Spazi Affini (7)

Definiamo $\mathcal{A}$ su cui è possibile studiare la geometria come quelli per cui è possibile associare a ogni due elementi in $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ un vettore $\overrightarrow{PQ}$ che inizia in P e finisce in Q.
Richiediamo che valgano alcune proprietà:

Assiomi di Weyl (7.1)

Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto, V uno spazio vettoriale. Definiamo una funzione $\Psi: \begin{array}{l} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V \\ (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \end{array}$. Se:

1) Per ogni punto $P \in \mathcal{A}$ fissato $\Psi_P: \begin{array}{l} \{P\} \times \mathcal{A} \to V \\ (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \end{array}$ è biunivoca
2) Vale la regola del parallelogramma (o di Chasles): $\Psi(P, Q) + \Psi(Q, R) = \Psi(P, R) \quad \forall P, Q, R \in \mathcal{A}$

Allora $\mathbb{A}(\mathcal{A}, V, \Psi)$ è uno spazio affine

Esempio Fondamentale

Preso $\mathcal{A} = \mathbb{K}^n$, $V = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$, $\Psi: \begin{array}{l} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V \\ ((x_1, \dots x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \end{array}$. La struttura $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, V, \Psi)$ è lo spazio affine naturale a $\mathbb{K}^n$.
Lo stesso procedimento si può applicare su ogni spazio vettoriale V: $V(\mathcal{V}, \mathbb{K}, +, \cdot) \to \mathbb{A}_V(\mathcal{V}, V, \Psi_V)$ con $\Psi_V: \begin{array}{l} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to V \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mapsto \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \end{array}$

Definizioni (7.2)

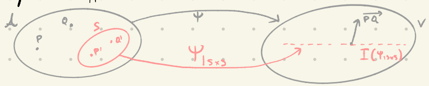
1) $P \in \mathcal{A}$ sono detti punti;
2) $(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ è detto segmento orientato;
3) Ad ogni segmento orientato è associato un vettore detto vettore geometrico;
4) $\mathcal{A}$ è il sostegno dello spazio, V è la giacitura di $\mathbb{A}$;
5) $\dim(\mathbb{A}) = \dim(V)$;
6) Se $\dim(\mathbb{A}) = 1$, lo spazio affine si dice retta affine;
   〃 $\dim(\mathbb{A}) = 2$, 〃 〃 〃 〃 〃 piano affine;

Proprietà (7.4)

1) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}_V$ 2) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$

Sottospazio Affine

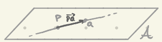
Dato uno spazio affine $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V, \Psi)$, $S \subseteq \mathcal{A}$ si dice sottospazio affine se $(S, \mathrm{Im}(\Psi_{|S\times S}), \Psi_{|S\times S})$ è uno spazio affine



$I(\Psi_{|S\times S})$ è un sottospazio vettoriale di V detto giacitura di S. Se la dim(S) = dim$(\mathbb{A}) - 1$, S è detto iperpiano di $\mathbb{A}$

Caratterizzazione di uno Spazio Affine (7.12)

Sia $P \in S$, $U = \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in S\}$. Allora S è un sottospazio affine se e solo se U è un sottospazio vettoriale di V.



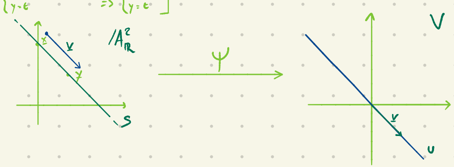
Esempio: 1) $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$: $\mathbb{K}^n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}^n\}$, $V = (\mathbb{K}^n; \mathbb{K}, +, \cdot)$

Sia $S \subseteq \mathcal{A}$ l'insieme dei punti $\underline{x} \in \mathcal{A}$ soluzioni di $Ax = B$. $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S$ se e solo se $Ax_1 = B \vee Ax_2 = B$. Se faccio $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = B - B = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Allora $\overrightarrow{x_1x_2}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad S.

Poiché l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo sono uno spazio vettoriale, allora $U = \{\overrightarrow{x_1x_2} \mid x_1, x_2 \in S\}$ è un sottospazio di V. $\Rightarrow$ S è un sottospazio affine con giacitura U

OSS.: Tutti i sottospazi di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sono dello stesso tipo di quello dell'esempio 1

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\quad S: \{x + y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \quad U: \{x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ $\Rightarrow$ dim(S) = dim$(U) = 1 \Rightarrow$ sia retta affine che è anche iperpiano



Sistemi di Riferimento (7.5)

Sia $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V, \Psi)$ con $O \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. $\mathcal{B}_0 = \{O, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è detto sistema di riferimento dove O è l'origine del sistema. L'associazione tra un vettore e le sue coordinate è gestita da $\varnothing: \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}(n,1,\mathbb{K})$, $P \mapsto \varnothing_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})$.

$P_{|\mathcal{B}_0} = \varnothing_{\mathcal{B}_0}(P) = \varnothing_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}_{\mathcal{B}}$ si dicono coordinate.