

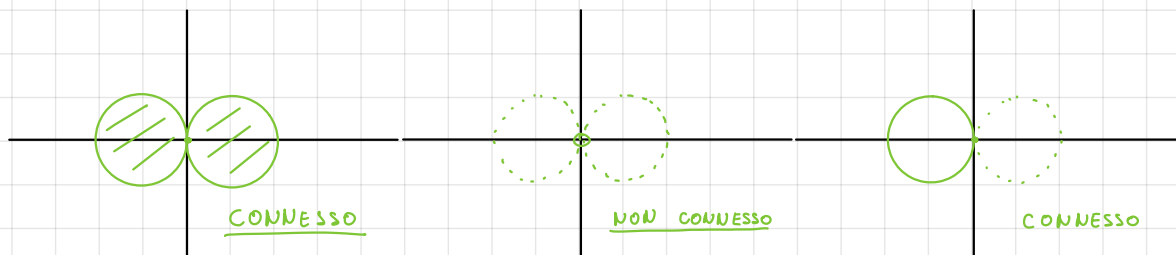
14/09/20

1) Verifica se sono convessi:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \vee (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 < 1 \vee (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$



Nota bene: unione degli insiemi è convessa.

2) Dato $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (2 - \frac{1}{n})^2\}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

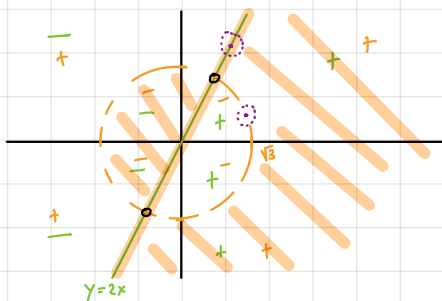
Ogni C_n è una circonferenza con raggio crescente $R \rightarrow 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ non è uguale a $C_{\infty} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anche chiusa.

Proprietà ereditabili come:

- 1) Unione infinita aperta è aperta
- 2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

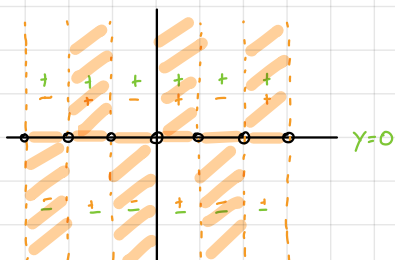
3) Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x, y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso ($\partial D \not\subset D$), illimitato, scomposto per archi
- $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y - 4}} \Rightarrow x^2 + 2y > 4 \rightarrow$ fuori dall'ellisse di semiasse $a=2, b=\sqrt{2} \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso, illimitato, scomposto per archi.
- $f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{2x-y}{x^2+y^2-3}} \Rightarrow \begin{matrix} N: 2x-y \geq 0 \rightarrow N: y \leq 2x \\ D: x^2+y^2-3 > 0 \rightarrow D: x^2+y^2 > 3 \end{matrix}$



L'insieme non è aperto ($\exists \partial D \subset D$), non è chiuso ($\exists \partial D \not\subset D$), illimitato, scomposto per archi

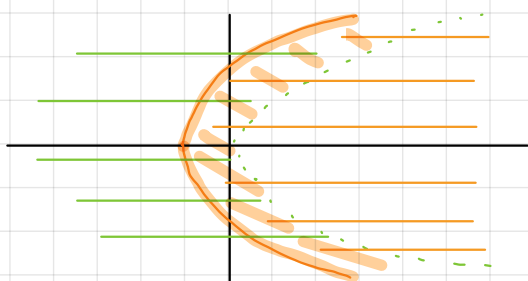
- $f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{matrix} N: y \geq 0 \\ D: \sin x > 0 \rightarrow 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{matrix}$



Né aperto né chiuso, illimitato, scomposto per archi

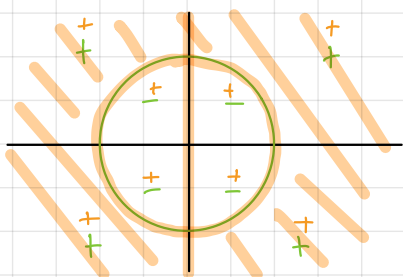
04/19

$$f(x,y) = \sqrt{-\ln(y^2-x)} \Rightarrow \begin{cases} -\ln(y^2-x) \geq 0 \rightarrow \ln(y^2-x) \leq \ln 1 \rightarrow y^2-x \leq 1 \rightarrow x \geq y^2-1 \\ x < y^2 \end{cases}$$



Non aperto né chiuso, illimitato, connesso

$$f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)} \Rightarrow \begin{cases} F_1: |x| \geq 0 \\ F_2: x^2+y^2-4 \geq 0 \end{cases}$$



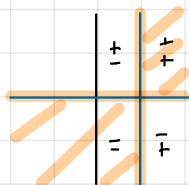
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \sqrt{xy-y} + 1$$

$$D: xy-y \geq 0 \rightarrow y(x-1) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Domainio chiuso, non aperto e connesso per archi

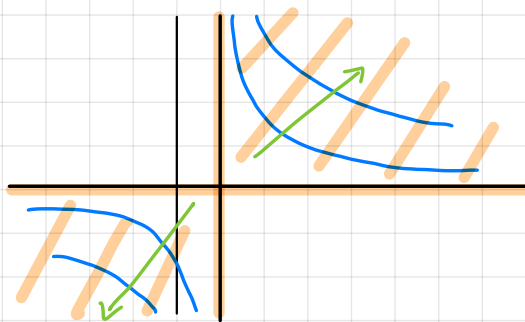
0 ± sempre positiva senza zeri in D

$$\text{LIVELLI } \sqrt{xy-y} + 1 = c \quad x \quad c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$x \quad c < 1 \quad E_c = \emptyset$$

$$x \quad c \geq 1 \rightarrow xy-y = (c-1)^2 \Rightarrow y = \frac{(c-1)^2}{x-1} \text{ per } x \neq 1$$

$$x=1 \Leftrightarrow c=1 \rightarrow y(x-1)=0$$



$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D: x^2+y^2 > 0 \quad (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Domainio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

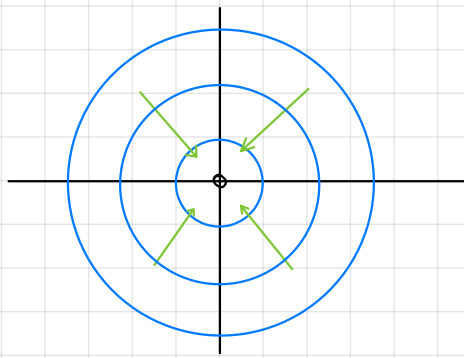
± funzione sempre positiva

0 non ci sono zeri

$$\text{LIVELLI } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$$

$$c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$c > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c^2 \rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{c^2}$$



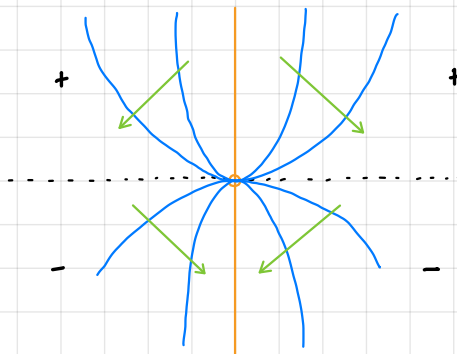
• $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$

D $D = \mathbb{R} \setminus \{y=0\}$ Dominio aperto, non chiuso, illimitato, non connesso per archi

0 $e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = 0 \quad x=0$

\pm $e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \rightarrow \frac{x^2}{y} > 0 \quad y > 0$

LIVELLI $e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \quad c \leq -1 \quad E_c = \emptyset$
 $c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{se } c=0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



2) Trova gli zeri di $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4 \quad (D = \mathbb{R})$

$y^2 = 8x^2 - x^4 \rightarrow y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$; studio $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$; l'altra è simmetrica

$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ PARI, $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y=0$ se $x=0, x=\pm\sqrt{8}$

$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \geq 0 \Leftrightarrow 4x(4 - x^2) \geq 0$
 $\begin{array}{c} -\sqrt{8} \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad \sqrt{8} \\ \hline \end{array}$

