...

11.1 ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO

Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione:

$$E_c = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\text{Momento d'inerzia}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

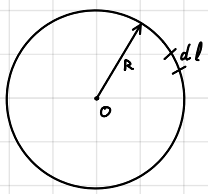
Abbiamo così definito il momento d'inerzia. Esso è uno scalare, dipende dall'asse e dalla distribuzione della massa. Si misura in $Kg \cdot m^2$.

Se passiamo dal discreto al continuo, otteniamo che:

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV \underset{\text{omogeneo}}{=} \rho \int r^2 dV$$

ESERCIZIO

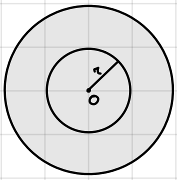
Calcoliamo il momento d'inerzia di un anello sottile omogeneo:



$$I_z = \int r^2 dm = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda\, dl = R^2 \lambda \int_0^{2\pi R} dl = R^2 \lambda\, 2\pi R = MR^2$$

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

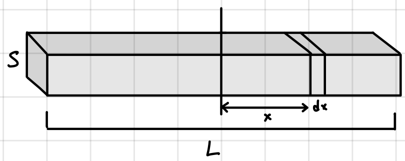
Calcoliamo I_z di un disco sottile omogeneo



$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma\, 2\pi r\, dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \sigma 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \sigma \cancel{2}\pi \frac{R^4}{\cancel{4}_2} = \frac{\sigma\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2}(\sigma\pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

$$dm = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi r\, dr \qquad \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

Calcola I_z di un'asta di lunghezza L e sezione S (omogenea)



$$I_z = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho S\, dx = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \rho S \left[\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right] =$$
$$= \rho S \frac{L^3}{12} = (\rho S L)\frac{L^2}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

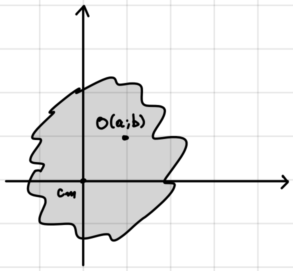
Il momento d'inerzia è additivo, rendendo quindi possibile la suddivisione in più sottoparti.

11.1.1 TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il momento d'inerzia I di un corpo che ruota intorno ad un asse O è dato dal momento d'inerzia calcolato con asse passante nel centro di massa più un termine dipendente dal quadrato della distanza tra O e il centro di massa.

$$I_O = I_{cm} + Md^2$$

Dimostrazione



$$I_O = \sum m_i r_{iO}^2 = \sum m_i[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2] = \sum m_i[x_i - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2] =$$
$$= \sum m_i(x_i^2+y_i^2) + \sum m_i(a^2+b^2) - \sum 2m_i a x_i - \sum 2m_i b y_i =$$
$$= I_{cm} + Md^2 - \cancel{2aMx_{cm}} - \cancel{2bMy_{cm}} = I_{cm} + Md^2$$

$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = 0$ $\quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} = 0$

Sistema di riferimento del centro di massa !!

Usando il precedente teorema nel calcolo dell'energia cinetica abbiamo che:

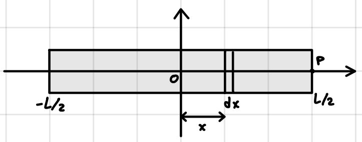
$$E_c = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 d^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$\downarrow$

assomiglia molto al teorema di König

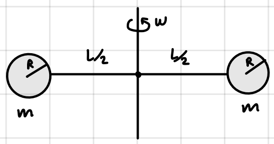
ESERCIZIO

Calcolare I_z di un'asta sottile omogenea (L, M)



$$I_{zO} = \int x^2 dm = \dots = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \dots = \frac{1}{12}ML^2$$

Calcola I_P: $\quad I_P = I_{cm} + Md^2 \underset{O\equiv CM}{=} \frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \dots = \frac{1}{3}ML^2$



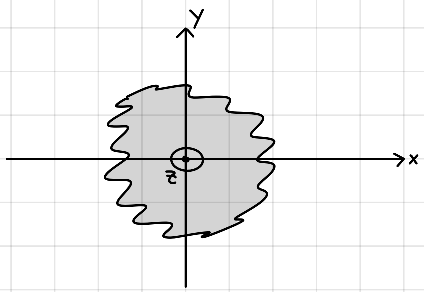
(asta con m trasc.)

$$I_{cm}^{SF.} = \frac{2}{5} mR^2$$
$$I_z^{SF} = \frac{2}{5} mR^2 + m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2$$
$$I_z = 2 I_z^{SF.}$$

11. 1. 2 TEOREMA ASSE PERPENDICOLARE

Nel caso di corpi piani, la somma di due momenti d'inerzia rispetto a due assi del piano è uguale al momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse perpendicolare passante per l'intersezione degli assi.

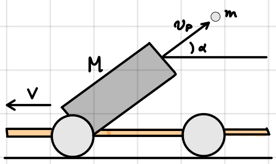
Dimostrazione:



$$I_x = \sum m_i y_i^2 \rightarrow I_x + I_y = \sum m_i y_i^2 + \sum m_i x_i^2 = \sum m_i(x_i + y_i) = \sum m_i d_i = I_z$$
$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 3 (12)



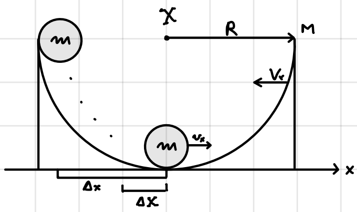
$V = ?$ $\quad \vec{I} = ?$

$$\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt} = \begin{cases} \frac{dP_x}{dt} = 0 \\ \frac{dP_y}{dt} = N - (m+M)g \end{cases}$$

P_x cost $\Rightarrow$ $m V_P \cos\alpha - MV = 0 \rightarrow V = \frac{m V_P \cos\alpha}{M}$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta\vec{P} = \vec{P}_F - \cancel{\vec{P}_0} = \vec{P}_F^M + \vec{P}_F^m = M\vec{V} + m\vec{v_P} = -MV\hat{u}_x + m v_P (\cos\alpha\, \hat{u}_x + \sin\alpha\, \hat{u}_y) = \dots = m\, v_P \sin\alpha\, \hat{u}_y$$

ESERCIZIO 2 (12)



$\Delta X = ?$ $\quad v_x = ?$ $\quad V_x = ?$

$$\vec{F}^E = \vec{N} + \vec{P} = (M+m)\vec{a}_{cm} = (M+m)\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \begin{cases} (M+m)\frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} = 0 \rightarrow v_{cm} \text{ cost} \\ (M+m)\frac{d^2 y_{cm}}{dt^2} = N - (M+m)g \end{cases}$$

$v_{cm\,x} = 0 \rightarrow X_{cm}(t)$ cost $\rightarrow X_{cm} = \frac{mx + MX}{m+M} = \frac{-mR}{m+M}$

$\tau.$ $\quad x(\tau) = X(\tau) \Rightarrow \quad X_{cm}(\tau) = \frac{\cancel{(m+M)}X(\tau)}{\cancel{m+M}} = X(\tau) = -\frac{mR}{m+M} \Rightarrow \Delta X = -\frac{mR}{m+M}$

$v_{cm\,x}(\tau) = \frac{m v_x - M V_x}{m+M} = 0 \rightarrow m v_x = M V_x$

$E_0 = E_\tau \rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 \rightarrow mgR = \frac{1}{2} M V^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)$

$\hookrightarrow V_x = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$

$v_x = \dots = \sqrt{\frac{2gMR}{M+m}}$