

Formulario di probabilità e statistica per 099319–PSI AA 2020/21, Docenti Bassetti, Epifani, Ladelli

Notazioni

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{se } k \in \{0, \dots, n\}$$
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \forall \alpha > 0$$

Regole di conteggio. Cardinalità di

disposizioni senza ripetizione di n oggetti di ordine k , cioè stringhe di k oggetti ordinati e distinti estratti da un insieme di n : $n(n-1) \cdots (n-k+1)$;

permutazioni di n oggetti: $n! = n(n-1) \times 2 \times 1$;

disposizioni con ripetizione di n oggetti di ordine k , cioè stringhe di k elementi ordinati e ripetibili estratti da un insieme di n : n^k ;

combinazioni (senza ripetizione), cioè sottoinsiemi di k elementi estratti da un insieme di n : $\binom{n}{k}$

Densità discrete univariate

$X \sim \mathbf{Be}(p)$: **Benoulliana di parametro $p \in (0, 1)$**

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \mathbf{1}_{\{0,1\}}(x), \quad \mathbb{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1-p), \quad m_X(t) = (1-p + pe^t)$$

$X \sim \mathbf{Bi}(n, p)$: **Binomiale di parametri $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$**

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \mathbf{1}_{\{0,1,\dots,n\}}(x), \quad \mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p), \quad m_X(t) = (1-p + pe^t)^n$$

$X \sim \mathbf{Iperg}(b+r, r, n)$: **Ipergeometrica di parametri $b+r, r, n \in \mathbb{N}$**

$$f_X(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{r+b}{n}} \mathbf{1}_{\{\max(0, n-b), \max(0, n-b)+1, \dots, \min(n, r)\}}(x),$$
$$\mathbb{E}(X) = \frac{nr}{b+r}, \quad \text{Var}(X) = \frac{nbr}{(b+r)^2} \left(1 - \frac{n-1}{b+r-1}\right)$$

$X \sim \mathbf{Geom}(p)$: **Geometrica di parametro $p \in (0, 1)$**

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1} \mathbf{1}_{\{1,2,\dots\}}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$
$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \quad \text{per } t < -\log(1-p)$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: **Poisson di parametro** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \mathbf{1}_{\{0,1,\dots\}}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda, \quad m_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

Densità assolutamente continue univariate

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: **Normale di parametri** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad m_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$X \sim \text{Lognorm}(\mu, \sigma)$: **Lognormale di parametri** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad \text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$: **Uniforme in** $[a, b]$, $a < b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$: **Gamma di parametri** $\alpha > 0, \lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \quad \text{per } t < \lambda$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: **Esponenziale di parametro** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) \quad \text{per } t < \lambda$$

$X \sim \chi^2(m)$: **Chi quadrato con** $m = 1, 2, \dots$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{m/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = m, \quad \text{Var}(X) = 2m, \quad m_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^{m/2}} \quad \text{per } t < \frac{1}{2}$$

$X \sim \text{Weib}(\alpha, \lambda)$: **Weibull di parametri** $\alpha > 0, \lambda > 0$

$$f_X(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}{\lambda^{1/\alpha}}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2}{\lambda^{2/\alpha}}$$

$X \sim t(m)$: **t di student con** $m \in \mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}, \quad \mathbb{E}(X) = 0 \text{ per } m > 1, \quad \text{Var}(X) = \frac{m}{m-2} \text{ per } m > 2$$

$X \sim F(m, n)$: **F di Fisher con** $m, n \in \mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{(m+n)/2}} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \text{ per } n > 2,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ per } n > 4$$

Densità assolutamente continue bivariate

$(X, Y)^T \sim \mathcal{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$: densità gaussiana bivariata

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}, \quad \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$(X, Y) \sim \mathcal{U}(R)$: densità congiunta uniforme su $R \subset \mathbb{R}^2$ limitato

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(R)} & (x, y) \in R \\ 0 & (x, y) \notin R \end{cases}$$

Test statistici di significatività α

Media

Con varianza nota σ_0^2 , campione casuale normale o numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ a favore di $H_1: \mu \neq \mu_0$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu < \mu_0$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu > \mu_0$ se $z_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$

Con varianza incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ a favore di $H_1: \mu \neq \mu_0$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2, n-1}$; $p\text{-value} = 2P(T_{n-1} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu < \mu_0$ se $t_0 \leq -t_{\alpha, n-1} = t_{1-\alpha, n-1}$; $p\text{-value} = P(T_{n-1} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu > \mu_0$ se $t_0 \geq t_{\alpha, n-1}$; $p\text{-value} = P(T_{n-1} \geq t_0)$

Con varianza incognita, campione casuale non normale numeroso

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ a favore di $H_1: \mu \neq \mu_0$ se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu < \mu_0$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu = \mu_0$ o $H_0: \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1: \mu > \mu_0$ se $t_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(t_0)$

Proporzione con campione casuale di Bernoulli numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0: p = p_0$ a favore di $H_1: p \neq p_0$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0: p = p_0$ o $H_0: p \geq p_0$ a favore di $H_1: p < p_0$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0: p = p_0$ o $H_0: p \leq p_0$ a favore di $H_1: p > p_0$ se $z_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$

Differenza tra medie $\mu_X - \mu_Y$

Con varianze note σ_X^2, σ_Y^2 , campioni casuali indipendenti normali o numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$

Con varianze incognite ma uguali, campioni casuali indipendenti normali

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2, m+n-2}$; $p\text{-value} = 2P(T_{m+n-2} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha, m+n-2} = t_{1-\alpha, m+n-2}$; $p\text{-value} = P(T_{m+n-2} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha, m+n-2}$; $p\text{-value} = P(T_{m+n-2} \geq t_0)$

Con varianze incognite, campioni casuali indipendenti numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$

Campioni casuali bivariati normali, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\bar{D}_n}{\sqrt{S_D^2}} \sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1: \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2, n-1}$; $p\text{-value} = 2P(T_{n-1} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha, n-1} = t_{1-\alpha, n-1}$; $p\text{-value} = P(T_{n-1} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha, n-1}$; $p\text{-value} = P(T_{n-1} \geq t_0)$

Campioni casuali bivariati non normali numerosi, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\bar{D}_n}{\sqrt{S_D^2}} \sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1: \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0: \mu_X = \mu_Y$ o $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1: \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(t_0)$

Differenza tra proporzioni $p_X - p_Y$ con campioni casuali di Bernoulli numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \quad \text{con } \hat{P} := \frac{m\bar{X}_m + n\bar{Y}_n}{m + n}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0: p_X = p_Y$ a favore di $H_1: p_X \neq p_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; $p\text{-value} = 2(1 - \Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0: p_X = p_Y$ o $H_0: p_X \geq p_Y$ a favore di $H_1: p_X < p_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; $p\text{-value} = \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0: p_X = p_Y$ o $H_0: p_X \leq p_Y$ a favore di $H_1: p_X > p_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; $p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$

Varianza

Con media nota, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{nS_{0n}^2}{\sigma_0^2}, \quad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha/2, n}^2$ o $x_0^2 \leq \chi_{1-\alpha/2, n}^2$; $p\text{-value} = 2 \min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi_{1-\alpha, n}^2$; $p\text{-value} = P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha, n}^2$; $p\text{-value} = P(\chi_n^2 \geq x_0^2)$

Con media incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}, \quad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha/2, n-1}^2$ o $x_0^2 \leq \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$; $p\text{-value} = 2 \min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2)$ e $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi_{1-\alpha, n-1}^2$; $p\text{-value} = P(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha, n-1}^2$; $p\text{-value} = P(\chi_{n-1}^2 \geq x_0^2)$

Rapporto tra varianze σ_X^2/σ_Y^2

Con medie note, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n , rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}, \quad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2, m, n}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2, m, n}$; $p\text{-value} = 2 \min\{p_1, p_2\}$, con $p_1 = P(F_{m, n} \leq f_0)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0: \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha, m, n}$; $p\text{-value} = P(F_{m, n} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha, m, n}$; $p\text{-value} = P(F_{m, n} \geq f_0)$

Con medie incognite, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n , rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \quad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2, m-1, n-1}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2, m-1, n-1}$; $p\text{-value} = 2 \min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(F_{m-1, n-1} \leq f_0)$ e $p_2 = 1 - p_1$

- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0: \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha, m-1, n-1}$;
p-value = $P(F_{m-1, n-1} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha, m-1, n-1}$;
p-value = $P(F_{m-1, n-1} \geq f_0)$

Test di buon adattamento del chi quadrato

X_1, \dots, X_n campione casuale numeroso da una f.d.r. F , raggruppato in classi

Ipotesi: $H_0: F = F_0$ contro $H_1: "H_0 \text{ è falsa}"$

k = "numero di classi in cui sono raggruppati i dati"

$p_i^0 := P_{H_0}("X_1 \text{ cade nella classe } i")$

N_i = "numero di X_1, \dots, X_n che cadono nella classe i "

Adattamento a distribuzione completamente specificata

Ogni p_i^0 è completamente specificato (cioè ogni p_i^0 è un numero)

Statistica test: $X_0^2 := \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{np_i^0} \right) - n$, x_0^2 = valore assunto da X_0^2

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha, k-1}^2$; p-value $\simeq P(\chi_{k-1}^2 \geq x_0^2)$

Adattamento a distribuzione con parametri incogniti

h = "numero di parametri incogniti presenti nella distribuzione ipotizzata sotto H_0 e stimati con i dati"

\hat{p}_i^0 = stimatore di p_i^0 , $i = 1, \dots, k$

Statistica test: $X_0^2 := \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0} = \sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{n\hat{p}_i^0} - n$, x_0^2 = valore assunto da X_0^2

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi_{\alpha, k-1-h}^2$; p-value $\simeq P(\chi_{k-1-h}^2 \geq x_0^2)$

Test di indipendenza del chi quadrato

Campione casuale bivariato $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ da una di densità incognita $p_{ij} := P(X = i, Y = j)$,

$i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$

N_{ij} := "numero di coppie $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ che assumono valore (i, j) "

$N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^s N_{ij}$ = "numero di X_1, \dots, X_n che assumono valore i "

$N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r N_{ij}$ = "numero di Y_1, \dots, Y_n che assumono valore j "

$\hat{p}_i := N_{i\cdot}/n$

$\hat{q}_j := N_{\cdot j}/n$

Statistica test: $X_*^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j} = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{N_{ij}^2}{N_{i\cdot}N_{\cdot j}} - n$, x_*^2 = valore assunto da X_*^2

- Si rifiuta $H_0: "X, Y \text{ sono indipendenti}"$ a favore di $H_1: "X, Y \text{ non sono indipendenti}"$ se $x_*^2 \geq \chi_{\alpha, (r-1) \times (s-1)}^2$; p-value $\simeq P(\chi_{(r-1) \times (s-1)}^2 \geq x_*^2)$