16/03

Cosa sono i mezzi trasmissivi?

I mezzi trasmissivi sono oggetti che stanno tra un trasmettitore (TX) ad un ricevitore (RX). Attraverso il mezzo scorre informazione

I segnali

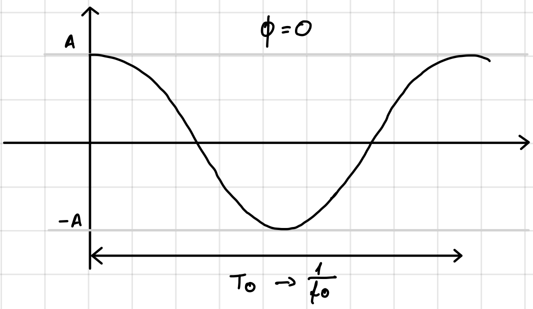
Per "trasmettere informazione" intendiamo la trasmissione di un segnale. Per segnale intendiamo una generica grandezza fisica che varia nel tempo. Questa grandezza può essere una tensione, corrente, campo elettrico, campo magnetico.
Per ora consideremo un generico segnale $s(t)$ definito da una funzione matematica.

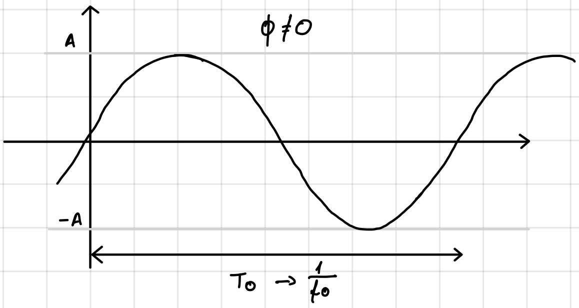
L'informazione trasportata sta proprio nella variazione temporale del segnale. Ad esempio una sinusoide non trasporta informazione mentre la variazione di questa sì.

Durante la trasmissione, il segnale viene modificato da vari effetti
- attenuazione: riduzione dell'intensità
- distorsione: cambiamento di forma del segnale
- rumore: interferenza non deterministica (non affrontato)

La porzione di segnale dedicata a ciascun bit è detta simbolo (o impulso).

Scriviamo il seguente segnale $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \phi)$:





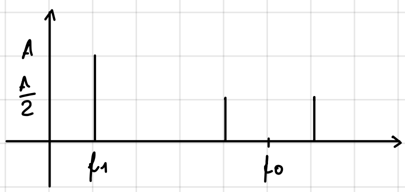
Ogni mezzo trasmissivo risponde in modo diverso a diverse frequenze di sinusoide. Significa che ogni mezzo ha un range di frequenze in cui attenuazione/distorsione sono minori. Il comportamento di un mezzo dipende moltissimo dalla frequenza del segnale. È quindi importante scegliere la frequenza migliore per ogni mezzo.

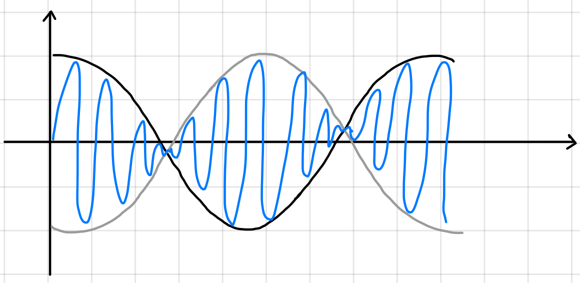
Una fase ϕ diversa da 0 comporta una traslazione della sinusoide. Scrivendo $s(t) = A\cos\left[2\pi f_0\left(t - \frac{\phi}{2\pi f_0}\right)\right]$ notiamo che $\frac{\phi}{2\pi f_0}$ è un tempo. Quel termine indica il ritardo del segnale.

Frequenza portante

L'operazione di prendere un segnale a frequenza f_1 e portarlo ad una frequenza f_2 è chiamata modulazione.
L'oggetto che compie la modulazione è chiamato modulatore. L'operazione consiste in:

$$s(t) = A\cos(2\pi f_1 t) \rightarrow \tilde{s}(t) = s(t)\cos(2\pi f_0) = \frac{A}{2}\cos[2\pi(f_0 - f_1)t] + \frac{A}{2}\cos[2\pi(f_0 + f_1)t]$$





La frequenza f_0 viene detta frequenza portante. La banda, invece, l'intervallo di frequenze occupato.

RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

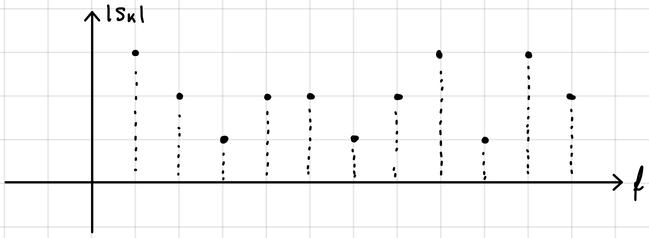
Analisi di Fourier di un segnale periodico

Un segnale periodico può essere sempre espresso come una combinazione lineare di funzioni elementari.

$$s(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} S_K e^{j2\pi KFt} = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} S_K \left[\cos(2\pi KFt) + j\sin(2\pi KFt)\right] \qquad \text{con} \quad S_K = |S_K| e^{j\phi_{S_K}}$$

Questa è la serie di Fourier. Il numero di elementi non per forza è infinito: per rappresentare sin/cos ci servono solo due termini ($K=1$ e $K=-1$). Frequenze negative è solo un formalismo matematico per garantire una corrispondenza biunivoca tra i due domini. Quando ci riferiremo ai segnali, li descriveremo solo con frequenze positive (nel dominio delle frequenze è però richiesto anche l'asse negativo)

Il grafico sarà una serie di step discreti in quanto K è incrementato discretamente.



Le singole funzioni nella sinusoide prendono il nome di armoniche. L'armonica corrispondente a $K=1$ viene detta armonica fondamentale. Tutte le altre armoniche sono, quindi, multipli dell'armonica fondamentale.

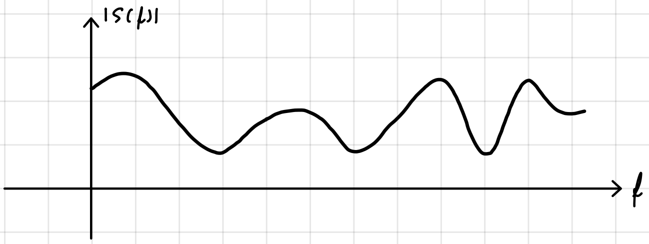
Il modulo di S_K ci da il peso dell'armonica K. La fase, invece, indica il ritardo dell'armonica rispetto all'armonica base.

Analisi di Fourier di segnali non-periodici

Per un segnale non periodico, si deve passare dal discreto al continuo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad \longleftrightarrow \quad S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Il grafico, adesso, sarà una funzione continua. Valgono ancora tutte le considerazioni precedenti: $S(f)$ è una funzione complessa ed avrà modulo e fase. La funzione $S(f)$ è detta Trasformata di Fourier.



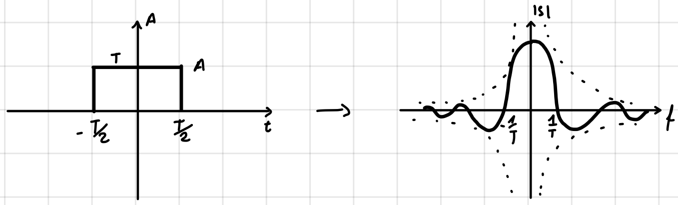
Chiamiamo banda l'insieme di tutte le frequenze usate dal segnale. Poiché il segnale non è periodico, non esiste una armonica fondamentale. La frequenza portante è la frequenza quella intorno al quale si concentra il segnale.

Proprietà delle Trasformate di Fourier

- Linearità: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t)$
- Traslazione nel tempo: $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \overset{\eta = t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\eta) e^{-j2\pi f\eta} e^{-j2\pi f\tau} d\eta = e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\eta) e^{-j2\pi f\eta} d\eta = e^{-j2\pi f\tau} \cdot S(f)$

  Ciò significa che $|Z(f)| = |S(f)|$, quindi un ritardo non modifica banda/ampiezza; cambia però la fase

- Traslazione nelle frequenze: $Z(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{j2\pi f_0 t}\cdot e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt = S(f-f_0)$. Questa è chiamata anche proprietà di modulazione. È la generalizzazione della modulazione vista precedentemente. Graficamente, la proprietà descrive una traslazione nel dominio delle frequenze.
- Prodotto durata-banda: prendiamo $s(t)=A\,rect_T(t)$, allora $S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} A\,rect_T\,e^{-j2\pi f t}dt = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}dt = \dots = A\frac{e^{j2\pi f \frac{T}{2}}-e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}}{j2\pi f} =$ $= AT\frac{\sin(\pi f t)}{\pi f t}$ ($\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ è detta seno cardinale). Approssimiamo la banda del segnale a $B\sim\frac{2}{T}$. Si può notare, quindi, che $B\cdot T=$ cost.



I MEZZI TRASMISSIVI

I mezzi trasmissivi sono sistemi descritti da funzione matematica ($H(f)$). I sistemi che studieremo noi saranno:
- Sistemi lineari: la funzione che descrive il mezzo trasmissivo non dipende dall'intensità del segnale in ingresso
- Sistemi tempo invarianti: l'espressione della funzione è costante nel tempo.

I sistemi con queste proprietà sono detti LTI. Per i sistemi LTI, inoltre, vale il principio di sovrapposizione degli effetti (visto in elettrotecnica).

Il principio di sovrapposizione ci permette di dire che possiamo studiare gli effetti del mezzo armonica per armonica e poi ricomporre il segnale tramite combinazioni lineari delle armoniche.

Studiamo allora $s_{in}(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$. La sinusoide di uscita sarà: $s_{out}=B\cos(2\pi f_0 t+\phi)$. Si può notare che:
- il sistema non altera la frequenza
- può introdurre amplificazioni/attenuazioni o essere trasparente. Noi studiamo mezzi passivi, quindi, niente guadagno.
- introdurre ritardo

Poiché la frequenza non varia, possiamo usare i fasori (visti in elettrotecnica): $s=Ae^{j\phi}\rightarrow s=Be^{j\phi}$

Risposta in frequenza

Definiamo risposta in frequenza $H(f)$ la funzione complessa che definisce il comportamento del mezzo rispetto alle frequenze che lo attraversano. Per conoscere il segnale in uscita da mezzo basta fare: $S_{OUT}(f)=S_{in}(f)\cdot H(f)$. Se il mezzo non è un sistema LTI non è possibile definire la risposta.

Studiamo gli effetti di modulo e fase della risposta in frequenza:
- $|H(f)|$ costante: abbiamo modificato tutte le armoniche allo stesso modo.
- $|H(f)|$ non è costante: avremo selettività in frequenza, ossia alcune armoniche verranno attenuate di più distorcendo il segnale in uscita.
- $\angle H(f)$ è lineare: il mezzo ritarda tutte le armoniche della stessa quantità (introduce un ritardo costante)
- $\angle H(f)$ non è lineare: si ha dispersione cromatica, ossia le varie armoniche vengono separate (si propagano con velocità diverse) portando ad una distorsione del segnale.

I due fenomeni di distorsione sono indipendenti l'uno dall'altro.

La concatenazione di mezzi diversi non porta difficoltà: $S_{OUT}(f)=S_{in}(f)\prod_{i=0}^{n}H_i(f)$. Ovviamente avremo che: $|H_{TOT}|=\prod_{i=0}^{n}|H_i|$ e $\angle H_{TOT}=\sum_{i=0}^{n}\angle H_i$.

Affinché la fase sia lineare e non causi dispersione dobbiamo avere che: $\tau=-\frac{\phi_1}{2\pi f}=-\frac{\phi_2}{2\pi f}=\frac{\phi(f)}{2\pi f}$. Quindi abbiamo che $\phi(f)=2\pi\tau f$.

Lo ritroviamo nella trasformata

Derivando $\phi(f)$ otteniamo che $\frac{d\phi(f)}{df} = -2\pi\tau_g$. Esplicitando $\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(f)}{df}$ otteniamo il ritardo di gruppo. Il ritardo di gruppo è, quindi, il ritardo subito dalle varie armoniche. Siccome la fase abbiamo detto essere lineare, otterremo τ_g costante, provando l'assenza di dispersione nel caso di $\phi(f)$ lineare.

La velocità media con cui si propaga il segnale nel mezzo (velocità di gruppo) è pari a $v_g = \frac{L}{\tau_g}$. Ovviamente, come ci dice Maxwell, la velocità di gruppo deve essere inferiore alla velocità della luce.

Oltre al ritardo di fase, esiste anche il ritardo di fase $\tau_f = \frac{\phi(f)}{2\pi f}$. Il ritardo di fase rappresenta il ritardo di una determinata armonica. Di solito studiamo il ritardo di fase della portante.

Analogamente alla velocità di gruppo, è definita la velocità di fase $v_f = \frac{L}{\tau_f}$. La velocità di fase, poiché non trasmette informazione, può essere anche maggiore di c.

La velocità/ritardo di gruppo, quindi, è legata all'informazione ("all'inviluppo" della portante) mentre quella di fase è legata solo alla portante. Tra le due non c'è relazione!

Rappresentazione logaritmica

La scala logaritmica più usata è il decibel (dB). Per trasformare una scala lineare in logaritmica usiamo:

$$x_{dB} = 10 \log_{10} x$$

Per fare il contrario si fa $x = 10^{\left(\frac{x_{dB}}{10}\right)}$

Per le proprietà dei logaritmi avremo che:

$$C = A \cdot B \iff C_{dB} = A_{dB} + B_{dB} \qquad e \qquad C = \frac{A}{B} \iff C_{dB} = A_{dB} - B_{dB}$$

La scala logaritmica viene tipicamente usata per numeri adimensionali. Un caso in cui si usa la scala logaritmica per esprimere un'unità di misura è la potenza. L'unità usata in questo caso è il dBm:

$$P_{dBm} = 10 \log_{10}\left(\frac{P[mW]}{1[mW]}\right)$$

Attenuazione

Dato un mezzo trasmissivo, esso avrà una costante d'attenuazione α che caratterizza la riduzione di ampiezza subita dal segnale mentre attraversa il mezzo. La costante d'attenuazione è una funzione della frequenza e quindi darà origine a fenomeni di selettività. La costante di attenuazione può anche essere espressa in dB (α_{dB}).

In un cavo metallico si ha $|V_{OUT}(z)| = |V_{in}| e^{-\alpha z}$. Siccome $P \propto V^2$, avremo che $P_{OUT} = P_{IN} e^{-2\alpha z}$ e quindi $\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = e^{-2\alpha z} = 10^{-\frac{\alpha_{dB} z}{10}}$. Svolgendo i calcoli abbiamo che:

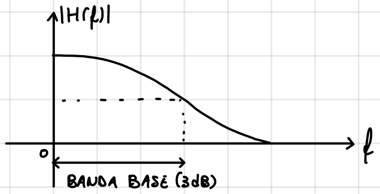
$$\ln(e^{-2\alpha z}) = \ln(10^{-\frac{\alpha_{dB} z}{10}}) \rightarrow +2\alpha \cancel{z} = +\frac{\alpha_{dB}\cancel{z}}{10}\ln 10 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,115\,\alpha_{dB} \\ \alpha_{dB} = 8,686\,\alpha \end{cases}$$

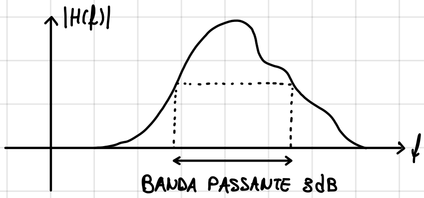
L'attenuazione si misura $\frac{Np}{m}$, mentre α_{dB} si misura in $\frac{dB}{m}$.

Se: $\alpha > 0$ il mezzo attenua; $\alpha = 0$ è trasparente; $\alpha < 0$ il mezzo introduce guadagno (non visti in questo corso).

Banda del mezzo di trasmissione

Detta anche banda (base) passante, è il range di frequenze dove la $H(f)$ introduce meno attenuazione. Di solito viene imposta una soglia che delimita la banda: 3 dB (attenuazione max fino $\frac{1}{2} H_{max}$).



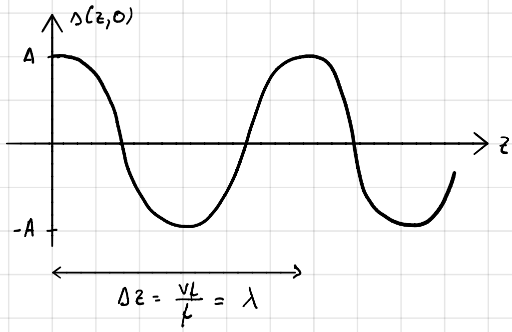


Lunghezza d'onda

Consideriamo un segnale sinusoidale $s(t) = A\cos(2\pi f t)$ e la sua variante ritardata $s(t) = A\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{\phi}{2\pi f}\right)\right]$. Essendo $\frac{\phi}{2\pi f}$ un ritardo, esso sarà il rapporto tra $\frac{z}{v_f}$, dove v_f è la velocità di fase.

Il segnale ritardato, usando il rapporto introdotto, diventa $s(t) = A\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{z}{v_f}\right)\right]$. La funzione così scritta viene chiamata onda.

Se prendiamo un generico $z = \bar{z}$, otteniamo $A\cos(2\pi f t - \Phi)$ con Φ costante. In $z = 0$ ritroviamo il segnale non ritardato. Poniamo adesso $t = 0$, ottenendo $A\cos\left(-2\pi f \frac{z}{v_f}\right) = A\cos\left(2\pi f \frac{z}{v_f}\right)$. Rappresentiamo la sinusoide ottenuta:



La Δz osservata sarà la lunghezza d'onda (λ, in [m]). Nota bene la presenza della velocità di fase che dipende dal mezzo. La lunghezza d'onda dipenderà, quindi, dal nostro mezzo! La frequenza, invece, è una caratteristica del segnale e non cambia al variare del mezzo.

Se la lunghezza fisica del mezzo è molto minore di λ, si lavora con l'ipotesi dei parametri concentrati (vedi elettrotec.). Se l'ipotesi precedente non vale siamo in un sistema a parametri distribuiti (modello che tiene conto della dimensione fisica degli oggetti).

Classificazione dei mezzi

- guidanti
  - cavi metallici
    - doppino (twisted pair)
    - coassiale
  - fibre ottiche (dielettriche)
- non guidanti — spazio libero

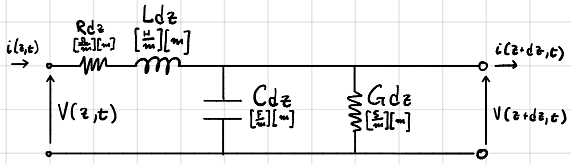
Altre alterazioni

Oltre a quelle già viste, abbiamo:
- diafonia (crosstalk): tipico della linea bifilare, quando due linee vicine fanno interferenza tra di loro
- retro riflessioni: ritorno di potenza verso il trasmettitore

TEORIA DELLE LINEE DI TRASMISSIONE

Circuito equivalente a parametri concentrati

Consideriamo la linea uniforme lungo z e di lunghezza infinita ($l \gg \lambda$). Prendiamo un segmento $dz \ll \lambda$ piccolo a piacere, all'interno di esso possiamo usare il modello a parametri concentrati e costruire il circuito equivalente a parametri concentrati:



C capacità per unità di lunghezza
L induttanza " " " "
G conduttanza " " " "
R resistenza " " " "

Usando le leggi dell'elettrotecnica possiamo trovare le nostre variabili:

$$\begin{cases} v(z,t) = v(z+dz,t) + i(z,t)Rdz + Ldz\frac{\partial}{\partial t}i(z,t) \\ i(z,t) = i(z+dz,t) + v(z+dz,t)Gdz + Cdz\frac{\partial}{\partial t}v(z+dz,t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v(z,t) - v(z+dz,t) = i(z,t)Rdz + Ldz\frac{\partial}{\partial t}i(z,t) \\ i(z,t) - i(z+dz,t) = v(z+dz,t)Gdz + Cdz\frac{\partial}{\partial t}v(z+dz,t) \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{v(z,t) - v(z+dz,t)}{dz} = i(z,t)R + L\frac{\partial}{\partial t}i(z,t) \\ \frac{i(z,t) - i(z+dz,t)}{dz} = v(z+dz,t)G + C\frac{\partial}{\partial t}v(z+dz,t) \end{cases} \xrightarrow{\lim_{dz\to 0}} \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z}v(z,t) = Ri(z,t) + L\frac{\partial}{\partial t}i(z,t) \\ -\frac{\partial}{\partial z}i(z,t) = Gv(z,t) + C\frac{\partial}{\partial t}v(z,t) \end{cases}$$ Equazioni dei telegrafisti

Considerando l'ipotesi di sistema LTI, passiamo al dominio delle frequenze per risolvere le eq. differenziali trovate:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z}\bar{V}(z)\cancel{e^{j\omega t}} = R\bar{I}(z)e^{j\omega t} + j\omega L\bar{I}(z)e^{j\omega t} = (R+j\omega L)\bar{I}(z)\cancel{e^{j\omega t}} \\ -\frac{\partial}{\partial z}\bar{I}(z)\cancel{e^{j\omega t}} = G\bar{V}(z)e^{j\omega t} + j\omega C\bar{V}(z)e^{j\omega t} = (G+j\omega C)\bar{V}(z)\cancel{e^{j\omega t}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dz}\bar{V}(z) = (R+j\omega L)\bar{I}(z) \\ -\frac{d}{dz}\bar{I}(z) = (G+j\omega C)\bar{V}(z) \end{cases}$$ Equazioni dei telegrafisti

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dz^2}\bar{V}(z) = (R+j\omega L)\frac{d}{dz}\bar{I}(z) = \underbrace{-(R+j\omega L)(G+j\omega C)}_{\gamma^2 \to \text{costante di propagazione}}\bar{V}(z) \\ \text{Gli stessi passaggi della prima} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dz^2}\bar{V}(z) - \bar{V}(z)\gamma^2 = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2}\bar{I}(z) - \bar{I}(z)\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

→ Equazione delle onde di tensione
→ " " " " corrente

↳ anche se dalle equazioni non sembra, $\bar{I}$ e $\bar{V}$ sono legate
l'operazione di derivata che abbiamo fatto ce lo nasconde

Studiamo γ:

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \Re\{\gamma\} + j\,\Im\{\gamma\} = \alpha + j\beta$$

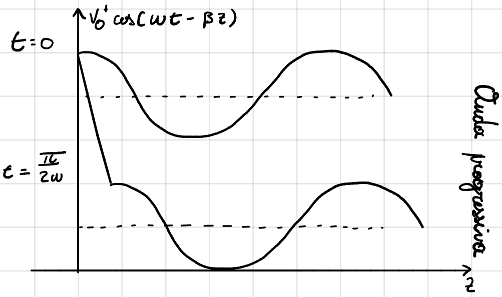
β → costante di fase [rad/m]
α → costante d'attenuazione [Np/m]

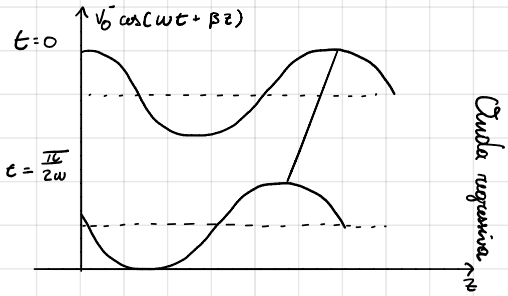
Nel caso ideale ($R=0$, $G=0$) γ diventa:

$$\gamma = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} = \sqrt{-\omega^2 LC} = \pm j\omega\sqrt{LC} \implies \gamma = j\beta = \pm j\omega\sqrt{LC}$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà (consideriamo l'idealità della linea):

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z} \\ \bar{I}(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+j\beta z} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v(z,t) = \Re\{\bar{V}(z)e^{j\omega t}\} = V_0^+\cos(\omega t - \beta z) + V_0^-\cos(\omega t + \beta z) \\ i(z,t) = \Re\{\bar{I}(z)e^{j\omega t}\} = I_0^+\cos(\omega t - \beta z) + I_0^-\cos(\omega t + \beta z) \end{cases}$$





Se entrambe le sinusoidi coesistono nella stessa linea, avremo che:

$|\bar{V}(z)| = |V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}|$ → non costante ⇒ La forma di $|\bar{V}(z)|$ fa da inviluppo a $v(z,t)$

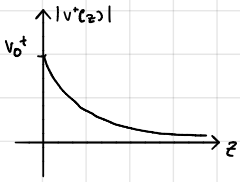
↳ se $|V_0^+| = |V_0^-|$ ⇒ avremo annullamento periodico del segnale

Studiamo ora il caso in cui $R \neq 0$, $G \neq 0$:

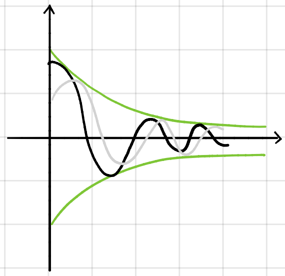
$$\frac{d^2 \bar{V}(z)}{dz^2} - \gamma z = 0 \longrightarrow \bar{V}(z) = \underbrace{V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}_{\text{onda progr.}} + \underbrace{V_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}}_{\text{onda regr.}}$$

Considerando solo onda progressiva: $|\bar{V}^+(z)| = |V_0^+| e^{-\alpha z}$

(Contrario per l'onda regressiva)



→



Velocità di fase

Abbiamo detto che $v(z,t) = A\cos(\omega t + \beta z)$. La fase sarà: $\phi = \omega t + \beta z$. Dato $\phi_0 = \omega t_0 + \beta z_0$, a quale dz mi devo spostare affinché $\phi = \phi_0$?

$$\phi_0 = \omega(t_0 + dt) + \beta(z_0 + dz) \rightarrow \dots \rightarrow \omega dt - \beta dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

NO PERDITE

$$\hookrightarrow = \frac{\beta}{\beta\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Calcolandoci il ritardo di gruppo otteniamo:

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{df} = \frac{1}{2\pi}\frac{d(\beta z)}{df} = \frac{z}{2\pi}\frac{d(\beta)}{df} = \frac{z}{2\pi}\frac{d(2\pi f\sqrt{LC})}{df} = z\sqrt{LC} \Rightarrow V_g = \frac{z}{\tau_g} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Nelle linee di trasmissione, quindi, la velocità di gruppo e quella di fase coincidono. Se L e C sono costanti non avremo dispersione cromatica. Le stesse leggi continuano a valere anche in presenza di perdite ($\alpha \neq 0$).