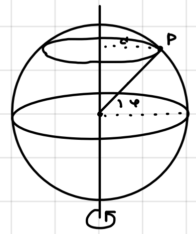
• • •

ESERCIZIO



$F_g = -\gamma \frac{M_T m}{R_T^2}\hat{r}$

$F_{APP} = -m\left[\cancel{\vec{a}_{O'}} + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') + \cancel{2\vec\omega\times\vec v'}\right] = -m\,\vec\omega\times\underbrace{(\vec\omega\times\vec r')}_{\hat u_r}$

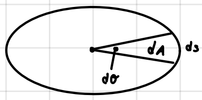
$|F_{APP}| = m\omega^2 d = m\omega^2 R_T\cos\varphi$

$\frac{F_{APP}}{F_g} = \dots \cong 10^{-3} \to$ forze apparenti contribuiscono poco

7. GRAVITAZIONE

7.1 LEGGI DI KEPLERO

1) Le orbite dei pianeti sono ellittiche e il sole occupa uno dei due fuochi.
2) Il raggio vettore che congiunge il sole e la terra spazza aree uguali in tempi uguali (velocità areolare costante).



$dA = \frac12 r\,ds = \frac12 r^2 d\theta \to \frac{dA}{dt} = \frac12 r^2 \frac{d\theta}{dt}$

$\downarrow$

$ds = r\,d\theta$

Se la traiettoria è circolare, il moto è circolare uniforme.

3) Il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore è una costante che dipende dal corpo nel fuoco (sole)

$\frac{T^2}{a^3} = K$ Se circolare: $\frac{T^2}{r^3} = K$

7.2 LEGGE DI GRAVITAZIONE

$\vec F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\hat r$

7.2.1 "DIMOSTRAZIONE"

Approssimando a un moto circolare, sappiamo che la forza è centripeta poiché, se fosse tangente, il moto non sarebbe uniforme. Calcoliamo il modulo:

$|\vec F_{ST}| = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m r\frac{4\pi^2}{T^2} = m\frac{4\pi^2}{K_S r^{\cancel{3}}}\cancel{r} = \left(\frac{4\pi^2}{K_S}\right)\frac{m}{r^2} = \left(\frac{4\pi^2}{K_S m_S}\right)\frac{m\, m_D}{r^2}$

$T^2 = K_S r^3$

$|\vec F_{TS}| = \frac{4\pi^2}{K_T m_T}\frac{m_D m}{r^2}$

per 3° p. dinamica, $|F_{ST}| = |F_{TS}|$

$\downarrow$

$K_T = K_D$

esprimiamo, quindi, la forza gravitazionale come: $\vec F_g = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat u_r$

Per provare che la gravitazione è la causa della forza peso, si usa l'orbita lunare per eliminare γ e m_t (non noti ai tempi di Newton) approssimando l'orbita lunare ad un moto circolare uniforme.

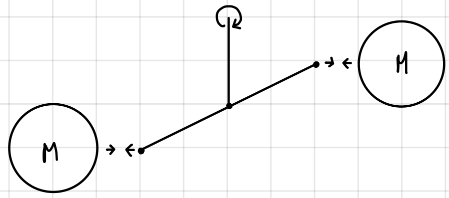
$F'_G = \frac{\gamma m_T \cancel{m_L}}{r_{TL}^2} = \cancel{m_L}\,\omega_L^2 r_{TL} \to \gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3 \Rightarrow F_g = \frac{\gamma m_T}{r_T^2} m = \frac{\omega^2 r_{TL}^3}{r_T^2}\cancel{m} \cong g\cancel{m} \Rightarrow g \cong \frac{\omega^2 r_{TL}^3}{r_T^2}$

Riprendendo $\gamma m_T = \omega_L^2 R_{LT}$ otteniamo

$\gamma m_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{LT} \to \frac{T^2}{R_{LT}^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_T} = K_T$ (per orbita circolare)

Abbiamo così dimostrato la 3° legge di Keplero (per orbite circolari).

Per verificare sperimentalmente la forza di gravitazione serve un esperimento eseguibile sulla Terra. Questo è l'esperimento di Cavendish:



Il problema dell'esperimento è che l'ordine di grandezza della forza gravitazionale è molto piccolo, quindi i corpi non si muoveranno perché l'attrito e altre forze la coprono.