Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Prima prova in itinere A.A. 2016/17		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento dello spazio. Consideriamo il sistema lineare parametrico

$$\begin{cases} x - ky + 2z = 2, \\ kx + y + z = 1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

i. Per ogni k, verificare che il sistema descrive una retta r_k e trovare una sua rappresentazione parametrica.
ii. Studiare al variare di k la reciproca posizione di r_k e del piano rappresentato da $x - y = 0$.
iii. Stabilire se per $k = 1$ la retta r_1 e la retta s di equazioni $x - y = 0,\ x - z = 0$ sono complanari.

DOMANDA AGGIUNTIVA: Trovare tutti i valori di k per cui r_k ed s sono complanari.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio W generato dai vettori $\mathbf{w_1} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0]$, $\mathbf{w_2} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$ e $\mathbf{w_3} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$ ed il sottospazio $U = \{[x \quad y \quad z \quad t] \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - z = 0,\ y + t = 0\}$.

i. Si determinino dimensioni e basi di W ed U.
ii. Si completi la base trovata di W ad una base di $\mathbb{R}^4$.
iii. Si determinino dimensioni e basi di $U + W$ and $U \cap W$.

3. Sia f_h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & h+2 \\ 2 & 1 & h-2 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

i. Determinare dimensioni e basi di $\ker(f_h)$ e $\mathrm{Im}(f_h)$.
ii. Trovare i valori di h per i quali f_h è suriettiva. Dire se tali applicazioni sono anche iniettive.
iii. Dire se f_{-3} è invertibile ed in tal caso scrivere la matrice che rappresenta $(f_{-3})^{-1}$ rispetto alla base canonica.

Soluzioni

(1) i. Studiamo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 2 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 2 & 2 \\ 0 & 1+k^2 & 1-2k & 1-2k \end{array}\right).$$

Dato che $1+k^2 > 0$ per qualunque $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice dei coefficienti del sistema è 2, quindi esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro che corrispondono alle coordinate dei punti di una retta r_k. La rappresentazione parametrica della retta si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - ky + 2z = 2, \\ (1+k^2)y + (1-2k)z = 1-2k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k+2}{1+k^2} - \frac{k+2}{1+k^2}t, \\ y = \frac{1-2k}{1+k^2} - \frac{1-2k}{1+k^2}t, \\ z = t, \end{cases} \Rightarrow$$

$$r_k|_{\mathcal{B}_O} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k+2}{1+k^2} \\ \frac{1-2k}{1+k^2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k+2 \\ 1-2k \\ -1-k^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii. Per studiare l'intersezione tra la retta ed il piano sostituiamo la rappresentazione parametrica della retta nell'equazione algebrica del piano:

$$x - y = \frac{3k+1}{1+k^2} + t(3k+1) = 0.$$

L'equazione lineare in t ha infinite soluzioni per $k = -\frac{1}{3}$ ed in tal caso la retta giace sul piano. Per $k \neq -\frac{1}{3}$ esiste un'unica soluzione $t = -\frac{1}{1+k^2}$. In questo caso la retta interseca il piano nel punto di coordinate $(0\ 0\ 1)^T$.

iii. Dal punto precedente sappiamo che per $k = -\frac{1}{3}$ la retta $r_{-\frac{1}{3}}$ è contenuta in uno dei due piani che definiscono s, e quindi le due rette sono complanari e contenute entrambe in $x - y = 0$.
Per $k \neq -\frac{1}{3}$ sappiamo invece che r_k non è parallela al piano di equazione $x - y = 0$, pertanto non può essere parallela a s. Rimane da verificare se esistano valori di $k \neq -\frac{1}{3}$ per cui le due rette risultino incidenti. Poiché l'intersezione di r_k con il piano $x-y=0$ è il punto di coordinate $(0\ 0\ 1)^T$, dobbiamo solo stabilire se questo punto soddisfa l'equazione del secondo piano definente s, ovvero $x - z = 0$. Dato che questo non è vero, segue che r_k non interseca s per $k \neq -\frac{1}{3}$.
Di conseguenza le due rette sono complanari solo per $k = -\frac{1}{3}$.

(2) i. Si può ottenere una base di W riducendo a scala la matrice le cui righe sono i vettori generatori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza una base di W è $\mathcal{B}_W = \{[\ 1\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ ], [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ], [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]\}$ e la sua dimensione è 3.
Il sottospazio U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y = -\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pertanto una base di U è $\mathcal{B}_U = \{[\ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ ], [\ 1\ \ -2\ \ 0\ \ 2\ ]\}$ e la sua dimensione è 2.

ii. È immediato verificare che l'insieme $\mathcal{B}_W \cup \{\mathbf{e_2}\}$ è linearmente indipendente e quindi è una base di $\mathbb{R}^4$.

iii. Il sottospazio $U + W$ è generato da $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$. In questo insieme andiamo a calcolare il numero di vettori indipendenti e quindi la dimensione di $U + W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertando $\dim(U + W) = 4$ e quindi $U + W$ coincide con lo spazio ambiente $\mathbb{R}^4$. Una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Per studiare $U \cap W$ andiamo a costruire la rappresentazione algebrica di W. Poiché $\dim(W) = 3 = \dim(\mathbb{R}^4) - 1$, il sottospazio W è definito da un sistema lineare composto da una sola equazione. È semplice verificare che tutti i vettori della base $\mathcal{B}_W$ hanno le prime due componenti uguali, pertanto $W = \{[x\ \ y\ \ z\ \ t] \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0\}$. Il sottospazio $U \cap W$ è quindi definito dal sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ y + t = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

La soluzione delle prime due equazioni è la rappresentazione parametrica di U ottenuta precedentemente. Sostituendola nella terza equazione, otteniamo

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3\beta.$$

Di conseguenza i vettori in $U \cap W$ sono del tipo

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Una base di $U \cap W$ è $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{[\ 1\ \ 1\ \ 3\ \ -1\ ]\}$ e la sua dimensione è 1.

(3) i. Il determinante dell'applicazione è

$$\det(f_h) = \det(A_h) = h - 2 + h - h - 2 - 2h = -h - 4.$$

Pertanto per ogni $h \neq -4$ il nucleo dell'applicazione è il sottospazio banale, per il quale $\dim(\ker(f_h)) = 0$ e non esiste una base. Per il teorema del rango, la dimensione dell'immagine è 3, quindi essa coincide con lo spazio d'arrivo $\mathbb{R}^3$ ed una sua base è la base canonica. Per $h = -4$ abbiamo

$$\ker(f_{-4}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim(\ker(f_{-4})) = 3 - 2 = 1$ ed una base del nucleo si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato:

$$\mathcal{B}_{\ker(f_{-4})} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'immagine ha dimensione 2 ed una sua base è data dalle prime due colonne di A_{-4} :

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f_{-4})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ii. Per quanto detto al punto precedente, l'applicazione è biunivoca se e solo se $h \neq -4$. Per $h = -4$ l'applicazione non è ne iniettiva ne suriettiva.

iii. L'applicazione f_{-3} è invertibile in quanto è biunivoca. La matrice che rappresenta $(f_{-3})^{-1}$ rispetto alla base canonica si ottiene invertendo la matrice A_{-3}. Utilizziamo l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$(A_{-3}|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left(I_3|(A_{-3})^{-1}\right).$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Preappello A.A. 2016/17		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia f_h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$F_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 0 & h+1 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

   i. Studiare la diagonalizzabilità di f_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
   ii. Trovare i valori di h per i quali f_h è ortogonalmente diagonalizzabile.
   iii. Per tali valori scrivere una matrice ortogonale Q ed una matrice diagonale D tali che $D = Q^T F_h Q$.

2. Dato $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento ortonormale del piano, consideriamo un punto Q e una retta r :

$$Q|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r|_{\mathcal{B}_O} : \ x - y = 0.$$

   i. Scrivere l'equazione della conica $\mathcal{C}$ i cui punti P soddisfano l'equazione $d(P, r) = \sqrt{2}\, d(P, Q)$.
   ii. Classificare $\mathcal{C}$ e scrivere una sua forma canonica.
   iii. Trovare il centro e gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$.

3. Dato $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento ortonormale dello spazio, sia r la retta di equazioni $x = 2,\ y = 2$.
   i. Trovare la retta s passante per i punti $M|_{\mathcal{B}_O} = (0\ 1\ 0)^T$ e $N|_{\mathcal{B}_O} = (1\ 3\ 1)^T$. Studiare la mutua posizione e la distanza tra r ed s.
   ii. Trovare l'equazione e classificare la superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione di s attorno ad r.
   iii. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza contenuta in $\mathcal{Q}$, il cui centro si trova lungo la retta r e di raggio minimo. Trovare le coordinate del centro, il raggio e la rappresentazione algebrica di $\mathcal{C}$.

4. Consideriamo l'applicazione $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   i. Determinare dimensioni e basi di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   ii. Dato il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ generato da $\left\{(1\ 1\ 1\ 1)^T, (-1\ 0\ 2\ 2)^T, (1\ 2\ 0\ 2)^T\right\}$, trovare dimensioni e basi di $U,\ \ker(f) + U$ e $\ker(f) \cap U$.
   iii. Verificare che $(1\ 2\ 0)^T$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f)$ e trovarne la sua controimmagine.

Soluzioni

(1) i. Il polinomio caratteristico di F è

$$p_F(\lambda) = \begin{vmatrix} h-\lambda & 0 & h \\ 0 & h+1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h+1-\lambda)((h-\lambda)^2-h) = (h+1-\lambda)(h+\sqrt{h}-\lambda)(h-\sqrt{h}-\lambda).$$

Quindi le radici del polinomio sono $\lambda_1 = h+1,\ \lambda_2 = h+\sqrt{h},\ \lambda_3 = h-\sqrt{h}$.

- Se $h < 0$ l'applicazione non è diagonalizzabile perché le radici del polinomio non sono tutte reali.
- Se $h = 0$ abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ovvero l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2. In tal caso l'autospazio associato è

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la molteplicità geometrica di 0 è 1. Di conseguenza f_0 non è diagonalizzabile.
- Se $h = 1$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. In questo caso l'applicazione è sicuramente diagonalizzabile perché f_1 è simmetrica.
- In tutti gli altri casi l'applicazione è diagonalizzabile in quanto gli autovalori sono semplici.

L'applicazione è quindi diagonalizzabile per $h > 0$.

ii. L'applicazione è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica, pertanto se e solo se $h = 1$.

iii. Fissato $h = 1$, gli autospazi associati ai due autovalori 2 e 0 sono:

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) i. Date x e y le coordinate di P, utilizzando le formule per le distanze abbiamo:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad (x-y)^2 = 4x^2+4(y-1)^2.$$

Dopo semplificazioni, otteniamo

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O}: \quad 3x^2+2xy+3y^2-8y+4=0.$$

ii. Le matrici associate alla conica sono:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 1 = (4-\lambda)(2-\lambda).$$

Di conseguenza i due autovalori sono $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ e quindi $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 6,\ I_2 = \lambda_1\lambda_2 = 8$. Dalla matrice B abbiamo $I_3 = -16$. Dato che $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$, la conica $\mathcal{C}$ è un'ellisse con punti reali. Una sua equazione canonica è

$$\mathcal{C}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O}: \quad \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1 = 0.$$

iii. Le coordinate del centro C di simmetria si ricavano risolvendo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -12 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Gli autospazi di A sono

$$V_4 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

I due assi di simmetria r_4, r_2 contengono C e sono paralleli ai corrispondenti autospazi. La loro rappresentazione parametrica è:

$$r_2|_{\mathcal{B}_O}: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} + t \end{cases}, \qquad r_4|_{\mathcal{B}_O}: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} - t \end{cases}.$$

(3) i. Costruiamo una rappresentazione parametrica di r da cui otteniamo un punto $P_1 \in r$ ed un vettore $\mathbf{v_1}$ parallelo ad r:

$$r|_{\mathcal{B}_O}: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad P_1|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_1}|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La retta s è costituita dai punti P tali che $[\overrightarrow{MP}] = t[\overrightarrow{MN}]$. Una sua rappresentazione parametrica da cui otteniamo un punto $P_2 \in s$ ed un vettore $\mathbf{v_2}$ parallelo ad s è:

$$s|_{\mathcal{B}_O}: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad P_2|_{\mathcal{B}_O} = M|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2}|_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{MN}]|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i vettori

$$\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \qquad \text{e} \qquad [\overrightarrow{P_1P_2}]|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\langle \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_1P_2}]\rangle = 3 \neq 0$ e di conseguenza le due rette sono sghembe. La loro distanza è

$$d(r,s) = \frac{|\langle \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_1P_2}]\rangle|}{\|\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

ii. Dato P il generico punto della retta s, la superficie $\mathcal{Q}$ è l'insieme di tutti i punti Q che soddisfano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} d(P_1,Q)=d(P_1,P) \\ \langle \mathbf{v_1}, [\overrightarrow{PQ}]\rangle = 0 \\ [\overrightarrow{P_2P}] = t\,\mathbf{v_2} \end{cases} .$$

Date le coordinate $P|_{\mathcal{B}_O} = (x_0\ y_0\ z_0)^T$ e $Q|_{\mathcal{B}_O} = (x\ y\ z)^T$, abbiamo

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2+z^2 = (x_0-2)^2+(y_0-2)^2+z_0^2 \\ z-z_0=0 \\ x_0=t \\ y_0=1+2t \\ z_0=t \end{cases} .$$

Dopo aver eliminato i parametri x_0, y_0, z_0, t otteniamo

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(z-2)^2+(2z-1)^2,$$

che semplificata si riduce all'equazione della quadrica

$$\mathcal{Q}|_{\mathcal{B}_O}: \quad x^2+y^2-5z^2-4x-4y+8z+3=0.$$

Le matrici associate a $\mathcal{Q}$ sono:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1=-3,\ I_2=-9,\ I_3=-5,\ I_4=9$. Segue che $\mathcal{Q}$ è un iperboloide ad una falda.

iii. Dato un generico punto $P\in r$, sia Π_P il piano contenente P e perpendicolare ad r. L'unica circonferenza $\mathcal{C}_P$ contenuta in $\mathcal{Q}$ e di centro P corrisponde all'intersezione $\mathcal{C}_P=\mathcal{Q}\cap\Pi_P$. La circonferenza ha raggio minimo, pari a $d(r,s)={}^3\!/\!\sqrt{5}$, quando P è il centro C della quadrica. Le coordinate del punto C si ricavano risolvendo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C|_{\mathcal{B}_O}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O}: \quad \begin{cases} x^2+y^2-5z^2-4x-4y+8z+3=0 \\ z=\frac{4}{5} \end{cases} .$$

(4) i. Riduciamo a scala la matrice F :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$\ker(f)=\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$ ed una base del nucleo si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato:

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'immagine ha dimensione 2 ed una sua base è data dalle prime due colonne di F :

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ii. Si può ottenere una base di U riducendo a scala la matrice le cui righe sono i vettori generatori trasposti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza $\dim(U) = 3$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per trovare una base di $\ker(f) + U$ riduciamo a scala la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che i generatori del nucleo sono combinazioni lineari dei vettori di U e quindi $\ker(f) \subset U$. Pertanto $\ker(f) + U = U$ e $\ker(f) \cap U = \ker(f)$.

iii. Il vettore $(1\ 2\ 0)^T$ coincide con la terza colonna di F, quindi appartiene sicuramente all'immagine di f ed una sua controimmagine particolare è il vettore $(0\ 0\ 1\ 0)^T$. Pertanto

$$f^{-1}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 02 Marzo 2017		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\left\{(1\ 0\ 1\ 1)^T, (2\ 1\ 0\ -1)^T, (1\ 1\ -1\ -2)^T\right\}$.
   i. Determinare la dimensione ed una base di V.
   ii. Trovare una rappresentazione parametrica ed una algebrica di V.
   iii. Determinare una base ortonormale di $V^\perp$.

2. Sia f_h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$F_{h|\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} h & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

   i. Trovare i valori di h per i quali $\dim(\ker(f_h)) = 1$.
   ii. Stabilire se per i valori del punto precedente l'applicazione è diagonalizzabile.
   iii. Scrivere la matrice che rappresenta f_{-1} rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0\ 1\ -1)^T, (2\ 0\ 1)^T, (1\ 0\ 0)^T\}$.

3. Dato $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento ortonormale dello spazio, consideriamo la circonferenza di equazione

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

   i. Determinare il centro ed il raggio di $\mathcal{C}$.
   ii. Scrivere le equazioni e classificare la conica $\mathcal{C}'$ ottenuta come proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano $z = 0$.
   iii. Trovare i centri di tutte le sfere contenenti $\mathcal{C}$ ed aventi raggio $\sqrt{11}$.

Soluzioni

(1) i. Si può ottenere una base di V riducendo a scala la matrice le cui righe sono i vettori generatori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza una base di V è $\mathcal{B}_V = \{[\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ ], [\ 0\ \ 1\ \ -2\ \ -3\ ]\}$ e la sua dimensione è 2.

ii. Una rappresentazione parametrica di V è

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni lineari che vengono soddisfatte dai vettori di V sono della forma $ax+by+cz+dw = 0$, dove i coefficienti sono le soluzioni del sistema lineare associato alla matrice A del punto precedente:

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ b-2c-3d=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -h-k \\ b = 2h+3k \\ c = h \\ d = k \end{cases}.$$

Quindi la rappresentazione algebrica di V si ottiene identificando una base di tali soluzioni, ad esempio $\mathcal{B}_{\ker(A)} = \{[\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ ], [\ 1\ \ -3\ \ 0\ \ -1\ ]\}$. Di conseguenza, una rappresentazione algebrica di V è:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ x-3y-w=0 \end{cases}.$$

iii. L'insieme $\mathcal{B}_{\ker(A)}$ è anche una base di $V^\perp$. Per ottenere una base ortogonale di $V^\perp$ applichiamo l'algoritmo di Gram–Schmidt:

$$[\ 1\ \ -3\ \ 0\ \ -1\ ] - \frac{7}{6}[\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ ] = [\ -\tfrac{1}{6}\ \ -\tfrac{2}{3}\ \ \tfrac{7}{6}\ \ -1\ ].$$

Quindi una base ortogonale è $\{[\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ ], [\ 1\ \ 4\ \ -7\ \ 6\ ]\}$. Dopo aver normalizzato, otteniamo

$$\mathcal{B}_{V^\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}[\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ ], \frac{1}{\sqrt{102}}[\ 1\ \ 4\ \ -7\ \ 6\ ] \right\}.$$

(2) i. Il determinante dell'applicazione è

$$\det(f_h) = \det(F_{h|\mathcal{S}}) = h(1+h).$$

Pertanto $\dim(\ker(f_h)) \neq 0$ solo per $h = -1, 0$. Andiamo a verificare esplicitamente i due casi:

- $F_{-1|\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(f_{-1})) = 1;$
- $F_{0|\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(f_0)) = 1.$

ii. Il polinomio caratteristico di f_h è

$$P_h(\lambda) = \begin{vmatrix} h-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & h & 1-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)((1-\lambda)^2 + h).$$

Le radici del polinomio sono $\lambda_1 = h,\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{-h},\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{-h}$. Per $h = -1$ le radici sono reali e distinte, di conseguenza l'applicazione è diagonalizzabile. Per $h = 0$ le radici sono reali ma $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, quindi dobbiamo verificare la molteplicità geometrica dell'autovalore:

$$V_{0,1} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim(V_{0,1}) = 1.$$

Di conseguenza l'applicazione f_0 non è diagonalizzabile.

iii. Per calcolare la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto a $\mathcal{B}$ utilizziamo la formula:

$$F_{h|\mathcal{B}} = M_{\mathcal{SB}}\, F_{h|\mathcal{S}}\, M_{\mathcal{BS}}.$$

La matrice del cambio base è

$$M_{\mathcal{BS}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M_{\mathcal{SB}}$ si calcola invertendo la matrice precedente utilizzando l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$(M_{\mathcal{BS}}|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) = (I_3|(M_{\mathcal{SB}})\,.$$

Di conseguenza

$$F_{h|\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) i. La circonferenza $\mathcal{C}$ è data dall'intersezione di una sfera $\mathcal{S}$ e di un piano Π.

$$\mathcal{S}|_{\mathcal{B}_O}: \quad (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Pertanto $\mathcal{S}$ ha centro $C|_{\mathcal{B}_O} = (2\ 0\ 1)^T$ e raggio $R = \sqrt{5}$. La distanza tra C e Π è

$$d(C, \Pi) = \frac{|2+0+1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

quindi, per il teorema di Pitagora, il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ è

$$r = \sqrt{R^2 - d(C,\Pi)^2} = \sqrt{2}.$$

Il centro C' della circonferenza si ottiene spostandosi da C lungo la direzione perpendicolare al piano Π di una distanza pari a $d(C,\Pi)$. Quindi:

$$C'|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che C' appartiene al piano Π.

ii. La proiezione della circonferenza sul piano coordinato $z = 0$ si ottiene eliminando la coordinata z dal sistema di equazioni di $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0 \\ z = -x - y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + xy + y^2 - x + y = 0.$$

Otteniamo una conica $\mathcal{C}'$, descritta dal sistema

$$\mathcal{C}'|_{\mathcal{B}_O} : \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - x + y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Le matrici associate a $\mathcal{C}'$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli invarianti metrici risultano essere $I_1 = 2,\ I_2 = \frac{3}{4},\ I_3 = -\frac{3}{4}$. Poiché $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$, la conica è un'ellisse reale, come è peraltro logico aspettarsi da considerazioni geometriche.

iii. Esistono due sfere che soddisfano le richieste dell'esercizio, entrambe con i centri sulla retta perpendicolare al piano Π e contenente C'. Dal primo punto dell'esercizio, la distanza tra i centri $C_\pm$ di tali sfere ed il piano Π è

$$d(C_\pm, \Pi) = \sqrt{11 - 2} = 3.$$

Quindi:

$$C_\pm|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 3\, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{3} \\ -1 \pm \sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 29 Giugno 2017		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Dato il parametro $h \in \mathbb{R}$, siano

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_h = \begin{bmatrix} 1+h & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   i. Stabilire se esistono valori di h per cui tali matrici sono simili.
   ii. Posto $h = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A_1.
   iii. Stabilire se esistono valori di h per cui $[0\ 0\ 2]^T$ è un autovettore di A_h.

2. Dato $\mathcal{B}_O$ un sistema di riferimento ortonormale dello spazio, sia $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$

   i. Determinare una rappresentazione algebrica della curva attraverso l'eliminazione del parametro t.
   ii. Riconoscere la curva.
   iii. Scrivere l'equazione del cono sopra la curva avente vertice $V|_{\mathcal{B}_O} = [1\ 0\ 0]^T$.

3. Consideriamo l'applicazione $f_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ e definita da

$$f_h(x, y, z) = (x + hz, y + z, hx - y).$$

   i. Rappresentare f_h rispetto alla base canonica.
   ii. Posto $h = 0$, rappresentare f_0 rispetto alla base $\{(0\ 1\ 1), (-1\ 0\ 0), (0\ -1\ 0)\}$.
   iii. Determinare gli eventuali valori di h per i quali $(1\ 2\ 0)$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f_h)$.

Soluzioni

(1) i. La matrice A_h ha polinomio caratteristico

$$P_h(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & h^2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - h^2) = (2-h)(1-\lambda-h)(1-\lambda+h).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1-h$ e $\lambda_3 = 1+h$. La matrice B_h è diagonale con autovalori $\mu_1 = 1+h,\ \mu_2 = 1-h$ e $\mu_3 = 2$. Quindi $\lambda_1 = \mu_3,\ \lambda_2 = \mu_2$ e $\lambda_3 = \mu_1$ per ogni valore di h. Pertanto le due matrici sono simili per tutti ed i soli valori di h per cui A_h risulti diagonalizzabile.

- $h \neq 0, \pm 1$: tre autovalori sono distinti, quindi A_h è diagonalizzabile.
- $h = -1$: abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Studiamo l'autospazio associato a tale autovalore:

$$V_{-1,2} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Dallo studio delle righe si deduce che la matrice ha rango 1, di conseguenza la molteplicità geometrica dell'autovalore è 2 e la matrice è diagonalizzabile.
- $h = 0$: abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Studiamo l'autospazio associato a tale autovalore:

$$V_{0,1} = \ker \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Dallo studio delle colonne si deduce che la matrice ha rango 2, di conseguenza la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1 e la matrice non è diagonalizzabile.
- $h = 1$: abbiamo $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$. Studiamo l'autospazio associato a tale autovalore:

$$V_{1,2} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Come per $h = -1$, la molteplicità geometrica dell'autovalore è 2 e quindi la matrice è diagonalizzabile.

In conclusione, le due matrici sono simili per ogni $h \neq 0$.

ii. Dall'analisi precedente, sappiamo che la matrice è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Troviamo le basi degli autospazi:

$$V_{1,2} = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \right).$$

$$V_{1,0} = \ker \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

Quindi una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A_1 è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

iii. Eseguiamo la moltiplicazione tra la matrice ed il vettore:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2h^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo un autovettore se e solo se $h = 0$, nel qual caso l'autovalore associato è 1.

(2) i. Eliminiamo il parametro t utilizzando la prima equazione del sistema, poi sostituiamo nelle altre due così da ottenere le due equazioni della rappresentazione algebrica della curva.

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 + x \\ y = (-1 + x)^2 \\ z = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - y + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

ii. Il sistema di equazioni può essere visto come l'intersezione di un cilindro parallelo all'asse z intersecato con un piano. Lo classe della curva risultante è quindi la stessa della curva di equazione

$$x^2 - 2x - y + 1 = 0$$

contenuta nel piano $z = 0$. Questa è ovviamente la parabola di vertice $(1, 0, 0)$ e asse di simmetria $x = 1$.

iii. La rappresentazione parametrica della retta contenente V ed un punto di coordinate $[x_0\ y_0\ z_0]^T$ della curva è

$$\begin{cases} x(t) - 1 = t\,(x_0 - 1) \\ y(t) = t\,y_0 \\ z(t) = t\,z_0 \end{cases}$$

Per trovare la rappresentazione algebrica del cilindro dobbiamo mettere queste equazioni a sistema con quelle della curva ed eliminare x_0, y_0, z_0, t :

$$\begin{cases} x - 1 = t\,(x_0 - 1) \\ y = t\,y_0 \\ z = t\,z_0 \\ (x_0 - 1)^2 - y_0 = 0 \\ x_0 + z_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x-1}{t} + 1 \\ y_0 = \frac{y}{t} \\ z_0 = \frac{z}{t} \\ \frac{x-1}{t} + \frac{z}{t} - 1 = 0 \\ \frac{(x-1)^2}{t^2} - \frac{y}{t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x + z - 1 \\ x^2 - xy - yz - 2x + y + 1 = 0 \end{cases}.$$

(3) i. La matrice rappresentante f rispetto alla base canonica $\mathcal{S} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ si ricava dalla definizione:

$$F_{h|\mathcal{S}} = \left[\ f(\mathbf{e_1})|_{\mathcal{S}} \quad f(\mathbf{e_2})|_{\mathcal{S}} \quad f(\mathbf{e_3})|_{\mathcal{S}}\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 \\ h & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Per calcolare la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto a $\mathcal{B}$ utilizziamo la formula:

$$F_{h|\mathcal{B}} = M_{\mathcal{SB}}\, F_{h|\mathcal{S}}\, M_{\mathcal{BS}}.$$

La matrice del cambio base è

$$M_{\mathcal{BS}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_{\mathcal{SB}}$ si calcola invertendo la matrice precedente utilizzando l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$[M_{\mathcal{BS}}|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I_3|M_{\mathcal{SB}}]\,.$$

Di conseguenza

$$F_{h|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -h & 1 \\ -h & 1 & 0 \\ -3 & -h & 2 \end{bmatrix}.$$

iii. Il vettore $(1\ 2\ 0)$ appartiene all'immagine dell'applicazione se e solo se appartiene allo spazio delle colonne della matrice $F_h|_{\mathcal{S}}$. Quindi riduciamo a scala la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ h & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -h^2 & -h \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & 2-h \end{array}\right].$$

Se $h \neq \pm 1$ la matrice $F_h|_{\mathcal{S}}$ ha rango massimo e quindi la sua immagine è l'intero codominio $\mathbb{R}^3$. Invece, se $h = \pm 1$ il rango di $F_h|_{\mathcal{S}}$ è 2 mentre il rango della matrice orlata è 3, da cui si deduce che il vettore non appartiene all'immagine di f.

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 04 Settembre 2017		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Scelto un sistema di riferimento $\mathcal{B}_O$ dello spazio, consideriamo i seguenti piani dipendenti da $h \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_h : \; x - y + hz = 0, \qquad \beta_h : \; x - hz + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma_h : \; y - z - 2h = 0.$$

   i. Trovare eventuali valori di h per cui i tre piani hanno una retta in comune.

   ii. Trovare glie eventuali valori di h per cui le rette $r_h = \alpha_h \cap \beta_h$ ed $s : \; x - y = y + z - 2 = 0$ sono incidenti ed in tal caso trovare le coordinate del punto di intersezione.

   iii. Trovare gli eventuali valori di h per cui le rette r_h ed s sono parallele oppure sghembe.

2. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i seguenti sottospazi dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + kt = 0\} \qquad \text{e} \qquad V = \mathcal{L}\left((1, 0, 0, -1)\,, (0, 1, 2, 1)\,, (1, 1, 2, 0)\right).$$

   i. Determinare la dimensione ed una base di V.

   ii. Determinare una rappresentazione algebrica di V.

   iii. Trovare gli eventuali valori di k per cui $V \cap U = V$.

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ del piano, consideriamo i punti $F = (1/2, 1/2)$ e $V = (0, 0)$.

   i. Trovare l'asse direttore della parabola $\mathcal{C}$ di fuoco F e vertice V e quindi scrivere un'equazione di $\mathcal{C}$.

   ii. Scrivere un'equazione canonica di $\mathcal{C}$.

   iii. Determinare il cambiamento di coordinate necessario a ridurre in forma canonica $\mathcal{C}$.

Soluzioni

(1) i. Studiamo il sistema lineare associato ai tre piani:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -h & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2h \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -h & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2h \\ 0 & 0 & 2h-1 & 2h+1 \end{array}\right].$$

Abbiamo quindi

$$r([A]) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad h \neq \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{se} \quad h = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r([A|B]) = 3.$$

Di conseguenza non esiste alcun valore di h per cui i tre piani si intersecano lungo una retta.

ii. Studiamo il sistema lineare associato alle due rette:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -h & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & -h & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h-1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & h & 0 \end{array}\right].$$

Segue che

$$r([A]) = 3 \qquad \text{e} \qquad r([A|B]) = \begin{cases} 4 & \text{se} \quad h \neq 0, \\ 3 & \text{se} \quad h = 0. \end{cases}$$

Di conseguenza le rette sono incidenti per $h = 0$, nel qual caso l'unico punto di intersezione ha coordinate $(-1, -1, 3)$.

iii. Dall'analisi precedente segue che le due rette sono sghembe per ogni $h \neq 0$.

(2) i. Riduciamo a scala la matrice associata ai generatori di V :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo $\dim(V) = r(A) = 2$ ed una base di V è $\mathcal{B}_V = \{(1,0,0,-1)(0,1,2,1)\}$.

ii. Un vettore ortogonale a V si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $[A|0_{31}]$. Sfruttando la riduzione a scala del punto precedente, ricaviamo

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \beta \\ y = -2\alpha - \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

e quindi $V^{\perp} = \mathcal{L}((0,-2,1,0),(1,-1,0,1))$. Di conseguenza una rappresentazione algebrica di V è $-2y + z = x - y + t = 0$.

iii. L'intersezione $V \cap U$ è descritta dal sistema lineare

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x - y + kt = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -2y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \\ (k-1)t = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema coincidono con V se e solo se $k = 1$.

(3) i. La retta contenente i punti V ed F è la bisetrice del primo e del terzo quadrante. L'asse direttore r è ortogonale a tale retta, pertanto appartiene al fascio di rette parallele di equazione $x + y = k$. Inoltre, l'asse deve contenere il punto simmetrico di F rispetto a V, ovvero $(-1/2, -1/2)$. Imponendo il passaggio per tale punto, otteniamo

$$-1/2 - 1/2 = -1 = k \qquad \Rightarrow \qquad r:\ x + y = -1.$$

La parabola è il luogo dei punti P tali che

$$d(P, r) = d(P, F) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando, otteniamo

$$\mathcal{C}:\ x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y = 0.$$

ii. Le matrici associate a $\mathcal{C}$ sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza gli invarianti metrici sono $I_1 = 2,\ I_2 = 0$ ed $I_3 = -16$. L'equazione canonica della curva si può ricavare da

$$\lambda_2 \tilde{y}^2 - 2q\tilde{x} = 0 \qquad \text{con} \qquad \lambda_2 = I_1 = 2,\ q = \sqrt{-\frac{I_3}{I_2}} = 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{y}^2 - 2\sqrt{2}\tilde{x} = 0.$$

iii. Nella riduzione in forma canonica di una parabola, in primo luogo bisogna eseguire la traslazione che pone il vertice V come origine del nuovo sistema di riferimento. Poiché nel nostro caso questa proprietà è già vera nel sistema di riferimento iniziale, la traslazione non è necessaria nel nostro caso. Dobbiamo solo eseguire la rotazione degli assi. L'asse $\tilde{x}$ deve contenere il fuoco ed il vertice di $\mathcal{C}$, di conseguenza è la bisetrice del primo e terzo quadrante. L'asse $\tilde{y}$ deve essere perpendicolare all'asse $\tilde{x}$ e contenere V, quindi si tratta della bisetrice del secondo e quarto quadrante. Concludendo, la trasformazione di coordinate è

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$$

Il fattore moltiplicativo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ serve a garantire che il nuovo sistema di riferimento sia ortonormale, mentre i segni sono stati scelti in modo da non alterare l'orientazione.