Matrici, M.E.G., Sistemi Lineari

Prof. Marco Compagnoni

- definizione
- operazioni

SEZIONE 3.1

- riduzione a scala
- rango

SEZIONE 3.2

- sistemi lineari
- teorema di Rouché - Capelli
- teorema di struttura delle soluzioni

SEZIONE 3.3

MATRICI (3.1)

MATRICE (DEFINIZIONE 3.1)

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ $\quad N = \{1, 2, \dots, n\}$

Una matrice è una funzione $A : M \times N \to \mathbb{K}$.
$$(i, j) \mapsto a_{ij}$$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \in Mat(m, n; \mathbb{K})$$

$M =$ insieme indici righe

$N =$ insieme indici colonne

ESEMPI NOTEVOLI (DEFINIZIONE 3.4)

- $O_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ Matrice nulla

$O_{mn}(i, j) = 0 \quad \forall i, j$

- $I_{mn} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \multicolumn{4}{c|}{I_m} & \multicolumn{3}{c}{O_{m,n-m}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$ Matrice identità (caso $n > m$)

$$I_{m,n}(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Notazioni

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} A_{R(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline A_{R(m)} \end{bmatrix} = \left[A_{C(1)} \mid \dots \mid A_{C(n)} \right]$$

$A_{R(i)} = \left[a_{i1} \dots a_{in} \right] \in Mat(1, n; \mathbb{K})$ riga i-esima di A

$A_{C(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in Mat(m, 1; \mathbb{K})$ colonna j-esima di A

$a_{ij} = (A)_{ij} =$ elemento o entrata di posto (i, j)

Esempio

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} A_{R(1)} \\ A_{R(2)} \end{array} \\ \begin{array}{cc} A_{C(1)} & A_{C(2)} \end{array} & \end{array} \in Mat(2, 2; \mathbb{Q})$$

$(A)_{11} = a_{11} = 1$

$(A)_{21} = a_{21} = 3$

Somma e Prodotto per Uno Scalare (Def. 3.5, Prop. 3.7)

$$+ : \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$$
$$([a_{ij}],[b_{ij}]) \longmapsto [a_{ij}+b_{ij}]$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$$
$$(t,[a_{ij}]) \longmapsto [t\,a_{ij}]$$

Elemento per elemento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + A = \begin{bmatrix} 1+1 & (-1)+(-1) \\ (-1)+(-1) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = 2\cdot A$$

(i) $(\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}),+)$ è un gruppo abeliano, con elemento neutro $0_{m,n}$ ed inverso additivo di A la matrice $(-1)\cdot A$;

(ii) $t\cdot(A+B) = (t\cdot A)+(t\cdot B)$

(iii) $(t_1+t_2)\cdot A = (t_1\cdot A)+(t_2\cdot B)$

distributività;

(iv) $t_1\cdot(t_2\cdot A) = (t_1 t_2)\cdot A$ omogeneità;

(v) $1\cdot A = A$ normalizzazione.

$$A + A \overset{(v)}{=} (1\cdot A) + (1\cdot A) \overset{(iii)}{=} (1+1)\cdot A = 2\cdot A$$

Prodotto Riga per Colonna (Def. 3.8, Prop. 3.10)

$$* : \mathrm{Mat}(m,p;\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}(p,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$$

$$\left([a_{ij}],[b_{ij}]\right) \longmapsto \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]$$

$$m = n = 1 : \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k1}\right] = \left[a_{11} b_{11} + \dots + a_{1p} b_{p1}\right]$$

$$m = 2, \quad p = 2, \quad n = 3 :$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

Esempi

$$\overset{(1,3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} * \overset{(3,1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \overset{(1,1)}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} \text{ "=" } 0$$

$$\underset{(3,1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} * \underset{(1,3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \underset{(3,3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

(i) $A * (B * C) = (A * B) * C$ associatività ;

(ii) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$, $(A + B) * C = (A * C) + (B * C)$ distributività ;

(iii) $t \cdot (A * B) = (t \cdot A) * B = A * (t \cdot B)$ omogeneità ;

(iv) $I_m * A = A$, $A * I_n = A$.

DIM: (ii) $(A * (B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) =$

$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj} = (A * B)_{ij} + (A * C)_{ij}$ $\boxtimes$

ATTENZIONE: per $*$ non valgono tutte le usuali proprietà

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A * B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B * A = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$

- $A * B = B * A$ sse $b_{12} = b_{21} = 0$;
- $A * B = O_{22}$ se $b_{11} = b_{12} = 0$, anche se $A, B \neq O_{22}$;
- $A * B \neq I_2$ per ogni $B \Rightarrow$ non esiste l'inversa moltiplicativa di A.

Matrice Trasposta (Definizione 3.11, Proposizione 3.12)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}) \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$$

i) $(A^T)^T = A$ *involuzione* ;

ii) $(t_1 \cdot A_1 + t_2 \cdot A_2)^T = t_1 \cdot A_1^T + t_2 \cdot A_2^T$ *linearità* ;

iii) $(A * B)^T = B^T * A^T$.

Esercizio: *verificare che* $(A_1 * \ldots * A_k)^T = A_k^T * \ldots * A_1^T$.

Metodo di Eliminazione di Gauss (3.2)

Pivot e Matrice a Scala (Definizione 3.13)

Pivot P_i = primo elemento non nullo di $A_{R(i)}$

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & .. & 0 & P_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & P_2 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & P_r & * & \dots & * \\
\hline
\multicolumn{15}{c}{O_{m-r,n}}
\end{array}\right] \in Mat(m,n;\mathbb{K})$$

P_i è più a sinistra di P_{i+1} per ogni $1 \leq i \leq r$.

Una matrice con la struttura di A si dice a scala.

rango di $A = r(A) = r \leq \min(m,n)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A Scala, $r(A) = 2$ — Non a Scala — Non a Scala

Operazioni Elementari sulle Righe (Definizione 3.15)

i) Permutazione: $A_{R(i)} \longleftrightarrow A_{R(j)}$;

ii) Moltiplicazione per uno scalare non nullo: $A_{R(i)} \to t \cdot A_{R(i)}$, $t \in \mathbb{K}^*$;

iii) Somma di righe: $A_{R(i)} \to A_{R(i)} + t \cdot A_{R(j)}$, $t \in \mathbb{K}$, $i \neq j$.

Metodo di Eliminazione di Gauss (Teorema 3.16)

È sempre possibile ridurre una matrice A ad una matrice a scala S attraverso una sequenza finita di operazioni elementari.

Rango (Definizione 3.18)

rango di A $= r(A) = r(S)$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \longleftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(B) = 1$ $\qquad$ $r(C) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 1/2 \cdot R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2 \cdot R_2 \to R_3]{1/2 \cdot R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S'$$

$$\Rightarrow \ r(A) = r(S) = r(S') = 2$$

Esistono diverse riduzioni a scala di A, ma tutte hanno lo stesso numero di pivot!

Sistemi Lineari (Definizione 3.21)

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ coefficienti, x_j incognite, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\Updownarrow$$

$$A * X = B$$

$[A|B]$ = matrice completa del sistema lineare

$[A|0_{m1}]$ = matrice del sistema omogeneo associato

Algoritmo di Gauss per la Risoluzione dei Sistemi Lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \quad -2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 1/2 = 1/2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$$

Verifica: $\begin{cases} 1/2 + 1/2 = 1 \\ 1/2 - 1/2 = 0 \end{cases}$ $\quad A * X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B$

EQUIVALENZA DEI SISTEMI LINEARI (PROPOSIZIONE 3.22)

Sia $[A|B]$ un sistema lineare ed $[S|B']$ una sua riduzione a scala.
Allora i due sistemi lineari hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

DIM: ogni riga di $[A|B]$ corrisponde ad una equazione.

(i) $[A|B]_{R(i)} \longleftrightarrow [A|B]_{R(j)}$ = scambio l'ordine delle equazioni $\Rightarrow$ le soluzioni non cambiano.

(ii) $[A|B]_{R(i)} \to t \cdot [A|B]_{R(i)}$, $t \neq 0$ = l'equazione è moltiplicata per una costante $\Rightarrow$ le soluzioni non cambiano.

(iii) $[A|B]_{R(i)} \to [A|B]_{R(i)} + t \cdot [A|B]_{R(j)} = [A_{R(i)} + t \cdot A_{R(j)} | b_{i1} + t b_{j1}]$

(1) $\begin{cases} a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n - b_i = 0 \\ a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n - b_j = 0 \end{cases}$ Sistema iniziale

(2) $\begin{cases} (a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n - b_i) + t \cdot (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n - b_j) = 0 \\ a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n - b_j = 0 \end{cases}$ Sistema trasformato

- Sia $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ soluzione di (1). Allora
$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n - b_i) + t\cdot(a_{j1}\bar{x}_1 + \dots + a_{jn}\bar{x}_n - b_j) = 0 + t\cdot 0 = 0 \quad \forall t$$
$\Rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ è soluzione di (2).
- Sia $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ soluzione di (2). Allora
$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n - b_i) + t\cdot(a_{j1}\bar{x}_1 + \dots + a_{jn}\bar{x}_n - b_j) = 0 \Rightarrow$$
$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n - b_i) + t\cdot 0 = a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n - b_i = 0 \quad \forall t$$
$\Rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ è soluzione di (1). $\boxtimes$

Combinando i risultati precedenti, possiamo dire che ogni sistema lineare è equivalente ad un sistema ridotto a scala. Pertanto analizziamo tutti i possibili casi di sistemi ridotti.

CASO 1: $r([A|B]) > r([A])$ $\Rightarrow$ SISTEMA SOVRADETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ 0=1 \end{cases} \Rightarrow$$

L'ultima equazione $0\cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$ non ha soluzione

CASO 2: $r([A|B]) = r([A]) = n$ $\Rightarrow$ SISTEMA DETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z=1-1=0 \\ y=-z=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

Esiste un pivot per ogni colonna, cioè per ogni incognita.
Partendo dall'ultima equazione, troviamo un'unica soluzione.

CASO 3: $r([A|B]) = r([A]) < n$ $\Rightarrow$ SISTEMA SOTTODETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

t parametro in $\mathbb{K}$

Esistono infinite soluzioni dipendenti da tanti parametri quante sono le incognite non corrispondenti ai pivot.

Teorema di Rouché - Capelli (Teorema 3.24)

Consideriamo il sistema associato ad $[A|B] \in Mat(m, n+1; \mathbb{K})$:

i) la soluzione non esiste sse $r([A|B]) > r(A)$;

ii) la soluzione esiste unica sse $r([A|B]) = r(A) = n$;

iii) esistono infinite soluzioni dipendenti da $n - r(A)$ parametri sse
$r([A|B]) = r(A) < n$.

Sistemi Lineari Omogenei (Corollario 3.25)

$[A | O_{m1}]$ ha sempre soluzione. (in particolare $X = O_{n1}$)

Nucleo di una Matrice (Definizione 3.26)

$Ker(A) = \{ X \in Mat(n, 1; \mathbb{K}) \mid A * X = O_{m1} \}$ = nucleo o Kernel di A $\neq \emptyset$

$$Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{K} \right\}$$

$\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_p} + t\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_o}$$

$A * X_o = O_{21}$, $A * X_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B$ $\quad \infty^1$ soluzioni

STRUTTURA DELLE SOLUZIONI (TEOREMA 3.28)

Sia $[A|B]$ risolvibile $\Rightarrow$ la soluzione generale è $X = X_p + X_o$, dove:

- X_p = una soluzione particolare di $[A|B]$;
- X_o = la soluzione generale di $[A|O_{m1}]$.

DIM: sia $X(t_1, .., t_{n-r})$ la soluzione generale di $[A|B]$, con una soluzione particolare $X_p = X(\bar{t}_1, .., \bar{t}_{n-r})$. Dobbiamo dimostrare che $X_o(t_1, .., t_{n-r}) = X(t_1, .., t_{n-r}) - X_p$ è la soluzione generale di $[A|O_{m1}]$:

- dipende da $n-r = n - r(A)$ parametri;
- $A * X_o(t_1, .., t_{n-r}) = A * (X(t_1, .., t_{n-r}) - X_p) = A * X(t_1, .., t_{n-r}) - A * X_p = B - B = O_{m1}$. ▨