FUNZIONI:

Funzione inversa: con l'ipotesi che f sia iniettiva, è possibile definire f^{-1} tale che: $f^{-1}: Im(f) \to D_f$, $y \mapsto x$

$|\forall y \in Im(f)\ \exists! x \in D_f : f(x) = y \Rightarrow$ rende f^{-1} una funzione$|$

La funzione inversa non per forza è definita in tutto il dominio di f.: es. log, arcsin...

N.B. Il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del grafico della funzione normale.

SUCCESSIONI:

DEFINIZIONE: è una serie ordinata di numeri. Una funzione del tipo: $a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ è detta successione. Per indicare tutti gli elementi della successione si usa $\{a_n\}$

SUCCESSIONE POSITIVA: una successione è positiva se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$

si dice definitivamente positiva se $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0\ \ a_n \geq 0$

" NEGATIVA: una successione è negativa se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq 0$

si dice definitivamente negativa se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \leq 0$

" LIMITATA: una successione si dice limitata superiormente se $\exists \sup(\{a_n\})$

una successione si dice limitata inferiormente se $\exists \inf(\{a_n\})$

" CRESCENTE: una successione si dice crescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow >$)

una successione si dice definitivamente crescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow >$)

" DECRESCENTE: una successione si dice decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow <$)

una successione si dice definitivamente decrescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\Rightarrow <$)

CARATTERE DI UNA SUCC.

SUCCESSIONE CONVERGENTE: una successione si dice convergente se $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$

ESEMPIO: $a_n = \frac{n-1}{n}$ con $n \neq 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Per dimostrarlo uso la definizione: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \to \left|\frac{\cancel{n} - 1 - \cancel{n}}{n}\right| < \varepsilon \to \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$

Scelgo $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ poiché $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, il limite è verificato

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE (SUCCESSIONI): Sia a_n una funzione convergente a $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, allora l è unico.

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, supponiamo esistano due limiti che convergono a $m \neq l$: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = m$. Ciò significa che $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - m| < \varepsilon$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n_0 \geq n\ |a_n - l| < \varepsilon$.

Posso allora scrivere: $|l-m| = |l - a_n + a_n - m| = |(l-a_n)+(a_m-m)| \underset{\text{dis. triang}}{\leq} |l-a_n| + |a_m - m| \underset{\forall n \geq \max(n_1, n_2)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |l-m| \leq 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, ma ciò è vero solo per $m = l \Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ il limite di una successione convergente è unico (se finito)

SUCCESSIONI DIVERGENTI: Una successione a_n è divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n \geq M$

a $-\infty$ $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n < -M$

SUCCESSIONI IRREGOLARI: Una successione a_n è irregolare se non è né convergente né divergente

NUMERI COMPLESSI

① $z\cdot|z| + 2z + i = 0$ poniamo $z = x+iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (x+iy)(\sqrt{x^2+y^2}) - 2(x+iy) + i = 0$

$$\overbrace{\underbrace{x\sqrt{x^2+y^2} - 2x}_{Re(w)} + i\underbrace{(y\sqrt{x^2+y} - 2y + 1)}_{Im(w)}}^{w} = 0$$

l'equazione è risolta quando $\underbrace{\begin{cases} Re(w) = Re(0) \\ Im(w) = Im(0) \end{cases}}_{\text{sistema in } \mathbb{R}} \rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2} - 2) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x = 0 \\ y\sqrt{y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = i$

$\begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = i(-1-\sqrt{2})$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

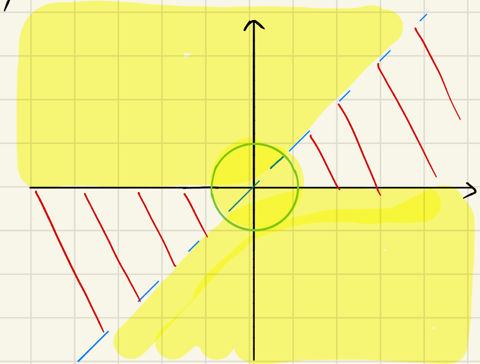
② $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z(1+i)-\bar{z}(1-i)}{z-\bar{z}}\right)=0$ $\quad\forall z\in\mathbb{C}$

Mettiamo in forma algebrica: $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x+iy)(1+i)-(x-iy)(1-i)}{(x+iy)-(x-iy)} =$

$$= \frac{\cancel{x}+iy+ix-\cancel{y}-\cancel{x}+ix+iy+\cancel{y}}{2iy} = \frac{2i(x+y)}{2iy} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \text{puramente reale}$$

Dunque
$$E = \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \frac{z(1+i)-\bar{z}(1-i)}{z-\bar{z}} < 2 \right\} \cup \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |z|<1 \right\} =$$
$$= \left\{ x+iy\in\mathbb{C} \;\middle|\; \frac{x+y}{\underbrace{y}_{\neq 0}} < 2 \right\} \cup \left\{ x+iy\in\mathbb{C} \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} < 1 \right\}$$

$\dfrac{x+y}{y} < 2 \rightarrow \dfrac{x-y}{y} < 0$



$E_1 = \{ u\in\mathbb{C} \mid u=\bar{z},\ z\in E \} \Rightarrow$ riflessione lungo x di E

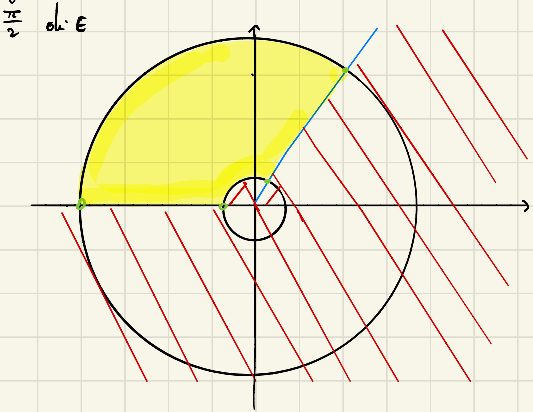
$E_2 = \{ v\in\mathbb{C} \mid v=iz,\ z\in E \} \Rightarrow$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$ di E

$E_3 = \{ w\in\mathbb{C} \mid w=-z,\ z\in E \}$

$E_4 = \{ t\in\mathbb{C} \mid t=\frac{1}{z},\ z\in E \}$ HOMEWORK

③ $A = \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; 1\le |z| \le 8,\ \frac{\pi}{3} \le \arg(z) < \pi \right\}$

$B = \{ w\in\mathbb{C} \mid w^3 = z \}$ Homework



5 $\begin{cases} |z-i| < |z+1| \\ z^5 = 2i \end{cases}$ $\rightarrow$ $z = x+iy \Rightarrow$ $z-i = x + i(y-1)$ $\quad |z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

distanza z-1

$z+1 = x+1+iy$ $\quad |z+i| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ $\quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ $\quad x^2+(y-1)^2 < (x+1)^2+y^2$ $\quad y > -x$

distanza z -i

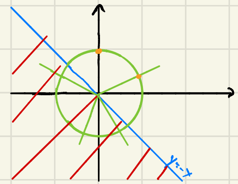
$|z_1 - z_2| =$ distanza tra z_1, z_2 (DIMOSTRA)

$z^5 = 2i$

$z^5 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} \rho^5 = 2 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} \rho = \sqrt[5]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \quad (k = 0 \dots 4) \end{cases}$



TRASF. GRAFICI

$f(x)+K$ $\Rightarrow$ sposta in verticale : $+K$ verso l'alto; $-K$ verso il basso
$Kf(x)$ $\Rightarrow$ deforma in verticale : $K>1$ allarga il grafico; $0<K<1$ schiaccia il grafico
$-f(x)$ $\Rightarrow$ riflessione rispetto a x
$|f(x)|$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

$f(x+K)$ $\Rightarrow$ sposta in orizzontale : $+K$ a sinistra; $-K$ a destra
$f(Kx)$ $\Rightarrow$ deforma in orizzontale : $K>1$ schiaccia; $0<K<1$ allarga
$f(-x)$ $\Rightarrow$ riflessione rispetto a y
$f(|x|)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$

Disegnare $f(x)$: $2 - |x+3|$ $\quad |\sqrt[3]{-x} + 1|$ partendo da grafici noti

HOMEWORK

$-e^{x-2} + 1$ $\quad |2 \ln |x-1||$

$1 - \dfrac{1}{|x - \frac{1}{2}|}$ $\quad \sqrt{x-1} - 1$

SUCCESSIONI

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE (SUCCESSIONI MONOTONE): Sia a_n una successione crescente/decrescente, allora a_n ammette sempre limite $l = \sup(a_n)$. Se a_n è superiormente limitata, allora l è finito. Se a_n non è superiormente limitata, allora $\sup(a_n) = +\infty$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo a_n crescente limitata superiormente, allora a_n converge ad $l \in \mathbb{R} = \sup(a_n)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < a_{n+1}$. $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < M$. Consideriamo $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ ammette estremo superiore (ass. compl.) pari a $\sup(a_n)$
Voglio dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - \sup(a_n)| < \varepsilon$. Per definizione $\sup(a_n)$ è maggiorante di $\{a_n\}$ quindi $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq \sup(a_n) \Rightarrow$
$|a_n - \sup(a_n)| = \sup(a_n) - a_n \Rightarrow \sup(a_n) - \varepsilon < a_n$. Poiché $\sup(a_n)$ è il più grande dei maggioranti, $\sup(a_n) - \varepsilon$ non è un maggiorante.
Esiste quindi $\bar{n}$ tale che $\sup(a_n) - \varepsilon < a_{\bar{n}} < \sup(a_n)$. Poiché è crescente, allora $a_{\bar{n}+1} > a_{\bar{n}} > \sup(a_n) - \varepsilon$. Quindi $\forall n > \bar{n}$, $a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Ciò, verifica la tesi: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ |\sup(a_n) - a_n| < \varepsilon$, che riscritto sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Se prendiamo a_n divergente crescente, allora $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n > M$. Per definizione, $\forall n > n_0\ a_n > a_{n_0}$
$\forall M > 0\ \exists \bar{n}_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ \ a_n > a_{n_0} > M$

NOTA BENE: il teorema non vale per successioni del tipo: inferiormente limitata crescente

TEOREMA: Se una successione converge allora è limitata

DIMOSTRAZIONE: Per Hp: $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$. La Th sarà: $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0\ a_n < M$. Possiamo scrivere $|a_n|$ come:
$\underset{\forall n > n_0}{|a_n|} = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq \overset{\text{PER Hp}}{\varepsilon + |l|}$. Costruisco M tale che: $M = \operatorname{Max}(\varepsilon + |l|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0 - 1}|)$, allora $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$ quindi a_n è limitata.
Il viceversa non vale.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO: Sia a_n una successione non negativa, convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$.
" " " " non positiva, " " " $l \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE: per Hp: $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$; $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$. Unendo le due condizioni, possiamo scrivere che
$0 \leq a_n < l + \varepsilon\ \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow l \geq 0$. Se per assurdo $l < 0$, allora la condizione prima descritta non sarebbe valida $\forall \varepsilon > 0$.

COROLLARIO PERM. SEGNO: Siano a_n e b_n due successioni convergenti. Se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ \ a_n \leq b_n \Rightarrow l_a \leq l_b$

DIMOSTRAZIONE: Costruiamo $c_n = b_n - a_n$, allora $c_n \geq 0\ \forall n > \bar{n}$. Possiamo scrivere che $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n \overset{\text{PER PERM. SEGNO}}{=} K \geq 0$. Usando l'algebra dei limiti, avremo che: $\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = m - l \geq 0 \Rightarrow m \geq l$

TEOREMA DEL CONFRONTO (SUCCESS.): Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$. Se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ \ a_n \leq b_n \leq c_n$, allora b_n converge ad l

DIMOSTRAZIONE: Hp: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1\ |c_n - l| < \varepsilon$. $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon$

Posso allora costruire la seguente disequazione: $l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon\ \forall n \geq \max(n_0, n, \bar{n})$, ma ciò equivale a dire che $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

ALGEBRA DEI LIMITI: Siano a_n e b_n due successioni convergenti tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$; $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$. Allora avremo:

- $\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = l \cdot m$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ con $m \neq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = l^m$ con $l \geq 0$

DIMOSTRAZIONE (SOMMA): Le Hp sono sempre le stesse. La Th sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ |a_n + b_n - (l + m)| < \varepsilon$.

Possiamo scrivere che: $|a_n + b_n - (l+m)| = |(a_n - l) + (b_n - l)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| \underset{\forall n \geq \max(n_0, n_1)}{\leq} 2\varepsilon$ per Hp

LEZIONE

SUCCESSIONI

ALGEBRA DEI LIMITI: Date a_n una successione convergente e b_n una divergente. $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = l, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty\right)$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE (RAPP.): Hp: $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |a_n - l| < \varepsilon$, $\forall M>0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \ b_n > M$. Th: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{n} \ \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon$. Usiamo la disuguaglianza triangolare: $|a_n - l| < |a_n| + |-l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |l| + \varepsilon$. Questo ci dice che a_n converge. Posso scegliere $M = \frac{1}{\varepsilon}$, quindi $b_n > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \varepsilon > 0. \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon(|l| + \varepsilon) \Rightarrow$ questa è la tesi $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

FORME INDETERMINATE: Siano a_n e b_n successioni divergenti. Si chiamano forme indeterminate le seguenti: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$

riconducibili alle altre due forme

GESTIONE: metodi algebrici, stabilire l'ordine degli infiniti

ES. ALG.: $\lim_{n\to+\infty} (n^3 - n^5) = \lim_{n\to+\infty} n^5\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^5 \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} (n^5 \cdot (-1)) = -\infty$

ORD.: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{2-n^7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n^3})}{n^7(\frac{2}{n^7}-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{n^4(\frac{2}{n^7}-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4(-1)} = 0^-$

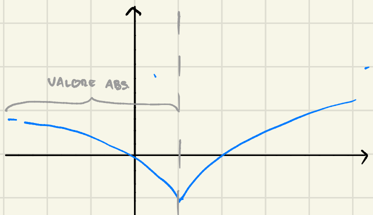
SOSTITUZIONI: Le sostituzioni (es.: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{t\to0} t$) non hanno senso per le successioni perché $n \to 0 = \alpha_0$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI: Serve a risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0$ (log infinito di ordine inf. alla potenza)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ (exp ordine maggiore di potenza)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

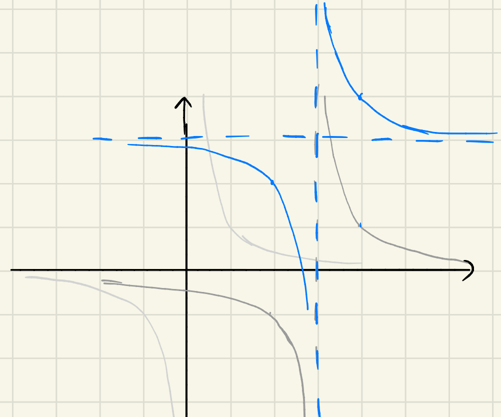
ESERCITAZIONE

1

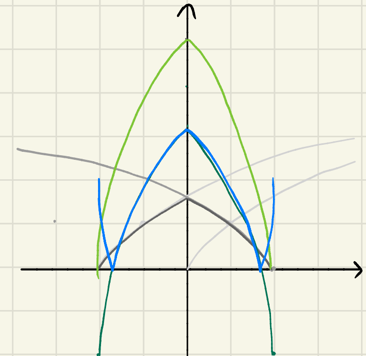


$\sqrt{x} \to \sqrt{|x|} \to \sqrt{|x-1|} \to$

$\sqrt{|x-1|}-1$

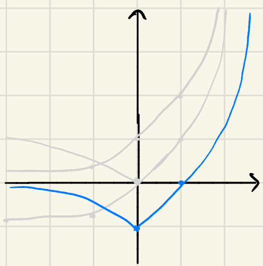


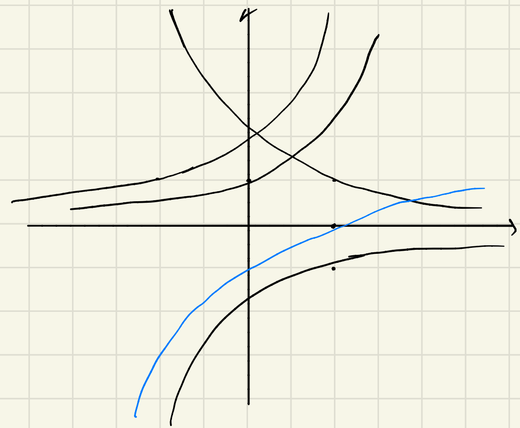
$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-3} \to \frac{1}{x-3}+3$



$\sqrt{x} \to \sqrt{x+2} \to \sqrt{|x|+2} \to \sqrt{2-|x|}$

$\to 3\sqrt{2-|x|} \to 3\sqrt{2-|x|}-2 \to |3\sqrt{2-|x|}-2|$





FUNZIONE INVERSA: $f: A \to B$ $\quad f^{-1}$ è una funzione tale che $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_B \\ f^{-1} \circ f = id_A \end{cases}$

(2) $f(x) = 2 - 3x \to f^{-1}(x) = -\frac{x-2}{3}$

(3) $f(x) = x^3 + 3x - 2 \to$ monotona crescente $\to$ invertibile $\to f^{-1}(x) = ?$

(4) $f(x) = x^2 - 2x \to$ non invertibile in $\mathbb{R}$

invertibile se $D = [1; +\infty)$, $C = [-1; +\infty) \to f^{-1}(x) =$ Homework

(5) $f(x) = \frac{x}{x-3}$ $\quad f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\} \to$ invertibile $\to f^{-1}(x) = -\frac{3x}{1-x}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

(6) $a_n = n^3 \cdot \sin \frac{1}{n^4}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} n^3 \sin \frac{1}{n^4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}} = 0$ $\quad$ Homework: dim. con definizione ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n} \ |a_n| < \varepsilon$

$\left| n^3 \sin \frac{1}{n^4} \right| < \varepsilon \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} < \varepsilon$ $\qquad \frac{1}{n^4} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^4}\right) < \frac{1}{n^4} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq n^3 \frac{1}{n^4} \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$