Derivate di ordine superiore

Per ottenere derivata $3^a, 4^a \dots$ basta ripetere il passaggio $1^a \to 2^a$, adattandolo a $n^a \to n+1$

Significato di derivata $1^a/2^a$

La derivata 1^a ci dà informazioni sulla PENDENZA del grafico

La derivata 2^a ci dà informazioni sulla VARIAZIONE DI PENDENZA del grafico

Grafico Convesso

Una funzione f si dice convessa in $I = [a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sopra della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice convessa se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sopra del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Grafico Concavo

Una funzione f si dice concava in $I = [a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sotto della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice concava se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Punto di flesso

Sia $f(x)$ concava per $[a; x_0]$ e convessa per $[x_0; b]$. Nel punto x_0 la retta tangente attraversa il grafico di f.

x_0 è detto punto di flesso

Legame derivata seconda - concavità

① Sia $f: (a;b) \in A \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Allora f è convessa in $(a;b)$ se e solo $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$. La funzione si dice concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in (a;b)$

② + Se in $(x_0, f(x_0))$ vi è un flesso, allora $f''(x_0) = 0$. (CONDIZIONE NECESSARIA)

③ + Se $f'(x)$ crescente (decrescente) se e solo se $f(x)$ è convessa (concava).

DIM. dim 1 $\Leftarrow\Rightarrow$

Hp: f concava ; Th: $f''(x) \geq 0$

Poiché f è concava in $(a;b)$ $f'(x)$ è crescente in $(a;b)$. Prendiamo $x, x_0 \in (a;b)$. Possiamo scrivere che $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Se facciamo tendere x a x_0 abbiamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ per permanenza del segno. Ma il limite equivale a $f''(x)$, quindi $f''(x) \geq 0$

Hp: $f''(x) \geq 0$; Th: f concava

Scegliamo due punti $x_2 > x_1 \in (a;b)$. La funzione $f'(x)$ rispetta le hp del t. di Lagrange: $\exists f''(c) : \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}$. Poiché $f''(c) \geq 0$ per hp e $x_2 - x_1 > 0$ per definizione, $f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0$ $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$. Poiché se $f'(x)$ è crescente, $f(x)$ è convesso, il teorema è dimostrato.

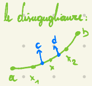
dim 3 $\Leftarrow$

Hp: $f(x)$ convesso ; Th: $f'(x)$ crescente

Affinché $f'(x)$ sia crescente, $f(x)$ deve essere crescente, quindi $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$ e $f(x) > \begin{cases} f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \\ f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \end{cases}$. Studiamo le disuguaglianze:

se $x - x_1 > 0$, $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > f'(x_1)$; se $x - x_1 < 0$ $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < f'(x_1)$

se $x - x_2 > 0$, $\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > f'(x_2)$; se $x - x_2 < 0$ $\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < f'(x_2)$



Per usare Lagrange, $x - x_1 > 0$ e $x - x_2 < 0$, quindi $f'(x_1) < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ e $f'(x_2) > \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$. Imponendo il comp. crescente

$f'(x_2) < \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < f(x_1)$. Usando Lagrange (su f), possiamo dire che $\exists f'(c) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ e $\exists f'(d) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$ $(c \in (x_1; x), d \in (x; x_2))$ ma per come abbiamo le due frazioni abbiamo che $f'(d) > f(c)$. Data l'arbitrarietà di x, segue che $f'(x)$ è crescente.

---

1) $y = x e^{-\frac{1}{x+1}}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $f(x) < 0$ $x < 0$; $f(x) > 0$ $x > 0$; NO DISP/PARI

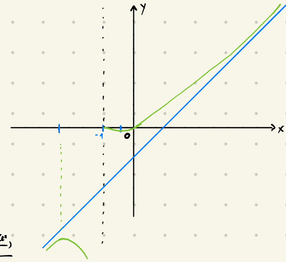
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -1$ $\quad x\left(e^{-\frac{1}{x+1}} - 1\right) \sim x \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) = -1$

$\Downarrow$

ASINT. OBLIQUO BILATERO: $y = x - 1$



$f'(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} + \frac{x e^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} = e^{-\frac{1}{x+1}} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2}$ $\quad D' = D$

$f'(x) > 0$ $\quad x^2 + 3x + 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \nearrow \searrow \nearrow$

$M = \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}; f\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$, $m = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -1^+ \\ t = \frac{1}{x+1}}} e^{-\frac{1}{x+1}} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2} = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} \frac{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{1-t}{t}\right) + 1}{+\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} \frac{\frac{t^2 - 3t^2 + t^2 + o(t^2)}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$

$= \lim_{t \to +\infty} e^{-t} (-t^2 + o(t^2)) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t^2 + o(t^2)}{e^t} = 0$

$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{x}{x+1} + o(1) = x - 1 + \frac{1}{x+1} + o(1)$ = SVILUPPI NECESSARI

$e^{-\frac{1}{x+1}} = 1 - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

---

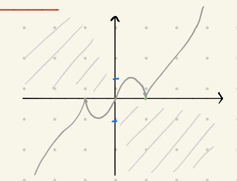
2) $f(x) = x \sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(x) > 0$ $x > 0$, $f(x) < 0$ $x < 0$; DISPARI ; $f(1) = f(-1) = 0$

$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}_{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$; $\underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x) = \dots = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \dots = 0}_{\text{prolungabile per continuità}}$

$\hookrightarrow$ NO ASINT.

$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \cancel{1} \cdot \sqrt[3]{(\ln x)^2} = \sqrt[3]{(\ln(1 + (x-1)))^2} \sim \sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow$ in $x = 1$ ha una cuspide



$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln(x))^2} + \frac{2}{3} \cancel{x} ((\ln(x))^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{(\ln x)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3 \ln x + 2}{3\sqrt[3]{\ln x}}$

solo $x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty \Rightarrow$ tg V.

$f'(x) = 0$ $\quad \ln x = -\frac{3}{2}$ $\quad x = e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) =$

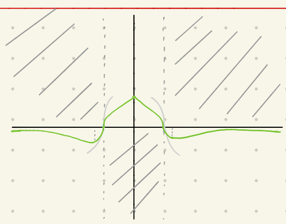
---

3) $f(x) = \frac{(1 - |x|)^{1/5}}{x^2 + 1}$

D: $\mathbb{R}$; $f(x) > 0$ $-1 < x < 1$, $f(x) < 0$ $x < -1 \vee x > 1$; PARI ; $f(x) = 0$ $x = \pm 1$, $f(0) = 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\sqrt[5]{\infty}}{\infty^2} = 0 \Rightarrow$ ASINT. H $y = 0$

$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{(1-x)^{1/5}}{2} \Rightarrow$ flesso a tg v in ± 1



$\underset{x \geq 0}{f'(x)} = \frac{((1-x)^{1/5})'(x^2+1) - (1-x)^{1/5} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{9x^2 + 10x - 1}{5(x^2+1)(1-x)^{4/5}}$

$\lim_{x \to +1} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -1} f'(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{5}$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{5}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 10x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{5 \pm \sqrt{34}}{9}$ $\Rightarrow x < \frac{5 - \sqrt{34}}{9} \vee x > \frac{5 + \sqrt{34}}{9}$ $\quad \nearrow \searrow \nearrow$

$f''(x) = \dots$

4) $f(x) = x\dfrac{2\ln x - 3}{\ln x - 2}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (0; e^2) \cup (e^2; +\infty)$ $\quad$ $f(x)>0$ [...] $\quad$ $f(x)=0$ $\ln x = -\frac{3}{2}$ $x = e^{-\frac{3}{2}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, $\underbrace{\lim_{x\to e^{2^-}} f(x) = -\infty, \lim_{x\to e^{2^+}} f(x) = +\infty}_{\text{ASINTOT V: } y=e^2}$, $\underbrace{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}_{\text{NO ASINT. O}}$

HOMEWORK

HOMEWORK:

$y = (2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$

$y = (1+x)\left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $y = \frac{x-3}{x+2}e^{x-|x|}$

$y = \arctan\left(\frac{2x+1}{|x|+1}\right)$ $\quad$ $y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$

$f(x) = (2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3}$

D: $x \neq -1$ | $f(x)>0$ $x<2$ | $f(x)=0$ $x=2$ $x=0$ |

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = 3\cdot\left(\frac{-1^-}{0^-}\right)^{2/3} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = 3\cdot\left(\frac{-1^-}{0^+}\right)^{2/3} = +\infty$

$(2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} \overset{x\to-\infty}{\sim} (2-x) \sim -x \Rightarrow$ asintoto ob ~~sx~~ $y=-x$ $\Big] \to$ as. obl. $y=-x$

$(2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} \overset{x\to+\infty}{\sim} (2-x) \sim -x \Rightarrow$ " " dx $y=-x$ $\Big]$

as. v. $x=-1$

$f'(x) = (2-x)'\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} + (2-x)\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = -\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}} + (2-x)\frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1+\cancel{x}-\cancel{x}}{(1+x)^2}\right)$

$= -\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-x}{(1+x)^2}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{x}{1+x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2-x}{(1+x)^2}\right) =$

$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3(1+x)(x)+4-2x}{3(1+x)^2}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3x-3x^2+4-2x}{3(1+x)^2}\right) =$

$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3x^2-5x+4}{3(1+x)^2}\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{-3x^2-5x+4}{3(1+x)^2}\right) = \frac{-3x^2-5x+4}{3\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3}}$ $\quad$ D': $x \neq -1$, $x \neq 0$

$f'(x) = 0$ $\quad -3x^2-5x+4 = 0$ $\quad x \simeq -2{,}25$

$x \simeq 0{,}59$

$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \frac{-3+5+4}{-3\cdot 0^-} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \frac{-3+5+4}{-3\cdot 0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{4}{3\cdot 0^-} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{4}{3\cdot 0^+} = +\infty$

$f''(x) = \dfrac{(-6x-5)(3\sqrt[3]{x}(1+x)^{\frac{5}{3}}) - (-3x^2-5x+4)\left(\frac{5}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(3\sqrt[3]{x}(1+x)^{\frac{5}{3}}\right)^2} =$

$\dfrac{3(-6x-5)\sqrt[3]{x}(1+x)^{\frac{5}{3}} - \dfrac{5(-3x^2-5x+4)(1+x)^{\frac{2}{3}}}{3x^{2/3}}}{9x^{2/3}(1+x)^{\frac{10}{3}}} =$

$\dfrac{9x^{2/3}(-6x-5)\sqrt[3]{x}(1+x)^{\frac{5}{3}} - 5(-3x^2-5x+4)(1+x)^{\frac{2}{3}}}{27x^{4/3}(1+x)^{\frac{10}{3}}} =$

$\dfrac{\cancel{(1+x)^{\frac{2}{3}}}\left((1+x)9x^{2/3}(-6x-5) - 5(-3x^2-5x+4)\right)}{27x^{4/3}(1+x)^{\cancel{\frac{10}{3}}\frac{8}{3}}} = \dfrac{(-6x-5-6x^2-5x)9x^{2/3} - 5(\ )}{27x^{4/3}(1+x)^{8/3}} =$

$\dfrac{(-6x^2-11x-5)9x^{2/3} - 5(-3x^2-5x+4)}{27x^{4/3}(1+x)^{8/3}} =$