

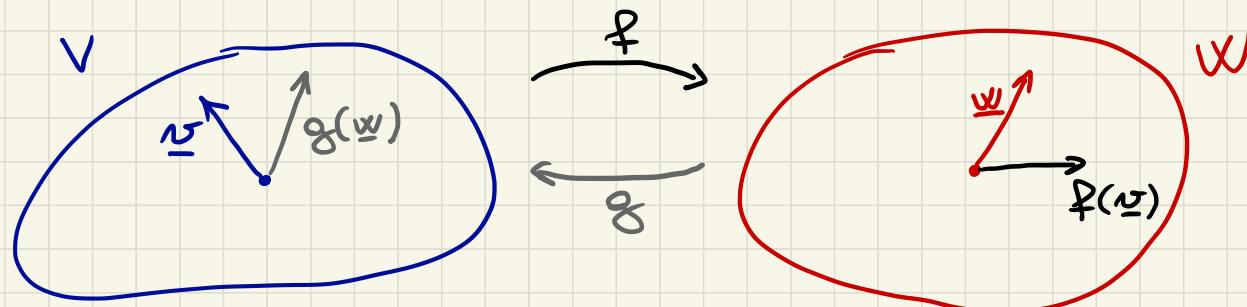
# ENDOMORFISMI AGGIUNTI (9.5)

## DEFINIZIONE 9.22

$(V, <, >_V), (W, <, >_W)$  s.n.e.,  $f \in \text{Hom}(V, W)$ .

Allora  $g \in \text{Hom}(W, V)$  si dice aggiunto di  $f$  se

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle_W = \langle \underline{v}, g(\underline{w}) \rangle_V \quad \forall \underline{v} \in V, \underline{w} \in W.$$



## PROPOSIZIONE 9.23

- i) se  $g$  esiste allora è unico ed è denotato con  $g = f^*$ ;
- ii) se  $V, W$  sono s.p. allora  $f^*$  esiste.

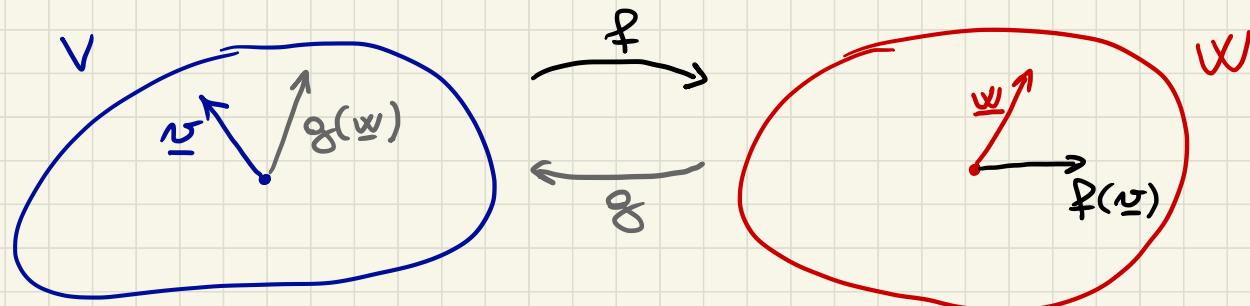
## ENDOMORFISMI AGGIUNTI (9.5)

DEFINIZIONE 9.22 (omorfismo aggiunto)

$(V, <, >_V), (W, <, >_W)$  s.n.e.,  $f \in \text{Hom}(V, W)$ .

Allora  $g \in \text{Hom}(W, V)$  si dice aggiunto di  $f$  se

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle_W = \langle \underline{v}, g(\underline{w}) \rangle_V \quad \forall \underline{v} \in V, \underline{w} \in W.$$



PROPOSIZIONE 9.23

- i) se  $g$  esiste allora è unico ed è denotato con  $g = f^*$ ;
- ii) se  $V, W$  sono s.p. allora  $f^*$  esiste.

PROPOSIZIONE 9.25

$B_v = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ ,  $B_w = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$  bari s.m. Allora  $\phi = f^*$

se e solo se  $G|_{B_w B_v} = F|_{B_v B_w}^T$ .

DIM:  $f^*$  è rappresentato da

$$F^*|_{B_w B_v} = [f^*(\underline{w}_1)|_{B_v} \dots f^*(\underline{w}_m)|_{B_v}] =$$

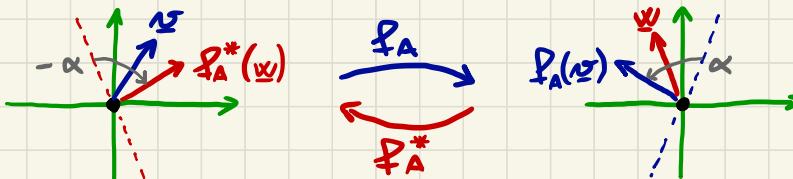
$$= \begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1, f^*(\underline{w}_1) \rangle & \dots & \langle \underline{v}_1, f^*(\underline{w}_m) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{v}_m, f^*(\underline{w}_1) \rangle & \dots & \langle \underline{v}_m, f^*(\underline{w}_m) \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f(\underline{v}_1), \underline{w}_1 \rangle & \dots & \langle f(\underline{v}_1), \underline{w}_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f(\underline{v}_m), \underline{w}_1 \rangle & \dots & \langle f(\underline{v}_m), \underline{w}_m \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\underline{v}_1)|_{B_w}^T \\ \vdots \\ f(\underline{v}_m)|_{B_w}^T \end{bmatrix} = F|_{B_v B_w}^T$$

Viceversa, se  $G = F^T \Rightarrow \phi|_{B_w B_v}(\phi) = \phi|_{B_w B_v}(f^*) \Rightarrow \phi = f^* \quad \square$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$f_A \in SO(\mathbb{R}^2)$  rotazione di  $\alpha$ ,  $f_A^* \in SO(\mathbb{R}^2)$  rotazione di  $-\alpha$ .



### DEFINIZIONE 9.2

$f \in \text{End}(V)$  si dice autoaggiunto se  $f^* = f$ , cioè

$$\langle f(v), w \rangle_v = \langle v, f(w) \rangle_v \quad \forall v, w \in V.$$

L'insieme delle  $f$  autoaggiunte è  $S(V)$ .

PROPOSIZIONE 9.28 (caratterizzazione se  $\dim(V) = n < \infty$ )

i)  $S(V)$  è un sottogruppo vettoriale di  $\text{End}(V)$ ;

ii)  $B$  base o.m.  $\Rightarrow \phi_B : S(V) \rightarrow S(n; \mathbb{R})$  è un isomorfismo di spazi vettoriali, quindi  $f = f^*$  se  $F_B = F_B^T$ .

•  $\alpha \cdot \text{Id}_V \in \mathfrak{S}(V)$ , in particolare  $\text{Id}_{R^2}, -\text{Id}_{R^2}$  sono le uniche rotazioni autoaggiunte.

•  $P_U, R_U : B_U = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \quad B_{U^\perp} = \{\tilde{\underline{v}}_1, \dots, \tilde{\underline{v}}_m\}$

$B = B_U \cup B_{U^\perp}$  è base di  $V$

$$P_U|_B = [P_U(\underline{v}_1)|_B \dots P_U(\underline{v}_m)|_B \mid P_U(\tilde{\underline{v}}_1)|_B \dots P_U(\tilde{\underline{v}}_m)|_B] = \\ = [\underline{v}_1|_B \dots \underline{v}_m|_B \mid \tilde{\underline{v}}_1|_B \dots \tilde{\underline{v}}_m|_B] = \begin{bmatrix} I_m & O_{mm} \\ O_{mm} & O_{mm} \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}(n+m; \mathbb{R})$$

$$R_U|_B = \dots = \begin{bmatrix} I_m & O_{mm} \\ O_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}(n+m; \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow P_U, R_U \in \mathfrak{S}(V).$$

# APPLICAZIONI ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILI (9.6)

DEFINIZIONE 9.30

$\forall$  s.v.e. ,  $f \in \text{End}(V)$  si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base o.m. di  $V$  composta da autovettori di  $f$ .

LEMMA 9.31 ( $\dim(V) = n < \infty$ )

$B$  base o.m.  $\Rightarrow B'$  è base o.m. se  $M_{BB'} \in O(n; \mathbb{R})$ .

PROPOSIZIONE 9.32 (caratterizzazione se  $\dim(V) = n < \infty$ )

$B$  base o.m.  $\Rightarrow f$  è o.d. se esiste  $Q \in O(n; \mathbb{R})$  t.c.

$$Q^T F_{1B} Q = D, \text{ dove } D \in D(n; \mathbb{R}).$$

Dim:  $f$  è diagonalizzabile se esiste  $S \in GL(n; \mathbb{R})$  t.c.

$$\underline{S^{-1} F_{1B} S = D}. \quad \text{Ma } S = M_{BB'} \text{ con } B' \text{ base autovettori} \xrightarrow{\text{LEMMA}}$$

$f$  è ortogonalmente diagonalizzabile se  $S \in O(n; \mathbb{R})$ . □

## TEOREMA SPETTRALE

TEOREMA 9.33 ( $\dim(V) < \infty$ )

$f$  è autoaggiunto se e solo se è ortogonalmente diagonalizzabile.

Può essere dimostrato che se  $U$  e  $U^\perp$  sono s.o.d., basta prendere l'unione di due basi s.o.m. di  $V$  e  $V^\perp$ .

PROPOSIZIONE 9.38

$A \in \text{Mat}(n,n; \mathbb{R})$  può essere scomposta come  $A = Q \Delta Q^T$  con  $Q \in O(n; \mathbb{R})$  se  $A \in S(n; \mathbb{R})$ .

Dim:  $f_A$  è s.o.d. se esiste  $Q$  t.c.  $\Delta = Q^T A Q$  se  $A = Q \Delta Q^T$ .

Per il Teorema spettrale, ciò è possibile se  $f_A$  è autoaggiunto, cioè se  $A$  è simmetrica.

OSS:  $\Delta = [\lambda_1 \dots \lambda_n]$ ,  $Q$  ha come colonne gli autovettori di  $A$ .



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}(2; \mathbb{R}) \Rightarrow f_A \text{ è s.d.}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A| = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$V_1 = \text{Ker} \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \text{Ker} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V_{-1} = \text{Ker} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Ker} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\} \text{ è s.m. , } Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2; \mathbb{R})$$

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

COROLLARIO 9.37

$f \in \mathbb{S}(V)$  con  $\lambda_1, \lambda_2$  distinti  $\Rightarrow V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ .