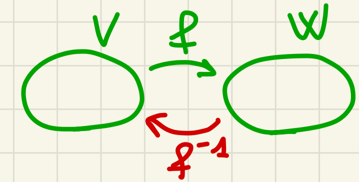
Th. Isomorfismo, Rappresentazione, Rango

Prof.
Marco
Compagnoni

APPLICAZIONI LINEARI:

- Teorema di Isomorfismo — SEZIONE 5.3
- Teorema di rappresentazione — SEZIONE 5.4
- Teorema di nullità più rango — SEZIONE 5.5
- Regola cambio base

Isomorfismi e Teorema di Isomorfismo (5.3)



- $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ è isomorfismo sse è biunivoca.
- f isomorfismo $\Rightarrow$ f^{-1} è isomorfismo
- f, g isomorfismi $\Rightarrow$ $f+g,\ t\cdot f$ in generale non sono isomorfismi

  $f \circ g$ è un isomorfismo
- $\Omega_{\mathbb{K}}$ = insieme degli spazi vettoriali su campo $\mathbb{K}$

Diciamo che la coppia $(V, W) \in \Omega_{\mathbb{K}} \times \Omega_{\mathbb{K}}$ è in relazione di isomorfismo se V, W sono spazi isomorfi, cioè esiste un isomorfismo $f : V \to W$. In tal caso indichiamo $V \overset{f}{\sim} W$.

V su campo $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ $\Rightarrow$ $V \overset{\phi_B}{\sim} \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K})$

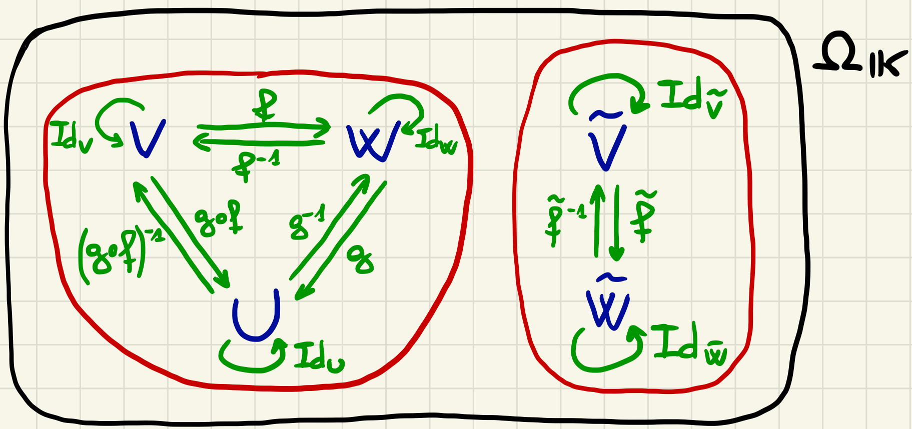
Proposizione 5.13

La relazione di isomorfismo è di equivalenza.

DIM: i) Riflessività: $Id_V : V \to V$ è un isomorfismo $\Rightarrow V \overset{Id_V}{\simeq} V$;

ii) Simmetria: siano $V \overset{f}{\simeq} W \Rightarrow W \overset{f^{-1}}{\simeq} V$;

iii) Transitività: siano $V \overset{f}{\simeq} W$, $W \overset{g}{\simeq} U \Rightarrow V \overset{g \circ f}{\simeq} U$. $\square$



$[V] = [W] = [U] = \{U, V, W\}$

$[\tilde{V}] = [\tilde{W}] = \{\tilde{V}, \tilde{W}\}$

oss: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Vogliamo caratterizzare le classi di isomorfismo.

PROPOSIZIONE 5.14

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f \in Hom(V, W)$.

Sia $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \subseteq V$ ed $f(U) = \{f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_m)\} \subseteq W$. Allora:

i) se U sono generatori di V, f è suriettiva sse $f(U)$ sono generatori di W;

ii) f è iniettiva sse $f(U)$ è indipendente per ogni U indipendente;

iii) se U è base di V, f è isomorfismo sse $f(U)$ è base di W.

$V = W = Mat(3, 1; \mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad f_A : V \to W$.

$U = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è base di V.

$f_A(U) = \left\{ AE_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

- $f_A(U)$ non è indipendente, poiché $AE_{31} = AE_{11} + AE_{21}$.
$\Rightarrow$ f_A non è iniettiva. Infatti.

$$Ker(f_A) = Ker(A) = Ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \neq \{\underline{0}\}.$$

- $\mathcal{L}(f_A(U)) = \mathcal{L}(AE_{11}, AE_{21}) \neq W$ $\Rightarrow$ $f_A(U)$ non è un insieme di generatori del codominio $\Rightarrow$ f_A non è suriettiva.

Calcoliamo i vettori che non appartengono a $Im(f_A) = C(A)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in Im(f_A) \text{ sse } a+b=c.$$

Ad esempio, $f_A^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \emptyset$.

- $f_A(U)$ non è base di W $\Rightarrow$ f_A non è isomorfismo.

TEOREMA DI ISOMORFISMO (TH. 5.15) (in dimensione finita!!!)

V, W f.g. su $\mathbb{K}$. $V \sim W$ sse $\dim(V) = \dim(W)$.

DIM: caso banale $V = \{\underline{0}\}$ ESERCIZIO (vedi note). Sia $V \neq \{\underline{0}\}$:

$\Rightarrow$ sia $V \overset{f}{\sim} W$ e $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V $\Rightarrow$

$f(B_V) = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è base di W $\Rightarrow \dim(V) = n = \dim(W)$;

$\Leftarrow$ $\dim V = \dim W = n \Rightarrow V \overset{\phi_{B_V}}{\sim} \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}) \overset{\phi_{B_W}^{-1}}{\sim} W \Rightarrow V \overset{\phi_{B_W}^{-1} \circ \phi_{B_V}}{\sim} W$. $\blacksquare$

$V = \mathbb{R}[x]_2$, $W = S(2;\mathbb{R})$, $B_2 = \{1, x, x^2\}$, $\xrightarrow{f}$ $B_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \dim(V) = 3 = \dim(W) \Rightarrow V \overset{f}{\sim} W$

$f = \phi_{B_W}^{-1} \circ \phi_{B_2} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\qquad P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow$

$f(P) = \phi_{B_W}^{-1}\left(\phi_{B_2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\right) = \phi_{B_W}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) =$

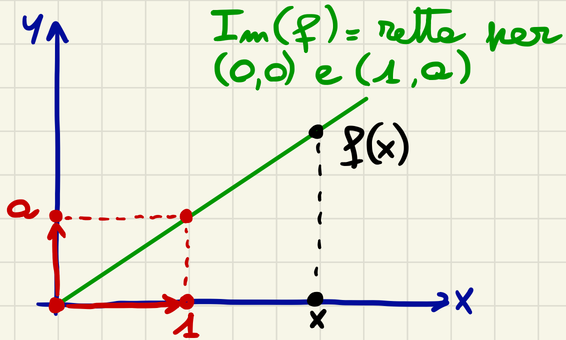
$$= a_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1/2 \\ a_1/2 & a_2 \end{bmatrix}$$

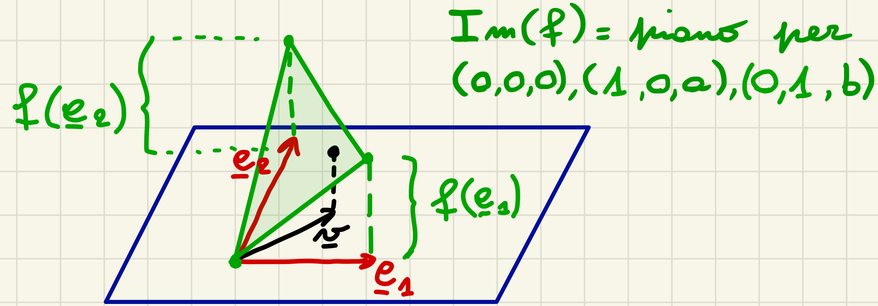
Teorema di Rappresentazione

Teorema di Interpolazione (Proposizione 5.18)

V, W f.g. su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\} \subseteq W \Rightarrow$

esiste un'unico $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tale che $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ per $i = 1, \dots, n$.





$f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\mathcal{B}_1 = \{1\} \xrightarrow{f} \{a\} \subset \mathbb{R}$

$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$

$f(0) = 0$

$f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \xrightarrow{f} \{a, b\} \subset \mathbb{R}$

$\underline{v} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2 \Rightarrow$

$f(\underline{v}) = t_1 f(\underline{e}_1) + t_2 f(\underline{e}_2) = at_1 + bt_2$

DIM: • ESISTENZA: per ogni $\underline{v} \in V$ esiste unico la decomposizione

$$\underline{v} = t_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + t_n \cdot \underline{v}_n$$

Funzione interpolante: $f(\underline{v}) = t_1 \cdot \underline{w}_1 + \dots + t_n \cdot \underline{w}_n \Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ è ben definito;} \\ \bullet\ f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad \forall i. \end{cases}$

• LINEARITÀ: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \underline{v}_i \quad \underline{\tilde{v}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i \cdot \underline{v}_i \Rightarrow$

$$f(t\underline{v} + \tilde{t}\underline{\tilde{v}}) = f\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{v}_i + \tilde{t} \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i \underline{v}_i\right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (t t_i + \tilde{t}\tilde{t}_i)\underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (t t_i + \tilde{t}\tilde{t}_i)\underline{w}_i =$$

$$= t \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{w}_i + \tilde{t} \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i \underline{w}_i = t \cdot f(\underline{v}) + \tilde{t} \cdot f(\underline{\tilde{v}}).$$

• UNICITÀ: sia $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ t.c. $\tilde{f}(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \Rightarrow$

$$\tilde{f}(\underline{v}) = \tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \tilde{f}(\underline{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{w}_i = f(\underline{v})$$

$\Rightarrow \tilde{f} = f.$

$\boxtimes$

Matrice Rappresentativa (Definizione 5.20)

V, W f.g. su $\mathbb{K}$. $\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$.

$$\phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}) \qquad \text{mappa delle componenti}$$
$$f \longmapsto F|_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}$$

$$F|_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} = [\, f(\underline{v}_1)|_{\mathcal{B}_W} \mid \dots \mid f(\underline{v}_n)|_{\mathcal{B}_W} \,].$$

Esempio 5.21

- $O_{VW}|_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} = [\, O_{VW}(\underline{v}_1)|_{\mathcal{B}_W} \mid \dots \mid O_{VW}(\underline{v}_n)|_{\mathcal{B}_W} \,] =$
$$= [\, \underline{0}_W|_{\mathcal{B}_W} \mid \dots \mid \underline{0}_W|_{\mathcal{B}_W} \,] = [\, 0_{m1} \mid \dots \mid 0_{m1} \,] = 0_{mn}$$

- $Id_V|_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_V} = [\, Id_V(\underline{v}_1)|_{\mathcal{B}_V} \mid \dots \mid Id_V(\underline{v}_n)|_{\mathcal{B}_V} \,] = [\, \underline{v}_1|_{\mathcal{B}_V} \mid \dots \mid \underline{v}_n|_{\mathcal{B}_V} \,] = I_n$

- $V = W = \mathbb{K}[x]_2 \qquad \mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\} \qquad \mathcal{B}' = \{x^2, x, 1\}$

$$\frac{d}{dx}\Big|_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}'} = \left[\frac{d}{dx}(1)\Big|_{\mathcal{B}'} \;\; \frac{d}{dx}(x)\Big|_{\mathcal{B}'} \;\; \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{\mathcal{B}'} \right] =$$
$$= \left[\, 0|_{\mathcal{B}'} \;\; 1|_{\mathcal{B}'} \;\; 2x|_{\mathcal{B}'} \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• $V = Mat(n,1;\mathbb{K})$, $W = Mat(m,1;\mathbb{K})$, $A \in Mat(m,n;\mathbb{K}) \Rightarrow f_A \in Hom(V,W)$

$$\Rightarrow F_A|_{\mathcal{B}_{n1}\mathcal{B}_{m1}} = [\, f_A(E_{11})|_{\mathcal{B}_{m1}} \;\cdots\; f_A(E_{n1})|_{\mathcal{B}_{m1}} \,] = [\, AE_{11}|_{\mathcal{B}_{m1}} \cdots AE_{n1}|_{\mathcal{B}_{m1}} \,] =$$

$$= [\, AC(1)|_{\mathcal{B}_{m1}} \cdots AC(n)|_{\mathcal{B}_{m1}} \,] = [\, AC(1) \cdots AC(n) \,] = A \, .$$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE (TEOREMA 5.22)

V, W f.g. su $\mathbb{K}$. $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ basi. $f \in Hom(V,W)$.

i) $F|_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W}$ è l'unica matrice t.c. $f(\underline{v})|_{\mathcal{B}_W} = F|_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W} * \underline{v}|_{\mathcal{B}_V}$;

ii) $\phi_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali ;

iii) se $g \in Hom(U,V) \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}_U\mathcal{B}_W}(f \circ g) = \phi_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W}(f) * \phi_{\mathcal{B}_U\mathcal{B}_V}(g)$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}_V}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & f(\underline{v}) \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}_W}"] \\
\underline{v}|_{\mathcal{B}_V} \arrow[r, "F_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W}"] & f(\underline{v})|_{\mathcal{B}_W}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}_V}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}_W}"] \\
Mat(n,1;\mathbb{K}) \arrow[r, "F_{\mathcal{B}_V\mathcal{B}_W}"] & Mat(m,1;\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

$$V = W = \mathbb{K}[x]_2 \qquad \mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\} \qquad \mathcal{B}' = \{x^2, x, 1\}$$

$$\frac{d}{dx}\Big|_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'} = \left[\frac{d}{dx}(1)\Big|_{\mathcal{B}'} \quad \frac{d}{dx}(x)\Big|_{\mathcal{B}'} \quad \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{\mathcal{B}'} \right] =$$

$$= \left[0|_{\mathcal{B}'} \quad 1|_{\mathcal{B}'} \quad 2x|_{\mathcal{B}'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) = a_1 + 2a_2 x \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right)\Big|_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\Big|_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'} * \left(a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2\right)\Big|_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

REMIND: $A * \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot A_{c(i)}$

DIM: i) se $\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ $\Rightarrow$ per ogni $\underline{v} \in V$ vale

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{v}_i \quad \Rightarrow \quad f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(\underline{v}_i) \quad \Rightarrow$$

$$f(\underline{v})_{|\mathcal{B}_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i \, f(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i \, F_{C(i)} = F * \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = F * \underline{v}_{|\mathcal{B}_V} .$$

Supponiamo che A soddisfi $f(\underline{v})_{|\mathcal{B}_W} = A \underline{v}_{|\mathcal{B}_V} \Rightarrow$

$$F_{C(i)} = f(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} = A E_{i1} = A_{C(i)} \quad \forall i \Rightarrow A = F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} .$$

ii) $\phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(t_1 f_1 + t_2 f_2)_{C(i)} = (t_1 f_1 + t_2 f_2)(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} =$

$$= (t_1 f_1(\underline{v}_i) + t_2 f_2(\underline{v}_i))_{|\mathcal{B}_W} = t_1 \cdot f_1(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} + t_2 \cdot f_2(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} =$$

$= t_1 \cdot \phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f_1)_{C(i)} + t_2 \cdot \phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f_2)_{C(i)}$ $\quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}$ è lineare.

Biunivocità: data $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, per il teorema di interpolazione esiste un'unica $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tale che

$f(\underline{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \underline{w}_j \Rightarrow$ esiste un'unica f t.c. $f(\underline{v}_i)_{|\mathcal{B}_W} = A_{C(i)}$

$\Rightarrow$ esiste un'unica f tale che $\phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) = A$. $\blacksquare$

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

COROLLARIO 5.25

$\dim(V) = n$, $\dim(W) = m \Rightarrow \dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = mn$.

COROLLARIO 5.26

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ è invertibile sse $F_{|B_V B_W}$ è invertibile.

In tal caso $\phi_{B_W B_V}(f^{-1}) = F_{|B_V B_W}^{-1}$.

PROPOSIZIONE 5.27

i) $\mathrm{Ker}(f) \underset{\sim}{\overset{\phi_{B_V}}{}} \mathrm{Ker}(F_{|B_V B_W})$;

ii) $\mathrm{Im}(f) \underset{\sim}{\overset{\phi_{B_W}}{}} C(F_{|B_V B_W})$.

$V = \mathbb{R}[x]_1 \quad W = S(2;\mathbb{R}) \quad f: V \to W \quad f(P(x)) = \begin{bmatrix} P(1) & P(0) \\ P(0) & P(-1) \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_V = \{1, x\}, \quad \mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} = \left[f(1)_{|\mathcal{B}_W} \quad f(x)_{|\mathcal{B}_W} \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{|\mathcal{B}_W} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{|\mathcal{B}_W} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\dim(C(A)) = r(A) = \dim(Im(f)) \qquad \mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}_{Im(f)} = \left\{ \phi_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \phi_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W})) = 2 - r(F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}) = 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow Ker(f) = \{0\} \Rightarrow f$ è iniettiva.

DEFINIZIONE 5.29

i) $r(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ = rango di f;

ii) $K(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ = nullità di f.

OSS: se V, W f.g. $\Rightarrow r(f) = \dim(C(F)) = r(F)$, $K(f) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) = K(F)$

TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO (TEOREMA 5.30)

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, V f.g. $\Rightarrow \dim(V) = r(f) + K(f)$

DIM: supponiamo anche W f.g. (caso generale DISPENSE)

$F_{|B_V B_W} \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ $\quad n = \dim(V)$

$$K(f) = K(F) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) \underset{\text{R.C.}}{=} n - r(F) = \dim(V) - r(f) \qquad \blacksquare$$

COROLLARIO 5.31

i) f è iniettiva sse $r(f) = \dim(V)$;

ii) f è suriettiva sse $r(f) = \dim(W)$;

iii) f è isomorfismo sse $r(f) = \dim(V) = \dim(W)$.

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE (DEFINIZIONE 5.32)

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \ldots, \underline{v}_n'\}$ basi di V

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\, \underline{v}_1|_{\mathcal{B}'} \; \ldots \; \underline{v}_n|_{\mathcal{B}'} \,]$ = matrice di cambio base

$V = \mathbb{K}[x]_1$ $\quad \mathcal{B} = \{1, x\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{1+x, 1-x\}$ $\Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\, 1|_{\mathcal{B}'} \;\; x|_{\mathcal{B}'} \,] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\, 1+x|_{\mathcal{B}} \;\; 1-x|_{\mathcal{B}} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

OSS. : $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{\;-1}$ (LEMMA 5.35)

Regola del Cambio Base (Proposizione 5.33)

i) $\underline{v}|_{B_V'} = M_{B_V B_V'} * \underline{v}|_{B_V}$;

ii) $F|_{B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} * F|_{B_V B_W} * M_{B_V' B_V}$

Dim: rappresentiamo Id_V rispetto a $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B_V' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$

$$\phi_{B_V B_V'}(Id_V) = [Id_V(\underline{v}_1)|_{B_V'} \dots Id_V(\underline{v}_n)|_{B_V'}] = [\underline{v}_1|_{B_V'} \dots \underline{v}_n|_{B_V'}] = M_{B_V B_V'} .$$

i) $\underline{v}|_{B_V'} = Id_V(\underline{v})|_{B_V'} = \phi_{B_V B_V'}(Id_V) * \underline{v}|_{B_V} = M_{B_V B_V'} * \underline{v}|_{B_V}$;

ii) $f(\underline{v})|_{B_W'} = M_{B_W B_W'} \, f(\underline{v})|_{B_W} = M_{B_W B_W'} (F|_{B_V B_W} \, \underline{v}|_{B_V}) =$

$$= M_{B_W B_W'} F_{B_V B_W} (M_{B_V' B_V} \, \underline{v}|_{B_V'}) =$$

$$= \underline{(M_{B_W B_W'} F_{B_V B_W} M_{B_V' B_V})} \, \underline{v}|_{B_V'} .$$

Per l'unicità della matrice rappresentativa di f $\Rightarrow$

$$F_{B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} F_{B_V B_W} M_{B_V' B_V}$$

∎

$$V = W = \mathbb{K}[x]_1 \qquad \mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = \{1, x\} = \mathcal{B} \qquad \mathcal{B}'_V = \mathcal{B}'_W = \{1+x, 1-x\} = \mathcal{B}'$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f = d/dx \in \mathrm{Hom}(V, W)$$

$$F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} = \left[\frac{d}{dx} 1 \Big|_{\mathcal{B}} \quad \frac{d}{dx} x \Big|_{\mathcal{B}} \right] = \left[0|_{\mathcal{B}} \quad 1|_{\mathcal{B}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{|\mathcal{B}'_V \mathcal{B}'_W} = \left[\frac{d}{dx} (1+x) \Big|_{\mathcal{B}'} \quad \frac{d}{dx} (1-x) \Big|_{\mathcal{B}'} \right] = \left[1|_{\mathcal{B}'} \quad -1|_{\mathcal{B}'} \right] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \, F_{|\mathcal{B}\mathcal{B}} \, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = F_{|\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$$