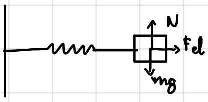
...

5.12 OSCILLATORE ARMONICO E OSCILLAZIONI SMORZATE/FORZATE

Studiamo il moto armonico dal punto di vista energetico. Consideriamo la molla:



Tutte le forze sono conservative:

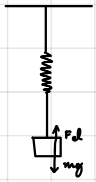
$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A \omega \cos(\omega t + \varphi))^2 = \frac{m A^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{\cancel{m} A^2}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \varphi\right)$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$= L_0 \cos(\omega t)$

$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

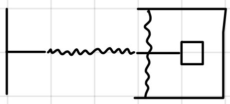
$\hookrightarrow E_m = E_c + E_p = \dots = \frac{A^2 K}{2}$ $\left(\frac{L_0 K}{2}\right)$



TODO: $E_m = ?$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{K}$

Consideriamo, nel primo caso, la presenza di attrito che smorza le oscillazioni (viscoso e radente):



$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \lambda \frac{dx}{dt}$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{2\gamma} \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

$\hookrightarrow x(t) = c e^{\alpha t}, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha c e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 c e^{\alpha t}$

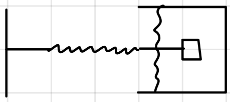
$\alpha^2 \cancel{c e^{\alpha t}} + 2\gamma\alpha \cancel{c e^{\alpha t}} + \omega_0^2 \cancel{c e^{\alpha t}} = 0$

$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0 = 0 \qquad \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

3 casi:

1. $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow e^{-\alpha t} \rightarrow$  $\rightarrow$ la viscosità frena
2. $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow e^{\alpha} e^{\beta i} \rightarrow$  $\rightarrow$ l'oscillazione viene smorzata

Se invece volessimo mantenere le oscillazioni anche in presenza di attrito? Dobbiamo aggiungere una forza che compensi l'energia persa. Essa deve essere applicata con una certa frequenza:



$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t)$

$\hookrightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ con: $A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$

$\tan(\varphi) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $(\varphi(\omega))$

$\hookrightarrow$ influenza la "risposta" della forzante.

$F_F = F_0 \sin(\omega t)$ — ω: frequenza con cui viene applicata la forza

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

- $\omega \ll \omega_0$, $\varphi \simeq 0$ $\rightarrow$ in fase (domina K)
- $\omega = \omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ risonanza (domina λ)
- $\omega \gg \omega_0$, $\varphi \simeq \pi$ $\rightarrow$ in opposizione (domina m)

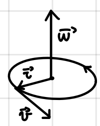
6. SISTEMI NON INERZIALI

6.1 VELOCITÀ/ACCELERAZIONE ANGOLARE VETTORIALE

Definiamo:

$\vec{\omega}$:
- MOD: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- DIR: $\perp$ piano di rot.
- VERSO: regola della mano destra

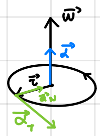
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha \hat{K}$

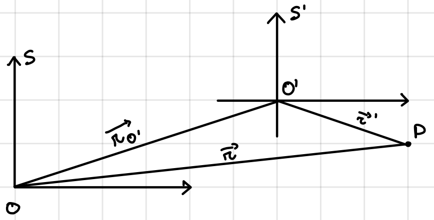
($\hat{K}$ è la direzione di $\vec{\omega}$)

$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{a_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{a_n}$



In moto uniforme: $\vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Consideriamo un sistema S inerziale e uno S' non inerziale



$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}}$

Se ho un sistema in traslazione: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$; se siamo in una rotazione: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$