

LEZIONE DI ANALISI DEL 8 OTTOBRE



FUNZIONI:

Funzione inversa: con l'ipotesi che f sia iniettiva, è possibile definire f^{-1} tale che: $f^{-1} \text{Im}(f) \rightarrow D_f$

$$\forall y \in \text{Im}(f) \exists! x \in D_f: f(x) = y \Rightarrow \text{rende } f^{-1} \text{ una funzione}$$

$$y \mapsto x$$

La funzione inversa non per forza è definita in tutto il dominio di f : es. log, cosin...

N.B. Il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del grafico della funzione normale.

SUCCESSIONI:

DEFINIZIONE: è una serie ordinata di numeri. Una funzione del tipo: $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta successione. Per indicare tutti gli elementi della successione si usa $\{a_n\}$

$$n \mapsto a_n$$

SUCCESSIONE POSITIVA: una successione è positiva se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$

si dice definitivamente positiva se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, a_n > 0$

" **NEGATIVA:** una successione è negativa se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 0$

si dice definitivamente negativa se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, a_n < 0$

" **LIMITATA:** una successione si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} (\{a_n\})$

una successione si dice limitata inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R} (\{a_n\})$

" **CRESCENTE:** una successione si dice crescente se $\forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$ (strettamente $\rightarrow >$)

una successione si dice definitivamente crescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 a_n > a_{n+1}$ (strettamente $\rightarrow >$)

" **DECRESCENTE:** una successione si dice decrescente se $\forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$ (strettamente $\rightarrow <$)

una successione si dice definitivamente decrescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 a_n < a_{n+1}$ (strettamente $\rightarrow <$)

SUCCESSIONE CONVERGENTE: una successione si dice convergente se $\exists l \in \mathbb{R}: \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N} |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow \lim a_n = l$

ESEMPIO: $a_n = \frac{n-1}{n}$ con $n \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Per dimostrare una la definizione: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{n-1-n}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$

Se $\lg n_0 = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ poiché $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, il limite è verificato

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE (successioni): Sia a_n una funzione convergente a $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, allora l è unico.

DIMOSTRAZIONE: Per cercando, supponiamo esistano due limiti di convergenza $a_m \neq l$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$. Ciò significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 |a_n - l| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 |a_n - m| < \varepsilon.$$

$$\text{Perciò allora scrivere: } |l - m| = |l - a_m + a_m - m| = |(l - a_m) + (a_m - m)| \stackrel{\text{dis. triang}}{\leq} |l - a_m| + |a_m - m| \stackrel{\varepsilon}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |l - m| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon, \text{ ma}$$

ciò è vero solo per $m = l \Rightarrow \text{ASSURDO} \Rightarrow$ il limite di una successione convergente è unico (se finito)

SUCCESSIONI DIVERGENTI: Una successione a_n è divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} a_n > M$

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \forall M > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} a_n > M$$

SUCCESSIONI IRREGOLARI: Una successione a_n è irregolare se non è né convergente né divergente

ESERCITAZIONE DI ANALISI DEL 9 OTTOBRE



NUMERI COMPLESSI

$$\textcircled{1} \quad z - |z| + cz + c = 0 \quad \text{por tanto} \quad z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x + iy)(\sqrt{x^2 + y^2}) - 2(x + iy) + c = 0$$

l'equazione è risolta

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}(0) \\ \operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}-2x=0 \\ y\sqrt{x^2+y^2}-2y+1=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{x\sqrt{x^2+y^2} - 2x}_{\downarrow \text{Re}(w)} + \underbrace{c(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1)}_{\downarrow \text{Im}(w)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2}-2)=0 & \dots \\ y\sqrt{x^2+y^2}-2y+1=0 & \dots \end{cases}$$

sistema en II

$$\left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] \quad \textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y\sqrt{y^2-2y+1}=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ |y| - 2y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y \geq 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y = 1 \Rightarrow z_1 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow z_3 = i(-1 - \sqrt{2})$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} = ? \\ 1=0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z(1+i) - \bar{z}(1-i)}{z - \bar{z}}\right) = 0 \quad \text{Mettiamo in forma algebrica: } z = x+iy \Rightarrow \frac{(x+iy)(1+i) - (x-iy)(1-i)}{(x+iy) - (x-iy)} =$$

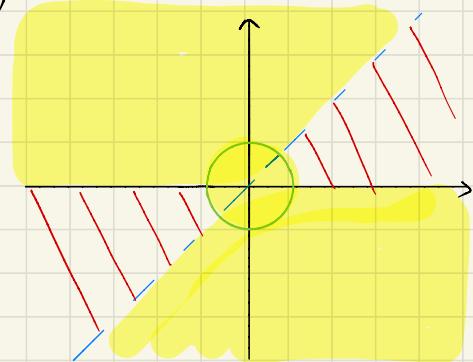
$$\bar{z} = x-iy \Rightarrow \frac{xy + ix - x + iy - ix + iy + y - y}{2iy} = \frac{xy(x+y)}{2iy} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \text{parametri reali}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}$$

Dove sono $E = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{z(1+i) - \bar{z}(1-i)}{z - \bar{z}} < 2 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\} =$

$$= \left\{ x+iy \in \mathbb{C} \mid \frac{x+y}{y} < 2 \right\} \cup \left\{ x+iy \in \mathbb{C} \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1 \right\}$$

$$\frac{x+y}{y} < 2 \Rightarrow \frac{x-y}{y} < 0$$



$$E_1 = \left\{ v \in \mathbb{C} \mid v = \bar{z}, z \in E \right\} \Rightarrow \text{riflessione lungo } x \text{ di } E$$

$$E_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = iz, z \in E \right\} \Rightarrow \text{rotazione di } \frac{\pi}{2} \text{ di } E$$

$$E_3 = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = -z, z \in E \right\}$$

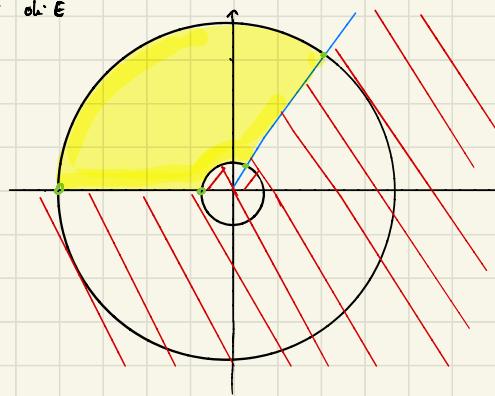
$$E_4 = \left\{ t \in \mathbb{C} \mid t = \frac{1}{z}, z \in E \right\}$$

HOMEWORK

$$\textcircled{3} \quad A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 8, \frac{\pi}{3} \leq \arg(z) < \pi \right\}$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w^3 = z \right\}$$

HOMEWORK



5) $\begin{cases} |z-i| < |z+1| \\ z^5 = 2i \end{cases} \Rightarrow z = x+iy \Rightarrow z-i = x+i(y-1)$

$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

$|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 < (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow y > -x$

$z^5 = 2i$

$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow p^5 e^{i5\sigma} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} p^5 = 2 \\ 5\sigma = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \sqrt[5]{2} \\ \sigma = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad (k=0 \dots 9) \end{cases}$

TRASF. GRAFICI

$f(x)+K \Rightarrow$ sposta in verticale: $+K$ verso l'alto; $-K$ verso il basso

$Kf(x) \Rightarrow$ deformazione in verticale: $K>1$ allunga il grafico; $0 < K < 1$ schiaccia il grafico

$-f(x) \Rightarrow$ riflessione rispetto a x

$|f(x)| \Rightarrow \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

$f(x+K) \Rightarrow$ sposta in orizzontale: $+K$ a sinistra; $-K$ a destra

$f(Kx) \Rightarrow$ deformazione in orizzontale: $K>1$ schiaccia; $0 < K < 1$ allunga

$f(-x) \Rightarrow$ riflessione rispetto a y

$f(|x|) \Rightarrow \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$

Distinguer $f(x)$:

$2 - x+3 $	$ 3\sqrt{x} + 1 $
$-e^{\frac{x-2}{2}} + 1$	$ 2 \ln x-1 $
$1 - \frac{1}{ x-\frac{1}{2} }$	$\sqrt{x-1} - 1$

partindo da grafico noli

Homework

LEZIONE DI ANALISI DEL 10 ottobre



SUCCESSIONI

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE (SUCCESSIONI MONOTONE): Sia a_n una successione crescente / decrescente, allora a_n ammette sempre limite $l = \lim(a_n)$. Se a_n è superiormente limitata, allora l è finito. Se a_n non è superiormente limitata, allora $\lim(a_n) = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo a_n crescente limitata superiormente, allora a_n converge ad $l \in \mathbb{R} = \lim(a_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ a_m < a_n$. $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n < M$. Consideriamo $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ ammette estremo superiore (ass. compl.) pari a $\lim(a_n)$. Voglio dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ |a_n - \lim(a_n)| < \varepsilon$. Per definizione $\lim(a_n)$ è maggiorante di $\{a_n\}$ quindi $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n < \lim(a_n) = l_{a_n} \cdot \lim(a_n)$. $\lim(a_n) - a_n > \lim(a_n) - \varepsilon < a_n$. Poiché $\lim(a_n)$ è il più grande dei maggioranti, $\lim(a_n) - \varepsilon$ non è un maggiorante. Esiste quindi \bar{n} tale che $\lim(a_n) - \varepsilon < a_{\bar{n}} < \lim(a_n)$. Poiché a_n è crescente, allora $a_{n_0} > a_{\bar{n}} > \lim(a_n) - \varepsilon$. Quindi $\forall n > \bar{n}, a_n > \lim(a_n) - \varepsilon$. Ciò, verifica la tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ a_n > \lim(a_n) - \varepsilon$.

Se prendiamo a_n divergente verso ∞ , allora $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ a_n > M$. Per definizione, $\forall n > n_0 \ a_n > a_{n_0}$.

$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ a_n > M$

NOTA BENE: il teorema non vale per successioni del tipo: inferiormente limitata crescente

TEOREMA: Se una successione converge allora è limitata

DIMOSTRAZIONE: Per Hp: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ |a_n - l| < \varepsilon$. Da Th sarà: $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ a_n < M$. Possiamo scrivere $|a_n|$ come $|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|$. Considero M tale che: $M = \max(\varepsilon + |l|, 1, |l|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|)$, allora $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq M$ quindi a_n è limitata.

Il ricavato non vale.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO: Sia a_n una successione non negativa, convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$.

$/ \ / \ / \ /$ non positiva, $/ \ / \ / \ /$ $l \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE: per Hp: $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0, \lim a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ |a_n - l| < \varepsilon$. Usando le due condizioni, possiamo scrivere che $0 \leq a_n < l + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow l \geq 0$. Se poi avessimo $l < 0$, allora la condizione prima dovrebbe non sarebbe valida $\forall \varepsilon > 0$.

COROLLARIO PERM. SEGNO: Siano $a_n \in b_n$ due successioni convergenti. Se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ a_n \leq b_n$ per non zero

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $c_n = b_n - a_n$, allora $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere che $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = K \geq 0$. Usando l'algebra dei limiti, avremo

$$\text{clue: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m \cdot l > 0 \Rightarrow ml$$

TEOREMA DEL CONFRONTO (successo): Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$. Se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq c_n \leq b_n$, allora b_n converge ad l .

DIMOSTRAZIONE: Hp: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq c_n \leq b_n$; $\forall n \in \mathbb{N}: c_n \rightarrow l$. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0 \quad |c_n - l| < \varepsilon$

Possiamo costruire la seguente diseguaglianza: $|b_n - l| \leq |c_n - l| + |a_n - c_n| \leq \varepsilon + \max(n_0, n) \cdot |a_n - l|$, ma ciò equivale a dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

ALGEBRA DEI LIMITI: Siano a_n e b_n due successioni convergenti tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$. Allora avremo:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = l + m$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = l \cdot m$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ con $m \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = l^m$ con $l > 0$

DIMOSTRAZIONE (SOMMA): da Hp sono sempre le stesse. Da Th secca: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n + b_n - (l + m)| < \varepsilon$.

Possiamo scrivere che: $|a_n + b_n - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \stackrel{\text{hp}}{\leq} |a_n - l| + |b_n - m| \leq 2\varepsilon$

LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 11 OTTOBRE



LEZIONE

SUCCESSIONI

A LGEBRA DEI LIMITI: Date a_n una successione convergente e b_n una divergente. ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty & b_n \rightarrow \infty \\ -\infty & b_n \rightarrow -\infty \\ l \cdot \infty & b_n \rightarrow l \neq 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & a_n \rightarrow 0^+ \\ l \cdot \infty & a_n \rightarrow 0^- \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE (RAP): $H_0: \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |a_n - l| < \varepsilon$, $\forall M > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1 b_n > M$. Th: $H_0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \left| \frac{a_n - l}{b_n} \right| < \varepsilon$. Usiamo la diseguaglianza triangolare: $|a_n - l| < |a_n| + |l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |l| + \varepsilon$. Questo ci dice che a_n converge. Poco neanche $M = \frac{1}{\varepsilon}$, quindi $b_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon(|l| + \varepsilon) \Rightarrow$ quindi ci ha dimostrato $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

FORME INDETERMINATE: Siano a_n e b_n successioni divergenti. Si chiamano forme indeterminata le seguenti: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$.

GESTIONE: metodi algebrici, stabilire l'ordine degli infiniti

↪ ricordandosi alle altre due forme

$$\text{ES. ALG: } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot (-1)) = -\infty$$

$$\text{ORD: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2} - 1} = 0^-$$

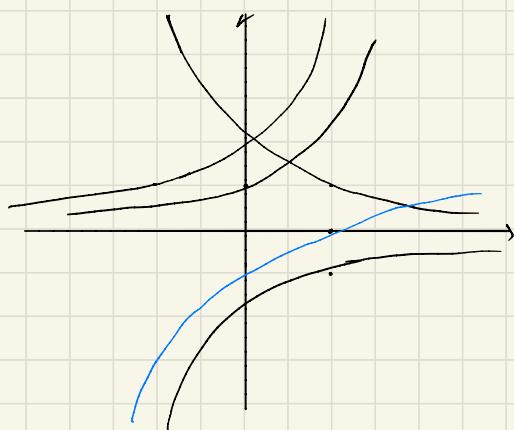
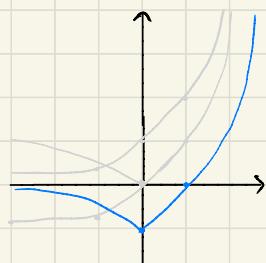
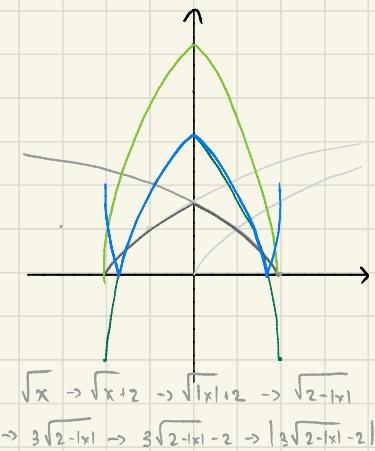
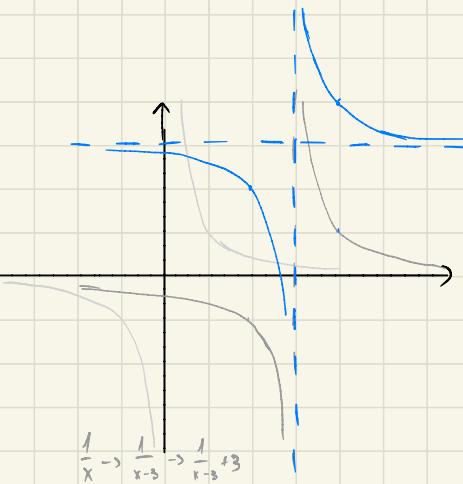
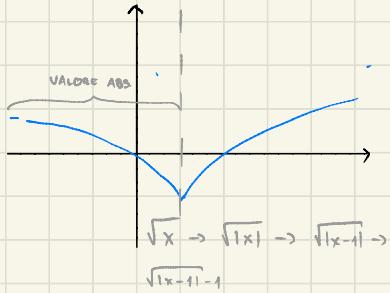
SOSTITUZIONI: le sostituzioni (es.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon$) non hanno senso per le successioni perché $n \rightarrow 0 = \infty$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI: I numeri a ridosso la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$ (log infinito di ordine inf. alla potenza)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0}{(\alpha^x)^x} = 0$ (exp ordine maggiore di polinomia)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^m} = \infty$

ESERCITAZIONE

①



FUNZIONE INVERSA: $f: A \rightarrow B$ f^{-1} è una funzione tale che $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_B \\ f^{-1} \circ f = id_A \end{cases}$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2 - 3x \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{x-2}{3}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = x^3 + 3x - 2 \rightarrow \text{monotona crescente} \rightarrow \text{invertibile} \rightarrow f^{-1}(x) = ?$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 2x \rightarrow \text{non invertibile su } \mathbb{R}$$

invertibile se $D = [1, +\infty)$, $C = [-1, +\infty)$ $\rightarrow f^{-1}(x) = \text{Homework}$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{x}{x-3} \quad f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \text{invertibile} \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x}{1-x}$$

LIMITI DI SUCCESSIONI

$$\textcircled{6} \quad a_n = n^3 \cdot \sin \frac{1}{n^4} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \sin \frac{1}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{\sin \left(\frac{1}{n^4} \right)}{\frac{1}{n^4}} = 0 \quad \text{Homework: dimo. con definizione (Vero)} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad \left| n^3 \sin \frac{1}{n^4} \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & \left| n^3 \sin \frac{1}{n^4} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} < \varepsilon \quad \frac{1}{n^4} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow \sin \left(\frac{1}{n^4} \right) < \frac{1}{n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \\ & \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq n^3 \frac{1}{n^4} \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$