Prof. E. Maluta

Analisi Matematica 2

Appunti su:

Sistemi differenziali lineari -

Premessa: per i risultati generali sui sistemi di equazioni differenziali del I ordine e per esempi, si vedano le pagg. 435 - 438 del testo: Bramanti, Pagani, Salsa: Analisi Matematica 2 -

Oss.: lo studente è tenuto a conoscere nel dettaglio il caso dei sistemi bidimensionali - In questi appunti i risultati vengono però enunciati nel caso generale n-dimensionale tutte le volte in cui la formulazione dei due casi, 2-dimensionale o n-dimensionale, è sostanzialmente uguale -

Alcuni esempi e dimostrazioni sono formulati solo nel caso 2-dimensionale, ma l'estensione al caso n-dimensionale dovrebbe essere evidente -

SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI

Def. Chiamiamo sistema differenziale lineare (o equazione differenziale vettoriale lineare) del I ordine un'equazione della forma

$$\underline{y}' = A(t)\,\underline{y} + \underline{b}(t)$$

dove $A(t) = [a_{ij}(t)]$ $i,j = 1,..n$ è una matrice $n \times n$ (detta matrice dei coefficienti) e $\underline{b}(t)$ è un vettore colonna n dimensionale $\begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_n(t) \end{bmatrix}$ (detto termine noto), con $a_{ij} : I \to R$ e $b_i : I \to R$ (I intervallo, $I \subseteq R$)

Una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ sarà detta soluzione del sistema su I se $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ e

$$\underline{\varphi}'(t) = A(t)\,\underline{\varphi}(t) + \underline{b}(t) \qquad \forall t \in I.$$

Il sistema viene detto omogeneo se $\underline{b}(t) \equiv \underline{0}$, non omogeneo o completo se $\underline{b}(t) \not\equiv \underline{0}$ -

— —

Nel caso $n = 2$ il sistema differenziale lineare può venire scritto come

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)\,y_1 + a_{12}(t)\,y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)\,y_1 + a_{22}(t)\,y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

— — —

Es. Moto di una particella di massa m e carica e in un campo elettromagnetico dato da $\underline{E}$ (campo elettrico) ed $\underline{M}$ (campo magnetico), $\underline{E}, \underline{M} : I \to \mathbb{R}^3$

Dette rispettivamente $\underline{a}$ e $\underline{v}$ accelerazione e velocità della particella, e c la velocità della luce, si ha

$$m\underline{a} = e\underline{E} + \frac{e}{c}\underline{v} \wedge \underline{H} \; -$$

ponendo $\underline{y} = \underline{v}$ e quindi $\underline{y}' = \underline{a}$ otteniamo

$$\underline{y}' = \frac{e}{m}\underline{E} + \frac{e}{mc}\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}\underline{y}$$, sistema differenziale

lineare del I ordine di dimensione 3, non omogeneo.

La linearità del sistema garantisce la validità del <u>Principio di Sovrapposizione</u>:

Siano $\underline{\varphi}_1$ e $\underline{\varphi}_2$ soluzioni su I rispettivamente delle equazioni $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}_1(t)$ e $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}_2(t)$:

allora $\underline{\varphi} = \alpha\underline{\varphi}_1 + \beta\underline{\varphi}_2$ è soluzione su I dell'eq.

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + (\alpha \underline{b}_1(t) + \beta \underline{b}_2(t)) \; -$$

<u>Conseguenze del principio di sovrapposizione</u>.

1) L'insieme delle soluzioni dell'eq. omogenea $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ è uno spazio vettoriale. (Denotiamolo con X_0)

2) Se $\underline{\psi}_1$ e $\underline{\psi}_2$ sono soluzioni dell'equazione completa $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$, allora $\underline{\varphi}$ definita da $\underline{\varphi}(t) = \underline{\psi}_1(t) - \underline{\psi}_2(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$.

Segue immediatamente dal principio di sovrapposizione che, se $\underline{\psi}_0$ è soluzione dell'equazione $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$ e $\underline{\varphi}$ è soluzione dell'eq. omogenea associata, $\underline{\psi} = \underline{\psi}_0 + \underline{\varphi}$ è soluzione di $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + b(t)$ -

Da (2) otteniamo quindi che, detti X_b l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione completa e $\underline{\psi}_0$ una particolare soluzione di essa, si ha

$$X_b = X_0 + \underline{\psi}_0 \quad -$$

In altri termini, se $\underline{\psi}_0$ è una soluzione dell'eq. completa e $\underline{\psi}$ e $\underline{\varphi}$ sono l'integrale generale rispettivamente dell'equazione completa e dell'equazione omogenea associata si ha

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t) + \underline{\psi}_0(t)$$

la risoluzione dell'equazione completa si riduce quindi alla risoluzione dell'equaz. omogenea associata e alla ricerca di una soluz. particolare dell'eq. completa -

— — —

Problema di Cauchy.

Teorema - Dato un problema di Cauchy (o dei valori iniziali) per un equazione lineare del I ordine

$$\begin{cases} \underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

se $A, \underline{b}$ sono continue su I, allora $\forall\, t_0 \in I$, $\forall\, \underline{y}_0 \in R^n$ esiste una ed una sola soluzione $\underline{\varphi}$ del problema assegnato, e $\underline{\varphi}$ è definita su tutto I.

— — —

Oss. $\forall\, t_0 \in I$, il problema di Cauchy per l'eq. omogenea

$$\begin{cases} \underline{y}' = A(t)\,\underline{y} \\ \underline{y}(t_0) = \underline{0} \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $\underline{\varphi}(t) \equiv \underline{0}$ -

— — —

SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQ. OMOGENEA.

Teorema. X_0, spazio vettoriale delle soluzioni dell'eq. $\underline{y}' = A\underline{y}$, ha dimensione n. (Quindi esiste una base formata da n soluzioni linearmente indipendenti $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n$, e ogni $\underline{\varphi} \in X_0$ è della forma $\underline{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi}_i(t)$ $c_i \in \mathbb{R}$, costanti.)

Dim. nel caso $n = 2$.

Siano $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$ soluzioni (uniche!) dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}' = A(t)\,\underline{y} \\ \underline{y}(t_0) = \underline{e}_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \underline{y}' = A(t)\,\underline{y} \\ \underline{y}(t_0) = \underline{e}_2 \end{cases}$$

dove $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia $\underline{\varphi}$ una generica soluzione di $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ e

poniamo $\underline{y}_0 = \underline{\varphi}(t_0)$ $\left(\begin{cases} y_1^0 = \varphi_1(t_0) \\ y_2^0 = \varphi_2(t_0) \end{cases}\right)$

Consideriamo la funzione $\tilde{\underline{\varphi}}(t) = y_1^0 \underline{\varphi}_1(t) + y_2^0 \underline{\varphi}_2(t)$

$\tilde{\varphi}$ è soluz di $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ perchè combinazione lineare

di $\underline{\varphi}_1$ e $\underline{\varphi}_2$; inoltre $\tilde{\underline{\varphi}}(t_0) = y_1^0 \underline{e}_1 + y_2^0 \underline{e}_2 = \underline{y}_0$;

$\underline{\varphi}$ e $\tilde{\underline{\varphi}}$ sono quindi soluzioni del medesimo problema

di Cauchy e, per l'unicità della soluzione, $\tilde{\underline{\varphi}}(t) \equiv \underline{\varphi}(t)$

$\forall t \in I$, cioè $\underline{\varphi}(t) = y_1^0 \underline{\varphi}_1(t) + y_2^0 \varphi_2(t)$ $\quad \forall t \in I$ -

c. v. d.

<u>Def</u>. Date $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n$ soluzioni di $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$

la matrice $W(t) = \left[\underline{\varphi}_1(t)\, \underline{\varphi}_2(t) \dots \underline{\varphi}_n(t)\right]$ ottenuta accostando

le $\underline{\varphi}_i$ come vettori colonna viene detta Matrice Wronskiana

del sistema -

<u>Teorema</u>. Siano $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n$ soluzioni di $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ su I

$\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n$ sono linearmente indipendenti su I (cioè

$\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi}_i(t) = \underline{0}$ su $I \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$) se e solo se

$\exists\, t_0 \in I$ tale che $\det W(t_0) \neq 0$.

6)

<u>Def.</u> Una famiglia di n soluzioni linearmente indipendenti di $y' = A\underline{y}$, $\{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n\}$ viene chiamato sistema fondamentale di soluzioni. La relativa matrice wronskiana viene chiamata matrice fondamentale.

DA QUESTO PUNTO IN POI USEREMO LA NOTAZIONE $W(t)$ non per una generica matrice wronskiana ma PER UNA MATRICE FONDAMENTALE.

<u>Oss.</u> dato un sistema fondamentale $(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n)$, l'integrale generale $\underline{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi}_i(t)$ può venire scritto in forma matriciale come

$$\underline{\varphi}(t) = W(t)\,\underline{c} \quad , \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n \text{ costante}$$

ad esempio, per $n = 2$,

$\underline{\varphi}(t) = c_1 \underline{\varphi}_1(t) + c_2 \underline{\varphi}_2(t)$ vuol dire

$$\begin{cases} \varphi^1(t) = c_1 \varphi_1^1(t) + c_2 \varphi_2^1(t) \\ \varphi^2(t) = c_1 \varphi_1^2(t) + c_2 \varphi_2^2(t) \end{cases}$$ cioè

$$\begin{bmatrix} \varphi^1(t) \\ \varphi^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_2^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \varphi_2^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

pedice = indice della soluz.
apice = indice di componente

Oss. L'insieme delle equazioni

$$\varphi_i'(t) = A(t)\,\varphi_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots n$$

può venire scritto in forma matriciale come

$$W'(t) = A(t)\,W(t)$$

(verificarlo per $n = 2$). Si usa dire che una matrice wronskiana soddisfa l'equazione omogenea.

— — —

RICERCA DI UN SISTEMA FONDAMENTALE PER L'EQ. LINEARE AUTONOMA (A COEFF. COSTANTI) OMOGENEA.

— —

Se A è costante (e quindi il sistema è autonomo) si possono cercare soluzioni della forma $\varphi(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$ con $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema φ definita da $\varphi(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$ é soluzione di $\underline{y}' = A\,\underline{y}$ (ovviamente su $\mathbb{R}$) se e solo se λ è un autovalore di A e $\underline{\xi}$ è un autovettore associato a λ.

Dim. $\varphi'(t) = \underline{\xi}\,\lambda\, e^{\lambda t} = A\underline{\xi}\, e^{\lambda t} = A\varphi(t) \iff \lambda\underline{\xi} = A\underline{\xi}$

Oss. se A ha autovalori tutti regolari, troviamo n $\varphi_i(t) = \underline{\xi}_i\, e^{\lambda_i t}$, linearmente indipendenti. Infatti

$W(0) = \begin{bmatrix} \underline{\xi}_1 & \underline{\xi}_2 & \cdots & \underline{\xi}_n \end{bmatrix}$ e sappiamo dalla teoria delle matrici che autovettori associati ad autovalori distinti sono indipendenti linearmente e che autovalori di molteplicità $k > 1$ regolari hanno associati esattamente k autovettori indipendenti. (quindi $\det W(0) \neq 0$)

<u>OSS.</u> Se gli autovalori non sono regolari, troviamo $k < n$ soluzioni di questo tipo.

<u>CASO $n = 2$</u>

$\underline{y}' = A\underline{y}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \; (= \lambda^2 - \operatorname{Tr} A\,\lambda + \det A)$

l'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$ può avere:

- 2 soluz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$; abbiamo le soluzioni indip.:
  $\varphi_1(t) = \underline{\xi}_1 e^{\lambda_1}$ $\qquad \varphi_2(t) = \underline{\xi}_2 e^{\lambda_2}$
- 1 soluz $\lambda \in \mathbb{R}$ doppia:
  regolare $\quad \varphi_1(t) = \underline{\xi}_1 e^{\lambda t}$ $\qquad \varphi_2(t) = \underline{\xi}_2 e^{\lambda t}$
  non regolare $\quad \varphi_1(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t}$. si dimostra che esiste una soluzione, indip da $\underline{\varphi}_1$, del tipo $\varphi_2(t) = (\underline{k}_1 + \underline{k}_2 t) e^{\lambda t}$
- 2 soluz. complesse $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ a cui si possono associate autovalori complessi coniugati $\underline{\xi}_{1,2} = \underline{h}_1 \pm i\,\underline{h}_2$

con $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ lin indipendenti;

di conseguenza

$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}(\underline{h}_1 \cos\beta t - \underline{h}_2 \sin\beta t)$ e

$\underline{\varphi}_2(t) = e^{\alpha t}(\underline{h}_1 \sin\beta t + \underline{h}_2 \cos\beta t)$ sono soluzioni

reali linearmente indipendenti.

Oss. (comportamento asintotico delle soluzioni).

Nei casi

λ_1, λ_2 reali distinte < 0

λ doppia, $\lambda < 0$

$\lambda_{1,2}$ complesse coniugate con $\alpha < 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \underline{\varphi}(t) = \underline{0}$ per ogni soluzione $\underline{\varphi}$.

Nei casi

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0$;

$\lambda_{1,2}$ complesse coniugate con $\alpha = 0$

tutte le soluzioni sono limitate su $[0, +\infty)$

In tutti gli altri casi esistono soluzioni $\underline{\varphi}$ tali

che

$\lim\limits_{t \to +\infty} \|\underline{\varphi}(t)\| = +\infty$

RICERCA DI UN INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE COMPLETA - (metodo di variazione delle costanti arbitrarie).

Sia $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$ e sia $W(t)$ una matrice fondamentale.

Cerchiamo una soluzione $\underline{\psi}_0$ della forma $\underline{\psi}_0(t) = W(t)\underline{c}(t)$.

($\underline{c} : I \to \mathbb{R}^n$, funzione da determinare) - Deve essere

$\underline{\psi}_0'(t) = A(t)\underline{\psi}_0(t) + \underline{b}(t)$ quindi

$W'(t)\underline{c}(t) + W(t)\underline{c}'(t) = A(t)W(t)\underline{c}(t) + \underline{b}(t)$ -

Abbiamo osservato a pag 7 che $W'(t) = A(t)W(t)$ quindi l'equazione si riduce a

$$W(t)\underline{c}'(t) = \underline{b}(t)$$

e, poichè $W(t)$ è invertibile $\forall t \in I$, possiamo scrivere

$\underline{c}'(t) = (W(t))^{-1}\underline{b}(t)$ da cui, integrando riga per riga

$\underline{c}(t) = \int (W(t))^{-1}\underline{b}(t)\, dt$ (poichè cerco una soluz particolare, mi basterà considerare una delle primitive) -

la soluzione cercata sarà allora

$$\underline{\psi}_0(t) = W(t)\int (W(t))^{-1}\underline{b}(t)\, dt$$

e l'integrale generale dell'equazione completa

$$\underline{\psi}(t) = W(t)\left(\underline{c} + \int (W(t))^{-1}\underline{b}(t)\, dt\right)$$

APPLICAZIONE ALLE EQ. DIFF. LINEARI DI ORDINE 2

Ricordiamo che un'equazione lineare del II ordine,

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \qquad (1)$$

è equivalente al sistema bidimensionale

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -a(t)y_2 - b(t)y_1 + f(t) \end{cases} \qquad (2)$$

cioè all'equazione $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$ con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

e che φ è soluzione di (1) se e solo se la funzione

$\underline{\phi} : I \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{bmatrix}$ é soluzione di (2)

Definiremo matrice Wronskiana dell'equazione (1)

una matrice della forma $W(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix}$ dove

$\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ sono soluzioni di (1).

(φ_1 e φ_2 solo linearmente indipendenti (cioè $\varphi_1 \neq \lambda \varphi_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

se e solo se $\det W(t) \neq 0$ per $t \in I$ se e solo se $\exists\, t_0$ tale che

$\det W(t_0) \neq 0$)

Il metodo di variazione delle costanti arbitrarie applicato a questo particolare sistema dà

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

possiamo risolverlo utilizzando $(W(t))^{-1}$, che è facile calcolare,

$$(W(t))^{-1} = \frac{1}{\det W(t)} \begin{bmatrix} \varphi'_2(t) & -\varphi_2(t) \\ -\varphi'_1(t) & \varphi_1(t) \end{bmatrix}$$

oppure scrivere il sistema come

$$\begin{cases} \varphi_1(t)\, c'_1(t) + \varphi_2(t)\, c'_2(t) = 0 \\ \varphi'_1(t)\, c'_1(t) + \varphi'_2(t)\, c'_2(t) = f(t) \end{cases}$$

e risolverlo – Troviamo

$$c'_1(t) = \frac{-\varphi_2(t)}{\det W(t)} f(t) \qquad \text{da cui} \quad c_1(t) = -\int \frac{f(t)\,\varphi_2(t)}{\det W(t)}\, dt$$

e

$$c'_2(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\det W(t)} f(t) \qquad \text{da cui} \quad c_2(t) = \int \frac{f(t)\,\varphi_1(t)}{\det W(t)}\, dt$$

e

$$\psi_0(t) = -\int \frac{f(t)\,\varphi_2(t)}{\det W(t)}\, dt\; \varphi_1(t) + \int \frac{f(t)\,\varphi_1(t)}{\det W(t)}\, dt \cdot \varphi_2(t)$$