Limite che tende ad e

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (corrispettivo di $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

Dim: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $c_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$

b_n monotona decr., c_n monotona cres. $\Big] \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = e$, $\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} = \max(n_1, n_2): \forall n \geq \bar{n}\quad e-\varepsilon < c_{\bar{n}} \leq c_n \leq e \leq b_n \leq b_{\bar{n}} < e+\varepsilon$ ($c_n < b_n$ (da dim))

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lfloor x_0 \rfloor > \bar{n}$ ($\lfloor x_0 \rfloor \leq x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1 \Rightarrow$ ogni numero reale può essere racchiuso tra un naturale e il successivo) $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \forall n > \bar{n}\quad e-\varepsilon \leq \left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0} \leq e+\varepsilon \Rightarrow \underline{\lim_{x_0 \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0} = e}$

Equivalenti: $\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t}$, $\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \log e$, $\lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$, $\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^k - 1}{t} = k$. Ognuna si dimostra con una sostituzione.

Infiniti e Infinitesimi (per $x \to x_0$)

Dati $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 p.a. per A. f è infinitesimo per $\boxed{x \to x_0}$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

" " " " " " " infinito " " , $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Confronto di infinitesimi

Siano f, g infinitesimi per $x \to x_0$. Se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \to f \text{ è un infinitesimo di \underline{ordine superiore} rispetto a } g \Rightarrow f \text{ è un \underline{o-piccolo} di } g \quad \text{es: } x^3 = o(x^2) \\ \pm\infty \to f \text{ è un infinitesimo di \underline{ordine inferiore} rispetto a } g \\ l \to f \text{ e } g \text{ sono dello \underline{stesso ordine}. Se } \underline{l=1}\text{, si dicono \underline{asintotiche} } (f(x) \sim g(x)\ x \to x_0) \end{cases}$$

O-piccolo di f

o-piccolo di f ($g = o(f)$) è una famiglia di infinitesimi più veloci di f

Confronto di infiniti

Siano f, g infiniti per $x \to x_0$. Se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty \to f \text{ è un infinito di \underline{ordine superiore} rispetto a } g \\ 0 \to f \text{ è un infinito di \underline{ordine inferiore} rispetto a } g \\ l \to f \text{ e } g \text{ sono dello \underline{stesso ordine}. Se } \underline{l=1}\text{, si dicono \underline{asintotiche} } (f(x) \sim g(x)\ x \to x_0) \end{cases}$$

Gerarchia degli infiniti

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ $\ \alpha, \beta > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty$ $\ \beta > 0$

Asintoti

- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x \to x_0^+ / x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ si dice che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale destro / sinistro di $f(x)$
- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ si dice che la retta $y = l$ è un asintoto orizzontale
- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, confronto $f(x)$ con $y = mx+q$: se $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ finito $\neq 0$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q$ finito, allora $y = mx+q$ si dice asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$