LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 18 OTTOBRE

Lezione

Limite di successioni notevoli

SI DA' PER SOTTINTESO $n \to +\infty$

Sia ε_n una successione infinitesima, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \sin(\varepsilon_n) = 0$ 3) $\lim \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ 5) $\lim \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{\log_a(1+\varepsilon)}{\varepsilon_n} = \log_a e$ 7) $\lim \frac{(1-\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} = \alpha$

2) $\lim \cos(\varepsilon_n) = 1$ 4) $\lim \frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$ 6) $\lim \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{a^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = \ln a$

} il 5, 6, 7 vengono derivati dalla 1 riportata nella proprietà seguente.

Sia a_n una successione infinita, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ 2) $\lim \frac{\ln(1+\frac{1}{a_n})}{1/a_n} = 1$

Successioni asintotiche

Date a_n e b_n, esse si dicono asintotiche se $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Si nota che se $a_n \sim b_n$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$

Serie a termini positivi

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $a_n \sim b_n$, allora le due serie avranno lo stesso carattere.

DIM.: Per Hp $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + 1 \Rightarrow b_n(1-\varepsilon) < a_n < b_n(\varepsilon + 1)$. Considerando $b_n(1-\varepsilon) < a_n$ per il criterio del rapporto, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge. La $(1-\varepsilon)$ non influisce.

Idem per l'altra parte: se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Non è necessario dimostrare l'altro verso perché le serie positive o convergono o diverga

Esercitazione

$$\lim \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n = \lim \left(\frac{n-1-3}{n-1}\right)^n = \lim \left(\frac{n-1}{n-1} - \frac{3}{n-1}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{3}{n-1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{-3}\right)}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{1-n}{+3}}\right)^{\frac{n\left(1-\frac{n}{3}\right)}{1-\frac{n}{3}}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1-n}{3}}\right)^{\frac{1-n}{3}}\right]^{\frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\lim \frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\frac{3}{-1}} = e^{-3}$$

$$\lim n^2 \ln(1-2^{-n}) = \lim n^2 \cdot \frac{\ln(1-2^{-n})}{-2^{-n}} \cdot -2^{-n} = \lim n^2 \cdot (-2^{-n}) = \lim \frac{-n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2} = \lim \frac{\sin(n) \cdot \sqrt{n^4+n^3}+n^2}{\cancel{n^4}+n^3-\cancel{n^4}} = \lim \frac{\sin n \cdot \cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n^{\cancel{3}}} = \lim \frac{\sin n}{n} \cdot \left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}+1\right) = \lim \frac{2\sin n}{n}$$

$-1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow -2 \leq \sin n \leq 2 \rightarrow \frac{-2}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sin n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

$$\lim \frac{\log(n^2+n) - \log(n^2)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim \ln\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) \Big/ \sin\left(\tfrac{2}{n}\right) = \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \cdot \frac{1/n}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)/2/n} \cdot \frac{n}{2} = \lim \log e \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{2} = \log e$$

$$\lim \frac{\log\left[3^n + \cos(3^n)\right]}{n} = \lim \frac{\log\left[3^n\right]}{n} = \lim \log\left[3^n\right]^{1/n} = \log 3$$

$\hookrightarrow 3^n + \cos 3^n \sim 3^n \Rightarrow \lim \frac{3^n + \cos 3^n}{3^n} = \lim 1 + \frac{\cos 3^n}{3^n} = 1$ perché $-1 \leq \cos 3^n \leq 1 \rightarrow \frac{-1}{3^n} \leq \frac{\cos 3^n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow \lim \frac{\cos 3^n}{3^n} = \lim \frac{1}{3^n} = 0$

$$\lim \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log\left[e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log e^n + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log e^n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\cancel{n} \log e}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \log e$$

$$\lim \frac{n - \ln(n+e^n)}{n - \ln(2n+e^n)} = \lim \frac{n - \ln\left(e^n\left(1+\frac{n}{e^n}\right)\right)}{n - \ln\left(e^n\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)\right)} = \lim \frac{\cancel{n - \ln(e^n)} + \ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\cancel{n - \ln(e^n)} + \ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{n/e^n} \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{e^n}} \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} \cdot \frac{1}{1/\frac{2n}{e^n}} \cdot \frac{\cancel{e^n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim \frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+1/n}-2} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+1/4n}-2} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{2\frac{(1+1/4n)^{1/2}-1}{1/4n} - \frac{1}{1/4n}} \cdot \frac{1}{4n} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{1/4n}} \cdot \frac{1}{1/4n} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{1-1}\right) \qquad (8)$$

$$\lim \frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4(n^n) - 3(n!)} = \lim \frac{\cancel{n^n}\left(\frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)}{\cancel{n^n}\left(4 - \frac{3(n!)}{n^n}\right)} = \lim \frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{-2/n}\right)^{\frac{n}{-2}\cdot(-2)} = \frac{1}{4}e^{-2} = 1/4e^2$$

Va studiato a parte: $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow \lim \frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2}$ // rule of thumb: studia sempre quando nel raccoglimento non c'è la forma $\left(K - \frac{3}{n^2} + \ldots\right)$

$$\lim \frac{\log((n+5)!) - \log(n!+5)}{\log\left[2n^6 + \cos(n\pi)\right]}$$

$$\lim \frac{n! + (2n)!}{n^n}$$

$$\lim \frac{n^n + 2^n}{2^{(n^2)}}$$

$$\lim \sqrt[3]{n^9 - 2n^6} - \sqrt[5]{n^{15} - 3n^{12}}$$

$\rightarrow$ Homework