ESERCITAZIONE DI ALGEBRA DEL 23 OTTOBRE

Es 1 Stabilire per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $(D \equiv C)$ f è iniettivo, dove $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (x+Ky, (K-1)x+2y)$

Usiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$: $f(e_1) = (1, K-1)$; $f(e_2) = (K, 2) \Rightarrow A = [f(e_1)_{|B} | f(e_2)_{|B}] = \begin{bmatrix} 1 & K \\ K-1 & 2 \end{bmatrix}$.

Noi sappiamo che f è iniettiva se $Ker(f) = \{0\}$. Sappiamo che $dim(I(f)) = r(A) \Rightarrow dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^2) - dim(I(f)) = 2 - r(A)$ $\boxed{\begin{cases} 0 \Rightarrow \text{iniettiva} \\ 1 \Rightarrow \text{non iniettiva per } K = 2 \vee K = 0 \end{cases}}$

$\hookrightarrow |A| = 2 - K(K-1) = 2 - K^2 - K \Rightarrow$ per $K = 2 \vee K = 0$ $r(A) = 0$

Es 2 Sia l'endorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito come $f(e_1) = te_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + te_2 + 2e_3$, $f(e_3) = (t+1)e_1 + (t+3)e_2 + 4e_3$

1) Determinare $t \in \mathbb{R}$ per cui f è un automorfismo (endomorfismo biunivoco)

2) Posto $t = -2$, determina basi e dimensioni di $I(f)$

3) Posto $t = 3$, ″ ″ ″ ″ ″ $Ker(f)$

Scriviamo la matrice rappresentativa: $A = \begin{bmatrix} t & 2 & t+1 \\ 2 & t & t+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Affinché f sia biunivoca, A deve essere invertibile, quindi $|A| \neq 0$:

$|A| = t(4t - 2t - 6) - 2(8 - t - 3) + (t+1)(4-t) =$

$= t^2 - t - 6 \Rightarrow |A| = 0$ per $t = 3 \vee t = -2$

Quindi t è un automorfismo per $t \neq 3 \wedge t = -2$.

Per $t = -2$, il rango di A è 2, quindi $dim(I(f)) = 2$. Per trovare le basi di $I(f)$ riduciamo a scala A e scegliamo le colonne con pivot non nullo.

La base di $I(f)$ sarà $B_I = \{(-2, 2, 1), (2, -2, 2)\}$

Per $t = 3$, il rango di A è 2. La $dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(I(f)) = 1$. Troviamo la base risolvendo $A\underline{x} = \underline{0}$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] = \dots = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x} \begin{bmatrix} 0 \\ -2K \\ K \end{bmatrix} \Rightarrow B_{Ker} = \{(0, -2, 1)\}$$

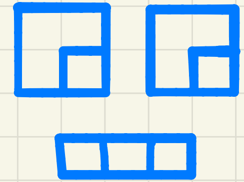
Es 3 Sia $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita come $f(P(x)) = P''(x) + KP'(x)$ con $K \in \mathbb{R}$.

1) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica

2) Calcolare basi e dimensioni di $I(f)$ al variare di K.

3) Per quali K $R(x) = 5x + 1$ appartiene a $I(f)$.

$E=\{1,x,x^2\}$. $P(x)=a+bx+cx^2$, $P'(x)=b+2cx$, $P''(x)=2c$. La matrice rappresentativa sarà:



$$A=\left[f(1)_{|E} \mid f(x)_{|E} \mid f(x^2)_{|E}\right]=\boxed{\begin{bmatrix}0 & K & 2\\ 0 & 0 & 2K\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

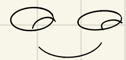
La dimensione di $I(f)$ sarà 2 per $K\neq 0$ e 1 per $K=0$. La base sarà $B_I=\begin{cases}\{(K,0,0),(2,2K,0)\} & \text{per } K\neq 0\\ \{(2,0,0)\} & \text{per } K=0\end{cases}$

$R(x)$ avrà componenti $[1,5,0]^T$. R è immagine se $A\underline{x}=R_{|E}$ è risolvibile.

$$[A\mid R_{|E}]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & K & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2K & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow \exists\, \infty^1 \text{ soluzioni} \Rightarrow R(x)\in I(f) \text{ per } K\neq 0$$

$$[A\mid R_{|E}]_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \nexists \text{ soluzione} \Rightarrow R(x)\notin I(f) \text{ per } K=0$$

Es 4 Sia $f_K:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito come $f_K(x)=A_K x$ con $K\in\mathbb{R}$ e $A_K=\begin{bmatrix}1 & -K & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2K & -1\end{bmatrix}$.



1) Determinare base e dimensione di $Ker(f_K)$
2) Verificare che per $K=1$ $(0,1,0)\in I(f_K)$
3) Verificare se per $K=0$ f_K è un automorfismo e ricavare l'applicazione inversa.

$dim(Ker(f_K))=dim(\mathbb{R}^3)-dim(I(f_K))=3-r(A_K)=\begin{cases}3-2=1 & \text{per } K=1\\ 3-3=0 & \text{per } K\neq 1\end{cases}$. Per $K\neq 1$, la base di $Ker(f)$ sarà $\{\underline{0}\}$. Per $K=1$, invece, risolviamo $A_1\underline{x}=\underline{0}$

$$[A_1\mid\underline{0}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2K & -1 & 0\end{bmatrix}=\dots=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \underline{X}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}t\\ +\frac{1}{2}t\\ t\end{bmatrix}\Rightarrow B_{K_1}=\left\{\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1\right)\right\}$$

Per $K=1$, $A_1\cdot\underline{x}=[0,1,0]^T$ deve avere soluzioni $\Rightarrow\dots\Rightarrow r(A)\neq r(A|B)\Rightarrow\nexists$ soluzioni $\Rightarrow (0,1,0)\notin I(f)$

Per $K=0$, $|A_0|\neq 0\Rightarrow A_0$ è invertibile $\Rightarrow f_1$ è un un automorfismo. Home work: Calcola l'inversa di f_1.

Es 5 Definiamo una PROIEZIONE: Sia V uno s.v. e U, W due s.s.v tali che $V = U \oplus W$. Si dice proiezione di $\underline{v} \in V$ su U parallela a W il vettore $\underline{u}$ tale che $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$. $P_{U,W} : \begin{matrix} V \to U \\ \underline{v} \mapsto \underline{u} \end{matrix}$

L'applicazione $P_{U,W}$ è lineare?

Dati $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ e $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$, affinché $P_{U,W}$ sia lineare, $P_{U,W}(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) = t_1 P_{U,W}(\underline{v}_1) + t_2 P_{U,W}(\underline{v}_2) \Rightarrow$

$P_{U,W}(t_1 \underline{u}_1 + t_1 \underline{w}_1 + t_2 \underline{u}_2 + t_2 \underline{w}_2) = P_{U,W}(t_1 \underline{u}_1 + t_2 \underline{u}_2 + t_1 \underline{w}_1 + t_2 \underline{w}_2) = t_1 \underline{u}_1 + t_2 \underline{u}_2 = t_1 P_{U,W}(\underline{v}_1) + t_2 P_{U,W}(\underline{v}_2) \Rightarrow P_{U,W}$ è lineare.

Es 6 In $\mathbb{R}^3$ si consideri la proiezione $P_{U,W}$ rappresentata da $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) Trova base e dimensione di U

2) Dati $\underline{v}_1 = (1,2,3)$ e $\underline{v}_2 = (K, K+1, 3K)$, calcolane le proiezioni e trova K per cui esse sono basi di U

3) Trova base e dimensione di W

4) Verifica che $U+W$ è somma diretta

Il rango di A è 2, quindi la dimensione di U è 2. Una base di U è: $B_U = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

I vettori $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ saranno: $\underline{u}_1 = P_{U,W}(\underline{v}_1) = A\underline{v}_1^T = (-2,-2,0)$; $\underline{u}_2 = P_{U,W}(\underline{v}_2) = A\underline{v}_2^T = (-2K, K+1, 0)$. Affinché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ siano basi, $[\underline{u}_1^T | \underline{u}_2^T]$ deve avere rango massimo, e lo ha per $K \neq 1 \Rightarrow \underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono basi di U per $K \neq 1$

Ricaviamoci W: $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} = \underline{v} - A\underline{v} = \underline{v}(I-A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$. Quindi il generico $\underline{w}$ sarà $\begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e quindi $\dim(W) = 1$, $B_W = \{(1,0,1)\}$

Affinché $U+W$ sia somma diretta, $\dim(U \cap W) = 0$. Lo spazio $U+W = \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,0), (1,0,1))$. I tre vettori sono indipendenti e quindi $\dim(U+W) = 3$.

Usando Grassman, avremo che: $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2+1-3 = 0 \Rightarrow U+W$ è somma diretta.

Es 7 Sia $A \in Mat_{\mathbb{K}}(n;n)$ tale che $A^2 = O_n$ e sia $f_A \in End(Mat_{\mathbb{K}}(n;n))$ associata ad A

1) Dimostra che $I(f_A) \subseteq Ker(f_A)$

2) Calcolare il massimo rango possibile di A.

Sia $X \in Mat(n;1)$ e $Y = AX \iff Y \in I(f_A) \Rightarrow f_A(Y) = f_A(f_A(x)) = A^2 x = O_n x = O_{n1} \Rightarrow Y \in Ker(f_A)$. Siccome Y è l'insieme delle immagini di f_A, $I(f_A) \subseteq Ker(f_A)$.

$r(A) = dim(I(f_A)) =$

Es 8 Dato $h \in \mathbb{R}$ consideriamo $v_h' = (h+1)e_1 + he_3$; $v_h'' = -e_1 + 2he_2 + (h+1)e_3$; $v_h''' = he_2 + (h+1)e_3$; $w_h' = e_1 + he_2$; $w_h'' = e_1 + e_2 + he_3$; $w_h''' = (h-1)e_1 + he_3$

1) Determinare i valori di h per quali è univocamente determinato un'applicazione h_h tale che $h_h(v_h') = w_h'$; $h_h(v'') = w_h''$; $h_h(v_h''')) = w_h'''$

Per interpolazione, se $B_{v_h} = \{v_h', v_h'', v_h'''\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, allora è garantita l'esistenza e l'unicità di h_h. Studiamo le tre v: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h+1 & 2h & h \\ h & h+1 & h+1 \end{bmatrix} = [v_{h|s}' \mid v_{h|s}'' \mid v_{h|s}''']$.

Se il determinante della matrice è diverso da 0, allora i 3 vettori sono basi poiché il rango è massimo: $|M| = 2h+1 \Rightarrow$ per $h \neq \frac{1}{2}$ l'applicazione h_h esiste ed è unica.

QUITTATO...