

CLASSIFICAZIONE SUPERFICI QUADRICHES (TEOREMA 11.18)

In \mathbb{E}^3 l'equazione di ogni superficie quadrica può essere ridotta ad una ed una sola delle seguenti forme canoniche:

$r(C)$	$r(A)$	I_4	I_3	I_2	$I_1 I_3$	Forma canonica	Moduli	Nome
4	3	< 0	$\neq 0$	> 0	> 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} + \frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2} = 1$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	Ellissoide con punti reali
4	3	> 0	$\neq 0$	> 0	> 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} + \frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2} = -1$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	Ellissoide privo di punti reali
4	3	> 0	$\neq 0$	≤ 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} - \frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2} = 1$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	Iperboloida ad una falda od iperbolico
4	3	> 0	$\neq 0$		≤ 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} - \frac{\tilde{z}^2}{\gamma^2} = 1$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	Iperboloida a due falde od ellittico
4	2	< 0	$= 0$	> 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \tilde{y}^2 - 2\rho\tilde{z} = 0$	$\alpha, \rho > 0$	Paraboloida ellittico
4	2	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} - \tilde{y}^2 - 2\rho\tilde{z} = 0$	$\alpha, \rho > 0$	Paraboloida iperbolico
3	3	$= 0$	$\neq 0$	> 0	> 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} + \tilde{z}^2 = 0$	$\alpha, \beta > 0$	Cono con un unico punto reale
3	3	$= 0$	$\neq 0$	≤ 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} - \tilde{z}^2 = 0$	$\alpha, \beta > 0$	Cono con infiniti punti reali
3	2	$= 0$	$= 0$	> 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha, \beta > 0$	Cilindro ellittico con punti reali
3	2	$= 0$	$= 0$	> 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = -1$	$\alpha, \beta > 0$	Cilindro ellittico privato di punti reali
3	2	$= 0$	$= 0$	< 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} - \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha, \beta > 0$	Cilindro iperbolico
3	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\tilde{x}^2 - 2\rho\tilde{y} = 0$	$\rho > 0$	Cilindro parabolico
2	2	$= 0$	$= 0$	> 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \tilde{y}^2 = 0$	$\alpha > 0$	Coppia di piani incidenti con una retta di punti reali
2	2	$= 0$	$= 0$	< 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} - \tilde{y}^2 = 0$	$\alpha > 0$	Coppia di piani incidenti con infiniti punti reali
2	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} = 1$	$\alpha > 0$	Coppia di piani paralleli con infiniti punti reali
2	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} = -1$	$\alpha > 0$	Coppia di piani paralleli privi di punti reali
1	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\tilde{x}^2 = 0$		Piano doppio

ESEMPIO 11.19

$$\mathcal{Q}: 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 8 & I_2 = 20 \\ I_3 = 16 & I_4 = -64 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è un'ellissoide con punti reali ($I_4 < 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$).

SE VIENI CHIESTO
"CLASSIFICA"

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) \Rightarrow$$

$$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, \tilde{c} = \frac{I_4}{I_3} = -4} \Rightarrow 2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2 - 4 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow$ Q è sfera

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_1}} = \sqrt{2} = \beta \quad \gamma = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_3}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{Q} | \tilde{B}_0 : \frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{2})^2} + \tilde{z}^2 = 1$$

SE VIENI CHIESTO
"METTI IN FORMA CANONICA"

$$V_2 = \text{Ker}(A - 2 I_2) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$V_4 = \text{Ker}(A - 4 I_2) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in SO(3; \mathbb{R}) \quad |Q| = 1 \quad !! \text{ Sempre controllare !!}$$

$$T: [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1/\sqrt{2} \tilde{x} + 1/\sqrt{2} \tilde{z} \\ y = \tilde{y} \\ z = -1/\sqrt{2} \tilde{x} + 1/\sqrt{2} \tilde{z} \end{array} \right.$$

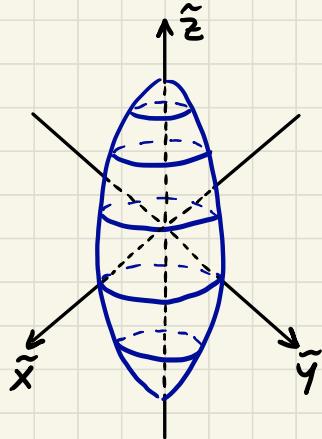
Se viene
CHIESTO "CALCOLA"

ROT-TRASLAZIONE

Studiamo le proprietà geometriche dell'ellissoidale.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1/\sqrt{2} \tilde{x} + 1/\sqrt{2} \tilde{z} \\ y = \tilde{y} \\ z = -1/\sqrt{2} \tilde{x} + 1/\sqrt{2} \tilde{z} \end{array} \right.$$

$$\Omega | \tilde{\mathbb{B}}_0 : \frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{2})^2} + \tilde{z}^2 = 1$$



- Vertici: $V_{1,2} | \tilde{\mathbb{B}}_0 = \begin{bmatrix} \pm \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_{3,4} | \tilde{\mathbb{B}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm \beta \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_{5,6} | \tilde{\mathbb{B}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \delta \end{bmatrix}$.
- Centro: $\tilde{O} = O$.
- Aksi di simmetria: $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.
- Piani di simmetria: $\tilde{x}\tilde{y}, \tilde{x}\tilde{z}, \tilde{y}\tilde{z}$.

Studiamo l'intersezione di Ω con alcuni piani.

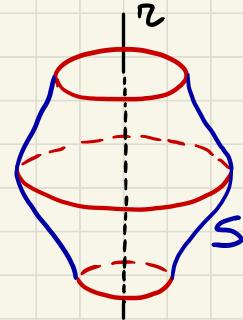
$$\Omega \cap \{z=0\} : \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow ellisse in forma conica.

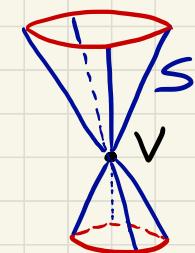
DEFINIZIONE 11.22

In E^3 siano r una retta, V un punto ed U una direzione.

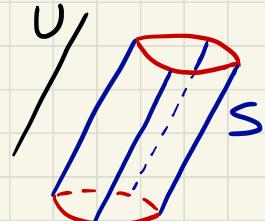
- i) S'è una superficie di rotazione di asse r se è l'unione di una famiglia di circonference, appartenenti a piani perpendicolari ad r ed i cui centri appartengono ad r ;



- ii) S'è un cono generolirato di vertice V se è l'unione di una famiglia di rette tutte contenenti V ;



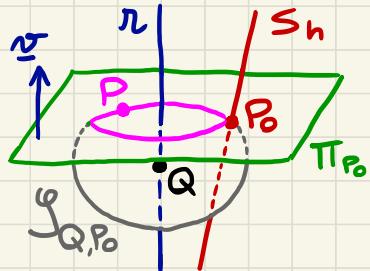
- iii) S'è un cilindro generolirato di direzione U se è l'unione di una famiglia di rette di giacitura U .



ESEMPIO 11.23

$$n : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad S_h : \begin{cases} x + y - 2h = 0 \\ y - h = 0 \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}.$$

S_h = superficie ottenuta dalla rotazione di s_h rispetto ad n .



$$n : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow n = \underbrace{(0,0,0)}_Q + t \underbrace{(0,1,1)}_{\nu}$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_h, \quad P = (x, y, z) \in S_h$$

$$S_h : \left\{ \begin{array}{l} d(P_0, Q) = d(P, Q) \quad \leftarrow \mathfrak{G}_{Q, P_0} \\ \langle \nu, \overrightarrow{P_0 P} \rangle = 0 \quad \leftarrow \pi_{P_0} \\ x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{array} \right.] \leftarrow S_h \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ y - y_0 + z - z_0 = 0 \\ x_0 + y_0 - 2h = 0 \\ y_0 - h = 0 \end{array} \right.$$

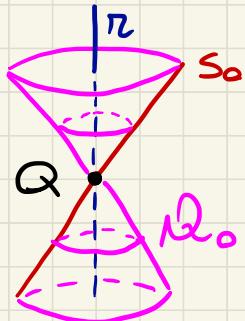
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3h^2 + 2hy + 2hz + 2yz - x^2 = 0 \\ x_0 = h \\ y_0 = h \\ z_0 = h + y + z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \Omega : x^2 - 2yz - 2hy - 2hz - 3h^2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -h \\ -h \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -h \\ 0 & -1 & 0 & -h \\ 0 & -h & -h & -3h^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1 & I_2 = -1 \\ I_3 = -1 & I_4 = h^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Omega$ è $\begin{cases} \text{un iperboloidale od una fôlola se } h \neq 0 \\ \text{un cono se } h = 0, \text{ di vertice } V = Q = r_n s_o \end{cases}$

$$h = 0 :$$



r, s_o incidenti

$$\varepsilon \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$2 \cdot 1 + (-1)$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2 = -1$$

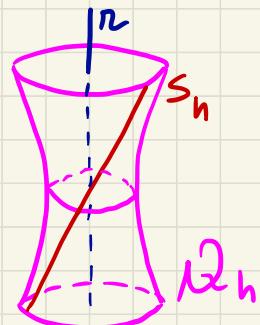
$$1 \cdot (-1)$$

$$\lambda_1^2 + \varepsilon \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

$$1 + 2 \cdot (-1)$$

$$\tilde{C} = -h^2$$

$$h \neq 0 :$$



r, s_h neghembé

ESERCIZIO

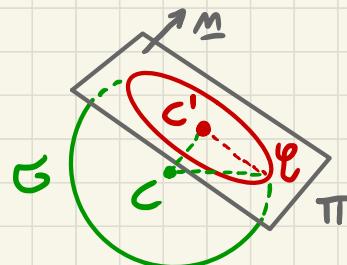
i) Scrivere l'equazione della sfera σ di raggio $R=1$ e centro

$$C = (1, 1, 1);$$

ii) Trovare l'intersezione \mathcal{C} tra σ e $\pi : x + y + z = 4$;

$$\text{i) } \sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

ii) $\mathcal{C} : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ è una circonferenza



$$R^2 = r^2 + d(C, \pi)^2 \Rightarrow r = \sqrt{1 - 1/3} = \sqrt{2/3}$$

$$d(C, \pi) = \frac{|1+1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

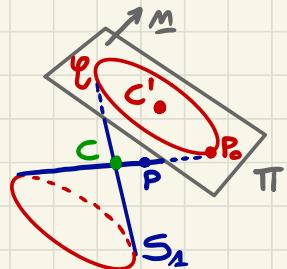
$$\underline{m} = (1, 1, 1) \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = d(C, \pi) \cdot \frac{\underline{m}}{\|\underline{m}\|} \Rightarrow$$

$$C' = (1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \in \pi !$$

iii) Scrivere l'equazione del cono S_1 sopra \mathcal{C} e di vertice C e del cilindro S_2 sopra \mathcal{C} e perpendicolare a π .

iv) Che è $S_1 \cap S_2$?

iii)



$$S_1: \begin{cases} \overrightarrow{CP} = t \cdot \overrightarrow{CP_0} \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases}$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$P = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x - 1 = t \cdot (x_0 - 1) \\ y - 1 = t \cdot (y_0 - 1) \\ z - 1 = t \cdot (z_0 - 1) \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = (x - 1 + t) \cdot 1/t \\ y_0 = (y - 1 + t) \cdot 1/t \\ z_0 = (z - 1 + t) \cdot 1/t \\ x + y + z - 3 + 3t = 4t \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = t^2 \end{cases}$$

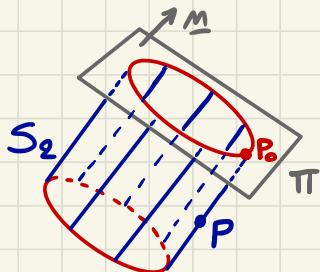
$$\Rightarrow t = x + y + z - 3 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} - 2x - 2y - 2z + 3 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + 2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 6z + 9$$

$$\Rightarrow S_1: xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 3 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0 & I_2 = -\frac{3}{4} \\ I_3 = \frac{1}{4} & I_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_1$ è un cono con infiniti punti reali.



$$\begin{cases} x - x_0 = t \\ y - y_0 = t \\ z - z_0 = t \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = (x + y + z - 4)/3 \\ x_0 - 1 = (2x - y - z + 1)/3 \\ y_0 - 1 = (-x + 2y - z + 1)/3 \\ z_0 - 1 = (-x - y + 2z + 1)/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_0P} = t \cdot \underline{m} \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ P &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - t \\ y_0 = y - t \\ z_0 = z - t \\ x + y + z - 3t = 4 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz + 4x - 2y - 2z + 1 \\ & + x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 2x + 4y - 2z + 1 \\ & + x^2 + y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 2x - 2y + 4z + 1 \\ & = 9 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_2: x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 6 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1=3 & I_2=\frac{9}{4} \\ I_3=0 & I_4=0 \\ n(C)=3 & n(A)=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_2$ è un cilindro ellittico con punti reali.

$$\text{iv)} \quad S_1 \cap S_2 = \mathcal{C} \cup \bar{\mathcal{C}} \quad \text{dove} \quad \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{G} \cap \bar{\Pi} .$$

$\bar{\Pi}$ piano parallelo a Π e contenente C'' tale che

$$\overrightarrow{CC''} = -\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'' = (1, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow \bar{\Pi}: x + y + z = K \quad \text{con} \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = K \Rightarrow K = 2 \Rightarrow$$

$$\bar{\mathcal{C}} : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$