LEZIONE DI ANALISI DEL 8 OTTOBRE

FUNZIONI:

Funzione inversa: con l'ipotesi che f sia iniettiva, è possibile definire f^{-1} tale che: $f^{-1}: Im(f) \to D_f$, $y \mapsto x$

$|\forall y \in Im(f)\ \exists!\, x \in D_f : f(x) = y \Rightarrow$ rende f^{-1} una funzione$|$

La funzione inversa non per forza è definita in tutto il dominio di f: es. log, arcsin...

N.B. Il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del grafico della funzione normale.

SUCCESSIONI:

DEFINIZIONE: è una serie ordinata di numeri. Una funzione del tipo: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ è detta successione. Per indicare tutti gli elementi della successione si usa $\{a_n\}$

SUCCESSIONE POSITIVA: una successione è positiva se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$

si dice definitivamente positiva se $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0\ \ a_n \geq 0$

" NEGATIVA: una successione è negativa se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq 0$

si dice definitivamente negativa se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \leq 0$

" LIMITATA: una successione si dice limitata superiormente se $\exists \sup(\{a_n\})$

una successione si dice limitata inferiormente se $\exists \inf(\{a_n\})$

" CRESCENTE: una successione si dice crescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow >$)

una successione si dice definitivamente crescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow >$)

" DECRESCENTE: una successione si dice decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow <$)

una successione si dice definitivamente decrescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow <$)

CARATTERE DI UNA SUCC.

SUCCESSIONE CONVERGENTE: una successione si dice convergente se $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$

ESEMPIO: $a_n = \frac{n-1}{n}$ con $n \neq 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Per dimostrarlo uso la definizione: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \to \left|\frac{\cancel{n} - 1 - \cancel{n}}{n}\right| < \varepsilon \to \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$

Scelgo $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ poiché $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, il limite è verificato

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE (SUCCESSIONI): Sia a_n una funzione convergente a $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$, allora l è unico.

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, supponiamo esistano due limiti che convergono a $m \neq l$: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = m$. Ciò significa che $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - m| < \varepsilon$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n_0 \geq n\ |a_n - l| < \varepsilon$.

Posso allora scrivere: $|l - m| = |l - a_n + a_n - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)| \underset{\text{dis. triang}}{\leq} |l - a_n| + |a_n - m| \underset{\forall n \geq \max(n_1, n_2)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |l - m| \leq 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, ma ciò è vero solo per $m = l \Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ il limite di una successione convergente è unico (se finito)

SUCCESSIONI DIVERGENTI: Una successione a_n è divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n \geq M$

a $-\infty$ $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n < -M$

SUCCESSIONI IRREGOLARI: Una successione a_n è irregolare se non è né convergente né divergente