IPERQUADRICHE

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

IPERQUADRICHE :

- Ipersfere
- Iperquadriche

SEZIONE 11.1

- Cambio di coordinate
- Invarianti metrici
- Riduzione in forma canonica

SEZIONE 11.2

IPER SFERA (DEFINIZIONE 11.1)

In $\mathbb{E}^n$, l'ipersfera di centro C e raggio R è il luogo di punti P tali che $d(P,C)=R$. Se B_0 è sistema di riferimento cartesiano con $C=(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n)$

$$\Rightarrow \quad (x_1-\bar{x}_1)^2+ .. +(x_n-\bar{x}_n)^2 = R^2 \, .$$

ESERCIZIO: scrivere l'equazione della sfera contenente i punti

$A=(1,1,0)$, $B=(1,0,1)$, $C=(0,1,1)$, $D=(0,0,0)$.

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2+2a+2b+d=0 \\ 2+2a+2c+d=0 \\ 2+2b+2c+d=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$d=0,\ c=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ a=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2-x-y-z=0 \Rightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Rightarrow C=(1/2, 1/2, 1/2),\ R=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

OSS: In $\mathbb{E}^2$ consideriamo il segmento $((x_0, y_0), (x_1, y_1))$. La circonferenza di centro il primo estremo e contenente il secondo è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 .$$

Poichè l'insieme delle soluzioni non è mai vuoto, questo significa che vale il iii postulato di Euclide.

Abbiamo quindi completato la costruzione di un modello per la geometria euclidea (piana) $\Rightarrow$ tutti i teoremi classici contenuti negli elementi di Euclide (la cui dimostrazione sia effettivamente valida) sono automaticamente veri in uno spazio euclideo bidimensionale!

Andiamo ora a studiare nel nostro modello le curve coniche e le loro generalizzazioni in dimensione maggiore.

IPERQUADRICA (DEFINIZIONE 11.2)

B_0 o.n.c. p.o. di $\mathbb{E}$. Una ipersuperficie quadrica Ω è il luogo di punti le cui coordinate cartesiane soddisfano

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \quad a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}.$$

- $\dim(\mathbb{E}) = 2$: Ω è una curva conica di equazione

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$$

Esempio: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ circonferenza unitaria

- $\dim(\mathbb{E}) = 3$: Ω è una superficie quadrica di equazione

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz +$$
$$2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0$$

Esempio: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ sfera unitaria

DEFINIZIONE 11.3, PROPOSIZIONE 11.4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & c \end{array}\right], \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad Y = \left[\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right].$$

$$\mathcal{Q} : \; X^T A X + 2B^T X + c = 0, \qquad Y^T C Y = 0.$$

• $\dim(\mathbb{E}) = 2$: $\quad C = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right]$

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problemi: i) Se cambiamo sistema di riferimento?

ii) Esiste un sistema di riferimento più semplice?

Cambio di coordinate (Esempio 7.38)

$\mathcal{B}_O = \{O, v_1, \dots, v_n\}$, $\tilde{\mathcal{B}}_O = \{\tilde{O}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ s.r.c. p.o. $\Rightarrow$

$$\underbrace{P_{|\mathcal{B}_O}}_{X} = \overrightarrow{OP}_{|\mathcal{B}} = M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \overrightarrow{OP}_{|\tilde{\mathcal{B}}} = M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} \left(\overrightarrow{O\tilde{O}}_{|\tilde{\mathcal{B}}} + \overrightarrow{\tilde{O}P}_{|\tilde{\mathcal{B}}} \right) =$$

$$= \overrightarrow{O\tilde{O}}_{|\mathcal{B}} + M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} P_{|\tilde{\mathcal{B}}_O} = \underbrace{\tilde{O}_{|\mathcal{B}_O}}_{T} + \underbrace{M_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}}_{Q} \underbrace{P_{|\tilde{\mathcal{B}}_O}}_{\tilde{X}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{X = Q\tilde{X} + T}$ $\qquad Q \in SO(n;\mathbb{R})$

Proposizione 11.6

$\mathcal{Q}_{|\tilde{\mathcal{B}}_O}$: $\tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} + 2\tilde{B}^T \tilde{X} + \tilde{c} = 0$, $\tilde{Y}^T \tilde{C} \tilde{Y} = 0$ con

$\tilde{A} = Q^T A Q$, $\tilde{B} = Q^T(AT + B)$, $\tilde{c} = T^T A T + 2B^T T + c$ e

$\tilde{C} = F^T C F$ con $F = \left[\begin{array}{c|c} Q & T \\ \hline 0_{1n} & 1 \end{array}\right]$.

OSS: cambiando coordinate $\mathcal{Q}$ rimane descritta da un'equazione di secondo grado.

DIM: $0 = X^T A X + 2B^T X + c =$

$$= (Q\tilde{X} + T)^T A (Q\tilde{X} + T) + 2B^T (Q\tilde{X} + T) + c =$$

$$= \tilde{X}^T \underbrace{Q^T A Q}_{\tilde{A}} \tilde{X} + T^T A Q \tilde{X} + \tilde{X}^T Q^T A T + 2B^T Q \tilde{X} + \underbrace{T^T A T + 2B^T T + c}_{\tilde{c}}$$

$$\tilde{X}^T Q^T A T = (\tilde{X}^T Q^T A T)^T = T^T A Q \tilde{X} \Rightarrow$$

$$2\tilde{B}^T \tilde{X} = 2(T^T A + B^T) Q \tilde{X} \Rightarrow \tilde{B} = Q^T (AT + B)$$

Esercizio: verificare che

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} Q^T & 0_{m1} \\ \hline T^T & 1 \end{array}\right]}_{F^T} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & c \end{array}\right]}_{C} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} Q & T \\ \hline 0_{1m} & 1 \end{array}\right]}_{F} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{B}^T & \tilde{c} \end{array}\right]}_{\tilde{C}}$$

$\boxed{/}$

COROLLARIO 11.7

i) $r(\tilde{A}) = r(A)$, $r(\tilde{C}) = r(C)$;

ii) $p_{\tilde{A}}(\lambda) = p_A(\lambda)$; iii) $|\tilde{C}| = |C|$.

DIM: $|F| = 1 \cdot |Q| = 1 \neq 0 \Rightarrow |\tilde{C}| = |F|^2 |C| = |C|$ e $r(\tilde{C}) = r(C)$. $\boxed{/}$

TEOREMA 11.10 (riduzione in forma canonica)

Siano $r(A)=r$, $r(C)=q$ e $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ autovalori non nulli di A.

Allora esiste $\tilde{B}_0$ s.r.c.p.o. tale che $Q|\tilde{B}_0$ è:

i) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 = 0$ se $q=r$;

ii) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 + \tilde{c} = 0$ se $q=r+1$;

iii) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 + 2P\tilde{x}_{r+1} = 0$ se $q=r+2$.

DIM: REMIND: $X = Q\tilde{X} + T$ con $Q \in SO(n;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\tilde{A} = Q^T A Q$, $\tilde{B} = Q^T(AT+B)$, $\tilde{c} = T^T A T + 2B^T T + c$

- $A \in S(n;\mathbb{R}) \Rightarrow$ esiste $Q \in SO(n;\mathbb{R})$ t.c.

$$\tilde{A} = Q^T A Q = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & O_{r,n-r} \\ & & \lambda_r & \\ \hline & O_{n-r,r} & & O_{r,r} \end{array}\right] \Rightarrow \tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2$$

dove $r = r(\tilde{A}) = r(A)$.

- $r = r(A) = r([A|B])$: esiste T tale che $AT = -B \Rightarrow$
$AT + B = O_{n1} \Rightarrow \tilde{B} = O_{n1} \Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}_1 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r + \tilde{c} = 0$
$\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{c} \end{array}\right]$ e quindi $q = r(\tilde{C}) = \begin{cases} r & \text{se } \tilde{c} = 0 \\ r+1 & \text{se } \tilde{c} \neq 0 \end{cases}$.
- $r = r(A) < r([A|B])$: bisogna eseguire 4 cambiamenti di coordinate in successione.

i) $X = Q_1 X_1$ t.c. $A_1 = Q_1^T A Q_1 \in \Delta(n;\mathbb{R})$, $B_1 = Q_1^T B$, $c_1 = c$;

ii) $X_1 = X_2 + T_2$ dove $(T_2)_{i1} = \begin{cases} -\dfrac{(B_1)_{i1}}{\lambda_i} & 1 \leq i \leq r, \\ 0 & r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$

$\Rightarrow A_2 = A_1$, $B_2 = A_1 T_2 + B_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline * \end{array}\right] \}r \neq O_{n1}$, $c_2 = -\sum_{i=1}^{r} \dfrac{(B_1)_{i1}^2}{\lambda_i} + c_1$.

iii) $B_2 \in U = \{ M \in Mat(n,1;\mathbb{R}) \mid (M)_{i1} = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq r \}$.
$\dim(U) = n - r \Rightarrow$ possiamo costruire una base o.n.p.o. di U
$\left\{ \dfrac{B_2}{\|B_2\|_F}, M_1, \dots, M_{n-r-1} \right\}$ e definire la matrice

$Q_3 = \left[I_{mr} \;\middle|\; \frac{B_2}{\|B_2\|_F} \;\; M_1 \;\ldots\; M_{m-r-1} \right] \in SO(m;\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad X_2 = Q_3 X$:

$$A_3 = Q_3^T A_2 Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,m-r} \\ \hline O_{m-r,r} & *^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix} & O_{r,m-r} \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r,m-r} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,m-r} \\ \hline O_{m-r,r} & * \end{array}\right] = A_2$$

$B_3 = Q_3^T B_2 = \left[\begin{array}{c} O_{r1} \\ \hline p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]$ dove $p = \|B_2\|_F > 0$, $\quad c_3 = c_2$.

iv) $X_3 = X_4 + T_4$ dove $(T_4)_{i1} = \begin{cases} -c_3/2p & i = r+1, \\ 0 & i \neq r+1. \end{cases}$

$\Rightarrow A_4 = A_3 = \tilde{A}$, $\qquad B_4 = \cancel{A_3 T_4} + B_3 = B_3 = \tilde{B}$,

$c_4 = T_4^T \cancel{A_3 T_4} + 2 B_3^T T_4 + c_3 = -c_3 + c_3 = 0 = \tilde{c}$.

$\Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \lambda_r \tilde{x}_r + 2p\, \tilde{x}_{r+1} = 0$.

Quindi: · $X = Q_1 X_1 = Q_1(X_2 + T_2) = Q_1(Q_3 X_3 + T_2) = Q_1(Q_3(\tilde{X} + T_4) + T_2)$

$\Rightarrow X = \tilde{Q} X + T$ dove $Q = Q_1 Q_3 \in SO(m;\mathbb{R})$, $T = Q_1(Q_3 T_4 + T_2)$

· $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q = r(C) = r(\tilde{C}) = r + 2$. $\blacksquare$

ESEMPI

- $x^2+y^2+2x+1=0$ in $\mathbb{E}^2$ $\Rightarrow \begin{cases} A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad c=1 \\ C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \quad r(C)=2=r(A)\end{cases}$

$Q=I_2 \qquad r([A|B])=r(A)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&0\end{array}\right] \Rightarrow T=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\tilde{x}-1 \\ y=\tilde{y}\end{cases} \Rightarrow (\tilde{x}-1)^2+\tilde{y}^2+2\tilde{x}-2+1=\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=0$

Ω è costituito dal solo punto $\tilde{x}=0,\ \tilde{y}=0$ ed è un esempio di conica degenere.

Se prendessimo la stessa equazione in $\mathbb{E}^3$?

Avremmo una quadrica degenere "corrispondente" alla retta $x=1,\ y=0$.

- $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2y+2z+1=0$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=1 \qquad r(C)=3$

- Autovalori di A: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=0$

Autovettori di A: $\mathcal{B}=\left\{ \underline{v}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}, \underline{v}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \underline{v}_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow Q_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\in SO(3;\mathbb{R}) \qquad X_1=Q_1X$$

$$A_1=Q_1^TAQ=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad B_1=Q_1^TB=\begin{bmatrix}2/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix},\qquad c_1=c=1.$$

- $T_2 = \begin{bmatrix} -2/3\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad X_2 = X_1 + T_2$

$A_2 = A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = A_1 T_2 + B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad c_2 = -\frac{(B_1)_{11}^2}{\lambda_1} + c_1 = \frac{5}{9}.$

- $Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \in SO(3;\mathbb{R})$ $\qquad X_3 = Q_3 X_4$

$A_3 = Q_3^T A_2 Q_3 = A_2, \quad B_3 = Q_3^T B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{2/\sqrt{6}} \\ 0 \end{bmatrix} \to P, \quad c_3 = c_2 = \frac{5}{9}.$

- $T_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_3/2P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5/6\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad X_3 = X_4 + T_4$

$\tilde{A} = A_3 = A_2, \quad \tilde{B} = A_3 T_4 + B_3 = B_3, \quad \tilde{c} = 0 \implies \tilde{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$$Q = Q_1 Q_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad T = Q_1 (Q_3 T_4 + T_2) = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 2 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{3}\,\tilde{x} - 2/\sqrt{6}\,\tilde{y} + 1/18 \\ y = 1/\sqrt{3}\,\tilde{x} + 1/\sqrt{6}\,\tilde{y} - 1/\sqrt{2}\,\tilde{z} - 13/36 \\ z = 1/\sqrt{3}\,\tilde{x} + 1/\sqrt{6}\,\tilde{y} + 1/\sqrt{2}\,\tilde{z} - 13/36 \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}|_{\tilde{B}_0} : \quad 3\tilde{x}^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\tilde{y} = 0$$