

DAVIDE DEL GIUDICE - FEDERICO BIZZARRI -
ANGELO BRAMBILLA - DANIELE LINARO

ESERCIZIARIO DI ELETTROTECNICA

INGEGNERIA INFORMATICA, DELL'AUTOMAZIONE E BIOME-
DICA – POLITECNICO DI MILANO

NOT EVERYTHING THAT COUNTS CAN BE COUNTED, AND NOT EVERYTHING
THAT CAN BE COUNTED COUNTS.

ALBERT EINSTEIN



Copyright © 2020 Davide del Giudice - Federico Bizzarri - Angelo Brambilla - Daniele Linaro

Last printing, February 2020

Questa raccolta di esercizi è frutto del prezioso lavoro dell'Ing. Davide del Giudice che li ha sia concepiti sia talvolta collezionati da appunti, dispense, libri di diversi autori. A lui il merito integrale di averli rappresentati graficamente in queste pagine. Lo studente Alberto Panzanini, nell'ambito di un'attività "150 ore" del Politecnico di Milano, ha curato gli esercizi risolti e le relative illustrazioni nell'a.a. 2019/2020.

Gli studenti, ai quali raccomandiamo di essere ora e sempre lettori critici, che trovassero imprecisioni, errori, lacune in questa raccolta sono invitati a segnalarceli.

Indice

Esercitazione 0	11
Es. 0.1	11
Es. 0.2	11
Soluzione	11
Es. 0.3	13
Es. 0.4	13
Es. 0.5	13
Es. 0.6	13
Es. 0.7	14
Es. 0.8	14
Es. 0.9	14
Soluzione	14
Es. 0.10	16
Es. 0.11	16
Es. 0.12	17
Es. 0.13	17
 Esercitazione 1	 19
Es. 1.1	19
Es. 1.2	19
Es. 1.3	19
Es. 1.4	19
Es. 1.5	20
Es. 1.6	20
Es. 1.7	21
Es. 1.8	21
Es. 1.9	21
Soluzione	21
Es. 1.10	23
Es. 1.11	23
Es. 1.12	23
Es. 1.13	23
Es. 1.14	24

Es. 1.15	24
Es. 1.16	24
Soluzione	24
Es. 1.17	26
Esercitazione 2	27
Es. 2.1	27
Es. 2.2	27
Soluzione	27
Es. 2.3	28
Es. 2.4	28
Es. 2.5	29
Es. 2.6	29
Es. 2.7	30
Soluzione	30
Es. 2.8	31
Es. 2.9	31
Es. 2.10	31
Es. 2.11	32
Es. 2.12	32
Es. 2.13	32
Es. 2.14	32
Es. 2.15	33
Es. 2.16	33
Es. 2.17	33
Es. 2.18	34
Es. 2.19	34
Es. 2.20	34
Es. 2.21	35
Esercitazione 3	37
Es. 3.1	37
Es. 3.2	37
Es. 3.3	37
Soluzione	37
Es. 3.4	38
Soluzione	38
Es. 3.5	40
Es. 3.6	40
Es. 3.7	40
Es. 3.8	41
Es. 3.9	41
Es. 3.10	41
Es. 3.11	41

Es. 3.12	42
Es. 3.13	42
Es. 3.14	42
Es. 3.15	42
Es. 3.16	43
Es. 3.17	43
Es. 3.18	44
Es. 3.19	44
Es. 3.20	44
Es. 3.21	45
Es. 3.22	45
Es. 3.23	45
Es. 3.24	46
Es. 3.25	46
Es. 3.26	46
Esercitazione 4	49
Es. 4.1	49
Es. 4.2	49
Es. 4.3	49
Soluzione	50
Es. 4.4	52
Es. 4.5	52
Es. 4.6	52
Es. 4.7	52
Es. 4.8	53
Es. 4.9	53
Es. 4.10	53
Es. 4.11	53
Es. 4.12	54
Esercitazione 5	55
Es. 5.1	55
Soluzione	55
Es. 5.2	58
Es. 5.3	58
Es. 5.4	58
Soluzione	59
Es. 5.5	61
Es. 5.6	62
Es. 5.7	62
Es. 5.8	62
Es. 5.9	63
Es. 5.10	63

Es. 5.11	64
Es. 5.12	64
Es. 5.13	65
Es. 5.14	65
Es. 5.15	66
Es. 5.16	66
Es. 5.17	66
Es. 5.18	67
Es. 5.19	67
Es. 5.20	67

Esercitazione 6 **69**

Es. 6.1	69
Soluzione	69
Es. 6.2	70
Es. 6.3	70
Es. 6.4	71
Es. 6.5	71
Soluzione	71
Es. 6.6	73
Es. 6.7	73
Es. 6.8	74
Es. 6.9	74
Es. 6.10	75
Es. 6.11	75
Es. 6.12	75
Es. 6.13	76
Es. 6.14	76
Es. 6.15	76
Es. 6.16	76
Es. 6.17	77
Es. 6.18	77
Es. 6.19	77

Esercitazione 7 **79**

Es. 7.1	79
Es. 7.2	79
Soluzione	80
Es. 7.3	82
Es. 7.4	83
Soluzione	83
Es. 7.5	85
Es. 7.6	85
Es. 7.7	86

Es. 7.8	86
Es. 7.9	86
Es. 7.10	87
Es. 7.11	87
Es. 7.12	87
Es. 7.13	88
Es. 7.14	88
Es. 7.15	88
Es. 7.16	89
Es. 7.17	89
Es. 7.18	90
Es. 7.19	90
Es. 7.20	90
Esercitazione 8	91

Es. 0.1

Dati: $v_{BA} = 3V$, $v_{AD} = 2V$, $v_{CD} = -1V$.

Determinare:

- Il grafo del circuito (orientato come le tensioni);
- Le tensioni mancanti.

Sol: $[v_{BD} = 5V, v_{BC} = 6V, v_{CA} = -3V]$

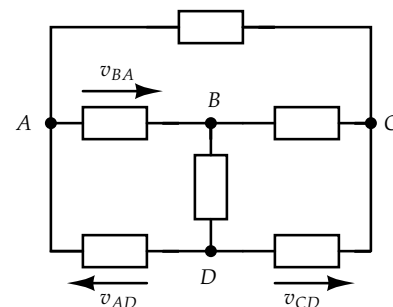


Figura 1: Es 0.1

Es. 0.2

Dati: $i_1 = -3A$, $i_4 = 1A$, $i_8 = -2A$, $i_9 = 2A$.

Determinare:

- Il grafo del circuito (orientato come le correnti).
- Le correnti mancanti.

Sol: $[i_2 = 1A, i_3 = -3A, i_5 = 2A, i_6 = -4A, i_7 = 4A]$

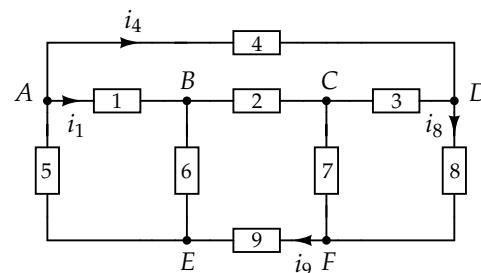


Figura 2: Es 0.2

Soluzione

SCEGLIAMO ARBITRARIAMENTE LE CORRENTI INCOGNITE come in figura 3 (freccie blu). Il grafo del circuito in figura 2, orientato come le correnti, è riportato in figura 4. Esso è caratterizzato da $n = 6$ nodi e $l = 9$ lati.

Ogni lato del grafo è caratterizzato da una corrente descrittiva e, delle $l = 9$ correnti di lato, cinque sono incognite. Poiché in generale, dato un circuito ed il grafo ad esso associato, è possibile determinare $n - 1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL) linearmente indipendenti tra loro, in questo caso si possono scrivere $n - 1 = 5$

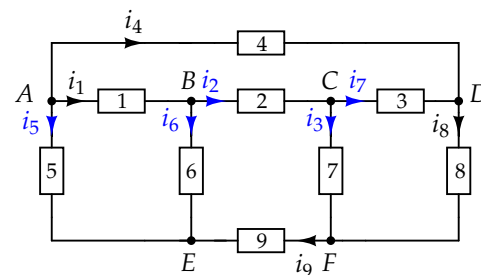


Figura 3: Circuito con le correnti mancanti aggiunte con verso arbitrario.

equazioni, cioè tante quante sono le correnti incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL per risolvere l'esercizio.

Ricordando che la legge di Kirchhoff per le correnti afferma che *la somma algebrica delle correnti attraverso una superficie chiusa orientata, che tagli solo terminali, è nulla*, si procede scegliendo cinque superfici chiuse e se ne fissa arbitrariamente l'orientamento. Le correnti che attraversano la superficie saranno prese col segno + se concordi con l'orientamento scelto e con il segno – altrimenti. Nello specifico, nella risoluzione di questo esercizio, si scelgono i tagli nodali indicati in figura 5 e il verso positivo è quello dall'esterno verso l'interno.

Le cinque KCL linearmente indipendenti, in cinque incognite, ottenute ai tagli nodali scelti sono

$$\text{Nodo A: } -i_4 - i_1 - i_5 = 0$$

$$\text{Nodo B: } +i_1 - i_2 - i_6 = 0$$

$$\text{Nodo D: } +i_4 + i_3 - i_8 = 0$$

$$\text{Nodo E: } +i_5 + i_6 + i_9 = 0$$

$$\text{Nodo F: } +i_7 - i_9 + i_8 = 0$$

Risolvendole si ottiene

$$i_5 = -i_4 - i_1 = 2\text{A}$$

$$i_6 = -i_9 - i_5 = -4\text{A}$$

$$i_2 = i_1 - i_6 = 1\text{A}$$

$$i_7 = i_9 - i_8 = 4\text{A}$$

$$i_3 = i_8 - i_4 = -3\text{A}$$

Si lascia allo studente la verifica che, se si fosse considerato il taglio nodale al nodo C, anziché al nodo B, si sarebbe comunque risolto l'esercizio. Inoltre si provi a cambiare l'orientamento delle superfici di taglio, anche non scegliendo lo stesso verso per tutte le superfici, e si verifichi che il risultato finale non cambia. Si provi ancora a scegliere orientamenti diversi per le correnti incognite: come cambiano i risultati in questo caso e perché?

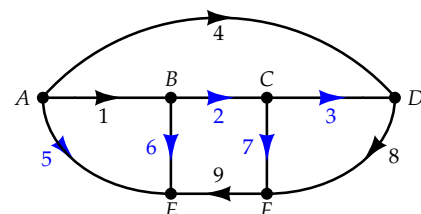


Figura 4: Grafo del circuito orientato come le correnti.

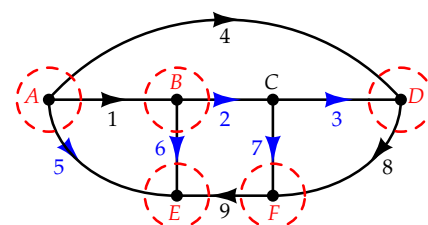


Figura 5: Tagli nodali considerati per scrivere le KCL.

Es. 0.3

Determinare:

- i_1 e i_2 .

Sol: [$i_1 = -3A$, $i_2 = -1A$]

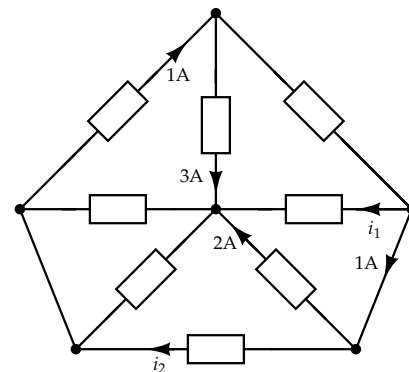


Figura 6: Es 0.3

Es. 0.4

Determinare:

- Il grafo del circuito (orientato come le correnti).
- Le correnti mancanti.

Sol: [$i_1 = 4A$ dal nodo C al nodo D , $i_2 = 5A$ dal nodo A al nodo C , $i_4 = 2A$ dal nodo D al nodo B]

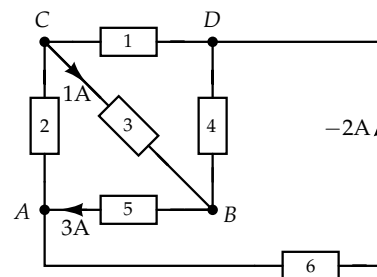


Figura 7: Es 0.4

Es. 0.5

Dati: $v_1 = 5V$, $i_1 = 2A$, $v_2 = 6V$, $i_2 = 1A$.

Determinare:

- Tutti i grafi necessari per una descrizione completa del circuito.
- Le tensioni e le correnti mancanti.

Sol: [$v_{AB} = -1V$, $i_3 = 2A$ dal nodo A al nodo B , $v_{CB} = -6V$, $i_4 = 3A$ dal nodo B al nodo C]

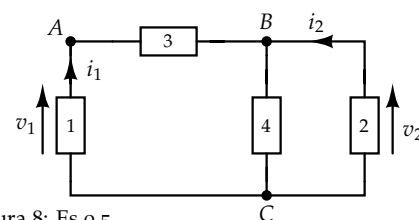


Figura 8: Es 0.5

Es. 0.6

Ricavare le tensioni e le correnti mancanti.

Sol: [$i_1 = 2A$ dal nodo A al nodo B , $i_5 = 2A$ dal nodo C al nodo D , $i_3 = 1A$ dal nodo B al nodo C , $i_6 = 1A$ dal nodo E al nodo C , $v_{CB} = -1V$, $v_{DB} = -3V$, $v_{CD} = 2V$]

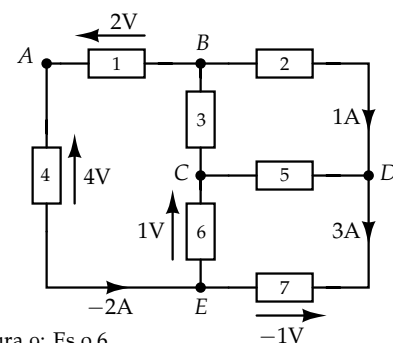


Figura 9: Es 0.6

Es. 0.7

- Disegnare il grafo del circuito (sia orientato come le tensioni, sia orientato come le correnti).
- Calcolare le correnti e le tensioni mancanti.

Sol: [$v_{BD} = 3V$, $v_{CD} = v_{CE} = 1V$, $i_1 = -5A$ dal nodo A al nodo B , $i_{T_{sx}} = -5A$ corrente al terminale con morsetto al nodo B in convenzione degli utilizzatori rispetto a v_{BD} , $i_{T_{dx}} = 5A$ corrente al terminale con morsetto al nodo C in convenzione dei generatori rispetto a v_{CD}]

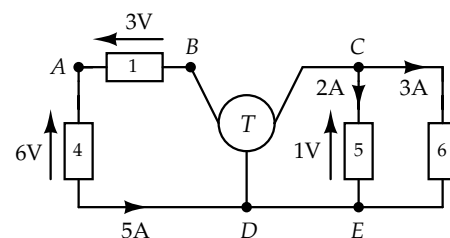


Figura 10: Es 0.7

Es. 0.8

Dati: $i_1 = 4A$, $i_2 = 3A$, $i_4 = -2A$, $v_1 = 1V$, $v_3 = 2V$, $v_5 = -4V$.

Determinare:

- La matrice di incidenza del circuito.
- Le correnti mancanti (a partire dalla matrice di incidenza ridotta).
- Le tensioni mancanti.

Sol: [$i_3 = 1A$ dal nodo A al nodo B , $i_5 = 1A$ dal nodo D al nodo B , $i_6 = 1A$ dal nodo D al nodo C , $v_{AC} = 1V$, $v_{DB} = -4V$, $v_{DC} = -5V$]

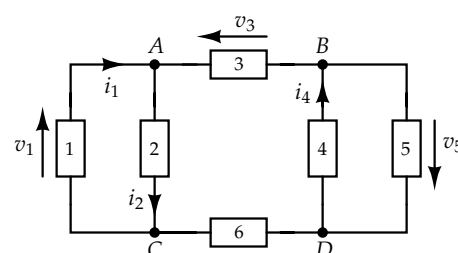


Figura 11: Es 0.8

Es. 0.9

Determinare:

- Il grafo del circuito usando la convenzione degli utilizzatori.
- Le tensioni e le correnti mancanti.
- La potenza assorbita da ogni bipolo. Quali di queste potenze sono realmente assorbite (o realmente erogate)?

Sol: [$v_2 = 11V$, $v_4 = -7V$, $i_1 = i_6 = 3A$, $i_4 = -5A$, $i_5 = i_7 = -2A$, $P_a^1 = -12W$, $P_a^2 = -33W$, $P_a^3 = 4W$, $P_a^4 = 35W$, $P_a^5 = -6W$, $P_a^6 = 24W$, $P_a^7 = -12W$]

Soluzione

LA CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI PREVEDE che il verso della corrente in un lato sia opposto a quello della tensione. Si consideri l'esempio in figura 13. In entrambi i casi, la potenza P_a assorbita dal bipolo è pari a $P_a = vi$.

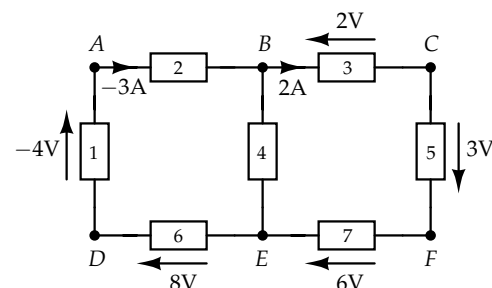


Figura 12: Es 0.9

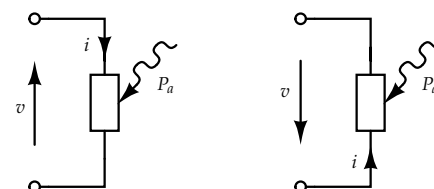


Figura 13: Convenzione degli utilizzatori per un generico bipolo.

QUALORA INVECE SI UTILIZZI LA CONVENZIONE DEI GENERATORI, il verso della corrente è concorde a quello della tensione. Si consideri l'esempio in figura 14. In entrambi i casi, la potenza P_e erogata dal bipolo è pari a $P_e = vi$.

Si tenga inoltre conto di quanto segue:

$P_a > 0$ potenza realmente assorbita

$P_a < 0$ potenza realmente erogata

$P_e > 0$ potenza realmente erogata

$P_e < 0$ potenza realmente assorbita

Assegnando arbitrariamente al circuito in figura 12 le correnti e le tensioni mancanti, secondo la convenzione degli utilizzatori, come in figura 15 (freccette e linee blu), si ottengono due grafi (figure 16 e 17). Quando si adotta una convenzione (degli utilizzatori o dei generatori) è sufficiente un solo grafo per descrivere in maniera completa il circuito perché i versi delle correnti e delle tensioni di lato sono legati tra loro. Il numero di nodi del grafo è $n = 6$ ed è allora possibile ricavare $n - 1 = 5$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL) linearmente indipendenti. I lati sono $l = 7$ ed è allora possibile ricavare $l - n + 1 = 2$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti.

Considerando le maglie ed tagli nodali ai nodi evidenziati in figura 18 si possono ricavare le correnti e le tensioni mancanti come segue.

$$\text{Maglia I: } -2V + 3V + 6V + v_4 = 0, \quad v_4 = -7V$$

$$\text{Maglia II: } -4V - v_2 - v_4 + 8V = 0, \quad v_2 = 11V$$

$$\text{Nodo A: } +i_1 - 3A = 0, \quad i_1 = 3A$$

$$\text{Nodo B: } +2A + i_4 - (-3A) = 0, \quad i_4 = 5A$$

$$\text{Nodo C: } +2A + i_5 = 0, \quad i_5 = -2A$$

$$\text{Nodo D: } +i_6 - i_1 = 0, \quad i_6 = i_1 = 3A$$

$$\text{Nodo F: } +i_5 - i_7 = 0, \quad i_7 = i_5 = -2A$$

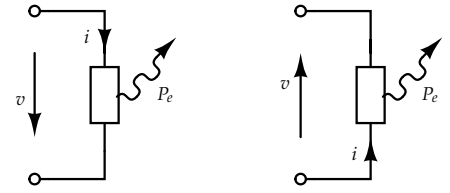


Figura 14: Convenzione dei generatori per un generico bipolo.

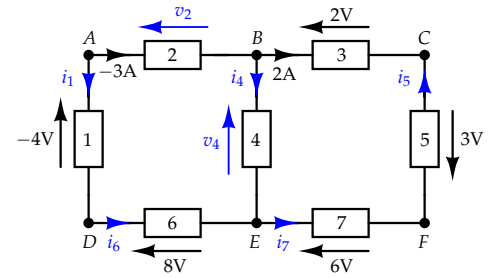


Figura 15: Circuito con le correnti e le tensioni mancanti aggiunte con verso arbitrario.

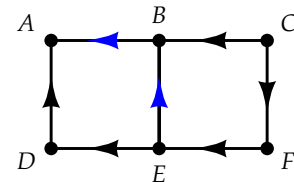


Figura 16: Grafo con lati orientati come le tensioni.

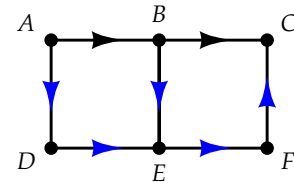


Figura 17: Grafo con lati orientati come le correnti.

É ora possibile calcolare la potenza assorbita da ciascun bipolo,

$$P_a^1 = v_1 i_1 = -12W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^2 = v_2 i_2 = -33W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^3 = v_3 i_3 = 4W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^4 = v_4 i_4 = 35W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^5 = v_5 i_5 = -6W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^6 = v_6 i_6 = 24W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^7 = v_7 i_7 = -12W \quad (\text{realmente erogata})$$

Si lascia allo studente la verifica della validità dei risultati ottenuti, attraverso l'applicazione del Teorema di Tellegen.

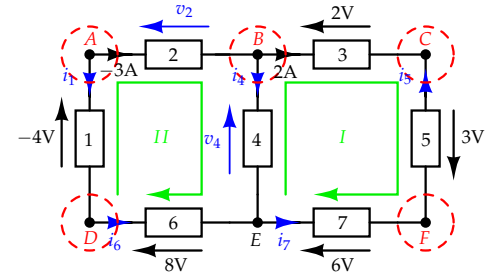


Figura 18: Circuito con maglie (in verde) e tagli nodali (in rosso) evidenziati.

Es. 0.10

Dati: $v_2 = 3V$, $v_3 = 1V$, $v_4 = -1V$, $v_6 = -2V$, $v_7 = -4V$, $i_5 = -3A$, $i_7 = 2A$; $i_8 = -1A$.

Determinare la potenza assorbita da ciascun bipolo.

Sol: [$P_1^A = 42W$, $P_2^A = -18W$, $P_3^A = 3W$, $P_4^A = 2W$, $P_5^A = -6W$, $P_6^A = -10W$, $P_7^A = -8W$, $P_8^A = -5W$.]

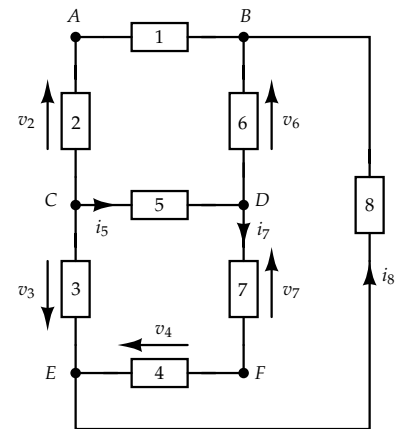


Figura 19: Es 0.10

Es. 0.11

Dati: $i_1 = 2A$, $v_2 = 4V$, $P_2^E = 12W$, $P_1^A = 12W$.

Determinare la potenza assorbita dai bipoli 3 e 4.

Sol: [$P_3^A = 20W$, $P_4^A = -20W$.]

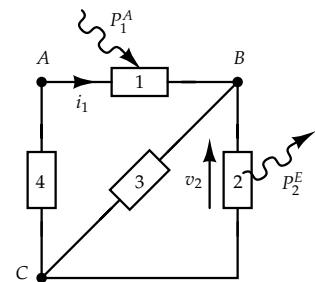


Figura 20: Es 0.11

Es. 0.12

Dati: $v_1 = -3V$, $v_4 = 5V$, $i_3 = 1A$, $P_4^E = 10W$.

Determinare P_1 , P_2 e P_3 .

Sol: [$P_1 = -6W$, $P_2 = 24W$, $P_3 = 8W$.]

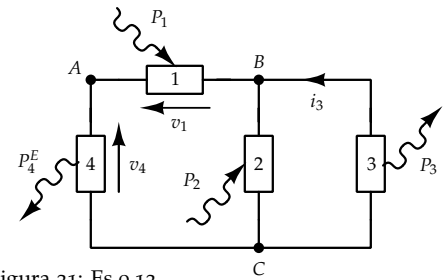


Figura 21: Es 0.12

Es. 0.13

Dati: $v_1 = 10V$, $i_1 = 5A$, $v_2 = -5V$, $i_2 = 3A$, $v_3 = 3V$, $i_3 = -4A$.

- Determinare le variabili descrittive del quadripolo.
- Sfruttando il Teorema di Tellegen, ricavare la potenza assorbita dal quadripolo.

Sol: [$v_{CA} = -10V$, $v_{DA} = -5V$, $v_{BA} = -2V$, $i_B = -4A$, $i_C = -2A$ e $i_D = 1A$ correnti correnti ai terminali con morsetto al nodo B, C e D, rispettivamente, in convenzione dei generatori rispetto alle tensioni v_{BA} , v_{CA} e v_{DA} , $P_Q^A = -23W$.]

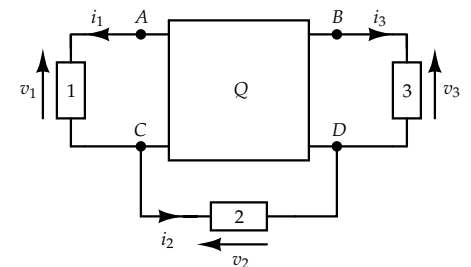


Figura 22: Es 0.13

Es. 1.1

Determinare:

- Tutti i grafi necessari per una descrizione completa del circuito.
- Tutte le tensioni e correnti che è necessario conoscere per poter affermare di aver "risolto" il circuito.

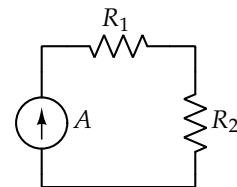


Figura 23: Es 1.1

Es. 1.2

Determinare v_1 e v_2 in funzione dei parametri del circuito.

Sol: $[v_1 = \frac{R_1(E - AR_2)}{R_1 + R_2}, v_2 = \frac{R_2(E + AR_1)}{R_1 + R_2}]$

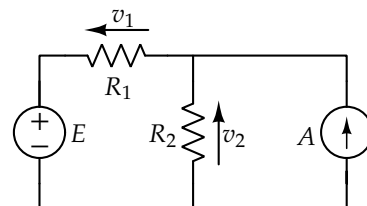


Figura 24: Es 1.2

Es. 1.3

Dati: $E = 10V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $A = 1A$.

Determinare i_1 e v_2 .

Sol: $[i_1 = \frac{7}{3}A, v_2 = \frac{16}{3}V]$

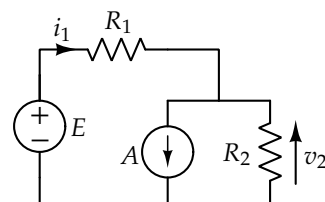


Figura 25: Es 1.3

Es. 1.4

Determinare i_e in funzione dei parametri del circuito.

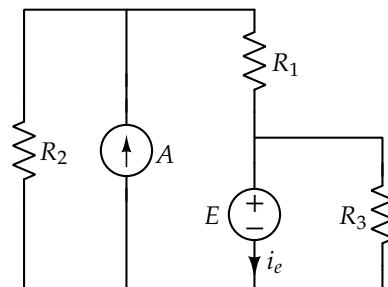


Figura 26: Es 1.4

Sol: $[i_e = \frac{R_2 A}{R_1 + R_2} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3)E}{(R_1 + R_2)R_3}]$

Es. 1.5

Dati: $A_1 = 1A$, $A_2 = 2A$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

- Determinare la potenza assorbita da ciascun componente. Quali di queste potenze sono in realtà assorbite (o erogate)?
- Verificare i risultati ottenuti con il teorema di Tellegen.

Sol: $[P_A^{A_1} = 1W$ (realmente assorbita), $P_A^{R_1} = 1W$ (realmente assorbita), $P_A^{R_2} = 2W$ (realmente assorbita), $P_A^{A_2} = -4W$ (realmente erogata)]

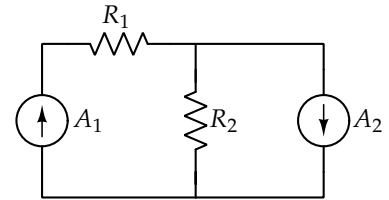


Figura 27: Es 1.5

Es. 1.6

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione di ciascun componente del circuito.
- La potenza assorbita dal tripolo T in funzione dei parametri del circuito.

Sol: $[E$ definito su base corrente, A definito su base tensione, R definito sia su base tensione che corrente, circuito aperto definito su base tensione, tripolo T definito su base (i_1, i_2) e su base (v_1, v_2) purché $r_{12} \neq 0$ e $r_{21} \neq 0$, $P_A^T = \frac{A(E - r_{12}A)(r_{12} + r_{21})}{R_1}]$

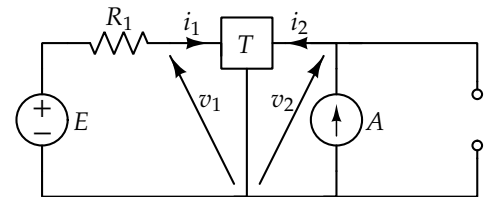


Figura 28: Es 1.6

Es. 1.7

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E = 5V$, $P_E^E = 10W$.

Determinare la corrente A e la potenza erogata dal generatore di corrente.

Sol: $[A = -1A, P_E^A = 2W]$

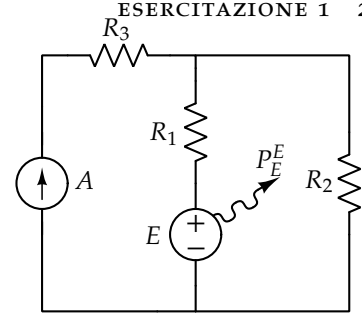


Figura 29: Es 1.7

Es. 1.8

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = gv_1 \\ i_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione del tripolo T .
- La corrente i in funzione dei parametri del circuito. Per quali valori di g è possibile determinare i ?

Sol: $[T \text{ definito su base } (v_1, v_2) \text{ e su base } (i_1, v_2) \text{ purché } g \neq 0, i = -\frac{E}{R(3+2Rg)}, g \neq -\frac{3}{2R}]$

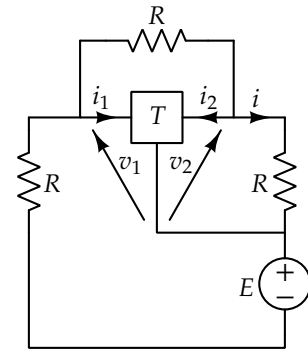


Figura 30: Es 1.8

Es. 1.9

Determinare la corrente i_{cc} in funzione dei parametri del circuito.

Sol: $[i_{cc} = \frac{E_2(R_1+R_2)-E_1R_2}{R_1R_2}]$

Soluzione

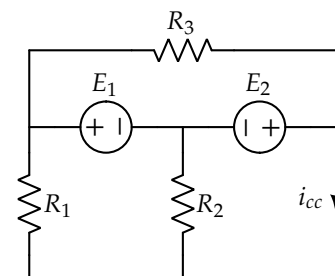


Figura 31: Es 1.9

PER DISEGNARE IL GRAFO DEL CIRCUITO in figura 31, orientato come le tensioni (secondo la convenzione degli utilizzatori), è necessario scegliere arbitrariamente i versi delle tensioni mancanti, come

riportato in figura 32. Si ottiene dunque il grafo in figura 33. Esso è caratterizzato da $n = 4$ nodi e $l = 6$ lati. Si possono quindi ricavare $n - 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL), linearmente indipendenti tra loro, e $l - n + 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti tra loro: cioè tante quante sono le correnti e le tensioni incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL e le KVL-II per risolvere l'esercizio.

Osservando il circuito in figura 34 si nota che è possibile ricavare i_{cc} dalla KCL al taglio nodale al nodo 1:

$$i_{cc} = -i_1 - i_2 \quad (1)$$

È quindi necessario calcolare i_1 e i_2 . Si può ricavare i_2 dalla maglia I , infatti:

$$v_2 + E_2 = 0 \rightarrow R_2 i_2 + E_2 = 0 \rightarrow i_2 = -\frac{E_2}{R_2} \quad .$$

Conoscendo i_2 e quindi di fatto anche v_2 dalla legge di Ohm, possiamo ricavare i_1 dalla maglia II . Infatti:

$$v_1 - E_1 - v_2 = 0 \rightarrow R_1 i_1 - E_1 - R_2 i_2 = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1} \quad .$$

Sostituendo nell'equazione 1 si può infine ricavare i_{cc} come segue:

$$\begin{aligned} i_{cc} &= -i_1 - i_2 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \\ &= \frac{-E_1 R_2 + E_2 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2} = \frac{E_2 (R_1 + R_2) - E_1 R_2}{R_1 R_2} \quad . \end{aligned}$$

Si può poi verificare che il risultato è *plausibile* facendo l'analisi dimensionale:

$$\frac{[\text{V}\Omega]}{[\Omega^2]} = \left[\frac{\text{V}}{\Omega} \right] = [\text{A}] \quad .$$

È importante sottolineare che, se dimensionalmente il risultato non fosse risultato in $[\text{A}]$, avremmo avuto certezza di aver sbagliato la risoluzione dell'esercizio!

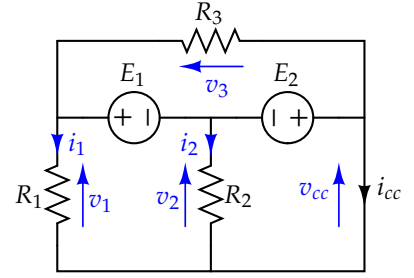


Figura 32: Circuito con segnati (in blu) i parametri secondo la convenzione degli utilizzatori.

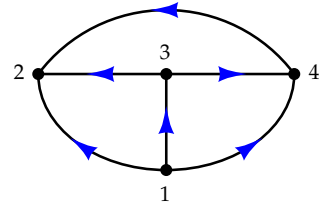


Figura 33: Grafo del circuito orientato come le tensioni, secondo la convenzione degli utilizzatori.

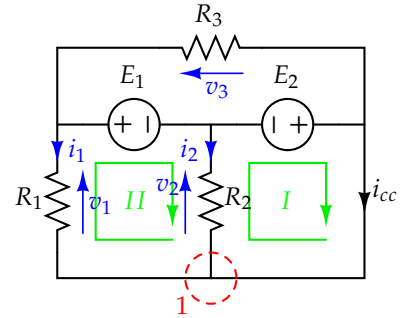


Figura 34: Circuito con le maglie (in verde) e i nodi (in rosso) utilizzati per la risoluzione.

Es. 1.10

- Determinare la tensione v .
- Si sostituisca il circuito aperto tra i morsetti $a-b$ con un generatore di tensione V (supposta nota). Determinare la corrente i in tali condizioni.

Sol: $[v = E + R_1 A, i = \frac{V - E - R_1 A}{R_1 + R_3}]$

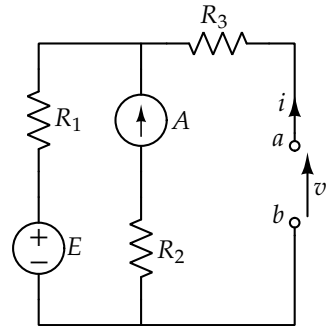


Figura 35: Es 1.10

Es. 1.11

Determinare la potenza erogata dal generatore E .

Sol: $[P_E^E = E^2 \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3}]$

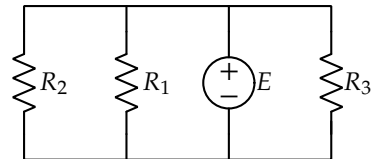


Figura 36: Es 1.11

Es. 1.12

Dati: $A_1 = 4A$, $A_2 = 2A$, $E = 3V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

Determinare i .

Sol: $[i = 3A]$

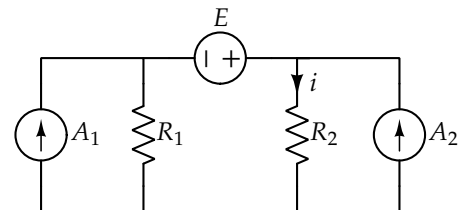


Figura 37: Es 1.12

Es. 1.13

Dati: $E = 10V$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_g = 10\Omega$.

Determinare r_x | $i_g = 0$.

Sol: $[r_x = 1\Omega]$

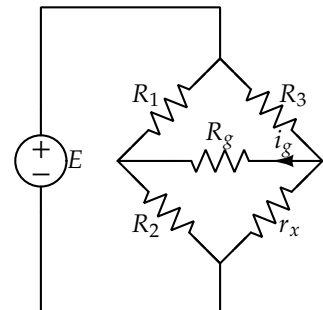


Figura 38: Es 1.13

Es. 1.14

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione del tripolo T (hp: $\alpha \neq 0$).
- Per quali valori di α è possibile determinare i_2 ?
- La potenza erogata dal tripolo T e dal generatore di tensione E_1 .

Sol: [Tripolo T definito su base (v_1, i_2) , $i_2 = \frac{E_1}{R_2 + R_3(\alpha + 1)}$, $\alpha \neq -\frac{R_2}{R_3} - 1$,

$$P_E^T = -\frac{\alpha E_1}{R_2 + R_3(1 + \alpha)} \left(E_2 - \frac{E_1(R_1\alpha + R_3(1 + \alpha))}{R_2 + R_3(1 + \alpha)} \right), P_E^{E_1} = \frac{E_1^2}{R_2 + R_3(1 + \alpha)}]$$

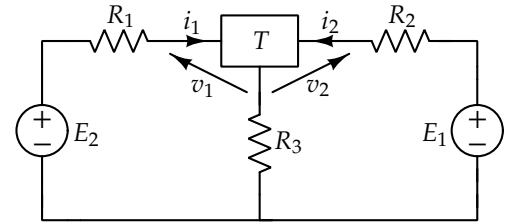


Figura 39: Es 1.14

Es. 1.15

Dati: $P_A^1 = 72W$, $P_A^2 = 40W$, $A = 5A$, $i_R = 1A$, $R = 1\Omega$.

Determinare v_3 e la potenza erogata dal generatore di corrente.

Sol: [$v_3 = 13V$, $P_E^A = 35W$]

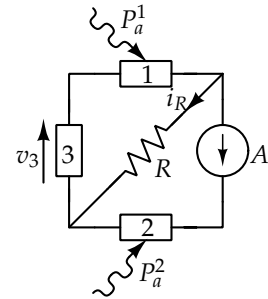


Figura 40: Es 1.15

Es. 1.16

Determinare $A \mid v_2 = 0$.

Sol: [$A = \frac{E}{R_3}$]

Soluzione

IL CIRCUITO IN FIGURA 41 è caratterizzato da $n = 4$ nodi e $l = 6$ lati. Si possono quindi ricavare $n - 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL), linearmente indipendenti tra loro, e $l - n + 1 = 3$

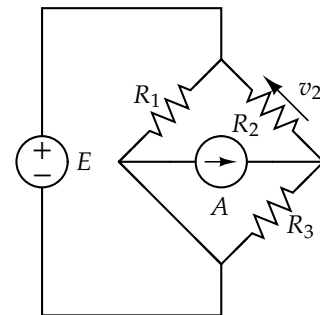


Figura 41: Es 1.16

equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti tra loro: cioè tante quante sono le correnti e le tensioni incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL e le KVL-II per risolvere l'esercizio.

Per risolvere questa tipologia di esercizi è possibile procedere in due modi diversi:

- I Approccio: ricavare una funzione $v_2 = f(E, A, R_1, R_2, R_3)$ e dopodiché imporre $A \mid v_2 = 0$.
- II Approccio: considerare $v_2 = 0$ e ricavare quanto vale A .

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO CON IL PRIMO APPROCCIO si considerino la maglia ed il taglio nodale evidenziati in figura 42

$$\text{Maglia I: } E - v_2 - v_3 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } A + \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0 \quad .$$

Mettendo a sistema le due equazioni così ottenute, si ricava

$$v_2 = \frac{R_2(E - R_3A)}{R_2 + R_3} \quad .$$

Si può dunque concludere che $v_2 = 0$ se

$$E - R_3A = 0 \rightarrow A = \frac{E}{R_3} \quad .$$

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO CON IL SECONDO APPROCCIO è necessario osservare che, assumendo $v_2 = 0$ si ottiene $i_2 = \frac{v_2}{R_2} = 0$. Considerando il circuito in figura 42, si ricava dunque

$$\text{Nodo 3: } A - i_3 + i_2 = A - i_3 = 0 \rightarrow A = i_3$$

$$\text{Maglia I: } E - v_2 - R_3 i_3 = E - R_3 i_3 = 0 \rightarrow E = R_3 i_3 \quad ,$$

da cui si conclude che

$$A = \frac{E}{R_3} \quad .$$

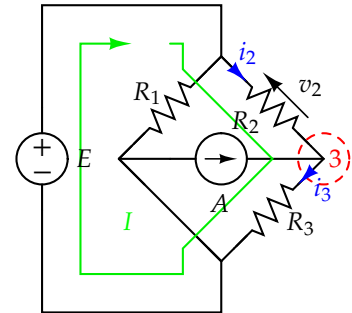


Figura 42: Circuito con la maglia (in verde) e il taglio nodale (in rosso) utilizzati per la risoluzione.

Es. 1.17

Si consideri un tripolo T caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ i_2 = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{cases}$$

Determinare le basi di definizione del tripolo nei seguenti casi:

- $\alpha = \gamma = 0$ ($\beta, \delta \neq 0$).
- $\alpha = \beta = 0$ ($\gamma, \delta \neq 0$).
- $\gamma = \delta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$).
- $\beta = \delta = 0$ ($\alpha, \gamma \neq 0$).
- $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Sol: [

- $\alpha = \gamma = 0$ ($\beta, \delta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, i_2) e (v_1, v_2) .
- $\alpha = \beta = 0$ ($\gamma, \delta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, i_2) e (v_1, v_2)
- $\gamma = \delta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, v_2) e (i_1, v_2) .
- $\beta = \delta = 0$ ($\alpha, \gamma \neq 0$) \rightarrow base (v_1, v_2) e (i_1, v_2) .
- $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \rightarrow$ base (v_1, v_2)]

Es. 2.1

Dati: $R_1 = \frac{1}{2}\Omega$, $R_2 = \frac{1}{5}\Omega$, $R_3 = \frac{6}{7}\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = \frac{2}{3}\Omega]$

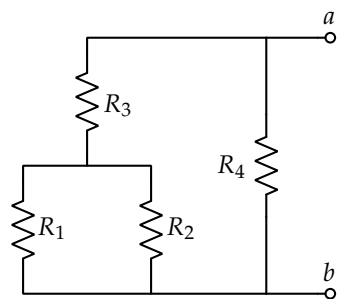


Figura 43: Es 2.1

Es. 2.2

Dati: $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 3\Omega$, $R_3 = R_6 = 6\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 6\Omega]$

Soluzione

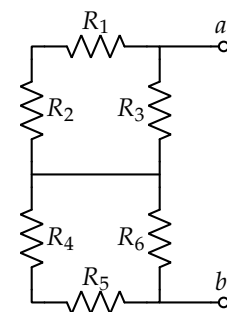


Figura 44: Es 2.2

OSSERVANDO IL CIRCUITO in figura 44 si nota che i resistori R_1 e R_2 sono tra loro in serie. Vale lo stesso per R_4 e R_5 . Si possono quindi sostituire tali coppie con due resistori aventi resistenza equivalente:

$$\text{Serie } R_1, R_2 \rightarrow R_{12} = R_1 + R_2 = 6\Omega$$

$$\text{Serie } R_4, R_5 \rightarrow R_{45} = R_4 + R_5 = 6\Omega$$

Sostituendo tali componenti nel circuito iniziale è possibile ottenere il circuito in figura 45. Come mostrato sempre in figura 45, si possono far coincidere i nodi c e d . Così facendo risulta evidente che R_{12} ed R_3 sono in parallelo, così come R_{45} ed R_6 . Si calcolano dunque le due resistenze equivalenti a tali connessioni.

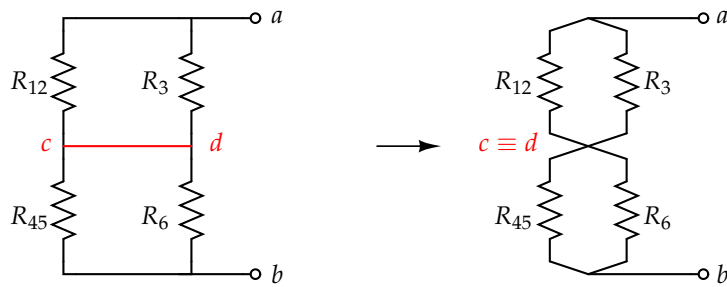


Figura 45: I nodi c e d sono equipotenziali e quindi R_{12} ed R_3 sono in parallelo, così come R_{45} ed R_6 .

$$\begin{aligned} \text{Parallelo } R_{12}, R_3 &\rightarrow R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = 3\Omega \\ \text{Parallelo } R_{45}, R_6 &\rightarrow R_{456} = \frac{R_{34}R_5}{R_{34} + R_5} = 3\Omega . \end{aligned}$$

Si ottiene dunque il circuito equivalente con i due resistori R_{123} e R_{456} in figura 46. Si nota che tali componenti sono tra loro in serie e quindi la resistenza equivalente ai morsetti a - b vale

$$R_{eq} = R_{123} + R_{456} = 6\Omega .$$

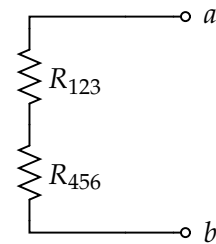


Figura 46: Circuito equivalente ottenuto sostituendo i resistori con resistenza equivalente R_{123} e R_{456} .

Es. 2.3

Dati: $E = 12V$, $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 8\Omega$.

Determinare V .

Sol: [$v = -2V$]

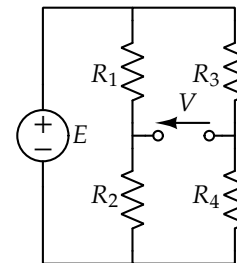


Figura 47: Es 2.3

Es. 2.4

Dati: $A = 6A$, $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 8\Omega$.

Determinare i .

Sol: [$i = 1A$]

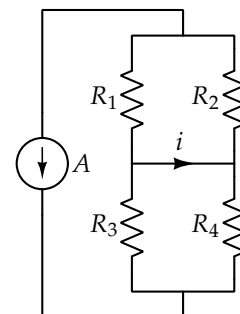


Figura 48: Es 2.4

Es. 2.5

Dati: $E = 30\text{V}$, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = R_5 = R_6 = 5\Omega$, $R_4 = 2.5\Omega$.

Determinare i_1 , v_2 e i_5 .

Sol: $[i_1 = 1\text{A}, v_2 = 5\text{V}, i_5 = -0.25\text{A}]$

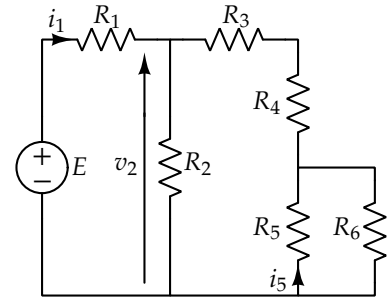


Figura 49: Es 2.5

Es. 2.6

Determinare:

- Il circuito equivalente di Thevenin e di Norton ai morsetti a - b , rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- La potenza erogata dal generatore di corrente A .
- Si connetta ai morsetti a - b un resistore R_x . Quanto deve valere R_x affinché la sua potenza assorbita sia massima?

Sol: $[R_{th} = \frac{7}{3}R, E_{th} = E, G_{nr} = \frac{3}{7R}, A_{nr} = -\frac{3E}{7R}, P_e^A = (E + RA)A, P_a^{R_x}$ è massima se $R_x = R_{th}]$

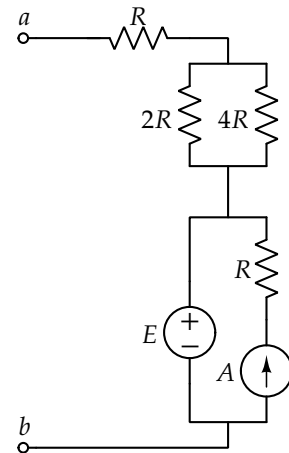


Figura 50: Es 2.6

Es. 2.7

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Il valore di A tale per cui il circuito equivalente si comporta come un resistore.

Sol: $[G_{nr} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3}, A_{nr} = \frac{E(R_2 + R_3) - A R_2 R_3}{R_2 R_3}]$, il circuito equivalente si comporta come un resistore quando $A = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}$

Soluzione

PER DETERMINARE IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON del circuito in figura 51 si ricavano le correnti in funzione di i e di v . Come prima cosa si osserva che i due resistori di resistenza R_2 e R_3 sono in parallelo. Si sostituiscono dunque con un singolo resistore avente resistenza equivalente pari a $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

Considerando la Maglia I evidenziata nel circuito in figura 52, si ricava subito che la tensione ai capi del resistore R_1 è pari a v e quindi la corrente che lo attraversa è pari a $\frac{v}{R_1}$. Considerando la legge di Kirchhoff per le correnti (KCL) al taglio nodale al Nodo 1, si ricava che la corrente che scorre attraverso il generatore indipendente di tensione è pari a $i - \frac{v}{R_1}$. Considerando la KCL al taglio nodale al Nodo 2 si ricava che la corrente che scorre nel resistore di resistenza R_{23} è pari a $i - \frac{v}{R_1} + A$.

Considerando la Maglia I del circuito in figura 53 si ottiene l'equazione

$$v + E - R_{23} \left(i - \frac{v}{R_1} + A \right) = 0 \quad (2)$$

Sostituendo il valore di R_{23} calcolato in precedenza e risolvendo si ricava

$$i = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} v + \frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3} \quad (3)$$

Si conclude dunque che i parametri per il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, in figura 54, sono:

$$G_{nr} = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$

$$A_{nr} = \frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3}$$

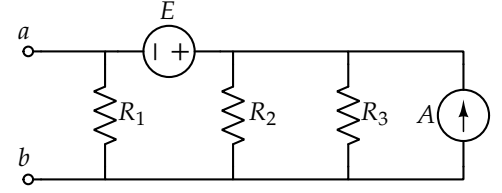


Figura 51: Es 2.7

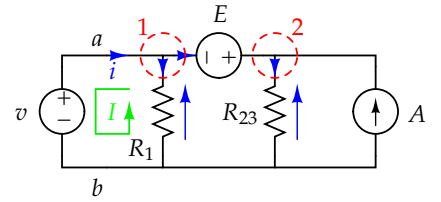


Figura 52: Circuito con evidenziati i tagli nodali (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzate per ricavare le correnti. Per calcolare il circuito equivalente di Norton è necessario imporre una tensione v ai morsetti $a-b$, ciò è equivalente al collegare un generatore indipendente di tensione (che genera una tensione v) a tali morsetti.

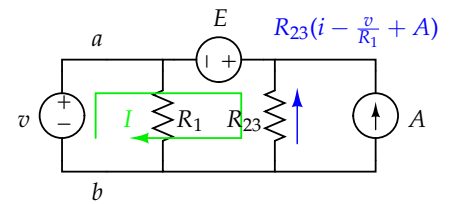


Figura 53: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) utilizzata.

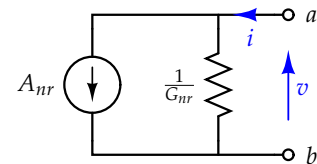


Figura 54: Circuito equivalente di Norton.

TALE CIRCUITO EQUIVALENTE si comporta come un resistore se e solo se $A_{nr} = 0$. Ciò accade se

$$\frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3} = 0 \rightarrow A = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}.$$

Es. 2.8

Dati: $E = 5\text{V}$, $A = 5\text{A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = \frac{5}{6}\text{A}]$

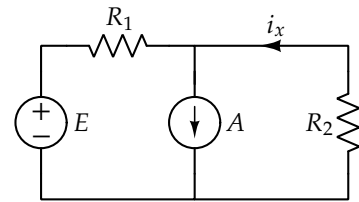


Figura 55: Es 2.8

Es. 2.9

Dati: $E_1 = 42\text{V}$, $E_2 = 24\text{V}$, $A = 2\text{A}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 3\Omega$.

Determinare v_x .

Sol: $[v_x = 12\text{V}]$

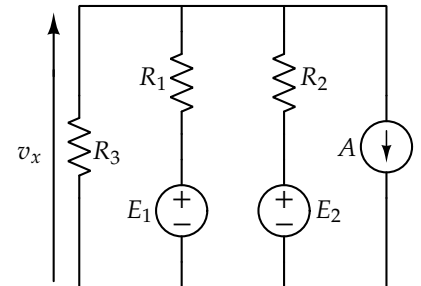


Figura 56: Es 2.9

Es. 2.10

Dati: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 2\Omega]$

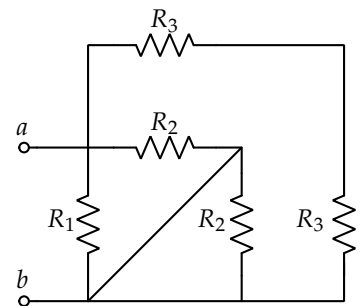


Figura 57: Es 2.10

Es. 2.11

Determinare:

- La potenza erogata dal generatore di tensione E .
- La potenza assorbita dal resistore R_2 .

Sol: $[P_E^E = \frac{E(E+R_1A)}{3R_1}, P_A^{R_2} = \frac{A^2 R_3^2 R_2}{(R_2+R_3)^2}]$

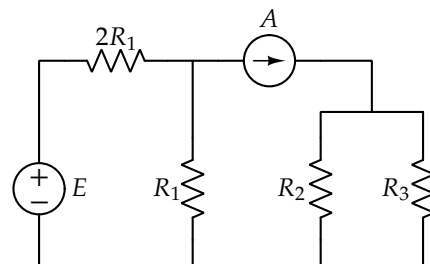


Figura 58: Es 2.11

Es. 2.12

Determinare:

- La corrente i_2 .
- La potenza assorbita del generatore di tensione E .

Sol: $[i_2 = \frac{ER_1}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}, P_A^E = -\frac{E^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}]$

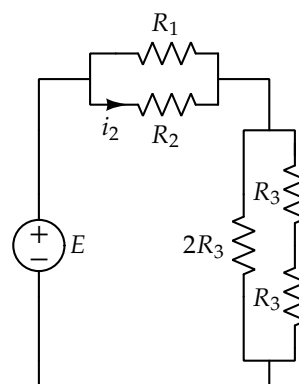


Figura 59: Es 2.12

Es. 2.13

Dati: $E = 9V, R_1 = 4\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 6\Omega, R_5 = 5\Omega, R_6 = 7\Omega$.

Determinare v_1 e i_4 .

Sol: $[v_1 = 6V, i_4 = 0.75A]$

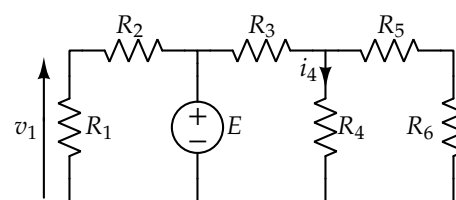


Figura 60: Es 2.13

Es. 2.14

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

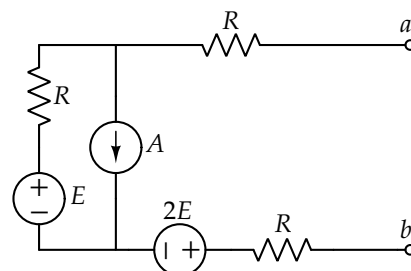


Figura 61: Es 2.14

Sol: $[R_{th} = 3R, E_{th} = -(E + RA)]$

Es. 2.15

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{2}{R}, A_{nr} = -\frac{E_1 + RA}{R}]$

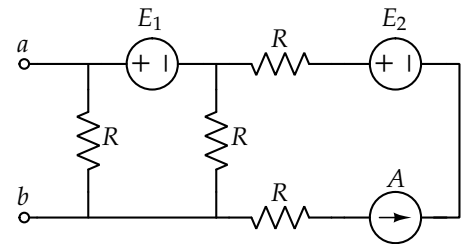


Figura 62: Es 2.15

Es. 2.16

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = \frac{A_1 R_1 + A_2 R_2 - E_2 - E_1}{R_1 + R_2}]$

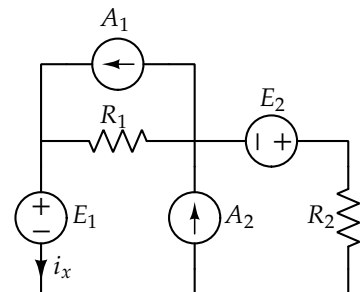


Figura 63: Es 2.16

Es. 2.17

Dati: $R_1 = 1\Omega, R_2 = 60\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 90\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 1\Omega]$

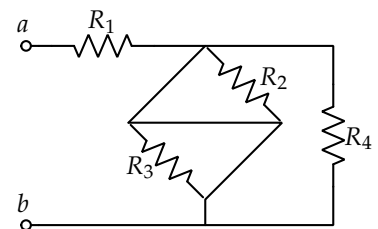


Figura 64: Es 2.17

Es. 2.18

Determinare la corrente i_2 .

Sol: $[i_2 = \frac{E_1 R_3 + E_2 R_1 - A R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}]$

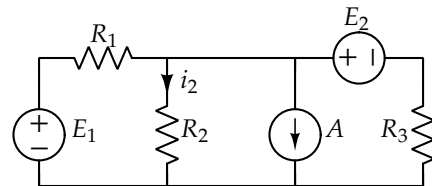


Figura 65: Es. 2.18

Es. 2.19

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}, A_{nr} = \frac{A(R_1 R_4 - R_2 R_3)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}]$

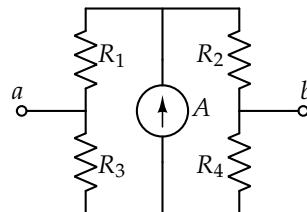


Figura 66: Es. 2.19

Es. 2.20

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_a = 0 \\ i_b = g v_a \end{cases}$$

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si sostituisca la resistenza R_3 con un circuito aperto. In questo caso, è ancora possibile determinare il circuito di equivalente di Thévenin? Motivare la risposta.

Sol: [Considerando R_3 si ottiene: $R_{th} = R_3$, $E_{th} = -\frac{g R_1 R_3 E}{R_1 + R_2}$. Nel caso in cui si sostituisce la resistenza R_3 con un circuito aperto non è più possibile determinare il circuito equivalente di Thévenin perché l'equivalente ai morsetti $a-b$ è un generatore di corrente (componente non controllabile in corrente e che non permette, quindi, di essere descritto mediante un circuito equivalente di Thévenin)]

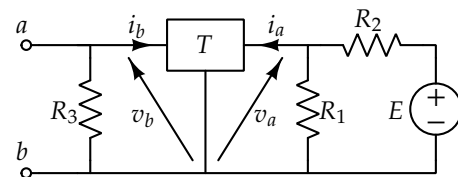


Figura 67: Es. 2.20

Es. 2.21

Dati: $A_2 = 1\text{A}$, $A_3 = 5\text{A}$, $E = 4\text{V}$, $R = 2\Omega$.

Determinare la corrente A_1 | $v = 0$.

Sol: [$A_1 = -0.5\text{A}$]

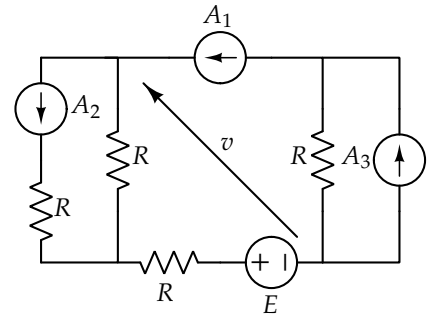


Figura 68: Es 2.21

Es. 3.1

Determinare la potenza erogata dal CCVS P_e^{CCVS} .

Sol: $[P_e^{CCVS} = \frac{rA(E+2RA)}{3R}]$

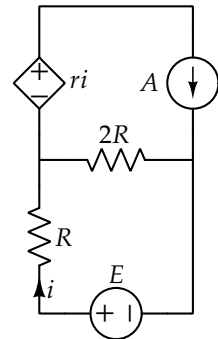


Figura 69: Es 3.1

Es. 3.2

Determinare la tensione v_0 . Per quali valori di α e β non è possibile determinare v_0 ?

Sol: $[v_0 = -\frac{E(1-\beta)}{3+\alpha-\beta}, 3+\alpha-\beta \neq 0]$

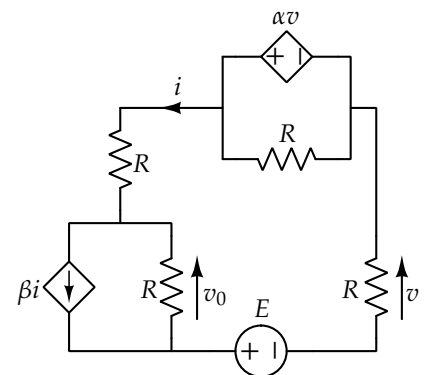


Figura 70: Es 3.2

Es. 3.3

Determinare, se esiste, $A \mid P_e^{CCVS} = 0$ (hp: $R_1 + R_2 + r \neq 0$).

Sol: $[P_e^{CCVS} = 0 \text{ se } A = -\frac{E}{R_2} \text{ o se } A = \frac{E}{R_1+r} \text{ (purché } r \neq -R_1)]$

Soluzione

IN PRIMIS È NECESSARIO CALCOLARE LA POTENZA erogata dal generatore di tensione pilotato in corrente: $P_e^{CCVS} = ri_1i$ (denominando

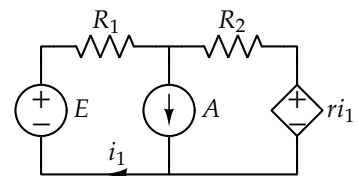


Figura 71: Es 3.3

i la corrente che attraversa tale generatore come in figura 72). Si nota dunque che è necessario ricavare il valore delle correnti incognite i e i_1 .

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo A in figura 72 si ricava

$$i_1 + i = A \rightarrow i = A - i_1 . \quad (4)$$

Scrivendo poi la KVL-II alla maglia I in figura 72 si ottiene

$$E - R_1 i_1 + R_2 i - r i_1 = 0 . \quad (5)$$

Sostituendo l'equazione 4 nell'equazione 5 e risolvendo, si ricava

$$\begin{aligned} i &= \frac{E + R_2 A}{R_1 + R_2 + r} \\ i_1 &= \frac{E - A(R_1 + r)}{R_1 + R_2 + r} . \end{aligned} \quad (6)$$

Si nota dunque che l'ipotesi $R_1 + R_2 + r \neq 0$ è necessaria per garantire l'esistenza di tale risultato. La potenza

$$p_e^{CCVS} = \frac{r(E + R_2 A)(E - A(R_1 + r))}{(R_1 + R_2 + r)^2} \quad (7)$$

può essere nulla se $A = -\frac{E}{R_2}$ o se $A = \frac{E}{R_1 + r}$ per $r \neq -R_1$.

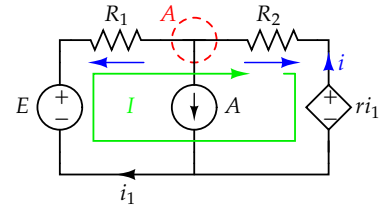


Figura 72: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) utilizzate per ricavare le correnti.

Es. 3.4

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Esistono dei valori di α per cui il circuito equivalente di Norton non esiste?

Sol: $[R_{th} = \frac{R(1-\alpha)}{2}, E_{th} = \frac{E}{2}]$. Il circuito equivalente di Norton esiste sse $\alpha \neq 1$

Soluzione

PER DETERMINARE I PARAMETRI del circuito equivalente di Thévenin, si collega un generatore indipendente di corrente tra i morsetti $a-b$ come in figura 74: ciò equivale ad imporre una corrente entrante nel morsetto a pari ad i . Bisogna poi procedere per ricavare $v(i)$.

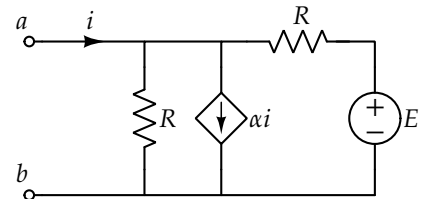


Figura 73: Es 3.4

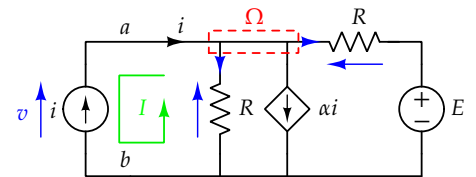


Figura 74: Circuito con evidenziato il taglio (in rosso) e la maglia (in verde) utilizzate per ricavare le correnti.

Considerando la maglia I nel circuito in figura 74, si ricava subito che la tensione ai capi del resistore in parallelo al generatore indipendente di corrente è pari a v e dunque la corrente che lo attraversa è v/R . Considerando quindi la KCL al taglio Ω si ricava che la corrente che attraversa l'altro resistore è pari a $i - v/R - \alpha i$ (figura 75).

Considerando la KVL-II alla maglia II in figura 75, si ricava

$$v - R \left(i - \frac{v}{R} - \alpha i \right) - E = 0, \quad (8)$$

ossia

$$v = \frac{R(1-\alpha)}{2} i + \frac{E}{2}. \quad (9)$$

Si conclude dunque che i parametri del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, secondo lo schema circuitale in figura 76, sono:

$$R_{th} = \frac{R(1-\alpha)}{2}$$

$$E_{th} = \frac{E}{2}.$$

PER RISPONDERE ALLA SECONDA RICHIESTA è necessario ricavare $i(v)$ dall'equazione 8. Si ottiene $i(v) = \frac{2}{R(1-\alpha)}v - \frac{E}{R(1-\alpha)}$. Si deduce dunque che i parametri del circuito equivalente di Norton, secondo lo schema circuitale in figura 54, sono

$$G_{nr} = \frac{2}{R(1-\alpha)}$$

$$A_{nr} = -\frac{E}{R(1-\alpha)}.$$

Si osserva dunque che l'equivalente di Norton non esiste quando $\alpha = 1$. Infatti, se α tende a 1 allora $|R_{th}|$ tende a zero 0 e $|G_{nr}|$ tende a $+\infty$. Se fosse $\alpha = 1$ allora R_{th} sarebbe nullo e $E_{th} = \frac{E}{2}$. Si avrebbe dunque un circuito equivalente come in figura 77 e si avrebbe $v = \frac{E}{2}$ per qualsiasi corrente i imposta. L'equivalente così ottenuto è un generatore indipendente di tensione. Poiché tale componente è definito solo su base corrente, esso non ammette per definizione l'equivalente di Norton, che esiste solo se il bipolo composito considerato è controllabile in tensione.

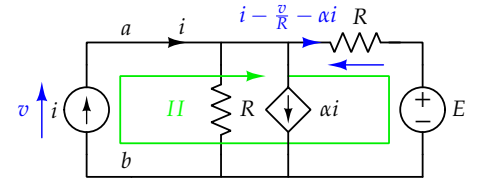


Figura 75: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) utilizzata.

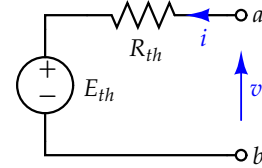


Figura 76: Schema circuitale del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

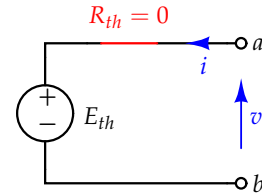


Figura 77: Schema circuitale del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nel caso in cui $R_{th} = 0$.

Es. 3.5

Dati: $R = 1\Omega$, $E = 4V$, $\beta = 3$.

- Determinare i_x quando i morsetti $a-b$ sono appesi.
- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$i_x = 4A$ (quando i morsetti $a-b$ sono appesi), $R_{th} = -1\Omega$, $E_{th} = 8V$]

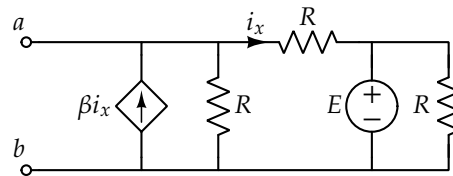


Figura 78: Es 3.5

Es. 3.6

Dati: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 200\Omega$, $g = 0.1S$, $E = 20V$.

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$, e tracciare la sua equazione costitutiva sul piano $i-v$.
- Si colleghi $R_4 = 60\Omega$ ai morsetti $a-b$. Quanta potenza assorbe?

Sol: [$G_{nr} = 0.025S$, $A_{nr} = -0.4A$, $P_A^{R_4} = 1.536W$]

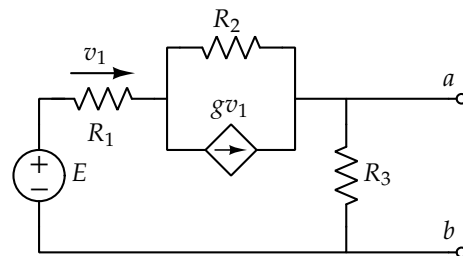


Figura 79: Es 3.6

Es. 3.7

Dati: $g_m = 1S$, $R = 1\Omega$, $E = 0.5V$, $A = 1A$.

- Determinare, se esiste, il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Determinare il valore che E dovrebbe avere affinché il circuito equivalente si comporti come un resistore.

Sol: [$G_{nr} = 0.5S$, $A_{nr} = -0.75A$, il circuito equivalente si comporta come un resistore sse $E = -1V$]

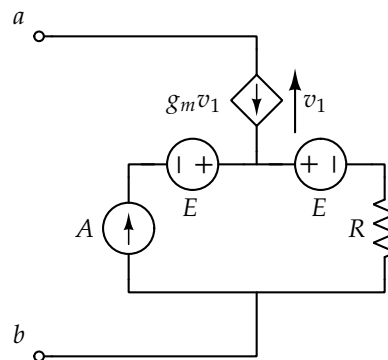


Figura 80: Es 3.7

Es. 3.8

Dati: $A = 6\text{A}$, $R = 4\Omega$, $\beta = 2$.

Determinare v e la potenza assorbita da tutti i componenti del circuito.

Sol: [$v = -24\text{V}$, $P_A^A = 144\text{W}$, $P_A^{\text{CCCS}} = -288\text{W}$, $P_A^R = 144\text{W}$]

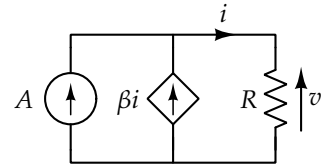


Figura 81: Es 3.8

Es. 3.9

Determinare i . Per quali valori di r è possibile determinare i ?

Sol: [$i = \frac{3E}{2r-5R}$, $r \neq \frac{5R}{2}$]

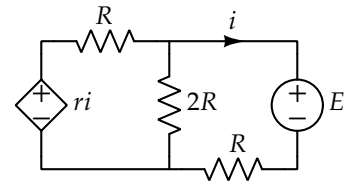


Figura 82: Es 3.9

Es. 3.10

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $A = 2\text{A}$, $r = 4\Omega$.

Determinare i e i_1 .

Sol: [$i = 4\text{A}$, $i_1 = -2\text{A}$]

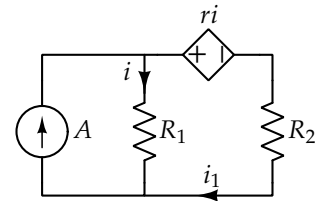


Figura 83: Es 3.10

Es. 3.11

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $A = 2\text{A}$, $E = 10\text{V}$, $\alpha = 2$.

Determinare i e v .

Sol: [$i = -\frac{6}{7}\text{A}$, $v = \frac{6}{7}\text{V}$]

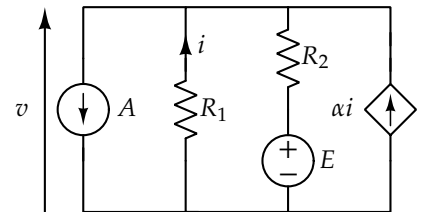


Figura 84: Es 3.11

Es. 3.12

Determinare:

- i_A . Per quali valori di k è possibile determinare i_A ?
- v .

Sol: $[i_A = \frac{E+R_1A}{R_2+R_1(1+k)}, k \neq -\frac{R_2}{R_1} - 1, v = \frac{R_1[E(1+k)-AR_2]}{R_2+R_1(1+k)}]$

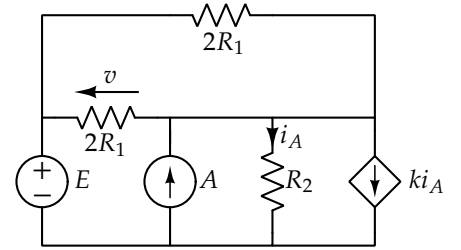


Figura 85: Es 3.12

Es. 3.13

Determinare la potenza erogata dal generatore di tensione E (hp: $r \neq \frac{R}{2}$).

Sol: $[P_E^E = \frac{3E^2(R-r)}{2R(R-2r)}]$

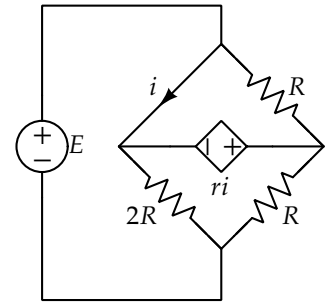


Figura 86: Es 3.13

Es. 3.14

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $E = 8V$, $A = 1A$, $R_2 = 6\Omega$.

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton e Thévenin ai morsetti $a-b$, rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Disegnare la caratteristica $i-v$ del bipolo equivalente ottenuto.
- Collegare $R_L = 12\Omega$ ai morsetti $a-b$. Determinare la potenza assorbita dal resistore R_L e dal generatore di tensione E in tali condizioni.

Sol: $[R_{th} = \frac{12}{5}\Omega, E_{th} = \frac{12}{5}V, G_{nr} = \frac{5}{12}S, A_{nr} = -1A, P_A^{R_L} = \frac{1}{3}W, P_A^E = -12W]$

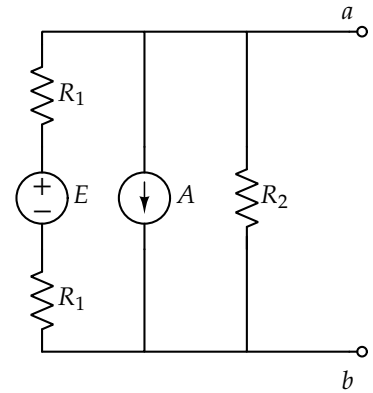


Figura 87: Es 3.14

Es. 3.15

Determinare:

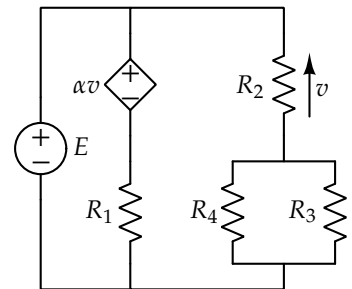


Figura 88: Es 3.15

- $R_3 \mid P_A^{R_3}$ è massima.
- $P_A^{R_3}$.

Sol: [$P_A^{R_3}$ è massima se $R_3 = R_{th} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$. In tali condizioni,
 $P_A^{R_3} = \frac{E^2 R_4}{4 R_2 (R_2 + R_4)}$]

Es. 3.16

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Il valore di γ (d'ora in poi chiamato $\hat{\gamma}$) per cui il circuito equivalente di Norton non esiste.
- Si ponga $\gamma = \hat{\gamma}$ e si connetta un resistore R_L ai morsetti $a-b$. Determinare la potenza assorbita da R_L in tali condizioni.

Sol: [$R_{th} = R(3 - \gamma)$, $E_{th} = E$, il circuito equivalente di Norton esiste sse $\gamma \neq 3$, $P_A^{R_L} = \frac{E^2}{R_L}$]

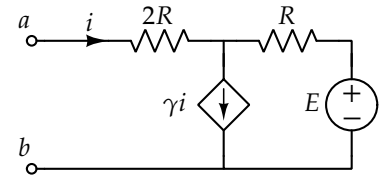


Figura 89: Es 3.16

Es. 3.17

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Il valore di α per cui il circuito equivalente di Norton non esiste.

Sol: [$G_{nr} = \frac{R_1 + R_2}{(\alpha + 1)R_1 R_2}$, $A_{nr} = \frac{A R_2 - E}{R_2}$, $\alpha \neq -1$]

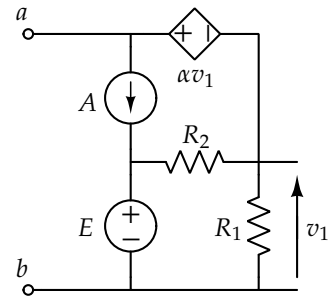


Figura 90: Es 3.17

Es. 3.18

Dati: $R = 1\Omega$, $A = 1A$, $\alpha = 4$.

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Esiste il circuito equivalente di Thévenin? Motivare la risposta.
- Si connetta ai morsetti $a-b$ un resistore $R_L = 5\Omega$. Determinare $P_A^{R_L}$.

Sol: [$G_{nr} = 0S$, $A_{nr} = -0.5A$, il circuito equivalente di Thévenin non esiste perché il bipolo equivalente ottenuto è un generatore di corrente (componente non controllabile in corrente e che non permette, quindi, di essere descritto mediante un circuito equivalente di Thévenin), $P_A^{R_L} = 1.25W$]

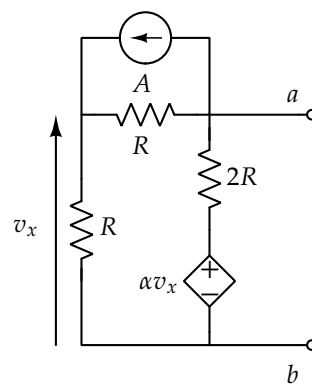


Figura 91: Es 3.18

Es. 3.19

Dati: $E_1 = 6V$, $E_2 = 12V$, $A = 1A$, $R = 2\Omega$.

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: [$G_{nr} = \frac{1}{3}S$, $A_{nr} = -3A$]

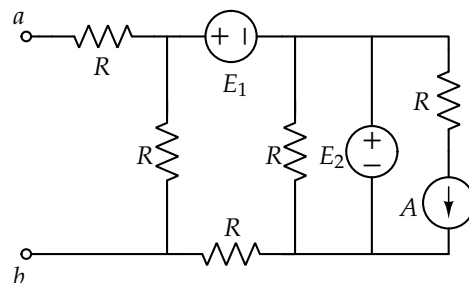


Figura 92: Es 3.19

Es. 3.20

Dati: $E_1 = 10V$, $E_2 = 5V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 4\Omega$.

Determinare i_x .

Sol: [$i_x = -0.05A$]

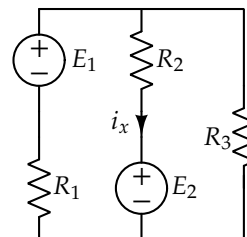


Figura 93: Es 3.20

Es. 3.21

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $\alpha = 2$, $E_1 = 6V$, $E_2 = 2V$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin del bipolo composto rappresentato in figura, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si connetta ai morsetti del bipolo composto un generatore di tensione $E_2 = 2V$ (vedi figura, in blu). Calcolare $P_E^{E_2}$.

Sol: $[R_{th} = 2\Omega, E_{th} = -6V, P_E^{E_2} = 8W]$

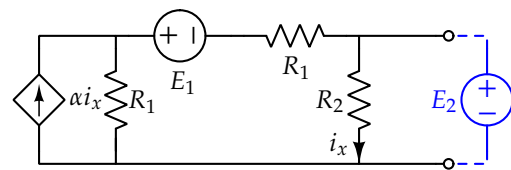


Figura 94: Es 3.21

Es. 3.22

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Per quali valori di α non esiste il circuito equivalente di Thévenin?
- Si connetta ai morsetti $a-b$ un generatore di corrente A_2 (vedi figura, in blu). Calcolare $P_E^{A_2}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{2+\alpha}{3R}, A_{nr} = -A_1, \text{ il circuito equivalente di Thévenin esiste sse } \alpha \neq -2, P_E^{A_2} = \frac{A_2(A_2-A_1)3R}{2+\alpha}]$

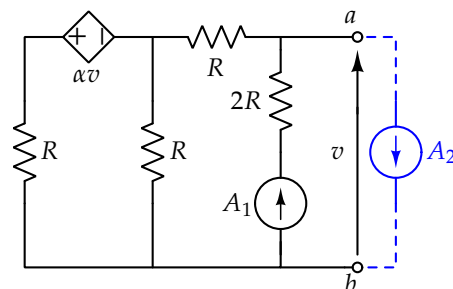


Figura 95: Es 3.22

Es. 3.23

Dati: $E = 4V$, $R = 2\Omega$, $A = 2A$, $\beta = 2$.

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = -1A]$

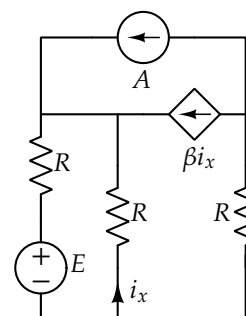


Figura 96: Es 3.23

Es. 3.24

Dati: $E_1 = 5V$, $E_2 = 10V$, $A = 1A$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 5\Omega$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti α - β , nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si connetta ai morsetti α - β una resistenza $R_L = 10\Omega$. Determinare $P_A^{R_L}$. La potenza assorbita da R_L è la massima possibile? Motivare la risposta.

Sol: [$R_{th} = 10\Omega$, $E_{th} = 20V$, $P_A^{R_L} = 10W$. La potenza assorbita da R_L è la massima possibile perché $R_L = R_{th}$ (condizione da rispettare per garantire il massimo trasferimento di potenza)]

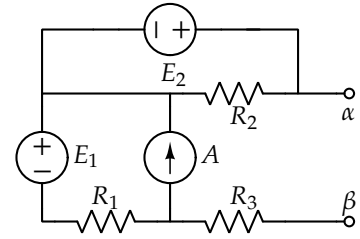


Figura 97: Es 3.24

Es. 3.25

Dati: $R = 2\Omega$, $A = 4A$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin e di Norton ai morsetti α - β , rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Determinare la massima potenza erogabile dal bipolo equivalente.

Sol: [$R_{th} = 1\Omega$, $E_{th} = 12V$, $G_{nr} = 1S$, $A_{nr} = -12A$. La massima potenza erogabile dal bipolo è pari a 36W]

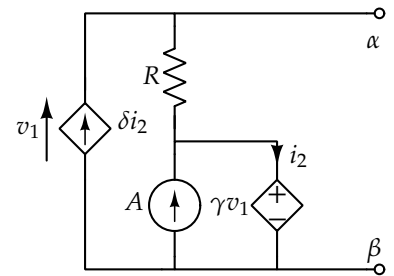


Figura 98: Es 3.25

Es. 3.26

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti α - β , nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, indicando per quali valori di γ tale circuito non esiste.
- Determinare i valori di γ ed A necessari affinché il circuito equivalente si comporti come un bipolo strettamente attivo.

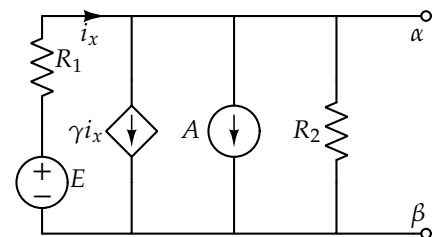


Figura 99: Es 3.26

Sol: $[R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1-\gamma)}, E_{th} = \frac{R_2[E(1-\gamma) - R_1 A]}{R_1 + R_2(1-\gamma)}, \gamma \neq 1 + \frac{R_1}{R_2}]$. Il circuito equivalente si comporta come un bipolo strettamente attivo quando $A = \frac{E(1-\gamma)}{R_1}$ e $\gamma > 1 + \frac{R_1}{R_2}$

Es. 4.1

Dati: $A = 2\text{A}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 24\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $E = 10\text{V}$.

Determinare i_2 e v_2 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcolare $P_A^{R_2}$.

Sol: [$i_2 = 0.25\text{A}$, $v_2 = 6\text{V}$, $P_A^{R_2} = 1.5\text{W}$]

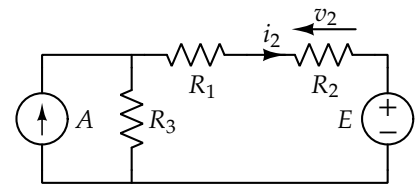


Figura 100: Es 4.1

Es. 4.2

Determinare v applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sol: [$v = \frac{E_1 - E_2 + RA_1}{2}$]

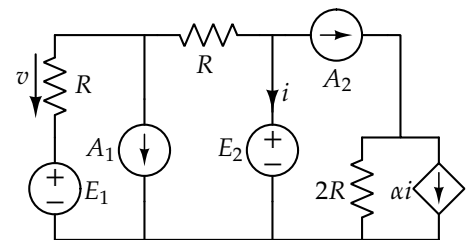


Figura 101: Es 4.2

Es. 4.3

Dati: $A = 1.5\text{A}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$.

Determinare la tensione v_A applicando il metodo dell'analisi nodale (si consideri il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale).

Sol: [$v_A = -6\text{V}$]

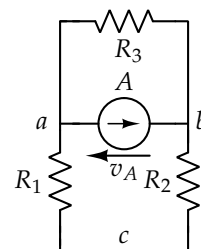


Figura 102: Es 4.3

Soluzione

L'ANALISI NODALE È UNA PROCEDURA SISTEMATICA che permette di risolvere i circuiti, nell'ipotesi che essi contengano solo componenti definiti su base tensione. Tale metodo si basa sulle equazioni di Tableau e consiste nel ricavare le correnti e le tensioni di lato a partire dai potenziali di nodo. La procedura è la seguente:

- Passo 0: si sceglie tra gli n nodi del circuito un nodo di riferimento del potenziale. Il suo potenziale può essere scelto arbitrariamente nullo;
- Passo 1: sfruttando le KVL-I si esprimono le tensioni di lato in funzione dei potenziali di nodo;
- Passo 2: poiché ogni componente è definito su base tensione, è possibile esprimere la corrente di ciascun lato in funzione delle tensioni di lato, ovvero dei potenziali di nodo;
- Passo 3: si risolvono le KCL del circuito, scritte per $n - 1$ tagli nodali (si esclude il taglio nodale al nodo di riferimento), in funzione dei potenziali di nodo.

Una volta ricavati i potenziali di nodo, è possibile ricavare le correnti e le tensioni di lato, risolvendo così il circuito. Qualora il circuito contenga elementi non definiti su base tensione, è possibile ricorrere all'analisi nodale modificata descritta nelle dispense del corso.

In questo esercizio tutti i componenti del circuito in figura 102 sono definiti su base tensione, quindi è possibile applicare il procedimento sopra descritto. Nella risoluzione si considerano le correnti e le tensioni di lato orientate come in figura 103 (secondo la convenzione degli utilizzatori). Il passo 0 è da considerarsi già svolto poiché l'esercizio specifica quale nodo considerare come riferimento (nodo c). Il passo 1 consiste nell'esprimere le tensioni v_1 , v_2 , v_3 e v_a in funzione dei potenziali di nodo (essendo c il nodo di riferimento, $u_c = 0$), ovvero

$$v_1 = u_a - u_c = u_a$$

$$v_2 = u_b - u_c = u_b$$

$$v_3 = u_a - u_b$$

$$v_a = u_a - u_b \quad .$$

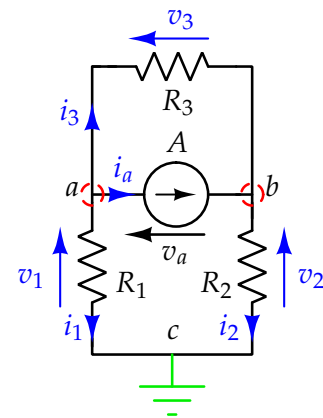


Figura 103: Circuito con indicati (in blu) i versi di tutte le correnti e tensioni, e (in rosso) i due nodi considerati al passo 3.

Bisogna poi esprimere le correnti i_1 , i_2 , i_3 e i_a in funzione di u_a , u_b e u_c (Passo 2)

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_a}{R_1} \\i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_b}{R_2} \\i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_a - u_b}{R_3} \\i_a &= A \quad .\end{aligned}$$

Per svolgere il Passo 3 si scrivono $n - 1$ KCL, esprimendo le correnti in funzione dei potenziali di nodo

$$\begin{aligned}\text{Nodo a: } i_1 + i_a + i_3 &= \frac{u_a}{R_1} + A + \frac{u_a - u_b}{R_3} = 0 \\ \text{Nodo b: } i_a - i_2 + i_3 &= A - \frac{u_b}{R_2} + \frac{u_a - u_b}{R_3} = 0 \quad .\end{aligned}$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} u_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{u_b}{R_3} = -A \\ \frac{u_a}{R_3} + u_b \left(-\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = -A \quad , \end{cases} \quad (10)$$

che può anche essere scritto in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ -A \end{bmatrix} \quad . \quad (11)$$

Risolvendo il sistema 10 è possibile ricavare u_a e u_b

$$\begin{aligned}u_a &= -\frac{AR_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = -4 \text{ V} \\ u_b &= \frac{AR_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ V} \quad .\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio ricavando le correnti e le tensioni di lato

$$\begin{aligned}v_1 &= u_a = -4 \text{ V} & i_1 &= \frac{u_a}{R_1} = -0.5 \text{ A} \\ v_2 &= u_b = 2 \text{ V} & i_2 &= \frac{u_b}{R_2} = 0.5 \text{ A} \\ v_3 &= u_a - u_b = -6 \text{ V} & i_3 &= \frac{u_a - u_b}{R_3} = -1 \text{ A} \\ v_a &= u_a - u_b = -6 \text{ V} & i_a &= A = 1.5 \text{ A} \quad .\end{aligned}$$

Si lascia allo studente verificare che, se si fosse considerato un nodo di riferimento diverso dal nodo c (quindi il nodo a oppure il nodo b), sarebbero variati solo i potenziali di nodo ma non il risultato finale.

Es. 4.4

Dati: $A = 4\text{A}$, $R_1 = \frac{1}{4}\Omega$, $R_2 = \frac{1}{2}\Omega$, $R_3 = \frac{1}{4}\Omega$, $E = 10\text{V}$.

Considerando il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_2 applicando il metodo dell'analisi nodale.

Calcolare la corrente erogata dal generatore di tensione i_E .

Sol: [$v_2 = -6\text{V}$, $i_E = 52\text{A}$]

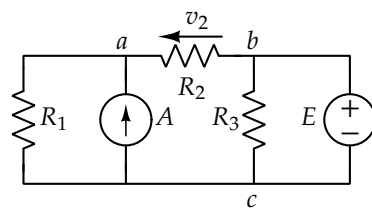


Figura 104: Es 4.4

Es. 4.5

Dati: $A = 6\text{A}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 12\Omega$, $E = 12\text{V}$, $\beta = 2$.

Considerando il nodo d come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_3 applicando il metodo dell'analisi nodale.

Sol: [$v_3 = 6\text{V}$]

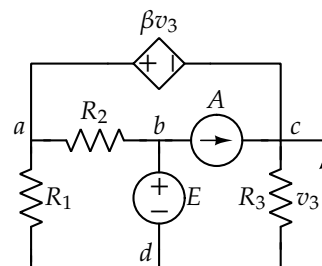


Figura 105: Es 4.5

Es. 4.6

Dati: $E_1 = 66\text{V}$, $E_2 = -88\text{V}$, $A = -33\text{A}$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$.

Determinare v_2 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcolare $P_a^{R_2}$.

Sol: [$v_2 = 14\text{V}$, $P_a^{R_2} = 98\text{W}$]

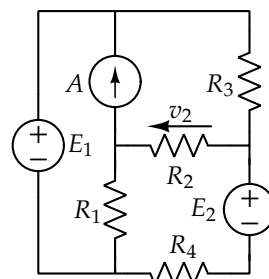


Figura 106: Es 4.6

Es. 4.7

Dati: $E = 8\text{V}$, $R = 500\Omega$, $A_1 = 3\text{mA}$, $A_2 = 5\text{mA}$.

Considerando il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_{A_1} usando il metodo dell'analisi nodale.

Calcolare i_e .

Sol: [$v_{A_1} = -6\text{V}$, $i_e = 9\text{mA}$]

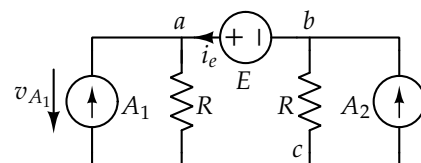


Figura 107: Es 4.7

Es. 4.8

Considerando il nodo e come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_2 usando il metodo dell'analisi nodale.

Sol: $[v_2 = \frac{R_2(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2}]$

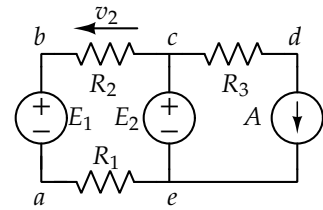


Figura 108: Es 4.8

Es. 4.9

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $E_1 = 3V$, $E_2 = 6V$, $A_1 = 3A$, $A_2 = -6A$.

Determinare la potenza assorbita da R_2 .

Sol: $[P_a^{R_2} = 0W]$

Figura 109: Es 4.9

Es. 4.10

Determinare v_1 (hp: $k \neq \frac{R_1 + R_2}{R_1}$).

Sol: $[v_1 = \frac{(A_2 + A_3)R_1R_2}{R_1(k-1) - R_2}]$

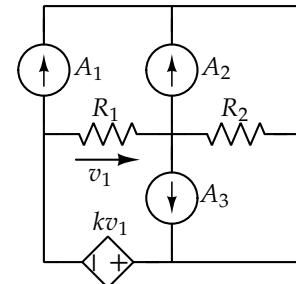


Figura 110: Es 4.10

Es. 4.11

Dati: $E = 10V$, $R = 10\Omega$, $\alpha = -1$. Utilizzando il metodo dell'analisi nodale, ricavare la tensione v_x .

Sol: $[v_x = 10V]$

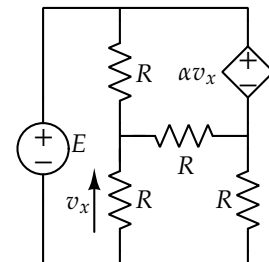


Figura 111: Es 4.11

Es. 4.12

Determinare la tensione v_1 usando il metodo dell'analisi nodale.

Sol: $[v_1 = \frac{E_1 - E_2}{2}]$

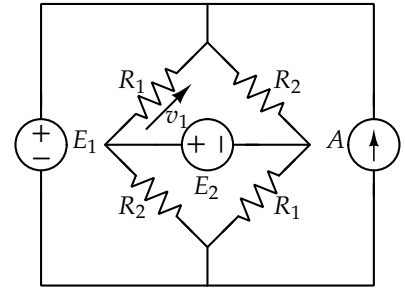


Figura 112: Es 4.12

Es. 5.1

Dati: $E = 3V$, $A = 10A$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

Ricavare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, utilizzando le prove semplici.

Sol: [$R_{th} = 6\Omega$, $E_{th} = -9V$]

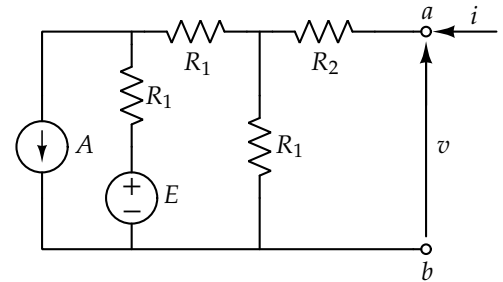


Figura 113: Es 5.1

Soluzione

I PARAMETRI DEL CIRCUITO EQUIVALENTE di Thévenin sono ricavabili utilizzando le prove semplici. Ai morsetti del bipolo composito considerato, tale circuito, se esiste, ha equazione $v = R_{th}i + E_{th}$. Le due prove semplici da eseguire sono:

1. $R_{th} = \frac{v}{i} \big|_{E_{th}=0}$, ma siccome E_{th} è dovuto alle sorgenti indipendenti presenti nel bipolo composito, ciò corrisponde a calcolare $R_{th} = \frac{v}{i}$ passivando le sorgenti indipendenti del bipolo composito considerato.
2. $E_{th} = v \big|_{i=0}$, ciò corrisponde a calcolare $E_{th} = v$ lasciando appesi i morsetti del bipolo composito considerato.

L'ordine in cui si eseguono le prove semplici è influente per il risultato finale. In questa risoluzione si parte calcolando R_{th} . Considerando il circuito in figura 113, se si passivano le sorgenti indipendenti e si impone una corrente i ai morsetti $a-b$, si ricava il circuito in figura 114.

Considerando tale circuito si nota che vi sono due resistori, di resistenza R_1 , in serie (evidenziati in verde). Il resistore, con resistenza equivalente ad essi, è a sua volta in parallelo con il terzo resistore di resistenza R_1 (evidenziato in arancione). Infine, tale resistore

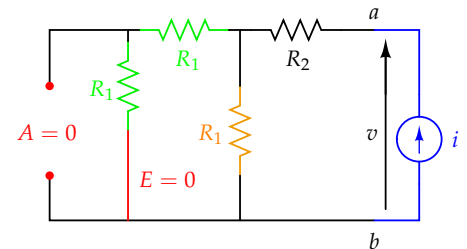


Figura 114: Circuito con i generatori indipendenti del bipolo composito considerato passivati. Imporre una corrente i ai morsetti $a-b$ equivale a collegare un generatore indipendente di corrente, orientato adeguatamente.

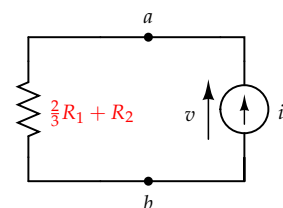


Figura 115: Circuito equivalente, ai morsetti $a-b$, ottenuto sostituendo resistori con adeguata resistenza equivalente.

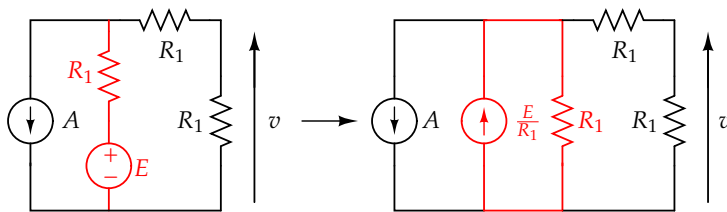
equivalente è in serie con il resistore di resistenza R_2 . Facendo tali considerazioni, dal circuito in figura 114 si ricava quello in figura 115. Si può dunque concludere che:

$$R_{th} = \frac{v}{i} = \frac{2}{3}R_1 + R_2 = 6\Omega . \quad (12)$$

Per calcolare E_{th} , sfruttando le prove semplici, si impone una corrente nulla ($i = 0$) ai morsetti $a-b$. Ciò corrisponde a lasciare i morsetti appesi. Si nota dunque che la corrente che scorre nel resistore di resistenza R_2 (in figura 113) è nulla, e quindi anche la tensione ai suoi capi. Dunque, la tensione sul resistore di resistenza R_1 , più a destra, è pari a v (il circuito ottenuto facendo tali considerazioni è riportato in figura 116). Per ricavare v si può procedere in molti modi diversi, seppur continuando ad utilizzare le prove semplici. Ci concentreremo sui due metodi seguenti:

1. Metodo 1: sostituzione delle sorgenti, sfruttando gli equivalenti di Thévenin e Norton.
2. Metodo 2: applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

METODO 1: facendo riferimento alla figura 116, si osserva che è possibile sostituire il bipolo costituito dalla serie formata dal generatore indipendente di tensione e dal resistore di resistenza R_1 (equivalente di Thévenin) con un equivalente di Norton, nel modo seguente:



Si possono poi rimpiazzare i due generatori indipendenti di corrente con uno solo. È dunque possibile sostituire il bipolo costituito dal parallelo formato dal generatore indipendente di corrente equivalente e dal resistore di resistenza R_1 (equivalente di Norton) con il suo equivalente di Thévenin, come mostrato in figura 118.

In conclusione, si nota che si può calcolare la tensione v utilizzando il partitore di tensione:

$$v = (E - AR_1) \frac{R_1}{3R_1} = -9V . \quad (13)$$

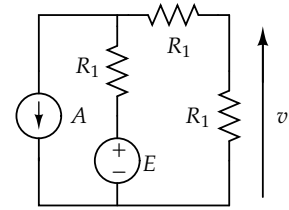


Figura 116: Circuito ottenuto imponendo una corrente nulla ($i = 0$) ai morsetti e notando che il resistore di resistenza R_2 non è influente nel calcolo di v .

Figura 117: Sostituzione con un bipolo equivalente di Norton (bipoli sostituiti evidenziati in rosso).

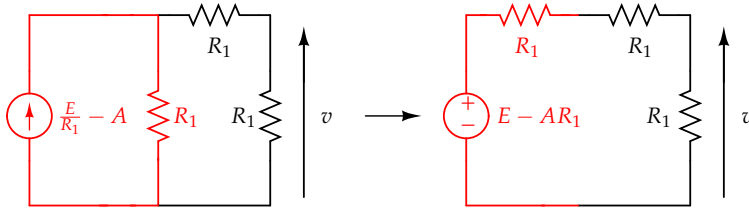


Figura 118: Sostituzione con un bipolo equivalente di Thévenin (bipoli sostituiti evidenziati in rosso).

METODO 2: è necessario passivare, uno alla volta, i due generatori indipendenti e calcolare il valore della tensione richiesta, in entrambi i casi. La loro somma sarà pari alla tensione v quando entrambi i generatori sono attivi. Vale dunque che

$$v = v_E + v_A , \quad (14)$$

con v_E tensione calcolata con il generatore indipendente di corrente passivato e v_A tensione calcolata con il generatore indipendente di tensione passivato.

Considerando il circuito in figura 116 e spegnendo il generatore indipendente di corrente, si ricava il circuito in figura 119. Si può dunque calcolare la tensione v_E utilizzando il partitore di tensione:

$$v_E = \frac{1}{3}E = 1V . \quad (15)$$

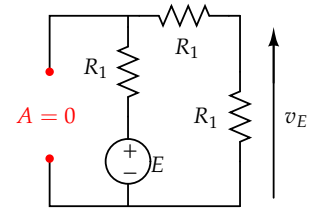


Figura 119: Circuito ottenuto passivando il generatore indipendente di corrente nel circuito in figura 116.

Considerando il circuito in figura 116 e spegnendo il generatore indipendente di tensione, si ricava il circuito in figura 120. Si può ricavare la corrente i_x utilizzando il partitore di corrente:

$$i_x = -\frac{R_1}{3R_1}A = -\frac{1}{3}A . \quad (16)$$

Sfruttando l'equazione costitutiva del resistore, è possibile ricavare $v_A = -R_1 \frac{1}{3}A = -10V$. Allora, usando l'equazione 14 e sostituendo i valori ricavati di v_E e v_A , si conclude che $v = -9V$.

In conclusione l'equivalente di Thévenin (secondo lo schema circuitale in figura 76), con equazione $v = R_{th}i + E_{th}$, ha i seguenti parametri:

$$\begin{aligned} E_{th} &= -9V \\ R_{th} &= 6\Omega . \end{aligned}$$

L'esercizio chiedeva esplicitamente di calcolare l'equivalente attraverso l'applicazione delle prove semplici ma si sarebbe ottenuto lo stesso risultato imponendo una corrente i ai morsetti $a-b$ e calcolando il valore di $v(i)$.

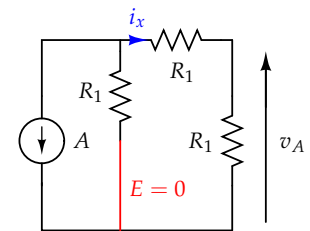


Figura 120: Circuito ottenuto passivando il generatore indipendente di tensione nel circuito in figura 116.

Es. 5.2

Ricavare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$, utilizzando le prove semplici.

Sol: $[G_{nr} = \frac{3+\beta-2\alpha}{2R}, A_{nr} = \frac{E}{R}]$

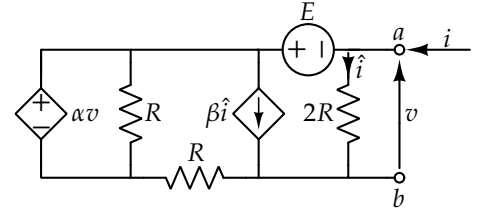


Figura 121: Es 5.2

Es. 5.3

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo.
- Si connettano al doppio bipolo i generatori di corrente A_2 e A_3 (vedi figura, in blu). Calcolare v_1 , v_2 e la potenza assorbita dal doppio bipolo P_A^{DB} .

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_2)i_1 + R_2i_2 + R_2A_1 \\ v_2 = R_2i_1 + R_2i_2 + R_2A_1 \end{cases}$$

$$v_1 = (R_1 + R_2)A_2 + R_2A_3 + R_2A_1, v_2 = (A_1 + A_2 + A_3)R_1, P_A^{DB} = v_1A_2 + v_2A_3]$$

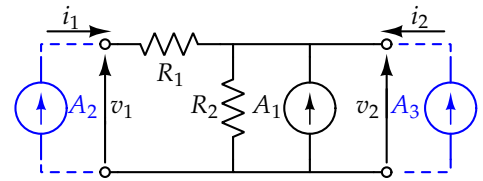


Figura 122: Es 5.3

Es. 5.4

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in tensione del doppio bipolo.
- Esistono dei valori di α per cui la rappresentazione con comando in corrente non esiste?

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 - \frac{1}{R}v_2 \\ i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 + \frac{1}{R}v_2 \end{cases}$$

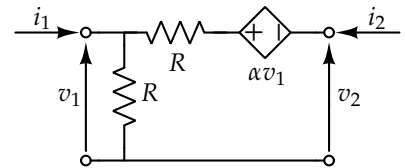


Figura 123: Es 5.4

La formulazione con controllo in corrente esiste per qualsiasi valore di α perché la matrice G è sempre invertibile]

Soluzione

LA RAPPRESENTAZIONE CON COMANDO IN TENSIONE del doppio bipolo è genericamente la seguente

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2 \end{cases} \quad (17)$$

Tale rappresentazione può essere riscritta in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_A \quad (18)$$

Questa tipologia di esercizi può essere risolta in due modi

1. Metodo 1: si ricavano le correnti i_1 e i_2 in funzione delle tensioni v_1 e v_2 , si trovano quindi le due funzioni $i_1(v_1, v_2) = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1$ e $i_2(v_1, v_2) = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2$.
2. Metodo 2: si utilizzano le prove semplici per ricavare i parametri della rappresentazione.

Prima di procedere con l'applicazione dei metodi descritti, è utile osservare che nel doppio bipolo composto considerato (figura 123) non vi sono generatori indipendenti. Siccome il vettore A è dovuto agli effetti dei generatori indipendenti, in questo caso sarà nullo e pertanto non verrà considerato nella risoluzione.

METODO 1: è necessario imporre le tensioni ad entrambe le porte, ciò equivale a collegare due generatori indipendenti di tensione, orientati opportunamente. Considerando la maglia I , in figura 124, si osserva che la tensione ai capi del resistore evidenziato in rosso è pari a v_1 . Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente si ottiene che è attraversato da una corrente pari a $\frac{v_1}{R}$ (presa con il verso indicato in figura 124). Considerando la figura 125 si può impostare un sistema sfruttando la KCL al taglio nodale al nodo A e la KVL-II alla maglia II . Si ottiene dunque

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - \frac{v_1}{R} = 0 \\ v_1 - v_2 - \alpha v_1 + Ri_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

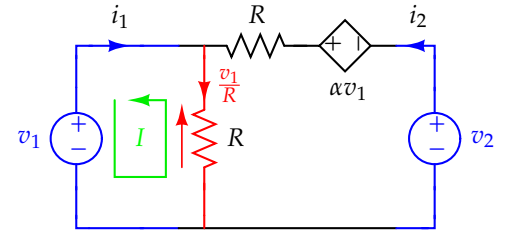


Figura 124: Doppio bipolo con imposte le tensioni di lato. In verde è evidenziata la maglia considerata.

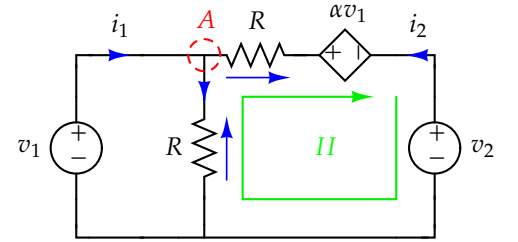


Figura 125: Doppio bipolo con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

Risolvendo il sistema 19 si ricavano le equazioni costitutive del doppio bipolo nella rappresentazione con comando in tensione

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 - \frac{1}{R}v_2 \\ i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 + \frac{1}{R}v_2 \end{cases} \quad (20)$$

METODO 2: è necessario eseguire due tipologie di prove semplici per calcolare i parametri della rappresentazione con comando in tensione.

1. Passivazione delle sorgenti indipendenti interne al doppio bipolo composito e quindi passivazione, alternata, delle tensioni di controllo alle porte, per calcolare i parametri della matrice \mathcal{G} .
2. Passivazione delle tensioni alle porte del doppio bipolo composito per calcolare il vettore \mathcal{A} .

Nell'esercizio in questione la seconda tipologia di prove semplici non è necessaria in quanto $A_1 = A_2 = 0$.

Per calcolare i parametri della matrice \mathcal{G} è dunque necessario eseguire due prove semplici. La prima consiste nella passivazione della tensione v_2 per calcolare G_{11} e G_{21} , si calcola quindi

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} \quad \text{e} \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} \quad (21)$$

Considerando il circuito in figura 123, passivando la tensione di porta v_2 e imponendo la tensione v_1 all'altra porta, si ottiene il circuito in figura 126. Considerando la KVL-II alla maglia I si può calcolare la tensione sul resistore evidenziato in arancione. Sfruttando la sua equazione costitutiva si può ricavare la corrente che lo attraversa. Utilizzando la KCL al taglio nodale al nodo A e la KVL-II alla maglia II , è possibile impostare un sistema da cui si ricava che

$$i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 \quad \text{e} \quad i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 \quad (22)$$

Considerando le prove semplici 21 si conclude che

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{2-\alpha}{R} \quad \text{e} \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = -\frac{1-\alpha}{R} \quad (23)$$

Per eseguire la seconda prova semplice è necessario passivare la tensione v_1 per calcolare G_{12} e G_{22} , si calcola quindi

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad \text{e} \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad (24)$$

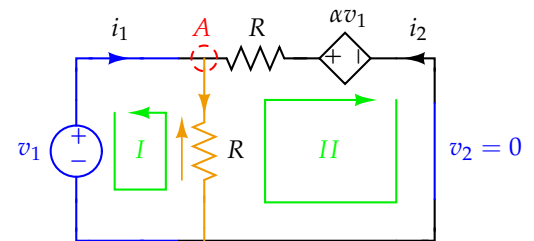


Figura 126: Doppio bipolo con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) considerati.

Considerando il circuito in figura 123, passivando la tensione di porta v_1 e imponendo la tensione v_2 all'altra porta, si ottiene il circuito in figura 127. Da cui si ricava

$$i_1 = -\frac{1}{R}v_2 \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{1}{R}v_2 . \quad (25)$$

Considerando le prove semplici 24 si conclude che

$$G_{21} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = -\frac{1}{R} \quad \text{e} \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{1}{R} . \quad (26)$$

Attraverso l'utilizzo delle prove semplici si conclude che i parametri per la rappresentazione con comando in corrente sono

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{2-\alpha}{R} & G_{12} &= -\frac{1}{R} \\ G_{21} &= -\frac{1-\alpha}{R} & G_{22} &= \frac{1}{R} . \end{aligned}$$

CON ENTRAMBI I METODI, si ricava la seguente matrice \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1-\alpha}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} . \quad (27)$$

PER RISPONDERE AL SECONDO PUNTO dell'esercizio, è necessario verificare se esistono dei valori di α tali per cui la matrice \mathcal{G} , ottenuta al punto precedente, risulta non invertibile. Calcolando il determinante di tale matrice si ricava che $\det(\mathcal{G}) = \frac{1}{R^2}$. Osservando che tale valore non dipende in alcun modo da α , è possibile concludere che non esistono valori di α per cui si annulla. Quindi \mathcal{G} è sempre invertibile per qualsiasi valore di α e quindi esiste sempre la rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo considerato.

Es. 5.5

Determinare i parametri della rappresentazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo. Per quali valori di β non esiste tale rappresentazione?

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto (che esiste sse $\beta \neq -1$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{R_a(R_b+R_c)+R_bR_c}{(\beta+1)(R_b+R_c)} i_1 + \frac{R_c}{R_b+R_c} v_2 \\ i_2 = -\frac{R_c(\beta+1)+R_b\beta}{(\beta+1)(R_b+R_c)} i_1 + \frac{1}{R_b+R_c} v_2 \end{cases}$$

]

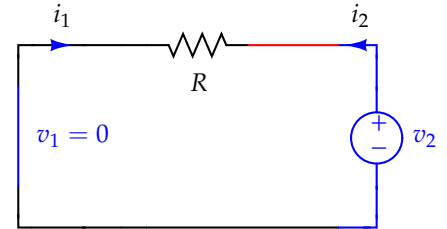


Figura 127: Ponendo $v_1 = 0$, si passiva di conseguenza il generatore pilotato di tensione. Rimane un solo resistore poichè l'altro sarebbe risultato in parallelo ad un corto circuito e quindi influente.

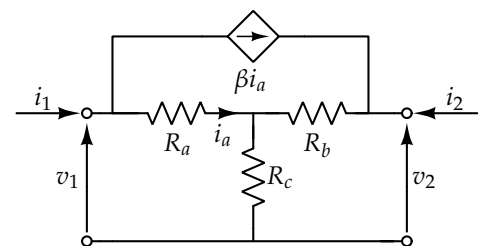


Figura 128: Es 5.5

Es. 5.6

Il doppio bipolo G è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = G_0 v_1 + 2G_0 v_2 \\ i_2 = 2G_0 v_1 + G_0 v_2 \end{cases}$$

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Per quali valori di r tale circuito non esiste?

Sol: $[G_{nr} = \frac{G_0(1-3G_0R)}{G_0R+1-2G_0r}, A_{nr} = 0]$. Il circuito equivalente di Norton esiste sse $r \neq \frac{G_0R+1}{2G_0}$

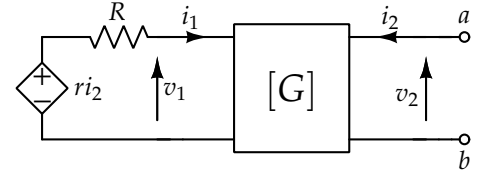


Figura 129: Es 5.6

Es. 5.7

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo.
- Esistono dei valori di α per cui la rappresentazione con comando in tensione non esiste?

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{3R}{2}i_1 + \frac{R(3\alpha+1)}{2}i_2 \\ v_2 = \frac{R}{2}i_1 + \frac{R(\alpha+1)}{2}i_2 \end{cases}$$

La formulazione con controllo in tensione esiste per qualsiasi valore di α perché la matrice R è sempre invertibile]

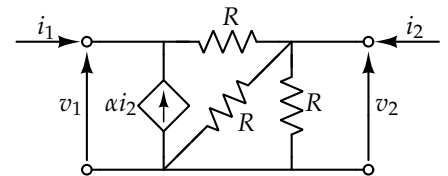


Figura 130: Es 5.7

Es. 5.8

Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo. Per quali valori di α tale rappresentazione non esiste?

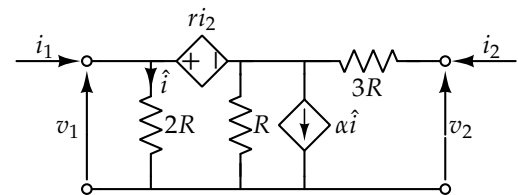


Figura 131: Es 5.8

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto (che esiste sse $\alpha \neq -3$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2R}{3+\alpha} i_1 + \frac{2(r+R)}{3+\alpha} i_2 \\ v_2 = \frac{2R}{3+\alpha} i_1 + \frac{11R+3\alpha R-r(1+\alpha)}{3+\alpha} i_2 \end{cases}$$

]

Es. 5.9

Dati: $R = 1\Omega$, $\beta = 3$.

- Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione.
- Connettere la porta 1 ad un generatore di tensione $E = 4V$ e lasciare la porta 2 a vuoto (vedi figura, in blu). Calcolare, i_1 , v_2 e P_E^E .

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = 2v_1 - v_2 \\ i_2 = -4v_1 + 4v_2 \end{cases}$$

$i_1 = 4A$, $v_2 = 4V$, $P_E^E = 16W$]

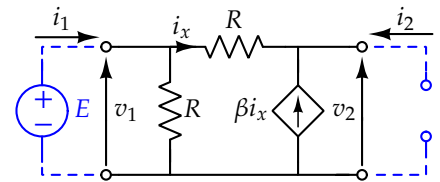


Figura 132: Es 5.9

Es. 5.10

Dati: $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = R_3 = 5\Omega$, $g_m = 0.2S$.

- Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione.
- Esiste la prima formulazione ibrida?

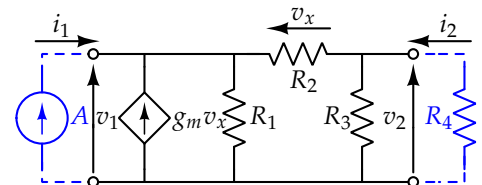


Figura 133: Es 5.10

- Collegare alla porta 1 un generatore di corrente $A = 0.2A$ e alla porta 2 un resistore $R_4 = 5\Omega$ (vedi figura, in blu). Determinare la potenza assorbita dal doppio bipolo P_A^{DB} .

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{6}v_1 \\ i_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 \end{cases}$$

La formulazione ibrida del primo tipo esiste perché $g_{11} \neq 0$. $P_A^{DB} = 0.208W$

Es. 5.11

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_2)i_1 \\ i_2 = \beta R_2 i_1 + \frac{1}{R_3}v_2 \end{cases}$$

]

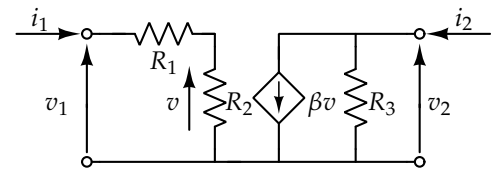


Figura 134: Es 5.11

Es. 5.12

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = ri_1 + v_2 \\ i_2 = \frac{r-R}{R}i_1 + \frac{gR+2}{R}v_2 - \frac{E}{R} \end{cases}$$

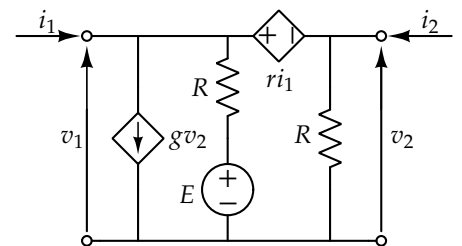


Figura 135: Es 5.12

]

Es. 5.13

Determinare i parametri della formulazione ibrida del secondo tipo.

Sol: [Il doppio bipolo H' ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_2} v_1 - i_2 - \frac{E}{R_2} \\ v_2 = v_1 + R_1 i_2 - E \end{cases}$$

]

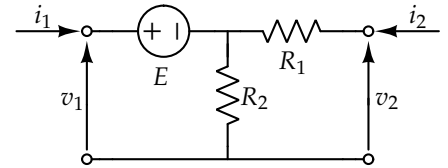


Figura 136: Es 5.13

Es. 5.14

Il doppio bipolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = k v_2 \\ i_1 = g v_2 - k i_2 \end{cases}$$

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th} i + E_{th}$.
- Per quali valori di k non è definito il circuito equivalente di Norton?

Sol: [$R_{th} = \frac{kR}{gR+k}$, $E_{th} = \frac{k^2 E}{gR+k}$, il circuito equivalente di Norton esiste sse $k \neq 0$]

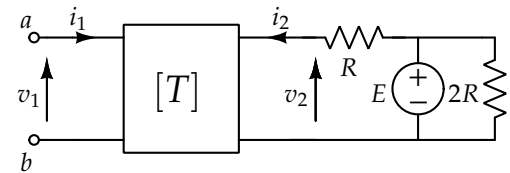


Figura 137: Es 5.14

Es. 5.15

Dati: $i_2 = 0\text{A}$, $R = 1\Omega$, $E = 1\text{V}$.

Il doppio bipolo R è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = i_1 + 2i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 = 3i_1 + 4i_2 \end{cases}$$

Determinare v_2 .

Sol: [$v_2 = 1.5\text{V}$]

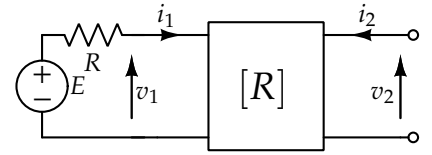


Figura 138: Es 5.15

Es. 5.16

Dati: $E = 13\text{V}$, $R = 4\Omega$, $\alpha = 0.5$.

Il doppio bipolo G è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 = v_1 + v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 = 2v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

Determinare P_E^E .

Sol: [$P_E^E = 39\text{W}$]

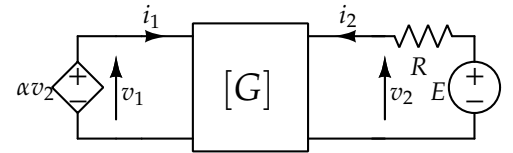


Figura 139: Es 5.16

Es. 5.17

Dati: $R_1 = 1\Omega$.

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente (matrice R).
- Calcolare v_1 e v_2 quando la porta 1 viene connessa ad un resistore $R_2 = 0.5\Omega$ e la porta 2 viene connessa ad un generatore ideale di corrente che impone $i_2 = 4\text{A}$.

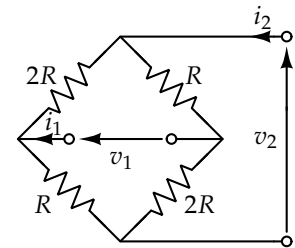


Figura 140: Es 5.17

Sol: [$r_{11} = r_{22} = 1.5\Omega$, $r_{12} = r_{21} = -0.5\Omega$, $v_1 = -0.5V$, $v_2 = 5.5V$]

Es. 5.18

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in tensione (matrice G).
- Per quali valori di α e β non esiste la formulazione ibrida del secondo tipo?

Sol: [$g_{11} = \frac{1}{2R}$, $g_{12} = -\frac{\alpha}{2R}$, $g_{21} = \frac{\beta}{2R}$, $g_{22} = \frac{2-\alpha\beta}{2R}$, la formulazione ibrida del secondo tipo esiste sse $\alpha\beta \neq 2$]

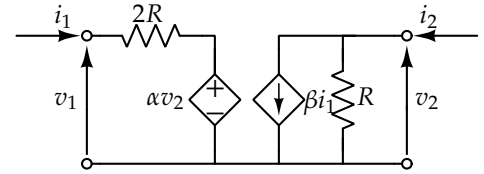


Figura 141: Es 5.18

Es. 5.19

- Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo (matrice H). Per quali valori di α e β tale formulazione non esiste?
- Si chiuda con un corto circuito la porta 2 ($v_2 = 0$) e in questa condizione si determini il circuito equivalente di Norton alla porta 1, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: [Il doppio bipolo ottenuto (che esiste sse $\alpha \neq -1$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + \beta v_2 \\ i_2 = -\frac{\alpha}{1+\alpha} i_1 + A \end{cases}$$

$$G_{nr} = \frac{1}{R_1}, A_{nr} = 0]$$

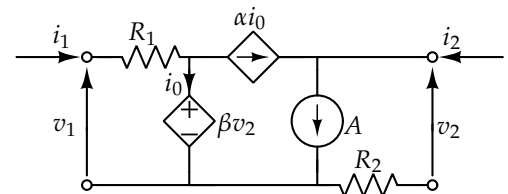


Figura 142: Es 5.19

Es. 5.20

Il doppio bipolo H è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

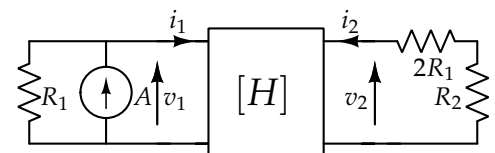


Figura 143: Es 5.20

$$\begin{cases} i_1 = \beta i_2 \\ v_2 = r i_2 + \alpha v_1 \end{cases}$$

- $R_2 \mid P_A^{R_2}$ è massima.
- $P_{A \max}^{R_2}$.

Sol: $[R_2 = (2R_1 + r - \alpha\beta R_1), P_{A \max}^{R_2} = \frac{(\alpha R_1 A)^2}{4(2R_1 + r - \alpha\beta R_1)}]$

Es. 6.1

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $A = 2A$.

Determinare la potenza assorbita da ciascun componente. Verificare i risultati ottenuti col teorema di Tellegen.

Sol: [$P_a^A = 0W$, $P_a^{R_1} = 4W$, $P_a^{R_2} = 4W$, $P_a^{AO} = -8W$]

Soluzione

LE EQUAZIONI COSTITUTIVE DELL'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE, con le grandezze riportate in figura 145, sono le seguenti

$$\begin{cases} I_- = I_+ = 0 \\ V_0 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Considerando la KVL-II alla maglia I (in figura 145) si nota che la tensione ai capi del generatore indipendente di corrente è nulla ($v_A = 0$). Si può pertanto concludere che anche la potenza assorbita da tale bipolo è nulla: $P_a^A = 0W$. Valutando la KCL al taglio nodale al nodo α , si ricava che la corrente che attraversa il resistore di resistenza R_1 , come indicata in figura, è pari ad A . Sfruttando l'equazione costitutiva del resistore, si calcola che la tensione ai suoi capi, come indicata in figura, è pari a AR_1 . Si ricava quindi che la potenza assorbita da tale bipolo è

$$P_a^{R_1} = v_1 i_1 = A^2 R_1 = 4W \quad (29)$$

Considerando la KVL-II alla maglia II , del circuito in figura 146, si ricava che la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 , come indicata in figura, è pari a AR_1 . Calcolando la corrente che attraversa tale bipolo, usando la sua equazione costitutiva, si può trovare la potenza assorbita, che risulta essere

$$P_a^{R_2} = v_2 i_2 = \frac{A^2 R_1^2}{R_2} = 4W \quad (30)$$

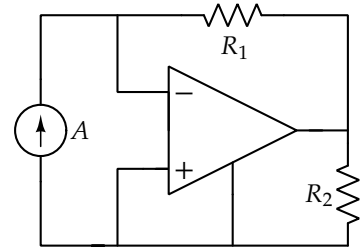


Figura 144: Es 6.1

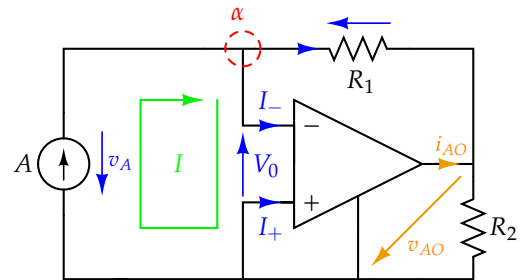


Figura 145: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati. Sono indicate (in arancione) le grandezze necessarie per il calcolo della potenza dell'amplificatore operazionale. I versi non sono scelti secondo la convenzione degli utilizzatori e risulta $P_a^{AO} = (-v_{AO})(-i_{AO})$.

Valutando la KCL al taglio nodale al nodo β e la KVL-II alla maglia *III* (in figura 147), si ricavano la corrente e la tensione dell'amplificatore operazionale

$$i_{AO} = -\left(A + \frac{AR_1}{R_2}\right) \quad \text{e} \quad v_{AO} = AR_1 \quad (31)$$

(secondo i versi indicati in figura 145, in arancione). Quindi, la potenza assorbita risulta essere

$$P_a^{AO} = (-v_{AO})(-i_{AO}) = A^2\left(R_1 + \frac{R_1^2}{R_2}\right) = -8W \quad (32)$$

Si può verificare la validità del risultato ottenuto usando il teorema di Tellegen, infatti

$$P_a^{AO} + P_a^{R_2} + P_a^{R_1} + P_a^A = 0 \quad (33)$$

IN ALTERNATIVA, anziché calcolare P_a^{AO} ricavando i_{AO} e v_{AO} dal circuito, si sarebbe potuto usare il teorema di Tellegen. In questo modo, conoscendo la potenza assorbita da tutti gli altri componenti, si poteva ricavare quella assorbita dall'amplificatore operazionale a partire dall'equazione 33, da cui si conclude che

$$P_a^{AO} = -P_a^{R_2} - P_a^{R_1} - P_a^A = -8W \quad (34)$$

Es. 6.2

Dati: $R = 10\Omega$, $A = 0.1A$, $E = 1V$.

Determinare v_0 , i_0 e la potenza erogata dall'amplificatore operazionale.

Sol: [$v_0 = -3V$, $i_0 = 0.5A$, $P_E^{AO} = 1.5W$]

Es. 6.3

Determinare la tensione v_0 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sol: [$v_0 = (E_2 - E_1)\frac{R_2}{R_1}$]

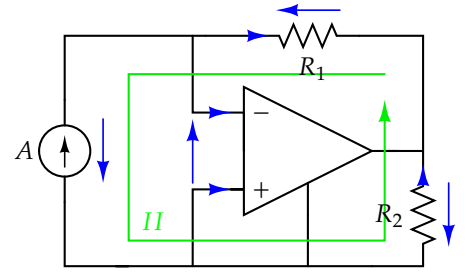


Figura 146: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) considerata.

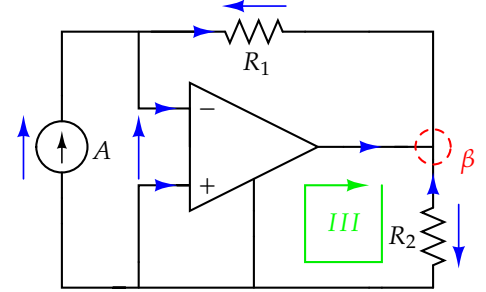


Figura 147: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

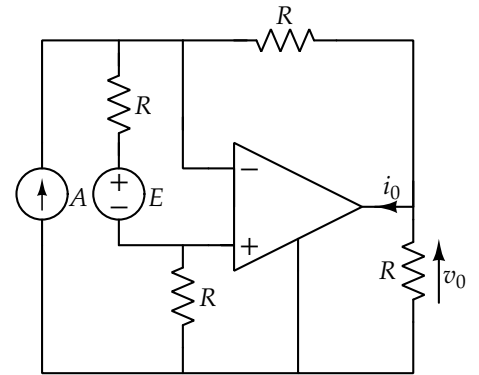


Figura 148: Es 6.2

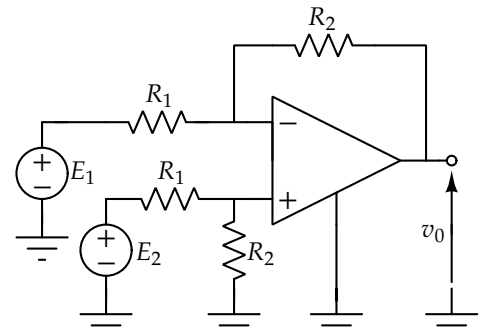


Figura 149: Es 6.3

Es. 6.4

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: $[R_{th} = \frac{4}{3}R, E_{th} = \frac{E}{3}]$

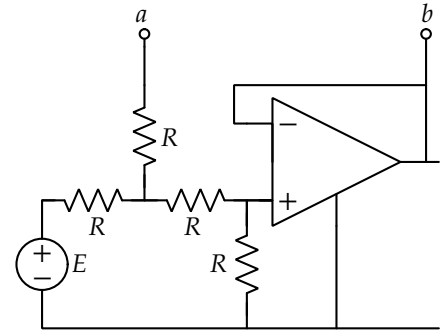


Figura 150: Es 6.4

Es. 6.5

Determinare i_y e v_x .

Sol: $[i_y = 0, v_x = \frac{E-nAR}{1+n^2}]$

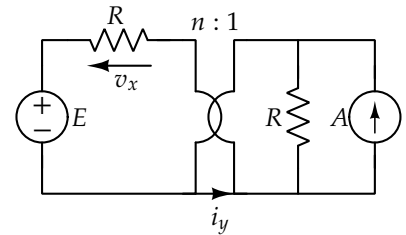


Figura 151: Es 6.5

Soluzione

IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA È UN DOPPIO BIPOLO caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive (le grandezze sono riferite alla figura 152)

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad (35)$$

Come suggerisce il nome, il trasferitore ideale di potenza è un componente inerte. In altre parole assorbe tanta potenza quanta ne eroga (così che la potenza assorbita netta sia nulla).

SI OSSERVA INNANZITUTTO CHE LA CORRENTE i_y È NULLA. Per convincersene si disegni una superficie limite per le KCL che inglobi E , R ed il lato sinistro del trasferitore ideale di potenza tagliando quindi solo il corto circuito. Dato che i_y sarà la sola corrente uscente da tale superficie, si deduce che $i_y = 0$. Pertanto è possibile non considerare, durante la risoluzione, il corto circuito da essa attraversato. Si rammenta che tale corto circuito ha la funzione di rendere connesso il grafo del circuito (lo si verifichi per esercizio).

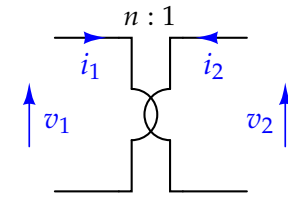


Figura 152: Trasferitore ideale di potenza con evidenziati i versi delle correnti e delle tensioni descrittive in convenzione degli utilizzatori.

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 153) si ricava che la corrente che attraversa il resistore a destra (evidenziato in arancione in figura 153) è pari a $A - i_2$. Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente si ricava che la tensione ai suoi capi (con il verso preso come in figura 153) è

$$R(A - i_2) . \quad (36)$$

Usando l'equazione costitutiva del trasformatore ideale di potenza, sostituendo i_2 nell'equazione 36, si ricava che la tensione è pari a $R(A + ni_1)$.

Dalla KVL-II alla maglia I in figura 153 si ricava che

$$v_2 = R(A + ni_1) . \quad (37)$$

Sfruttando l'equazione costitutiva del trasformatore ideale di potenza, sostituendo v_2 nell'equazione 37 si ottiene che

$$v_1 = nR(A + ni_1) . \quad (38)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II in figura 154 si evince che $v_x = E - v_1$. Sostituendo quindi l'equazione 38 in quella appena ottenuta, si ricava che

$$v_x = E - nR(A + ni_1) . \quad (39)$$

Mettendo a sistema l'equazione 39 con l'equazione costitutiva del resistore (evidenziato in arancione in figura 154), si ricava il sistema risolutivo

$$\begin{cases} v_x = E - nR(A + ni_1) \\ v_x = Ri_1 \end{cases} . \quad (40)$$

Da cui si conclude che

$$v_x = \frac{E - nAR}{1 + n^2} . \quad (41)$$

IN ALTERNATIVA è possibile risolvere l'esercizio calcolando il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$ (in figura 155) e utilizzando il partitore di tensione.

Si inizia sostituendo il bipolo evidenziato in rosso (figura 155) con il suo circuito equivalente di Thévenin. Si ottiene, ai morsetti $a-b$, il bipolo in figura 156. Sfruttando la sua equazione costitutiva è possibile calcolare la tensione ai capi del resistore (evidenziato in arancione in figura 156) e, attraverso la KVL-II alla maglia I , si ricava che

$$v_2 = AR - Ri_2 . \quad (42)$$

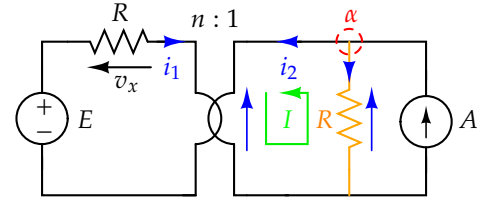


Figura 153: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

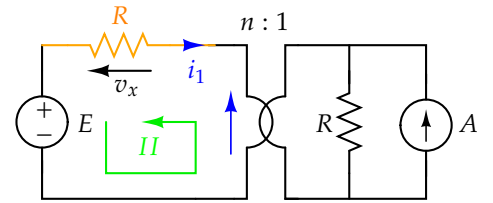


Figura 154: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) considerata.

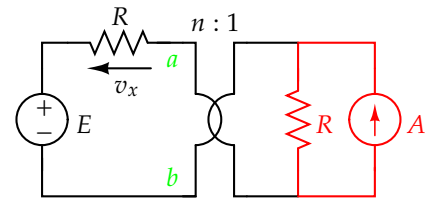


Figura 155: Circuito con evidenziati (in verde) i morsetti $a-b$ e (in rosso) il bipolo che verrà sostituito con il suo equivalente di Thévenin.

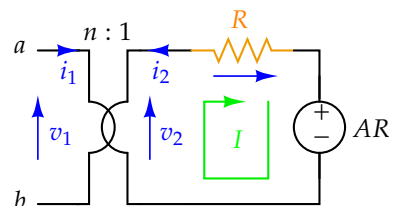


Figura 156: Bipolo con evidenziata (in verde) la maglia utilizzata.

Sostituendo le equazioni costitutive del trasformatore ideale di potenza (equazioni 35) nell'equazione 42, si ricava l'equazione del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$

$$v_1 = \underbrace{n^2 R}_{R_{th}} i_1 + \underbrace{nAR}_{E_{th}} . \quad (43)$$

Si può quindi sostituire, ai morsetti $a-b$, il circuito equivalente di Thévenin, con i parametri appena calcolati. Si ottiene il circuito in figura 157.

Considerando il generatore indipendente di tensione equivalente ai due presenti, è possibile ricavare, usando il partitore di tensione, $v_x = \frac{E - nAR}{1 + n^2}$.

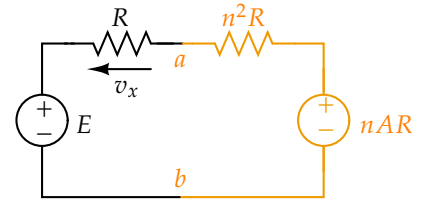


Figura 157: Circuito ottenuto sostituendo l'equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$ (in arancione).

Es. 6.6

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{\alpha n + 1}{Rn^2}, A_{nr} = -A]$

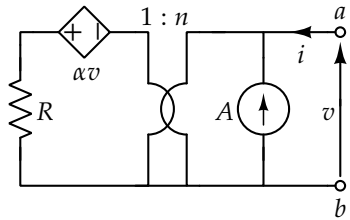


Figura 158: Es 6.6

Es. 6.7

Dati: $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $R = 1\Omega$.

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo in figura.
- Determinare v_1 e i_2 quando la porta 1 è a vuoto e la porta 2 è connessa ad un generatore che impone $v_2 = 2V$. Determinare la potenza assorbita dal doppio bipolo in tali condizioni.

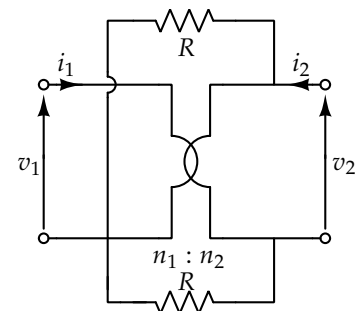


Figura 159: Es 6.7

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 8i_1 + 4i_2 \\ v_2 = 4i_1 + 2i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = 1\text{A}, v_1 = 4\text{V}, P_A^{DB} = 2\text{W}]$$

Es. 6.8

Determinare la potenza erogata dall'amplificatore operazionale.

Sol: $[P_E^{AO} = \frac{E^2}{4R}]$

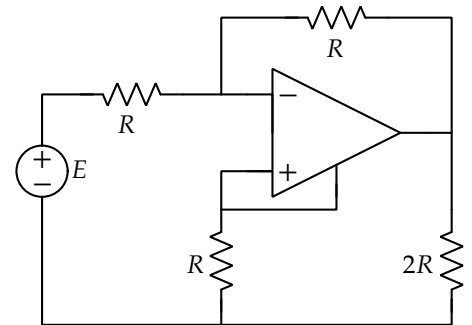


Figura 160: Es 6.8

Es. 6.9

Determinare v_{out} .

Sol: $[v_{out} = \frac{4E_1 - E_2}{5}]$

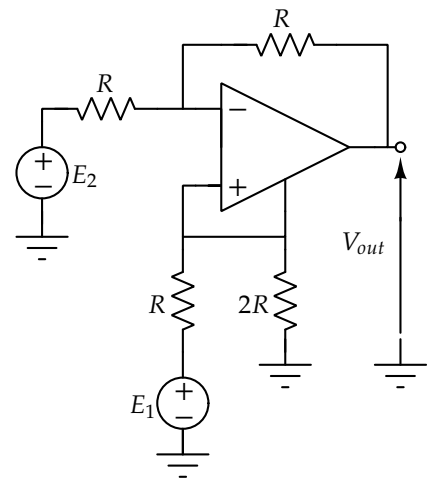


Figura 161: Es 6.9

Es. 6.10

Determinare v_0 .

Sol: $[v_0 = -\frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1R_3}E_1 + \frac{R_3+R_4}{R_3}E_2]$

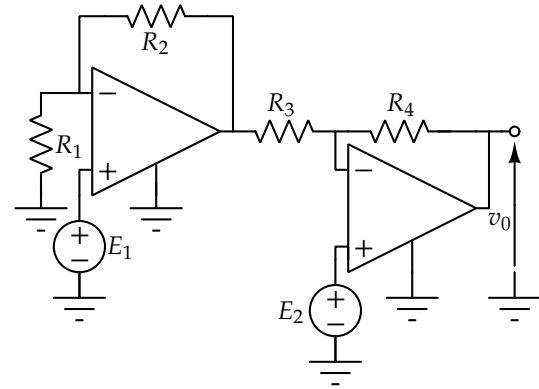


Figura 162: Es 6.10

Es. 6.11

Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = -\frac{R_2+R_3}{R_2R_5}v_1 + \frac{1}{R_5}v_2 \end{cases}$$

]

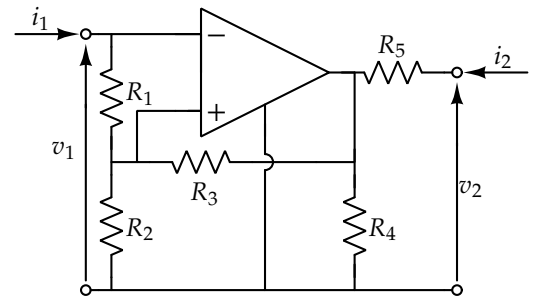


Figura 163: Es 6.11

Es. 6.12

Determinare i parametri della formulazione ibrida del secondo tipo del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo H' ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{5R}v_1 - \frac{1}{5}i_2 \\ v_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{6}{5}Ri_2 \end{cases}$$

]

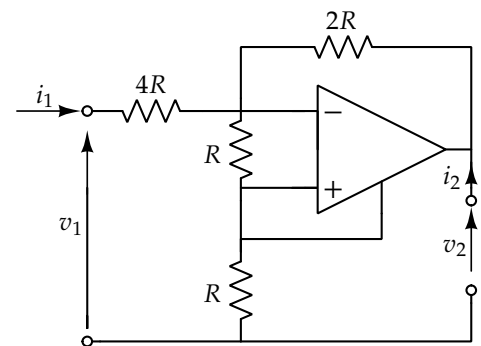


Figura 164: Es 6.12

Es. 6.13

Dati: $R = 10\Omega$, $A = 2A$, $n = 2$, $E = 20V$.

Determinare v_2 .

Sol: [$v_2 = 4V$]

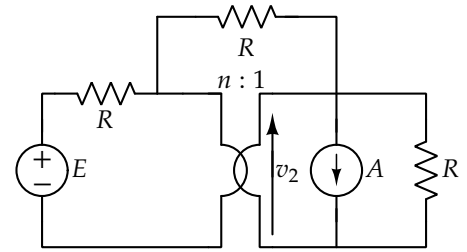


Figura 165: Es 6.13

Es. 6.14

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $E = 15V$, $n = 2$.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$R_{th} = 4\Omega$, $E_{th} = 10V$]

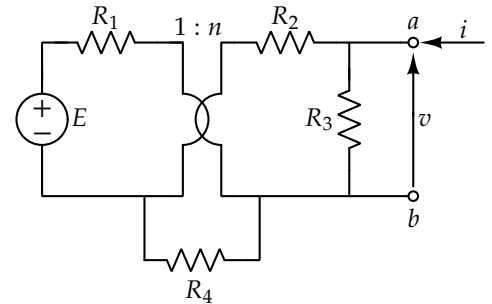


Figura 166: Es 6.14

Es. 6.15

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$R_{th} = rn + R(1 + n^2)$, $E_{th} = -RAn^2$]

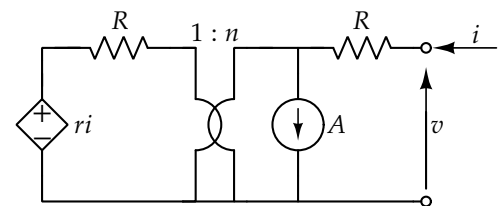


Figura 167: Es 6.15

Es. 6.16

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 9\Omega$, $R_0 = 10\Omega$, $E_1 = 1V$, $E_2 = 2V$.

Determinare v_0 , $P_A^{R_0}$, $P_E^{E_1}$ e $P_E^{E_2}$.

Sol: [$v_0 = 9V$, $P_A^{R_0} = 8.1W$, $P_E^{E_1} = -0.8W$, $P_E^{E_2} = 0.4W$]

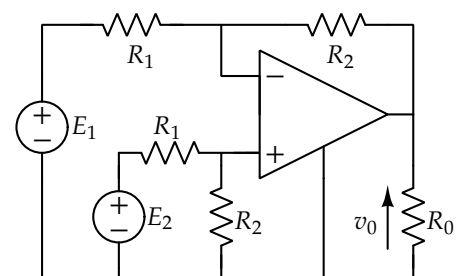


Figura 168: Es 6.16

Es. 6.17

Dati: $R = 1\Omega$, $E = 1V$.

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = i_1 \\ i_2 = -\frac{2}{3}i_1 + v_2 - 1 \end{cases}$$

]

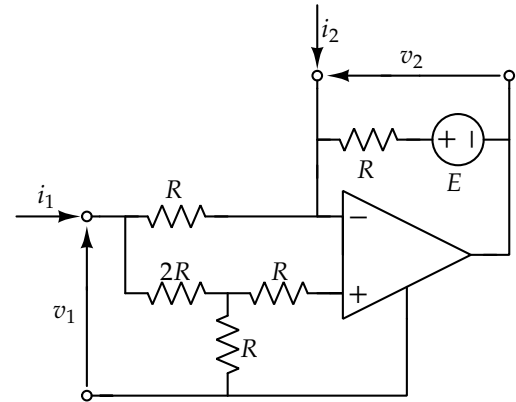


Figura 169: Es 6.17

Es. 6.18

Determinare i_1 .

Sol: $[i_1 = -\frac{E(gR+n)}{R[3+2(n+gR)n]}]$

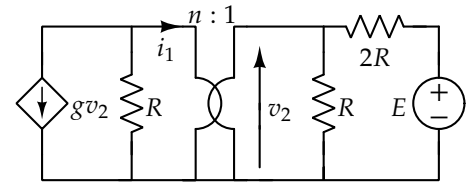


Figura 170: Es 6.18

Es. 6.19

Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2+3n^2}{2R}v_1 - \frac{n}{2R}v_2 - \frac{3En^2}{2R} \\ i_2 = -\frac{n}{2R}v_1 + \frac{1}{2R}v_2 + \frac{En+2AR}{2R} \end{cases}$$

]

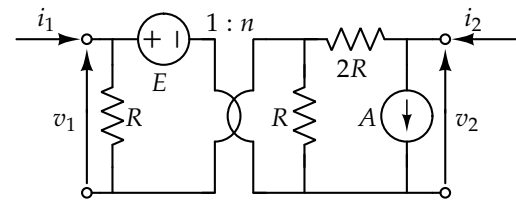


Figura 171: Es 6.19

Es. 7.1

Dati: $E = 10\text{V}$, $A = 1\text{A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 10\Omega$.

Determinare i_3 nei seguenti modi:

- Utilizzando il metodo dell'analisi nodale.
- Sfruttando, se necessario, il principio di sovrapposizione degli effetti e la trasformazione serie/parallelo dei generatori reali.
- Ricavando il circuito equivalente di Thévenin (o Norton) rispetto a R_3 , calcolando infine i_3 .

Sol: $[i_3 = -0.25\text{A}]$

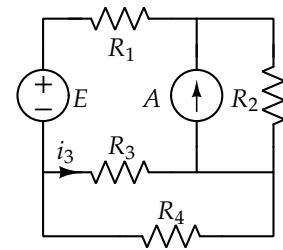


Figura 172: Es 7.1

Es. 7.2

Dati: $E_1 = 12\text{V}$, $E_2 = 20\text{V}$, $R_1 = R_2 = 4\Omega$, $L = 2\text{H}$, $i_L(0) = 3\text{A}$.

Determinare:

- $i_L(t)$.
- $v_L(t)$.
- L'energia immagazzinata nell'induttore per $t = \infty$.

Sol: $[i_L(t) = -5e^{-t} + 8, t \geq 0. v_L(t) = 10e^{-t}, t \geq 0. W_L(\infty) = 64\text{J}]$

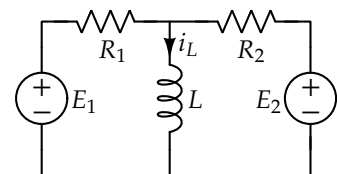


Figura 173: Es 7.2

Soluzione

IL CIRCUITO DELL'ESERCIZIO È DETTO *RL* DEL PRIMO ORDINE poiché contiene un solo induttore e dei resistori. Indipendentemente dalle richieste specifiche, il primo passo per risolvere questo tipo di esercizi è, tipicamente, ricavare la variabile di stato (in questo caso $i_L(t)$). Per farlo occorre risolvere la cosiddetta equazione di stato, che nel caso dei circuiti *RL*, ha la forma seguente

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \lambda i_L(t) + u(t) . \quad (44)$$

Essa descrive l'andamento delle variabili di stato in funzione del tempo.

Denominando $v_L(t)$ la tensione ai capi dell'induttore (con verso come in figura 174), è possibile ricavare, sfruttando la KVL-II alla maglia *I* (figura 174), la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 . Utilizzando la sua equazione costitutiva si ricava che è attraversato da una corrente pari a

$$\frac{E_1 - v_L(t)}{R_1} . \quad (45)$$

Valutando la KVL-II alla maglia *II* in figura 174, è possibile ricavare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 . Usando l'equazione costitutiva di tale componente, si ottiene che la corrente che lo attraversa è

$$\frac{E_2 - v_L(t)}{R_2} . \quad (46)$$

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 174) si ricava l'equazione

$$i_L(t) = \frac{E_1 - v_L(t)}{R_1} + \frac{E_2 - v_L(t)}{R_2} . \quad (47)$$

Per scrivere l'equazione di stato del circuito è necessario indicare $v_L(t)$ in funzione di $i_L(t)$ e sostituire $v_L(t)$ con l'equazione costitutiva dell'induttore. Seguendo questi passaggi (a partire dall'equazione 47) si ricava l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i_L(t) + \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{(R_1 + R_2)L} . \quad (48)$$

Sostituendo i valori numerici si ricava

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -i_L(t) + 8 . \quad (49)$$

La soluzione di un'equazione differenziale nella forma 44 è data dalla somma di due termini

1. la soluzione dell'equazione omogenea associata: $i_{LOA}(t; k, \bar{t})$ (tale soluzione è della forma: $i_{LOA}(t; k, \bar{t}) = ke^{\lambda(t-\bar{t})}$;

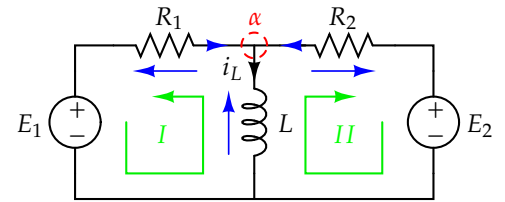


Figura 174: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzati.

2. l'integrale particolare: $i_{LIP}(t)$ (la sua espressione dipende dalla funzione nota $u(t)$).

Sommando tali termini si ottiene dunque che

$$i_L(t; k, \bar{t}) = i_{LOA}(t; k, \bar{t}) + i_{LIP}(t) = ke^{\lambda(t-\bar{t})} + i_{LIP}(t) . \quad (50)$$

I parametri incogniti della funzione riportata sopra si possono ricavare solo se si conosce il valore di i_L ad un certo istante di tempo $t = \bar{t}$.

L'equazione 49 è nella forma 44, con i parametri

- frequenza libera (o pulsazione naturale): $\lambda = -1$ (siccome λ ha segno negativo, il circuito è asintoticamente stabile);
- ingresso: $u(t) = 8$;
- condizione iniziale della corrente che attraversa l'induttore in $\bar{t} = 0$.

POICHÉ $u(t)$ È UNA COSTANTE, allora anche l'integrale particolare sarà costante. Per comodità nei calcoli si pone $i_{LIP}(t) = a$, con a costante. Sostituendo a alla funzione $i_L(t)$ nell'equazione 49, risolvendo si ricava

$$i_{LIP}(t) = a = 8 . \quad (51)$$

Sostituendo il valore di $i_{LIP}(t)$ appena ricavato, quello di \bar{t} e quello di λ nell'equazione 50, si ricava

$$i_L(t) = ke^{-t} + 8 . \quad (52)$$

Sapendo che $i_L(0) = 3A$, si può ricavare dall'equazione 52 (considerando $t = \bar{t} = 0$) che

$$i_L(0) = ke^{-0} + 8 = 3 , \quad (53)$$

da cui si conclude che $k = -5$. In questo modo è stata trovata la soluzione dell'equazione differenziale 49, che è

$$i_L(t) = -5e^{-t} + 8, \quad t \geq 0 . \quad (54)$$

Sostituendo la funzione 54 nell'equazione costitutiva dell'induttore, si ricava che

$$v_L(t) = 10e^{-t}, \quad t \geq 0 . \quad (55)$$

È importante sottolineare che nelle soluzioni appena trovate si deve indicare $t \geq 0$. Ciò è essenziale poiché nulla ci è lecito sapere di i_L prima dell'istante iniziale fornito.

L'ENERGIA IMMAGAZZINATA nell'induttore si può calcolare usando la formula

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L(t)^2, \quad (56)$$

perciò

$$W_L(\infty) = \frac{1}{2} L i_L(\infty)^2 = \frac{1}{2} L \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} (-5e^{-t} + 8) \right]^2 = 64 \text{ J}.$$

Si conclude quindi che l'energia immagazzinata nell'induttore per $t = \infty$ è pari a $W_L(\infty) = 64 \text{ J}$.

SAREBBE STATO POSSIBILE TROVARE L'INTEGRALE PARTICOLARE IN MODO DIVERSO. Se il circuito è asintoticamente stabile e gli ingressi sono costanti, il termine $i_{L_{IP}}(t)$ può essere ricavato considerando la rete a regime. In tale situazione la corrente $i_L(t)$ è costante (ha esaurito il transitorio) e quindi, considerando l'equazione costitutiva dell'induttore, si ricava che $v_L(\infty) = 0$. Ciò significa che tale componente può essere sostituito con un corto circuito.

Considerando il circuito in figura 173 a regime, si ricava quello in figura 175. Valutando le KVL-II alle maglie I e II si ricavano le tensioni ai capi dei due resistori di resistenza, rispettivamente, R_1 e R_2 . Sfruttando le equazioni costitutive di tali componenti si può calcolare la corrente che li percorre. Attraverso la KCL al taglio nodale al nodo α si ricava che

$$i_{L_{IP}}(t) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}. \quad (57)$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene esattamente lo stesso valore di $i_{L_{IP}}(t)$ ricavato con l'altro metodo. L'equazione 57 poteva essere ricavata sostituendo nell'equazione 47 il valore di v_L a regime (ossia $v_L(\infty) = 0$).

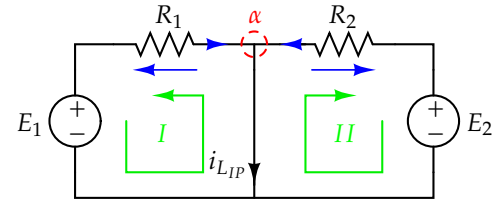


Figura 175: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzati.

Es. 7.3

Dati: $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 12 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $v_C(0) = 3 \text{ V}$.

Determinare:

- $v_x(t)$.
- L'energia immagazzinata nel condensatore per $t = \infty$.

Sol: $[v_x(t) = -3e^{-500t} + 6, t \geq 0. W_C(\infty) = 18 \mu\text{J}]$

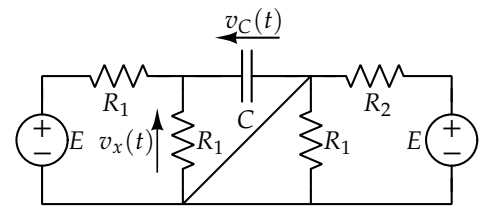


Figura 176: Es 7.3

Es. 7.4

Dati: $v_C(\bar{t}) = v_{C_0}$.

Determinare:

- $v_C(t)$ per $t \geq \bar{t}$.
- Quanto vale $v_C(\infty)$ se $r > R_1 + R_2$ e se $r < R_1 + R_2$?

Sol: $[v_C(t) = (v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2})e^{\frac{r-R_2-R_1}{R_1R_2C}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2}, t \geq \bar{t}$. Se $r < R_1 + R_2$ allora $v_C(\infty) = \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2}$, altrimenti $v_C(\infty)$ diverge (il circuito diventa instabile)]

Soluzione

IL CIRCUITO DELL'ESERCIZIO È DETTO RC DEL PRIMO ORDINE poiché contiene un solo condensatore e dei resistori. L'equazione di stato di questa tipologia di circuiti ha la forma seguente

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \lambda v_C(t) + u(t) . \quad (58)$$

Essa descrive l'andamento delle variabili di stato in funzione del tempo.

Valutando la KVL-II alla maglia *I* in figura 178, si ricava la tensione sul resistore di resistenza R_2 (secondo il verso indicato in figura 178). Sfruttando l'equazione di stato di tale componente, si può calcolare la corrente che lo attraversa, ricavando quindi che

$$i_2 = \frac{v_C(t)}{R_2} . \quad (59)$$

Considerando la KVL-II alla maglia *II* in figura 178 si può calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 . Usando l'equazione costitutiva del componente, si calcola che la corrente da cui è attraversato è pari a

$$\frac{ri_2 - v_C(t)}{R_1} . \quad (60)$$

Denominando $i_C(t)$ la corrente che scorre nel condensatore, si ricava dalla KCL al taglio Ω (figura 179), l'equazione

$$i_2 + i_C(t) + A = \frac{ri_2 - v_C(t)}{R_1} . \quad (61)$$

Sostituendo nell'equazione sopra il valore di i_2 (calcolato in funzione di $v_C(t)$, equazione 59) e sostituendo $i_C(t)$ con l'equazione costitutiva

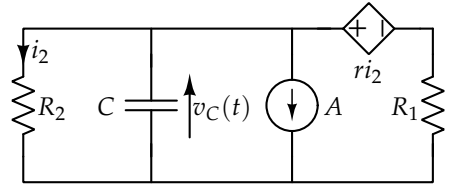


Figura 177: Es 7.4

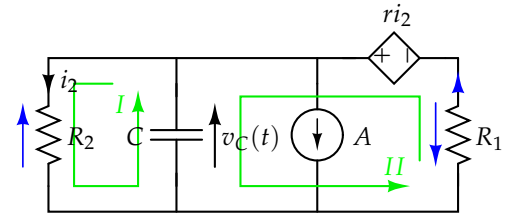


Figura 178: Circuito con evidenziate le maglie (in verde) utilizzate.

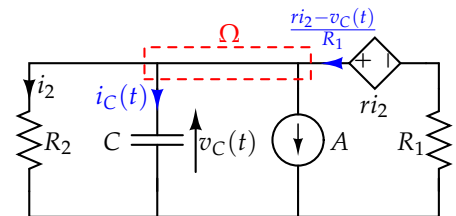


Figura 179: Circuito con evidenziato il taglio (in rosso) utilizzato.

del condensatore, si ricava l'equazione di stato

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \underbrace{\frac{r - R_1 - R_2}{CR_1R_2}}_{\lambda} v_C(t) - \underbrace{\frac{A}{C}}_{u(t)} . \quad (62)$$

L'equazione 62 è nella forma 58, con i parametri

- frequenza libera (o pulsazione naturale): $\lambda = \frac{r - R_1 - R_2}{CR_1R_2}$;
- ingresso: $u(t) = -\frac{A}{C}$;
- istante di tempo in cui è noto il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore: \bar{t} .

LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE 62 è del tipo

$$v_C(t) = ke^{\lambda(t-\bar{t})} + v_{C_{IP}}(t) . \quad (63)$$

Poiché $u(t)$ è una costante, allora anche l'integrale particolare dell'equazione differenziale 62 sarà una costante. Per comodità nei calcoli si consideri $v_{C_{IP}} = a$, con a costante. Sostituendo a alla funzione $v_C(t)$ nell'equazione di stato e risolvendo, si ricava

$$v_{C_{IP}}(t) = a = -\frac{u(t)}{\lambda} = \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (64)$$

Sostituendo il valore di $v_{C_{IP}}(t)$ appena calcolato e quello di λ nella funzione 63, si ottiene

$$v_C(t) = ke^{\frac{r-R_1-R_2}{CR_1R_2}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (65)$$

Sapendo, dal testo dell'esercizio, che $v_C(\bar{t}) = v_{C_0}$, sostituendo nell'equazione 65 si ricava che

$$k = v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (66)$$

In conclusione, la soluzione dell'equazione differenziale 62 è

$$v_C(\bar{t}) = \left(v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} \right) e^{\frac{r-R_1-R_2}{CR_1R_2}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2}, \quad t \geq \bar{t} . \quad (67)$$

Si osserva che il segno di λ , e quindi il comportamento della rete, dipende esclusivamente dal segno del termine $r - R_1 - R_2$. Se $r > R_1 + R_2$, allora λ è positiva e il circuito è instabile. Quindi $v_C(\infty)$ diverge. Se $r < R_1 + R_2$, allora λ è negativa, quindi

$$v_C(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_C(t) = \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (68)$$

In questo caso il circuito è asintoticamente stabile e, siccome gli ingressi sono costanti, è possibile ricavare facilmente $v_{C_{IP}}(t)$ considerando la rete a regime.

In tale situazione la tensione $v_C(\infty)$ è costante e quindi la corrente $i_C(\infty)$ è nulla. Ciò significa che il condensatore, a regime, si comporta come un circuito aperto. Quindi, considerando il circuito in figura 177 a regime, si ottiene quello in figura 180. Ricavando da quest'ultimo la tensione $v_C(t)$, si ottiene lo stesso valore di $v_{C_{IP}}(t)$ già calcolato in precedenza.

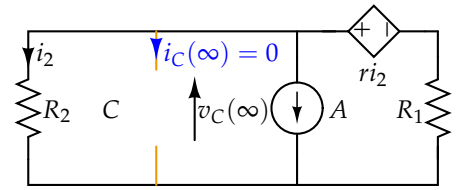


Figura 180: Rete a regime con il condensatore sostituito con un circuito aperto (arancione).

Es. 7.5

Dati: $i_L(\bar{t}) = I_{L0}$, $e(t) = \bar{k}t$ ($[\bar{k}] = [\frac{V}{s}]$)

Determinare $i_L(t)$ per $t \geq \bar{t}$.

Sol: $[i_L(t) = [I_{L0} - \frac{\bar{k}(R_1\alpha + R_2)}{R_1R_2}(\frac{L}{R_1} - \bar{t})]e^{-\frac{R_1}{L}(t-\bar{t})} + \frac{\bar{k}(R_1\alpha + R_2)}{R_1R_2}(\frac{L}{R_1} - t), t \geq \bar{t}]$

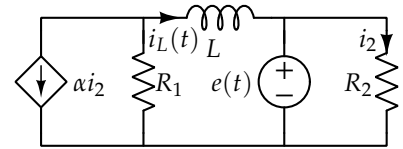


Figura 181: Es 7.5

Es. 7.6

Dati: $v_C(t_0) = V_{C0}$

Determinare:

- I valori di α che assicurano la stabilità asintotica del circuito.
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$ per $t \geq t_0$.

Sol: [Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha > -\frac{R_1 + R_2 n^2}{R_2 n}$. $v_C(t) = V_{C0} e^{-\frac{t-t_0}{R_2 n^2 + R_2 n \alpha + R_1}}, t \geq t_0]$

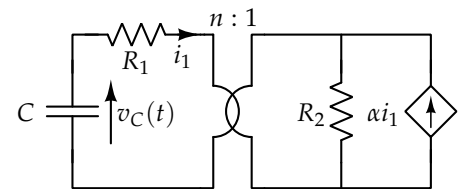


Figura 182: Es 7.6

Es. 7.7

Dati: $i_L(0) = 1\text{A}$

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $i_L(t)$, per $t \geq 0$.
- Determinare la potenza assorbita dall'amplificatore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L(t) - \frac{E}{L} \cdot i_L(t) = \left(1 + \frac{E}{R_1}\right)e^{-\frac{R_1}{L}t} - \frac{E}{R_1}, t \geq 0, \right.$
 $\left. P_A^{AO}(\infty) = -\frac{E^2(R_1+R_2)(R_1+R_2+R_3)}{R_1^2 R_3} \right]$

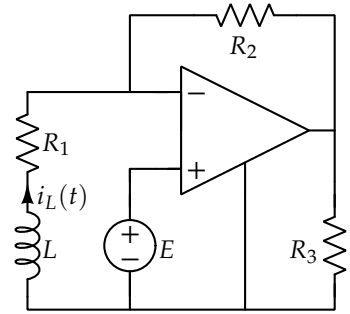


Figura 183: Es 7.7

Es. 7.8

Determinare la corrente i (hp: $\alpha \neq 4$).

Sol: $\left[i = -\frac{E_1 - E_2 - 3RA}{R(4-\alpha)}\right]$

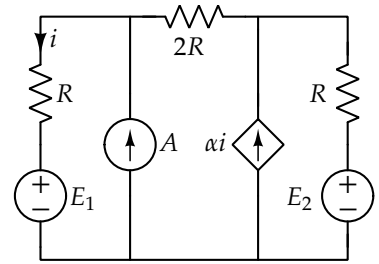


Figura 184: Es 7.8

Es. 7.9

Dati: $v_C(0) = V_{C0}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$ e l'energia immagazzinata nel condensatore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: $\left[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{(R_1+R_2)C}v_C(t) - \frac{E+AR_2}{(R_1+R_2)C} \cdot \right.$ Il circuito è stabile per
qualsiasi valore di α . $v_C(t) = (V_{C0} + E + AR_2)e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} - (E + AR_2)$,
 $\left. t \geq 0. W_C(\infty) = \frac{1}{2}C(E + R_2A)^2 \right]$

Figura 185: Es 7.9

Es. 7.10

Dati: $i_L(0) = I_{L_0}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ e $P_A^{R_2}(t)$.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} i_L(t) + \frac{A R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]}\right]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha < -\frac{R_2}{R_1} - 1$ U $\alpha > -1$. $i_L(t) = (i_{L_0} - A)e^{-\frac{R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} t} + A$, $t \geq 0$. $P_A^{R_2}(t) = R_2 \left[\frac{R_1(1+\alpha)(i_{L_0} - A)}{R_1(1+\alpha)+R_2}\right]^2 e^{-\frac{2R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} t}$

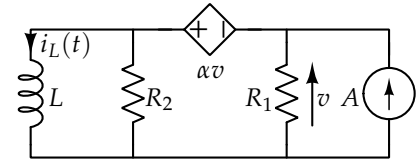


Figura 186: Es 7.10

Es. 7.11

Dati: $v_C(0) = 0$, $e(t) = E \cos(\omega t)$.Determinare: $v_C(t)$, per $t \geq 0$.

Sol: $[v_C = (\frac{E R_1}{(\omega C R_1 R_2)^2 + (R_1 + R_2)^2})[-(R_1 + R_2)e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} + (R_1 + R_2) \cos(\omega t) + (\omega R_1 R_2 C) \sin(\omega t)], t \geq 0]$

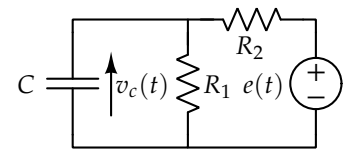


Figura 187: Es 7.11

Es. 7.12

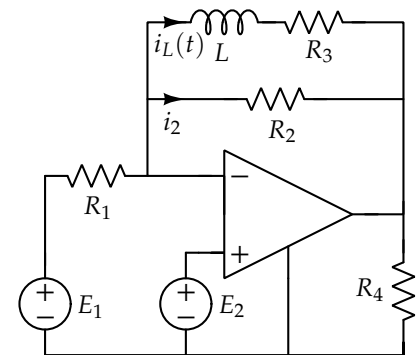
Dati: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 6\text{k}\Omega$, $R_4 = 10\text{k}\Omega$, $E_1 = 10\text{V}$, $E_2 = 20\text{V}$, $L = 1\text{mH}$, $i_L(0) = 0\text{A}$.Determinare $i_L(t)$ e $i_2(t)$.Sol: $[i_L(t) = 5(e^{-12t} - 1)10^{-3}$, $i_2(t) = -5(e^{-12t} + 1)10^{-3}$, $t \geq 0]$ 

Figura 188: Es 7.12

Es. 7.13

Determinare l'equazione di stato del circuito.

Sol: $\left[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{(3+\alpha)}{RC}v_C(t) + \frac{E(\alpha+2)}{RC} \right]$

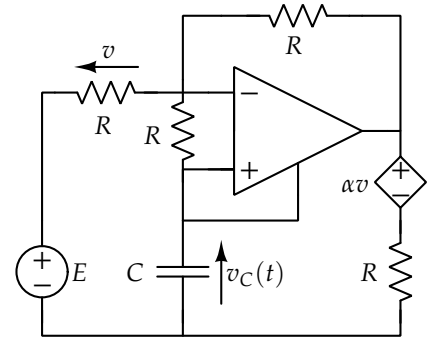


Figura 189: Es 7.13

Es. 7.14

Dati: $E = 1V$, $R = 1\Omega$, $C = 2F$. Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 1i_1 + 2i_2 \\ v_2 = 3i_1 + 4i_2 \end{cases}$$

Supponendo la tensione del condensatore $v_C(t)$ diretta come v_2 e sapendo che $v_C(0) = 0V$, determinare: $v_2(t)$ e $i_2(t)$.

Sol: $[v_C(t) = -1.5e^{-0.5t} + 1.5, i_2(t) = -1.5e^{-0.5t}, t \geq 0]$

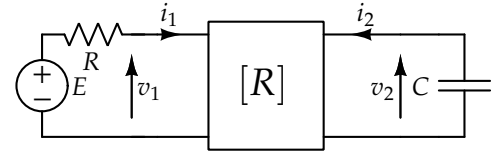


Figura 190: Es 7.14

Es. 7.15

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $E = 1V$, $n = 2$.

Determinare:

- I parametri della formulazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo in figura.
- Si supponga di connettere alla porta 1 un generatore di corrente $A = 1A$ e alla porta 2 un induttore $L = 2mH$. Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.

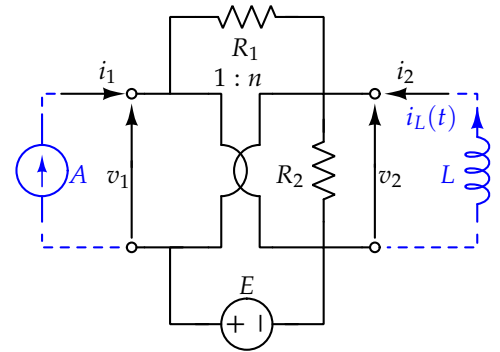


Figura 191: Es 7.15

- Supponendo la corrente dell'induttore $i_L(t)$ diretta come i_2 e sapendo che $i_L(0) = 0\text{A}$, determinare $i_2(t)$ e $v_2(t)$.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 0.5v_2 \\ i_2 = -0.5i_1 + 0.5v_2 - 0.5 \end{cases}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -10^3 i_L(t) - 10^3, i_2(t) = e^{-10^3 t} - 1, v_2(t) = 2e^{-10^3 t}, t \geq 0]$$

Es. 7.16

Dati: $i_L(0) = 1\text{A}$. Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ e l'energia immagazzinata nell'induttore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: [$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{(\alpha-3)R}{2L} i_L(t)$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha < 3$. $i_L(t) = e^{\frac{(\alpha-3)R}{2L} t}, t \geq 0$. $W_L(\infty) = 0\text{J}$.]

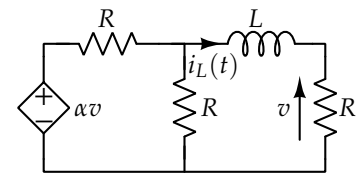


Figura 192: Es 7.16

Es. 7.17

Dati: $v_C(0) = 0\text{V}$.

Determinare: $v_0(t)$.

Sol: [$v_0(t) = \frac{6E+AR}{5} - \frac{AR+E}{5} e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$]

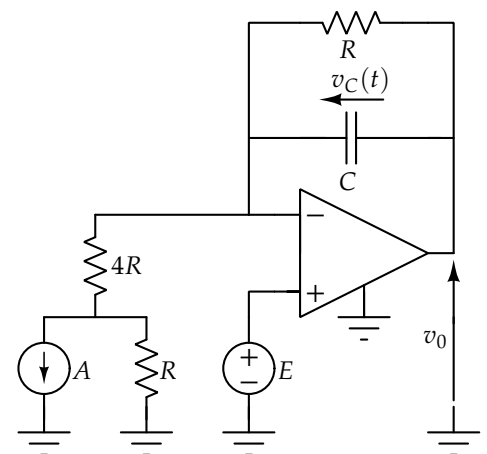


Figura 193: Es 7.17

Es. 7.18

Dati: $i_L(t_0) = 1\text{A}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di r il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ per $t \geq t_0$.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{2(R-2r)}{5L}i_L(t) + \frac{3E}{5L}\right]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $r < \frac{R}{2}$. $i_L(t) = \left(1 - \frac{3E}{2(R-2r)}\right)e^{-\frac{2(R-2r)}{5L}(t-t_0)} + \frac{3E}{2(R-2r)}, t \geq t_0]$

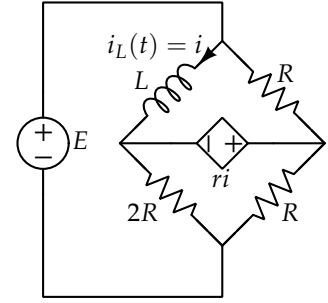


Figura 194: Es 7.18

Es. 7.19

Dati: $v_C(0) = 0\text{V}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di g il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$.

Sol: $\left[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{2-gR}{RC}v_C(t) + \frac{E_1(1-gR)+E_2}{RC}\right]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $g < \frac{2}{R}$. $v_C(t) = \frac{E_1(1-gR)+E_2}{2-gR}(1 - e^{-\frac{2-gR}{RC}t}), t \geq 0]$

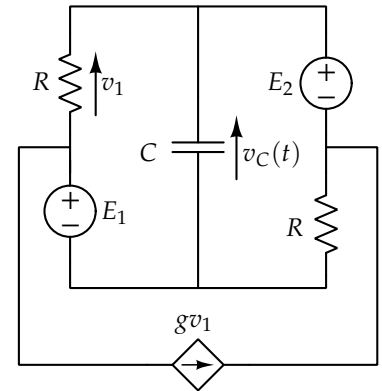


Figura 195: Es 7.19

Es. 7.20

Dati: $i_L(\bar{t}) = 1\text{A}$.

Determinare:

- $i_L(t)$.
- La potenza erogata dall'amplificatore operazionale per $t = \infty$.

Sol: $[i_L(t) = (1 - \frac{E_1-E_2}{R})e^{-\frac{R}{L}(t-\bar{t})} + \frac{E_1-E_2}{R}, t \geq \bar{t}]$. $P_E^{AO}(\infty) = \frac{(E_1-E_2)(E_1-2E_2)}{R}]$

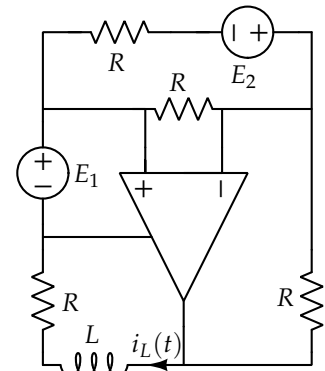


Figura 196: Es 7.20

