ESERCITAZIONE DI PS1

05/03/21

ESERCIZIO Un' urna contiene 10 palline, numerate da 1 a 10. Se ne estraggono due, una alla volta, con reinserimento. Sono dati gli eventi:

- A: "La prima estratta è contrassegnata da un numero pari"
- B: "Almeno una delle due estratte è contrassegnata da un 6"

1) Descrivere lo spazio campionario Ω e gli eventi A e B come sottoinsiemi di Ω. Calcolare la probabilità di A e B.
2) Descrivere in termini di A e B gli eventi:
   - A e B si verificano entrambi
   - si verifica almeno uno tra A e B
   - non si verifica né A né B
   - si verifica A ma non B
   - si verifica al più uno tra A e B

   e calcolarne la probabilità
3) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta dia un numero pari, sapendo che almeno una delle palline estratte dà 6.

1) $\Omega = \{(i,j) \quad i = 1..10 \quad j = 1..10\}$, $|\Omega| = 10 \cdot 10 = 100 \rightarrow P(\{i,j\}) = \frac{1}{100}$

$A = \{(2i, j) \quad i = 1..5 \quad j = 1,10\}$, $|A| = 5 \cdot 10 = 50 \rightarrow P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

$B = \{(6, j) \quad j = 1..10, \quad (i, 6) \quad i = 1..10 \quad i \neq 6\}$, $|B| = 19$

$\rightarrow P(B) = 19/100$

2)
- $A \cap B = \{(6,j) \quad j = 1..10 \cup (i,6) \quad i = 2,4,8,10\}$; $|A \cap B| = 14 \rightarrow P = \frac{14}{100}$
- $A \cup B : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 55/100$
- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \rightarrow P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 45/100$
- $A \cap B^c = A \setminus A \cap B \rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 36/100$
- $(A \cap B)^c : P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 86/100$

3) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{14}{19}$

ESERCIZIO Consideriamo un mazzo da 40 carte suddivise in 4 semi, ciascuno contenente 10 carte di 10 valori distinti. Supponiamo di estrarre a caso 5 carte dal mazzo precedentemente mescolato.

1) Calcolare la cardinalità di Ω

Calcolare la probabilità di estrarre:

2) cinque valori distinti (E_1)
3) almeno una carta di quadri (E_2)
4) esattamente due cuori e nessun picche (E_3)
5) tre assi e due sette (E_4)

combinazioni senza rip.

1) $\Omega = \{ \text{E sottoinsieme di 5 carte} \} = \binom{40}{5}$

2)

$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{5} \cdot 4^5}{|\Omega|}$$

3)

$$P(E_2) = 1 - P(E_2^c) = 1 - \frac{\binom{30}{5}}{|\Omega|}$$

4)

$$P(E_3) = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{|\Omega|}$$

5)

$$P(E_4) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{|\Omega|}$$

E_5 : estraggo 2 assi e 2 '7'

$\hookrightarrow$ $P(E_5) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{32}{1}}{|\Omega|}$

ESERCIZIO Si scelgono a caso 5 lettere dell'alfabeto (21 lettere) si calcoli la probabilità:

1) di comporre una parola di 5 vocali
2) di comporre una parola di 5 consonanti
3) di comporre una parola che contiene almeno una lettera A
4) di comporre una parola esattamente una A come prima lettera
5) di comporre la parola "esami"

Si risponda alle domande nelle due diverse ipotesi che le lettere possano essere ripetute o che ogni lettera possa essere usata una sola volta.

SENZA RIPETIZIONE: $|\Omega| = (21)_5$ → disposizioni senza rip.

1) $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{5!}{(20)_5}$

→ $(n-k+1)!$

2) $P(A_2) = \frac{(16)_5}{(21)_5}$

3) $P(A_3) = 1 - P(A_3^c) = 1 - \frac{(20)_5}{(21)_5}$

4) $P(A_4) = \frac{(20)_4}{(21)_5}$

5) $P(A_5) = \frac{1}{(21)_5}$

CON RIPETIZIONE: $|\Omega| = 21^5$ → disposizioni con ripetizioni

1) $P(A_1) = \frac{5^5}{21^5}$

2) $P(A_2) = \frac{16^5}{21^5}$

3) $P(A_3) = 1 - P(A_3^c) = 1 - \frac{20^5}{21^5}$

4) $P(A_4) = \frac{20^4}{21^5}$

5) $P(A_5) = \frac{1}{21^5}$

ESERCIZIO Nel mazzo di chiavi di Pietro ci sono 9 chiavi di cui una sola apre la porta, ma Pietro non si ricorda quale sia. Così le prova una alla volta, scartando quelle già provate finché trova quella giusta. Qual è la probabilità che la trovi al 5° tentativo? E al 9°?

Consideriamo le chiavi numerate da 1 a 9 e che la chiave che apre il cancello abbia numero 1.

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_9) \quad a_i = 1..9 \quad a_i \neq a_j \quad i \neq j\} \rightarrow |\Omega| = 9!$ → permutazioni

A_5 := "Pietro trova la chiave del cancello al 5° tentativo"

↳ $A_5 = \{(a_1, \dots, a_4, 1, a_6, \dots, a_9) \quad a_i = 2..9 \quad a_i \neq a_j \quad i \neq j\}$

↳ $P(A_5) = |A_5|/|\Omega| = 8!/9! = 1/9$

Idem per A_9 := "Pietro trova la chiave del cancello al 9° tentativo"

ESERCIZIO Ciascuno dei 50 stati fra gli Stati Uniti ha 2 senatori. In una commissione di 50 senatori scelti a caso calcolare la probabilità che:
1) un assegnato stato sia rappresentato
2) tutti gli stati siano rappresentati

1) $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{\binom{98}{50}}{\binom{100}{50}} = {}^{149}/_{198}$ 2) $P(F) = \frac{2^{50}}{\binom{100}{50}}$

ESERCIZIO Si vuole assegnare la probabilità che una persona scelta scelta in una popolazione possegga K appartamenti a partire dai pesi:

$$p_k = \begin{cases} c/4 & K=0 \\ c/2^k & K=1..5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Per quali valori di c i pesi assegnati definiscono una probabilità
2) Quanto vale la probabilità che una persona possegga almeno 2 appartamenti

1) $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$ $p_k \geq 0$ $\sum_{i=0}^{5} p_k = 1$

$\hookrightarrow$ $c>0$ e $1 = \sum_{i=0}^{5} p_k = c\left(\frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^k}\right) =$

$= c\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2^j}\right) =$

$= c\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{(1-1/2^5)}{1-\frac{1}{2}}\right) = c\,\frac{39}{32} \rightarrow c = \frac{32}{39}$

2) $P(\{2,3,4,5\}) = 1 - P(\{0,1\}) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{39} - \frac{1}{2}\frac{32}{39} = 5/13$

ESERCIZIO I pezzi prodotti da una certa macchina possono avere 3 tipi di difetti A, B e C. È noto che la probabilità che un pezzo presenti il difetto A è 0,020, che presenti il difetto B è 0,010, che presenti il difetto C è 0,010, che presenti difetti A e B è 0,008. Infine la probabilità che presenti tutti e tre i difetti è 0,005. Calcolare la probabilità che un pezzo scelto a caso:
1) presenti sia il difetto B sia il difetto C

2) presenti il difetto B o il difetto C ma non il difetto A
3) non presenti alcun difetto.

A := "macchina presenta il difetto A" $\rightarrow P(A) = 0,020$
B := " " " " " B" $\rightarrow P(B) = 0,010$
C := " " " " " C" $\rightarrow P(C) = 0,015$

$P(A \cap C) = 0,010$, $P(A \cap B) = 0,008$, $P(A \cap B \cap C) = 0,005$, $P(C \cap B^c) = 0,009$

1) $P(C \cap B) = P(C \setminus B^c \cap C) = P(C) - P(B^c \cap C) = 0,006$
2) $P((B \cup C) \cap A^c) = P(A \cup B \cup C \setminus A) = P(A \cup B \cup C) - P(A) =$
$= \cancel{P(A)} + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) - \cancel{P(A)} =$
3) $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - P((A^c \cap B^c \cap C^c)^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \dots$

ESERCIZIO Un'inchiesta sulla popolazione della città xxx ha fornito i seguenti dati: il 10% della popolazione è ricco (R), il 5% è famoso e il 3% è ricco e famoso.
1) Qual è la probabilità di un cittadino sia ricco ma non famoso?
2) Per un cittadino non famoso, qual è la probabilità di essere ricco?
3) Per un cittadino non famoso, qual è la probabilità di non essere ricco?

R := "l'individuo scelto è ricco" $\rightarrow P(R) = 0,10$
F := " " " è famoso" $\rightarrow P(F) = 0,05$
$\rightarrow P(R \cap F) = 0,03$

1) $P(R \cap F^c) = P(R \setminus R \cap F) = P(R) - P(R \cap F) = 0,07$

2) $P(R \mid F^c) = \dfrac{P(R \cap F^c)}{P(F^c)} = \dfrac{0,07}{1 - P(F)} = \dfrac{7}{95}$

3) $P(R^c \mid F^c) = 1 - P(R \mid F^c) = \dfrac{88}{95}$

ESERCIZIO Un'urna contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere. Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera, la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre tre palline nere. Se invece è bianca nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede a due successive estrazioni seguendo lo schema appena descritto. Si vince se una pallina estratta è bianca.

1) Si calcoli la probabilità di vincere
2) Si calcoli la probabilità di vincere sapendo che la pallina bianca non è uscita alla prima estrazione.
3) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina bianca non sia uscita nella prima estrazione.

1) $P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(N_1 \cap N_2) = 1 - P(N_2 | N_1) P(N_1) = 6/11$

2) $P(B_1 \cup B_2 | B_1^c) = \dfrac{P((B_1 \cup B_2) \cap B_1^c)}{P(B_1^c)} = \dfrac{P((B_1 \cap B_1^c) \cup (B_2 \cap B_1^c))}{P(B_1^c)} = \dfrac{P(B_2 \cap B_1^c)}{P(B_1^c)}$

$= P(B_2 | B_1^c) = 3/11$

3) $P(B_1^c | B_1 \cup B_2) = \dfrac{P(B_1^c \cap (B_1 \cup B_2))}{P(B_1 \cup B_2)} = \dfrac{P(B_1 \cup B_2 | B_1^c) P(B_1^c)}{P(B_1 \cup B_2)}$

ESERCIZIO Partendo dalla piazzetta del paese, Camillo può raggiungere il porto scegliendo tra sei diversi percorsi, numerati da 1 a 6. Camillo sceglie il percorso lanciando un dado regolare. Per $i = 1..6$ sia $1/(i+1)$ la probabilità di raggiungere il porto in meno di 10 minuti se si è scelto il percorso i

1) Calcolare la probabilità che Camillo impieghi meno di 10 minuti per raggiungere il porto dalla piazzetta.
2) Calcolare la probabilità che Camillo abbia scelto il percorso 1, sapendo che ha impiegato almeno 10 minuti per raggiungere il porto dalla piazzetta.

R := "Camillo raggiunge il porto dalla piazzetta in meno di 10 min"
E_i := "Camillo sceglie il percorso i-esimo"

$P(E_i) = 1/6 \qquad P(R | E_i) = \dfrac{1}{i+1} \quad i = 1..6$

1) $P(R) = \sum_{i=1}^{6} P(R|E_i)P(E_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+1} = \dots = \frac{223}{840} = 0,2655$

2) $P(E_1|R^c) = \dfrac{P(R^c|E_1)P(E_1)}{P(R^c)} = \dfrac{1-P(R|E_1)P(E_1)}{1-P(R)} = \dots = \dfrac{70}{617}$

08/03/21

ESERCIZIO

Si effettua un test anti-doping sugli atleti di una certa società sportiva. Si sa che la *sensibilità* del test, cioè la probabilità che un atleta che ha assunto doping risulti positivo, è del 95%, mentre la *specificità* del test, cioè la probabilità che un atleta "pulito" risulti negativo è del 90%. In base a studi precedenti, si sa che la percentuale degli atleti della società che assumono doping si assesta intorno al 3%.

1. Determinare la probabilità che un atleta scelto a caso risulti positivo al test.
2. Calcolare il *valore predittivo del test*, cioè la probabilità che un atleta risultato positivo al test, sia effettivamente dopato.

Pos = "L'atleta è positivo al test"
D = "L'atleta ha assunto doping"

$P(Pos|D) = 0,95$, $P(Pos^c|D^c) = 0,90$, $P(D) = 0,03$
$P(Pos) = ?$ $P(D|Pos) = ?$

1) $P(Pos) = P(Pos|D)P(D) + P(Pos|D^c)P(D^c) = \dots = 0,1255$

2)
$$P(D|Pos) = \frac{P(Pos|D)P(D)}{P(Pos)} = \dots = 0,2271$$

ESERCIZIO

Un certo programma di calcolo funziona usando una delle due subroutine s_A e s_B a seconda del problema da trattare. L'esperienza ha mostrato che s_A sarà usata il 40% delle volte e s_B il 60%. Se si usa s_A, c'è una probabilità del 75% che il programma venga eseguito entro il suo tempo limite e se si usa s_B c'è una probabilità del 50% che questo succeda.

1. Determinare la probabilità che il programma venga eseguito entro il suo tempo limite.
2. Se il programma **non** viene eseguito entro il suo tempo limite, qual è la probabilità che **non** sia stata usata la subroutine s_B?

A = "viene usata la subroutine S_A"
B = "viene usata la subroutine S_B"
E = "viene eseguito entro il tempo limite"

$P(A) = 0{,}40 \quad P(B) = 0{,}60 \qquad P(E|A) = 0{,}75 \quad P(E|B) = 0{,}50$

$P(E) = ? \quad P(B^c | E^c)$

1) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|\overset{B}{A^c})P(\overset{B}{A^c}) = \dots = 0{,}6$

2)

$$P(B^c|E^c) = P(A|E^c) = \frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c)} = \dots = 0{,}25$$

ESERCIZIO

Una roulette semplificata è formata da 12 numeri che sono classificati rosso (R) e nero (N) in base al seguente schema:

1 R	2 R	3 N	4 N	5 R	6 N
7 N	8 R	9 N	10 N	11 R	12 R

Siano A="esce un numero pari", B="esce un numero rosso", C="esce un numero ≤ 6" e D="esce un numero ≤ 8". Stabilire se

1. gli eventi A,B e C sono a due a due indipendenti;
2. A,B e C costituiscono una famiglia di eventi indipendenti;
3. A,B e D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti;
4. E="esce un numero dispari ≤ 3" è indipendente da A e da D.
5. Supponiamo ora di sapere che è uscito un numero rosso, gli eventi A e C sono (ancora) indipendenti?
6. Gli eventi D e C sono indipendenti? Se so che si è verificato F="esce un numero dispari ≤ 7", D e C sono indipendenti?

1) $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{12} = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \rightarrow$ A e B indipendenti
$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = P(A)P(C) \rightarrow$ A e C indipendenti
$P(B \cap C) = \dots\dots\dots = \frac{1}{4} = P(B)P(C) \rightarrow$ B e C indipendenti

2) Per mostrare A,B,C indipendenti manca $P(A \cap B \cap C)$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

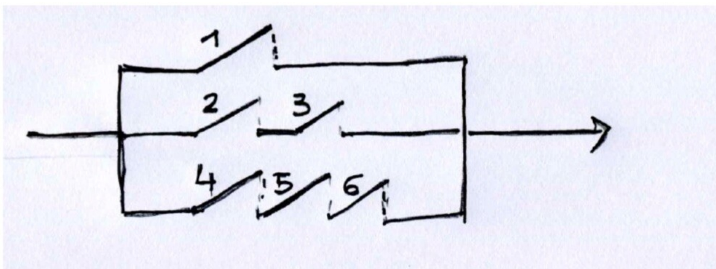
4) $P(A \cap D) = 4/12 = 1/3 = P(D)P(A) \rightarrow$ A e D indipendenti
$P(D) = 8/12 = 2/3$
Analogamente si ottiene B, D indipendenti

$P(A \cap B \cap D) = \dots = 1/6 = P(A)P(B)P(D) \rightarrow$ famiglia A, B, C è una terna di eventi indip.

5... 6...

ESERCIZIO

Si calcoli l'affidabilità del sistema



supposto che i componenti funzionino in modo indipendente e con la stessa affidabilità $p = 0.7$.

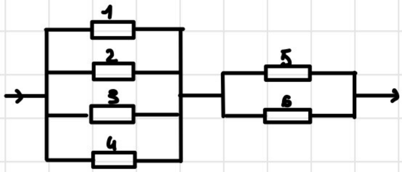
A_i = "Il componente i-esimo funziona"
B_2 = "Il sottosistema (2,3) funziona"
B_3 = "Il sottosistema (4,5,6) funziona"

$P(A_i) = 0,7$
$P(B_2) = P(A_2 \cap A_3) = 0,7^2 = 0,49$; $P(B_3) = P(A_4 \cap A_5 \cap A_6) = 0,7^3 = 0,343$
$P(\text{sistema funziona}) = 1 - (1-0,7)(1-0,49)(1-0,343) = \dots = 0,8995$

ESERCIZIO

In un ufficio lavorano 4 impiegati, un capo ufficio e un vice capo; tutte e sei le persone sono spesso assenti. Ogni pratica può essere sbrigata da uno qualsiasi degli impiegati (basta che sia presente in ufficio), dopo viene passata al capo ufficio per il controllo finale e la firma; il vice capo svolge la stessa funzione del capo, in sua assenza. Supponiamo che ogni impiegato abbia affidabilità 0.6 (intesa come probabilità che sia presente in ufficio nel momento in cui ci sia una pratica da sbrigare), il capo ufficio abbia affidabilità 0.5 e il vice capo 0.7.

1. Si rappresenti il sistema con uno schema di connessioni in serie e in parallelo e si calcoli l'affidabilità del sistema.
2. Visto lo scarso rendimento, il capo ufficio decide di prendere provvedimenti e ha due alternative: assumere un nuovo impiegato di affidabilità 0.6 oppure promuovere uno dei 4 impiegati al ruolo di aiuto vice capo (con lo stesso ruolo del vice capo e con la stessa affidabilità che aveva prima della promozione). Quale è la scelta più conveniente?



A_i = "l'impiegato i è presente in ufficio"
A_5 = "il capo è presente"
A_6 = "il vicecapo è presente"

$P(A_i) = 0{,}6 \qquad P(A_5) = 0{,}5 \qquad P(A_6) = 0{,}7$

1) $P(S.F) = \left(1 - \prod_{i=1}^{4}(1-P(A_i))\right)\left(1-(1-P(A_5))(1-P(A_6))\right) = \cdots = 0{,}82824$

2) $P(S_1.F.) = \left(1 - \prod_{i=1}^{5}(1-P(A_i))\right)\left(1-(1-P(A_5))(1-P(A_6))\right) = \cdots = 0{,}841296$

$P(S_2.F) = \left(1 - \prod_{i=1}^{3}(1-P(A_i))\right)\left(1-(1-P(A_4))(1-P(A_5))(1-P(A_6))\right) = \cdots =$
$= 0{,}87984 \leftarrow$ migliore

ESERCIZIO

Un dado viene lanciato 3 volte.

1. Qual è la probabilità di avere 6 almeno una volta?
2. Quante volte deve essere lanciato il dado perché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

E_i = "esce il numero 6 allo i-esimo lancio" $\quad E_1, E_2, E_3$ ind.

1) $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$

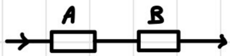
2) $n: P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(E_i^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$

↳ $n \geq \log_{5/6}(0{,}1) \to n \geq 13$

ESERCIZIO

Un sistema elettronico è composto dalle componenti A e B disposte in serie. Sappiamo che la componente A funziona con probabilità pari a 0.5. Se la componente A funziona, allora la probabilità che la componente B funzioni è pari a 0.7, mentre se la componente A non funziona, la probabilità che la componente B funzioni vale 0.3.

1. Calcolare la probabilità che il sistema complessivo funzioni.
2. Calcolare la probabilità che la componente B funzioni.
3. Sapendo che il sistema complessivo non funziona, quanto vale la probabilità che la componente B non funzioni?



A = "la componente A funziona"
B = "la componente B funziona"

$P(A) = 0{,}5 \quad P(B|A) = 0{,}7 \quad P(B|A^c) = 0{,}3$

1) $P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A) = 0{,}35$

2) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.5$

3) $P(S.F) = P(A \cap B) = 0{,}5 \rightarrow P(S.F^c) = P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c)$

$\hookrightarrow P(B^c | A^c \cup B^c) = \dfrac{P(A^c \cup B^c | B^c)\,P(B^c)}{P(A^c \cup B^c)} = \dfrac{10}{13}$

ESERCIZIO

Un sistema ingegneristico che consiste di n componenti è detto sistema k-su-n ($k \leq n$) se il sistema funziona se e solo se almeno k delle n componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente una dall'altra. Se la probabilità di funzionare per ogni componente è p, determinare

1. la probabilità che funzioni un sistema 2-su-4;
2. la probabilità che il primo componente funzioni, sapendo che l'intero sistema 2-su-4 funziona;
3. la probabilità che funzioni un sistema k-su-n.

Lo spazio adeguato per la risoluzione è quello delle n prove di Bernoulli con probabilità di successo pari a p.

1) B_j = "funzionano j componenti"

$$P(S.F(2,4)) = P(B_2 \cup B_3 \cup B_4) = P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) =$$
$$= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p) + p^4$$

2) A_i = "Il componente i funziona"

$$P(A_1 \mid S.F(2,4)) = \frac{P(A_1 \cap S.F(2,4))}{P(S.F(2,4))} = \frac{P(A_1 \cap \text{almeno uno dei rim. funz.})}{P(S.F(2,4))}$$

$$= \frac{P(A_1)P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)}{P(S.F(2,4))} = \frac{P(A_1)(1-P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c))}{P(S.F(2,4))} =$$

$$= \frac{p(1-p^3)}{\sum_{K=2}^{4} \binom{4}{K} p^K (1-p)^{4-K}}$$

3) $P(S.F(K,n)) = P(B_K \cup B_{K+1} \cup \dots \cup B_n) = \sum_{J=K}^{n} \binom{n}{J} p^J (1-p)^{n-J}$

con B_J = "funzionano esattamente J componenti"

ESERCIZIO

La funzione di ripartizione della variabile aleatoria X è definita come segue:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \alpha & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 11/12 & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{se } 3 \le x. \end{cases}$$

1. Determinare i valori possibili di α.
2. Fissato $\alpha = 2/3$, determinare $P(X \le 5/2)$, $P(X > 2)$, $P(1 < X \le 3)$ e $P(1 \le X \le 3)$.
3. Determinare la densità di X.

1) Poiché F_X deve essere monotona non decrescente $\Rightarrow \frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{11}{12}$

2) $P(X \le 5/2) = F_X(5/2) = 11/12$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 11/12 = 1/12$

$P(1 < X \le 3) = F_X(3) - F_X(1) = 1 - 2/3 = 1/3$

$P(1 \le X \le 3) = P(1 < X \le 3) + P(X = 1) = 1/3 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

3) $P_X(0) = F_X(0) - 0 = 1/2$ $\qquad$ $P_X(2) = F_X(2) - F_X(1) = 1/4$

$P_X(1) = F_X(1) - F_X(0) = 1/6$ $\qquad$ $P_X(3) = F_X(3) - F_X(2) = 1/12$

15/03/21

ESERCIZIO Sia un pavimento della cucina con piastrelle da $l = 20$ cm e una scatoletta di tonno di raggio 5 cm. Qual è la probabilità che la scatoletta sia interamente contenuta in 1, 2, 3, 4 piastrelle? Qual è la f.d.r. e la media?

Affinché la scatoletta sia in una piastrella, il centro della scatoletta deve stare a 5 cm dai bordi della piastrella. Definiamo

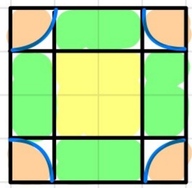
$X :=$ "n° di piastrelle toccate" a valori in $\{1,2,3,4\}$

$P(X=1) = \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4}$

$P(X=2) = \frac{10^2 + 4\cdot 5\cdot 10}{20^2} = \frac{1}{2}$

$P(X=4) = \frac{\pi 5^2}{20^2} = \pi/16$

$P(X=3) = 1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{16}\right) = \frac{4-\pi}{16}$



Calcoliamo la f.d.r e la media

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1/4 & 1\le t<2 \\ 3/4 & 2\le t<3 \\ 1-\pi/16 & 3\le t<4 \\ 1 & t\ge 4 \end{cases}$$

$E(X) = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{4-\pi}{16} + 4\cdot\frac{\pi}{16} = \cong 2,2$

ESERCIZIO Andrea e Bruno giocano 7 partite di ping-pong. La probabilità che Andrea vinca è 0,6. Calcolare:
- La probabilità che Andrea vinca 5 partite
- La probabilità che Andrea vinca almeno 5 partite
- Quante partite vince in media Andrea

Consideriamo l'evento come delle prove di Bernoulli:

$X :=$ "Andrea vince n partite" $\quad X \sim Bi(7, 0{,}6)$

1) $P(X=5) = \binom{7}{5} 0{,}6^5\, 0{,}4^2$
2) $P(X\ge 5) = \sum_{i=5}^{7} \binom{7}{i} 0{,}6^i\, 0{,}4^{7-i}$
3) $E(X) = np = 7\cdot 0{,}6 = 4{,}2$

ESERCIZIO Andrea gioca il 22 sulla ruota di Milano. Calcolare:
- La probabilità che Andrea vinca alla 3ª estrazione.

- La probabilità che Andrea vinca entro la 3ª estrazione.
- La probabilità che Andrea vinca entro la 40-esima estrazione
- La probabilità che Andrea vinca entro la 60-esima estrazione sapendo che da 50 estrazioni non vince
- Il numero di estrazioni affinché sia sicuro al 90% di vincere

X: "n° di estrazioni affinché a cui Andrea partecipa" $\sim \mathcal{G}(p)$

$$p = \binom{89}{4} \Big/ \binom{90}{5} = 1/18$$

- $P(X=3) = \left(\frac{17}{18}\right)^2 \frac{1}{18}$
- $P(X \le 3) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{17}{18}\right)^{i-1} \frac{1}{18}$
- $P(X \le 40) = 1 - P(X > 40) = 1 - \sum_{k=41}^{\infty} P(X=k)$

  ↳ 40 insuccessi in 40 estrazioni

  $= 1 - (1-p)^{40} = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{40}$ $\Big\}$ $P(X>k) = (1-p)^k$, $P(X \le k) = 1-(1-p)^k$
- $P(X \le 60 \mid X > 50) = P(X \le 10)$
- $K^*: P(X \le K^*) \ge 0{,}9 \rightarrow K^* \ln 17/18 \le \ln 0{,}1 \rightarrow K^* \ge \ln 0{,}1 / \ln 17/18$

ESERCIZIO Consideriamo un help desk con una media 20 telefonate all'ora. Calcolare:
- La probabilità che in 5 minuti non arrivino telefonate
- La probabilità che in 5 minuti arrivino al massimo 3 telefonate.

X = "n° di telefonate in 5'" $\sim \mathcal{P}(5/3)$

- $P(X=0) = e^{-5/3}$
- $P(X \le 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-5/3} \left(\frac{5}{3}\right)^k \frac{1}{k!}$

ESERCIZIO Consideriamo un mazzo di carte da 40 carte con 4 semi. A, B, C e D giocano a scopone. Calcolare la probabilità che A abbia 3 ori in mano (10) (per oro si intende una carta di quadri, quindi 10 in totale).

X: "n° di ori in mano a A" $\sim$ Iperg $(40, 10, 10)$

$$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}}{\binom{40}{10}}$$ combinazioni di 7 carte "cattive"

$\hookrightarrow$ combinazioni totali

combinazioni di 3 carte buone

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N} = 10 \cdot \frac{10}{40} = 2,5$$

ESERCIZIO Andrea e Bruno giocano a dadi. Se esce 1, 2, 3 A dà a B 2€, se esce 4, 5 A dà a B 5€ e se esce 6 B dà ad A α€. Calcolare α affinché il gioco sia equo.

$X :=$ "Vincita di Bruno" $\to$ gioco equo se $E(X)=0$

X a valori in $\{2, 5, -\alpha\} \to E(X) = \dots = \frac{16-\alpha}{6} = 0 \to \alpha = 16$ €.

$P(x_i) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$

ESERCIZIO Sia X a valori in $\{-1, 0, 1, 2\}$ con probabilità $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$. Che valori e con quale probabilità li assume $Y = g(X) = X^2$?

$Y \in \{0, 1, 4\}$, $P(Y=0) = P(X=0) = 0.2$

$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0.4$

$P(Y=4) = P(X=2) = 0.4$

22/03/20

ESERCIZIO Si consideri:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)^2 & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si trovi il valore di c affinché f sia una densità, la f.d.r, il quantile v_α, la $P(X>2 \mid X>\frac{2}{3})$, la media e la varianza.

1) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^3 c(x-1)^2 dx = \dots = \frac{8}{3}c \Rightarrow c = \frac{3}{8}$

2) $f(x) = \frac{3}{8}(x-1)^2 \, I_{(1,3)}(x) \Rightarrow F = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$. Per $t<1$ $F(t)=0$ e per $t \geq 3$ $F(t)=1$. Calcoliamo il centro: $F(t) = \int_1^t f(x)dx = \dots = \frac{(t-1)^3}{8}$

3) $\alpha = F(x_\alpha) = \frac{(x_\alpha-1)^3}{8} \Rightarrow x_\alpha = 1 + 2\sqrt[3]{\alpha}$

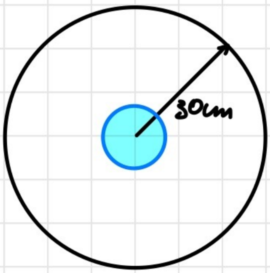
4) $P(X>2 \mid X>\frac{3}{2}) = \frac{P(\{X>2\}\cap\{X>\frac{3}{2}\})}{P(X>\frac{3}{2})} = \frac{P(X>2)}{P(X>\frac{3}{2})} = \frac{1-F(2)}{1-F(\frac{3}{2})} = \dots = \frac{8}{9}$

5) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^3 x f(x)\,dx = \dots = \frac{5}{2}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \dots = \frac{32}{5}$

$\hookrightarrow$ $\text{var } X = \frac{32}{5} - \frac{25}{4} =$

ESERCIZIO Sia il bersaglio in figura di raggio $r = 30$ cm. Sia X la distanza dal centro di una freccetta (la freccetta non può mancare). Calcolare la densità, f.d.r, mediana, media e varianza di X.



$$F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ ? & 0 \le t < 30 \\ 1 & t \ge 30 \end{cases} \longrightarrow F(t) = P(X \le t) = \frac{\pi t^2}{\pi r^2} = \frac{t^2}{30^2}$$

$f(t) = F'(t) = \frac{2}{30^2} t \, I_{(0;30)}(x)$

mediana: $\bar{x} : P(X \le \bar{x}) = 0{,}5 \to \frac{\bar{x}^2}{30^2} = 0{,}5 \to \bar{x} = 15\sqrt{2}$

$E(x) = \int_0^{30} x f(x)\,dx = \dots = 20$; $E(x^2) = \int_0^{30} x^2 f(x)\,dx = \dots = 450$

$\text{var } X = 50$

ESERCIZIO Il tempo di vita di una lampadina segue la distribuzione esponenziale. Sapendo che il tempo di vita medio è 1500h, calcolare 1) $P(X<2000h)$ 2) $P(X>1000h)$ 3) $P(X>3000h \mid$ ha già funzionato per 1000h). Esprimere tutto in Kh (Kilo-ore).

$\lambda = \frac{3}{2} \to E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

1) $P = 1 - e^{-\frac{4}{3}}$

2) $P = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$

3) poiché vale l'assenza di memoria: $P(X>3 \mid X>1) = P(X>2) = e^{-\frac{4}{3}}$

ESERCIZIO Consideriamo un componente con tempo di vita (in Kh) abbia f.d.r $F(t) = \left(1 - \frac{1}{(t+1)^3}\right) I_{(0;+\infty)}(t)$. Conviene comprarlo nuovo o usato? Qual è la durata media? Sempre in Kh

1) Calcoliamo la durata media del componente:

$$f(x) = F'(t) = \frac{3}{(x+1)^4} I_{(0,+\infty)}(x)$$
$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \dots = 1/2$$

2) Calcoliamo l'intensità di guasto: $\lambda(t) = f_X(t) / 1-F_X(t) = \dots = \frac{3}{t+1}$.
Poiché $\lambda(t)$ è decrescente, conviene comprarla usata!

ESERCIZIO Consideriamo un componente con intensità di guasto

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2-t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 3 \\ t-2 & 3 < t \end{cases}$$

determinare la f.d.r e la probabilità che duri meno di 2000 h.

$$F_X = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} I_{(0,+\infty)}(t) \rightarrow \int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \begin{cases} 2t - t^2/2 & t \le 1 \\ t + 1/2 & 1 < t < 3 \\ t^2 - 2t + 5 & t \ge 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-2t + \frac{t^2}{2}} & 0 \le t \le 1 \\ 1 - e^{-t - 1/2} & 1 \le t \le 3 \\ 1 - e^{-t^2 + 2t - 5} & t \ge 3 \end{cases} \Rightarrow P(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-5/2}$$

ESERCIZIO Un'azienda produce barattoli da 200 g di confettura. La macchina ha una varianza di 0,8 g. Qual è la probabilità che in un barattolo ci siano meno di 199 g? Determinare μ^* tale che la probabilità che un barattolo sia sottopeso sia 0,017 (1,7%).

1) $X \sim \mathcal{N}(200, 0{,}8) \rightarrow \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$. Poiché non riusciamo a integrare φ, dobbiamo standardizzare:

$$P(X < 199) = P\left(\frac{X-200}{\sqrt{0{,}8}} < \frac{199-200}{\sqrt{0{,}8}}\right) = P(Z < -1{,}12) = \Phi(-1{,}12) = 1 - \Phi(1{,}12)$$
$$= 1 - 0{,}86864 = 0{,}13136$$

2) $\Phi(-v) = 1 - 0{,}017 = 0{,}983 \rightarrow -v = 2{,}12$

$$\Rightarrow \frac{199 - \mu^*}{\sqrt{0{,}8}} = -2{,}12 \rightarrow \mu^* = 199 + 2{,}12\sqrt{0{,}8} = 200{,}9$$

29/03/21

ESERCIZIO Ad un helpdesk arrivano un numero di telefonate che segue la distribuzione di Poisson. Indipendentemente dalle altre, ogni telefonata può essere una richiesta di informazioni (30%) o di assistenza (70%). Mediamente ci sono λ telefonate al giorno. Siano

X = n° telefonate al giorno $\sim Poiss(\lambda)$
Y = n° telefonate per info

Calcolare la probabilità congiunta e la marginale di Y. Che distribuzione è Y?

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$(Y|X=k) \sim Bin(k,p) \rightarrow P(Y=h|X=k) = \binom{k}{h} p^h q^{k-h}$$

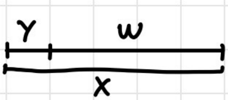
$$\hookrightarrow P(X=K, Y=H) = P(Y=H|X=K)P(X=K) = \begin{cases} 0 & h > K \\ \binom{k}{h} p^h q^{k-h} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} & 0 \le h \le K \end{cases}$$

$$P(Y=h) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, Y=h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{k!}}{h!(k-h)!} p^h q^{k-h} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{\cancel{k!}} =$$

$$= \frac{p^h e^{-\lambda}}{h!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{h-k}\lambda^k}{(k-h)!} = \frac{\lambda^h p^h e^{-\lambda}}{h!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^j\lambda^j}{j!} = \frac{(\lambda p)^h}{h!}e^{-\lambda p}$$

$\hookrightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

ESERCIZIO Il numero di telefonate X arrivate ad un centralino dalle 10 alle 11 segue la distribuzione di Poisson. Presa Y pari al numero di telefonate tra le 10 e le 10.20, qual è la probabilità $P(Y=h|X=n)$?



INDIPENDENTI

$\rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda/3)$, $W \sim \mathcal{P}(\frac{2}{3}\lambda)$

$$P(Y=h \mid X=n) = \frac{P(Y=h, X=n)}{P(X=n)} = \frac{P(Y=h, W=n-h)}{P(X=n)}$$
$$= \frac{P(Y=h)P(W=n-h)}{P(X=n)} = \dots = \frac{n!}{h!(n-h)!}\left(\frac{1}{3}\right)^h\left(\frac{2}{3}\right)^{n-h}$$

12/04/21

ESERCIZIO Consideriamo un tratto di strada con $X :=$ "il numero di incidenti in un mese" $\sim Poiss(\lambda)$. Ogni incidente può avere feriti con probabilità p_0. Consideriamo $Y :=$ "numero di incidenti con feriti in un mese". Qual è la distribuzione di Y.

La densità congiunta sarà:

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i \\ P(Y=j \mid X=i)P(X=i) & \text{se } j \leq i \end{cases}$$

$$P(Y=j \mid X=i)P(X=i) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$
$$= \frac{\cancel{i!}}{j!(i-j)!} \frac{\lambda^i}{\cancel{i!}} p^j (1-p)^{i-j} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda^i / j!(i-j)! \, p^j (1-p)^{i-j} e^{-\lambda}$$

Quindi la marginale per Y sarà:

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j) = \sum_{i=j}^{\infty} P(X=i, Y=j) = \dots =$$
$$= \frac{e^{-\lambda} p^j \lambda^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{p^j \lambda^j}{j!} e^{-p_0 \lambda}$$

ESERCIZIO Quattro studenti dell'università x, Andrea e Anna di architettura, Flavio e Irene di ingegneria. Sia $X :=$ "n° studenti di architettura nell'alloggio A" e $Y :=$ "n° studenti dell'università x nell'alloggio A". Costruire la densità congiunta, il coefficiente di correlazione

Sappiamo che $X \sim Bi(2, \frac{1}{2})$ e $Y \sim Bi(4, \frac{1}{2})$. Costruiamo la tabella:

X \ Y	0	1	2	3	4	
0	1/16	2/16	1/16	0	0	1/4
1	0	2/16	4/16	2/16	0	1/2
2	0	0	1/16	2/16	1/16	1/4
	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	

Per calcolare la ρ ci serve la $\text{cov}(X,Y)$:

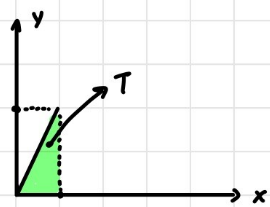
$$E(XY) = 1\cdot 1\cdot \tfrac{2}{16} + 1\cdot 2\cdot \tfrac{4}{16} + 1\cdot 3\cdot \tfrac{2}{16} + 2\cdot 2\cdot \tfrac{1}{16} + 2\cdot 3\cdot \tfrac{2}{16} + 2\cdot 4\cdot \tfrac{1}{16} = \tfrac{5}{2}$$

$$\text{cov}(X,Y) = \tfrac{5}{2} - E(X)E(Y) = \tfrac{5}{2} - 1\cdot 2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{1/2}{\sqrt{1/2 \cdot 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO Sia:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{2} x^2 y & (x,y) \in T \\ 0 & (x,y) \notin T \end{cases}$$



Le variabili sono indipendenti? Calcolare la covarianza e $P(Y < X^2)$.

$$f(x,y) = \tfrac{5}{2} x^2 y \, I_{(0,2)}(y) \, I_{(\frac{y}{2},1)}(x)$$

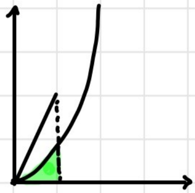
$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{5}{2} x^2 y \, I_{(0,1)}(x) \, I_{(0,2x)}(y)\,dy = \tfrac{5}{2} x^2 I_{(0,1)}(x) \int_0^{2x} y\,dy = \dots = 5x^4 I_{(0,1)}(x)$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{5}{2} x^2 y \, I_{(0,2)}(y) \, I_{(\frac{y}{2},1)}(x)\,dx = \tfrac{5}{2} y \, I_{(0,2)}(y) \int_{y/2}^{1} x^2\,dx = \dots = \tfrac{5}{6} y \left(1 - \tfrac{y^3}{8}\right) I_{(0,2)}(x)$$

$\Bigg\}$ Non sono indipendenti

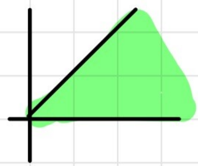
$$\left.\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y \, \tfrac{5}{6} y \left(1 - \tfrac{y^3}{8}\right) dy = \dots = \tfrac{10}{9} \\ E(X) &= \int_0^1 x \, 5x^4 \, dx = \dots = \tfrac{5}{6} \\ E(XY) &= \iint_T xy \, f(x,y) \, dx\,dy = \dots = \tfrac{20}{21} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{cov}(X,Y) = \tfrac{20}{21} - \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{10}{9}$$

$$P(Y < X^2) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) \, dx\,dy = \dots = \tfrac{5}{28}$$



ESERCIZIO Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} c e^{-x} & 0 < y < x \\ 0 \end{cases}$$



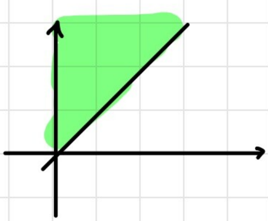
Quanto vale c? Calcolare le marginali

$$1 = \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} c e^{-x} \, dy\,dx = \int_0^{+\infty} c e^{-y} \, dy \to c = 1$$

$$f_X = \int_0^x e^{-x} \, dy = x e^{-x}$$
$$f_Y = \int_y^{+\infty} e^{-x} \, dx = e^{-y}$$

ESERCIZIO Sappiamo che $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$, X e Y indipendenti. Quanto vale $P(X < Y)$?

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ f_Y(y) &= \mu e^{-\mu y} \end{aligned} \to f_{XY}(x,y) = \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}$$



$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} \, dx\,dy = \lambda / (\lambda + \mu)$$

17/04/21

ESERCIZIO Siano X, Y v.a. indipendenti. Sia $V = X+Y$, qual è la sua funzione g.d.m.?

$$m_V = E(e^{tV}) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tV}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = m_X \cdot m_Y$$

ESERCIZIO Andrea e Bruno giocano con un dado. Se esce 1 o 2 Andrea dà 4€ a Bruno, mentre se esce 3 o 6 Bruno ne dà 2.1 € ad Andrea. Sia $X :=$ "vincita di andrea". Calcolare la media e la varianza.
Supponiamo che siano fatte 300 partite. Quanto è il guadagno complessivo di Andrea? Qual è la probabilità che Andrea concluda in positivo?

$$X = \begin{cases} -4 \to p = 1/3 \\ 2.1 \to p = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E(X) = \dots = 2/30 \\ E(X^2) = \dots = \frac{24.82}{3} \end{matrix} \quad var(X) = \dots = 8,269$$

$Y :=$ "vincita di Andrea" $\sim \mathcal{N}(20, 2480.7)$
$\hookrightarrow E(Y) = \sum E(X_n) = n \cdot 2/30 = 20$
$\hookrightarrow var(Y) = \sum var(X_i) = n \cdot 8,269 = 2480.7$

$$P(Y>0) = P\left(\frac{Y-20}{\sqrt{300 \cdot 8,269}} > -\frac{20}{\sqrt{300 \cdot 8,269}}\right) \simeq 1 - \Phi(-0,4) = \Phi(0,4)$$
$$= 0,655$$

ESERCIZIO Consideriamo degli aeroplani da 220 persone. Il 10% percento dei biglietti sono inutilizzati. Se noi vendiamo 240 biglietti, qual è la probabilità che si faccia overbooking sul singolo aereo?

$X :=$ "n° passeggeri al check-in" $\sim Bi(240, 0,9) \simeq \mathcal{N}(216, 21,6)$

$$\Rightarrow P(X \geq 221) = P\left(\frac{X-216}{\sqrt{21,6}} \geq \frac{221-216}{\sqrt{21,6}}\right) \simeq P(Z \geq 1.08) = 0,14$$

NB Se calcolassimo $P(X>220)$ otterremo 0.19. Questo è dovuto al fatto che stiamo approssimando X discreta con $\mathcal{N}$ continua. Per correggere ciò, prenderemo il valore a metà tra i due gradini, ossia 220,5 ottenendo $P(X > 220{,}5) = 0.167$. Questa approssimazione è detta correzione nel continuo.

ESERCIZIO Consideriamo un helpdesk dove arrivano due tipi di richiesta: consulenza software ($X \sim \mathcal{P}(\lambda = 90)$) e consulenza hardware ($Y \sim Poiss(\lambda = 5)$). (tutto espresso in ore).
Qual è la probabilità che in un'ora ci siano 4 chiamate per consulenza hardware? Qual è la probabilità che in un'ora arrivino al massimo 100 chiamate

$$P(Y=4) = \frac{e^{-5}\, 5^4}{4!}$$

$V = X + Y$

$P(V \leq 100) \Rightarrow V \approx \mathcal{N}(95, 95).$

$$\hookrightarrow P(V \leq 100) \simeq P\left(\frac{V-95}{\sqrt{95}} < \frac{100-95}{\sqrt{95}}\right) = P(Z < 0{,}51) = 0{,}6949$$

$$P(V \leq 100) \simeq P(V < 101) = P\left(\frac{V-95}{\sqrt{95}} < \frac{101-95}{\sqrt{95}}\right) = P(Z < 0{,}62) = 0{,}7291$$

$$P(V \leq 100) \simeq P\left(\frac{V-95}{\sqrt{95}} < \frac{100{,}5-95}{\sqrt{95}}\right) = P(Z < 0{,}57) = 0{,}7156$$

correzione nel continuo

ESERCIZIO Le telefonate di Andrea hanno una durata di distribuzione esponenziale e in media durano 2 minuti. Oggi Andrea deve fare 100 telefonate, qual è la probabilità che ci impieghi almeno 3.5 h?

$$X = \sum T_i \approx \mathcal{N}\left(100\, E(T) = 200,\ 100 \frac{1}{E(T)^2} = 400\right)$$

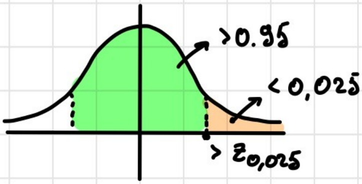
$$P(X < 210) = P\left(\frac{X-200}{\sqrt{400}} < \frac{210-200}{400}\right) \simeq P(Z < 0{,}5) = 0{,}691$$

ESERCIZIO Sia la v.a X con densità $f_X(x) = \frac{3}{2} x^2$ e a valori in $(-1, 1)$. Determinare $\bar{n}$ tale per $n \geq \bar{n}$
$P(|\bar{X}_n| < 0{,}01) > 0{,}95$

$E(X)=0 \Rightarrow var(X)=E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2 \frac{3}{2} x^2 dx = 3/5$

per n grande $\bar{X}_n \approx \mathcal{N}(0, \frac{3}{5n})$

↳ $P(|\bar{X}_n| < 0{,}01) = P\left(\frac{|\bar{X}_n|}{\sqrt{3/5n}} < \frac{0{,}01}{\sqrt{3/5n}}\right) \simeq P\left(|Z| < 0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{5n}{3}}\right) > 0{,}95$



$z_{0,025} = 1{,}96 \Rightarrow 0{,}01\sqrt{\frac{5n}{3}} > 1{,}96$

$\vdots$

$n > \frac{3}{5}(196)^2$

26/04/21

FUNZIONE GAMMA

$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t>0$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \cancel{[-x^t e^{-x}]_0^{+\infty}} + t\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = t\,\Gamma(t)$

↳ $\Gamma(n) = (n-1)!$ se $n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ← per altri valori è difficile da calcolare analiticamente

DENSITÀ GAMMA

cost. di normalizzazione

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\; x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$

$\Rightarrow \alpha = 1 \quad X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$\Rightarrow m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\; x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx =$

$= \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\; x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx$

$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(t-\lambda)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}$

↳ densità di Γ su $\mathbb{R} \Rightarrow 1$

$\Rightarrow E(X) = m_X'(0) = \alpha/\lambda$ ← generalizzazione esponenziale

$\Rightarrow var = \alpha/\lambda^2$

Siano $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ indipendenti:

$$m_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX} e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right) E\left(e^{tY}\right) = \lambda^{\alpha+\beta} / (\lambda - t)^{\alpha+\beta}$$
$$\Rightarrow \quad X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$$

Sia $Y = aX$ con $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$$m_Y(t) = E\left(e^{taX}\right) = m_X(at) = \lambda^\alpha / (\lambda - at)^\alpha = \left(\frac{\lambda / a}{\lambda/a - t}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda/a)$$

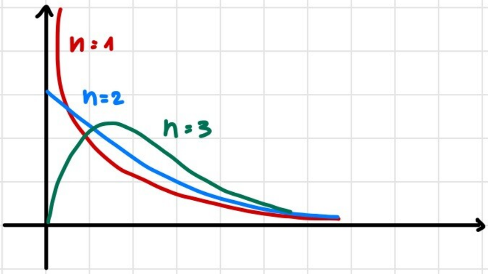
DENSITÀ CHI-QUADRATO

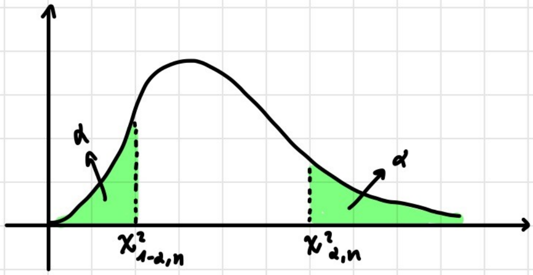
$$X = Z^2 \quad \Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 2\,\Phi(\sqrt{t}) - 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$f_X(t) = \frac{2\,\Phi'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t 2\pi}} e^{-t/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{t}\, e^{-t/2} \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Se supponiamo di avere $Z_1, \dots, Z_n$

$$Y = \sum_i Z_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$$
$$\Rightarrow \quad \chi^2(n) + \chi^2(m) = \chi^2(n+m)$$



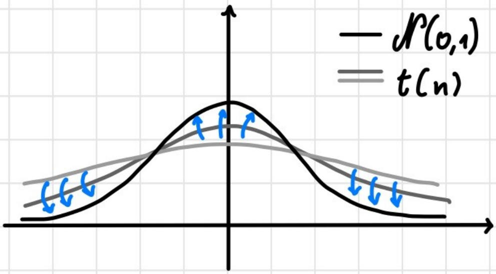


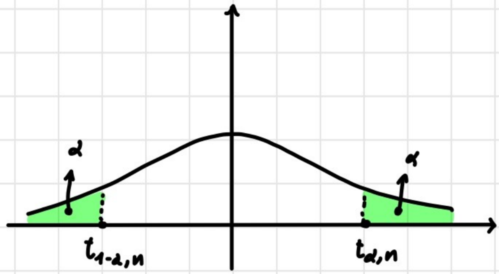
DENSITÀ DI STUDENT Siano Z e $X_i \sim \chi^2(n)$ indipendenti

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{X_i/n}} \qquad T_n \sim t(n) \qquad -T_n = \frac{-Z}{\sqrt{X_i/n}} = T_n \leftarrow \text{simmetrica}$$

$E(T_n) = 0 \quad \forall n > 1$ $\qquad\qquad$ $var(T_n) = n/_{n-2} \quad \forall n > 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n \le t) = \Phi(t)$ ← all'aumentare dei gradi di libertà n la t(n) tende ad una gaussiana std





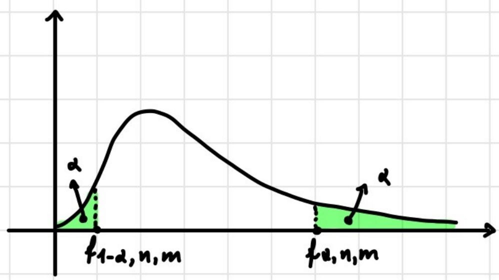
$t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$

$\Rightarrow P(T_n > t_{1-\alpha,n}) = P(T_n < t_{\alpha,n})$

DENSITÀ DI FISHER

Siano $X_n \sim \chi^2(n)$ e $Y_m \sim \chi^2(m)$

$$F_{n,m} = \frac{X_n/n}{\underbrace{Y_m/m}_{\text{v.a.} > 0}} \qquad F_{n,m} \sim F(n,m)$$



$P(F_{n,m} > f_{\alpha,n,m}) = \alpha$

$1 - \alpha = 1 - P(F_{n,m} > f_{\alpha,n,m}) =$

$= 1 - P\left(\frac{X_n/n}{Y_m/m} > f_{\alpha,n,m}\right) =$

$= 1 - P\left(\frac{Y_m/m}{X_n/n} < \frac{1}{f_{\alpha,n,m}}\right) = 1 - P\left(F_{m,n} < \frac{1}{f_{\alpha,n,m}}\right)$

$\Rightarrow f_{1-\alpha,n,m} = 1/f_{\alpha,m,m}$

VETTORI GAUSSIANI

Consideriamo il caso $n=2$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, C\right) \qquad C = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}[\underline{x} - \underline{\mu}]^T C^{-1} [\underline{x} - \underline{\mu}]} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x-\mu_x \;\; y-\mu_y] \begin{bmatrix} 1/\sigma_y^2(1-\rho^2) & -\rho/\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2) \\ -\rho/\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2) & 1/\sigma_x^2(1-\rho^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} [x-\mu_x \;\; y-\mu_y] \begin{bmatrix} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{y-\mu_y}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} =$$

se $\rho = 0$

$$\hookrightarrow = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

ESERCIZIO Sia $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}_x, C_{\vec{x}})$ con

$$\vec{\mu}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1) Determinare $\bar{x}$ tale che $P(X_1 + X_2 < \bar{x}) = 0.25$
2) Siano $Y_1 = X_1 - 2X_2 + X_3 + 3$ e $Y_2 = 2X_1 - X_2 + \alpha X_3$, $\vec{Y}$ è gaussiano? Esiste α tale che Y_1 e Y_2 siano scorrelati? Per $\alpha = 2$ Y_1, Y_2 sono indipendenti?
3) Calcolare $P(2Y_1^2 + Y_2^2 \leq 24)$ $(\alpha = 2)$.

1. $E(X_1 + X_2) = 3$, $\text{var}(X_1, X_2) = 12$
$0.95 = P\left(Z < \bar{x} - 3/\sqrt{12}\right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \bar{x} = 3 + 1,645\sqrt{12}$

2. $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$ con $A \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi $\vec{Y}$ gauss. con

$\vec{\mu}_y = \underline{0}$ e $C_{\vec{y}} = AC_{\vec{x}}A^T = \cdots = \begin{bmatrix} 6 & 2-\alpha \\ 2-\alpha & 4\alpha^2 - 8a + 12 \end{bmatrix}$

Y_1, Y_2 scorrelati per $\alpha = 2$. Inoltre per $\alpha = 2$ sono anche indipendenti per proprietà dei vettori gaussiani

3. $Y \sim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\right)$

standardizzate

$$P(2Y_1^2 + Y_2^2 \leq 24) = P\left(\frac{2Y_1^2 + Y_2^2}{12} \leq 2\right) = P\left(\frac{Y_1^2}{6} + \frac{Y_2^2}{12} \leq 2\right) =$$
$$= P(Z^2 + Z^2 \leq 2) = P(\chi^2(2) \leq 2) =$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = 1 - \frac{1}{e}$$

ESERCIZIO Siano:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z_1 - Z_2 \\ Z_2 - Z_1 \\ Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$$

1) Calcola $\mu_{\vec{Y}}$ e $C_{\vec{Y}}$.
2) Y_1 e Y_3 sono indipendenti?
3) Calcolare la densità di $Y_1^2 + Y_2^2$.
4) Calcolare:

$$P\left(Y_3 / \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} \leq 1/\sqrt{2}\right)$$

1. $\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \underline{0}$, poiché $\vec{Y} = A\vec{Z}$ con $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{Y}$ è gaussiano, quindi

$$C_{\vec{Y}} = A C_{\vec{Z}} A^T = \cdots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Y_1 e Y_3 sono indipendenti perché $\vec{Y}$ è vettore gaussiano
3. $Y_1^2 + Y_2^2 = (Z_1 - Z_2)^2 + [-(Z_1 - Z_2)]^2 = Y_1^2 + Y_1^2 = 2Y_1^2$.

$$Y_1/\sqrt{\tfrac{1}{2}} = Z \Rightarrow \sqrt{2}\,Y_1 = Z \rightarrow 2Y_1^2 = Z^2 \sim \chi^2(1)$$

4. $P\left(Y_3/\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} \leq 1/\sqrt{2}\right) = P\left(\frac{Y_3}{\sqrt{2}}/\sqrt{2Y_1^2} \leq 1\right) = P\left(Z/\sqrt{\underbrace{2Y_1^2}_{\sim \chi(1)}} \leq 1\right) = P(T_1 < 1)$

10/05/21

ESERCIZIO Consideriamo una v.a. $X \sim Poiss(\lambda)$. Stabilire lo stimatore di λ ottenuto con il metodo dei momenti, lo stimatore di massima verosomiglianza e confrontarli calcolandone lo MSE, distorsione e quant'altro.

MOMENTI: $E(X) = \lambda \Rightarrow \hat{\Lambda}_m = \bar{X}$

$E(\hat{\Lambda}_m) = E(X) = \lambda \Rightarrow$ NON DISTORTO

$MSE(\hat{\Lambda}_m) = var(\hat{\Lambda}_m) = \lambda/n \to 0 \Rightarrow$ consistente in m.q e debole

VEROSOMIGLIANZA:

$$L(\underline{x}, \lambda) = \prod e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} I_{\{0,1,2\dots\}}(x_i) =$$
$$= e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i} / \prod x_i!$$
$$\ell(\underline{x}, \lambda) = -n\lambda + (\ln\lambda \sum x_i - \ln \prod x_i!)$$
$$\ell'(\underline{x}, \lambda) = -n + \sum x_i / \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \sum x_i / n \Rightarrow \hat{\Lambda}_L = \bar{X}$$

Per il semplice fatto che $\hat{\Lambda}_L$ è MLE si ha che è:

- asintoticamente non distorto
- asintoticamente normale (non sempre vero)
- consistente debolmente

ESERCIZIO Sia $X \sim Poiss(\lambda)$ il numero di messaggi che Andrea riceve in un'ora. Calcolare $P(X=0)$ sapendo che nelle ultime 40 ore ha ricevuto 56 messaggi

$P(X=0) = K(\lambda) = e^{-\lambda}$; $\hat{\Lambda} = \bar{X}$ MLE $\Rightarrow \hat{\lambda} = 56/40 = 1,4$

Se usiamo il metodo dei momenti: $\hat{K}(\lambda) = e^{-\bar{X}}$

Se usiamo la verosomiglianza e l'invarianza: $\hat{K}(\lambda) = e^{-\bar{X}}$

$\Rightarrow$ La stima di $P(X=0)$ è $e^{-1.4}$.

ESERCIZIO Consideriamo una popolazione con densità:

$$f_X(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}(x)$$

Scrivere lo stimatore del metodo dei momenti, lo MLE e le varie proprietà di questi.

MOMENTI: $E(X) = \int_0^1 x\,\theta x^{\theta-1}\,dx = \theta\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \theta/_{\theta+1} \Rightarrow \theta = E(X)/_{1-E(X)}$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_n = \bar{x}/_{1-\bar{x}}$ stimatore del metodo dei momenti

VEROSOMIGLIANZA:

$L(\underline{x}, \theta) = \prod \theta x_i^{\theta-1} \cancel{I_{(0,1)}(x)} = \theta^n (\prod x_i)^{\theta-1}$

$l(\underline{x}, \theta) = n \ln\theta + (\theta-1)\ln\prod x_i$

$l'(\theta) = n/_\theta + \ln\prod x_i = 0 \Rightarrow \theta = -n/_{\ln\prod x_i}$

$l''(\theta) = -n/_{\theta^2} < 0 \quad \forall\theta \Rightarrow$ abbiamo max

$\Rightarrow \hat{\Theta}_L = -n/_{\ln\prod x_i} = n/_{\Sigma(-\ln x_i)}$

$Y = g(X) = -\ln(X) \Rightarrow X = e^{-Y} \Rightarrow f_Y(y) = \theta(e^{-y})^{\theta-1} I_{(0,1)}(e^{-y})\,e^{-y} =$

$= \theta e^{-\theta y} I_{(0,+\infty)}(y) \sim \mathcal{E}(\theta)$

$E(\hat{\Theta}_L) = E(n/_{\Sigma Y_i}) = n\,E(1/_{\Sigma Y_i}) = n\int_0^{+\infty} 1/_s\ \theta^n/_{\Gamma(n)}\, s^{n-1} e^{-\theta s}\,ds = \dots =$

$\hookrightarrow S = \Sigma Y_i$

$= n/_{n-1}\,\theta \Rightarrow$ stimatore distorto

$E(\hat{\Theta}_L^2) = E(n^2/_{S^2}) = n^2(1/_{S^2}) = n^2\int_0^{+\infty} 1/_{s^2}\ \theta^n/_{\Gamma(n)}\, s^{n-1} e^{-\theta s}\,ds = \dots =$

$= n^2/_{(n-1)(n-2)}\,\theta^2$

$var(\hat{\Theta}_L) = E(\hat{\Theta}_L^2) - E(\hat{\Theta}_L)^2 = \dots = n^2/_{(n-1)^2(n-2)}\,\theta^2 \to 0$

$MSE_{\hat{\Theta}_L}(\theta) = var(\hat{\Theta}_L) + (n/_{n-1}\theta - \theta)^2 = \dots = (n^2+n-2)\theta^2/_{(n-1)^2(n-2)}$

ESERCIZIO Sia $X \sim U(0,\theta)$, calcolare lo stimatore del metodo dei momenti, MLE e le proprietà.

$E(X) = \theta/_2 \rightarrow \hat{\Theta}_M = 2\bar{X}$

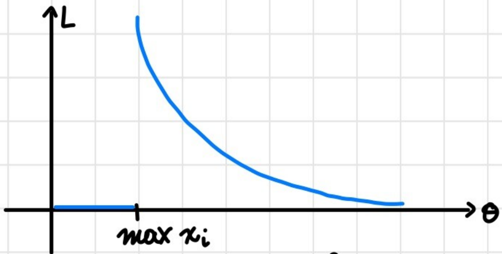
$E(\hat{\Theta}_M) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = \theta \Rightarrow$ non distorto

$MSE(\hat{\Theta}_M) = var(2\bar{X}) = 4/_n\,var(\bar{X}) = \theta^2/_{3n}$

$L(\underline{x}, \theta) = \prod 1/_\theta \underbrace{I_{[0,\theta]}(x_i)} =$

$\prod I_{[0,\theta]}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \le \theta\ \forall i \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \theta \ge \max x_i \\ 0 \end{cases}$

$= 1/_{\theta^n}\, I_{[\max x_i, +\infty)}(\theta)$



$\Rightarrow \hat{\Theta}_L = \max X_i$

$T = \max X_i \to E(T) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ (t/\theta)^n & 0 \le t \le \theta \\ 1 & t > \theta \end{cases} \qquad f_T(t) = n t^{n-1}/\theta^n \, I_{[0,\theta)}(t)$

$E(\hat{\Theta}_L) = E(T) = \int_0^\theta t \, n t^{n-1}/\theta^n \, dt = \frac{n}{n+1}\theta$

$E(\hat{\Theta}_L^2) = \dots = \frac{n}{n+2}\theta^2$

$var(\hat{\Theta}_L) = \dots = \frac{n}{(n+1)(n+2)}\theta^2$

$MSE(\hat{\Theta}_L) = var(\hat{\Theta}_L) + (E(\hat{\Theta}_L) - \theta)^2 = \dots = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$

ESERCIZIO Sia $X \sim N(m, v)$. Scrivere gli stimatori di (m, v) usando il metodo dei momenti e la massima verosomiglianza.

$E(X) = m \Rightarrow \hat{M} = m$ ← media nota, sennò $\bar{X}$

$E(X^2) = v + m^2 \to v = E(X^2) - m^2 \Rightarrow \hat{V} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - m^2$

$L(\underline{x}, m, v) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\{-(x_i-m)^2/2v\} =$

$= \frac{1}{(2\pi v)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2v}\sum(x_i-m)^2\}$

$l(\underline{x}, m, v) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi v) - \frac{1}{2v}\sum(x_i-m)^2$

↳ $\partial/\partial m \; l(\underline{x}, m, v) = \frac{1}{\cancel{2}v}(\cancel{2}\sum(x_i-m)) = \frac{1}{v}\sum(x_i-m) = \frac{1}{v}(-nm + \sum x_i)$

$\Rightarrow \hat{M} = \bar{X}$

↳ $\partial/\partial v \; l(\underline{x}, m, v) = -\frac{n}{2}\frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2}\sum(x_i-m)^2 = -\frac{n}{2v^2}\left[v - \frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2\right]$

$\Rightarrow \hat{V} = \frac{1}{n}\sum(X_i-m)^2 = S_n$

se m non è nota dobbiamo risolvere il sistema:

↳ $\begin{cases} \partial/\partial m \; l(\underline{x}, m, v) = \frac{1}{v}(-nm + \sum x_i) = 0 \\ \partial/\partial v \; l(\underline{x}, m, v) = -\frac{n}{2v^2}\left[v - \frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2\right] = 0 \end{cases}$

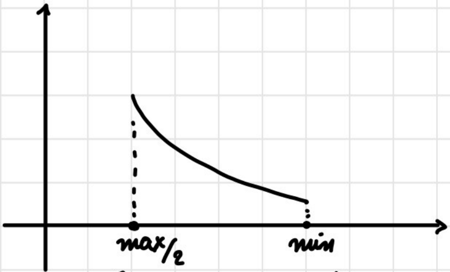
ESERCIZIO Sia $X \sim [\theta, 2\theta]$. Trovare i vari stimatori e le varie proprietà.

$f_X(x) = \frac{1}{\theta} I_{[0, 2\theta]}(x) \Rightarrow L = \prod \frac{1}{\theta} I_{[\theta, 2\theta]}(x) = \frac{1}{\theta^n} \prod I_{[\theta, 2\theta]}(x)$

$\to \prod I_{[\theta, 2\theta]}(x) = \begin{cases} 1 & \theta \le x \le 2\theta \\ 0 & \end{cases} =$

$= \begin{cases} 1 & \max x_i/2 \le \theta \le \min x_i \\ & \end{cases}$

$= \frac{1}{\theta^n} I_{[\max x_i/2, \min x_i]}(\theta)$



↳ $\hat{\Theta}_L = \max x_i / 2$

$E(X) = \frac{3}{2}\theta \to \theta = \frac{2}{3} E(X) \Rightarrow \hat{\Theta}_M = \frac{2}{3}\bar{X}$

17/05/21

ESERCIZIO Sia $X \sim f(x) = e^{\theta - x} I_{[\theta, +\infty)}(x)$. Trovare lo stimatore del metodo dei momenti, lo MLE e loro varie proprietà.

MOMENTI:

$E(X) = \int_\theta^{+\infty} x e^{\theta - x} dx = \int_0^{+\infty} (y+\theta) e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y} dx + \theta \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1 + \theta$

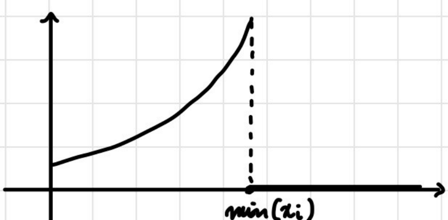
$\Rightarrow \theta = E(X) - 1 \Rightarrow \hat{\Theta}_M = \bar{X} - 1$

$E(\hat{\Theta}_M) = E(\bar{X}) - 1 = \theta \Rightarrow$ NON DISTORTO

$MSE(\hat{\Theta}_M) = var_\theta(\hat{\Theta}_M) = var(\bar{X} - 1) = \frac{1}{n} \overbrace{var(X)}^{1} = \frac{1}{n}$

VEROSOMIGLIANZA:

$L(\bar{x}, \theta) = e^{n\theta - \Sigma x_i} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta, +\infty)}(x_i) = e^{n\theta - \Sigma x_i} I_{(0, \min(x_i))}(\theta)$



$\hat{\Theta}_L = \min x_i$

$\Rightarrow$ poiché possiamo scrivere $X = \theta + Y \quad Y \sim \mathcal{E}(1)$

$E_\theta(\hat{\Theta}_L - \theta) = E_\theta(\min x_i - \theta) = E(\min Y_i)$

$= \frac{1}{n} \Rightarrow E(\hat{\Theta}_L) = \theta + \frac{1}{n} \Rightarrow$ DISTORTO

$MSE_\theta(\hat{\Theta}_L) = var(\hat{\Theta}_L) + (\frac{1}{n})^2 = \frac{2}{n^2}$

ESERCIZIO La durata della vita di un elettronico segue la la distribuzione $f(x, \theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2}$. Consideriamo un campione molto ampio, stimare θ, $P(X > 2) = K(\theta)$ e ricavare un intervallo di confidenza.

$L(\bar{x},\theta) = 2^n \theta^n \prod x_i \, e^{-\theta \sum x_i} \Rightarrow \ell(\bar{x},\theta) = n\ln 2 + n \ln\theta + \ln \prod x_i + \theta \sum x_i$

$\partial/\partial\theta \; \ell(\bar{x},\theta) = n/\theta - \sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \theta = n/\sum x_i^2$

$\partial^2/\partial\theta^2 \; \ell(\bar{x},\theta) = -n/\theta^2 < 0 \Rightarrow \theta = n/\sum x_i^2$ è massimo $\Rightarrow \hat{\Theta}_L = n/\sum x_i^2$

$\ln f(x,\theta) = \ln 2 + \ln\theta + \ln x - \theta x^2 \Rightarrow \partial/\partial\theta \ln f(x,\theta) = 1/\theta - x^2 \; ; \; \partial^2/\partial\theta^2 = -1/\theta^2$

$E((1/\theta - X^2)^2) = -E(1/\theta^2) = -1/\theta^2$

$\hookrightarrow \hat{\Theta}_L - \theta \approx \mathcal{N}(0, \theta^2/n)$

$\hat{\Theta}_L - \theta / \sqrt{\theta^2/n} \approx \mathcal{N}(0,1)$ q.p $\Rightarrow \theta \in \hat{\Theta}_L \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\Theta}_L^2/n}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\theta x^2} \Rightarrow K(\theta) = P(X>2) = e^{-4\theta}$

$\hookrightarrow K(\hat{\Theta}_L) - P(X>2) \approx \mathcal{N}(0, 16\theta^2 e^{-8\theta}/n) \Rightarrow P(X>2) \geq e^{-4\hat{\Theta}_L} - z_\alpha \sqrt{16\hat{\Theta}_L e^{-4\hat{\Theta}_L}/n}$

ESERCIZIO Sia $X \sim Be(p)$. Sappiamo che $\hat{P}_L = p$. Trovare un intervallo di confidenza per $p/1-p$.

$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x} \Rightarrow \ln f(x,p) = x\ln p + (1-x)\ln(1-p)$

$\Rightarrow \partial/\partial p \, f(x,p) = x/p - 1-x/1-p$

$\Rightarrow \partial^2/\partial p^2 f(x,p) = -x/p^2 - 1-x/(1-p)^2$

$E((\partial/\partial p \ln f(x,\theta))^2) = -E(-x/p^2 - 1-x/(1-p)^2) = 1/p + 1/1-p = 1/p(1-p)$

$\Rightarrow \hat{P}_L - p \approx \mathcal{N}(0, p(1-p)/n)$

$K(p) = p/1-p \Rightarrow K'(p) = 1/(1-p)^2 \Rightarrow K(\hat{P}_L) - 1/1-p \approx \mathcal{N}(0, p/(1-p)^3 n)$

ESERCIZIO Sia $n = 12$, $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\bar{x}_{12} = 35.3$, $s_{12}^2 = 2.6$. Scrivere un i.c. al 90% per μ.

$t_{0,05,11} = 1.7959 \Rightarrow \mu \in 35.3 \pm 1.7959\sqrt{2,6/12}$

ESERCIZIO Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, 13)$. Costruire un i.c. al 95% per μ che non sia largo più di 2 unità. Qual è la dimensione del campione?

$\mu \in [a;b] \Rightarrow b-a < 4 \Rightarrow 2 z_{0,025}\sqrt{13/n} < 4 \Rightarrow n > 13(1.96/2)^2$

ESERCIZIO Si consideri un gruppo di votanti che vota A o B. Si stimi un i.c. all'$(1-\alpha)100 = 90\%$ del ballottaggio di larghezza

0.04 e si calcoli quanto deve essere grande il campione.

$$\bar{X} \pm z_{0.05} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \Rightarrow 2 \cdot z_{0,05} \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} < 0,04$$

$$\hookrightarrow 2 \cdot 1.645 \sqrt{1/4 / n} < 0,04 \Rightarrow n > \left(1,645/0,04\right)^2$$

abbiamo preso il centro dell'intervallo di valori ammissibili

ESERCIZIO Dopo un sondaggio di 583 persone sappiamo che $p \in (0,5206;\ 0,6012)$. Con quale confidenza è stato ottenuto

i.c. bern. simmetrico

$$\bar{X} = 0,5609 \Rightarrow p \in 0.5609 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0.5609 \cdot 0.4591}{583}} = 0.6012$$

$$\vdots$$

$$z_{\alpha/2} = \dots \Rightarrow \alpha = \dots$$

ESERCIZIO Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $n = 10$, $\bar{x}_{10} = 124$ e $s^2_{10} = 3,21$. Scrivere un i.c. superiore al 90% per σ^2.

$$\sigma^2 \leq 9 \cdot 3,21 / \chi^2_{0,9,9} = 9 \cdot 3,21 / 4,1682$$

ESERCIZIO Sia $X \sim U(0, \theta)$. Abbiamo 4 osservazioni: 1.2, 2.9, 3.7, 3.9. Costruire un i.c. al 95 % per θ.

MLE di θ

$$Y = \frac{X}{\theta} \sim U(0,1) \Rightarrow Q = \max X_i / \theta \quad \text{Q.P.}$$

$$\Rightarrow P(a < Q) = 1 - \alpha$$

$\hookrightarrow$ lim. sup. lo sappiamo: 3.9

$$Y_1, \dots, Y_n \sim U(0,1),\ V = \max Y_i \Rightarrow F_V(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(V > a) = 1 - \alpha \Rightarrow P(V < a) = \alpha \Rightarrow a^n = \alpha \Rightarrow a = \sqrt[n]{\alpha}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = P\left(\sqrt[4]{\alpha} < \max X_i / \theta\right) \Rightarrow \theta \in \left(\max X_i,\ \max X_i / \sqrt[4]{\alpha}\right) =$$

$$= \left(3.8;\ 3.8 / \sqrt[4]{0.05}\right)$$

24/05/21

ESERCIZIO Una macchina produce boccette di profumo da 20 cl. Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la quantità di profumo inserito. Sia un campione da

9 bottigliette, c'è evidenza statistica al 5% che la macchina sia starata? Si sa:

$$\sum x_i = 183.2\,cl \quad ; \quad \sum x_i^2 = 3732,14\ cl$$

$H_0: \mu = 20\,cl$ vs. $H_1: \mu \neq 20\,cl$, $\alpha = 0.05$

$$T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \Rightarrow t_0 = \frac{20.35 - 20}{\sqrt{0.3753/9}} = 1,741$$

$\Rightarrow$ rifiuto H_0 se $|t_0| > t_{0.025,8} = 2.305 \rightarrow$ ACCETTO H_0

Un p-value approssimato è compreso tra il 10 e il 20% (basta cercare due quantili tra i quali t_0 è compresa).

Noi NON rifiutiamo H_0 se $|t_0| < t_{\alpha/2}$. Esplicitando:

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \right| < t_{\alpha/2} \iff \mu_0 \in \left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\sqrt{S^2/n} \ ; \ \bar{X} + t_{\alpha/2}\sqrt{S^2/n} \right)$$

Intervalli di confidenza e verifica d'ipotesi sono, quindi, collegati

ESERCIZIO Stabilire se una moneta è truccata. Considera di avere un campione di 200 lanci (120 è croce) e $\alpha = 10\%$

$H_0: p = 1/2$ vs. $H_1: p \neq 1/2$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - 1/2}{\sqrt{1/2 \cdot 1/2 / n}} \rightarrow z_0 = \frac{0.6 - 1/2}{\sqrt{1/4 / 200}} = 2.83$$

$\Rightarrow$ rifiuto H_0 se $|z_0| > z_{0.05} = 1.645 \Rightarrow$ RIFIUTO H_0

p-value $= 2(1 - \Phi(|z_0|)) \simeq 0,5\% \Rightarrow$ la moneta è sicuramente stata truccata!

ESERCIZIO Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 2)$, $H_0: \mu = 100$ vs. $H_1: \mu = 101$ ipotesi e $\alpha = 5\%$. Sia $R = \{\underline{x} : \bar{x} > K\}$ regione critica. Quanto vale K con un campione da $n = 8$ elementi? E con $n = 50$?

$n = 8$: $\quad \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 1/4) \Rightarrow 0.05 = P_{H_0}(\bar{X} > K) = P_{H_0}\left(\frac{\bar{X} - 100}{1/2} > \frac{K - 100}{1/2} \right) =$

$$= P\left(Z > \frac{K-100}{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow K = 100 + 1.645 \cdot \tfrac{1}{2} = 100{,}823$$

$\Rightarrow$ Rifiutiamo H_0 se $\bar{x} > 100{,}823$

$P(\text{err II}^\circ) = P_{H_1}(\bar{X} < 100.823) = \cdots \simeq 36\%$.

$n = 50$: $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = \tfrac{1}{25}) \Rightarrow 0.05 = P_{H_0}(\bar{X} > K) = \cdots = P_{H_0}\left(Z > \frac{K-100}{\sqrt{1/25}}\right)$

$$\Rightarrow K = \cdots = 100{,}329$$

$\Rightarrow$ Rifiutiamo H_0 se $\bar{x} > 100{,}329$

$P(\text{err II}^\circ) = P_{H_1}(\bar{X} < 100{,}329) = \cdots \simeq 0{,}04\%$.

ESERCIZIO Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 3)$, $H_0: \mu = 4$ vs. $H_1: \mu > 4$ e $\alpha = 5\%$. Scrivere la funzione potenza. Supponendo $n = 12$, calcolare la probabilità di commettere un errore in ipotesi di $\mu = 5$. Determinare n affinché la precedente probabilità non superi il 10%.

1. Rifiuto H_0 se $\dfrac{\bar{x}-4}{\sqrt{3/n}} > 1.645 \Rightarrow 1 - \beta(\mu) = P_\mu\left(\dfrac{\bar{X}-4}{\sqrt{3/n}} > 1.645\right) =$

$$= P_\mu\left(\bar{X} > 4 + 1.645\sqrt{3/n}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{3/n}} > \frac{4 + 1.645\sqrt{3/n} - \mu}{\sqrt{3/n}}\right) =$$

$$= P\left(Z > 1.645 + \frac{4-\mu}{\sqrt{3/n}}\right)$$

2. $P_{\mu=5}(\text{err}) = \beta(5) = P\left(Z < 1.645 + {}^{4-5}/\sqrt{1/4}\right) = 36\%$

3. $P\left(Z < 1.645 + {}^{4-5}/\sqrt{3/n}\right) < 0.1 \rightarrow 1.645 - \sqrt{n/3} < -1.282 \Rightarrow n = \cdots$

ESERCIZIO Sia una fabbrica che produce $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pezzi al giorno. Si teme che l'installazione di un dispositivo danneggi la varianza. Prima dell'istallazione $\sigma^2 \leq 500$. Dopo l'installazione si considera un campione con $n = 8$, $\sum x_i = 4931$ e $\sum x_i^2 = 3.045.893$. Dire se c'è evidenza all'1% del degrado della performance.

$H_0: \sigma^2 \leq 500$ vs. $H_1: \sigma^2 > 500$, $S^2 = 933.98$

$\rightarrow$ Rifiuto H_0 se $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2, n-1} \rightarrow \dfrac{7 \cdot 933.98}{500} = 13{,}08 \overset{?}{>} 18{,}47$

$\Rightarrow$ ACCETTO H_0 ; il p-value sta tra 10% e 5%.

ESERCIZIO Andrea si diverte a postare tweet. Sia X il numero di tweet al giorno, $X \sim Poiss(\lambda = 4)$. Negli ultimi 60 giorni ne ha postati 273, 4,55 al giorno. C'è evidenza al 5% che stia esagerando?

Usiamo il TCL per approssimare X. $H_0: \lambda = 4$ vs. $H_1: \lambda > 4$

$Z_0 = \dfrac{\bar{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 / n}} \Rightarrow$ rifiuto H_0 se $Z_0 > Z_{0.05} \rightarrow \quad 0.55\sqrt{15} \overset{?}{>} 1.645$

$\Rightarrow$ ACCETTO H_0

ESERCIZIO Si sospetta che un antistaminico aumenti la pressione. Dati i dati, c'è evidenza al 5%?

X: PRE	103	106	107	113	111	107	110	108	108	112
Y: POST	108	121	112	122	110	114	115	112	102	120

$W_i = Y_i - X_i \rightarrow \bar{W} = 5.4$; $\bar{S}^2 = 34,711$

$H_0: \mu_W = 0$ vs. $H_1: \mu_W \neq 0$

$\Rightarrow$ rifiuto H_0 se $t_0 > t_{0,05,9} \Rightarrow \quad 5.4 / \sqrt{34,711/10} = 2,89 \overset{?}{>} 1,83$

$\Rightarrow$ RIFIUTO H_0 $\rightarrow$ c'è evidenza che la pressione si alza

ESERCIZIO Un allevatore di vitelli vuole provare un nuovo vitello. Divide i suoi 40 vitelli in due gruppi: al primo da il solito mangime ed ha ottenuto un aumento di peso di 15 Kg con dev. std. 2,5 Kg ; al secondo hanno usato il nuovo mangime e hanno ottenuto un incremento di 16.2 Kg e dev. std. di 2.4 Kg. Il primo gruppo è di 22 vitelli e il secondo di 18. C'è evidenza all'1% che il nuovo mangime sia migliore?

Approssimiamo e supponiamo le varianze uguali.

$H_0: \mu_B = \mu_A$ vs. $H_1: \mu_B > \mu_A$

$S_p^2 = \dfrac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} = 6,031 \rightarrow t_0 = \dfrac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = 1,537$

$\Rightarrow$ rifiuto H_0 se $t_0 > t_{0,005,\,38} \in [1,68 ; 1,69] \Rightarrow$ ACCETTO H_0