## Integrali immediati

Derivano dall'applicazione delle regole di derivazione al contrario:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \left[\int e^x dx = e^x + c\right] \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad !! \ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

## Integrale per parti

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

DIM: $H(x)$ primitiva di $f(x) g'(x)$ su $I \Rightarrow H'(x) = f(x) g'(x)$. Consideriamo $f(x) g(x) - H(x)$ derivabile. Derivando:

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x) - H(x)) = f'(x) g(x) + \cancel{f(x) g'(x)} - \cancel{f(x) g'(x)} \Rightarrow f(x) g(x) - H(x)$ è primitiva di $f'(x) g(x) \Rightarrow \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$

ESEMPIO: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = e^x \quad g = e^x$

$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx = x \ln x - x + c$

$f(x) = \ln(x) \quad f' = \frac{1}{x}$

D: $(0, +\infty)$ $\quad g'(x) = 1 \quad g = x$

## Integrazione per sostituzione

$(f(\varphi(t)): J \to I \to \mathbb{R})$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua su $I$, $\varphi: J \to I$ derivabile in $J$ tale che $\varphi(t) = x \in I$. Allora:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x = \varphi(t)}$$

DIM: Sia $F(x)$ la primitiva di $f$. $F(\varphi(t))$ è derivabile (composizione di funzioni derivabile) $\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) =$
$= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ è primitiva di $f(\varphi(t)) \varphi'(t) \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x = \varphi(t)}$

ES.: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int U \, dU = \frac{1}{2} U^2 + c = \frac{1}{2} [\ln(x)]^2 + c$

$U = \ln x \quad dU = \frac{1}{x} dx$

$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{\varphi'(t)}{1 + [\varphi(t)]^2} dt = \int \frac{1}{1+x} dx \Big|_{x = \varphi(t)} = \arctan(\varphi(t))$

## Integrazione di funzioni razionali

Per funzione razionale si intende $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, $N(x), D(x) \in \mathbb{R}_d[x]$

1) $\deg(N(x)) \geq \deg(D(x)) \qquad N(x) = D(x) Q(x) + R(x) \Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow \int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$

2) $\deg(N(x)) < \deg(D(x))$

2a) $\deg(D(x)) = 1 \Rightarrow \deg(N(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{K}{\alpha x + \beta} \Rightarrow \int \frac{K}{\alpha x + \beta} dx = \frac{K}{\alpha} \ln(\alpha x + \beta) + c$

2b) $\deg(D(x)) = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & D(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \\ \Delta = 0 & D(x) = a(x - x_1)^2 \\ \Delta < 0 & D(x) = 1 + [c(x)]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{K}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right] dx = \ln|x-x_1| + \ln|x-x_2| + c \\ \int \frac{K}{a(x-x_1)^2} dx = \frac{K}{a} \frac{1}{x-x_1} + c \\ \int \frac{K}{1+[c(x)]^2} dx = K \arctan(c(x)) + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right] dx \\ \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2} dx = \int \left[\frac{\alpha \cancel{(x-x_1)}}{a(x-x_1)^{\cancel{2}}} + \frac{\alpha x_1 + \beta}{a(x-x_1)^2}\right] dx \\ \int \frac{\alpha x + \beta}{1 + [c(x)]^2} dx = \int \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{K}{1+[c(x)]^2} dx = \ln|b x| + K \arctan(c(x)) + c \end{cases}$$