$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_K e^{iKx} \quad \text{con} \quad \gamma_K = \begin{cases} \frac{a_K - ib_K}{2} & K>0 \\ \frac{a_K + ib_K}{2} & K<0 \end{cases}$$

Per calcolare direttamente i coefficienti prendiamo $\{e^{iKx}\}$ come sistema fondamentale e usiamo:

$$\gamma_K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-iKx} dx$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Si definiscono equazioni differenziali ordinarie equazioni in cui come incognita abbiamo una funzione $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e l'equazione contiene almeno una derivata di y. Questa derivata deve essere rispetto a una sola variabile per rendere l'equazione ordinaria. Se ciò non accade avremo equazioni differenziali parziali.

Esempi:

$$y' = Ky \quad ; \quad y'' = Ky' + hy + c \quad ; \quad e^{y'+y''} = (y^2 + \sin t) y'$$

In tutti gli esempi l'equazione può essere riscritta come $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$. In questa forma l'equazione è in forma normale. Non sempre questa scrittura è possibile: $e^{y'+y''} - 7y' + \log(y'')^2 - 3t = 0$ non può essere scritta in forma normale. Noi considereremo solo equazioni scrivibili in forma normale.

Viene detto ordine dell'equazione differenziale il massimo ordine della derivata nell'equazione.

Sia $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{n-1})$ con $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'equazione differenziale ordinaria in forma normale diciamo che $\varphi: I \to \mathbb{R}$ è soluzione su I se

- $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$
- $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t) \quad \forall t \in I$

Diciamo che l'equazione differenziale è lineare se se varie derivate sono legate da f lineare. Se f non dipende da t, l'equazione differenziale è autonoma.

Equazione differenziale scalare del I° ordine

Ha la seguente forma:

$$y' = f(t, y)$$

TEOREMA (di Peano) Data $y' = f(t,y)$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ allora $y' = f(t,y)$ ammette soluzioni

Quante sono le soluzioni possibili? Infinite a meno di una costante. Perciò definiamo

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \to \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Problema di Cauchy. Esso ci permette di isolare solo una di queste soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni è detto integrale generale. Tutte le soluzioni ottenute particolarizzando il valore della costante viene detto soluzione o integrale particolare:

$$\begin{cases} y' = \alpha y \to \text{Integrale generale: } \varphi(t) = K e^{\alpha t} \\ y(t_0) = y_0 \to \text{Integrale particolare: } \tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)} \end{cases}$$

Dato il problema di Cauchy $\{ y' = f(t,y) ; \ y(t_0) = y_0 \}$ enunciamo

TEOREMA (di Peano) Sia $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$ $\exists \delta > 0$, $\exists \varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ soluzione su $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ del problema di Cauchy.

Il teorema di Peano ci assicura l'esistenza, ma per quanto riguarda l'unicità?

TEOREMA (di esistenza e dell'unicità locale della sol.) Sia $\{ y' = f(t,y) ; \ y(t_0) = y_0 \}$, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(\Omega)$, allora $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$ $\exists \delta > 0$, $\exists! \varphi \in \mathcal{C}^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che φ è soluzione del problema di Cauchy su $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Hanno forma:

$$\begin{cases} y' = f(t) g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}(J)$, per il teorema di esistenza e unicità locale esiste unica la soluzione. Possono verificarsi 2 casi:

- se $\exists \bar{y} : g(\bar{y}) = 0$ allora $\varphi(t) = \bar{y}$ è soluzione costante e viene chiamata integrale singolare
- se $g(\bar{y}) \neq 0$ allora posso fare:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \to \frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt \to G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt = F(t) + K$$

La funzione $G(y)$ ci da la soluzione implicitamente ossia φ è soluzione su I se $G(\varphi(t)) = F(t) + K$ $\forall t \in I$. Eseguendo i calcoli si trova che:

integrale generale: $\varphi(t) = K e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(t) dt$
particolare: $\tilde{\varphi}(t) = K e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$

Equazioni differenziali lineari ordinarie

Un'equazione differenziale lineare ha forma:

$$Ly = f(t)$$

con L un operatore lineare, ossia:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) y' + a_n(t) y$$

Se $f(t) = 0$, allora l'equazione è detta lineare omogenea, altrimenti completa.

Per le equazioni lineari vale l'importantissimo principio di sovrapposizione: (enunciato e dimostrato al II ordine)

TEOREMA (principio di sovrapp.) Se y_1 è soluzione di $a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = f_1(t)$ e y_2 è soluzione di $a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = f_2(t)$ allora $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ è soluzione di $a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$

DIMOSTRAZIONE Grazie alla linearità di L, in generale possiamo fare:

$$(Ly_1 = f_1) \cdot C_1 + (Ly_2 = f_2) \cdot C_2 \to C_1 L y_1 + C_2 L y_2 = C_1 f_1 + C_2 f_2$$
$$\to L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 f_1 + C_2 f_2$$
$$\to L(y) = C_1 f_1 + C_2 f_2$$

Il teorema di sovrapposizione ha delle importanti conseguenze:

1) se φ_1 e φ_2 sono soluzioni dell'equazione lineare omogenea, allora anche $C_1 y_1 + C_2 y_2$ lo è ossia l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n

2) se ψ_1 e ψ_2 sono soluzioni dell'equazione completa, allora $y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea associata

TEOREMA DI STRUTTURA

Definiamo:

$$\Phi = \{ \varphi \in C^1(I) : L\varphi = 0 \}$$ spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea

$$\Psi = \{ \psi \in C^1(I) : L\psi = 0 \}$$ " " " " della completa

Possiamo affermare che: se $\psi_0 \in \Psi$ e $\varphi \in \Phi$, allora $\varphi + \psi_0 \in \Psi$ e quindi $\Psi = \Phi + \psi_0$.

PROPOSIZIONE Data $Ly = f(t)$, se $a_1, a_2, \dots, a_n, f \in C(I)$, allora $\exists$ soluzioni di $Ly = f(t)$ $\varphi(\psi) \in C^n(I)$.

Equazioni differenziali lineari del I° ordine

Hanno forma $y' + a(t)y = f(t)$. Il relativo problema di Cauchy avrà forma:

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In forma normale, l'equazione lineare di I ordine diventa:

$$y' = F(t,y) \quad ; \quad F(t,y) = -a(t)y + f(t)$$

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità sono soddisfatte se $a, f \in C(I)$ $\forall x_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione lineare omogenea di I ordine è a variabili separabili e quindi ha soluzione $\varphi(t) = c\, e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a(t)\,dt$. La soluzione del problema di Cauchy relativo sarà: $\tilde{\varphi}(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Se riesco a trovare ψ_0 soluzione dell'equazione completa, allora posso usare le conseguenze del principio di sovrapposizione per scrivere l'integrale generale. Per cercare ψ_0 usiamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

1) cerco $\psi_0(t) = c(t)\, e^{-\int a(t)dt}$

2) sostituisco $\psi_0(t)$ nell'espressione dell'equazione:

$$c'(t)e^{-A(t)} - \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} = f(t) \rightarrow c'(t)e^{-A(t)} = f(t) \rightarrow c'(t) = f(t)e^{A(t)}$$
$$\rightarrow c(t) = \int f(t)e^{A(t)}dt$$

albiamo così trovato l'espressione di una soluzione particolare $\psi_0 = e^{-A(t)} \int f(t) e^{A(t)} dt$

3) l'integrale generale sarà: $\psi(t) = e^{-A(t)}\left(c + \int f(t)e^{A(t)}dt\right)$

Applicando all'integrale generale il problema di Cauchy otteniamo che la soluzione diventa:

$$\bar{\psi}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} a(z)dz}d\tau\right)$$

Equazioni differenziali lineari del 2° ordine

Il problema di Cauchy relativo ha forma:

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Per scrivere l'integrale generale, come nel caso del primo ordine, avremo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e quello particolare della completa. Ciò però non è così facile.

Equazioni differenziali omogenee del 2° ordine a coefficienti costanti

Consideriamo la generica equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $ay'' + by' + cy = 0$. Le soluzioni avranno forma $y = e^{\lambda t}$. Sostituendo y nella nostra equazione otteniamo:

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \cancel{e^{\lambda t}}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall t$$

$$\rightarrow \underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}_{\text{polinomio caratteristico associato all'equazione}}$$

Abbiamo così ricondotto la ricerca di soluzioni a un'equazione lineare omogenea alla ricerca di radici del polinomio caratteristico, ovvero alla risoluzione della cosiddetta equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$.
La natura delle radici dipende dal discriminante del polinomio caratteristico:

- $\Delta > 0$: il polinomio ammette 2 radici reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = e^{\lambda_2 t} \end{matrix}\right\} \text{linearmente indipendenti} \Longrightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Grazie al teorema di struttura possiamo allora scrivere l'integrale generale.

- $\Delta < 0$: il polinomio ammette 2 radici complesse coniugate:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + j\beta \rightarrow y_1 = e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + j \sin(\beta t)]$$
$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - j\beta \qquad y_2 = e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - j \sin(\beta t)]$$

Costruiamo due soluzioni reali alla nostra equazione:

$$\left.\begin{matrix} u_1(t) = \dfrac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ u_2(t) = \dfrac{y_1(t) + y_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{matrix}\right\} \text{soluzioni reali linearmente indipendenti}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\alpha t}[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]$$

- $\Delta = 0$: il polinomio ammette 2 radici reali coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow y_1 = e^{\lambda t}$$

Così abbiamo solo 1 soluzione. L'altra la possiamo trovare cercando $c(t)$ tale che $y_2 = c(t)e^{\lambda t}$ sia soluzione. La funzione y_2 si dimostra essere soluzione se $c''(t) = 0$ e quindi $y_2 = te^{\lambda t}$. L'integrale generale ottenuto sarà quindi:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Equazioni differenziali lineari complete del II ordine a coefficienti costanti

Per determinare l'integrale generale di un'equazione di tipo $ay''+by'+cy=f(t)$ abbiamo bisogno dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Il primo lo sappiamo trovare, mentre il secondo non ancora.

Per trovare una soluzione particolare quando il termine noto è una funzione abbastanza semplice usiamo un metodo euristico chiamato metodo di somiglianza. Questo metodo si basa sul fatto che l'operatore lineare associa a un tipo di funzione un'altro tipo. Quindi, in base alla forma della forzante possiamo risalire alla soluzione.

- FORZANTE ESPONENZIALE: $f(t)=Ae^{\alpha t}$
  - $y_P = Ce^{\alpha t}$ se α non è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
  - $y_P = Cte^{\alpha t}$ se α è radice singola del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
  - $y_P = Ct^2e^{\alpha t}$ se α è radice doppia del polinomio caratteristico dell'omogenea associata
- FORZANTE POLINOMIALE: $f(t)=P_n(t)$
  - $y_P = P_n(t)$ se $a, c \neq 0$
  - $y_P = P_{n+1}(t)$ se $a, b \neq 0$
  - $y_P = P_{n+2}(t)$ se $a \neq 0$
- FORZANTE TRIGONOMETRICA: $f(t) = A\cos(vt) + B\sin(vt)$
  - $y_P = C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt)$ se $b \neq 0$
  - $y_P = t(C_1\cos(vt) + C_2\sin(vt))$ se l'equazione ha forma $y''+v^2y = \alpha\cos(vt)+\beta\sin(vt)$, $v=\sqrt{\frac{c}{a}}$