

ESERCITAZIONE DI ALGEBRA DEL 10 OTTOBRE



① $S = \{ A \in \text{Mat}(2,2; \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(A) = 0 \}$. Verifica che S è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}(2,2; \mathbb{R})$. Determinare una base e una sua dimensione.

S è sottospazio se è chiuso rispetto a somma/prodotto e deve contenere 0 :

- 1) $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) = 0 \quad (A, B \in S)$.
- 2) $\text{Tr}(\lambda B) = \lambda \cdot \text{Tr}(B) = 0 \quad (A \in S)$

Scriviamo il generico $A \in S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Possiamo esprimere come combinazione lineare di $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ottieniamo i vettori generatori sono una base, essi devono essere linearmente indipendenti $\Rightarrow a=b=c=0$. La condizione, in questo caso è verificabile anche senza calcoli. Quindi la base di S sarà: $B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. La dimensione di S è $\# B_S = 3$.

② Dato il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 $W = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$. È un sottospazio vettoriale?

Presto $w = (x, y, z)$, abbiamo che $\lambda w = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. λw non è sempre contenuto in W ($\lambda < 0$). W , quindi, non è un sottospazio vettoriale

③ Stabiliamo se $S = \{(x, y, z, i) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + i^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale?

Presto $s \in S$, se prendiamo $\lambda = 0$ allora $\lambda s \notin S$, quindi non è un sottospazio vettoriale.

④ Considera $\mathbb{R}_2[x]$. Dimostra che:

1) l'insieme di polinomi che interpolano il punto $(1, 2)$ non è un sottospazio vettoriale.

2) l'insieme di polinomi con radice in $x=1$ è un sottospazio vettoriale. Troviamo una base

Chiamiamo $S = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] : P(1)=2\}$. Il generico polinomo sarà $P(x) = ax^2 + bx + c$. Abbiamo che: $P(1)=2 \Rightarrow a+b+c=2$. Scriviamo nel generico $P(x)$ e ottieniamo il generico elemento di S : $P(x) = ax^2 + bx + 2 - a - b$.

Per dimostrare che S non è sottospazio dimostriamo che $Q \in S$: $\{a=0, b=0, 2-a-b=0\} \text{ M.P.} \Rightarrow S$ non è sottospazio.

Chiamiamo $T = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] : P(1)=0\}$. Ripetendo lo stesso procedimento di sopra troviamo che il generico elemento di T sarà: $ax^2 + bx - a - b$.

Controlliamo che: $P_1 + P_2 \in T \Rightarrow a_1x^2 + b_1x - a_2 - b_2 + a_3x^2 + b_3 - a_4 - b_4 = (a_1 + a_3)x^2 + (b_1 + b_3)x - (a_2 + a_4) - (b_2 + b_4) \Rightarrow$ ha la stessa forma del generico elemento.
 $\lambda P_1 \in T \Rightarrow \lambda a_1x^2 + \lambda b_1 - \lambda a_2 - \lambda b_2 \Rightarrow$ ha la stessa forma del generico elemento.

Perché $\Omega \in T$, T è un soluzionario vettoriale.

Una base di \mathbb{F} potrebbe essere: $a(x^2-1) + b(x-1)$. I due vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow B = \{(x^2-1), (x-1)\}$

⑤ In \mathbb{R}^q si consideri l'insieme V definito come $V = \{(a, b, a+b, a-b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Verifica che V è un sollevarsi rettangolare.

2) Determina una base

31 Procedendo dalla base di ②, costruire una base di \mathbb{R}^4 .

4) Trovare $w \in \mathbb{R}^4$ tale che le sue componenti rispetto alla base binaria siano $(10, 2, 1)$

Verifichiamo che: $v_1, v_2 \in V \Rightarrow (v_1 + v_2, b_1, b_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1 + a_2, -b_1 + b_2)) \in V \Rightarrow$ è chiuso
 $\lambda v \in V \Rightarrow (\lambda a, \lambda b, \lambda(a+b), \lambda(a-b)) \in V \Rightarrow$ è chiuso $\Rightarrow V$ è un sottospazio vettoriale.

Una base di V potrebbe essere $B = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)\}$. I due vettori sono sicuramente generatori e sono anche linearmente indipendenti $\Rightarrow B$ è base.

Usciamo l'algoritmo di completamento per completezza B. Usciamo le basi canoniche di \mathbb{R}^n

$$1) \quad a(1,0,1,1) + b(0,1,1,-1) + c(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

, e sono linearmente indipendenti

$$2) \quad a(1,0,1,1) + b(0,1,1,-1) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) = 0 \quad \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a+c &= 0 \\ b+d &= 0 \\ a+b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{aligned} \Rightarrow a-b-c-d=0 \Rightarrow v_1, v_2, e_1, e_2 \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Io, così, completo B_1 e l'ho resa base di \mathbb{R}^4 .

$$\text{Teraviansi } w \text{ con componenti } 1, 0, 2, 1: (1, 0, 1, 1) + (2, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) = (3, 1, 1, 1)$$

⑥ Si considerino i seguenti polinomi di 2° grado con coefficienti reali: $P_1(x) = 2x^2 + 2$, $P_2(x) = 2x + 2$, $P_3(x) = x^2$, $P_4(x) = x^2 + 1$, $P_5(x) = 5x^2 + 2x + 2$

1) Trovare una base di $\mathbb{R}_2[x]$ prendendo dei polinomi spesi.

2) Esprimere $P_6(x) = x^2 + 6x$ secondo la base canonica e la base trovata in 1)

La dimensione di $\mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow \#B = 3$. Possiamo già escludere P_5 in quanto $P_5 = 2P_4 + 2P_1 + P_3$. Vediamo se P_2 è componibile lineare:

$$\alpha P_1 + bP_3 + cP_4 = P_2 \Rightarrow \alpha(2x^2 + 2) + b(x^2) + c(x^2 + 1) = 2x + 2$$

$$\begin{cases} 2\alpha + b + c = 0 \\ \alpha = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ b = -8 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{possiamo rimuovere } P_2$$

Verifichiamo allora che P_1, P_3, P_4 sono linearmente indipendenti (HOMEWORK). La base sarà allora $B = \{P_1, P_3, P_4\}$

Troviamo P_6 in base canonica e in base B : can. $\Rightarrow (0, 4, 1)$

$$B \Rightarrow \alpha P_1 + bP_3 + cP_4 = P_6 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + b + c = 1 \\ \alpha = 4 \\ b = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 5 \\ b = 0 \\ c = -8 \end{cases}$$

⑥ In \mathbb{R}^4 consideriamo i vettori $u = (1, 2, 0, 0)$, $v = (0, -1, -1, 0)$, $w = (0, 0, 1, 1)$. Sia $U = \text{Span}(v)$ e $V = \text{Span}(u, w)$. Trova le dimensioni di $U \cap V$ e stabilire se $U + V$ è somma diretta.

$$\dim(U \cap V) = \underbrace{\dim(u)}_1 \cdot \underbrace{\dim(v)}_2 - \underbrace{\dim(u+v)}_{U+V=\text{Span}(u,v,w)\Rightarrow 3} = 0 \Rightarrow U \cap V \text{ è somma diretta}$$