# Prodotti Scalari (Definizione 8.1)

$V$ spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare è un'operazione

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{tale che:}$$
$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \longmapsto \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$

i) $\langle t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2, \underline{v} \rangle = t_1 \langle \underline{v}_1, \underline{v} \rangle + t_2 \langle \underline{v}_2, \underline{v} \rangle$; lineare

ii) $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_1 \rangle$; simmetrica

iii) $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$ ed è esattamente $0$ sse $\underline{v} = \underline{0}$. definita positiva

# Spazi Vettoriali Euclidei (Definizione 8.2)

$(V, \langle\,,\,\rangle)$ si dice spazio vettoriale euclideo.

# Norma di un Vettore (Definizione 8.3)

La norma indotta dal prodotto scalare è la funzione

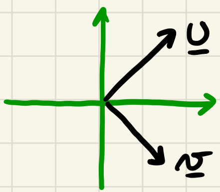
$$\|\ \| : V \to \mathbb{R}$$
$$\underline{v} \longmapsto \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} .$$

← ben definita per iii)

# Prodotti Scalari Canonici (Esempio 8.4)

- $\underline{u}=(u_1,\dots,u_n)$, $\underline{v}=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n \Rightarrow$ il prodotto e la norma euclidei sono

$$\langle \underline{u},\underline{v}\rangle_E = u_1v_1+\dots+u_nv_n \quad , \quad \|\underline{v}\|_E=\sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}\,.$$




$\underline{u}=(1,1)$, $\underline{v}=(1,-1) \Rightarrow$

$\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = 1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$, $\|\underline{u}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\|\underline{v}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

i) $$\langle \alpha\underline{u}+\beta\underline{v},\underline{w}\rangle_E = \sum_{i=1}^n(\alpha u_i+\beta v_i)w_i = \alpha\cdot\sum_{i=1}^n u_iw_i+\beta\cdot\sum_{i=1}^n v_iw_i =$$
$$= \alpha\langle \underline{u},\underline{w}\rangle_E+\beta\langle \underline{v},\underline{w}\rangle_E$$

ii) $$\langle \underline{u},\underline{v}\rangle_E = \sum_{i=1}^n u_iv_i = \sum_{i=1}^n v_iu_i = \langle \underline{v},\underline{u}\rangle_E$$

iii) $\langle \underline{v},\underline{v}\rangle_E = \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq 0$ ed è $0$ sse $\underline{v}=\underline{0}$ $(v_i\in\mathbb{R})$

- $A,B\in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R}) \Rightarrow$ il prodotto e la norma di Frobenius sono

$$\langle A,B\rangle_F = \mathrm{tr}(A^TB)=\sum_{i=1}^n(A^TB)_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(A^T)_{ij}B_{ji}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ji}b_{ji}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{bmatrix} \right\rangle_F = a\cdot 0 + b\cdot e + b\cdot(-e) + c\cdot 0 = be - be = 0$$

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

- $I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow L_2(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid \int_I f(x)^2 dx$ esiste finito $\}$

$$\langle f, g \rangle_I = \int_I f(x) g(x)\, dx \quad , \quad \|f\|_I = \sqrt{\int_I f(x)^2 dx} .$$

$P(x) = 1 + x \qquad Q(x) = x \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow$

$$\langle P, Q \rangle_{[0,1]} = \int_0^1 (1+x)\,x\; dx = \int_0^1 x + x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\|Q\|^2_{[0,1]} = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \|Q\|_{[0,1]} = 1/\sqrt{3}$$

ESEMPIO 8.5 (esercizio)

$X, Y \in V = Mat(n, 1; \mathbb{R})$, $G \in S(n; \mathbb{R}) \Rightarrow \langle X, Y \rangle_G = X^T G Y$

Se gli autovalori di $G$ sono strettamente positivi $\Rightarrow \langle , \rangle_G$ è un prodotto scalare

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_G = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_G} = \sqrt{[1\ 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{[1\ 1]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{5} \neq \sqrt{2}$$

# Proprietà Elementari Prodotto Scalare (Proposizione 8.6)

i) $\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i , \sum_{i=1}^{m} \beta_i \underline{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \langle \underline{v}_i , \underline{v}_j \rangle$; bilinearità

ii) $\langle \underline{v} , \underline{w} \rangle = 0$ per ogni $\underline{w}$ sse $\underline{v} = \underline{0}$; non degenere

iii) $\| \underline{w} \| = 0$ sse $\underline{w} = \underline{0}$; legge di annullamento

iv) $\| t \cdot \underline{w} \| = |t| \cdot \| \underline{w} \|$. omogeneità

# Polarizzazione e Carnot (Proposizione 8.7)

i) $\| \underline{v} + \underline{w} \|^2 = \| \underline{v} \|^2 + \| \underline{w} \|^2 + 2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$; → FORMULA DI CARNOT

ii) $\langle \underline{v} , \underline{w} \rangle = \dfrac{\| \underline{v} + \underline{w} \|^2 - \| \underline{v} \|^2 - \| \underline{w} \|^2}{2}$. → FORMULA DI POLARIZZAZIONE

→ EQUIVALENTI

DIM: $\| \underline{v} + \underline{w} \|^2 = \langle \underline{v} + \underline{w} , \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{v} , \underline{v} \rangle + \langle \underline{w} , \underline{w} \rangle + \langle \underline{v} , \underline{w} \rangle + \langle \underline{w} , \underline{v} \rangle = \| \underline{v} \|^2 + \| \underline{w} \|^2 + 2 \langle \underline{v} , \underline{w} \rangle$ ▨

OSS: dalla formula di polarizzazione si può ricavare il prodotto scalare dalle norme.

## Matrice di Gram (Definizione 8.10)

$V$ s.v.e., $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \subseteq V$. La matrice di Gram di $U$ è

$$G|_U = [\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle] = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{u}_m, \underline{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{u}_m, \underline{u}_m \rangle \end{bmatrix} \in Mat(m, m; \mathbb{R}).$$

Il gramiano di $U$ è $\det(G|_U) = G(U) = G(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m)$.

## Esempio 8.11

- $\mathbb{R}^n$, $B_n = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, prodotto euclideo $\Rightarrow$

$$G|_{B_n} = \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{e}_1, \underline{e}_n \rangle \\ \vdots & & \\ \langle \underline{e}_n, \underline{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \underline{e}_n, \underline{e}_n \rangle \end{bmatrix} = I_n \qquad G(B_n) = 1$$

- $\mathbb{R}[x]_n$, $B_n = \{1, \dots, x^n\}$, prodotto $L_2$ su $I = [0,1]$ $\Rightarrow$

$$G|_{B_n} = [\langle x^i, x^j \rangle_I] = \left[\int_0^1 x^{i+j}\, dx\right] = \left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_0^1\right] = \left[\frac{1}{i+j+1}\right]$$

$$G|_{B_2} = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_I & \langle 1, x \rangle_I & \langle 1, x^2 \rangle_I \\ \langle x, 1 \rangle_I & \langle x, x \rangle_I & \langle x, x^2 \rangle_I \\ \langle 1, x \rangle_I & \langle x^2, x \rangle_I & \langle x^2, x^2 \rangle_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

- Il prodotto scalare è determinato da $G_{|\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ base
- $G(U)$ fornisce importanti informazioni sull' indipendenza di $U$

RAPPRESENTAZIONE DEI PRODOTTI SCALARI (PROPOSIZIONE 8.12)

$V$ s.v.e. f. g. $\quad \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

i) l' unica matrice $A$ t.c. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}_{|\mathcal{B}}^T A \underline{w}_{|\mathcal{B}}$ è $A = G_{|\mathcal{B}}$;

ii) $G_{|\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^T \, G_{|\mathcal{B}} \, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx = P_{|\mathcal{B}_2}^T \, G_{|\mathcal{B}_2} \, Q_{|\mathcal{B}_2} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 + b_1/2 + b_2/3 \\ b_0/2 + b_1/3 + b_2/4 \\ b_0/3 + b_1/4 + b_2/5 \end{bmatrix} =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1}{2} + \frac{a_0 b_2}{3} + \frac{a_1 b_1}{2} + \frac{a_1 b_1}{3} + \frac{a_1 b_2}{4} + \frac{a_2 b_0}{3} + \frac{a_2 b_1}{4} + \frac{a_2 b_2}{5}$$

# Verifica di Indipendenza Lineare (Proposizione 8.14)

$V$ s.v.e., $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \subseteq V$. $G(U) \neq 0$ sse $U$ è l.i.

$U = \{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(1,0,-1,0)\} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\} \Rightarrow$

$$G(U) = \begin{vmatrix} \langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_3 \rangle_E \\ \langle \underline{u}_2, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_2, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle_E \\ \langle \underline{u}_3, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_3, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_3, \underline{u}_3 \rangle_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow U \text{ è l.d.}$$

Infatti $\underline{u}_3 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$.

OSS: la verifica non dipende dal prodotto scalare scelto.

# ORTOGONALITÀ (7.3)

## DEFINIZIONI 8.8 - 8.16

$V$ spazio vettoriale euclideo.

- $\underline{v}$ è un versore se $\|\underline{v}\| = 1$;
- $\tilde{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ è detto normalizzazione di $\underline{v}$; $\|\tilde{\underline{v}}\| = 1 \rightarrow$ VERSORE
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ si dicono ortogonali $(\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2)$ se $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0$;

$U \subseteq V$ si dice:
- normalizzato se è composto da versori;
- ortogonale se è composto da vettori ortogonali;
- ortonormale se è composto da versori ortogonali.

$V = \mathbb{R}^4$ $\quad \underline{v} = (1, 0, 1, 0)$ $\quad \underline{w}_a = (a, a, a, 1)$

$\|\underline{v}\|_E = \sqrt{2}$, $\|\underline{w}_a\|_E = \sqrt{3a^2+1}$, $\langle \underline{v}, \underline{w}_a \rangle_E = 2a \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w}_a$ sse $a=0$

$\{\underline{v}, \underline{w}_0\}$ è ortogonale. $\tilde{\underline{v}} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0) \Rightarrow \{\tilde{\underline{v}}, \underline{w}_0\}$ è ortonormale

OSS.: . $U$ normalizzato sse $(G_{|U})_{ii} = 1$;

. $U$ ortogonale sse $G_{|U} \in \mathbb{D}(n;\mathbb{K})$;

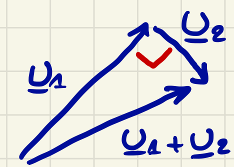
. $U$ ortonormale sse $G_{|U} = I_n$.

## Teorema di Pitagora (Proposizione 8.18)

$U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ ortogonale $\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\underline{u}_i\|^2$.

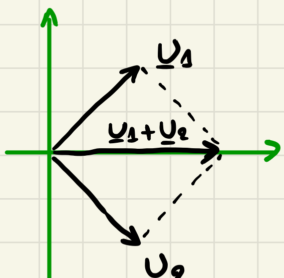
DIM: $n = 2 \Rightarrow \|\underline{u}_1 + \underline{u}_2\|^2 = \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2 + 2\cancel{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle}$

$= \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2$




$\blacksquare$

$V = \mathbb{R}^2$




$\underline{u}_1 = (1, 1)$, $\underline{u}_2 = (1, -1) \Rightarrow \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = 0$ cioè $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$

$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (2, 0) \Rightarrow$

$\|\underline{u}_1 + \underline{u}_2\|_E^2 = 4 = \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2 = 2 + 2$