Superfici Quadriche

Prof.
Marco
Compagnoni

- Classificazione delle quadriche SEZIONE 11.4
- Esempi

- Superfici di rotazione, coni e cilindri SEZIONE 11.5
- Esempi

Classificazione Superfici Quadriche (Teorema 11.18)

In $\mathbb{E}^3$ l'equazione di ogni superficie quadrica può essere ridotta ad una ed una sola delle seguenti forme canoniche:

$r(C)$	$r(A)$	I_4	I_3	I_2	$I_1 I_3$	*Forma canonica*	*Moduli*	*Nome*
4	3	<0	$\neq 0$	>0	>0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}+\frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2}=1$	$\alpha,\beta,\gamma>0$	*Ellissoide con punti reali*
4	3	>0	$\neq 0$	>0	>0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}+\frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2}=-1$	$\alpha,\beta,\gamma>0$	*Ellissoide privo di punti reali*
4	3	>0	$\neq 0$	≤ 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}-\frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2}=1$	$\alpha,\beta,\gamma>0$	*Iperboloide ad una falda od iperbolico*
4	3	>0	$\neq 0$		≤ 0			
4	3	<0	$\neq 0$	≤ 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}-\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}-\frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2}=1$	$\alpha,\beta,\gamma>0$	*Iperboloide a due falde od ellittico*
4	3	<0	$\neq 0$		≤ 0			
4	2	<0	$=0$	>0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\tilde{y}^2-2\rho\tilde{z}=0$	$\alpha,\rho>0$	*Paraboloide ellittico*
4	2	>0	$=0$	<0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}-\tilde{y}^2-2\rho\tilde{z}=0$	$\alpha,\rho>0$	*Paraboloide iperbolico*
3	3	$=0$	$\neq 0$	>0	>0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}+\tilde{z}^2=0$	$\alpha,\beta>0$	*Cono con un unico punto reale*
3	3	$=0$	$\neq 0$	≤ 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}-\tilde{z}^2=0$	$\alpha,\beta>0$	*Cono con infiniti punti reali*
3	3	$=0$	$\neq 0$		≤ 0			
3	2	$=0$	$=0$	>0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}=1$	$\alpha,\beta>0$	*Cilindro ellittico con punti reali*
3	2	$=0$	$=0$	>0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}=-1$	$\alpha,\beta>0$	*Cilindro ellittico privo di punti reali*
3	2	$=0$	$=0$	<0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}-\frac{\tilde{y}^2}{\beta^2}=1$	$\alpha,\beta>0$	*Cilindro iperbolico*
3	1	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$\tilde{x}^2-2\rho\tilde{y}=0$	$\rho>0$	*Cilindro parabolico*
2	2	$=0$	$=0$	>0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}+\tilde{y}^2=0$	$\alpha>0$	*Coppia di piani incidenti con una retta di punti reali*
2	2	$=0$	$=0$	<0	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}-\tilde{y}^2=0$	$\alpha>0$	*Coppia di piani incidenti con infiniti punti reali*
2	1	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}=1$	$\alpha>0$	*Coppia di piani paralleli con infiniti punti reali*
2	1	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2}=-1$	$\alpha>0$	*Coppia di piani paralleli privi di punti reali*
1	1	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$\tilde{x}^2=0$		*Piano doppio*

ESEMPIO 11.19

$$\mathcal{Q} : 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 8 \quad I_2 = 20 \\ I_3 = 16 \quad I_4 = -64 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ è un'ellissoide con punti reali $(I_4 < 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0)$.

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4, \quad \tilde{c} = \frac{I_4}{I_3} = -4 \quad \Rightarrow \quad 2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2 - 4 = 0$$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_1}} = \sqrt{2} = \beta \qquad \gamma = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_3}} = \sqrt{1} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{Q}|_{\tilde{B}_0} : \frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{2})^2} + \tilde{z}^2 = 1$$

$$V_2 = Ker(A - 2I_2) = Ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$V_4 = Ker(A - 4I_2) = Ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in SO(3; \mathbb{R})$$

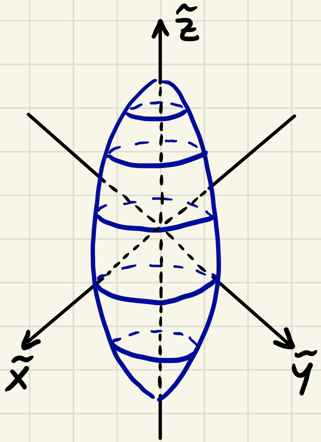
$$T: [A | -B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\, \tilde{x} + 1/\sqrt{2}\, \tilde{z} \\ y = \tilde{y} \\ z = -1/\sqrt{2}\, \tilde{x} + 1/\sqrt{2}\, \tilde{z} \end{cases}$$

Studiamo le proprietà geometriche dell'ellissoide.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{z} \\ y = \tilde{y} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{z} \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0} : \frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{2})^2} + \tilde{z}^2 = 1$$



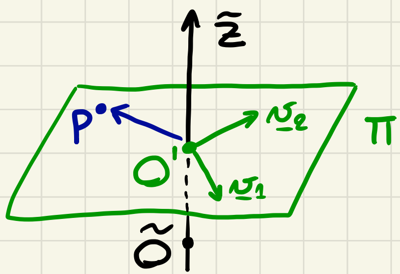
- Vertici : $V_{1,2}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0} = \begin{bmatrix} \pm\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_{3,4}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\beta \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_{5,6}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\gamma \end{bmatrix}$.
- Centro : $\tilde{O} = O$.
- Assi di simmetria : $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.
- Piani di simmetria: $\tilde{x}\tilde{y}, \tilde{x}\tilde{z}, \tilde{y}\tilde{z}$.

Studiamo l'intersezione di $\mathcal{Q}$ con alcuni piani.

- $\mathcal{Q} \cap \{z=0\}$: $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ellisse in forma canonica.

• π generico piano perpendicolare a V_2



$O' = (0,0,0) + K \cdot (1,0,1) = (K,0,K)$

$\underline{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $\underline{v}_2 = (0,1,0)$.

$\mathcal{B}'_{O} = \{O', \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ $\qquad$ $P = (x,y,z)$

$$\Rightarrow P_{|\mathcal{B}'_O} = \begin{bmatrix} x-K \\ y \\ z-K \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = K + t_1/\sqrt{2} \\ y = t_2 \\ z = K - t_1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{Q} \cap \pi: \; 3(K + t_1/\sqrt{2})^2 + 2t_2^2 + 3(K - t_1/\sqrt{2})^2 + 2(K^2 - t_1^2/2) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2t_1^2 + 2t_2^2 + 8K^2 - 4 = 0 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 + 2(2K^2 - 1) = 0$$

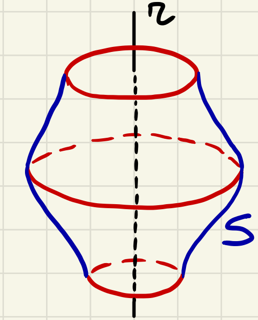
$\Rightarrow$ circonferenza per $K \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Questo succede sempre

se $mg(\lambda) = 2$ $\Rightarrow$ Quadrica di rotazione.

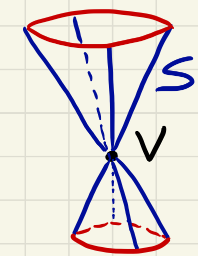
DEFINIZIONE 11.22

In $\mathbb{E}^3$ siano r una retta, V un punto ed U una direzione.

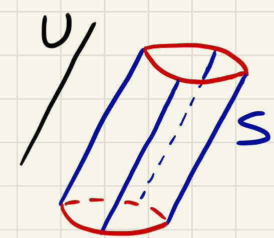
i) S è una superficie di rotazione di asse r se è l'unione di una famiglia di circonferenze, appartenenti a piani perpendicolari ad r ed i cui centri appartengono ad r;



ii) S è un cono generalizzato di vertice V se è l'unione di una famiglia di rette tutte contenenti V;



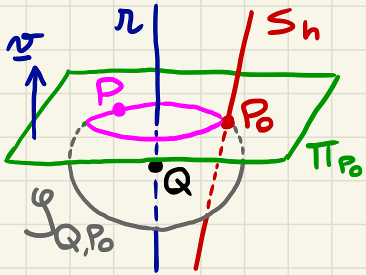
iii) S è un cilindro generalizzato di direzione U se è l'unione di una famiglia di rette di giacitura U.



ESEMPIO 11.23

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} x + y - 2h = 0 \\ y - h = 0 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}.$$

S_h = superficie ottenuta dalla rotazione di s_h rispetto ad r.



$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad r = \underbrace{(0,0,0)}_{Q} + t\underbrace{(0,1,1)}_{v}$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in s_h, \quad P = (x,y,z) \in S_h$

$$S_h : \begin{cases} d(P_0, Q) = d(P,Q) & \leftarrow \gamma_{Q,P_0} \\ \langle v, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0 & \leftarrow \Pi_{P_0} \\ \left.\begin{array}{l} x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{array}\right] & \leftarrow s_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ y - y_0 + z - z_0 = 0 \\ x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{cases}$$

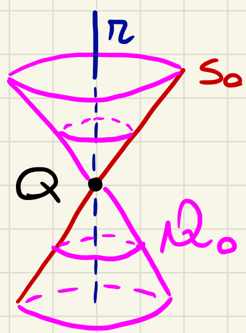
$$\Rightarrow \begin{cases} 3h^2 + 2hy + 2hz + 2yz - x^2 = 0 \\ x_0 = h \\ y_0 = h \\ z_0 = h + y + z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q} : x^2 - 2yz - 2hy - 2hz - 3h^2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -h \\ -h \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -h \\ 0 & -1 & 0 & -h \\ 0 & -h & -h & -3h^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1 \quad I_2 = -1 \\ I_3 = -1 \quad I_4 = h^2 \end{cases}$$

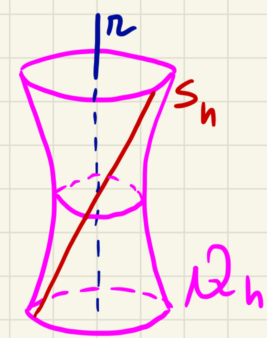
$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è
- un iperboloide ad una falda se $h \neq 0$
- un cono se $h = 0$, di vertice $V = Q = r \cap s_0$

$h = 0$:



r, s_0 incidenti

$h \neq 0$:



r, s_h sghembe

$2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $\qquad \lambda_1^2 \lambda_2 = -1$ $\qquad \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = -1$ $\qquad \tilde{C} = -h^2$

$2 \cdot 1 + (-1)$ $\qquad 1 \cdot (-1)$ $\qquad 1 + 2 \cdot (-1)$

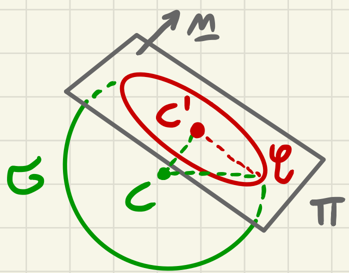
ESERCIZIO

i) Scrivere l'equazione della sfera σ di raggio $R=1$ e centro $C=(1,1,1)$;

ii) Trovare l'intersezione $\mathscr{C}$ tra σ e $\pi: x+y+z=4$;

i) $\sigma: \quad (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

ii) $\mathscr{C}: \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)+(z-1)^2=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ è una circonferenza



$$R^2=r^2+d(C,\pi)^2 \Rightarrow r=\sqrt{1-1/3}=\sqrt{2/3}$$

$$d(C,\pi)=\frac{|1+1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

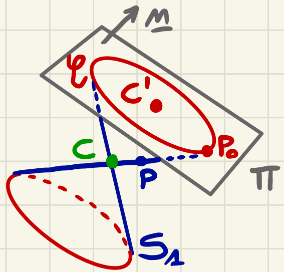
$$\underline{n}=(1,1,1)\perp\pi \Rightarrow \overrightarrow{CC'}=d(C,\pi)\cdot\frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} \Rightarrow$$

$$C'=(1,1,1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1,1,1)=(4/3,\,4/3,\,4/3)\in\pi\ !$$

iii) Scrivere l'equazione del cono S_1 sopra $\mathcal{C}$ e di vertice C e del cilindro S_2 sopra $\mathcal{C}$ e perpendicolare a π.

iv) Chi è $S_1 \cap S_2$?

iii)



$$S_1 : \begin{cases} \overrightarrow{CP} = t \cdot \overrightarrow{CP_0} \\ (x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2 = 1 \\ x_0+y_0+z_0 = 2 \end{cases}$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$P = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x-1 = t\cdot(x_0-1) \\ y-1 = t\cdot(y_0-1) \\ z-1 = t\cdot(z_0-1) \\ (x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2 = 1 \\ x_0+y_0+z_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = (x-1+t)\cdot 1/t \\ y_0 = (y-1+t)\cdot 1/t \\ z_0 = (z-1+t)\cdot 1/t \\ x+y+z-3+3t = 4t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = t^2 \end{cases}$$

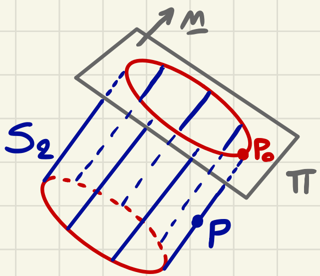
$$\Rightarrow t = x+y+z-3 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-2x-2y-2z+3 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}+2xy+2xz+2yz-6x-6y-6z+9$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 : \; xy+xz+yz-2x-2y-2z+3 = 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0 \quad I_2 = -\frac{3}{4} \\ I_3 = \frac{1}{4} \quad I_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S_1 è un cono con infiniti punti reali



$$S_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_0P} = t \cdot m \\ (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases}$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$P = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x - x_0 = t \\ y - y_0 = t \\ z - z_0 = t \\ (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - t \\ y_0 = y - t \\ z_0 = z - t \\ x + y + z - 3t = 4 \\ (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = (x+y+z-4)/3 \\ x_0 - 1 = (2x - y - z + 1)/3 \\ y_0 - 1 = (-x + 2y - z + 1)/3 \\ z_0 - 1 = (-x - y + 2z + 1)/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz + 4x - 2y - 2z + 1$$
$$+ x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 2x + 4y - 2z + 1$$
$$+ x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - 2x - 2y + 4z + 1$$
$$= 9$$

$\Rightarrow \quad S_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 6 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 3 \quad I_2 = \frac{9}{4} \\ I_3 = 0 \quad I_4 = 0 \\ r(C) = 3 \quad r(A) = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_2$ è un cilindro ellittico con punti reali.

iv) $S_1 \cap S_2 = \mathscr{C} \cup \overline{\mathscr{C}}$ dove $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{S} \cap \overline{\pi}$.

$\overline{\pi}$ piano parallelo a π e contenente C'' tale che

$\overrightarrow{CC''} = -\overrightarrow{CC'} \quad \Rightarrow C'' = (1,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = (2/3, 2/3, 2/3)$

$\Rightarrow \overline{\pi} : \ x + y + z = K$ con $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = K \Rightarrow K = 2 \Rightarrow$

$$\overline{\mathscr{C}} : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$