

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

PROF.
Marco
COMPAGNONI



EUDOMORFISMI,

- Definizioni
- Esempi
- I° Criterio diagonalizzabilità

SEZIONE 6.1

AUTOVALORI,

- Relazione di similitudine
- Invarianti per similitudine
- Polinomio caratteristico

SEZIONE 6.2

AUTOVETTORI:

ENDOMORFISMI ED AUTOMORFISMI (DEFINIZIONE 6.1)

- $f \in \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$ si dice endomorfismo di V .
- $f \in \text{End}(V)$ invertibile si dice automorfismo di V .

L'insieme degli automorfismi di V è $GL(V)$.

Gruppo generale
lineare su V

OSSERVAZIONI

• \circ è interna a $\text{End}(V)$: $f, g \in \text{End}(V) \Rightarrow f \circ g \in \text{End}(V)$

• $f^K = \begin{cases} \text{Id}_V & \text{se } K=0 \\ f \circ \dots \circ f & K \text{ volte se } K \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow f^K \in \text{End}(V)$

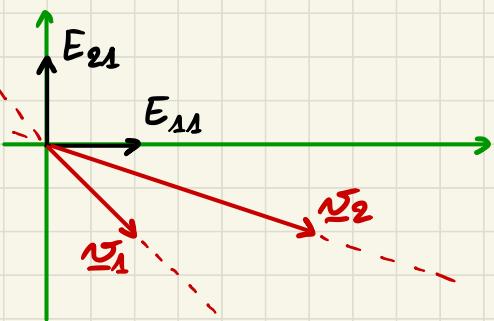
• $P(f) = \sum_{i=0}^K c_i \cdot f^i = c_0 \cdot \text{Id}_V + c_1 \cdot f + \dots + c_K \cdot f^K \in \text{End}(V)$

• $\phi_B(f) = \phi_{B \otimes B}(f) = F|_B \quad \phi_B(P(f)) = P(F|_B) = \sum_{i=0}^K c_i \cdot F|_B^i$

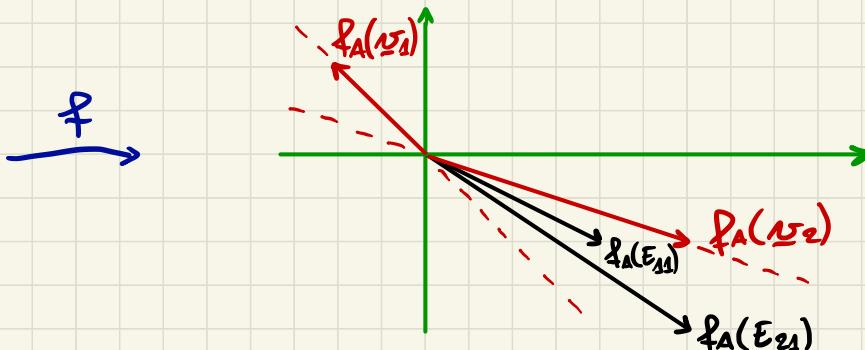
• $\phi_B : GL(V) \longrightarrow GL(m; \mathbb{K})$ con $m = \dim(V)$ è un
isomorfismo di gruppi, rispetto a $\circ = *$.

$$V = \text{Mat}(2,1; \mathbb{R}) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad f_A \in \text{End}(V) \quad B_{\text{base}} = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$f_A(E_{11}) = A \cdot e_{11} = 2E_{11} - 1 \cdot E_{21}$$



$$f_A(E_{21}) = A \cdot e_{21} = 3E_{11} - 2E_{21}$$



$\Rightarrow E_{11}$ ed E_{21} vengono ruotati e ricalcati da f

$$\underline{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f_A(\underline{\nu}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \underline{\nu}_1 \quad f_A(\underline{\nu}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{\nu}_2$$

$\Rightarrow \underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2$ vengono solo ricalcati da f : **AUTOVETTORI**

$$B = \{\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2\} \text{ è base di } V \Rightarrow F_{IB} = [f_A(\underline{\nu}_1)|_B \quad f_A(\underline{\nu}_2)|_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F_{IB} è diagonale. **-1, 1 AUTOVALORI**

f è la riflessione rispetto a $\mathcal{L}(\underline{\nu}_2)$ parallela a $\mathcal{L}(\underline{\nu}_1)$.

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI (DEFINIZIONE 6.3)

$\underline{v} \in V$ è autovettore di $f \in \text{End}(V)$ se :

- i) $\underline{v} \neq \underline{0}$;
- ii) esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$.

λ è detto autovалore di f associato all'autovettore \underline{v} .

APPLICAZIONE DIAGONALIZZABILE (DEFINIZIONE 6.4)

$f \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile se esiste B composta da autovettori di f .

PRIMO CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ (TEOREMA 6.5)

$f \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile se esiste B t.c. F_{1B} è diagonale.

DIM: \Rightarrow f diagonalizzabile con $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ base di autovettori \Rightarrow

$$F_{1B} = [f(\underline{v}_1)|_B \dots f(\underline{v}_m)|_B] = [\lambda_1 \cdot \underline{v}_1|_B \dots \lambda_m \cdot \underline{v}_m|_B] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \in D(m; \mathbb{K}).$$

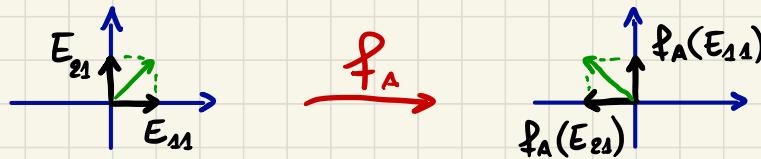
\Leftarrow $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ base con $F_{1B} = [a_{ij}]$ diagonale \Rightarrow

$$f(\underline{v}_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \underline{v}_j = a_{ii} \underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_i \text{ è autovettore con autovалore } a_{ii}$$



ESEMPI

- Id_V, O_V sono diag.: per $\forall \underline{\omega} \in V$ si ha $\text{Id}_V(\underline{\omega}) = 1 \cdot \underline{\omega}$, $O_V(\underline{\omega}) = 0 \cdot \underline{\omega}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $V = \text{Mat}(2,1; \mathbb{R})$ $f_A(E_{11}) = E_{21}$ $f_A(E_{21}) = -E_{11}$



f_A ruota tutti i vettori di $\pi/2$
 $\Rightarrow \exists$ autovettori di f_A

AUTOSPAZIO (DEFINIZIONE 6.8)

λ autovettore di $f \Rightarrow V_\lambda = \{ \underline{\omega} \in V \mid f(\underline{\omega}) = \lambda \cdot \underline{\omega} \}$ = autospazio associato a λ

PROPOSIZIONE 6.9

V_λ è un sottospazio di V con $\dim(V_\lambda) \geq 1$.

DIM: $\Omega \in V_\lambda \Rightarrow f(\Omega) = \lambda \cdot \Omega \Rightarrow \Omega \in V_\lambda$; (OSS: Ω non è autovettore)

- $\underline{\omega}, \tilde{\underline{\omega}} \in V_\lambda \Rightarrow f(t\underline{\omega} + \tilde{t}\tilde{\underline{\omega}}) = t f(\underline{\omega}) + \tilde{t} f(\tilde{\underline{\omega}}) = t\lambda \underline{\omega} + \tilde{t}\lambda \tilde{\underline{\omega}} = \lambda(t\underline{\omega} + \tilde{t}\tilde{\underline{\omega}})$;
- $V_\lambda \neq \{\Omega\}$ perché λ è autovettore $\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1$. □

Problemi: i) Come calcolare autovettori e autovettori?
ii) Come stabilire se f è diagonalizzabile?

RELAZIONE DI SIMILITUDINE E POLINOMIO CARATTERISTICO (6.2 - 6.3)

MATRICI SIMILI (DEFINIZIONE 6.10)

$A, B \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. B si dice simile ad A se esiste
se $GL(n; \mathbb{K})$ tale che $B = S^{-1}AS$.

ESEMPIO: due matrici rappresentative di f rispetto B, B' sono
simili $F_{IB'} = M_B B' F_{IB} M_{B'B}^{-1} = M_{B'B}^{-1} F_{IB} M_{B'B}$.

PROPOSIZIONE 6.17 (criterio di diagonalizzabilità)

$f \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile se e solo se F_{IB} è simile ad
una matrice diagonale: $D = S^{-1}F_{IB}S$.

$S (= M_{B'B})$ è detta matrice diagonalizzante.

PROPOSIZIONE 6.11

La similitudine è una relazione di equivalenza R .

$$[A] = \{ M \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K}) \mid M \sim_R A \}$$

$\text{Mat}(n, n; \mathbb{K})/R$ = insieme delle classi di similitudine $[A]$

OSS: le matrici che rappresentano un'applicazione appartengono tutte alla stessa classe di similitudine

INVARIANTI PER SIMILITUDINE I (PROPOSIZIONE 6.12)

$r([A])$, $\text{Tr}([A])$, $\det([A])$ sono funzioni ben definite.

DIM: dobbiamo dimostrare che $|A| = |B|$ se $B = S^{-1}AS$.

$$|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}| |A| |S| = |S|^{-1} |S| |A| = |A|.$$

Analogamente per rango e traccia.



INVARIANTI PER SIMILITUDINE II (PROPOSIZIONE 6.14)

• Polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_m| \in \mathbb{K}[\lambda]_m$

• I coefficienti e le radici di $P_A(\lambda)$ sono invarianti per similitudine

• $c_0 = \det(A)$ $c_{m-1} = (-1)^{m-1} \operatorname{Tr}(A)$ $c_m = (-1)^m$

$$\text{Dim: } P_B(\lambda) = |B - \lambda I_m| = |S^{-1}AS - \lambda I_m| = |S^{-1}(A - \lambda I_m)S| = |A - \lambda I_m| = P_A(\lambda) \quad \square$$

ESEMPIO 6.15

$$\bullet m=1: A = [\alpha_{11}] \Rightarrow P_A(\lambda) = |\alpha_{11} - \lambda| = \alpha_{11} - \lambda$$

$$\bullet m=2: A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = |A| - \lambda \operatorname{Tr}(A) + \lambda^2$$

$$\bullet m=3: A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P_A(\lambda) = |A| - \lambda \cdot \left(\underbrace{\left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \right)}_{I_2(A) = \text{invariante secondo di } A} \right) + \lambda^2 \operatorname{Tr}(A) - \lambda^3$$

$I_2(A) = \text{invariante secondo di } A$

OSS: $A \sim B \Rightarrow$ invarianti $A =$ invarianti B . Viceversa falso

DEFINIZIONE 6.16

- i) $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(F_{|B})$;
- ii) $\det(f) = \det(F_{|B})$;
- iii) $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{Id}_V) = \det(F_{|B} - \lambda \text{Id}_m)$.

CALCOLO DI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI (TEOREMA 6.18)

\forall f.g. su campo \mathbb{K} , $f \in \text{End}(V)$. Allora:

- i) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovалore di f se $P_f(\lambda) = 0$;
- ii) $v \in V \setminus \{0\}$ è autovettore associato a λ se $v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_V)$.

Dim: $v \neq 0$ è autovettore se $f(v) = \lambda v = \lambda \cdot \text{Id}_V(v)$ se
 $(f - \lambda \text{Id}_V)(v) = 0$ se $v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_V) \setminus \{0\}$.

Questo è possibile se $\text{Ker}(F_{|B} - \lambda \text{Id}_m) \neq \{0_m\}$ se $|f - \lambda \text{Id}| = 0$. \square

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad f_A(\lambda) = A - \lambda I$$

$$\begin{aligned} P_{f_A}(\lambda) &= |f_A - \lambda \cdot \text{Id}_V| = |A - \lambda I_2| = P_A(\lambda) = |A| - \text{Tr}(A) \cdot \lambda + \lambda^2 = \\ &= (-4 + 3) + \lambda^2 = -1 + \lambda^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$ sono gli autovalori di A

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{Ker}(f_A - \lambda_1 \cdot \text{Id}_V) = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \text{Ker}(f_A - \lambda_2 \cdot \text{Id}_V) = \text{Ker}(A + I_2) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$