1) Data $\mathcal{C}: xy - y - x - 3 = 0$. Trova tipo e riduci in forma canonica.

1) $C = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \mathcal{C}: \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * C * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$(\mathcal{C}: X^T A X + 2B^T X + c = 0)$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = Tr(A) = 0 \\ I_2 = det(A) = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \text{[rif Tabella]} \rightarrow \boxed{\text{IPERBOLE EQUILATERA}}$$

$I_3 = det(C) = \dots = 1 \neq 0 \Rightarrow$ non è una conica degenere

2) Troviamo le trasformazioni che rendono $\mathcal{C}$ in f.c.:

ROTAZIONE. Diagonalizzo A: $[\dots] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ($\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$)

Scrivo $A = Q^T D Q$ e trovo Q: $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q) = 1 \Rightarrow Q \in SO(V)$

$$X = QX' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathcal{C}: (QX')^T A QX' + 2B^T QX' + c = 0 \\ X'^T \underbrace{Q^T A Q}_{D} X' + 2\underbrace{B^T Q}_{\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 0]} X' + c = 0 \end{array}\right\} \mathcal{C}: \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} - \frac{2x'}{\sqrt{2}} - 3 = 0$$

TRASLAZIONE: $\begin{cases} x' = \tilde{x} + a \\ y' = \tilde{y} + b \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}: \frac{1}{2}\tilde{x}^2 + \tilde{x}a + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\tilde{y}^2 - \tilde{y}b - \frac{1}{2}b^2 - \sqrt{2}\tilde{x} - \sqrt{2}a - 3 = 0$

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} + \underbrace{\tilde{x}(a - \sqrt{2}) - b\tilde{y}}_{\begin{cases} a - \sqrt{2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases}} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \sqrt{2}a - 3 = 0$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} + 1 - 0 - 2 - 3 = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{8} + \frac{\tilde{y}^2}{8} = 1}$$

$X = Q(\tilde{X} + T) = Q\tilde{X} + T \Rightarrow \tilde{X} = (X - T) \cdot Q^T \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) - \sqrt{2} \\ \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$

2) Classifica e riduci in forma canonica $\mathcal{C}: x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad (X^T A X + 2B^T X + c = 0)$

1) $C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_1 = Tr(A) = 2 \\ I_2 = |A| = 0 \\ I_3 = |C| = \dots = -4 \end{array}\right\} \boxed{\mathcal{C} \text{ è una parabola}}$

2) Troviamo le trasformazioni che rendono $\mathcal{C}$ in f.c.

ROTAZIONE: Diagonalizzo A: $\dots$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = Q$ ($\lambda = 0$, $\lambda = 2$)

La parabola ha 1 a.v. nullo

Trovo D tale che $A = Q^T D Q \Rightarrow D \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$X = QX'$

$\mathcal{C}: X'^T D X' + 2B^T Q X' + c = 0$

$2y'^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 1 = 0$

TRASLAZIONE: $\begin{cases} x' = \tilde{x} + a \\ y' = \tilde{y} + a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}: 2\tilde{y}^2 - 2\sqrt{2}\tilde{x} + \tilde{y}\underbrace{(4b - 2\sqrt{2})} + \underbrace{2b^2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b} + 1 = 0$

$\hookrightarrow \begin{cases} 4b - 2\sqrt{2} = 0 \\ 2b^2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\mathcal{C}: \boxed{y^2 = \sqrt{2}\tilde{x}}$

$X = Q(\tilde{X} + T) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{2} \end{cases}$

3) Sia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 4$. Scrivi l'equazione del luogo L dei punti medi delle corde di $\mathcal{C}$ passanti per $A(-1;0)$ e riconosci L.

1) Scriviamo il fascio di rette passante per A: $\overset{(0 = -m + q)}{y = mx + m}$. Lo intersechiamo allora con la circonferenza $\mathcal{C}$:

$\begin{cases} y = mx + m \\ x^2 + m^2x^2 + m^2 + 2mx = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2(1 + m^2) + 2mx - 4 + m^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-m^2 \pm \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}$

$y_{1,2} = \dots = m \frac{1 \pm \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}$

$H\left(\frac{-m^2 - \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}; m \frac{-1 - \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}\right)$

$K\left(\frac{-m^2 + \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}; m \frac{-1 + \sqrt{3m^2 + 4}}{1 + m^2}\right)$

$M\left(\frac{x_H + x_K}{2}; \frac{y_H + y_K}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{m^2}{1 + m^2}; \frac{m}{1 + m^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{m^2}{1 + m^2} \\ y = \frac{m}{1 + m^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{x}{1 + x} \\ y^2 = -x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 + x = 0}$

2) ROTAZIONE: non serve (no termine noto)

TRASLAZIONE: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases}$ oppure: $M: y^2 + x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Circonferenza