

Cosa sono i nostri trasmissori?

I nostri trasmissori sono oggetti che stanno tra un trasmittore (TX) e un ricevitore (RX). Attraverso il nostro riceviamo informazione.

I segnali

Per "trasmittore informazione" intendiamo la trasmissione di un segnale. Per segnale intendiamo una grandezza fisica che varia nel tempo. Questa grandezza può essere una tensione, corrente, campo elettrico, campo magnetico. Per ora consideriamo un generico segnale $s(t)$ definito da una funzione matematica.

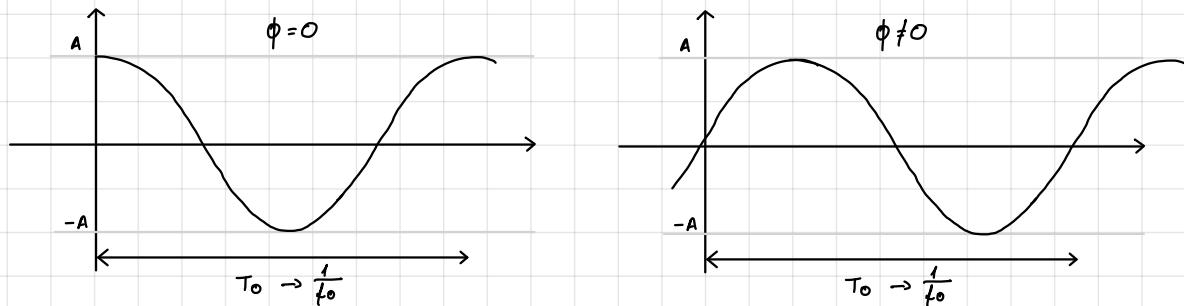
L'informazione trasportata sta proprio nella variazione temporale del segnale. Ad esempio una sinusode non trasporta informazione mentre la variazione di questa sì.

Durante la trasmissione, il segnale viene modificato da vari effetti:

- attenuazione: riduzione dell'intensità
- distorsione: cambiamento di forma del segnale
- rumore: interferenza non deterministica (non affrontato)

La porzione di segnale dedicata a un singolo bit è detta simbolo (o impulso).

Scriviamo il seguente segnale $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \phi)$:



Qui nostro trasmettitore risponde in modo diverso a diverse frequenze di sinusode. Significa che ogni nostro ha un range di frequenze in cui attenuazione/distorsione sono minori. Il comportamento di un nostro dipende moltissimo dalla frequenza del segnale. È quindi importante scegliere la frequenza migliore per ogni nostro.

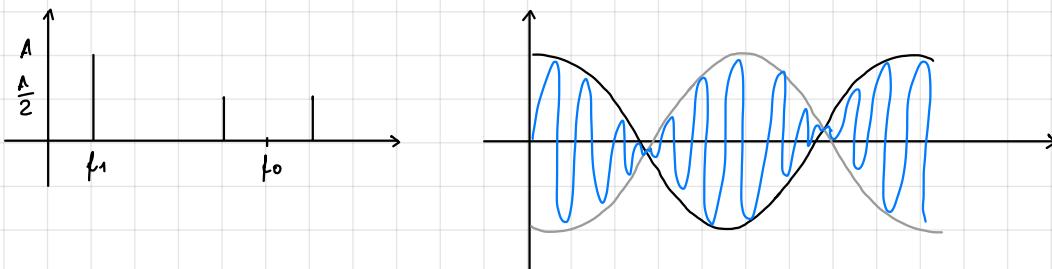
Una fase φ diversa da 0 comporta una traslazione della sinusode. Scrivendo $s(t) = A \cos[2\pi f_0(t - \frac{\phi}{2\pi f_0})]$ notiamo che $\frac{\phi}{2\pi f_0}$ è un tempo. Quel tempo indica il ritardo del segnale.

Frequenza portante

L'operazione di prendere un segnale a frequenza f_1 e portarlo ad una frequenza f_2 è chiamata modulazione.

L'oggetto che compie la modulazione è chiamato modulatoro. L'operazione consiste in:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_1 t) \rightarrow \tilde{s}(t) = s(t) \cos(2\pi f_0) = \frac{A}{2} \cos[2\pi(f_0 - f_1)t] + \frac{A}{2} \cos[2\pi(f_0 + f_1)t]$$



La frequenza f_0 viene detta frequenza portante. La banda, invece, l'intervallo di frequenze occupato.

RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

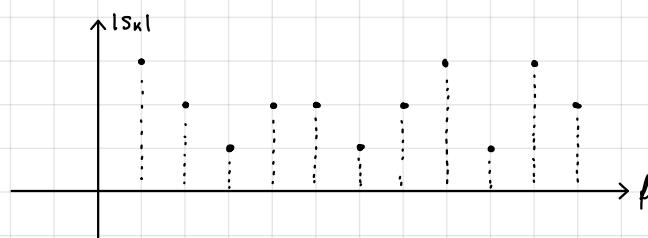
Analisi di Fourier di un segnale periodico

Un segnale periodico può essere sempre espresso come una combinazione lineare di funzioni elementari.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k [\cos(2\pi k f_0 t) + j \sin(2\pi k f_0 t)] \quad \text{con} \quad S_k = |S_k| e^{j\phi_k}$$

Questa è la serie di Fourier. Il numero di elementi non per forza è infinito: per rappresentare sin/cos ci servono solo due termini ($k=1$ e $k=-1$). Frequenze negative è solo un formalismo matematico per garantire una corrispondenza biunivoca tra i due domini. Quando ci riferiamo ai segnali, li descriviamo solo con frequenze positive (nel dominio delle frequenze è più richiesto anche l'asse negativo)

Il grafico sarà una serie di step discreti in quanto K è incrementato discretamente.



Le singole funzioni nella somma prendono il nome di armoniche. L'armonica corrispondente a $K=1$ viene detta armonica fondamentale. Tutto le altre armoniche sono, quindi, multipli dell'armonica fondamentale.

Il modulo di S_k ci dà il peso dell'armonica K . La fase, invece, indica il ritardo dell'armonica rispetto all'armonica base.

Analisi di Fourier di segnali non-periodici

Per un segnale non periodico, si deve passare dal discreto al continuo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad \leftrightarrow \quad S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Il grafico, adesso, sarà una funzione continua. Valgono ancora tutte le considerazioni precedenti: $S(f)$ è una funzione complessa ed avrà modulo e fase. La funzione $S(f)$ è detta trasformata di Fourier.

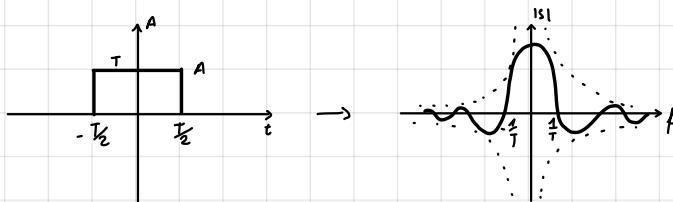


Chiamiamo banda l'insieme di tutte le frequenze usate dal segnale. Poiché il segnale non è periodico, non esiste una armonica fondamentale. La frequenza portante è la frequenza quella intorno al quale si concentra il segnale.

Proprietà della trasformata di Fourier

- Linearità: $s(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow S(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f)$
- Traslazione nel tempo: $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \stackrel{\tau=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\eta) e^{-j2\pi f\eta} d\eta = e^{-j2\pi f t} S(f)$
(cioè significa che $|S(f)| = |s(t)|$, quindi un ritardo non modifica banda/ampiezza; cambia però la fase)

- Trasformazione nelle frequenze: $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = S(f-f_0)$. Questa è chiamata anche proprietà di modulazione. È la generalizzazione della modulazione vista precedentemente. Graficamente, la proprietà descrive una trasformazione nel dominio delle frequenze.
- Prodotto duretta-banda: prendiamo $s(t) = A \text{rect}_T(t)$, allora $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \text{rect}_T(t) e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = \dots = A \frac{e^{j\pi f \frac{T}{2}} - e^{-j\pi f \frac{T}{2}}}{j2\pi f} = A T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ ($\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ è detta seno cardinal).



I MEZZI TRASMISSIVI

I mezzi trasmissivi sono sistemi descritti da funzione matematica ($H(f)$). I sistemi che studieremo noi saranno:

- sistemi lineari: la funzione che descrive il mezzo trasmissivo non dipende dall'intensità del segnale in ingresso
- sistemi tempo invarianti: l'espressione della funzione è costante nel tempo.

I sistemi con queste proprietà sono detti LTI. Per i sistemi LTI, inoltre, vale il principio di sovrapposizione degli effetti (visto in elettrotecnica).

Il principio di sovrapposizione ci permette di dire che possiamo studiare gli effetti del mezzo armonica per armonica e poi ricomporre il segnale tramite combinazione lineare delle armoniche.

Studiamo allora $s_{in}(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. La risposta di uscita sarà: $s_{out} = B \cos(2\pi f_0 t + \phi)$. Si può notare che:

- il sistema non altera la frequenza
- può introdurre amplificazione/attenuazione o mezzo inarpartante. Noi studiamo mezzi passivi, quindi, niente guadagno.
- introdurre ritardo

Poiché la frequenza non varia, possiamo usare i fasori (visti in elettrotecnica): $s = A e^{j\phi} \rightarrow s = B e^{j\phi}$

Risposta in frequenza

Definiamo risposta in frequenza $H(f)$ la funzione complessa che definisce il comportamento del mezzo rispetto alle frequenze che lo attraversano. Per conoscere il segnale in uscita da mezzo basta fare: $S_{out}(f) = S_{in}(f) \cdot H(f)$. Se il mezzo non è un sistema LTI non è possibile definire la risposta.

Studiamo gli effetti di modulo e fase della risposta in frequenza:

- $|H(f)|$ costante: abbiamo modificato tutte le armoniche allo stesso modo.
- $|H(f)|$ non è costante: avremo resistività in frequenza, ovvero alcune armoniche verranno attenuate di più distorcendo il segnale in uscita.
- $\angle H(f)$ è lineare: il mezzo ritarda tutte le armoniche della stessa quantità (introduce un ritardo costante)
- $\angle H(f)$ non è lineare: si ha dispersione cromatica, ovvero le varie armoniche vengono separate (si propagano con velocità diverse) portando ad una distorsione del segnale.

I due fenomeni di distorsione sono indipendenti l'uno dall'altro.

La concatenazione di mezzi diversi non porta difficoltà: $S_{out}(f) = S_{in}(f) \prod_{i=0}^{n-1} H_i(f)$. Ovviamente avremo che:

$$|H_{tot}| = \prod_{i=0}^{n-1} |H_i| \quad \text{e} \quad \Delta H_{tot} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta H_i$$

Affinché la fase sia lineare e non causi dispersione dobbiamo avere che: $\tau = -\frac{\phi_1}{2\pi f} = -\frac{\phi_2}{2\pi f} = \frac{\phi(f)}{2\pi f}$. Quindi abbiamo che $\phi(f) = 2\pi \tau f$.

*Lo ritroviamo
nella trasformata*

Drivando $\phi(f)$ otteniamo che $\frac{d\phi(f)}{df} = -2\pi\tau_g$. Esplicitando $\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df}$ otteniamo il ritardo di gruppo. Il ritardo di gruppo è, quindi, il ritardo subito delle varie componenti. Se come la fase abbiano dello essere lineare, otterremo τ_g costante, provando l'assenza di dispersione nel caso di $\phi(f)$ lineare.

La velocità media con cui si propaga il segnale nel mezzo (velocità di gruppo) è pari a $v_g = \frac{L}{\tau_g}$. Ovviamente, come ci dice Maxwell, la velocità di gruppo deve essere inferiore alla velocità della luce.

Altre al ritardo di fase, esiste anche il ritardo di fase $\tau_f = \frac{\phi(f)}{2\pi f}$. Il ritardo di fase rappresenta il ritardo di una determinata componente. Di solito studiamo il ritardo di fase della portante.

Analogo alla velocità di gruppo, è definita la velocità di fase $v_f = \frac{L}{\tau_f}$. La velocità di fase, poiché non trasmette informazioni, può essere anche maggiori di c.

La velocità/ritardo di gruppo, quindi, è legata all'informazione ("all'inviluppo" della portante) mentre quella di fase è legata solo alla portante. Tra le due non c'è relazione!

Rappresentazione logaritmica

La scala logaritmica più usata è il decibel (dB). Per trasformare una scala lineare in logaritmica usiamo:

$$x_{dB} = 10 \log_{10} x$$

$$\text{Per fare il contrario si fa } x = 10^{\left(\frac{x_{dB}}{10}\right)}$$

Per le proprietà dei logaritmi avremo che:

$$c = A \cdot B \iff C_{dB} = A_{dB} + B_{dB} \quad \text{e} \quad c = \frac{A}{B} \iff C_{dB} = A_{dB} - B_{dB}$$

La scala logaritmica viene tipicamente usata per numeri adimensionali. Un caso in cui si usa la scala logaritmica per esprimere un'unità di misura è la potenza. L'unità usata in questo caso è il dBm:

$$P_{dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{[mW]}}{1[mW]} \right)$$

Attenuazione

Dato un mezzo trasmissivo, esso avrà una costante d'attenuazione α che caratterizza la riduzione di ampiezza subita dal segnale mentre attraversa il mezzo. La costante d'attenuazione è una funzione della frequenza e quindi darà origine a fenomeni di selettività. La costante di attenuazione può anche essere espressa in dB (α_{dB}).

In un caso metalllico si ha $|V_{out}(z)| = |V_{in}| e^{-\alpha z}$. Se come $P \propto V^2$, avremo che $P_{out} = P_{in} e^{-2\alpha z}$ e quindi $\frac{P_{out}}{P_{in}} = e^{-2\alpha z} = 10^{-\frac{\alpha_{dB} z}{10}}$. Svolgendo i calcoli abbiamo che:

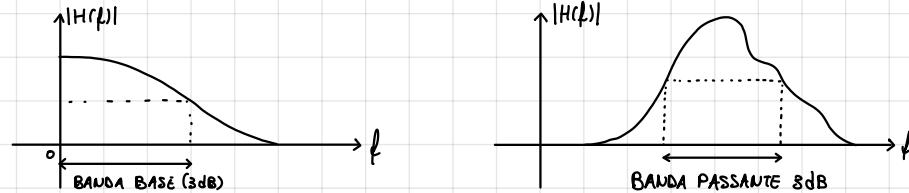
$$\ln(e^{-2\alpha z}) = \ln(10^{-\frac{\alpha_{dB} z}{10}}) \rightarrow -2\alpha z = -\frac{\alpha_{dB} z}{10} \ln 10 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,115 \alpha_{dB} \\ \alpha_{dB} = 8,686 \alpha \end{cases}$$

L'attenuazione si misura $\frac{Np}{m}$, mentre α_{dB} si misura in $\frac{dB}{m}$.

Se: $\alpha > 0$ il mezzo attenua; $\alpha = 0$ è trasparente; $\alpha < 0$ il mezzo introduce guadagno (non visto in questo corso).

Banda del muro di trasmisore

Della curva banda passante, è il range di frequenze dove la $|H(f)|$ introduce minima attenuazione. Di solito viene impostata una soglia che delimita la banda: 3 dB (attenuazione max fino a $\frac{1}{2} H_{\max}$).

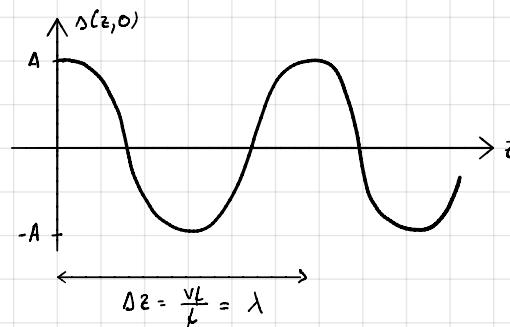


Lunghezza d'onda

Consideriamo un segnale sinusoidale $s(t) = A \cos(2\pi f t)$ e la sua variante ritardata $s(t) = A \cos[2\pi f(t - \frac{\phi}{v_f})]$. Essendo $\frac{\phi}{v_f}$ un ritardo, esso sarà il rapporto tra $\frac{\phi}{v_f}$, dove v_f è la velocità di fase.

Il segnale ritardato, usando il rapporto introdotto, diventa $s(t) = A \cos[2\pi f(t - \frac{\phi}{v_f})]$. La funzione così scritta viene chiamata onda.

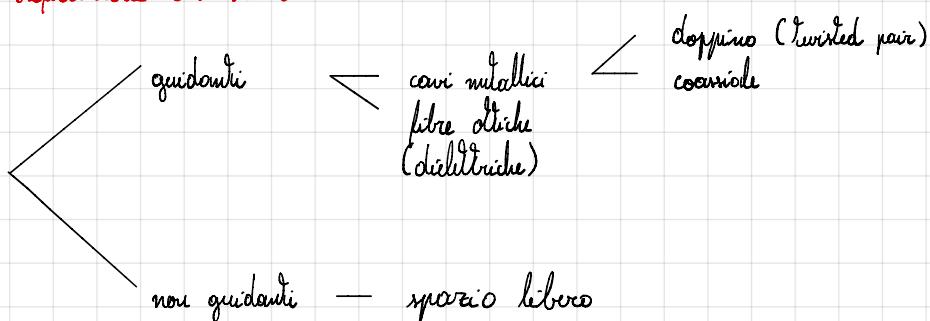
Se prendiamo un generico $z = \bar{z}$, otteniamo $A \cos(2\pi f t - \phi)$ con ϕ costante. In $\phi = 0$ ritroviamo il segnale non ritardato. Poniamo adesso $t=0$, ottenendo $A \cos(-2\pi f \frac{\phi}{v_f}) = A \cos(2\pi f \frac{\phi}{v_f})$. Rappresentiamo la sinusode ottenuta:



Da Δz osserverà sarà la lunghezza d'onda (λ , in [m]). Nota bene la presenza della velocità di fase che dipende dal muro. La lunghezza d'onda dipenderà, quindi, dal nostro muro! La frequenza, invece, è una caratteristica del segnale e non cambia al variazione del muro.

Se la lunghezza fisica del muro è molto minore di λ , si lavora con l'ipotesi dei parametri concentrati (vedi ultrale). Se l'ipotesi precedente non vale siamo in un sistema a parametri distribuiti (modello che tiene conto della dimensione fisica degli oggetti).

Classificazione dei muri



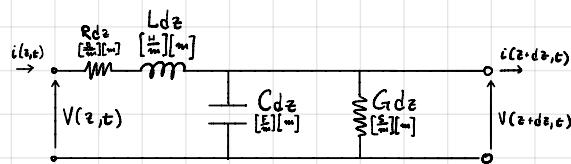
Altre alterazioni

Oltre a quelle già viste, abbiamo:

- diafonia (crosstalk): tipico della linea bifilare, quando due linee vicine fanno interferenza fra di loro
- retro riflessioni: ritorno di potenza verso il trasmettitore

Circuito equivalente a parametri concentrati

Consideriamo la linea uniforme lungo z e di lunghezza infinita ($l \gg \lambda$). Prendiamo un segmento $dz \ll \lambda$ piccolo e poniamo, all'interno di esso possiamo usare il modello a parametri concentrati e costruire il circuito equivalente a parametri concentrati:



C capacità per unità di lunghezza

L induttanza ' ' ' '

G conduttorità ' ' ' '

R resistenza ' ' ' '

Usando le leggi dell'elettromagnetismo possiamo trovare le nostre variabili:

$$\begin{cases} V(z,t) = v(z+dz,t) + i(z,t)Rdz + Ldz \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \\ i(z,t) = i(z+dz,t) + v(z+dz,t)Gdz + Cdz \frac{\partial}{\partial t} v(z+dz,t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V(z,t) - v(z+dz,t) = i(z,t)Rdz + Ldz \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \\ i(z,t) - i(z+dz,t) = v(z+dz,t)Gdz + Cdz \frac{\partial}{\partial t} v(z+dz,t) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{V(z,t) - v(z+dz,t)}{dz} = i(z,t)R + L \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \\ \frac{i(z,t) - i(z+dz,t)}{dz} = v(z+dz,t)G + C \frac{\partial}{\partial t} v(z+dz,t) \end{cases} \xrightarrow{d \rightarrow 0} \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} V(z,t) = R i(z,t) + L \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \\ -\frac{\partial}{\partial z} i(z,t) = G v(z,t) + C \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegraphisti}$$

Considerando l'ipotesi di sistema LTI, poniamo al dominio delle frequenze per risolvere le eq. differenziali trovate:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \bar{V}(z) e^{jwz} = R \bar{I}(z) e^{jwz} + jwL \bar{I}(z) e^{jwz} = (R + jwL) \bar{I}(z) e^{jwz} \\ -\frac{d}{dz} \bar{I}(z) e^{jwz} = G \bar{V}(z) e^{jwz} + jwC \bar{V}(z) e^{jwz} = (G + jwC) \bar{V}(z) e^{jwz} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dz} \bar{V}(z) = (R + jwL) \bar{I}(z) \\ -\frac{d}{dz} \bar{I}(z) = (G + jwC) \bar{V}(z) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegraphisti}$$

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dz^2} \bar{V}(z) = (R + jwL) \frac{d}{dz} \bar{I}(z) = -(R + jwL)(G + jwC) \bar{V}(z) \\ \text{Gli stessi passaggi della prima} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} \bar{V}(z) - \bar{V}(z) \delta^2 = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \bar{I}(z) - \bar{I}(z) \delta^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Equazione delle onde di tensione} \\ \text{Equazione delle onde di corrente} \end{cases}$$

↳ anche se delle equazioni non sembra, \bar{I} e \bar{V} sono legate
l'operazione di derivata che abbiamo fatto ce lo ricorda

Studiamo γ :

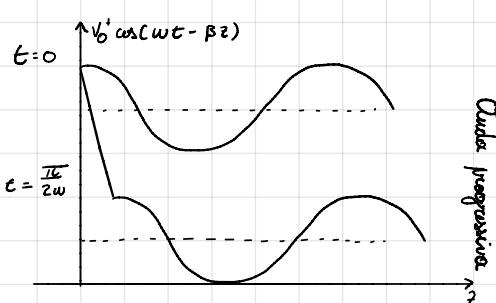
$$\gamma = \sqrt{(R + jwL)(G + jwC)} = \operatorname{Re}\{\gamma\} + j\operatorname{Im}\{\gamma\} = \alpha + j\beta \rightarrow \begin{cases} \text{costante di fase [rad/m]} \\ \text{costante d'attenuazione [Np/m]} \end{cases}$$

Nel caso ideale ($R=0, G=0$) γ diventa:

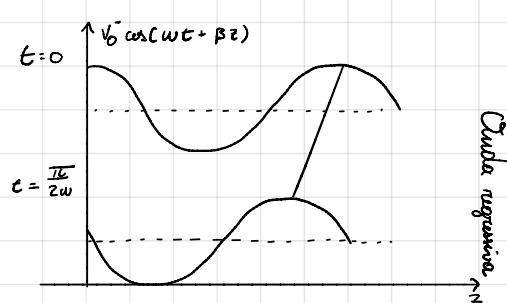
$$\gamma = \sqrt{-jwL \cdot jwC} = \sqrt{-w^2 LC} = \pm jw\sqrt{LC} \Rightarrow \gamma = jB = \pm jw\sqrt{LC}$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà (consideriamo l'idealità della linea):

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z} \\ \bar{I}(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+j\beta z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V(z,t) = \operatorname{Re}\{\bar{V}(z)e^{jwz}\} = V_0^+ \cos(wt - \beta z) + V_0^- \cos(wt + \beta z) \\ i(z,t) = \operatorname{Re}\{\bar{I}(z)e^{jwz}\} = I_0^+ \cos(wt - \beta z) + I_0^- \cos(wt + \beta z) \end{cases}$$



Curva progressiva



Curva regressiva

Se entrambe le sinusoidi coesistono sulla stessa linea, avremo che:

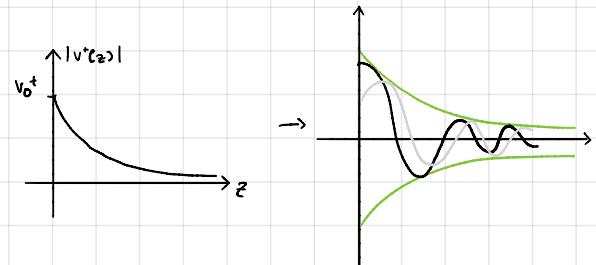
$$|\bar{V}(z)| = |V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}| \rightarrow \text{non costante} \Rightarrow \text{La forma di } |\bar{V}(z)| \text{ fa da inviluppo a } v(z,t)$$

\hookrightarrow se $|V_0^+| = |V_0^-| \Rightarrow$ avremo annullamento periodico del segnale

Istudiemo ora il caso in cui $R=0, G \neq 0$:

$$\frac{d^2\bar{V}(z)}{dz^2} - \alpha z = 0 \rightarrow \bar{V}(z) = \underbrace{V_0^+ e^{-\alpha z}}_{\text{onda progr.}} + \underbrace{V_0^- e^{\alpha z}}_{\text{onda regr.}}$$

Considerando solo onda progressiva: $|\bar{V}^+(z)| = |V_0^+| e^{-\alpha z}$
(Contrario per l'onda regressiva)



Velocità di fase

Abbiamo detto che $v(z,t) = A \cos(\omega t + \beta z)$. La fase sarà: $\phi = \omega t + \beta z$. Dato $\phi_0 = \omega t_0 + \beta z_0$, a quale dz mi dovrà spostare affinché $\phi = \phi_0$?

$$\phi_0 = \omega(t_0 + dt) + \beta(z_0 + dz) \rightarrow \dots \rightarrow \omega dt - \beta dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow v_g = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

\downarrow NO PERDITE

$$v_g = \frac{\beta}{\beta LC} = \frac{1}{LC}$$

Calcolando il ritardo di gruppo ottieniamo:

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{df} = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\beta z)}{df} = \frac{z}{2\pi} \frac{d(\beta)}{df} = \frac{z}{2\pi} \frac{d(2\pi f/Lc)}{df} = z\sqrt{Lc} \Rightarrow v_g = \frac{z}{\tau_g} = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$$

Nelle linee di trasmissione, quindi, la velocità di gruppo e quella di fase coincidono. Se L, C sono costanti non avremo dispersione cronistica. Le stesse leggi continuano a valere anche in presenza di perdite ($\alpha \neq 0$).

Impedenza caratteristica

Le espressioni delle onde di tensione possono essere legate. Consideriamo il caso senza perdite

$$\begin{aligned} I(z) &= -\frac{1}{j\omega L} \frac{dV(z)}{dz} = -\frac{1}{j\omega L} (-j\beta V_0^+ e^{-j\beta z} + j\beta V_0^- e^{+j\beta z}) = \frac{\beta}{\omega L} (V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{+j\beta z}) = \frac{j\omega \sqrt{Lc}}{\omega L} (V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{+j\beta z}) = \\ &= \sqrt{\frac{c}{L}} (V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{+j\beta z}) = \underbrace{\frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z}}_{I_L^+} - \underbrace{\frac{V_0^-}{Z_0} e^{+j\beta z}}_{I_L^-} \end{aligned}$$

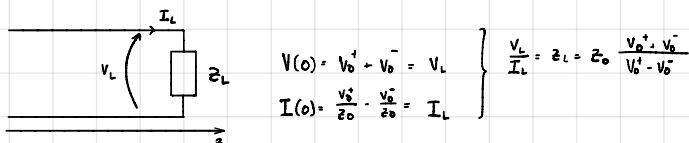
Definiamo allora $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ impedenza caratteristica della linea. Essa dipende solo dalle caratteristiche del cavo e non dalla lunghezza, dalle terminazioni o dalla frequenza.

Possiamo dire che Z_0 sia l'impedenza vista dall'onda progressiva in assenza dell'onda regressiva.

Nel caso in cui ci sono perdite si ha $Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$. Se le perdite sono piccole, però, si può approssimare a $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Coefficiente di riflessione

Consideriamo il circuito ($\alpha=0$):



Definisco il coefficiente di riflessione come: $\Gamma_L = \frac{V_L}{V_0}$. Usando l'impedenza di carico otteniamo la formula alternativa: $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$. Nota bene: se $Z_L = Z_0$, non avremo riflessione! Possiamo dire che otteniamo riflessione quando otteniamo una variazione dell'impedenza caratteristica vista dall'onda.

Il coefficiente di riflessione è un numero complesso, quindi avremo un modulo e una fase. La fase indica un ritardo della riflessione rispetto al segnale in ingresso. Positi lavoriamo con circuiti e nuovi passi, il modulo di Γ_L dovrà essere per forza minore o uguale a 1.

Onde stazionarie

Consideriamo il circuito di prima. Avremo che $V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z})$. facendo $|V(z)|$ otteniamo $|V(z)| = |V_0| \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 + 2|\Gamma_L| \cos(2\beta z + \theta_L)}$. Possiamo fare lo stesso per la corrente ottenendo $|I(z)| = \frac{|V_0|}{Z_0} \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 - 2|\Gamma_L| \cos(2\beta z + \theta_L)}$. Queste due espressioni descrivono l'andamento del grafico del modulo. Avremo, quindi, che se $|\Gamma_L| < 1$, il modulo della tensione oscillatoria per i due componenti.

Studiamo i massimi:

$$\begin{aligned} |V(z)|_{\max} \text{ se } \cos(2\beta z + \theta_L) = 1 &\Rightarrow 2\beta z + \theta_L = 2K\pi \\ \Leftrightarrow 2\beta z + \theta_L = 2K\pi &\rightarrow \frac{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}{\lambda} z + \theta_L = 2K\pi \rightarrow \frac{2}{\lambda} z + \frac{\theta_L}{2\pi} = K \rightarrow z = K \frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_L}{\pi} \lambda \rightarrow \text{oscillazione di } \frac{\lambda}{2} \\ \Leftrightarrow |V_{\max}| = |V_0^+| - |V_0^-| \end{aligned}$$

E i minimi:

$$\begin{aligned} 2\beta z + \theta_L = (2K+1)\pi &\Rightarrow z = K \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\theta_L}{4\pi} \lambda \rightarrow \text{oscillazione di } \frac{\lambda}{2} \\ \Leftrightarrow |V_{\min}| = |V_0^+| - |V_0^-| \end{aligned}$$

Chiamiamo onda stazionaria il risultato della somma tra onda progressiva e regressiva quando le due onde interferiscono completamente ($|V(z)| = 0$ per alcuni z). Le onde stazionarie non trasportano potenza.

Per quantificare quanto un'onda sia stazionaria introduciamo il rapporto d'onda stazionaria $S = RDS = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{|V_0^+| + |V_0^-|}{|V_0^+| - |V_0^-|} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$.

Alcuni casi particolari:

- $Z_L = Z_0$: $\Gamma_L = 0$; $|V_0^-| = 0 \Rightarrow S = 1$
 - $Z_L = \infty$: $\Gamma_L = 1$; $V_0^+ = V_0^- \Rightarrow S = \infty$
 - $Z_L = 0$: $\Gamma_L = 1$; $V_0^+ = V_0^- \Rightarrow S = \infty$
- $S = \infty$ per tutti i casi in cui $\Gamma_L = 1$ (CA, CC, carico capacitivo/induttivo).

Impedenza d'onda

Consideriamo il nostro solito circuito di linea e carico. Il rapporto $\frac{V(z)}{I(z)}$ sarà l'impedenza d'onda $Z(z)$. Dalle espressioni per calcolare $Z(z)$ sono:

$$Z(z) = \begin{cases} Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{j2\beta z}}{1 - \Gamma_L e^{j2\beta z}} \\ Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + j Z_L \tan(\beta z)} \end{cases} \rightarrow \text{QUELLA CHE USEREMO DI PIÙ}$$

L'impedenza caratteristica e quella d'onda sono diverse:

Z_0	$Z(z)$
Costante lungo tutta la linea nel caso reale perdite dipende solo dai parametri della linea	Varia lungo la linea Dipende da: 1) da Z_0 2) dal carico 3) dalla costante di fase 4) da z
È il rapporto tensione-corrente quando la linea è infinita / termina su un carico adattato.	Se il carico non è adattato ad una certa distanza risulta l'impedenza d'onda

L'impedenza d'onda a una distanza l dal carico viene anche chiamata impedenza d'ingresso. Usando la seconda formula di $Z(z)$ possiamo vedere, infatti, che sostituendo $l=0$ otteniamo $Z(0)=Z_L$ coincidendo con la nomenclatura di impedenza d'ingresso.

Casi particolari

$$- Z_L = Z_0: \quad Z(z) = \frac{Z_0 + Z_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + Z_0 \tan(\beta z)} = Z_0 \quad \forall l, f$$

$$- Z_L \neq Z_0: \quad l = \frac{\lambda}{4} \quad Z(z) = \dots = Z_L$$

$l = \frac{\lambda}{4} + K \frac{\lambda}{2}: \quad Z(z) = \dots = \frac{Z_0^2}{Z_L}$; un tratto di linea di $l = \frac{\lambda}{4} + K \frac{\lambda}{2}$ e con opportuna $Z_0 = \sqrt{Z_L Z_0}$ viene chiamato trasformatore $\frac{\lambda}{4}$. Il trasformatore in frequenza introduce una selettività in frequenza. Più aumenta la lunghezza del trasformatore più aumenta la selettività.

Trasferimento di potenza

Definiamo potenza istantanea di un'onda di tensione il prodotto $P_{int}(z,t) = v(z,t) i(z,t)$.

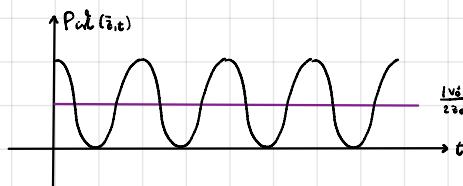
Studiamo la potenza trasportata dall'onda progressiva:

$$v^+(z,t) = |V_0^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \rightarrow P_{int}(z,t) = \frac{|V_0|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z) = \frac{|V_0|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} + \frac{|V_0|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} \cos(2\omega t - 2\beta z)$$

$$i^+(z,t) = \frac{|I_0|}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

La potenza istantanea è formata da due contributi:

- un termine costante nel tempo t , se $\alpha=0$, costante. Questo sarà la potenza media.
- un termine dipendente da spazio tempo in modo doppio

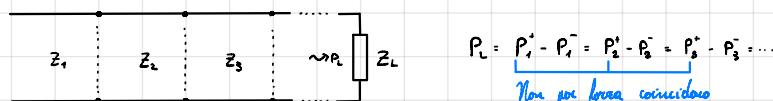


Il dato di interesse per noi sarà la potenza media $P_{media} = \frac{|V_0|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z}$. Questa cosa vale per l'onda regressiva: $P_{media} = \frac{|V_0|^2}{2Z_0} e^{2\alpha z}$.

La potenza che raggiungerà il carico sarà:

$$P_L = P^+ - P^- = \frac{|V_0|^2}{2Z_0} - \frac{|V_0|^2}{2Z_0} = \frac{|V_0|^2}{2Z_0} (e^{-2\alpha z} - |r|^2 e^{2\alpha z})$$

Per maximizzare il trasferimento sul carico si dovrà ridurre $|r|$ a 0 (caso di adattamento). Se $|r|=1$ abbiamo che tutta la potenza verrà riflessa. La potenza totale si deve conservare, quindi:



La formula della potenza media può anche essere calcolata sul dominio dei fasori:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V(z) I^*(z) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}) \left(\frac{V_0^+}{Z_0} e^{j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{-j\beta z} \right) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|V_0|^2}{Z_0} - \frac{|V_0|^2}{Z_0} e^{-2j\beta z} + \frac{V_0^+ V_0^-}{Z_0} e^{2j\beta z} \right\} =$$

condizioniamo il caso senza perdite per semplificare i calcoli

$$= \frac{|V_0|^2}{2Z_0} + \frac{|V_0|^2}{2Z_0}$$

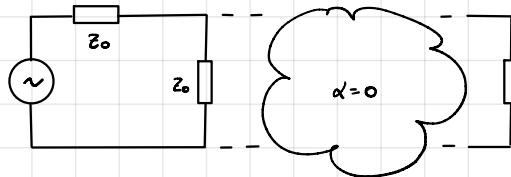
Consideriamo $|r|=1$, allora $P=0$. Nella formula sopra abbiamo visto che oltre alla parte reale i^+ c'è anche una parte immaginaria: quella è la potenza reattiva della linea. Infatti l'impedenza d'onda sarà anch'essa puramente immaginaria con fase $\angle Z(z) = \frac{\pi}{2}$

Consideriamo il circuito generale



$Z_g \rightarrow$ impedenza interna del generatore

Z_g non per forza è pari a z_0 della linea. Bisognerà anche qui adattare l'impedenza. Ma in questa condizione di adattamento, qual è la massima potenza che può raggiungere il cavo?



$$|V_L| = \frac{|V_g|}{2} \quad \rightarrow \quad P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V_L I_L^* \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V_L \left(\frac{|V_g|}{2} \right)^* \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|V_L|^2}{Z_0} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{4 Z_0} = \frac{|V_g|^2}{8 Z_0} \Rightarrow \text{potenza disponibile.}$$

ONDE ELETROMAGNETICHE

Fino ad ora abbiamo parlato di linee TEM. La peculiarità di queste linee è che le loro caratteristiche fisiche del materiale che le compongono: $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$; $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$; $\lambda = \frac{c}{v_p}$. A causa dell'effetto pelle, in questi cavi si ha che $R \propto \sqrt{f}$ e $\alpha \propto \sqrt{f}$. L'effetto pelle è tipico di tutte le linee basate su fili metallici.

Ni cavi studiati fino ad ora circolavano onde elettromagnetiche. Consideriamo un varco non vincolato; come si propagano campo elettrico e magnetico? Immaginiamo il nostro varco

- avrà $E = E_0 E_\alpha$, $\nu = \nu_0 \nu_\alpha$ e σ (condutibilità elettrica)
- sarà lineare, tempo invariante
- sarà isotropo: E , ν e σ sono costanti con l'orientazione dei campi, ossia non varia con la polarizzazione
- sarà omogeneo: E , ν e σ costanti con la posizione
- non avrà sorgenti

Legame tra onde di tensione e onde elettromagnetiche

Per le onde di tensione sulle linee di trasmissione abbiamo scritto che $\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0$ con soluzione $V(z) = V_0 e^{-\gamma z} + V_0 e^{\gamma z}$ [$\gamma = \alpha + j\beta$].

Quando la tensione varierà, anche il campo elettrico subirà una variazione: se $V_0 e^{-\gamma z}$ dura, allora anche $E \propto e^{-\gamma z}$. Questa cosa vale anche per la fase: la velocità di fase e la costante di fase sono parametri anche del campo elettrico. Ciò accadeva perché la nostra linea è uniforme e, quindi, voltaggio e campo elettrico sono collegati tra di loro. Dura fare grandi operazioni, ormai affermiamo che:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0^+(x, y) e^{-\gamma z} + \vec{E}_0^-(x, y) e^{\gamma z}$$

↳ in un cavo coaxiale, $E \propto \frac{1}{z}$ a partire dal centro.

Per il campo magnetico avremo la stessa cosa: $\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0^+(x, y) e^{-\gamma z} + \vec{H}_0^-(x, y) e^{\gamma z}$. Nota bene: queste due espressioni non ci dicono nulla sulla direzione di questi campi.

Definiamo onda piana un'onda dove la fase ($-\beta z$) non dipende da (x, y) . Ciò significa che tutti i punti di $z = z$ hanno la stessa fase. Definiamo onda uniforme un'onda la cui ampiezza non dipende da (x, y) . Considerando le precedenti definizioni, l'espressione dei campi diventa

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0^+ e^{-\gamma z} + \vec{E}_0^- e^{\gamma z}; \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0^+ e^{-\gamma z} + \vec{H}_0^- e^{\gamma z}$$

L'onda che si propaga in un cavo coaxiale è piana ma non uniforme ($E_0 \neq H_0$). Le onde piane e uniformi, a rigor di logica, non esiste in quanto manca di una sorgente infinitamente grande o lontana. A una grande distanza tra trasmittitore un'onda è assimilabile come uniforme (si pensi alla relazione tra la luce del sole e noi). Noi studieremo onde piane e uniformi.

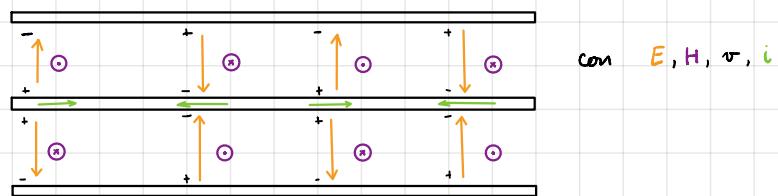
Poiché la soluzione delle equazioni dei campi è pari a quella delle onde di tensione, anche le equazioni differenziali che le governano saranno equivalenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}(x, y, z) - \delta^2 \vec{E}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{H}(x, y, z) - \delta^2 \vec{H}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni prendono il nome di equazioni di Helmholtz.

Orientamento di campo elettrico e magnetico

Nel caso coaxiale si dimostra che il campo elettrico è radiale con espressione $\vec{E}(r) = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{e}_r$. Il campo magnetico, invece, avrà espressione: $\vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \hat{e}_\theta$ con direzioni tangenziali e verso calcolabili con la regola della mano destra. I due campi sono, quindi, perpendicolari tra loro e alla direzione di propagazione. Studiamo nel dettaglio la situazione



La relazione che lega le direzioni sarà: $\frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|} \times \frac{\vec{H}}{\|\vec{H}\|} = \hat{e}_z$