Analisi Matematica I - 27 novembre 2014 - Ing. Informatica	
Cognome:	Nome:
Matricola:	
Non scrivere nel riquadro sottostante	

Tutte le risposte devono essere giustificate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.
La prova di teoria viene valutata nel suo complesso.

Teoria 1.

i) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\epsilon) \ : \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

ii) Verificare che $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-1} = 1$.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\epsilon) \ : \ \forall x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{x_0\} \quad |\sqrt{x-1} - 1| < \epsilon$$

La disequazione si riscrive nel seguente modo

$$-\epsilon < \sqrt{x-1} - 1 < \epsilon \Longrightarrow 1 - \epsilon < \sqrt{x-1} < 1 + \epsilon.$$

Nell'ipotesi che $x - 1 \geq 0$ e ponendo ragionevolmente $1 - \epsilon > 0$, si ottiene

$$2 + \epsilon^2 - 2\epsilon = 1 + (1-\epsilon)^2 < x < 1 + (1+\epsilon)^2 = 2 + \epsilon^2 + 2\epsilon$$

Da cui si sceglie $\delta = min\{2\epsilon - \epsilon^2 \, ; 2\epsilon + \epsilon^2\} = 2\epsilon - \epsilon^2$.

Teoria 2.

i) Enunciare il Principio di Induzione.

Cfr. Libro o appunti o dispense del corso.

ii) Verificare che per ogni $n \geq 2$ risulta $3^n > 1 + 2n$.

Sia $P(n)$ la proposizione che afferma che $3^n > 1 + 2n$ per $\forall n \geq 2$. Verifichiamo che vale la base di induzione, ovvero $P(2)$. Infatti $3^2 = 9 > 1 + 4 = 5$.

Ora assumiamo per ipotesi che valga $P(n)$ e dimostriamo che vale anche $P(n+1)$. Per ipotesi sappiamo che $3^n > 1 + 2n$, vogliamo mostrare che $3^{(n+1)} > 1 + 2(n+1)$. Si ha che

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot (1 + 2n) = 3 + 6n.$$

D'altra è ovvio che $3 + 6n > 3 + 2n$ per ogni $n \geq 1$; da cui si è verificata la proposizione $P(n+1)$.

Teoria 3.

i) Enunciare il teorema degli zeri.

Cfr. Libro o appunti del corso.

ii) Verificare che la funzione $f(x) = \log(x+3) - (2-x)^3$ ha un unico zero.

La funzione $f(x)$ è definita per $x > -3$ ed è una funzione continua nel suo dominio. Consideriamo la funzione ristretta all'intervallo chiuso $[-2, 2]$. Si ha che

$$f(-2) = \log(1) - 4^3 = -4^3 < 0 \quad f(2) = \log(5) - 0 = \log(5) > 0.$$

Da cui, per il teorema degli zeri, la funzione f ammette almeno uno zero in un punto $c \in (-2, 2)$. Inoltre si osserva facilmente che f è monotona crescente in quanto somma di funzioni monotone crescenti ($\log(x+3)$ è crescente e come anche $-(2-x)^3$). Quindi tale zero è unico.

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{x+2}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare i calcoli fondamentali sul retro del foglio.

Dominio di f: $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Segno di f: $f(x) > 0$ per $x > -2$.

Insieme di continuità: f è continua su tutto il dominio $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Limiti agli estremi: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Eventuali asintoti: $x = -2$ asintoto verticale $\qquad y = 0$ asintoto orizzontale.

Insieme di derivabilità: f è derivabile in $D' = D - \{0\}$

Derivata prima f': $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2} & x < 0 \\ -\dfrac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2} & x > 0 \end{cases}$

Zeri e Segno di f': $f'(x) = 0$ per $x = -1$ mentre $f'(x) > 0$ per $-1 < x < 0$.

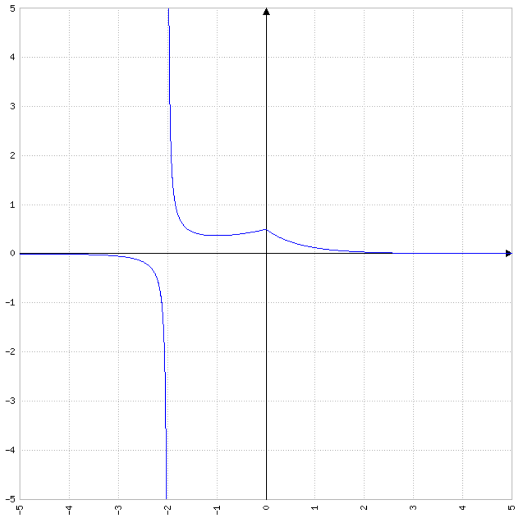
Eventuali punti di massimo e/o minimo: $x = -1$ punto di minimo relativo $\qquad x = 0$ punto di massimo relativo.

Valori massimo e/o minimo: Minimo in $(-1, e)$; Massimo in $(0, \frac{1}{2})$.

Si osserva che il punto $x = 0$ è un punto angoloso poichè facilmente si vede che

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{4} = f'_-(x) \neq f'_+(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2} = -\frac{3}{4}.$$

Grafico $\Gamma(f)$:



Esercizio 2.
Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left(z^3 - \frac{8}{i}\right)(\bar{z}^2 - |z|^2) = 0$$

e rappresentarlo nel piano di Gauss.
Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione scritta sopra è equivalente a risolvere due equazioni

$$z^3 - \frac{8}{i} = 0 \qquad \bar{z}^2 - |z|^2 = 0.$$

Consideriamo la prima $z^3 = \dfrac{8}{i} = -8i$. Bisogna quindi determinare le radici cubiche di $-8i$. Il numero $-8i$ si scrive in forma trigonometrica come

$$-8i = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Quindi se $z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$, si deve avere

$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

Le tre soluzioni sono quindi

$$z_0 = 2i \qquad z_1 = -\sqrt{3} - i \qquad z_2 = \sqrt{3} - i.$$

La seconda equazione è non algebrica $\bar{z}^2 - |z|^2 = 0$. Sia $z = a + ib$ allora $\bar{z}^2 = (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$ mentre $|z|^2 = a^2 + b^2$. Da cui l'equazione diventa

$$a^2 - b^2 - 2iab - a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow -2b(b + ia) = 0$$

Ne ricaviamo che $b = 0$ mentre a può essere qualsiasi numero reale. La soluzione è perciò data da

$$z = a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.

Calcolare al variare del parametro α il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+n^2}-n)n^\alpha}{e^{\frac{5}{n^2}}-1} \quad \log\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)$$

Cominciamo con osservare che per $n \to +\infty$

$$e^{\frac{5}{n^2}} - 1 \sim \frac{5}{n^2} \qquad \log\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right) \sim \frac{\alpha}{n^2}$$

Inoltre, sempre per $n \to +\infty$,

$$\sqrt{1+n^2} - n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - n = n \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \sim n \cdot \frac{1}{2n^2}.$$

Allora il limite diventa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+n^2}-n)n^\alpha}{e^{\frac{5}{n^2}}-1} \quad \log\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{10} \cdot n^{\alpha-1}.$$

Al variare del parametro α si presentano tre casi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{10} \cdot n^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \frac{1}{10} & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.

Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0 \ \ e \ \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right\}.$$

Si stabilisca inoltre se questi sono anche massimo e minimo per l'insieme.

Si osserva in modo immediato che $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ora poichè si considerano in A solo $x > 0$, possiamo supporre che $k \in \mathbb{N}$. Allora, con semplici passaggi algebrici, si riscrive A nel seguente modo

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+2k} \quad k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si nota che la successione $a_k = \frac{1}{1+2k}$ è positiva e monotona decrescente. Quindi

$$0 < a_k = \frac{1}{1+2k} \leq a_0 = 1.$$

Segue che

$$0 < x \leq \frac{2}{\pi}.$$

E' quindi chiaro che $Inf(A) = 0$ e $Sup(A) = \frac{2}{\pi}$. L'estremo superiore coincide anche con il massimo dell'insieme mentre non vi è minimo.