14/09

FUNZIONI IN PIU VARIABILI

Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\| \bar{x} - \bar{x}_0 \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0, \varepsilon) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < \varepsilon \}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$ è limitato se $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2, \rho > 0 : A \subseteq B(x_0, \rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$.
Bisogna ora definire quando un insieme è connesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\underline{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$r(t) \mapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I$$

Possiamo ora dire un insieme connesso come:

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r} : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = x$ e $\bar{r}(b) = y$, $r(t) \subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.