Limiti Notevoli

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ $\Rightarrow$ vedi 29.10.19 $\to$ T. confronto

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{2\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(y)}{y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}$ per 1

$y = \frac{x}{2}$

Limite destro/sinistro

ES.: $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ $\to \operatorname{sgn}(x)$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ con $g: (0;+\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0} h(x) = -1$ con $h: (-\infty; 0) \to \mathbb{R}$

$\to$ posso definire il limite solo intersecando un insieme non circolare } limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per A, allora:

- f ha limite destro se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0; x_0+\delta) \cap A\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
- f ha limite sinistro se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0) \cap A\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

Relazione limite - limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se esistono limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e sono uguali

DIM: per $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\quad I(x) = (x_0-\delta; x_0+\delta) = (x-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta) \Rightarrow$ il limite esiste se i due limiti esistono.

L'unione delle definizioni sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{\delta} = \min(\delta; \bar{\delta}): \forall x \in I(x-\bar{\delta}; x+\bar{\delta})\ \ |f(x) - l| = \varepsilon \Rightarrow$ i due limiti devono essere uguali

Limite infinito

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ se:

$\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\ \ |f(x)| > M$

ES.: - $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ per teorema ponte $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$

Verifichiamo con la definizione: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\ f(x) < -M$ $\quad \frac{1}{x} - M < 0$ $\quad \frac{1 - Mx}{x} < 0$ $\quad Mx + 1 > 0$ $\quad x > -\frac{1}{M} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{M}$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \forall M > 0\ \exists \bar{\delta} > 0: \forall x \in (x_0 - \bar{\delta}; x_0 + \bar{\delta})\ f(x) > M$ $\quad x < \frac{1}{M}$ $\quad \bar{\delta} = \frac{1}{M}$
- $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ perché limite destro e sinistro esistono ma non coincidono

Limite finito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0: \forall x > K\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$

$(\forall x < -K)$

Limite infinito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x) = \pm\infty$

$\forall M > 0\ \exists K > 0\ \ \forall x > K\ \ |f(x)| > M$

$(\forall x < -K)$

Esercizi

1) $z^6 - z^3 + 1 = 0$ $\qquad (z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$ $\qquad z^3_{1,2} = \frac{+1 + \sqrt{3}i}{2}$ $\qquad z^3_1 = \frac{+1+\sqrt{3}i}{2}$ $\qquad z^3_2 = \frac{+1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1+\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n}\right) = \ldots$$

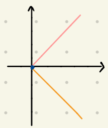
$$\left.\begin{matrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1-\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{5}{3}\pi+2K\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{5/3\pi+2K\pi}{n} + i\sin\frac{5/3\pi-2K\pi}{n}\right) = \ldots$$

2) $z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}\, z|z|$ $\qquad \boxed{z=0}$ $\qquad z=0$

$$\frac{z^2}{|z|^2} + 1 - \frac{\sqrt{2}\, z}{|z|} = 0 \qquad \frac{z}{|z|} = t \implies t^2 - \sqrt{2}\, t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \implies z = |z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \implies z = |z|\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$



3) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n! + (2n)!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n^n} + \frac{(2n)!}{n^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n} = [\text{crit. rapp.}] = +\infty$$