

11.1 ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO

Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione:

$$E_c = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left[\sum m_i r_i^2 \right] = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Momento d'inertia.

Abbiamo così definito il momento d'inertia. Esso è uno scalare, dipende dall'asse e dalla distribuzione della massa. Si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

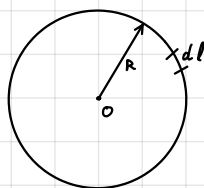
Se passiamo dal discreto al continuo, otteniamo da:

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \rho \int r^2 dV$$

omogeneo

ESERCIZIO

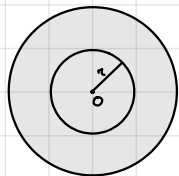
Calcoliamo il momento d'inertia di un anello solido omogeneo:



$$I_z = \int r^2 dm = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda dl = R^2 \lambda \int_0^{2\pi} dl = R^2 \lambda 2\pi R = MR^2$$

$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$

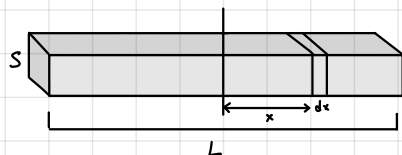
Calcoliamo I_z di un disco solido omogeneo



$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma 2\pi r dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \sigma 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \sigma \pi \frac{R^4}{2} = \frac{\sigma \pi}{2} R^4 = \frac{1}{2} (\sigma \pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

Calcola I_z di un'asta di lunghezza L e sezione S (omogenea)



$$I_z = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho S dx = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \rho S \left[\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right] = \rho S \frac{L^3}{12} = (\rho S L) \frac{L^2}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

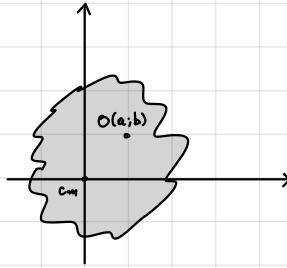
Il momento d'inertia è additivo, rendendo quindi possibile la suddivisione in più sottoparti.

11.1.1 TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il momento d'inertia I di un corpo che ruota intorno ad un asse O è dato dal momento d'inertia calcolato con asse passante nel centro di massa più un termine dipendente dal quadrato della distanza tra O e il centro di massa.

$$I_O = I_{cm} + Md^2$$

Dimostrazione



$$\begin{aligned}
 I_O &= \sum m_i r_{iO}^2 = \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = \sum m_i [x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2] = \\
 &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum m_i (a^2 + b^2) - \sum 2m_i a x_i - \sum 2m_i b y_i = \\
 &= I_{cm} + M d^2 - 2a \underbrace{\sum m_i x_i}_M - 2b \underbrace{\sum m_i y_i}_M = I_{cm} + M d^2
 \end{aligned}$$

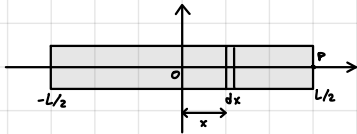
Usando il precedente teorema nel calcolo dell'energia cinetica abbiamo che:

$$E_c = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 d^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

↓
assomiglia molto al teorema di König

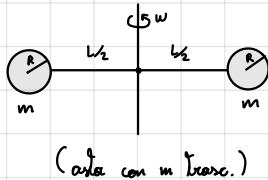
ESERCIZIO

Calcolare I_z di un'asta sottile omogenea (L, M)



$$I_{zO} = \int x^2 dm = \dots = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \dots = \frac{1}{12} ML^2$$

Calcola I_P : $I_P = I_{cm} + M d^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \dots = \frac{1}{3} ML^2$
 $O \equiv C_m$



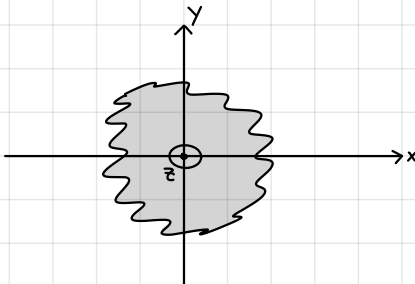
(asta con m trascur.)

$$\begin{aligned}
 I_{cm}^{SF} &= \frac{2}{5} m R^2 \\
 I_z^{SF} &= \frac{2}{5} m R^2 + m \left(\frac{L}{2} + R \right)^2 \\
 I_z &= 2 I_z^{SF}
 \end{aligned}$$

11. 1. 2 TEOREMA ASSE PERPENDICOLARE

Nel caso di corpi piani, la somma di due momenti d'inertzia rispetto a due assi del piano è uguale al momento d'inertzia calcolato rispetto all'asse perpendicolare passante per l'intersezione degli assi.

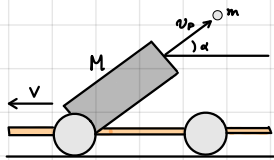
Dimostrazione:



$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum m_i y_i^2 \rightarrow I_x + I_y = \sum m_i y_i^2 + \sum m_i x_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i d_i^2 = I_z \\
 I_y &= \sum m_i x_i^2
 \end{aligned}$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 3 (12)



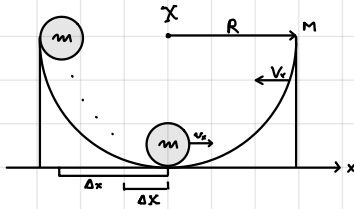
$$V = ? \quad \vec{I} = ?$$

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} = \begin{cases} \frac{dP_x}{dt} = 0 \\ \frac{dP_y}{dt} = N - (m+M)g \end{cases}$$

$$P_x \text{ const} \Rightarrow m v_p \cos \alpha - M V = 0 \rightarrow V = \frac{m v_p \cos \alpha}{M}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \vec{P}_f^M + \vec{P}_f^m = M \vec{V} + m \vec{v}_p = -M V \hat{u}_x + m v_p (\cos \alpha \hat{u}_x + \sin \alpha \hat{u}_y) = \dots = m v_p \sin \alpha \hat{u}_y$$

ESERCIZIO 2 (12)



$$\Delta X = ? \quad v_x = ? \quad V_x = ?$$

$$\vec{F}^e = \vec{N} + \vec{P} = (M+m) \vec{a}_{cm} = (M+m) \frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = \begin{cases} (M+m) \frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} = 0 \rightarrow v_{cm} \text{ const} \\ (M+m) \frac{d^2 y_{cm}}{dt^2} = N - (M+m)g \end{cases}$$

$$v_{cm x} = 0 \rightarrow x_{cm}(t) \text{ const} \rightarrow x_{cm} = \frac{m x + M X}{m+M} = \frac{-m R}{m+M}$$

$$\tau. \quad x(\tau) = X(\tau) \Rightarrow x_{cm}(\tau) = \frac{(m+M) X(\tau)}{m+M} = X(\tau) = \frac{-m R}{m+M} \Rightarrow \Delta X = -\frac{m R}{m+M}$$

$$v_{cm x}(\tau) = \frac{m v_x - M V_x}{m+M} = 0 \rightarrow m v_x = M V_x$$

$$E_0 = E_\tau \rightarrow m g R = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 \rightarrow m g R = \frac{1}{2} M v^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

$$\hookrightarrow V_x = m \sqrt{\frac{2 g R}{M(m+M)}}$$

$$v_x = \dots = \sqrt{\frac{2 g M R}{M+m}}$$