. . .

7.3 MASSA INERZIALE VS. GRAVITAZIONALE

Ridondamente la forza grav. avrebbe questa formula:

$$m_i g = \frac{\gamma m_T m_g}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad \frac{m_i}{m_g} = \gamma \frac{m_T}{g R_T^2}$$

Sperimentalmente si è osservato che non c'è differenza tra le due masse ed esse sono equivalenti.

7.4 ORBITE DEI PIANETI

La forza gravitazionale è centrale quindi è conservativa e il suo momento angolare è costante. Questo implica che:

1) poiché $\vec{L}$ ha direzione costante, le orbite sono piane
2) poiché il verso è costante, il senso di rotazione non può essere modificato
3) il modulo costante ci permette di scrivere (in sistema polare):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m r \hat{u}_r \times \left(\cancel{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right) = m r^2 \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n \rightarrow |\vec{L}| = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{cost}$$

Studiando le orbite dal punto energetico possiamo dire che dato $E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r}$

1) $E_M > 0 \rightarrow$ l'orbita è aperta (il corpo ha abbastanza energia per andare all'infinito)
2) $E_M < 0 \rightarrow$ l'orbita è chiusa (l'orbita non può arrivare all'infinito perché $E_C > 0$ e $E_P < 0$ sempre)

La velocità di fuga si può calcolare facendo:

$$E_M^A = E_M^B \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \gamma\frac{M_T \cancel{m}}{R_T} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \gamma\frac{M_T \cancel{m}}{r}$$

$r \rightarrow \infty$

$$\hookrightarrow \quad v_0^2 = v^2 + \frac{2\gamma M_T}{R_T} \quad \longrightarrow \quad \underset{\text{(cond. limite)}}{v = 0} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R_T}}$$

7.5 ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

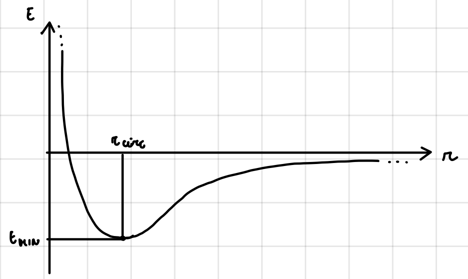
Assumiamo la Terra in orbita:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\underbrace{\left|\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right|^2}_{\text{velocità in coordinate polari}} - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma\frac{Mm}{r} =$$

$\hookrightarrow L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{Mm}{r}}_{\text{POTENZIALE EFFICACE}}$$

Riduciamo così il problema ad un problema unidimensionale (tutto è una funzione di r). Plottando il potenziale efficace otterremo il seguente grafico:



Si può dimostrare che:

- se $E_M > 0$ l'orbita è un'iperbole
- se $E_M = 0$ l'orbita è una parabola
- se $E_{MIN} < E_M < 0$ l'orbita è ellissoidale
- se $E_M = E_{MIN}$ l'orbita è circolare

Per trovare r_{circ} basta calcolare il minimo dell'energia potenziale efficace: $r_{circ} = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$

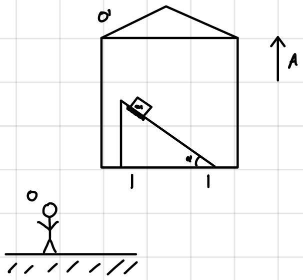
Sostituendo questa formula in quella dell'energia meccanica, si trova che l'energia totale in moto circolare è pari a:

$$E_{CIR} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma M m}{r_{circ}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{L^2}{r_{circ}\, m^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{m}}{r_{circ}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{(\cancel{r_{circ}}\, \cancel{m} v)^2}{\cancel{m}\, \cancel{r_{circ}^2}} = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

$\uparrow \gamma M = \frac{L^2}{r_{circ}\, m^2}$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2



$$O \quad \begin{cases} N \sin\alpha - F_{attr} \cos\alpha = 0 \\ N \cos\alpha - F_{attr} \sin\alpha - mg = m \cdot A \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = F_{attr} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ F_{attr} \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + F_{attr} \sin\alpha - mg = mA \end{cases}$$

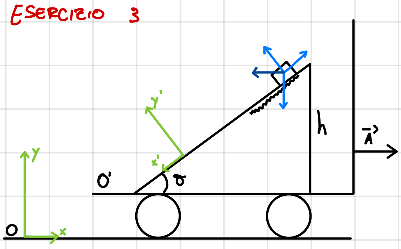
$$\downarrow$$

$$F_{attr} \left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \right) = m(A+g)$$

$$F_{attr} = m(A+g) \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F_{attr} \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$O' \quad \begin{cases} N \sin\alpha - F_{attr} \cos\alpha = 0 \\ N \cos\alpha + F_{attr} \sin\alpha - mg - \underbrace{mA}_{\vec{F}_{APP}} = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3



A_{MAX} affinché stii fermo?

T per $A > A_{MAX}$?

$$\vec{F}'_{TOT} = m \cdot \vec{a}' \qquad \vec{a}' = 0$$
$$= m(\vec{a} - \vec{a}_{OO'}) \qquad \vec{a}_{OO'} = \vec{A}$$
$$= m\vec{a} - m\vec{A}$$

STATICO:

$$O' \quad \begin{cases} mg \sin\theta + mA \cos\theta - F_{attr} = 0 \\ N - mg\cos\theta + mA \sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{attr} = m(g \sin\theta + A\cos\theta) \\ N = m(g \cos\theta - A \sin\theta) \end{cases} \longrightarrow F_{attr} \leq \mu_s N$$

$$F_{ATTR} \leq \mu_s N \rightarrow \dots \rightarrow A(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) \leq \mu_s g \cos\theta - g \sin\theta \rightarrow A \leq \frac{g(\mu_s \cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

DINAMICO $(A > A_{MAX})$:

$$O' \quad \begin{cases} mg \sin\theta + mA\cos\theta - \mu_D N = m\, a_{x'} \\ N - mg\cos\theta + mA \sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{m} a'_x = \cancel{m}(g \sin\theta + A\cos\theta) - \mu_D \cancel{m}(g\cos\theta - A\sin\theta) \\ N = m(g\cos\theta - A\sin\theta) \end{cases} \rightarrow a'_x = (g \sin\theta + A\cos\theta) - \mu_D (g\cos\theta - A\sin\theta)$$

$$L = \frac{h}{\sin\theta} \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2} a_{x'} t^2 = L \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\sin\theta \cdot a_{x'}}}$$