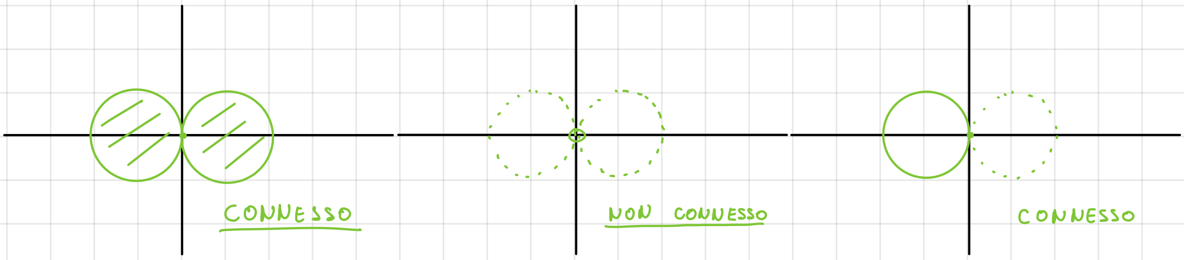
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \ \vee \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{ \ \text{"} \quad \text{"} < \quad \text{"} < \}$$
$$C = \{ \ \text{"} \quad \text{"} \leq \quad \text{"} < \}$$



Nota bene: nessuno degli insiemi è convesso.

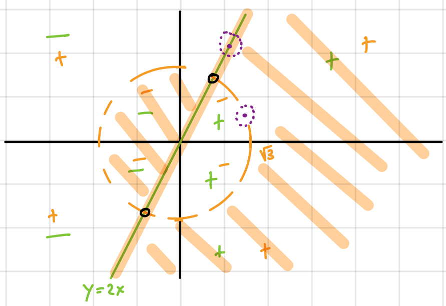
2) Dato $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (2 - \frac{1}{n})^2\}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

Ogni C_n è una circonferenza con raggio crescente $R \to 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ viene uguale a $C_\infty = \{ \ \text{"} : x^2 + y^2 < 2\}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'essa chiusa.

Proprietà è scrivibile come:
1) Unione infiniti aperte è aperta
2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

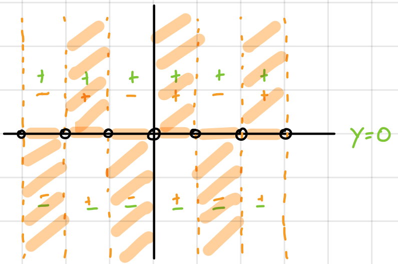
3) Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x,y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso $(\partial D \not\subset D)$, illimitato, sconnesso per archi
- $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y - 4}} \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 4 \to$ fuori dall'ellisse di semiasse $a = 2$, $b = \sqrt{2} \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso, illimitato, connesso per archi.
- $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{2x - y}{x^2 + y^2 - 3}} \Rightarrow \begin{cases} N \ 2x - y \geq 0 \\ D \ x^2 + y^2 - 3 > 0 \end{cases} \to \begin{cases} N \ y \leq 2x \\ D \ x^2 + y^2 > 3 \end{cases}$



L'insieme non è aperto $(\exists \partial D \subset D)$, non è chiuso $(\exists \partial D \not\subset D)$, illimitato, sconnesso per archi

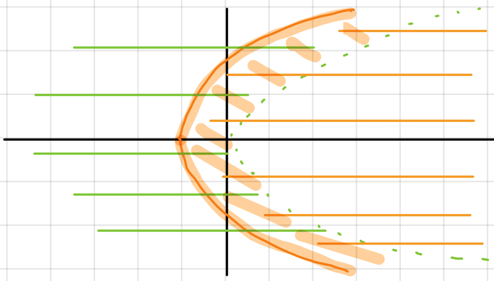
- $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{cases} N \ y \geq 0 \\ D \ \sin x > 0 \to 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{cases}$



Né aperto né chiuso, illimitato, sconnesso per archi

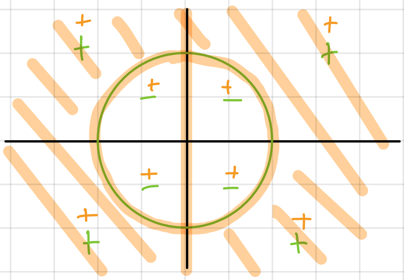
01/19

- $f(x,y)=\sqrt{-\ln(y^2-x)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} -\ln(y^2-x)\geq 0 \rightarrow \ln(y^2-x)\leq \ln 1 \rightarrow y^2-x\leq 1 \rightarrow \begin{cases} x\geq y^2-1 \\ x<y^2 \end{cases} \\ x<y^2 \end{cases}$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

- $f(x,y)=\sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\Rightarrow$ F_1 $|x|\geq 0$
  F_2 $x^2+y^2-4\geq 0$



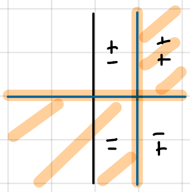
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

- $f(x,y)=\sqrt{xy-y}+1$

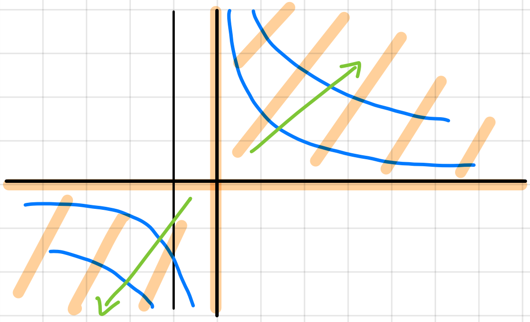
D $xy-y\geq 0 \rightarrow y(x-1)\geq 0 \rightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

0 ± sempre positiva senza zeri in D

LIVELLI $\sqrt{xy-y}+1=c$ se $c\leq 0$ $E_c=\emptyset$
se $c<1$ $E_c=\emptyset$
se $c\geq 1$ $\longrightarrow$ $xy-y=(c-1)^2$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{(c-1)^2}{x-1}$ per $x\neq 1$
$x=1 \iff c=1 \rightarrow y(x-1)=0$



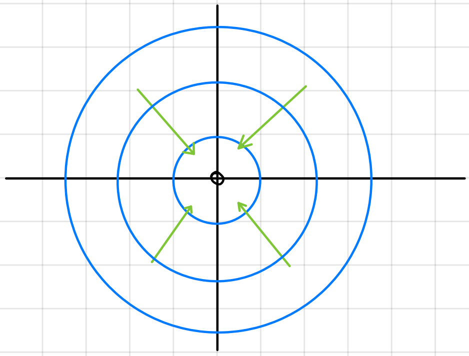
- $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D $x^2+y^2>0$ $(x,y)\neq(0,0)$ $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

± funzione sempre positiva
0 non ci sono zeri

LIVELLI $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$ $c\leq 0$ $E_c=\emptyset$
$c>0$ $\dfrac{1}{x^2+y^2}=c^2 \rightarrow x^2+y^2=\dfrac{1}{c^2}$



- $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$

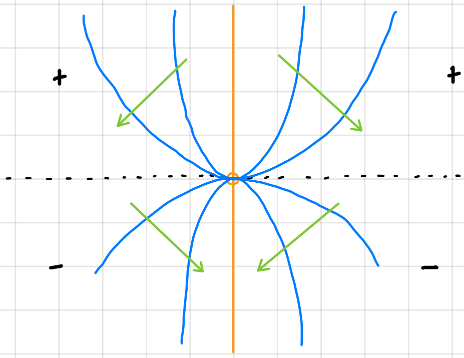
D $D = \mathbb{R} \setminus \{y=0\}$ Dominio aperto, non chiuso, illimitato, non connesso per archi

0 $e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = 0 \quad x=0$

± $e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \rightarrow \frac{x^2}{y} > 0 \quad y>0$

LIVELLI $e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \qquad c \leq -1 \quad E_c = \emptyset$

$c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{se } c=0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



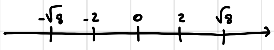
2) Trova gli zeri di $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4 \quad (D = \mathbb{R})$

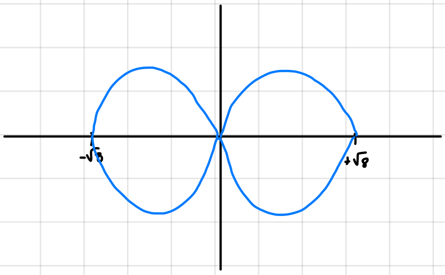
$y^2 = 8x^2 - x^4 \rightarrow y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$; Studio $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$; l'altra è simmetrica

$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ PARI, $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y = 0$ se $x = 0$, $x = \pm\sqrt{8}$

$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \geq 0 \iff 4x(4 - x^2) \geq 0$





28/03/20

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^3 y + x^3}{x^4 + y^2}$$

restringo $y = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} \quad \nexists \lim \rightarrow$ Il limite non esiste

2) Calcola il dominio e verifica la continuità di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

f è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$. In $(x,y) = (0,0)$ abbiamo:

$\lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) -$

restringo $y = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^6} = 0$

restringo $x=0$: $\lim_{y\to0} \frac{0}{y^2}=0$
restringo $y=mx$: $\lim_{x\to0} \frac{mx^4}{x^6+m^2x^2} = \dots = \lim_{x\to0} \frac{mx^2}{x^4+m^2} = 0$
restringo $y=x^3$: $\lim_{x\to0} \frac{\cancel{x^6}}{2\cancel{x^6}} = \frac{1}{2}$
↳ poiché $\frac{1}{2}\neq0$, il limite non esiste $\Rightarrow$ la funzione non è continua in $(0,0)$

3) Calcola se esiste:

$\lim_{x,y\to0,0} \frac{x^3}{x^2+y^4} = \dots = 0$
restringo $y=0$: $\lim_{x\to0} x=0$
restringo $x=0$: $\lim_{y\to0} 0=0$
restringo $x=y^2$: $\lim_{y\to0} \frac{y^{\cancel{6}\,2}}{2y^{\cancel{4}}}=0$

Ipotizzo che il limite esista, allora $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ $(\forall\varepsilon\dots)$
Ma: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|x|\cancel{(x^2+y^4)}}{\cancel{x^2+y^4}}$. Siccome $\lim_{x\to0}|x|=0$, il limite esiste e vale 0.

4) ...

$\lim_{x,y\to0,0} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$
restrizione $x=0$: $\lim_{y\to0} e^{-\frac{0}{y^2}}=1$
$y=x$: $\lim_{x\to0} e^{-1}=e^{-1}$
$\}$ $\nexists$ limite

5) ...

$\lim_{x,y\to0,0} \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{0}\underbrace{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}_{\nexists}$ siccome $0<e^{-\frac{x^2}{y^2}}\leq1$, il limite esisterà e sarà 0.

6) Dato $\lim_{x,y\to0,0} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$, per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ esiste e quanto vale

polari: $\lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^3\sin\theta}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to0^+} \rho^{5-2\alpha}\cos\theta\sin\theta$

$$\rho^{5-2\alpha} \text{ per } \rho\to0^+ \begin{cases} \to0 & \text{se } 5-2\alpha>0 \\ =1 & \text{se } \alpha=\frac{5}{2} \\ \to+\infty & \text{se } 5-2\alpha<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Se } \alpha<\frac{5}{2} & l=0 \\ \text{Se } \alpha\geq\frac{5}{2} & \nexists l \end{cases}$$

7) Calcola il limite se esiste:

$\lim_{\|x,y\|\to+\infty} e^{-x^2-y^2}$
restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=0$
polari: $\lim_{\rho\to+\infty} e^{-\rho^2}=0$ $\forall\theta$ $\Longrightarrow$ il limite esiste e vale 0

8) ...

$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} e^{-x^3-y^3}$
restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^3} = \begin{cases} 0^+ & x\to-\infty \\ +\infty & x\to+\infty \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\nexists$ limite

9) ...

$\lim_{x,y\to2,-1} \frac{(y^2-x^2+3)^2}{(x-2)^2+(y+1)^2}$
restringo $x=2$: $\lim_{y\to-1} \frac{(y^2-4+3)^2}{(y+1)^2} = \dots = 4$
polari: $\begin{cases} x=2+\rho\cos\theta \\ y=-1+\rho\sin\theta \end{cases}$ $\to$ $\lim_{\rho\to0} \frac{[(-1+\sin\theta)^2-(2+\rho\cos\theta)^2+3]^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to0} \frac{[-2\rho\sin\theta-4\rho\cos\theta+\rho^{\cancel{2}}\sin^2\theta-\rho^{\cancel{2}}\cos\theta^2]^2}{\cancel{\rho^2}}$

$= \lim_{\rho\to0} [-2\sin\theta-4\sin\theta+\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta]^2 = [-2\sin\theta-4\sin\theta]^2 \to$ dipende da θ
quindi $\nexists l$

10) Data $f(x,y) = e^{3x+y^2}$, calcolare $\nabla f(0,0)$ e calcolare $D_{\bar v} f(3,-2)$ dato $\bar v = [2,1]^T$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3h}-1}{h} = 3 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = 0 \end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [3,0]$$

Normalizziamo $\bar v$: $\hat v = \begin{bmatrix} 2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \end{bmatrix}$. Avremo che $D_{\hat v} f(3,-2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(3+t\,2/\sqrt5,\ -2+t\,1/\sqrt5) - f(3,-2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{3(3+\frac{2t}{\sqrt5}) + (-2+\frac{t}{\sqrt5})^2} - e^{13}}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{13+\frac{2t}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}t^2} - e^{13}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{13}(e^{\frac{2t}{\sqrt5}+\frac{t^2}{\sqrt5}} - 1)}{t} = e^{13} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt5}t + \frac{1}{5}t^2}{t} = \frac{2}{\sqrt5} e^{13}$$

11) Calcolare, se esiste, $\nabla f(0,0)$ con $f(x,y) = y - |x| y^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(0 - |h|\overset{\text{costante}}{0}) - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(h - 0\cdot h^2) - 0}{h} = 1 \end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [0,1]$$

12) Calcola $\nabla f(x,y)$ data $y \sin^2(x^2-y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y\,2\sin(x^2-y)\cos(x^2-y)(2x+0) = 4xy\sin(x^2-y)\cos(x^2-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1\cdot\sin(x^2-y) + y\,2\sin(x^2-y)\cos(x^2-y)(-1) = \sin(x^2-y)[1 - 2y\cos(x^2-y)]$$

13) Calcola $\nabla f(x,y)$ data

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{3x^2y(x^6+y^2) - x^3y\,6x^5}{(x^6+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x^3(x^6+y^2) - x^3y\,2y}{(x^6+y^2)^2} \end{aligned}\right\}$$

Entrambe le derivate non esistono in $(0,0)$. Per calcolare $\nabla f(0,0)$ bisogna usare la definizione ($\nabla f(0,0)$ esiste perché $f \in \mathcal{C}$)

↳ Le regole di derivazioni non sono sempre valide per le funzioni definite a tratti (in questo caso non valgono per $(x,y) = (0,0)$)

14) Calcola $\nabla f(x,y)$ con $f(x,y) = y^x$ (definita per $y>0$)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y^x \ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x y^{x-1}$$

5/10/20

1) $f(x,y) = e^{3x+y^2}$; calcola $D_{\underline{v}} f(3,-2)$, $\underline{v} = (2/\sqrt5, 1/\sqrt5)$

$\nabla f(x,y) = [3e^{3x+y^2};\ 2ye^{3x+y^2}] \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2$

$D_{\underline{v}} f(3,-2) = \nabla f(3,-2) \cdot \underline{v} = \dots = 2e^{13}/\sqrt5$ (Formula del gradiente)

2) $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ trovare α per continuità; per tale α, capire se derivabile in $(0,0)$; l'equazione del piano tangente al grafico in $(-1,0,f(-1,0))$

1) $D = \mathbb{R}^2$, f sicuramente continua in $(x,y)\neq(0,0)$

in $(0,0)$ $\lim_{x,y\to 0,0} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(\frac{1}{h^2}) - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\arctan(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 0$

$t>0,\ \arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \dots = 0$

$\Bigg\}\ \nabla f(0,0) = \varnothing$

3) $f(-1,0) = \frac{\pi}{4}$ derivo: $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{-2}} [-(x^2+y^2)\, 2x]$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{-2}} [-(x^2+y^2)\, 2y]$ $\Big\}$ in $(-1,0)$ $f(x,y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ quindi è differenziabile

$\nabla f(-1,0) = \dots = [1;0] \Rightarrow \pi: \quad z = \frac{\pi}{4} + 1(x+1) + 0(y-0) = \frac{\pi}{4} + (x+1)$

$\hookrightarrow f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)(y-y_0)$

3) $f(x,y) = 2ye^{x^2}$; scrivere la retta tangente alla curva di livello di f per $(0,1)$ (f differenziabile in $\mathbb{R}^2$)

$f(0,1) = \dots = 2 \Rightarrow c=2 \Rightarrow \cancel{2}ye^{+x^2} = \cancel{2} \to y = e^{-x^2} \to$ uso analisi 1

2° modo: Curva di livello $\perp \nabla f(0,1) \to \nabla f(0,1) = \dots = [0,2] \Rightarrow m=0 \to r: y=1$

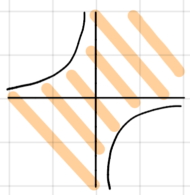
4) $f(x,y) = \frac{\ln(y-2x)}{y^2+x}$ scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello per $(-2,-3)$

$f(-2,-3) = 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left[\frac{\frac{1}{y-2x}(-2)(y^2+x) - 1\log(y-2x)}{(y^2+x)^2} ; \frac{-\frac{1}{y+2x}\cdot 1(y^2+x) - 2y\log(y-2x)}{(y^2+2x)^2} \right] \Rightarrow \nabla f(-2,-3) = [-\frac{2}{7}; \frac{1}{7}]$

trovo direzione $\underline{v} \perp \nabla f(-2,-3) \to -\frac{2}{7}V_x + \frac{1}{7}V_y = 0 \to V_2 = 2V_x \to \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow m=2 \Rightarrow r: \quad y = -3 + 2(x+2)$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ trova: dominio; continuità; per quali v esiste $D_v f(0,0)$; se f è differenziabile in $(0,0)$

1) $1+xy>0 \to xy>-1$



2) f è sicuramente continua per $(x,y)\neq(0,0)$; $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$ restringo a $y=0$: $\frac{\log(1)}{x^2} = 0$; restringo a $y=x$: $\frac{\log(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$ $\Big\}\ \nexists \lim$

$\hookrightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

3) $\underline{v} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\ln(1+t^2\cos\alpha\sin\alpha)}{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2\cos\alpha\sin\alpha)}{t^3} =$ $\begin{cases} \text{se } \cos\alpha = 0 \vee \sin\alpha = 0 & D_v f(0,0) = 0 \\ \text{se } \cos\alpha \neq 0 \vee \sin\alpha \neq 0 & \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t^3} = \pm\infty \end{cases}$

$\hookrightarrow$ esistono 4 derivate direzionali: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

4) f non è differenziabile in $(0,0)$ perché f non è continua

6) $f(x,y) = \sqrt[3]{y}\cdot x$ trova se: f è derivabile in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue in $(0,0)$; f è differenziabile in $(0,0)$

1) f continua in $\mathbb{R}^2$ $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow$ uso la def in $(0,0) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ $\Big\}$ derivabile

2) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ continua in $(0,0)$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$

restringo a $x = \sqrt[3]{y^2}$: $\lim_{y\to 0} \dots = \frac{1}{3} \neq 0$ $\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$ $\Bigg\}$ non continua

3) Usiamo la definizione $\lim\limits_{x,y\to 0,0} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)(x-0)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x,y\to 0,0}\dfrac{\sqrt[3]{y^2}\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

↳ $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{\rho\sin\theta}\cdot\rho\cos\theta}{\rho} = 0$

↳ f differenziabile in $(0,0)$ anche se le derivate non sono continue

7) $f(x,y) = xy|x-y|$ dov'è continua, derivabile, differenziabile

continua in $\mathbb{R}^2$

se $x<y \to f(x,y) = xy^2 - x^2y \Rightarrow \nabla f(x,y) = [y^2-2xy;\ 2xy-x^2] \Rightarrow$ differenziabile

se $x>y \to$ ... (analogo a sopra) ... differenziabile

se $y=x \to \frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(x_0+h)y_0|x_0+h-y_0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0^2|h|}{h} \to \begin{cases} \text{se } x_0\neq 0 & \nexists\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \text{se } x_0 = 0 & \exists\ \frac{\partial}{\partial x} \to \text{si verifica } \nabla f(0,0) = [0,0] \end{cases}$

È differenziabile in $(0,0)$? $\lim\limits_{x,y\to 0,0}\dfrac{xy|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow$ differenziabile

↳ $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\,|\rho\cos\theta-\rho\sin\theta|}{\rho} = 0$

8) $f(x,y) = xy^2 - y^3 + 2x^2$, $g(t) = (1-t^2, t)$. Data $h(t) = (f\circ g)(t)$, calcola $h'(1)$

g è differenziabile in $t=1$, f è differenziabile in $g(t_0)$

↳ $h'(1) = \nabla f(g(1))\cdot g'(1) = [1,-3]\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = -5$

$g'(1) = \dots = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$; $g(1) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$; $\nabla f(x,y) = [y^2+4x;\ 2xy-3y^2]$; $\nabla f(0,1) = [1;-3]$

9) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x+y^2,\ e^x+2y)$; $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $g(u,v) = [\log(u^2+1),\ u-v^2,\ \cos u\sin v]$.
Detta $h = g\circ f$, scrivere $J_h(0,0)$

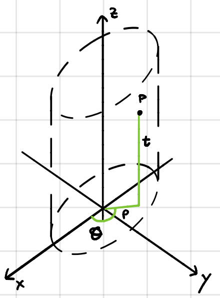
f differenziabile in $(0,0)$ e $f(0,0) = (0,1)$. g è differenziabile in $f(0,0)$.

↳ $J_h(0,0) = J_g(0,0)\cdot J_f(0,0) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 4\\ \cos 1 & 2\cos 1\end{bmatrix}$

$J_f(x,y): \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2y\\ e^x & 2\end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$J_g(u,v): \begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{u^2+1}2u & 0\\ 1 & -2v\\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v\end{bmatrix} \Rightarrow J_g(0,0) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -2\\ 0 & \cos 1\end{bmatrix}$

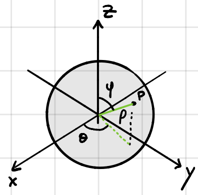
10)



$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\\ y = \rho\sin\theta\\ z = t\end{cases} \Longrightarrow [0,+\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} \to f(\rho,\theta,t) = (x(\rho,\theta,t),\ y(\rho,\theta,t),\ z(\rho,\theta,t))$

$J_f(\rho,\theta,t) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |J_f(\rho,\theta,t)| = \dots = \rho$

11)



ρ: distanza da $(0,0)$

θ: sul piano xy

φ: misurato rispetto a $z>0$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \Longrightarrow [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times [0,2\pi) \to f(x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi))$$

$$Jf(\rho,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix} \to |Jf(\rho,\theta,\varphi)| = \dots = -\rho^2\sin\varphi$$

12/10/20

1) $f(x,y) = \log(x^3-y)$, $(x_0,y_0) = (-1,-2)$. Trova: a) differenziale secondo in x_0 b) polinomio di Taylor di 2° ord in x_0 c) formula di Taylor di 2° ord. in x_0

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{3x^2}{x^3-y} ; -\frac{1}{x^3-y}\right]$$

$\hookrightarrow \nabla f(x_0) = [1 ; -1]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{6x(x^3-y) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-y)^2} = \frac{-3x^4-6xy}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0) = -15$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = -[-(x^3-y)^{-2}]\,3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0) = 3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -\frac{1}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0) = -1$$

a) $d^2 f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0)(y-y_0)^2 = -15(x+1)^2 + 6(x+1)(y+2) - 1(y+2)^2$

b) $P_2(x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$

c) $f(x,y) = P_2(x_0) + o(\|x_0\|^2)$

2) $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$, studia differenziabilità, simmetrie; determina estremi

$D = \mathbb{R}^2$, funzione differenziabile (derivate continue): $\frac{\partial}{\partial x} f = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y} f = -2xy\, e^{-x^2-y^2}$

$\hookrightarrow f \in \mathcal{C}^1$

SIMMETRIE: $f(-x,y) = -x e^{-x^2-y^2} = -f(x,y) \to$ dispari in x

$f(x,-y) = x e^{-x^2-y^2} = f(x,y) \to$ pari in y (simmetrico rispetto a xz)

ESTREMI: da cercare nei punti stazionari:

$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xy\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow A\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right),\ B\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

Classifico usando la mat. Hessiana:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = -4x e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = (1-2x^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -2x e^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$Hf\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Longrightarrow A \text{ minimo}$$

$\Longrightarrow$ per la disparità B è massimo

Non ci sono altri estremi. Poiché $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$, si può concludere che gli estremi sono anche globali.

3) $f(x,y) = x^4 + y^2$; determina gli estremi

$D = \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}^2$ $\quad \nabla f(x,y) = [4x^3; 2y] \to$ solo $[0;0] \Longrightarrow Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$???

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow [0;0]$ è minimo assoluto

4) $f(x,y) = \begin{cases} y \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$; studia continuità, derivabilità e estremi

$D = \mathbb{R}^2$, continua per $x_0 \neq 0$

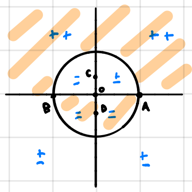
$\lim_{x,y \to 0,0} y \log(x^2+y^2)$; $\nexists \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \Rightarrow$ gli estremi sono da ricercare tra i punti di non derivabilità

$\hookrightarrow \lim_{\rho \to 0^+} \rho \sin\theta \log(\rho^2) = 0$

se $\underline{x} \neq \underline{0}$: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{y \cdot 2x}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} xy = 0 \\ \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ \log(y^2) + 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{e} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \log(x^2) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

sfruttiamo il segno:



$A(1,0)$ $\quad C(0,\frac{1}{e})$

$B(-1,0)$ $\quad D(0,-\frac{1}{e})$ $\Rightarrow$

O: sella

A, B: sella

C : minimo almeno relativo

D : massimo almeno relativo

poiché $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$, gli estremi sono per forza relativi

19/10/20

1) $f(x,y) = x^2 - y^2$; estremi in: 1) D 2) $y = 1-2x$ 3) segmento di estremi $(0,1)-(2,-3)$ 4) $Q = [-1,1] \times [-1,1]$

5) $x^2+y^2 = 4$

1) Dominio $\mathbb{R}^2$; C^∞. Unico punto critico è $(0,0)$ ed è una sella.

2) La retta è un vincolo di uguaglianza esplicitabile.

$f|_r = f(x, 1-2x) = x^2 - (1-2x)^2 = -3x^2 + 4x - 1 \to f'|_r = -6x + 4 \to$ Max assoluto in $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

3) Troviamo l'equazione della retta passante per i due punti: r: $y = 1-2x$. Studiamo poi cosa succede per $x \in [0,2]$

$f|_r' = -6x + 4$

$\hookrightarrow 0 \nearrow \frac{2}{3} \searrow 2 \Rightarrow$ abbiamo un max assoluto in $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ e due candidati a minimo:

$f(0,1) = -1$; $f(2,-3) = -5 \Rightarrow (2;-3)$ è un punto di minimo assoluto e $(0,1)$ è minimo relativo

4) Q è il prodotto cartesiano tra due intervalli: abbiamo definito un quadrato. All'interno del quadrato sappiamo da 1) che abbiamo una sella in $(0,0)$.

Per studiare il bordo parametrizziamo i segmenti. Poiché la funzione è pari in x e y, studiamo due lati:

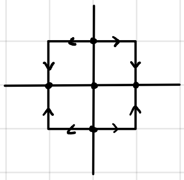
- $\gamma_1 = \begin{cases} x = 1 \\ y = t & -1 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_1} = f(1,t) = 1 - t^2 \to f'|_{\gamma_1} = -2t \geq 0$ per $t \leq 0$

$\hookrightarrow -1 \nearrow 0 \searrow 1$

- $\gamma_2 = \begin{cases} y = 1 \\ x = t & -1 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_2} = f(t,1) = t^2 - 1 \to f'|_{\gamma_2} = 2t \geq 0$ per $t \geq 0$

$\hookrightarrow -1 \searrow 0 \nearrow 1$

Per simmetria vale anche per i segmenti rimanenti.

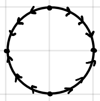


$(0,1)$ e $(0,-1)$ candidati minimi: $f(0,1) = f(0,-1) = -1$

$(1,0)$ e $(-1,0)$ candidati massimi: $f(1,0) = f(-1,0) = 1$

5) $\mathcal{C} = \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$ $\quad f|_{\mathcal{C}} = 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 4\cos(2\theta) \to f'|_{\mathcal{C}} = -4\sin(2\theta)\cdot 2 \geq 0$ per $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \theta \leq \pi + k\pi$

$\hookrightarrow$ $0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \searrow \frac{3}{2}\pi \nearrow 2\pi$



$\to$ $(2,0)$ e $(-2,0)$ sono massimi assoluti

$(0,2)$ e $(0,-2)$ sono minimi assoluti

2) $f(x,y) = |y|(x-y-2)$ determina gli estremi in 1) D 2) triangolo T (bordo e area) che $r: y = -x-2$ forma con gli assi

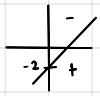
1) $D = \mathbb{R}^2$; non è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ $\to$ i punti di non derivabilità $(y=0)$ possono essere massimi o minimi.

se $y>0$ $\quad f(x,y) = xy - y^2 - 2y$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$!! $y = 0$, non accettabile

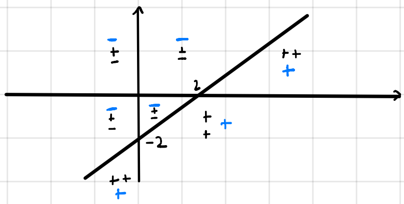
analogo per $y<0$. Non esistono punti critici.

Studio il segno: $|y| \geq 0$

$x - y - 2 \geq 0 \to y \leq x - 2$

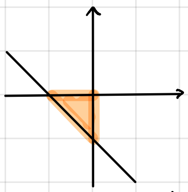


$\to$



$\begin{cases} \text{se } x < 2 & \text{max relativo} \\ \text{se } x > 2 & \text{min relativo} \end{cases}$

2) vincolo:



. Vale Weierstrass. In 1) abbiamo capito che nell'area non ci sono estremi.

Studiamo il bordo. Per quanto già visto, $f = 0$ assunto lungo l'asse x e in $(0,-2)$. Studiamo gli altri lati.

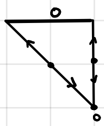
- $\gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \quad -2 \leq t \leq 0 \end{cases} \to f|_{\gamma_1} = f(0,t) = |t|(-t-2) \overset{t\leq 0}{=} t^2 + 2t \to f'|_{\gamma_1} = 2t + 2 \geq 0$ per $t \geq -1$

$\hookrightarrow$ $-2 \searrow -1 \nearrow 0 \Rightarrow$

- $\gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = -2-t \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 0 \to f|_{\gamma_2} = f(t, -2-t) = |-2-t|(t + \cancel{2} + t - \cancel{2}) \overset{t\leq 0}{=} (2+t)\,2t = 2t^2 + 4t \to f'|_{\gamma_2} = 4t + 4 \geq 0$ per $t \geq -1$

$\hookrightarrow$ $-2 \searrow -1 \nearrow 0 \Rightarrow$

Incollando il tutto:



$(-1,-1)$ e $(0,-1)$ candidati a minimo: $f(-1,-1) = -2$; $f(0,-1) = -1 \Rightarrow$ $(-1,-1)$ è min assoluto

$(0,-1)$ è min relativo

3) $f(x,y) = xy + 4$; determinare estremi assoluti sull'ellisse $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$

Non riesco a parametrizzare l'ellisse. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange.

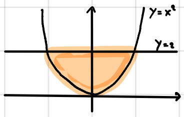
1) verifichiamo l'ipotesi: $\nabla g = [2x - y, 2y - x] = \underline{0} \iff (x,y) = \underline{0}$ ma $g(0,0) \neq 0$, quindi le ipotesi sono soddisfatte

2) $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f - \lambda \frac{\partial}{\partial y} g = 0 \\ g = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \to (y-x) + 2\lambda(y-x) + \lambda(y-x) = 0 \longrightarrow (y-x)(1+3\lambda) = 0$

$\begin{cases} y = x \\ x - \lambda x = 0 \\ x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} \lambda = 1 \\ x = \pm 1 \end{matrix} \Rightarrow (1, 1, \cancel{1});\ (-1, -1, \cancel{1}) \to \begin{cases} f(1,1) = 5 \to \text{massimo assoluto} \\ f(-1,-1) = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = 0 \\ x^2 + x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} y = -x \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cancel{-\frac{1}{3}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cancel{-\frac{1}{3}}\right) \to \begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \to \text{minimo assoluto} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \end{cases}$

41 $f(x,y) = (x-1)^2 + y$; estremi assoluti in $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 \}$

L'insieme E equivale a: 

. Vale Weierstrass.

Studiamo l'interno: $\nabla f = [2(x-1), 1] \neq 0 \quad \forall (x,y)$

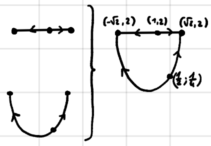
Studiamo il bordo:

- $\gamma_1 = \begin{cases} y = 2 \\ x = t \end{cases} \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \rightarrow f|_{\gamma_1} = f(t,2) = (t-1)^2 + 2 \rightarrow f'|_{\gamma_1} = 2(t-1) \geq 0 \iff t \geq 1$

  $\hookrightarrow -\sqrt{2} \searrow 1 \nearrow \sqrt{2} \implies$

- $P = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \rightarrow f|_P = f(t,t^2) = (t-1)^2 \rightarrow f'|_P = 2t - 2 + 2t = 4t - 2 \geq 0 \iff t \geq \frac{1}{2}$

  $\hookrightarrow -\sqrt{2} \searrow \frac{1}{2} \nearrow \sqrt{2} \implies$



$(-\sqrt{2},2), (\sqrt{2},2)$ max

$(1,2), (\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ min

Eseguendo le sostituzioni abbiamo che $(-\sqrt{2},2)$ è max assoluto e $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ è minimo assoluto.