CRITERI DI DIAGONALIZZAZIONE

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

DIAGONALIZZABILITÀ:

- Ripasso polinomi — SEZIONE 2.3
- Condizione sufficiente — SEZIONE 6.4
- II° criterio diagonalizzabilità

POLINOMI (2.3)

$P(x) \in \mathbb{K}[x]$ polinomio di grado n

i) Se $P(x) = (x-r)^m \cdot Q(x)$ con $m>0$ massimo $\Rightarrow$

- r = radice di $P(x)$, che soddisfa $P(r)=0$;
- m = molteplicità algebrica di r;
- $m=1 \Rightarrow r$ radice semplice.

$1-x^2 = -(x-1)(x+1) \Rightarrow r_1 = 1 \ m_1 = 1, \ r_2 = -1 \ m_2 = 1$

ii)
- $m_1 + \dots + m_k \leq n$;
- se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, $m_1 + \dots + m_k = n$;
- $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, è la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ e contiene la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$.

$1+x^2 = (x-i)(x+i) \quad r_1 = i \quad r_2 = i \in \mathbb{C} \quad 1+x^2 \in \mathbb{Q}[x]$

CRITERI DI DIAGONALIZZABILITÀ

MOLTEPLICITÀ DEGLI AUTOVALORI (DEFINIZIONE 6.20)

i) Molteplicità algebrica $ma(\lambda) =$ molteplicità di λ come radice di $P_f(\lambda)$;

ii) Molteplicità geometrica $mg(\lambda) =$ dimensione di V_λ.

DEFINIZIONE 6.21

i) λ regolare se $ma(\lambda) = mg(\lambda)$;

ii) λ semplice se $ma(\lambda) = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)\lambda - \frac{5}{4} = \lambda^2 - 2\lambda - \frac{5}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \qquad ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\frac{5}{2}} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad mg(\lambda_1) = 1$$

$$V_{\frac{1}{2}} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad mg(\lambda_2) = 1$$

II° Criterio di Diagonalizzabilità (Teorema 6.22)

$\dim(V) = n < \infty$, $f \in End(V)$. f è diagonalizzabile se e solo se:

i) $P_f(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ $ma(\lambda_1) + .. + ma(\lambda_m) = n$;

ii) ogni λ è regolare.

Lemma 6.27

Se λ è autovalore di f $\Rightarrow$ $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

Corollario 6.28

λ semplice $\Rightarrow$ λ regolare

Condizione Sufficiente di Diagonalizzabilità (Teorema 6.23)

$\dim(V) = n < \infty$, $f \in End(V)$. f è diagonalizzabile se:

i) $P_f(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ $ma(\lambda_1) + .. + ma(\lambda_m) = n$;

ii) ogni λ è semplice.

• $A = \begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$ diagonalizzabile

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ base di autovettori

• $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$

$\lambda_1 = -1 \quad ma(\lambda_1) = 1 = mg(\lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ è semplice $\Rightarrow$ regolare

$\lambda_2 = 2 \quad ma(\lambda_2) = 2$

$$V_2 = Ker(A - 2I_3) = Ker\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$\Rightarrow mg(\lambda_2) = dim(V_2) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2$ è regolare

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

ESEMPIO 6.24

$\dim(V) = 2 \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \quad f \in \mathrm{End}(V) \implies$

$P_f(\lambda) = |f| - Tr(f)\lambda + \lambda^2 \implies \lambda_\pm = \dfrac{Tr(f) \pm \sqrt{Tr(f)^2 - 4|f|}}{2}$

$\cdot$ su $\mathbb{R}$: $\begin{cases} \cdot\ f \text{ è diag. se } Tr(f)^2 > 4|f| & \text{condizione suff.} \\ \cdot\ f \text{ non è diag. se } Tr(f)^2 < 4|f| & \text{II° criterio} \end{cases}$

$\cdot$ f è diag. su $\mathbb{C}$ se $Tr(f) \neq 4|f|$ condizione suff.

Se $Tr(f) = 4|f| \implies \lambda_+ = \lambda_- = \dfrac{Tr(f)}{2} = \bar{\lambda} \in \mathbb{K}$, $ma(\bar{\lambda}) = 2 \implies$

$\implies f$ è diag. sse $mg(\bar{\lambda}) = 2$. II° criterio

LEMMA 6.25

$\dim(V) = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ con $ma(\lambda) = n$ è diagonalizzabile sse $f = \lambda \cdot Id_V$.

$\implies f$ è diagonalizzabile sse $f = \bar{\lambda} \cdot Id_V$.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A) = 0 > -4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow f_A$ è diag. su $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A)^2 = 0 < 4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow$

Su $\mathbb{R}$ non è diag., infatti f_A ruota i vettori di $\pi/2$.

Su $\mathbb{C}$ è diag.: $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$V_i = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right) \quad V_{-i} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) \quad \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right\}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A)^2 = 4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow \bar{\lambda} = 1 \Rightarrow$

f_A è diag. sse $A = \bar{\lambda} I_2 = I_2$ sse $a = 0$.

Se $a \neq 0 \Rightarrow V_1 = Ker(A - I_2) = Ker\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow mg(V_1) = 1 \Rightarrow$ non esiste una base di autovettori.

COROLLARIO (LEMMA 6.29)

$U_r = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ autovettori associati a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinti $\Rightarrow U_r$ l.i.