbb{R}^4$ che completa $B_1$. Sapendo che $\mathrm{Im}(f)$ è generato dalle immagini dei 4 vettori indicati, che il primo dei 4 ha immagine nulla, e che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ per il Teorema del Rango, allora una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $B_2 = (f(0, 1, 0, 0), f(0, 0, 1, 0), f(0, 0, 0, 1)) = ((1, -1, 0, 1), (-2, 1, -2, 0), (1, 1, 0, 1))$.

Con facili calcoli, possiamo riscrivere il sottospazio $U$ come

$$U = \{(x, x, x + t, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\} = L((1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$$

e quindi $\dim(U) = 2$, ed una sua base è $B_3 = ((1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$. Sapendo che $\dim(\ker(f) + U) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(U) = 3$, è evidente che esistono vettori di $\mathbb{R}^4$ che non appartengono al sottospazio $\ker(f) + U$.

Infine, sappiamo dai calcoli precedenti, che $f(4, 3, 2, -3) = (0, 0, 0, 0) = 0(4, 3, 2, -3)$. Per definizione di autovalore, $\lambda = 0$ è allora autovalore per $f$. Inoltre, $V(0) = \ker(f)$ e quindi ha $((4, 3, 2, -3))$ come base e dimensione 1.

**Esercizio 17.** $(5+5+1$ punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, sia fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, e, in esso, si considerino i punti $A(1,4,0)$, $B(3,2,0)$, $C(1,2,2)$.

(1) Determinare l'equazione del luogo dei punti equidistanti da $A$ e $B$, e quella del luogo dei punti equidistanti da $A$ e $C$. Dedurre le equazioni del luogo dei punti equidistanti da $A, B, C$.
(2) Determinare l'equazione del piano $\pi$ contenente i punti $A, B, C$. Scrivere le coordinate del centro della circonferenza del piano $\pi$ passante per $A, B, C$.
(3) Senza ulteriori calcoli, determinare le coordinate del centro della sfera di raggio minimo passante per $A, B, C$, giustificando la risposta.

*Svolgimento.* Sia $P$ il punto di coordinate $(x, y, z)$. Esso è equidistante da $A$ e da $B$ se $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + z^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2}$. Elevando al quadrato e semplificando, otteniamo che l' equazione del luogo cercato è $x - y + 1 = 0$ e quindi il luogo cercato è un piano. Analogamente, il luogo dei punti equidistanti da $A$ e $C$ è il piano di equazione $y - z - 2 = 0$. Il luogo dei punti equidistanti da $A, B$, e $C$ è l' intersezione dei due piani ed è quindi

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} .$$

È immediato verificare che i due piani non sono paralleli, e quindi il luogo è la retta $r$ di equazione parametrica $r : x = -1 + t, y = t, z = -2 + t, t \in \mathbb{R}$.

Il piano contenente $A, B$, e $C$ ha equazione vettoriale $\vec{AP} \cdot \vec{AB} \wedge \vec{AC} = 0$ ossia

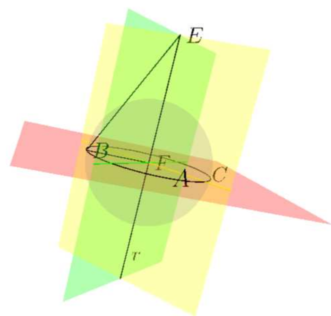
$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-4 & -2 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Con facili calcoli, si ottiene l' equazione cartesiana di $\pi$, ed essa è $\pi : x+y+z-5 = 0$.

La circonferenza per $A, B, C$ è l' intersezione di $\pi$ con una qualunque sfera contenente i tre punti. Il centro $E$ di una siffatta sfera è equidistante dai punti $A, B, C$ e quindi è un punto di $r$. Il raggio $R$ della sfera si collega al raggio $\rho$ della circonferenza tramite l' equazione $R^2 = \rho^2 + d(E, \pi)^2$, e quindi $R \geq \rho$. Il centro della circonferenza $F$ è la proiezione ortogonale di $E$ su $\pi$, ma è anche il centro della sfera di raggio uguale al raggio della circonferenza contenente la circonferenza, e si ottiene ovviamente quando $d(E, \pi) = 0$.. Questo prova sia che la retta $r$ è ortogonale al piano $\pi$, sia che $F$ è il punto d' intersezione di $r$ con $\pi$. Con facili calcoli, si ottiene che il parametro $t$ deve soddisfare l' equazione $3t - 8 = 0$, da cui $t = 8/3$, ed il centro della circonferenza è $F(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3})$. Per il precedente ragionamento, $F$ è anche il centro della sfera di raggio minimo contenente la circonferenza per $A, B, C$. Nel seguente disegno, il giallo è riportato il luogo dei punti equidistanti da $A$ e $C$, in verde quello dei punti equidistanti da $A$ e $B$, in rosso è rappresentato il piano contenente $A, B, C$, ed il resto del disegno è di facile interpretazione.

**Esercizio 18.** $(4+6+1$ punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, sia fissato un riferimento $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. In tale riferimento, si consideri il piano $\pi$ di equazione $x + y + z - 2 = 0$, e la quadrica $\Omega$ di equazione $x^2 - z^2 + 2y = 0$.

(1) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro $S$ avente generatrici parallele all'asse $z$, e direttrice data dalla conica $\gamma$ intersezione tra $\Omega$ e $\pi$.
(2) Classificare la conica sezione di $S$ con il piano $xy$, ridurla a forma canonica e determinare il cambio di riferimento che la riduce a forma canonica.




(3) Verificare che la matrice associata alla parte quadratica di $S$ ammette 0 come autovalore, e determinare il relativo autospazio.

*Svolgimento.* Visto che l' equazione cartesiana di $S$ manca della variabile $z$, la sua equazione si ottiene semplicemente eliminando la variabile $z$ dall' equazione di $\Omega$ utilizzando l' equazione cartesiana di $\pi$. In pratica, dall' equazione di $\pi$ si ricava che $z = 2 - x - y$. L' equazione di $S$ è allora $x^2 - (2 - x - y)^2 + 2y = 0$. Svolgendo i calcoli e semplificando, si ha

$$S : 2xy + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$$

La conica $\Gamma = S \cap [xy]$ è la conica del piano $z = 0$ di equazione $2xy + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$, ovviamente rispetto al riferimento dato inizialmente. Lavoriamo quindi nel piano $[xy]$, rispetto al riferimento indotto $\mathcal{R}' = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$. Le matrici associate alla conica sono allora

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, si ha che $\det(B) = 4 \neq 0$, e $\det(A) = -1 < 0$. Quindi $\Gamma$ è un' iperbole. Detta $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$ una sua equazione canonica, abbiamo $\gamma = \det(B)/\det(A) = -4$. Gli autovalori di $A$ sono le radici del polinomio $p(t) = \det(A - tI) = t^2 - t - 1 = 0$ e sono quindi uguali a $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Posto $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, otteniamo

$$\Gamma : \frac{X^2}{2(\sqrt{5} - 1)} - \frac{Y^2}{2(\sqrt{5} + 1)} = 1.$$

Il centro di simmetria di $\Gamma$ si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $C(1, 2)$. L' autospazio relativo all' autovalore $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è generato dal vettore $\vec{v} = 2\,\vec{i} + (1 + \sqrt{5})\,\vec{j}$ ed una sua base ortonormale è costituita dall' unico vettore $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\ \vec{v}$ . Il cambio di riferimento che riporta $\Gamma$ in forma canonica è allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata alla parte quadratica di $S$ è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è uguale a $q(t) = -t(t^2 - t - 1)$. Quindi, $\lambda = 0$ è autovalore per $M$, ed il suo autospazio è $V(0) = L(\vec{k})$. Questo è coerente con fatto che $S$ è un cilindro iperbolico avente generatrici parallele all' asse $z$ del riferimento $\mathcal{R}$.

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## TEMA D' ESAME - 05/09/2011

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 19.** (5 + 3 + 3 punti) Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l' applicazione lineare definita come

$$f_k(x, y, z) = (x + ky + (2 - k)z, kx + y + kz),$$

essendo $k$ un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di $k$, la dimensione ed una base sia del nucleo sia dell' immagine di $f_k$.

(2) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}.$$

Determinare una base di $U \cap \ker(f_1)$ e la sua dimensione.

(3) Sia dato il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$. Si calcoli la proiezione ortogonale di $\ker(f_3)$ su $U$.

*Svolgimento.* (1) Siano $C$ e $C'$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente, e sia $A_k$ la matrice che rappresenta $f_k$ rispetto alle basi $C$ e $C'$. Con facili calcoli, si ricava che

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2-k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo l' operazione elementare $R_2 - kR_1 \to R_2$ sulle righe di $A_k$. Otteniamo allora la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2-k \\ 0 & 1-k^2 & k^2-k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che $r(A_k) = 2$ se $k \neq 1$, mentre $r(A_k) = 1$ se $k = 1$. Sapendo che l' immagine di $f_k$ ha dimensione uguale al rango di $A_k$, otteniamo che

$$\dim \operatorname{Im}(f_k) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 1 \\ 1 & \text{se } k = 1 \end{cases} \qquad \dim \ker(f_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 1 \\ 2 & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

avendo ricavato la dimensione del nucleo dal Teorema del Rango.

Sia $k \neq 1$. Sappiamo che $\dim \operatorname{Im}(f_k) = 2$, e quindi che $\operatorname{Im}(f_k) = \mathbb{R}^2$. Una sua base è allora una base qualunque di $\mathbb{R}^2$, ad esempio la base canonica $C'$.

Per calcolare il nucleo, dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti delle incognite

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2-k \\ 0 & 1-k^2 & k^2-k \end{pmatrix}.$$

Essendo $k \neq 1$, possiamo dividere la seconda riga per $k - 1$, ed otteniamo la nuova matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2-k \\ 0 & -(1+k) & k \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, otteniamo che le soluzioni sono della forma ${}^t(-k-2, k, 1+k)t$ con $t \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono le componenti dei vettori del nucleo rispetto alla base canonica $C$ di $\mathbb{R}^3$, e quindi si ha $\ker(f_k) = L((-k-2, k, 1+k))$. È evidente che una sua base è $((-k-2, k, 1+k))$ per ogni $k$ fissato, diverso da 1.

Sia $k = 1$. La matrice $A_1$ che rappresenta $f_1$ rispetto alle base canonica $C$ e $C'$ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e sappiamo che ha rango 1, ed in particolare, tutte le sue colonne sono uguali. Quindi, $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 1) = (1, 1)$ da cui $\mathrm{Im}(f_1) = L((1, 1))$, ed una sua base è $((1, 1))$.

Il nucleo di $f_1$ è dato da $\ker(f_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Con facili calcoli, si ottiene che $\ker(f_1) = L((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ ed una sua base è $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

(2) L' intersezione di $\ker(f_1)$ ed $U$ si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Tutti i vettori che risolvono tale sistema sono proporzionali a $(1, 1, -2)$ e quindi $\dim U \cap \ker(f_1) = 1$ ed una sua base è $((1, 1, -2))$.

(3) Una base di $\ker(f_3)$ è $(\vec{v} = (-5, 3, 4))$ come si ricava facilmente dai calcoli fatti. Il complemento ortogonale di $U$ ha dimensione 1 ed una sua base è $((1, -1, 0))$. Quindi, una base ortonormale di $U^\perp$ è $(\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right))$. La proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $U^\perp$ è uguale a $(\vec{v} \cdot \vec{e})\ \vec{e}$ e quindi la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $U$ è uguale a $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{e})\ \vec{e} = (-5, 4, 3) + 4\sqrt{2}\ \vec{e} = (-5, 3, 4) - (-4, 4, 0) = (-1, -1, 4)$. In conclusione, la proiezione ortogonale di $\ker(f_3)$ su $U$ è il sottospazio $L((-1, -1, 4))$.

**Esercizio 20.** (5 + 6 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento euclideo $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. In tale riferimento, siano dati la retta $r : x = -3 + 4t, y = -4 - 3t, z = 0, t \in \mathbb{R}$, ed il piano $\alpha : 3x + 4y = 0$.

(1) Determinare la posizione mutua di $r$ ed $\alpha$ e la loro distanza.
(2) Calcolare l' equazione della sfera $S$ tangente ad $\alpha$ in $O(0, 0, 0)$ e tangente ad $r$.

*Svolgimento.* (1) Calcoliamo l' intersezione tra $r$ ed $\alpha$, sostituendo l' equazione parametrica di $r$ in quella cartesiana di $\alpha$ : con facili calcoli si ottiene $-25 = 0$. Quindi, $r \cap \alpha = \emptyset$ e di conseguenza, $r \| \alpha$. Inoltre, $d(r, \alpha) = d(A, \alpha)$ qualunque punto $A \in r$ consideriamo. Posto $t = 0$, otteniamo $A(-3, -4, 0)$. Usando l' opportuna formula, si ha $d(A, \alpha) = \frac{25}{5} = 5$, da cui $d(r, \alpha) = 5$.

(2) Ogni sfera tangente ad $\alpha$ in $O$ ha centro $C$ sulla retta $p$ perpendicolare ad $\alpha$ per $O$ e raggio $d(C, O)$. La retta $p$ ha equazione $p : x = 3t, y = 4t, z = 0, t \in \mathbb{R}$, e quindi $C(3t, 4t, 0)$. Il raggio $R$ è allora uguale a $d(C, O) = \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 5|t|$. La distanza tra $C$ ed $r$ è ancora uguale al raggio della sfera, essendo $S$ tangente anche ad $r$. Sapendo che

$$d(C, r) = \frac{|\ \vec{AC} \wedge \vec{v}\ |}{|\ \vec{v}\ |}$$

con $A(-3, -4, 0)$ e $\vec{v} = 4\ \vec{i}\ -3\ \vec{j}$ parallelo ad $r$, otteniamo $d(C, r) = 5|t + 1|$. Si ha allora l' equazione $|t + 1| = |t|$, la cui unica soluzione è $t = -\frac{1}{2}$. In conclusione,

$C(-\frac{3}{2}, -2, 0), R = \frac{5}{2}$ e quindi

$$S : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 + z^2 = \frac{25}{4}$$

ossia $S : x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y = 0$.

**Esercizio 21.** $(5+5+1$ punti) Si consideri la matrice

$$M(h,k) = \begin{pmatrix} k & k & 2h \\ k & 1 & h+1 \\ 3h & h+1 & 2 \end{pmatrix}$$

dipendente dai parametri reali $h, k$.

(1) Stabilire per quali valori dei parametri $h$ e $k$ la matrice $M(h,k)$ è la matrice completa associata ad una conica, e verificare che esse formano un fascio $\mathcal{F}$.
(2) Classificare le coniche di $\mathcal{F}$ al variare dei parametri $h$ e $k$.
(3) Determinare i valori dei parametri per cui $P(1,1)$ appartiene alla conica.

*Svolgimento.* (1) La matrice completa associata ad una conica è simmetrica. La matrice $M(h,k)$ è simmetrica se, e solo se, $3h = 2h$ ossia $h = 0$. In conclusione,

$$M(0,k) = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice completa associata alla conica

$$\Gamma_k : kx^2 + 2kxy + y^2 + 2y + 2 = 0.$$

Le coniche $\Gamma_k$ formano un fascio $\mathcal{F}$ visto che l' equazione di $\Gamma_k$ dipende da un solo parametro in modo lineare.

(2) Classifichiamo ora le coniche $\Gamma_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Oltre alla matrice $M(0,k)$ consideriamo anche la matrice

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, si ha che $\det(M(0,k)) = k - 2k^2$, e $\det(A(k)) = k - k^2$. Inoltre, $\det(A(k)) > 0$ se $0 < k < 1$, mentre $\det(M(0,k)) \neq 0$ se $k \neq 0, \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi che

| | |
|---|---|
| se $k < 0$ | $\Gamma_k$ è un' iperbole |
| se $k = 0$ | $\Gamma_0$ è degenere di tipo parabolico |
| se $0 < k < 1, k \neq \frac{1}{2}$ | $\Gamma_k$ è un' ellisse |
| se $k = \frac{1}{2}$ | $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ è degenere di tipo ellittico |
| se $k = 1$ | $\Gamma_1$ è una parabola |
| se $k > 1$ | $\Gamma_k$ è un' iperbole. |

Inoltre, se $k = 0$ otteniamo che $\Gamma_0$ è unione delle due rette parallele complesse coniugate (prive di punti reali) di equazioni $y = -1 \pm i$; se $k = \frac{1}{2}$, $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ è unione delle due rette complesse coniugate di equazione $x = (-1 \pm i)y \pm 2i$ che si incontrano nell' unico punto reale $(2, -2)$. Infine, se $0 < k < \frac{1}{2}$, $\Gamma_k$ è un' ellisse priva di punti reali, visto che $\operatorname{tr}(A(k))\det(M(0,k)) > 0$, mentre se $\frac{1}{2} < k < 1$, allora $\Gamma_k$ è un' ellisse reale, essendo $\operatorname{tr}(A(k))\det(M(0,k)) < 0$.

(3) $P(1,1) \in \Gamma_k$ se, e solo se, $k + 2k + 5 = 0$ ossia $k = -\frac{5}{3}$.

## GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

### TEMA D' ESAME - 06/02/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 22.** $(4+2+4+1$ punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti:

(1) $(1,1,0)$ è autovettore per $f$ relativo all' autovalore $-1$;
(2) $(1,0,1)$ appartiene al nucleo di $f$;
(3) $f(0,1,1) = (2,1,1)$.

Scrivere la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base $B = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ di $\mathbb{R}^3$, trovare gli autovalori di $f$ ed una base per ogni suo autospazio. Stabilire quindi se $f$ è diagonalizzabile, motivando la risposta.

*Svolgimento.* Dalle condizioni assegnate, ricaviamo facilmente che

- $f(1,1,0) = -(1,1,0)$ e quindi $[f(1,1,0)]_B = {}^t(-1,0,0)$;
- $f(1,0,1) = (0,0,0)$ e quindi $[f(1,0,1)]_B = {}^t(0,0,0)$;
- $f(0,1,1) = (1,1,0) + (1,0,1)$ e quindi $[f(0,1,1)]_B = {}^t(1,1,0)$.

La matrice associata ad $f$ rispetto alla base $B$ è allora

$$A = M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $f$ è $p(t) = \det(A-tI) = -t^2(t+1)$ e quindi le sue radici sono $t_1 = 0$ di molteplicità $m(0) = 2$, e $t_2 = -1$ di molteplicità $m(-1) = 1$. Essendo entrambe reali, sono entrambi autovalori di $f$. Sapendo che $1 \leq \dim V(-1) \leq m(-1) = 1$, abbiamo che $\dim V(-1) = 1$ e quindi $V(-1)$ ha $((1,1,0))$ come base. Dalla teoria, sappiamo che $V(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid A[v]_B = 0\}$, e quindi $\dim V(0) = 3 - r(A)$. Essendo $A$ già ridotta per righe, è immediato dire che $r(A) = 2$. Di conseguenza, $\dim V(0) = 1$, e quindi $V(0)$ ha $((1,0,1))$ come base. Infine, essendo $\dim V(0) \neq m(0)$, abbiamo che $f$ non è diagonalizzabile.

**Esercizio 23.** $(2+5+4$ punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento euclideo $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. In tale riferimento, siano dati i piani $\alpha : x + y = 1$ e $\beta : x + 2y - 2z = 0$.

(1) Calcolare l' angolo $\theta$ tra $\alpha$ e $\beta$.
(2) Calcolare l' equazione del piano $\beta'$ simmetrico di $\beta$ rispetto ad $\alpha$.
(3) Determinare infine il luogo dei centri delle sfere $S$ che tagliano circonferenze con lo stesso raggio su tutti e tre i piani.

*Svolgimento.* Un vettore $\vec{u}$ ortogonale ad $\alpha$ è $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$, come risulta immediato dall' equazione di $\alpha$. Analogamente, un vettore ortogonale a $\beta$ è $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Ricordando che l' angolo tra i due piani è uguale a quello tra i due vettori se i due vettori formano un angolo acuto, ovvero è il supplementare dell' angolo tra i due vettori, se tale angolo è ottuso, abbiamo

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi $\theta = \frac{\pi}{4}$. Il piano $\beta'$ forma con $\alpha$ un angolo di $\pi/4$, e quindi l' angolo tra $\beta$ e $\beta'$ è $\pi/2$. In conclusione, $\beta'$ è il piano ortogonale a $\beta$ che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Il fascio di piani di asse $r$ ha equazione

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(x + 2y - 2z) = 0$$

ed un vettore ortogonale a tale piano è $\vec{w} = (\lambda + \mu)\,\vec{i} + (\lambda + 2\mu)\,\vec{j} - 2\mu\,\vec{k}$. Perché tale vettore risulti ortogonale a $\vec{v}$ è necessario e sufficiente che $\vec{w} \cdot \vec{v} = 3\lambda + 9\mu = 0$, ossia $\lambda = -3\mu$. Il piano cercato ha allora equazione $\beta' : 2x + y + 2z - 3 = 0$.

Sia $C$ il centro di una sfera di raggio $R$ che taglia i tre piani $\alpha, \beta$ e $\beta'$ lungo circonferenze aventi lo stesso raggio $r$. Sapendo che $R^2 = r^2 + d(C, \pi)^2$, essendo $\pi$ un qualunque piano che taglia la sfera precedente, allora $d(C, \alpha) = d(C, \beta) = d(C, \beta')$. Sapendo che i piani $\beta$ e $\beta'$ sono ortogonali, allora i punti che verificano $d(C, \beta) = d(C, \beta')$ sono o su $\alpha$, oppure hanno distanza da $\alpha$ uguale a $d(C, \beta)\sqrt{2}$. Quindi, perché le tre distanza siano tutte uguali tra loro, è necessario e sufficiente che esse siano tutte e tre nulle, ossia $C \in \alpha \cap \beta = r$.

**Esercizio 24.** $(8 + 3$ punti) Si consideri la conica $\Gamma$ di equazione

$$\Gamma : x^2 - xy + 2x - y = 0.$$

(1) Classificare $\Gamma$, trovarne una forma canonica, e l'equazione del relativo cambio di riferimento.
(2) Dopo aver verificato che tutte le rette parallele all' asse $x$ tagliano $\Gamma$ in punti reali, determinare la parallela che taglia su $\Gamma$ la corda di lunghezza minima.

*Svolgimento.* Le matrici associate a $\Gamma$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Con facili calcoli, si ha che $\det(B) = \frac{1}{4} \neq 0$ e $\det(A) = -\frac{1}{4} < 0$. Quindi, $\Gamma$ è un' iperbole non degenere. Detta $aX^2 + bY^2 + c = 0$ la sua equazione canonica, abbiamo $c = \det(B)/\det(A) = -1$. Inoltre, $a$ e $b$ sono gli autovalori di $A$. Il polinomio caratteristico di $A$ è uguale a $p_A(t) = t^2 - t - \frac{1}{4}$ e quindi abbiamo $a = (1 + \sqrt{2})/2, b = (1 - \sqrt{2})/2$.

L' autospazio di $A$ relativo all' autovalore $a$ è generato dal vettore $\vec{u} = \vec{i} + (1 - \sqrt{2})\,\vec{j}$, che ha modulo $d = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. La matrice ortogonale che diagonalizza $A$ è quindi uguale a

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & \frac{\sqrt{2}-1}{d} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Il centro $C$ dell' iperbole ha coordinate che risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui $C(-1,0)$. Il cambio di riferimento è descritto allora da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le rette parallele all' asse $x$ hanno equazione $y = c$. L' intersezione tra una di tali rette e $\Gamma$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = c \\ x^2 - xy + 2x - y = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo, otteniamo l' equazione di secondo grado in $x : x^2 + x(2-c) - c = 0$ il cui discriminante è $\Delta = (2-c)^2 + 4c = c^2 + 4$. È evidente che $\Delta > 0$ per ogni valore di $c$, e quindi le rette parallele all' asse $x$ tagliano $\Gamma$ sempre in due punti reali e distinti. Le coordinate di tali punti sono $\left(\frac{c-2+\sqrt{c^2+4}}{2}, c\right)$ e $\left(\frac{c-2-\sqrt{c^2+4}}{2}, c\right)$. La distanza tra i due punti è uguale a $f(c) = \sqrt{c^2+4}$ che ha un unico punto di minimo locale ed assoluto per $c = 0$. La minima lunghezza di una corda siffatta è allora uguale a $f(0) = 2$ e si ottiene tagliando $\Gamma$ con l' asse $x$.