Teorema ponte

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se per qualsiasi successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \neq x_0$ che tende a x_0 si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.
$\{f(x_n)\}$ è una successione delle immagini di f.

DIM: 1) Hp: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, Th: $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = l \ \forall x_n \to x_0$ Consideriamo una successione $x_n \to x_0$. Allora $\forall \bar{\varepsilon} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \ |x_n - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ x_n \in (x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon})$. Scelgo $\delta = \bar{\varepsilon}$. Varrà anche $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ poiché siamo nello stesso intorno $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
e quindi $\forall \bar{\varepsilon} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |f(x_n) - l| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \to x_0} f(x_n) = l$

2) Hp: $\forall x_n \to x_0 \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$ Th: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ Dimostriamo per assurdo: neghiamo Th, allora $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta \ \exists x(\delta): x(\delta) \in (x - \delta; x + \delta) - \{x_0\} \cap A$ e $|f(x(\delta)) - l| > \varepsilon$. Costruisco una successione di punti che tende a x_0 per la quale $f(x_n)$ <u>non</u> tende a l: $x_n = x(1/n)$ scegliendo $\delta = 1/n$.

1) $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}) \ \forall n \geq 1$ $\quad (|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0)$

2) per la scelta dei $x(\delta) = x(\frac{1}{n}) = x_n$ $|f(x_n) - l| > \varepsilon_0 \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \Rightarrow$ <u>ASSORDO</u>

Teorema di unicità del limite (trasportato delle succ.)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per f se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$

DIM.: CON PONTE: Per il teorema ponte abbiamo: $\forall x_n \to x_0 \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l_1$, $\forall x_n \to x_0 \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l_2$. Per l'unicità del limite di successione $l_1 = l_2$

SENZA PONTE: Per assurdo $l_1 \neq l_2$. Sia $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, allora $(l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon; l_2 + \varepsilon)$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, allora $\exists \delta_1: \forall x \in (l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap A$ si ha $|f(x) - l_1| < \varepsilon$. Idem per l_2. Scelgo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Varranno, allora, $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - l_2| < \varepsilon$. Ma, essendo i due intorni disgiunti solo per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, cadiamo in assurdo.

Teorema del confronto (trasportato delle succ.)

Siano f, g, h funzioni e x_0 un punto di accumulazione. Se $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} = l$

ES. $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

$\left.\begin{array}{ll} 0 < x < \frac{\pi}{2} & 0 < \sin(x) < x < \tan(x) \\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 & \tan(x) < x < \sin(x) < 0 \end{array}\right] \to -x < \sin x < x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

per $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\sin x < x < \tan x$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ per confr.}}$

$\hookrightarrow$ per teorema ponte $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

poiché $\frac{\sin x}{x}$ è pari, la dimostrazione vale per $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) - \{x_0\}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

per ogni successione $x_n \to 0 \Rightarrow$ costruisco $y_n = (x_n)^2 \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(y_n)}{y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$

Teorema di Cambio di variabile

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni e x_0 un punto di accumulazione per A. Se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{y \to l} g(y) = L$, allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$

$\forall x_n \to x_0 \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{f(x_n)\} \to l$. $\forall y_n \to l \ \lim_{n \to \infty} g(y_n) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = L \Rightarrow \lim_{x \to l} g(f(x)) = L$.

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=2}^{K}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{K} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{K} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{K-2} \frac{1}{j+1} - \sum_{n=2}^{K} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{j=2}^{K-2} \frac{1}{j+1}} - \cancel{\sum_{n=2}^{K-2} \frac{1}{n+1}} - \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$\hookrightarrow$ converge: confr. as. $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2-1} \Rightarrow \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \frac{1}{n^2-1}$ conv.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = [\ldots]$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = [\ldots] = +\infty$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(-1)^K}{\sqrt{2K}} \Rightarrow$ per criterio di Leibniz converge

$\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{(-1)^K}{\sqrt{2K}} & n = 2K \end{cases}$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\tan\frac{1}{n}}{10^n \ln n} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{\tan\frac{1}{n}}{10^n \ln n}\right| \sim \left|\frac{1}{n 10^n \ln n}\right| \Rightarrow$ converge abs

$0 \le \left|\frac{1}{n 10^n \ln n}\right| \le \frac{1}{10^n} \Rightarrow$ per confronto converge abs

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge abs

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right| \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ non converge abs.

$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \Rightarrow$ restrizione di $f(x) \Rightarrow f'(x) = \ldots = \frac{-2x^4+x}{2(x^4+x)^{3/2}} < 0$ definitivamente $\Rightarrow$ monotona decrescente def. $\Rightarrow$ per Leibniz converge

Limiti Notevoli

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ $\Rightarrow$ vedi 29.10.19 → T. confronto

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{2\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(y)}{y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}$ per ①

$y = \frac{x}{2}$

Limite destro/sinistro

ES.: $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ ↳ $\mathrm{sgn}(x)$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ con $g: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0} h(x) = -1$ con $h: (-\infty; 0) \to \mathbb{R}$

→ posso definire il limite solo intersecando un insieme non circolare } limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per A, allora:

- f ha LIMITE DESTRO se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0; x_0+\delta) \cap A\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
- f ha LIMITE SINISTRO se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0) \cap A\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

Relazione limite - limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se esistono limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e sono uguali

DIM: per $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\quad I(x) = (x_0-\delta; x_0+\delta) = (x-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta) \Rightarrow$ il limite esiste se i due limiti esistono.

L'unione delle definizioni sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{\delta} = \min(\delta, \bar{\delta}): \forall x \in I(x-\bar{\delta}; x+\bar{\delta})\ \ |f(x) - l| = \varepsilon \Rightarrow$ i due limiti devono essere uguali

Limite infinito

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ se:

$\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\ \ |f(x)| > M$

ES.: - $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ per teorema ponte $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$

Verifichiamo con la definizione: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\ \ f(x) < -M$ $\quad \frac{1}{x} - M < 0 \quad \frac{1-Mx}{x} < 0 \quad Mx + 1 > 0 \quad x > -\frac{1}{M} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{M}$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \forall M > 0\ \exists \bar{\delta} > 0: \forall x \in (x_0-\bar{\delta}; x_0+\bar{\delta})\ \ f(x) > M \quad x < \frac{1}{M} \quad \bar{\delta} = \frac{1}{M}$
- $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ perché limite destro e sinistro esistono ma non coincidono

Limite finito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0: \forall x > K\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$

$(\forall x < -K)$

Limite infinito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x) = \pm\infty$

$\forall M > 0\ \exists K > 0\ \ \forall x > K\ \ |f(x)| > M$

$(\forall x < -K)$

Esercizi

1) $z^6 - z^3 + 1 = 0$ $\qquad (z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$ $\qquad z^3_{1,2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\qquad z^3_1 = \dfrac{+1+\sqrt{3}i}{2}$ $\qquad z^3_2 = \dfrac{+1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1+\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{n}\right) = \dots$$

$$\left.\begin{matrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1-\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{5/3\,\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{5/3\,\pi-2k\pi}{n}\right) = \dots$$

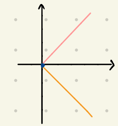
2) $z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}\, z\, |z|$ $\qquad \boxed{z=0}$

$$\frac{z^2}{|z|^2} + 1 - \frac{\sqrt{2}\, z}{|z|} = 0 \qquad \frac{z}{|z|} = t \implies t^2 - \sqrt{2}\, t + 1 = 0$$

$z = 0$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \implies z = |z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \implies z = |z|\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$



3) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n! + (2n)!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n^n} + \frac{(2n)!}{n^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n} = [\text{crit. rapp.}] = +\infty$