

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx} \quad \text{con} \quad a_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_k + ib_k}{2} & k < 0 \end{cases}$$

Per calcolare direttamente i coefficienti prendiamo $\{e^{ikx}\}$ come sistema fondamentale e usiamo:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Si definiscono equazioni differenziali ordinarie equazioni in cui come incognita abbiamo una funzione $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e l'equazione contiene almeno una derivata di y . Questa derivata deve essere rispetto a una sola variabile per rendere l'equazione ordinaria. Se ciò non accade avremo equazioni differenziali parziali.

Esempi:

$$y' = Ky \quad ; \quad y'' = Ky' + hy + c \quad ; \quad e^{y'+y''} = (y^2 + \sin t)y'$$

In tutte gli esempi l'equazione può essere scritta come $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$. In questa forma l'equazione è in forma normale. Non sempre questa scrittura è possibile: $e^{y'+y''} - 7y' + \log(y'')^2 - 3t = 0$ non può essere scritta in forma normale. Noi considereremo solo equazioni scrivibili in forma normale.

Viamo dello ordine dell'equazione differenziale il massimo ordine della derivata nell'equazione.

Sia $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ con $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un'equazione differenziale ordinaria in forma normale diciamo che

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione su I se

- $\varphi \in C^n(I)$
- $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t) \quad \forall t \in I$

Diciamo che l'equazione differenziale è lineare se le varie derivate sono legate da f lineare. Se f non dipende da t , l'equazione differenziale è autonoma.

Equazione differenziale scalare del 1° ordine

Ha la seguente forma:

$$y' = f(t, y)$$

TEOREMA (di Picard) Dato $y' = f(t, y)$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se $f \in C(\Omega)$ allora $y' = f(t, y)$ ammette soluzioni

Quante sono le soluzioni possibili? Infinte a meno di una costante. Perciò definiamo

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \text{condizione iniziale}$$

Problema di Cauchy. Esso ci permette di calcolare solo una di queste soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni è detto integrale generale. Tutte le soluzioni ottenute partendo dal valore della costante viene detta soluzione o integrale particolare:

$$\begin{cases} y' = a y \rightarrow \text{Integrale generale: } \varphi(t) = K e^{at} \\ y(t_0) = y_0 \rightarrow \text{Integrale particolare: } \tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} \end{cases}$$

Ritardo il problema di Cauchy $\{ y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \}$ enunciando

TEOREMA (di Peano) Sia $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall (t_0, y_0) \in \Omega \quad \exists \delta > 0, \exists \varphi: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione su $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ del problema di Cauchy.

Il teorema di Peano ci assicura l'esistenza, ma poi quando riguarda l'unicità?

TEOREMA (di esistenza e dell'unicità locale della sol.) Sia $\{ y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \}$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Omega)$, allora $\forall (t_0, y_0) \in \Omega \quad \exists \delta > 0, \exists \varphi \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che φ è soluzione del problema di Cauchy su $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Hanno forma:

$$\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se $f \in C(I)$, $g \in C(J)$, per il teorema di esistenza e unicità locale esiste unica la soluzione. Possono verificarsi

2 casi:

- se $\exists \bar{y}: g(\bar{y}) = 0$ allora $\varphi(t) = \bar{y}$ è soluzione costante e viene chiamata integrale singolare
- se $g(\bar{y}) \neq 0$ allora posso fare:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t) dt \rightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt \rightarrow G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt = F(t) + K$$

La funzione $G(y)$ ci dà la soluzione implicitamente ovvia φ è soluzione su I se $G(\varphi(t)) = F(t) + K \quad \forall t \in I$. Eseguendo i calcoli si trova che:

integrale generale: $\varphi(t) = K e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(t) dt$
particolare: $\tilde{\varphi}(t) = K e^{-\int_{t_0}^t a(z) dz}$

Equazioni differenziali lineari ordinarie

Un'equazione differenziale lineare ha forma:

$$Ly = f(t)$$

con L un operatore lineare, ovvia:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y$$

Se $f(t) = 0$, allora l'equazione è detta lineare omogenea, altrimenti completa.

Per le equazioni lineari vale l'importissimo principio di sovrapposizione: (univoco e dimostrato al II anno)

TEOREMA (principio di sovrapp.) Se y_1 è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t)$ e y_2 è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_2(t)$ allora $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ è soluzione di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$

DIMOSTRAZIONE Grazie alla linearità di L , in generale possiamo fare:

$$\begin{aligned} (Ly_1 = f_1) \cdot C_1 + (Ly_2 = f_2) \cdot C_2 &\rightarrow C_1 L y_1 + C_2 L y_2 = C_1 f_1 + C_2 f_2 \\ &\rightarrow L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 f_1 + C_2 f_2 \\ &\rightarrow L(y) = C_1 f_1 + C_2 f_2 \end{aligned}$$

Il teorema di sovrapposizione ha delle importanti conseguenze:

- 1) se φ_1 e φ_2 sono soluzioni dell'equazione lineare omogenea, allora anche $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ lo è
essendo l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n
- 2) se γ_1, γ_2 sono soluzioni dell'equazione completa, allora $\gamma_1 - \gamma_2$ è soluzione dell'equazione omogenea associata

TEOREMI DI VARIABILI INDEPENDENTI

Definiamo:

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C^1(I) : L\varphi = 0 \right\} \quad \text{spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea}$$

$$\Psi = \left\{ \psi \in C^1(I) : L\psi = f \right\} \quad \text{' , ' , ' della completa}$$

Possiamo affermare che: se $\psi_0 \in \Psi$ e $\varphi \in \Phi$, allora $\varphi + \psi_0 \in \Psi$ e quindi $\Psi = \Phi + \Psi_0$.

PROPOSIZIONE Dala $Ly = f(t)$, se $a_1, a_2, \dots, a_n, f \in C(I)$, allora \exists soluzioni di $Ly = f(t)$ $\varphi(\psi) \in C^n(I)$

Equazioni differenziali lineari del I° ordine

Stanno forma $y' + a(t)y = f(t)$. Il relativo problema di Cauchy avrà forma:

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In forma normale, l'equazione lineare di I° ordine diventa:

$$y' = F(t, y) \quad ; \quad F(t, y) = -a(t)y + f(t)$$

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità sono soddisfatte se $a, f \in C(I) \forall x \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione lineare omogenea di I° ordine è a variabili separabili e quindi ha soluzione $\varphi(t) = c e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(r) dr$. La soluzione del problema di Cauchy relativo sarà: $\tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(r) dr}$.

Se riusco a trovare ψ_0 soluzione dell'equazione completa, allora posso usare le conseguenze del principio di sovrapposizione per scrivere l'integrale generale. Per cercare ψ_0 usiamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

$$1) \text{ cerco } \psi_0(t) = c(t) e^{-\int a(t) dt}$$

2) sostituirlo $\psi_0(t)$ nell'espressione dell'equazione:

$$c'(t)e^{-A(t)} - \frac{a(t)c(t)e^{-A(t)}}{+ a(t)c(t)e^{-A(t)}} = f(t) \rightarrow c'(t)e^{-A(t)} = f(t) \rightarrow c'(t) = f(t)e^{A(t)}$$

$$\rightarrow c(t) = \int f(t)e^{A(t)} dt$$

Alliamo così trovato l'espressione di una soluzione particolare $\psi_0 = e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)} dt$

3) l'integrale generale sarà: $\psi(t) = e^{-A(t)}(c + \int f(t)e^{A(t)} dt)$

Applicando all'integrale generale il problema di Cauchy ottieniamo che la soluzione diventa:

$$\bar{\psi}(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(r) dr} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(r)e^{\int_{t_0}^r a(z) dz} dr \right)$$

Equazioni differenziali lineari del 2° ordine

Il problema di Cauchy relativo ha forma:

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Per scrivere l'integrale generale, come nel caso del primo ordine, avremo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e quello particolare della completa. Ciò però non è così facile.

Equazioni differenziali omogenee del 2° ordine a coefficienti costanti

Consideriamo la generica equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $ay'' + by' + cy = 0$. Le soluzioni avranno forma $y = e^{\lambda t}$. Sostituendo y nella nostra equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} &= 0 \rightarrow e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall t \\ &\rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \end{aligned}$$

\hookrightarrow polinomio caratteristico associato all'equazione

Alliamo così ricordando la ricerca di soluzioni a un'equazione lineare omogenea alla ricerca di radici del polinomio caratteristico, ovvero alla riduzione della cosiddetta equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$. La natura delle radici dipende dal discriminante del polinomio caratteristico:

- $\Delta > 0$: il polinomio ammette 2 radici reali distinte

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = e^{\lambda_2 t} \end{array} \right\} \text{linearmamente indipendenti} \Rightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Grazie al teorema di unicità possiamo allora scrivere l'integrale generale.

- $\Delta < 0$: il polinomio ammette 2 radici complesse coniugate:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] \\ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)] \end{array} \right\}$$

Consideriamo due soluzioni reali alla nostra equazione:

$$\left. \begin{array}{l} u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \right\} \text{soluzioni reali linearmamente indipendenti}$$

\hookrightarrow

$$y(t) = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]$$

- $\Delta = 0$: il polinomio ammette 2 radici reali coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow y_1 = e^{\lambda t}$$

Così abbiamo solo 1 soluzione. L'altra la possiamo trovare cercando $c(t)$ tale che $y_2 = c(t)e^{\lambda t}$ sia soluzione. La funzione y_2 si dimostra essere soluzione se $c''(t) = 0$ e quindi $y_2 = t e^{\lambda t}$. L'integrale generale ottenuto sarà quindi:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Equazioni differenziali lineari complete del II ordine a coefficienti costanti

Pur determinare l'integrale generale di un'equazione di tipo $ay'' + by' + cy = f(t)$ abbiamo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Il primo lo sappiamo trovare, mentre il secondo non ancora.

Per trovare una soluzione particolare quando il termine noto è una funzione abbastanza semplice usiamo un metodo empirico chiamato metodo di somiglianza. Questo metodo si basa sul fatto che l'operatore lineare associa a un tipo di funzione un altro tipo. Quindi, in base alla forma della forzante possiamo risalire alla soluzione.

- FORZANTE ESPONENZIALE: $f(t) = A e^{\alpha t}$

- $y_p = C e^{\alpha t}$ se α non è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
- $y_p = C t e^{\alpha t}$ se α è radice singola del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
- $y_p = (C_1 + C_2 t) e^{\alpha t}$ se α è radice doppia del polinomio caratteristico dell'omogenea associata

- FORZANTE POLINOMIALE: $f(t) = P_n(t)$

- $y_p = P_n(t)$ se $a, c \neq 0$
- $y_p = P_{n+1}(t)$ se $a, b \neq 0$
- $y_p = P_{n+2}(t)$ se $a \neq 0$

- FORZANTE TRIGONOMETRICA: $f(t) = A \cos(vt) + B \sin(vt)$

- $y_p = C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt)$ se $b \neq 0$

- $y_p = t(C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt))$ se l'equazione ha forma $y'' + v^2 y = \alpha \cos(vt) + \beta \sin(vt)$, $v = \sqrt{\frac{c}{a}}$

- FORZANTE ESPONENZIALE-TRIGONOMETRICA: $f(t) = e^{\alpha t} (A \cos(vt) + B \sin(vt))$

- $y_p = e^{\alpha t} (C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt))$

- $y_p = t e^{\alpha t} (C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt))$ se $\alpha \pm iv$ soluzioni del polinomio caratteristico $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Se cerchiamo una soluzione di un'equazione completa del tipo $ay'' + by' + cy = A e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ oppure $ay'' + by' + cy = A e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ si può:

1) considerare l'equazione $aw'' + bw' + cw = A e^{(\alpha+i\beta)t}$

2) cercare all'equazione sopra la soluzione $w(t) = C e^{(\alpha-i\beta)t}$ con C incognita complessa.

3) a questo punto otteniamo 2 soluzioni:

$$y_1(t) = \operatorname{Re} \{ C e^{(\alpha+i\beta)t} \} \rightarrow ay'' + by' + cy = A e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$y_2(t) = \operatorname{Im} \{ C e^{(\alpha+i\beta)t} \} \rightarrow ay'' + by' + cy = A e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

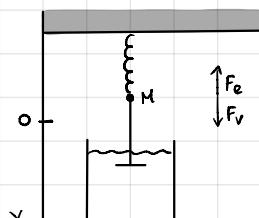
Esiste un caso particolare: se $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni del polinomio caratteristico $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ allora bisogna considerare $w(t) = C t e^{(\alpha+i\beta)t}$ come soluzione generica.

Se abbiamo una forzante del tipo $f = f_1 + f_2$ con f_1, f_2 trattabili con il metodo di somiglianza è sufficiente cercare separatamente una soluzione per $Ly = f_1$ e una per $Ly = f_2$ in quanto il principio di sovrapposizione ci assicura che $y_1 + y_2$ somma delle soluzioni particolari è soluzione particolare di $Ly = (f_1 + f_2)$.

Modelli fisici

Consideriamo alcuni modelli fisici come applicazioni di ciò che abbiamo visto.

OSCILLATORE ARMONICO



Forzante elastica \rightarrow cost. di lunghezza
Equazione del moto: $my'' = -K_y - hy' \rightarrow y'' = -\frac{K}{m}y - \frac{h}{m}y'$
 $\Rightarrow y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0$

- CASO OSCILLAZIONE LIBERA: $\delta = 0$

$$m y'' + \omega^2 y = 0 \rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i\omega$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -i\omega$$

$\hookrightarrow y(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} [C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t]$

$$= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t \right] = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} [\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t]$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin (\omega t + \varphi) = A \sin (\omega t + \varphi)$$

$\frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \varphi$ $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$

- CASO OSCILLAZIONE SMORZATA: $S \neq 0$

$m y'' + 2\delta y' + w^2 y = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta$ dipende dal segno di $\delta^2 - w^2$!

- $\delta > \omega$ - sovaccutico : $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \Psi = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$
 - $\delta < \omega$ - subcritico : $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \sin \Psi t + C_2 \cos \Psi t] = A e^{-\delta t} \sin(\Psi t + \varphi)$
 - $\delta = \omega$ - critico : $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = -\delta \Rightarrow y(t) = e^{-\delta t} (C_1 + C_2 t)$

OSCILLAZIONI FORZATE

$$\text{Generica equazione: } y'' + w^2 y = a \cos(vt) \rightarrow y_0 = C_1 \sin(wt) + C_2 \cos(wt) = A \cos(wt + \varphi)$$

Per la soluzione particolare dobbiamo considerare due casi:

- $V \neq W$: $y_p = \frac{a}{w^2 - v^2} \cos vt \Rightarrow y(t) = A \cos(wt + \varphi) + \frac{a}{w^2 - v^2} \cos vt$
 - $V = W$: $y_p = \frac{a}{2w} t \sin(wt) \Rightarrow y(t) = A \cos(wt + \varphi) + \frac{a}{2w} t \sin wt \rightarrow \text{RISONANZA}$

OSCILLAZIONI SMORZATE FORZATE

$$\text{Generische} \quad \text{eigene} \quad \text{Gleichungen:} \quad y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = \alpha \cos \nu t \quad \delta > 0$$

La soluzione dell'equazione associata è l'equazione delle oscillazioni sproporzionali che abbiamo già trattato. La soluzione particolare dell'equazione completa usiamo il metodo di somiglianza:

$$Y_P = \frac{a((w^2 - v^2) \cos vt + 2\delta v \sin vt)}{(w^2 - v^2)^2 + 4\delta^2 v^2} = \dots = \frac{a}{\sqrt{(w^2 - v^2)^2 + 4\delta^2 v^2}} \cos(vt + \theta)$$

$\theta = -\arctan\left(\frac{2\delta v}{w^2 - v^2}\right)$

La soluzione complessa sarà:

$$y = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty} + \frac{a}{\sqrt{(w^2 - v^2)^2 + 4s^2v^2}} \cos(vt + \theta) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + K_a \cos(vt + \theta)$$

K è massima per $V_{\max} = \sqrt{w^2 - 2\delta^2}$. $K(V_{\max})$ è detta pulsazione di risonanza. La curva stimata dell'ampiezza come abbiamo nella risonanza dell'oscillatore forzato in questo caso non è possibile a causa della presenza di un altro δ . Se $\delta \rightarrow 0$, $K(V_{\max}) \rightarrow +\infty$. La pulsazione della forzante che induce risonanza non è pari alla pulsazione propria, ma un po' più piccola.

Se $\delta > \frac{w}{\sqrt{2}}$ l'ampiezza è strettamente decrescente e non si ha risparmio

CIRCUITI RLC IN AC

$$\text{Equazione generale: } L i'' + R i' + \frac{1}{C} i = V_0 \phi \cos \omega t \rightarrow i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{LC} i = \frac{V_0}{L} \phi \cos \omega t$$

In caso di $R=0$ avremo $i'' + \omega^2 i = a \cos \omega t$ da $\omega = \phi$ avremo risonanza con $i = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \sin \omega t$.
Se invece $\phi \neq \omega$ avremo $i = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - \phi^2} \cos(\omega t)$

In caso di $R \neq 0$, il circuito avrà regime permanente $i = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 + \phi^2)^2 + 4R^2\phi^2}} \cos(\omega t + \theta) = \frac{V_0}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \phi^2)^2 + R^2}} \cos(\omega t + \theta)$
dove $Z(\phi) = \sqrt{\left(\frac{1}{\phi C} - \phi^2\right)^2 + R^2}$ è l'impedenza. L'ampiezza massima la si ha quando $\phi_{\max} = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
In questo caso di risonanza il valore massimo della corrente sarà $A_{\max} = \frac{V_0}{R}$.

Intervallo massimale di definizione della soluzione (I° ordine)

Occuperemo dello studio del massimo intervallo di definizione delle soluzioni. Definiamo intervallo massimale di definizione della funzione φ un intervallo $(a; b)$ fuori dal quale φ non può essere prolungata.

Studiamo:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Equazione a variabili separabili}$$

Risolviamo: $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt \rightarrow \arctan y = t + C \rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad !! \quad \varphi: \left(-\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

Quindi la nostra soluzione è definita solo su un certo intervallo. Trovare la soluzione, però, non è sempre possibile. Consideriamo:

$$\begin{cases} y' = \arctan(1+y^5) \\ y(0) = a \end{cases} \rightarrow \text{Equazione a variabili separabili}$$

Non posso scrivere φ poiché non so risolvere $\int \frac{dy}{\arctan(1+y^5)}$

L'unica cosa che possiamo fare in questo caso è eseguire uno studio qualitativo sull'equazione di perturbazione. Questo è il problema della ricerca dell'intervallo massimale di definizione della funzione.

Siamo in ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Consideriamo una generica funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nel teorema abbiamo affermato l'esistenza di un intervallo $(a; b)$ in cui esiste una sola soluzione definita su questo intervallo. Proviamo ad estenderlo questo $(a; b)$. Se

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) = y_b$$

Allora posso considerare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Poiché siamo ancora sotto le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, posso affermare che in un arco $(b-\delta; b+\delta)$ esiste unica φ_b soluzione. Inoltre $\varphi_b \equiv \varphi$ per lo stesso teorema. Quindi la funzione φ così definita:

$$\begin{cases} \varphi(t) & (a, b) \\ \varphi_b(t) & [b; b+\delta] \end{cases}$$

è un prolungamento di φ su $(a, b+\delta)$. Possiamo iterare questo procedimento finché non raggiungo un estremo del dominio.

Se questo dominio è limitato, possono accadere due situazioni:

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = -\infty \rightarrow \text{posso prolungare ancora}$$

$$-\infty \rightarrow \text{l'intervallo massimale sarà } (a, \beta) \subset (a, b)$$

di due che una soluzione deve uscire da ogni compatto contenuto nel dominio: o ero perché arrivo ai bordi del dominio oppure ero perché ho un anidolo. (supponendo che il limite esista). Questi ragionamenti posso farli quando riesco a costruire un grafico "a pezzi" studiandone le proprietà della funzione. In ipotesi del teorema di esistenza ed unicità ogni soluzione ha un intervallo massimale di definizione.

TEOREMA (esistenza e unicità globale della soluzione) Sia il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $f: (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, \frac{df}{dy} \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ se $|f(t, y)| \leq K|y| + h$ $K, h > 0$ $\forall (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ allora esiste unica la soluzione φ definita su $[a, b]$

Il Teorema sopra funziona bene per funzioni limitate.

TEOREMA (di regolarità delle soluzioni) Sia φ soluzione di $y' = f(t, y)$ appartenente a $C^1([a, b])$ e $f \in C(\mathbb{D})$. se $f \in C^n(\mathbb{D})$ allora $\varphi \in C^{n+1}([a, b])$.

Equazioni di Euler

$$t^2 y'' + t a y' + t b y = f(t) \rightarrow y'' + \frac{a}{t} y' + \frac{b}{t^2} y = \frac{f(t)}{t^2} = \tilde{f}(t) \quad a, b \in \mathbb{C} (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

\tilde{f} supponiamo $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Scriviamo $z(\tau) = y(e^\tau) \rightarrow y(t) = z(\log t) \rightarrow t^2 (z''(\log t) \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} z' \log t) + t a z' \log t \frac{1}{t} + b z \log t = f(t)$

$\hookrightarrow z'' \log t + (a-1) z' \log t + b z \log t = f(t)$

$\hookrightarrow z''(\tau) + (a-1) z'(\tau) + b z(\tau) = f(e^\tau)$

↓
COEFF. COSTANTI

$$\begin{aligned} \text{Tipi delle soluzioni: } \varphi(x) &= e^{\lambda x} \rightarrow \varphi(t) = t^\lambda \\ \varphi(x) &= xe^{\lambda x} \rightarrow \varphi(t) = \log t \cdot t^\lambda \\ \varphi(x) &= e^{xt} \cos \beta x \rightarrow \varphi(t) = t^\alpha (\cos(\beta \log t)) \end{aligned}$$

Equazioni differenziali vettoriali (o sistemi di equazioni differenziali) del I° ordine
Possiamo scrivere la generica equazione vettoriale come:

$$\underline{Y}' = f(t, \underline{Y})$$

TEOREMA Ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale è equivalente ad un sistema di n equazioni differenziali del I° ordine. Ciò vale anche per i problemi di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo il caso $n=2$.

$$y'' = f(t, y, y') \rightarrow \underline{Y}' = E(t, \underline{Y}) \text{ con } \underline{Y} = (y_1, y_2) \rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

Facciamo vedere che se φ è soluzione dell'equazione allora $\Phi = (\varphi, \varphi')$ è soluzione del sistema e viceversa.

$$1) \text{ pongo } (\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi, \varphi') \rightarrow \begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases} \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) \text{ soluzione del sistema}$$

$$2) \text{ supponiamo } \Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \text{ sia soluzione del sistema, allora } \Phi \in C^1(I).$$

$$\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2 \\ \varphi_2' = \varphi_1'' = f(t, \varphi_1, \varphi_2) = f(t, \varphi_1, \varphi_1') \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 \text{ soluzione dell'equazione}$$

Il problema di Cauchy di sistema si scrive come:

$$\begin{cases} \underline{Y}' = E(t, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(t_0) = \underline{\alpha} \end{cases}$$

Equazioni differenziali vettoriali lineari del I° ordine

La definizione di linearità è la stessa che avevamo dato in precedenza. La generica forma è:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases} \equiv \underline{Y}' = \underline{A}(t)\underline{Y} + \underline{B}(t) \quad \text{caso } n=2$$

Se $\underline{B}(t) = \underline{0}$ abbiamo un sistema lineare omogeneo. Anche per i nostri sistemi possiamo definire l'operatore lineare $L: L\underline{Y} = \underline{A}(t)\underline{Y}$ e far valere il principio di sovrapposizione con le seguenti conseguenze:

- 1) lo spazio delle soluzioni Φ dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale
- 2) se $\underline{\psi}_0$ è soluzione dell'equazione completa allora ogni soluzione $\underline{\psi}$ ha forma $\underline{\psi} = \underline{\psi}_0 + \underline{\Phi}$ dove $\underline{\Phi}$ è la soluzione dell'omogenea associata

Il problema di Cauchy ha forma:

$$\begin{cases} \underline{Y}' = \underline{A}(t)\underline{Y} + \underline{B}(t) \\ \underline{Y}(t_0) = \underline{\alpha} \end{cases}$$

TEOREMA Se $A \in C(I)$, $B \in C(I)$ allora $\forall t_0 \in I \ \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n \ \exists!$ soluzione del problema di Cauchy definita su I

Dimostriamo che in ipotesi di esistenza e unicità lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2

DIMOSTRAZIONE Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{\gamma}' = A(t) \gamma \\ \gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\gamma}' = A(t) \gamma \\ \gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Φ_1 sol. Φ_2 sol.

Sia Φ soluzione qualunque $\Phi(t_0) = (\varphi_1(t_0) = \alpha_0; \varphi_2(t_0) = \alpha_1)$. Considero $\tilde{\Phi} = \alpha_0 \Phi_1 + \alpha_1 \Phi_2$; $\tilde{\Phi}(t_0) = (\alpha_0, \alpha_1) = \Phi(t_0)$. Poiché la soluzione è unica $\Phi = \tilde{\Phi}$ ossia qualunque soluzione $\Phi = \alpha_0 \Phi_1 + \alpha_1 \Phi_2$ è una combinazione lineare di Φ_1, Φ_2 indipendente. Quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

Equazioni differenziali vettoriali lineari del I ordine a coefficienti costanti

TEOREMA $\Phi(t) = \Xi e^{\lambda t}$ è soluzione di $\dot{\gamma}' = A\gamma$ se e solo se λ è autovettore di A e Ξ è un autovettore associato

Analizziamo i vari casi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: esistono due soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \lambda_2$ regolare: $\exists \xi_1, \xi_2$ autovettori indipendenti \Rightarrow esistono 2 soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ($\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$): $\exists \xi_1, \bar{\xi}_2 : \bar{\xi}_2 = \overline{\xi_1} \Rightarrow$ esistono 2 soluzioni indipendenti
- $\lambda_1 = \lambda_2$ non regolare: si cerca (se esiste) una soluzione della forma

$$\Phi_2(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t} \quad e \quad \Phi_1 = \Xi e^{\lambda t} \quad \text{con } \Xi \text{ l'unico autovettore}$$

Consideriamo il caso $n=2$. Lo spazio delle soluzioni avrà dimensione n . Supponendo di aver trovato le n soluzioni, sono esse indipendenti? Definiamo la matrice Wronskiana:

$$W(t) = [\Phi_1; \Phi_2; \dots; \Phi_n]$$

Se le soluzioni non sono indipendenti, allora $\det W(t) = 0$. Se il determinante non sarà nullo, allora le soluzioni sono indipendenti.

Una famiglia $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ di soluzioni indipendenti di $\dot{\gamma}' = A\gamma$ viene detta sistema fondamentale di soluzioni. D'ora in poi indicheremo con $W(t)$ non la generica Wronskiana ma la matrice fondamentale. Ogni Φ soluzione è della forma $\Phi = \sum c_i \Phi_i$. Un modo comodo di scrivere la soluzione è:

$$\Phi = W \cdot \xi \quad \text{con} \quad \xi = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W \text{ d' Wronskiano}$$

$$\forall \Phi \text{ soluzione} \quad \dot{\Phi}' = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1' \\ \dot{\Phi}_2' \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n' \end{bmatrix} = A \Phi \quad \Rightarrow \quad [\Phi_1'; \dots; \Phi_n'] = \underbrace{W' = A \cdot W}_{\text{L'ultima colonna}} \quad \text{della soluzione}$$

Consideriamo ora l'equazione completa. Per cercare l'integrale particolare usiamo il metodo di variazione delle costanti. Sappiamo che la generica soluzione sarà $\Phi(t) = W(t) \cdot \xi$. Scrivo $\Psi_0(t)$ della forma $\Psi_0(t) = W(t) \cdot \xi(t)$:

$$\Psi_0' = W'(t) \cdot \xi(t) + W(t) \cdot \xi'(t) = A(t) \Psi_0(t) + B(t) = A(t) W(t) \cdot \xi + B(t)$$

$$\hookrightarrow \cancel{W'(t)} \cdot \xi(t) + W(t) \cdot \xi'(t) = A(t) W(t) \cdot \xi + B(t) \rightarrow W(t) \cdot \xi'(t) = B(t)$$

$$\hookrightarrow \xi'(t) = A(t) W(t)$$

$$\text{Poiché} \det W \neq 0 \quad \exists w^{-1} \Rightarrow \xi(t) = \int w^{-1}(t) B(t) dt$$

Quindi la soluzione dell'equazione completa sarà:

$$\Psi(t) = w(t) \left(c + \int w^{-1}(t) B(t) dt \right)$$

L'equazione generica abbiamo visto essere $\dot{Y} = A Y$ con A costante. La generica soluzione dell'omogenea è $\Phi(t) = \sum e^{\lambda_i t}$. Studiamo gli autovettori (consideriamo dimensione 2):

λ_1, λ_2 reali: $\Phi_1(t) = \sum_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \Phi_2(t) = \sum_2 e^{\lambda_2 t}$

λ doppio reale: $\Phi_{1,1}(t) = \sum_{1,1} e^{\lambda t}$

λ doppio non reale: $\Phi_1(t) = \sum_1 e^{\lambda t}, \quad \Phi_2(t) = b e^{\lambda t} + k t e^{\lambda t}$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$: $\Phi_{1,2}(t) = e^{\alpha t} (b_{1,2} \cos(\beta t) \pm \sin(\beta t))$

Equazioni vettoriali / sistemi autonomi

Un'equazione autonomo è un'equazione nella quale lo tempo non dipende da t . Nel caso dei sistemi diciamo che esso è autonomo se ha forma $\dot{Y} = f(Y)$. In dimensione 2 abbiamo:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

Il grafico di un di un sistema autonomo è completamente individuato dalla sua proiezione sul piano xy e quindi possiamo ottenere tutte le informazioni necessarie studiando questa proiezione.

Sia $\dot{Y} = f(Y)$ un sistema autonomo bidimensionale, diciamo orbita o traiettoria l'insieme immagine di una soluzione $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ tale che $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ sia soluzione del sistema. Osserviamo: l'orbita non è il grafico.

Sistemi lineari autonomi

Dato $\dot{Y} = A Y$ e A costante, se $\det A \neq 0$ allora $Y=0$ sarà l'unica soluzione costante; se $\det A = 0$ invece avremo una retta di punti che sono soluzioni costanti.

Per studiare l'andamento delle orbite studio il variazione delle due costanti c_1, c_2 nel rapporto $\frac{y(t)}{x(t)}$ (nel caso λ_1, λ_2 reali distinti).

Sistemi non lineare autonomo

Sia $\dot{Y} = f(Y)$ con f in ipotesi di esistenza e unicità delle soluzioni bidimensionale. Lavoriamo sul piano xy , dove sono contenute le orbite. Essa si chiamano piano delle fasi.

PROPOSIZIONE Se Φ è soluzione su (a, b) , allora Ψ definita $\Psi(t) = \Phi(t + \tau_0)$ è soluzione su $(a - \tau_0, b - \tau_0)$.

DIMOSTRAZIONE $\Psi' = \Phi'(t + \tau_0) = L(\Phi(t + \tau_0)) = L(\Psi(t))$

Posso anche dire che se Ψ, Φ sono soluzioni e $\Psi(\tau_0) = \Phi(\tau_0)$ allora $\exists \tau_0: \Psi(t) = \Phi(t + \tau_0)$. Ciò significa che le stesse orbite non si possono incontrare nel piano delle fasi: per quanto detto prima, se un punto appartiene a due orbite queste dovranno coincidere. I grafici sono quindi uno la traslazione dell'altro.

Che tipo di orbite si possono avere? Sia $\dot{Y} = f(Y)$, se $\exists y_0: f(y_0) = 0$ allora $y = y_0$ è soluzione.

Definiamo soluzione di equilibrio (singolare o critica) la funzione $\Phi(t) = y_0$ costante la soluzione dell'equazione $\dot{Y} = f(Y)$ con $y_0: f(y_0) = 0$. Questi punti y_0 sono gli punti di equilibrio.

Nel piano delle fasi a una soluzione d'equilibrio corrisponde un punto di equilibrio.

I punti di equilibrio sono importanti perché per $t \rightarrow +\infty$ o $\|\varphi(t)\| \rightarrow +\infty$ o $\|\varphi(t)\| \rightarrow (x_0, y_0)$ punto di equilibrio.

Il disegno delle orbite sul piano delle fasi è detto ricalco di fase.

Integrale primo del sistema autonomo

Diciamo che la funzione $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è un integrale primo di un sistema autonomo se E è costante su ogni soluzione φ del sistema, cioè se $E(\varphi(t)) = c \quad \forall t \in \mathbb{I}$.

L'orbita di φ è contenuta nell'insieme di livello c di E .

Il fatto che $E(\varphi(t)) = c$ avviene se e solo se $\langle \nabla E(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle = 0$. Quindi se $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ abbiamo che E sarà integrale primo se e solo se $\langle \nabla E(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle = 0$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = -y(y-2) \\ y' = (x-2)(y-2) \end{cases} \rightarrow \frac{y'}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y} \rightarrow (x-2)dx = -ydy \rightarrow \int (x-2)dx = -\int ydy \rightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \rightarrow E = (x-2)^2 + y^2 = c$$

Classificazione del punto di equilibrio

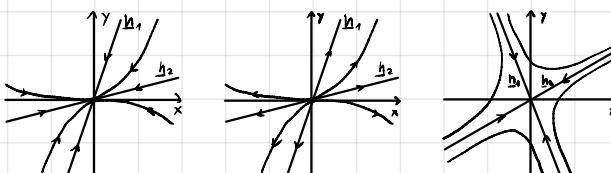
Dato il sistema autonomo lineare bidimensionale:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ autoveloci di } A$$

Analizziamo i punti di equilibrio nei vari casi:

1° CASO: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\varphi(t) = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_1 h_{21} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{22}}{C_1 h_{11} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{12}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{c_2 \neq 0} \frac{h_{22}}{h_{11}} \xrightarrow[c_2 = 0]{} \frac{h_{22}}{h_{12}}$$

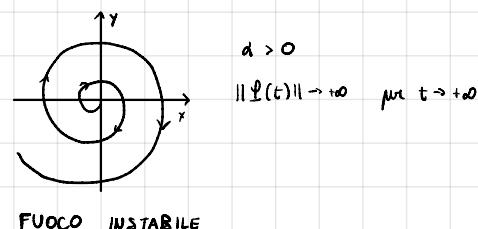
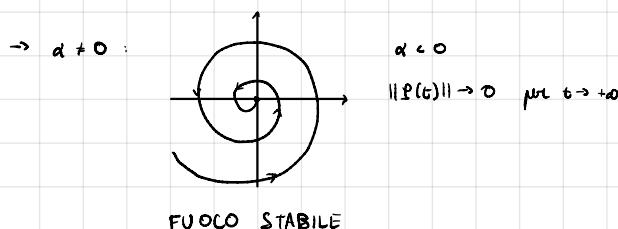
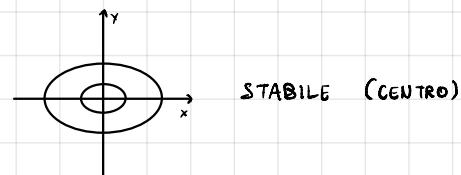


$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
NODO STABILE NODO INSTABILE COLLE O SELLA

2° CASO: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

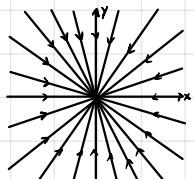
$$\varphi(t) = C_1 h_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 \bar{h}_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} ((C_1 h_1 + C_2 \bar{h}_2) \cos \beta t + (C_1 h_1 - C_2 \bar{h}_2) \sin \beta t)$$

$\rightarrow \alpha = 0$: soluzioni periodiche e orbita ellittica
 $\hookrightarrow E(x, y) = Cx^2 + 2\alpha xy + by^2$



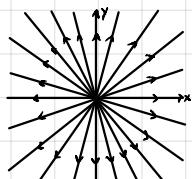
3° CASO: autovettore doppio
se: autovettore λ regolare

$$\Psi(t) = c_1 b_1 e^{\lambda t} + c_2 b_2 e^{\lambda t} = \underline{c} e^{\lambda t} \rightarrow \text{ogni semiretta uscente da } 0 \text{ è orbita}$$



$$\lambda < 0$$

NODO A STELLA STABILE



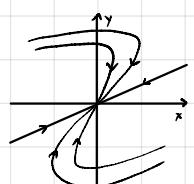
$$\lambda > 0$$

NODO A STELLA INSTABILE

3b: autovettore λ non regolare

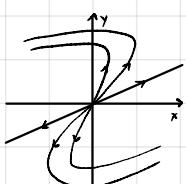
$$\Psi(t) = \underline{c}_1 e^{\lambda t} + \underline{c}_2 t e^{\lambda t} \rightarrow \begin{aligned} &\text{per } t \rightarrow +\infty, \underline{c}_2 \neq 0 \\ &\rightarrow \text{per } t \rightarrow +\infty, \underline{c}_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &\rightarrow \frac{c_{22}}{c_{21}} \\ \frac{y(t)}{x(t)} &\rightarrow \frac{c_{12}}{c_{11}} \end{aligned}$$



$$\lambda < 0$$

NODO DEGENERE STABILE



$$\lambda > 0$$

NODO DEGENERE INSTABILE