1. FISICA

1.1 GRANDEZZE, LEGGI E PROCESSI FISICI

La fisica è una scienza SPERIMENTALE che studia gli elementi costituenti della materia. Per essere rigorosi bisogna associare dei numeri alla fisica. L'esperimento permette di associare 2 numeri a una grandezza fisica:

- la misura
- l'errore della misura. Quando l'errore viene ommesso si sottintende che l'errore ha lo stesso ordine dell'ultima cifra della misura

Le grandezze fisiche interagiscono tra di loro attraverso una legge fisica: una legge fisica definisce un processo fisico. Una legge fisica è valida finché riesce a prevedere i risultati sperimentali.

1.2 COME SI MISURA UNA GRANDEZZA FISICA?

1. Il primo passaggio è definire la classe di grandezze (DIMENSIONE) → $[sm]=[L]$; $[v]=[L][T]^{-1}$
2. Poi devo prendere un elemento della classe e usarlo come unità di misura.
3. Gli assegno un valore pari a $x=\frac{G}{U}$ dove G è una misurazione e U è l'unità

Posso cambiare unità di misura facendo: $x=x'\frac{U'}{U}$

1.3 MISURE DIRETTE E INDIRETTE

Una misura così ottenuta è detta diretta. È bene minimizzare il numero di misure dirette. In meccanica esse sono:

- LUNGHEZZA
- TEMPO
- MASSA

Il resto delle misurazioni è indiretta, ossia ottenute da un procedimento algebrico con le unità fondamentali.

1.4 SIGNIFICATO DELLE UNITÀ FONDAMENTALI

Una unità di misura deve avere una definizione universale.

- secondo: n oscillazioni tra 2 livelli di atomi di cesio
- metro: spazio percorso dalla luce nel vuoto in s secondi
- Kilogrammo: fino a pochi anni fa era un oggetto fisico.

Tutte le grandezze fisiche sono state legate a delle costanti fisiche.

1.5 PRINCIPIO DI OMOGENEITÀ

Il principio di omogeneità afferma che una legge fisica deve essere dimensionalmente corretta, ossia le operazioni devono operare tra grandezze coerenti.

Le equazioni dimensionali possono offrirci informazioni su un fenomeno:

$$t = K\cdot m^{\alpha}\cdot g^{\beta}\cdot h^{\gamma} \rightarrow [T] = \underset{\substack{\downarrow \\ K \text{ è adimensionale}}}{1}\cdot[M]^{\alpha}\cdot[L]^{\beta}[T]^{-2\beta}\cdot[L]^{\gamma} = [M]^{\alpha}\cdot[L]^{\beta+\gamma}\cdot[T]^{-2\beta}$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ -2\beta=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=-\frac{1}{2} \\ \gamma=\frac{1}{2} \end{matrix} \Longrightarrow t = K\,\cancel{m^0}\cdot\sqrt{\frac{h}{g}} = K\sqrt{\frac{h}{g}}$$

2. MECCANICA

Si occupa dello studio del moto di un corpo. Si divide in:

- CINEMATICA: moto di un corpo senza studiarne le cause
- DINAMICA. parte dalle cause per arrivare a descrivere il moto. Le cause sono le forze e sono dovute all'interazione con altri corpi
- STATICA: quali cause del moto fanno rimanere fermo il corpo.

Noi studieremo la cinematica e la dinamica del punto materiale

Il punto materiale è un corpo che:

- ha dimensioni piccole rispetto agli oggetti/distanze con cui interagisce
- la struttura interna non gioca ruolo significativo.

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali la cui distanza rimane costante.

3 CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

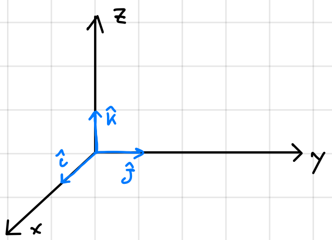
3.1 SISTEMI DI RIFERIMENTO

Prima di tutto dobbiamo definire un sistema di riferimento: senza di esso le misure delle distanze non hanno senso. La scelta del sistema di riferimento è arbitraria.

Al sistema di riferimento si associa un sistema di coordinate che ci permette di identificare coi numeri la posizione di un punto.

3.1.1 SISTEMA CARTESIANO

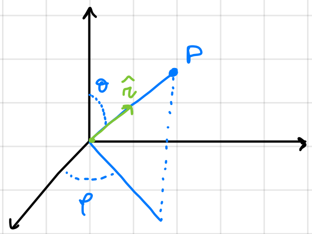
$P \mapsto (x, y, z)$



3.1.2 SISTEMA POLARE

$P \mapsto (r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$



3.2 IL PROBLEMA CINEMATICO E LEGGI ORARIE

Lo scopo della cinematica è capire dove mi trovo in dato istante, ossia definire le leggi orarie:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

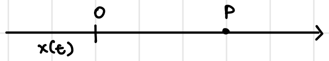
NOTA: Le leggi orarie non sono altro che la rappresentazione parametrica del nostro moto. Il parametro è il tempo. La rappresentazione algebrica è invece la traiettoria. Essa, infatti, perde informazioni sul tempo.

Il problema cinematico può essere rappresentato con:

- RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE: definita un'origine e un vettore posizione che varia nel tempo ($r(t)$), la rappresentazione vettoriale è: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ dove $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ sono i versori del sistema di riferimento.
- RAPPRESENTAZIONE ad ASCISSA CURVILINEA (INTRINSECA): conoscendo la traiettoria, fissiamo un'origine e un verso positivo. Lo spazio lungo la traiettoria nel verso positivo è detto ascissa curvilinea

3.2 MOTO RETTILINEO

Lo studiamo nella rappresentazione intrinseca:



Possiamo usare anche il diagramma orario.

3.2.1 VELOCITÀ SCALARE

Per descrivere quanto ci muoviamo sulla retta usiamo la velocità $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Nel diagramma orario essa è il coefficiente angolare della retta passante per due punti. Poiché la velocità così definita è una media, è bene definire la velocità istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_2}{t_2 - t_1} = \frac{d\,x(t)}{dt} = \underbrace{\dot{x}(t)}_{\text{NOTAZIONE COSIMO}}$$

$$[v] = [L][T]^{-1} = m/s$$

È ovvio, quindi, che nota $v(t)$ per trovare $x(t)$ facciamo:

$$dx = v(t)\,dt \implies x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + x_0$$

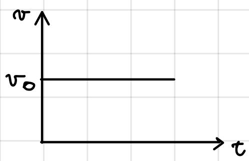
Questo è il cosiddetto PROBLEMA INVERSO.

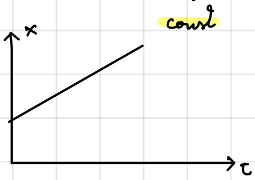
NOTA: Per passare da $v(t)$ a $x(t)$ è sempre necessario conoscere almeno 1 valore di x (x_0).

3.2.2 MOTO UNIFORME (RETTILINEO)

La velocità è costante. Risolvendo il problema inverso:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v_0(t - t_0) = \underbrace{(x_0 - v_0 t_0)}_{\text{cost}} + v_0 t$$





3.2.3 ACCELERAZIONE (SCALARE)

Quanto varia la velocità:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$[a] = [v][T]^{-1} = [L][T]^{-2} = m/s^2$$

Nel moto uniforme l'accelerazione è nulla. Il segno di $a(t)$ ci da' info su $v(t)$:

- $a(t) > 0$ $\quad v(t)$ cresce
- $a(t) < 0$ $\quad v(t)$ decresce

Risolvendo il problema inverso:

$$dv = a(t)\,dt = \ldots \implies v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

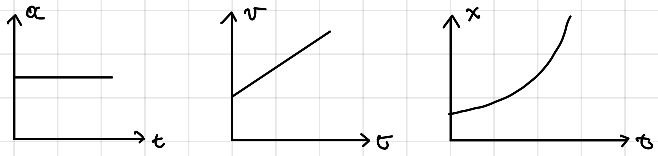
3.2.4 MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

L'accelerazione è costante:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt = v_0 + a_0(t - t_0) = \underbrace{(v_0 - a_0 t_0)}_{\text{cost}} + a_0 t$$

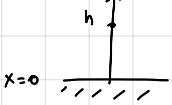
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 - a_0 t_0 + a_0 t) dt = x_0 + v_0(t - t_0) - a_0(t - t_0) + \left[a_0 \frac{t^2}{2}\right]_{t}^{t_0} =$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t^2 - 2tt_0 + t_0)^2 = \underbrace{x_0 + v_0(t - t_0)}_{\text{cost}} + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$



...

ESERCIZIO: caduta del grave



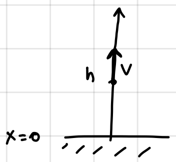
$t=0$ l'istante in cui lascio cadere

CONDIZIONI INIZIALI:
$x(0)=h$, $v(0)=0$

$a=-g$

$$v(t)=\cancel{v(0)}+\int_0^t -g\,dt=-g\int_0^t dt=-gt$$
$$x(t)=h+\int_0^t -gt\,dt=h-\frac{1}{2}gt^2$$

$$x(\tilde{t})=0 \rightarrow g\tilde{t}^2=2h \rightarrow \tilde{t}=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$



$t_0=0$ $a=-g$
$x(0)=h$
$v(0)=v_0$

$$v(t)=v_0-gt$$
$$x(t)=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$
$$v(\tilde{t})=0 \rightarrow \tilde{t}=\frac{v_0}{g} \Rightarrow x(\tilde{t})=h+\frac{v_0^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}=h+\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

3.3 MOTO NON RETTILINEO

Velocità e accelerazione scalare possono essere generalizzati al caso dell'ascissa curvilinea. Ma ora verrà usata la rappresent. vettoriale. È possibile scomporre il moto nelle 3 componenti e studiarle separatamente in modo unidimensionale.

3.3.1 VELOCITÀ E ACCELERAZIONE VETTORIALE

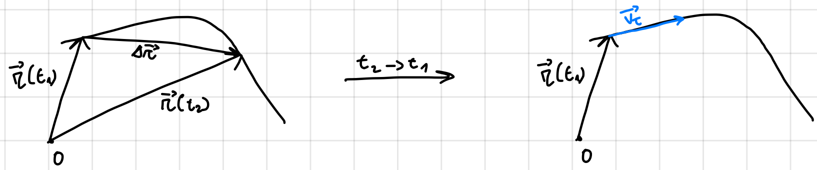
Si definisce la velocità media vettoriale.

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

e la istantanea:

$$\vec{v}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

La velocità vettoriale, quindi, indica quanto velocemente varia $\vec{r}$ rispetto a t.



$$\Delta\vec{r}=\Delta s\,\hat{u}_T \Longrightarrow \vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\frac{\Delta s}{\Delta t}\hat{u}_T}{dt}=v\,\hat{u}_T$$
$\downarrow$
tan traiettoria

Queste considerazioni di tipo geometrico ci spiegano che la velocità vett. è tangente indipendentemente dal sistema di coordinate.
La derivata di vettore è un altro vettore con componenti le derivate delle componenti. Questo ci permette di risolvere un problema scomponendolo in 3 problemi lineari.
Il problema inverso sarà:

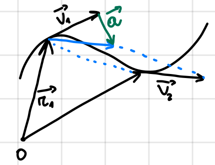
$$\vec{r}=\vec{r}_0+\int_{t_0}^t\vec{v}(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} x=x_0+\int_{t_0}^t\frac{dx}{dt}dt \\ y=y_0+\int_{t_0}^t\frac{dy}{dt}dt \\ z=z_0+\int_{t_0}^t\frac{dz}{dt}dt \end{cases}$$

Accelerazione media e istantanea si ricavano allo stesso modo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Che direzione ha l'accelerazione?

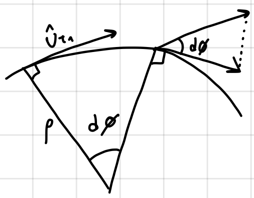


DIMOSTRAZIONE:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(t)\hat{u}(t)\right) = v'(t)\hat{u}(t) + v(t)\hat{u}'(t) = \underbrace{a(t)\hat{u}(t)}_{\text{dir. tangente}} + \underbrace{v(t)\hat{u}'(t)}_{\text{dir. ortogonale}} = a(t)\hat{u}(t) + v(t)\frac{v(t)}{\rho}\hat{u}_n(t) = \underbrace{a(t)\hat{u}(t)}_{a_T} + \underbrace{\frac{v^2(t)}{\rho}\hat{u}_n(t)}_{a_n}$$

$\frac{d\hat{u}(t)}{dt}$: 1) direzione: $\frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$: $\hat{u}\cdot\hat{u} = 1 \Rightarrow \frac{d(\hat{u}\cdot\hat{u})}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dt}\cdot\hat{u} + \hat{u}\frac{d\hat{u}}{dt} \overset{\text{comm.}}{=} 2\frac{d\hat{u}}{dt}\cdot\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u} \perp \frac{d\hat{u}}{dt}$

2) modulo:



$$|d\hat{u}_T| \simeq |\hat{u}_T|\,d\phi = d\phi$$

$$\left|\frac{du_T}{dt}\right| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

$$ds = \rho\, d\phi$$

↳ raggio circ. osculatrice

Queste considerazioni sono indipendenti dal sistema di riferimento.

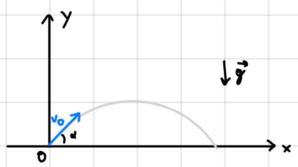
Le componenti dei nostri vettori saranno:

$$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$v(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

$$a(t) = x''(t)\hat{i} + y''(t)\hat{j} + z''(t)\hat{k}$$

ESERCIZIO: moto del proiettile



$t_0 = 0$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Leggi orarie? [1]

Traiettoria? [2]

Gittata? [3]

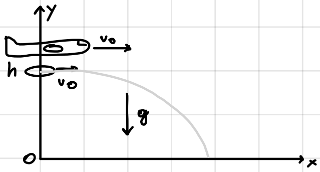
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + \cancel{\int_0^t a(t)\,dt} = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_{0y} + \int_0^t -g\,dt = v_{0y} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \int_0^t v_0\cos\alpha\,dt = v_0\cos\alpha\, t \\ y = \int_0^t v_0\sin\alpha - gt\,dt = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad [1]$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ y = \cancel{v_0}\sin\alpha\cdot\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha} + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0\cos^2\alpha} = \tan\alpha\cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \end{cases} \quad [2]$$

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\,\tilde{t} \\ v_0\sin\alpha\,\tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \quad [3] \\ \tilde{t}\left(v_0\sin\alpha - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2\right) = 0 \quad \begin{cases} \tilde{t}_1 = 0 \quad ✗ \\ \tilde{t}_2 = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \quad ✓ \end{cases} \end{cases}$$

...

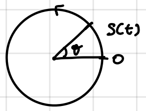
ESERCIZIO



$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} + 0 \\ v_y = v_{y0} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \cancel{x_0} + v_{0x} t \\ y = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

3.4 MOTO CIRCOLARE



Conviene usare la rapp. intrinseca. È anche più comodo usare θ per descrivere s:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{r} \longrightarrow s(t) = R\theta(t)$$

Esistono anche velocità e accelerazioni angolari

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow v(t) = R\omega(t) \qquad \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt$$

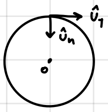
$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} \rightarrow a(t) = R\alpha(t) \qquad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$$

Sono utili anche il periodo e la frequenza:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Studiamo l'aspetto vettoriale:



$$\vec{a}(t) = \alpha(t)\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_n$$

ESERCIZIO

$a_{max} = 6g \qquad r = ?$

$v_0 = 2000\ Km/h$

$$\vec{a}_T = 0 \ (v \text{ cost}), \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n \Rightarrow a_n \leq 6g \Rightarrow R \geq \frac{v^2}{6g} \qquad R \geq \frac{2000 \cdot 10^3}{3600}\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{6 \cdot 9{,}8} = \dots = 5{,}5 \cdot 10^3\, m$$

4 DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Lo stato di moto di un punto m. è dovuto all'interazione con l'ambiente circostante. Questa interazione è detta FORZA.

1° principio della dinamica: esistono sistemi di riferimento detti inerziali in cui il corpo, quando non è soggetto a interazioni, si muove di velocità uniforme.

Con un semplice esperimento, si nota che ogni corpo ha una proprietà che si oppone alle interazioni detta MASSA INERZIALE. La massa inerziale è legata alla forza e all'accelerazione.

Definiamo la QUANTITÀ DI MOTO: $\vec{P} = m\vec{v}$. Secondo questa definizione dire che la velocità è costante implica quantità di moto costante. Possiamo così definire il secondo principio della dinamica:

2° principio della dinamica: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ $\quad [F] = [M][L][s^{-2}] = N$ (newton)

3° principio della dinamica: a ogni interazione corrisponde una uguale e contraria.

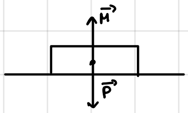
principio di sovrapposizione: la forza totale (risultante) delle forze applicate su un punto è pari alla somma delle singole forze.

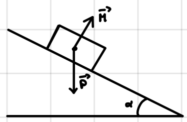
Quando un corpo è fermo? La risultante delle forze è nulla e la velocità nulla.

4.1 REAZIONI VINCOLARI

Prendiamo un oggetto di massa m appoggiato su una superficie. Su di esso agisce solo la forza gravitazionale. Il corpo è, però, fermo quindi deve esistere una forza che bilancia la forza gravitazionale. Questa forza è detta VINCOLARE.

La forza vincolare è sempre ortogonale al piano ed ha modulo pari alla componente ortogonale della forza che "schiaccia" il corpo al piano:



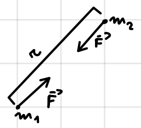


4.2 FORZA GRAVITAZIONALE

Dati due corpi con massa m_1 e m_2 a distanza r essi si attraggono con forza pari a:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6{,}66 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg\, s^2}$$



La m nella formula è la massa gravitazionale. Essa si è verificato essere pari a quella inerziale.

La forza peso è la conseguenza della forza gravitazionale esercitata tra la terra e il corpo. L'accelerazione di gravità è, approssimando la distanza tra terra e corpo pari al raggio terrestre, pari a:

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M_T}{R_T^2}$$

• • •

4.3 FORZE D'ATTRITO

Ci sono più tipi di attriti:
- attrito radente. due oggetti a contatto
- attrito volvente: un oggetto che ruota su un'altro
- attrito viscoso: un oggetto che si muove in un fluido.

4.3.1 ATTRITO RADENTE

Nasce dalle irregolarità di due oggetti a contatto: esse si oppongono al movimento.
Finché la forza applicata al corpo non supera un certo F_{MAX}, l'oggetto non si muove. La forza F_{MAX} dipende da:
- il materiale dei due oggetti
- la forza che preme i due oggetti uno sull'altro.

La forza di attrito F_{AT}, quindi, si oppone alla forza che vuole muovere l'oggetto finché $F_{AT} \leq F_{max}$. Se $F_{AT} > F_{MAX}$ il corpo inizia a muoversi. La soglia di movimento è:

$$F_{AT} < \mu_S N$$

μ_S: coefficiente di attrito statico
N: la reazione vincolare della superficie

Se invece il corpo si muove, la forza di attrito sarà:

$$\vec{F}_{AD} = -\mu_D N \hat{u}_v$$

μ_D: coeff. attrito dinamico
N: la reazione vincolare
$\hat{u}$: il versore del vettore velocità

4.3.2 ATTRITO VISCOSO

Sperimentalmente si è trovato che

$$\vec{F}(t) = -K\,\vec{v}(t)$$

K: coefficiente di attrito viscoso.

NOTA: la forza di attrito viscoso è la prima forza d'attrito ad essere variabile in modulo in quanto dipende da $\vec{v}$ e non da $\hat{u}_v$.
Studiando un corpo in caduta libera in un fluido, la sua velocità tenderà a una velocità limite pari a $V_L = \frac{mg}{K}$

4.4 TENSIONE DI FUNI

Le funi ideali devono avere certe caratteristiche:
- inestensibile
- massa trascurabile rispetto alle altre masse

Nel caso statico la tensione è una forza opposta a quella che tira la fune. Se immaginiamo di suddividere la fune in tanti pezzettini, ognuno tira l'altro. Ciò ci permette di dimostrare che la tensione da un capo all'altro della fune è uguale.

Nel caso dinamico ripetendo lo stesso procedimento di prima e usando il fatto che la massa è trascurabile si dimostra che la tensione ai due capi della fune è uguale.

...

4.5 FORZA ELASTICA

La molla ideale soddisfa la proprietà:

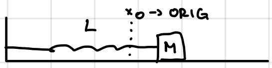
$$\boxed{\vec{F}_{EL} = -K(x - x_0)\,\hat{u}_x}$$ (Legge di Hooke)

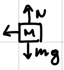
↳ $\hat{u}_x$: direzione della molla, rivolto verso la massa
↳ x_0: lunghezza a riposo della molla
↳ K: costante elastica della molla

La forza elastica dipende dalla deformazione della molla. La molla ideale lavora sia in compressione che in allungamento

Studiamo il caso dinamico. Prendiamo questa situazione:

Se allunghiamo la molla avremo





$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K(x - x_0)$$

$$\downarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \longrightarrow \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{K}{m}x = 0}_{\text{EQ. DIFF.}} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

MOTO ARMONICO

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Il corpo M, quindi, oscillerà di moto armonico. Risolvendo il problema troviamo che il periodo è $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

4.6 MOTO CIRCOLARE (DINAMICA)

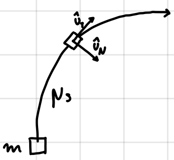
Sapendo che $\vec{F} = m a$, la forza che fa muovere un corpo in traiettoria non rettilinea è:

$$\vec{F} = m\left(a\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N\right)$$

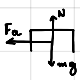
Se la traiettoria è circolare avremo che:

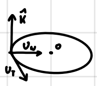
$$\rho = R \implies \vec{F} = m\left(a\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N\right)$$

ESERCIZIO



v è costante, il moto è circolare uniforme.
Devono esserci solo componenti radiali, sennò non è uniforme.





→ lungo $\hat{k}$: $mg = N$

lungo u_N: $F_A = m\frac{v^2}{R} \rightarrow F_a \leq \mu_s N \quad \cancel{m}\frac{v^2}{R} \leq \mu \cancel{m} g \quad v \leq \sqrt{\mu g R}$

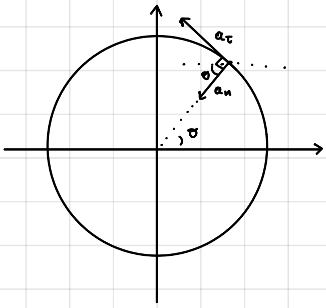
ESERCITAZIONE

ES. 1

$s(t) = 2t^2 + 3t + 3$ $\qquad a_n?\quad a_\tau?$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\tau + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$ $\qquad a_\tau = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 4\ m/s^2$

$a_n = \frac{(4t^2+3)^2}{R} =$



$\begin{cases} a_{nx} = -a_n\cos\vartheta \\ a_{ny} = \ominus a_n \sin\vartheta \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a_{\tau x} = -a_\tau \sin\vartheta \\ a_{\tau y} = +a_\tau\cos\vartheta \end{cases}$

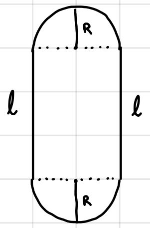
non è orientato nella stessa direzione dell'asse

$\Downarrow$

$\begin{cases} a_x = -\frac{(4t+3)^2}{R}\cos\vartheta - 4\sin\vartheta \\ a_y = -\frac{(4t+3)^2}{R}\sin\vartheta + 4\cos\vartheta \end{cases}$

ES. 2

$L = 400\ m \qquad l = 120\ m \qquad T = 71\ s \qquad d = 1\ Km = 10^3\ m$



$L = 2\pi R + 2l \rightarrow R = \frac{L-2l}{2\pi}$

$v = \frac{d}{T} \cong 14{,}1\ m/s$

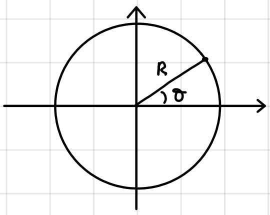
$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(14{,}1)^2}{L-2l}\cdot 2\pi = 7{,}81\ m/s$

$w = \frac{V}{R} = \ldots = 0{,}55\ rad/s$

ES. 3

$R,\ \alpha$ const $\qquad \vec{v}_i?\quad \vec{v}_f?$

$\qquad \vec{a}_i?\quad \vec{a}_f?$



$w(t) = \int_0^t \alpha\, dt = \alpha t \qquad \vartheta(t) = \int_0^t w(t)dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow 2\pi = \frac{1}{2}\alpha T^2 \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}$

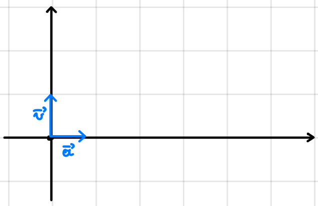
$v(t) = wR = \alpha R t \rightarrow \vec{v}_i = \vec{0},\ \vec{v}_f = \alpha R T\cdot\hat{u}_\tau = \sqrt{4\pi\alpha}\cdot\hat{u}_\tau$

$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \alpha R\hat{u}_\tau + \frac{\alpha^2R^2t^2}{\cancel{R}}\hat{u}_N \rightarrow \vec{a}_i = \alpha R\hat{u}_\tau \qquad a_f = \alpha R\hat{u}_\tau + \frac{4\pi}{\cancel{\alpha}}\cdot\cancel{\alpha}^2 R\cdot\hat{u}_N = \alpha R\hat{u}_\tau + 4\pi\alpha R\hat{u}_N$

ES. 4

$A = 10\ m/s^2 \qquad B = 15\ m/s$

$\vec{a}(0) = A\hat{u}_x \qquad r(0) = \vec{0} \qquad v(0) = B\hat{u}_y$



$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}At^2 \\ y(t) = Bt \end{cases}$

$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}At^2\hat{u}_x + Bt\hat{u}_y$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = At\hat{u}_x + B\hat{u}_y \rightarrow |v(t)| = \sqrt{A^2t^2+B^2}$

$\vec{a}(t) = \frac{d|v(t)|}{dt}\hat{u}_T + \frac{|v(t)|}{\rho}\hat{u}_N$

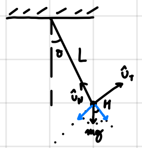
$\vec{a}_t = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{A^2t^2+B^2}}\cdot 2A^2t \rightarrow a_t(2) = 8\ m/s$

$\vec{a}_n = \frac{|v(t)|}{\rho} = \vec{a}(t) - \vec{a}_\tau \rightarrow a_n(2) = \sqrt{a^2(2)+a_\tau^2(2)} = \sqrt{10^2+8^2} = 6\ m/s^2$

...

4.7 PENDOLO SEMPLICE

Un pendolo semplice è una massa appesa a una fune ideale attaccata al soffitto. L'attrito dell'aria non viene considerato.
La traiettoria è un arco di circonferenza, viene quindi modellato bene dal moto circolare. Come si vedrà nella nota m, ci limitiamo allo studio di piccole oscillazioni.



$$\begin{cases} \hat{u}_T: & -mg\sin\theta(t) = -m\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = -ma(t) \\ \hat{u}_N: & T - mg\cos\theta(t) = m\dfrac{ds(t)}{dt}^2 \cdot \dfrac{1}{L} = m\dfrac{v(t)^2}{L} \end{cases} \qquad s(t) = L\theta(t)$$

$$\begin{cases} -\cancel{m}g\sin\theta(t) = \cancel{m}L\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} \to \dfrac{d^2\theta(t)}{dt} + \dfrac{g}{L}\sin\theta(t) = 0 \xrightarrow{T'} \dfrac{d^2\theta(t)}{dt} + \dfrac{g}{L}\theta(t) = 0 \xrightarrow{M.A.} \theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t + \varphi\right) \\ T - mg\cos\theta(t) = m\dfrac{L^{\cancel{2}}}{\cancel{L}}\dfrac{d\theta(t)}{dt}^2 = mL\dfrac{d\theta(t)}{dt} \end{cases}$$

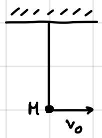
Non risolvibile analiticamente → approssimiamo con Taylor in $\theta(t) \to 0$ (piccole oscillazioni)

Sapendo che $\theta(0) = 0$, $\omega(0) = 0$:

$$\begin{cases} \theta_0 = A\sin(\varphi) \\ 0 = A\sqrt{\dfrac{g}{L}}\cos(\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \theta_0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \theta(t) = \theta_0\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right)$$

$$\hookrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ESERCIZIO



v min affinché faccia il giro

$$T - mg\cos\theta(t) = L\frac{d\theta}{dt}^2 m = m\frac{v^2}{L}$$

$T \geq 0 \to T = \cancel{m}\dfrac{v^2}{L} + \cancel{m}g\cos(\theta(t)) \geq 0$ $\qquad v^2 \geq -gL\cos\theta(t) \xrightarrow{\theta(t)=\pi} \underline{\underline{v \geq \sqrt{gl}}}$

(la fune non può cadere)

5 LAVORO ED ENERGIA

5.1 LAVORO

Se su un punto m. è applicata $\vec{F}$ ed esso si sposta di $d\vec{r}$, si dice lavoro infinitesimo: $dL = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Se:
- $dL > 0$, esso si dice motore $(\theta < \frac{\pi}{2})$
- $dL = 0$, esso si dice nullo $(\theta = \frac{\pi}{2})$
- $dL < 0$, esso si dice resistente $(\theta > \frac{\pi}{2})$

Studiamo le componenti $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_T\hat{u}_T + F_N\hat{u}_N)\cdot ds\,\hat{u}_T = (F_T\hat{u}_T\cdot\hat{u}_T + \cancel{F_N\hat{u}_N\cdot\hat{u}_T})\cdot ds = F_T\,ds$$

Si può vedere che conta solo la componente tangente al moto della forza

Se consideriamo un percorso γ da A a B possiamo definire il lavoro come: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma}^{B}F_x\,dx + \int_{A\gamma}^{B}F_y\,dy + \int_{A\gamma}^{B}F_z\,dz$
L'unità di misura è il Joule ($[J] = [M][L]^2[T]^{-2}$)

Se su un punto materiale agiscono più forze, il lavoro totale è la somma dei lavori delle singole forze:

$$dL = \vec{F}_1 d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_N)d\vec{r} = \vec{F}_R\,d\vec{r}$$

5.2 POTENZA

Si definisce potenza come:

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} \qquad [W] = [\text{Lavoro}][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-3}$$

. . .

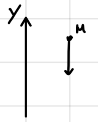
5.3 TEOREMA ENERGIA CINETICA (FORZE VIVE)

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_T \hat{u}_T \cdot ds\, \hat{u}_T + \cancel{F_N \hat{u}_N \cdot ds\, \hat{u}_T} = F_T ds = m a\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m\, dv \cdot \frac{ds}{dt} = m v\, dv$$

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_A^B dL = \int_{v_A}^{v_B} m v\, dv = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_B^2$$

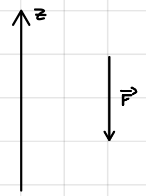
Si definisce energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Quindi $L^{\gamma}_{AB} = \Delta E_c$.
L'energia cinetica ha unità di misura pari al lavoro (Joule)

5.4 LAVORO FORZA PESO, FORZA COSTANTE E FORZE CONSERVATIVE



$$\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{j}$$

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -m \cdot g \underbrace{\hat{j} \cdot d\vec{r}}_{dy} = -mgh \Rightarrow$$ il lavoro della forza peso non dipende dal cammino

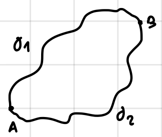


$z \parallel \vec{F}$ discorde in verso.

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\, \hat{k} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\, dz = -mg(z_b - z_a)$$

Possiamo definire questo tipo di forza come FORZA CONSERVATIVA: $\vec{F}$ conservativa se $L^{\gamma_1}_{AB} = L^{\gamma_2}_{AB} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$
Possiamo anche definire una forza conservativa osservando che:

$\vec{F}$ cons. $\rightarrow L^{\gamma_1}_{AB} = L^{\gamma_2}_{AB} \rightarrow L^{\gamma_1}_{AB} - L^{\gamma_2}_{AB} = L^{\gamma_1}_{AB} + L^{\gamma_2}_{BA} = 0$ ma $\gamma_1 + \gamma_2$ è un percorso chiuso



$$\downarrow$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

il lavoro lungo un percorso chiuso è detto circuitazione

Il contrario si dimostra in modo equivalente.

Quindi una forza è conservativa se e solo se ha circuitazione nulla.

5.5 ENERGIA POTENZIALE

Se una forza è conservativa, contano solo i punti A e B. Allora esso dipende da una proprietà dei punti A e B. Quindi deve esistere una funzione di stato, chiamata energia potenziale, tale che:

$$dL = -dE_p \quad \text{con} \quad E_p(x, y, z)$$

$$\downarrow$$

$$L_{AB} = \int_A^B -dE_p = -(E_{pB} - E_{pA})$$

5.6 CONSERVATIVITÀ DELLE FORZE

5.6.1 FORZA ELASTICA

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_{A\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^B -Kx \underbrace{\hat{u}_x \cdot d\vec{r}}_{dx} = -K \int_A^B x\, dx = -\left(\frac{1}{2} K x_b^2 - \frac{1}{2} K x_A^2\right) \rightarrow E_p = \frac{1}{2} K x^2$$

5.6.2 FORZA GRAVITAZIONALE E CENTRALI A SIMMETRIA SFERICA

La forza gravitazionale è una forza centrale a simmetria sferica:
- la direzione è la retta congiungente il centro della forza con il punto
- il modulo dipende solo dalla distanza dei due punti.

Le osservazioni fatte per questa classe di forze vale anche per la gravitazionale e viceversa.

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \underbrace{f(r)\,\hat{u}_{r}}_{-\gamma\frac{m_1 m_2}{r'^2}} \, d\vec{r} = \int_A^B -\frac{m_1 m_2}{r'^2}\, dr' = -\gamma m_1 m_2 \int_A^B \frac{1}{r^2}\, dr = -\left(\frac{\gamma m_1 m_2}{r_B} + \frac{\gamma m_1 m_2}{r'_A}\right) \longrightarrow E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

5.6.3 FORZA ATTRITO RADENTE

$$L^{\gamma}_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma}^{B} -\mu_D N\, \hat{u}_v \cdot dr = \int_{A\gamma}^{B} -\mu_D N\, \hat{\mu}_T \cdot ds\, \hat{\mu}_T = -\mu_D N \int_{A\gamma}^{B} ds \rightarrow \text{non è conservativa}$$

5.7 CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

Date forze conservative sappiamo che: $L^{\gamma}_{AB} = E_C^B - E_C^A$ e $L_{AB} = -(E_P^B - E_P^A)$. Quindi avremo:

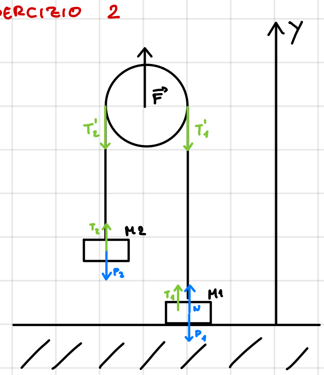
$$E_C^B + E_P^B = E_C^A + E_P^A$$

Deve allora esistere una grandezza costante del moto pari alla somma di energia cinetica e potenziale: l'energia meccanica.

Questo è detto teorema dell'energia meccanica.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2



$$\begin{cases} -m_1 g + N + \cancel{T_1}^{T} = \cancel{m_1 a_1}^{0} \text{ per Hp} \\ -m_2 g + \cancel{T_2}^{T} = m_2 a_2 \\ F - \cancel{T_1'}^{T} - \cancel{T_2'}^{T} = \cancel{m_C a_C}^{0} \text{ per Hp} \end{cases}$$

$T = T_1 = T_1' = T_2 = T_2'$ perché la fune è inestensibile

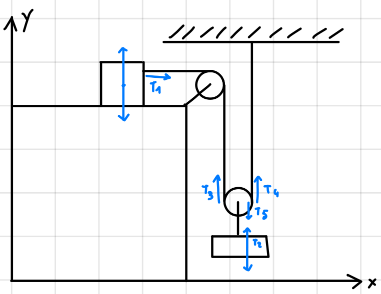
$$\downarrow$$

$$\begin{cases} -m_1 g + N + T = 0 \\ -m_2 g + T = m_2 a_2 \\ F = 2T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m_1 g + N + F/2 = 0 \\ \sim \\ T = F/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = m_1 g + F/2 \\ \sim \\ \sim \end{cases}$$

$N \geq 0$ $\qquad$ $N \geq 0$ $\qquad$ $N \geq 0$

$F \leq 2 m_1 g$ -> il max è $F = 2 m_1 g$

ESERCIZIO 4

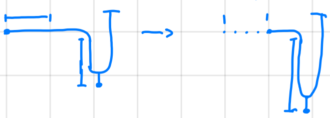


$$\begin{cases} \begin{cases} T_1 = m_1 a_{1x} \\ N - m_1 g = \cancel{m_1 a_{1y}} \end{cases} \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y} \\ T_3 + T_4 - T_5 = \cancel{m_C a_{Cy}} \end{cases}$$

$T = T_1 = T_3 = T_4$, $T' = T_2 = T_5$ perché fune ideale

$\Delta y = -\frac{1}{2} \Delta x \;\rightarrow\; a_{2y} = -\frac{1}{2} a_{1x}$

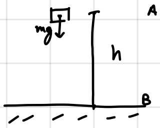
(visto che la fune ha lunghezza fissa, quindi bisogna contare come la lunghezza si ripartisce:



$$\begin{cases} T = m_1 a_{1x} \\ N = m_1 g \\ T' - m_2 g = -m_2 \frac{1}{2} a_{1x} \\ T' = 2T \end{cases} \rightarrow 2T - m_2 g = -\frac{1}{2} m_2 a_{1x} \rightarrow 2 m_1 a_{1x} - m_2 g = -\frac{1}{2} m_2 a_{1x}$$

$$\left(2 m_1 + \tfrac{1}{2} m_2\right) a_{1x} = m_2 g \rightarrow a_{1x} = \frac{m_2 g}{2 m_1 + \frac{1}{2} m_2} \quad , \quad a_{2x} = -\frac{m_2 g}{4 m_1 + m_2}$$

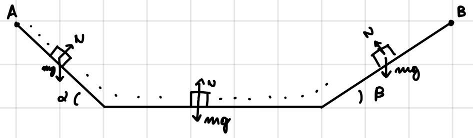
ESERCIZI



$E_M^A = E_C^A + E_P^A = \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{0 \to \text{parte fermo}} + mgh = mgh$

$E_M^B = \frac{1}{2} m v_B^2 + \cancel{mg0} = \frac{1}{2} m v_B^2$

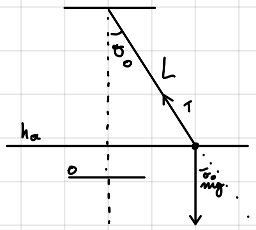
$\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \cancel{m} g h \qquad v_B = \sqrt{2gh}$



$E_A^P = mgh_A = E_M^A$

$E_M^B = E_P^B = mgh_B$

$E_M^B = E_M^A \to h_A = h_B$



$v(\theta) = ?$

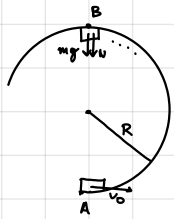
$E_m^A = mgh_a = mg(L - L\cos\theta_0)$

$E_m^\theta = \frac{1}{2} m v^2(\theta) + mgh(L - L\cos\theta)$

$\cancel{m}g(L - L\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2(\theta) + \cancel{m}g\cancel{h}(L - L\cos\theta)$

$\cancel{gL} - gL\cos\theta_0 = \frac{1}{2} v^2(\theta) + \cancel{gL} - gL\cos\theta$

$v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad \to \quad v(0) = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$



v_0 affinché non cada?

$u_n: \; N + mg = \frac{mv^2}{R} \quad \to \quad N = \frac{mv_\pi^2}{R} - mg \geq 0$

$E_M^A = E_m^B \quad \to \quad E_M^A = \frac{1}{2} m v_0^2, \; E_M^B = \frac{1}{2} m v_\pi^2 + mg2R \quad \to \quad \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m} v_\pi^2 + \cancel{m}g2R \qquad v_\pi^2 = v_0^2 - 4gR$

$\downarrow$

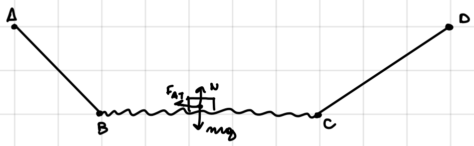
$N = \frac{m v_\pi^2}{R} - mg = 0 \quad \to \quad v_\pi^2 = gr \quad \to \quad v_0 = \sqrt{5gR}$

5.8 GENERALIZZAZIONE TEOREMA ENERGIA MECCANICA

L'energia meccanica in un punto meno l'energia potenziale in un altro è pari al lavoro delle forze non conservative:

$$E_M^B - E_M^A = L^{NC}$$

ESERCIZIO



$E_M^A = mgh_A$

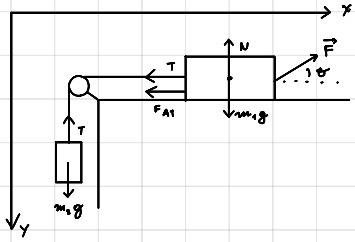
$E_m^D = mgh_D$

$L^{NC} = L_{BC} = \int_B^C \vec{F}_{AT}\, d\vec{\tau} = \int_B^C F_{AT}\, dx = -\mu_D mg \int_B^C dx = -\mu_D m g L$

$\cancel{m}gh_D - \cancel{m}gh_A = -\mu_D \cancel{m}gL \quad \to \quad h_D = h_a - \mu_D L$ (se $h_d < 0$, il corpo si ferma nel tratto BC)

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO



1) Per quale F il sistema non è più in equilibrio ($\vec{F}$ sposta)

$$\begin{cases} F\cos\theta - T - F_{AT} = 0 & \rightarrow F_{AT} = F\cos\theta - m_2 g \\ m_1 g - N - F\sin\theta = 0 & \rightarrow N = m_1 g - F\sin\theta \\ m_2 g - T = 0 & \rightarrow T = m_2 g \end{cases}$$

poiché in eq., l'attrito è statico : $F_{AT} < \mu_s N \rightarrow F\cos\theta - m_2 g \leq \mu_s(m_1 g - F\sin\theta)$

$$F\cos\theta + \mu_s F\sin\theta \leq m_2 g + \mu_s m_1 g$$

$$F \leq \frac{m_2 g + \mu_s m_1 g}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

$$\downarrow$$

il sistema si muove per $F > \dfrac{m_2 g + \mu_s m_1 g}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$

2) a quando il sistema si muove?

$$\begin{cases} F\cos\theta - T - \mu_D N = m_1 a & \rightarrow F\cos\theta - T - \mu_D m_1 g + \mu_D F\sin\theta = m_1 a \\ m_1 g - N - F\sin\theta = 0 & \rightarrow N = m_1 g - F\sin\theta \\ m_2 g - T = -m_2 a & \rightarrow T = m_2 g + m_2 a \end{cases}$$

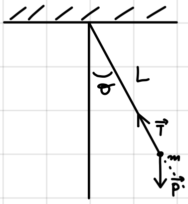
$$\rightarrow F\cos\theta - m_2 g - m_2 a - \mu_D (m_1 g - F\sin\theta) = m_1 a$$

$$a(m_1 + m_2) = F\cos\theta - m_2 g - \mu_D m_1 g - \mu_D F\sin\theta$$

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_D \sin\theta) - g(m_2 + \mu_D m_1)}{m_1 + m_2}$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1



$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$$

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m a_t \\ -mg\cos\theta + T = m a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} = Lm\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ -mg\cos\theta + T = \dfrac{m}{L}\left(\dfrac{d\,s(t)}{dt}\right)^2 = \dfrac{m}{\cancel{L}}L^{\cancel{2}}\left(\dfrac{d\,\theta(t)}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

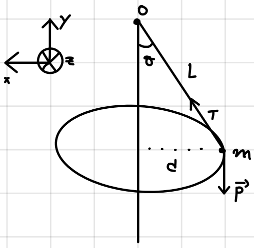
Considerando piccole oscillazioni:

$$\begin{cases} -\cancel{m}g\overset{\theta(t)}{\cancel{\sin\theta}} = \cancel{m}L\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\ \end{cases}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta(t)=0 \quad\to\quad \theta(t)=\theta(0)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)$$

Il periodo sarà: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \Rightarrow \begin{cases} nT = 61 \text{ min} \\ nT' = 60 \text{ min} \end{cases} \to \dfrac{T'}{T} = \dfrac{60}{61} = \sqrt{\dfrac{L'}{L}} \Rightarrow L' = \left(\dfrac{60}{61}\right)^2 L$

ESERCIZIO 2



d? T? $m = 5\,Kg$ $L = 5\,m$ $w = 1{,}5\ \frac{rad}{s}$ cost θ

$$m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T\sin\theta = m\omega^2 d \\ -mg + T\cos\theta = 0 \\ /// \end{cases}$$

$(d = L\sin\theta)$

$$\begin{cases} T = m\omega^2 L = 56{,}25\ N \\ \cos\theta = g/\omega^2 L \end{cases}$$

$$d = L\sin\theta = L\sqrt{1-\cos^2\theta} = L\sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4 L^2}} = 2{,}45\ m$$

. . .

5.9 STATICA

Data una forza conservativa $\vec{F}$ applicata su un corpo che si muove lungo x, il lavoro di $\vec{F}$ sarà:

$$dL = F_x\,dx = -[E_p(x+dx,y,z) - E_p(x,y,z)]$$

$$F_x = \frac{-[E_p(x+dx,y,z) - E_p(x,y,z)]}{dx} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

Generalmente:

$$\begin{cases} F_x = \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \iff \vec{F} = -\underbrace{\nabla}_{\text{GRADIENTE}} E_p$$

Poiché un corpo è fermo quando la risultante è nulla, l'istante in cui il corpo è fermo è un punto stazionario di E_p.
La concavità della curva ci danno indicazioni sul verso delle forze:
- minimo: $\vec{F_x}$ è rivolta verso l'interno; l'equilibrio è detto STABILE
- massimo: $\vec{F_x}$ è rivolto verso l'esterno; l'equilibrio è detto INSTABILE
- flesso a tg h.: l'equilibrio è detto INDIFFERENTE

5.10 MOMENTO ANGOLARE E DI UNA FORZA

Dato un corpo m con velocità $\vec{v}$ si dice momento angolare rispetto al polo O

$$\vec{L_O} = \vec{r_O} \times \vec{p} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{r_O}: \text{vettore congiungente O e m}$$

$$\vec{L_{O'}} = \vec{L_O} + \vec{r_{OO'}} \times m\vec{v}$$

Data una forza $\vec{F}$ si dice momento di $\vec{F}$ rispetto ad un polo O

$$\vec{M_O} = \vec{r_O} \times \vec{F} \qquad \vec{M'_O} = \vec{M_O} + \vec{r_{OO'}} \times \vec{F}$$

Generalmente si dice momento di un vettore: $\vec{M_O} = \vec{r_O} \times \vec{a}$.

Il momento di tutte le forze è pari al momento della risultante.

5.11 TEOREMA DEL MOMENTO

Andando a derivare il momento angolare abbiamo:

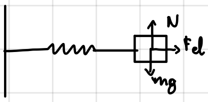
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F} = \cancel{\vec{v}\times m\vec{v}} + \vec{r}\times\vec{F} = M_O \quad (\text{se il polo O è fisso})$$

Ciò significa che il momento di un corpo si conserva. Se il momento delle forze è nullo, allora il momento angolare è costante (modulo, verso e direzione).

• • •

5.12 OSCILLATORE ARMONICO E OSCILLAZIONI SMORZATE/FORZATE

Studiamo il moto armonico dal punto di vista energetico. Consideriamo la molla:



$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

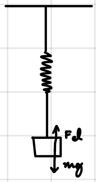
$= L_0 \cos(\omega t)$

Tutte le forze sono conservative:

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A\omega \cos(\omega t + \varphi))^2 = \frac{m A^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{\cancel{m} A^2}{2} \frac{K}{\cancel{m}} \cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \varphi\right)$

$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

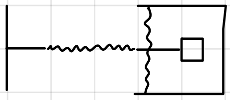
$\hookrightarrow E_m = E_c + E_p = \dots = \frac{A^2 K}{2}$ $\left(\frac{L_0 K}{2}\right)$



TODO: $E_m = ?$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{K}$

Consideriamo, nel primo caso, la presenza di attrito che smorza le oscillazioni (viscoso e radente):



$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \lambda \frac{dx}{dt}$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{2\gamma} \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

$\hookrightarrow x(t) = c e^{\alpha t}, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha c e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 c e^{\alpha t}$

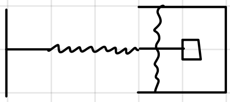
$\alpha^2 \cancel{c e^{\alpha t}} + 2\gamma \alpha \cancel{c e^{\alpha t}} + \omega_0^2 \cancel{c e^{\alpha t}} = 0$

$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0 = 0 \qquad \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

3 casi:

1. $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow e^{-\alpha t} \rightarrow$  $\rightarrow$ la viscosità frena
2. $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow e^{\alpha} e^{\beta i} \rightarrow$  $\rightarrow$ l'oscillazione viene smorzata

Se invece volessimo mantenere le oscillazioni anche in presenza di attrito? Dobbiamo aggiungere una forza che compensi l'energia persa. Essa deve essere applicata con una certa frequenza:



$F_F = F_0 \sin(\omega t)$

$\downarrow$ frequenza con cui viene applicata la forza

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t)$

$\hookrightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ con: $A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$

$\tan(\varphi) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\quad (\varphi(\omega))$

$\hookrightarrow$ influenza la "risposta" della forzante.

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0, & \varphi \simeq 0 \rightarrow \text{in fase (domina } K) \\ \omega = \omega_0, & \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{risonanza (domina } \lambda) \\ \omega \gg \omega_0, & \varphi \simeq \pi \rightarrow \text{in opposizione (domina } m) \end{cases}$$

6. SISTEMI NON INERZIALI

6.1 VELOCITÀ/ACCELERAZIONE ANGOLARE VETTORIALE

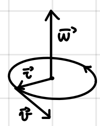
Definiamo:

$\vec{\omega}$: MOD: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

DIR: $\perp$ piano di rot.

VERSO: regola della mano destra

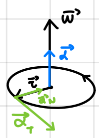
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \alpha \hat{K}$

($\hat{K}$ è la direzione di $\vec{\omega}$)

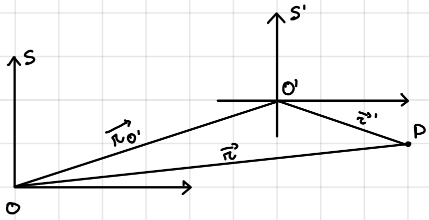
$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{v_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{v_n}$



In moto uniforme: $\vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

6.2 RELAZIONE TRA LE VELOCITÀ

Consideriamo un sistema S inerziale e uno S' non inerziale

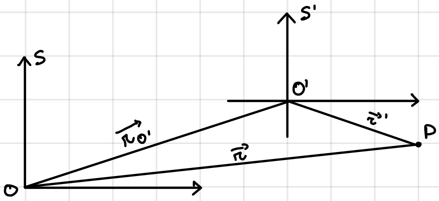


$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}}$$

Se ho un sistema in traslazione: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$; se siamo in una rotazione: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

6.2.2 DIMOSTRAZIONE



$\vec r = \vec r_{O'} + \vec r\,' \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r_{O'}}{dt} + \frac{d\vec r\,'}{dt}$

$\Downarrow$

$\vec v = \vec v_{O'} + \frac{d\vec r\,'}{dt}$

$\vec r\,' = r'_x \hat i' + r'_y \hat j' + r'_z \hat k' \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec r\,'}{dt} = \frac{d r'_x \hat i'}{dt} + \frac{d r'_y \hat j'}{dt} + \frac{d r'_z \hat k'}{dt} =$

$= \frac{dr'_x}{dt}\hat i' + r'_x \frac{d\hat i'}{dt} + \frac{dr'_y}{dt}\hat j' + r'_y \frac{d\hat j'}{dt} + \frac{dr'_z}{dt}\hat k' + r'_z \frac{d\hat k'}{dt} =$

$= \left(\frac{dr'_x}{dt}\hat i' + \frac{dr'_y}{dt}\hat j' + \frac{dr'_z}{dt}\hat k'\right) + \left(r'_x \frac{d\hat i'}{dt} + r'_y \frac{d\hat j'}{dt} + r'_z \frac{d\hat k'}{dt}\right) =$

$= \vec v\,' + [r'_x(\vec\omega\times\hat i') + r'_y(\vec\omega\times\hat j') + r'_z(\vec\omega\times\hat k')]$

FORMULA DI POISSON

$= \vec v\,' + [\vec\omega\times r'_x\hat i' + \vec\omega\times r'_y\hat j' + \vec\omega\times r'_z\hat k'] =$

$= \vec v\,' + \vec\omega\times\vec r\,'$

$\vec v = \vec v\,' + \vec v_{O'} + \vec\omega\times\vec r$

NOTA: FORMULA DI POISSON: $\frac{d\hat u}{dt} = \vec\omega\times\hat u$

6.3 LEGAME TRA ACCELERAZIONI

Usando la stessa situazione di prima, possiamo affermare che le accelerazioni sono legate dalla seguente formula:

$$\underset{S}{\vec a} = \underset{S'}{\vec a\,'} + \underbrace{\vec a_{O'} + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,')}_{a.\ trasl.} + \underbrace{2\vec\omega\times\vec v\,'}_{a\ Coriolis.}$$

L'accelerazione di trascinamento c'è sempre quando S' ruota. L'accelerazione di Coriolis, invece, è presente solo se l'oggetto si muove all'interno del sistema S'.

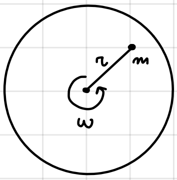
6.4 DINAMICA DEI SISTEMI NON INERZIALI

Usando la definizione di forza possiamo scrivere:

$$\vec F = m\vec a = m(\vec a\,' + \vec a_T + \vec a_c) = m\vec a\,' + m\vec a_T + m\vec a_c$$

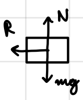
Possiamo notare che il principio della dinamica non vale. Se, invece, consideriamo due forze apparenti, allora possiamo estendere il primo principio della dinamica ai sistemi non inerziali.

ESERCIZIO



cost ω

$\hat u_n \begin{cases} R = \frac{mv^2}{r} \\ N = mg \end{cases} \hat k$



se consideriamo un sistema mobile:

$\vec a\,' = \vec a\,' + \vec a_T + \vec a_c \rightarrow m\vec a = / + m\vec a_T + m\vec a_c$

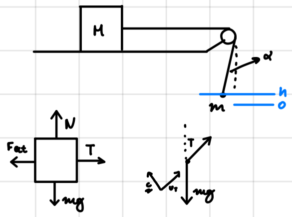
$= \cancel{\vec a_{O'}} + \omega\times(\omega\times\vec r\,') + /$

$N + \vec R + \vec P = m\underbrace{(\vec\omega\times\underbrace{(\vec\omega\times\vec r\,')}_{\hat u_T})}_{\hat u_N}$

$\hat u_N \begin{cases} R = m\omega^2 r \\ N - mg = 0 \end{cases} \hat k$

ESERCITAZIONE

ES. 1.



$M = 1\,Kg$, $m = \frac{1}{5}\,Kg$ max α affinché M non si sposti

$\mu_s = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} T = -F_{at} = \mu_s M g \\ N = M g \end{cases} \qquad \begin{cases} -mg \sin\alpha = m a_\tau \\ -mg\cos\alpha + T = m a_n \end{cases} \rightarrow T = m a_n + mg\cos\alpha$$

$$T_{max} = m a_n + mg \rightarrow m a_n + mg = \mu_s M g$$

$$m\frac{v_m^2}{\ell} + mg = \mu_s M g$$

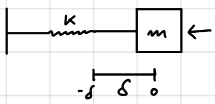
$$v_m^2 = \frac{\mu_s M g \ell}{m} + g\ell$$

$$E_M(h) = E(0) \rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$2mg\cancel{\ell}(1-\cos\alpha) = \mu_s M g \cancel{\ell} + mg\cancel{\ell}$$

$$1-\cos\alpha = \frac{\mu_s M}{2m} + \frac{1}{2} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{\mu_s M}{2m} + \frac{1}{2} \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

ES. 2



$t_0 = 0\,s$ $\quad v(0) = 0\,m/s$

$$\left.\begin{array}{l} L = ? \\ v = ? \\ \Delta E_p = ? \end{array}\right\} t_1 \rightarrow \text{tempo di recupero}$$

1) $F_{el} = -K\vec{s}$

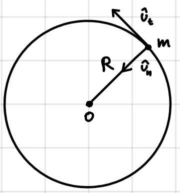
$$L_{el} = \int_{-\delta}^{0} -Kx\,dx = \frac{1}{2}K\delta^2$$

2) $L_{el} = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m}}\,\delta$

3) $L_{el} = -\Delta U = -\frac{1}{2}K\delta^2$

ESERCITAZIONE

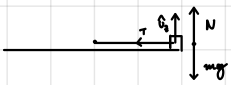
ESERCIZIO 1



$R = 1\,m$ $\qquad \mu_D = ?$

$n = 3$ $\qquad L = ?$

$v_0 = 1\,m/s$

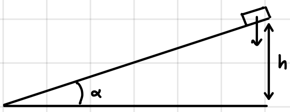


$$L = \int_0^{n\theta} \vec{F}_A\, d\vec{s} = \int_0^{6\pi} -\mu_D N R\, d\theta = -\mu_D N R \int_0^{6\pi} d\theta = -\mu_D m g \underbrace{6\pi}_{2\pi n} R$$

$$L = \Delta E_K = \frac{1}{2} m(\cancel{v_f^2} - v_0^2) \rightarrow \qquad \mu_D \cancel{m} g\, 6\pi R = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2$$

$$\mu_D = \frac{v_0^2}{12\pi g R}$$

ESERCIZIO 2



$\alpha = 30°$ $\qquad \mu_D \neq 0\ ?$

$h = 5\,m$ $\qquad \Delta t_{TOT} = ?$

$v_0 = 0\,m/s$

$v_f = 8\,m/s$

$\Delta E = L_{NC} \longrightarrow\ ?\ \frac{1}{2} m v_f^2 - mgh = 0 \qquad \Delta E < 0 \rightarrow \qquad \mu_D \neq 0$: il piano è scabro.

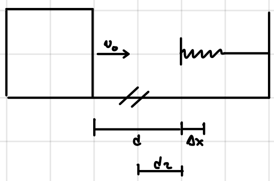
$$\Delta E = \frac{1}{2} m (v_f^2 - 2gh) = \int_0^{sf} \vec{F}_A\, d\vec{s} = \int_0^{sf} \mu_D mg \cos\alpha\, ds = \mu_D mg\cos\alpha \int_0^{\frac{h}{\sin\alpha}} ds = \mu_D mgh \tan\alpha = \sqrt{3}\mu_D mgh.$$

$$\hookrightarrow \mu_D = \frac{\Delta E}{-\sqrt{3}\, mgh} = \frac{\cancel{m}(v_f^2 - 2gh)}{2\sqrt{3}\,\cancel{m}gh} \cong 0{,}2$$

$$F_{P_{\parallel}} - F_A = ma \rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}g \sin\alpha - \mu_D \cancel{m}g \cos\alpha \qquad a = (\sin\alpha - \mu_D \cos\alpha) g \cong 3{,}21\,m/s^2$$

$$x(t) = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad \frac{1}{2} a t^2 = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a \sin\alpha}} \cong 2{,}50\,s$$

ESERCIZIO 4



$m = 3\,Kg$ $\qquad v_d = ?$

$v_0 = 10\,m/s$ $\qquad \Delta x = ?$

$d = 10\,m$ $\qquad d_c = ?$

$K = 3 \cdot 10^4\,N/m$

$\mu_D = 0{,}1$

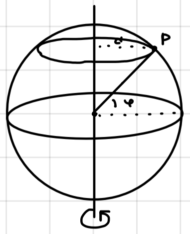
$$\Delta E = L_{NC} \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}(v_d^2 - v_0^2) = -\mu_D \cancel{m} g d \rightarrow \dots \rightarrow \qquad v_D = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_D g d} = 8{,}96\,m/s$$

$$\Delta E = L_{NC} \rightarrow \frac{1}{2} K \Delta x^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_D m g(d + \Delta x) \rightarrow \dots \rightarrow \Delta x = \frac{\mu_D mg + \sqrt{(\mu_D mg)^2 + K mg}}{K} = 0{,}09\,m$$

$$\Delta E = L_{NC} \rightarrow \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \mu_D m g (\Delta + d') \rightarrow \dots \rightarrow \qquad d' = \frac{1}{2} \frac{K\Delta x^2}{\mu_D mg} - \Delta x \cong 41\,m$$

. . .

ESERCIZIO



$$F_g = -\gamma \frac{M_T m}{R_T^2} \hat{u}_r$$

$$F_{APP} = -m\left[\cancel{\vec{a}_{O'}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \cancel{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}\right] = -m\,\vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\hat{u}_T}$$

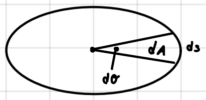
$$|F_{APP}| = m\,\omega^2 d = m\,\omega^2 R_T \cos\varphi$$

$$\frac{F_{APP}}{F_g} = \dots \cong 10^{-3} \rightarrow \text{forze apparenti contribuiscono poco}$$

7. GRAVITAZIONE

7.1 LEGGI DI KEPLERO

1) Le orbite dei pianeti sono ellittiche e il sole occupa uno dei due fuochi.
2) Il raggio vettore che congiunge il sole e la terra spazza aree uguali in tempi uguali (velocità areolare costante).



$$dA = \frac{1}{2} r\,dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$
$$\downarrow$$
$$dS = r\,d\theta$$

Se la traiettoria è circolare, il moto è circolare uniforme.

3) Il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore è una costante che dipende dal corpo nel fuoco (sole)

$$\frac{T^2}{a^3} = K \qquad \text{Se circolare: } \frac{T^2}{r^3} = K$$

7.2 LEGGE DI GRAVITAZIONE

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

7.2.1 "DIMOSTRAZIONE"

Approssimando a un moto circolare, sappiamo che la forza è centripeta poiché, se fosse tangente, il moto non sarebbe uniforme. Calcoliamo il modulo:

$$|\vec{F}_{ST}| = m\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2 r = m r \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m r \frac{4\pi^2}{T^2} = m \frac{4\pi^2}{K_S r^3} r = \left(\frac{4\pi^2}{K_S}\right)\frac{m}{r^2} = \left(\frac{4\pi^2}{K_S m_S}\right)\frac{m\,m_S}{r^2}$$

$$T^2 = K_S r^3$$

$$|\vec{F}_{TS}| = \frac{4\pi^2}{K_T m_T}\frac{m_S m}{r^2}$$

per 3° p. dinamica, $|F_{ST}| = |F_{TS}|$

$$\downarrow$$

$$K_T = K_S$$

esprimiamo, quindi, la forza gravitazionale come: $\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_T m_S}{r^2} \hat{u}_r$

Per provare che la gravitazione è la causa della forza peso, si usa l'orbita lunare per eliminare γ e m_t (non note ai tempi di Newton) approssimando l'orbita lunare ad un moto circolare uniforme.

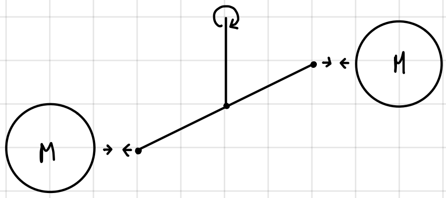
$$F'_G = \frac{\gamma m_T}{r_{TL}^2}\cancel{m_L} = \cancel{m_L}\,\omega_L^2 r_{TL} \rightarrow \gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3 \Rightarrow F_g = \frac{\gamma m_T}{r_T^2} m = \frac{\omega^2 r_{TL}^3}{r_T^2}\cancel{m} \cong g\cancel{m} \Rightarrow g \cong \frac{\omega^2 r_{TL}^3}{r_T^2}$$

Riprendendo $\gamma m_T = \omega_L^2 R_{LT}$ otteniamo

$$\gamma m_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{LT} \rightarrow \frac{T^2}{R_{LT}^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_T} = K_T \quad \text{(per orbita circolare)}$$

Abbiamo così dimostrato la 3° legge di Keplero (per orbite circolari).

Per verificare sperimentalmente la forza di gravitazione serve un esperimento eseguibile sulla Terra. Questo è l'esperimento di Cavendish:



Il problema dell'esperimento è che l'ordine di grandezza della forza gravitazionale è molto piccolo, quindi i corpi non si muoveranno perché l'attrito e altre forze la coprono.

...

7.3 MASSA INERZIALE VS. GRAVITAZIONALE

Precedentemente la forza grav. aveva questa formula:

$$m_i g = \frac{\gamma m_T m_g}{R_T^2} \longrightarrow \frac{m_i}{m_g} = \gamma \frac{m_T}{g R_T^2}$$

Sperimentalmente si è osservato che non c'è differenza tra le due masse ed esse sono equivalenti.

7.4 ORBITE DEI PIANETI

La forza gravitazionale è centrale quindi è conservativa e il suo momento angolare è costante. Questo implica che:

1) poiché $\vec{L}$ ha direzione costante, le orbite sono piane
2) poiché il verso è costante, il senso di rotazione non può essere modificato
3) il modulo costante ci permette di scrivere (in sistema polare):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m r \hat{u}_r \times \left(\cancel{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right) = m r^2 \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n \rightarrow |\vec{L}| = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = cost$$

Studiando le orbite dal punto energetico possiamo dire che data $E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r}$

1) $E_M > 0 \rightarrow$ l'orbita è aperta (il corpo ha abbastanza energia per andare all'infinito)
2) $E_M < 0 \rightarrow$ l'orbita è chiusa (l'orbita non può arrivare all'infinito perché $E_c > 0$ e $E_p < 0$ sempre)

La velocità di fuga si può calcolare facendo:

$$E_M^A = E_M^B \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 + \gamma \frac{M_T \cancel{m}}{R_T} = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \gamma \frac{M_T \cancel{m}}{r}$$

$r \rightarrow +\infty$

$$\hookrightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{2\gamma M_T}{R_T} \longrightarrow \underset{\text{(cond. limite)}}{v = 0} \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R_T}}$$

7.5 ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

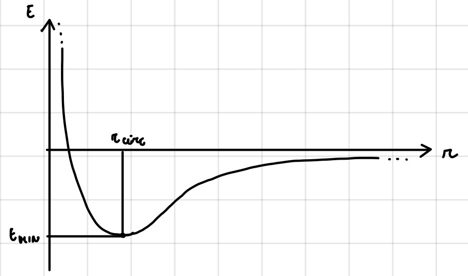
Assumiamo la Terra in orbita:

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m \underbrace{\left|\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right|^2}_{\text{velocità in coordinate polari}} - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma \frac{Mm}{r} =$$

$\hookrightarrow L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{Mm}{r}}_{\text{POTENZIALE EFFICACE}}$$

Riduciamo così il problema ad un problema unidimensionale (tutto è una funzione di r). Plottando il potenziale efficace otterremo il seguente grafico:



Si può dimostrare che:

- se $E_M > 0$ l'orbita è un'iperbole
- se $E_M = 0$ l'orbita è una parabola
- se $E_{MIN} < E_M < 0$ l'orbita è ellissoidale
- se $E_M = E_{MIN}$ l'orbita è circolare

Per trovare r_{CIRC} basta calcolare il minimo dell'energia potenziale efficace: $r_{circ} = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$

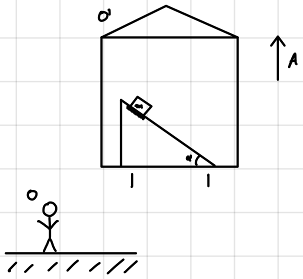
Sostituendo questa formula in quella dell'energia meccanica, si trova che l'energia totale in moto circolare è pari a:

$$E_{CIR} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma M m}{r_{circ}} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{L^2}{r_{circ}\, m^2} \frac{m}{r_{circ}} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{(r_{circ}\, m v)^2}{m\, r_{circ}^2} = \frac{1}{2} m v^2 - m v^2 = -\frac{1}{2} m v^2$$

$\gamma M = \frac{L^2}{r_{circ}\, m^2}$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2



$$O \begin{cases} N \sin\alpha - F_{attr} \cos\alpha = 0 \\ N \cos\alpha - F_{attr} \sin\alpha - mg = m \cdot A \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = F_{attr} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ F_{attr} \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + F_{attr} \sin\alpha - mg = mA \end{cases}$$

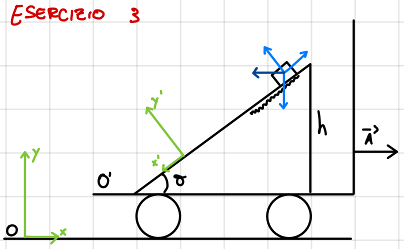
$$\downarrow$$

$$F_{att} \left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \right) = m(A+g)$$

$$F_{attr} = m(A+g) \sin\alpha \implies F_{att} \le \mu_s N \rightarrow \mu_s \ge \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$O' \begin{cases} N \sin\alpha - F_{attr} \cos\alpha = 0 \\ N \cos\alpha + F_{attr} \sin\alpha - mg - \underbrace{mA}_{\vec{F}_{APP}} = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3



A_{MAX} affinché stii fermo?

T per $A > A_{MAX}$?

$$\vec{F}'_{TOT} = m \cdot \vec{a}' \qquad \vec{a}' = 0$$

$$= m(\vec{a} - \vec{a}'_{OO'}) \qquad \vec{a}_{OO'} = \vec{A}$$

$$= m\vec{a} - m\vec{A}$$

STATICO:

$$O' \begin{cases} mg \sin\theta + mA\cos\theta - F_{attr} = 0 \\ N - mg\cos\theta + mA \sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{attr} = m(g \sin\theta + A\cos\theta) \\ N = m(g\cos\theta - A\sin\theta) \end{cases} \longrightarrow F_{attr} \le \mu_s N$$

$$F_{ATTR} \le \mu_s N \rightarrow \cdots \rightarrow A(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) \le \mu_s g \cos\theta - g \sin\theta \rightarrow A \le \frac{g(\mu_s \cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

DINAMICO $(A > A_{MAX})$:

$$O' \begin{cases} mg \sin\theta + mA\cos\theta - \mu_D N = m a_{x'} \\ N - mg\cos\theta + mA \sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{m} a'_x = \cancel{m}(g \sin\theta + A\cos\theta) - \mu_D \cancel{m}(g\cos\theta - A\sin\theta) \\ N = m(g\cos\theta - A\sin\theta) \end{cases} \rightarrow a'_x = (g \sin\theta + A\cos\theta) - \mu_D (g\cos\theta - A\sin\theta)$$

$$L = \frac{h}{\sin\theta} \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2} a_{x'} t^2 = L \implies t = \sqrt{\frac{2h}{\sin\theta \cdot a_{x'}}}$$

8. ELETTROMAGNETISMO

8.1 FORZA DI COULOMB

Date due cariche, la forza di interazione tra le due sarà:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{\rho}_r$$

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

$\hat{\rho}_r$ versore avente come direzione la retta che congiunge q_1 e q_2 e orientato in base ai segni di q_1 e q_2

La forza di Coulomb è molto più intensa di quella gravitazionale: l'attrazione gravitazionale tra nucleo ed elettrone nell'idrogeno è dell'ordine di 10^{-47} mentre quella di Coulomb è di 10^{-8}.

Studiando il moto causato dalla forza di Coulomb (protone e elettrone) otteniamo che il moto sarà circolare uniforme (forza centrale → $\vec{L}$ cost (vedi ragionamento fatto per i pianeti)).

L'energia potenziale sarà: $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$. Essendo la forza di Coulomb centrale, essa sarà anche conservativa.

8.2 FORZA DI LORENTZ

Se abbiamo una carica in moto in un campo magnetico, essa sarà sottoposta alla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Considerazioni:

1) $\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{B}$
2) applicando il teorema dell'energia cinetica, otteniamo che $v_A = v_B$, quindi la forza di Lorentz non influenza la velocità.
3) causa un moto circolare nella componente normale.

Il raggio di rotazione è pari a: $r = \frac{mv}{qB}$

9. SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Consideriamo un insieme di N punti materiali. Possiamo dire che su ogni punto agisce una risultante "interna" e una "esterna". La risultante che agisce sul sistema sarà:

$$\vec{F} = \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{I}}}_{\text{le varie forze interne si bilanciano (3° pr. din)}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \frac{dP}{dt}$$

Questa sopra $\left(\vec{F}^E = \frac{dP}{dt}\right)$ è detta prima equazione cardinale e ci dice ogni variazione interna è compensata.

9.1 CENTRO DI MASSA

Prendiamo un sistema di N punti materiali, si dice centro di massa un punto geometrico individuato da:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Svolgendo i calcoli, troviamo che la velocità del centro di massa è $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}$ e quindi che $\vec{P} = M \cdot \vec{v}_{CM}$. L'accelerazione del centro di massa sarà: $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\vec{F}^E}{M}$ e quindi $\vec{F}^E = M\vec{a}_{CM}$. Le espressioni di $\vec{P}$ e $\vec{F}^E$ sono le equazioni del teorema del centro di massa.

9.2 CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

Consideriamo $\vec{F}^E = 0$. Usando le espressioni studiate fino ad ora:

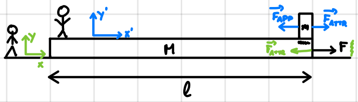
$\vec{F}^E = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}$ cost ; $\vec{F}^E = 0 \rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 \rightarrow \vec{v}_{cm}$ cost

↓ legate da

$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 4 (10)



N. IN: $\vec{F}'_{TOT} = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A}$

$$\begin{cases} x' & \vec{F}_{ATTR} - mA = ma'_x \rightarrow \cancel{m}g\mu_D - \cancel{m}A = \cancel{m}a'_x \rightarrow a'_x = \mu_D g - A < 0 \\ y' & N = mg \end{cases}$$

IN. $\vec{F}'_{TOT} = M\vec{A}$

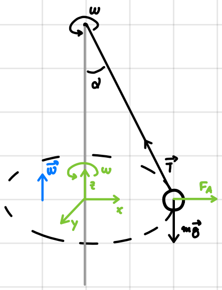
$$\begin{cases} x' & F - F^{2}_{attr} = MA \longrightarrow A = \frac{F - F^2_{ATTR}}{M} = \frac{F - \mu_D mg}{M} \\ y' & N = (m+M)g \end{cases}$$

$F_{ATTR} = F^2_{ATTR}$

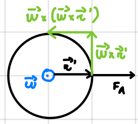
↓

$$a'_x = \mu_D g - \frac{F - mg\mu_D}{M} = \frac{\mu_D(M+m)g - F}{M} \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2}a t^{*2} + \underbrace{l}_{x'_0} = 0 \Rightarrow \ldots \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2LM}{F - \mu_D g(M+m)}}$$

ESERCIZIO 5 (10)



$$\vec{a}' = \vec{a} - \cancel{\vec{a}_{O'}} - w \times (w \times \vec{r}') - \cancel{2w \times \vec{v}'} = 0 \rightarrow \underbrace{F'_{TOT}}_{} = \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}_{TOT}} - \underbrace{m(w \times (w \times \vec{r}'))}_{\vec{F}_A}$$



$F_A = -m w^2 r'$

$$\begin{cases} x' & -T\sin\alpha + mw^2 r' = 0 \\ z' & +T\cos\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

$\tan\alpha \, \cancel{mg} = \cancel{m}w^2 L \sin\alpha \rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{w^2 L}{g} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{g}{w^2 L}$

$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$

$\vec{a}' = \vec{v}' = 0$

ESERCIZIO 1

$R_L = 1740$ Km

$R = 2R_L$

$T = 307 \cdot 60$ s

$g_L = ?$

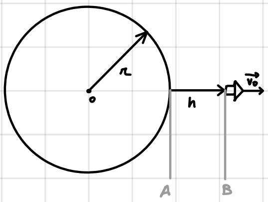
$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_g^{2R_L} &= \gamma\frac{M \cdot m}{R^2}\vec{u}_N = \underbrace{\gamma\frac{M}{4R_L^2}}_{g^{2R_L}} m \cdot \vec{u}_N \\ \vec{F}_g^{R_L} &= \underbrace{\gamma\frac{M}{R_L^2}}_{g^{R_L}} m \cdot \vec{u}_N \end{aligned}\right\} \quad g^{R_L} = 4g^{2R_L}$$

$$\vec{F}_g^{2R_L} = m\vec{a}_n \rightarrow g^{2R_L}\cancel{m} = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \rightarrow g^{2R_L} = \left(\frac{4\pi R_L}{T}\right)^2\frac{1}{2R_L} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}}\pi^2 R_L^{\cancel{2}}}{T}\cdot\frac{1}{\cancel{2R_L}} = \frac{8\pi^2 R_L}{T}$$

⇓

$g^{R_L} = \frac{32\pi^2 R_L}{T}$

ESERCIZIO 3



$\vec{v}_0 = \frac{3}{4}\underbrace{\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}}_{v_f}$

$$\Delta E_K = -\frac{1}{2}mv^2 \; ; \; \Delta E_p = -\gamma\frac{Mm}{R+h} + \gamma\frac{Mm}{R} = \gamma Mm\left(\frac{\cancel{-R} + h + \cancel{R}}{R(R+h)}\right) = \gamma\frac{Mmh}{R(R+h)}$$

$\hookrightarrow -\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \gamma\frac{M\cancel{m}h}{R(R+h)} = 0$

$\frac{-\frac{1}{2}v_0^2(R(R+h)) + \gamma Mh}{\cancel{R(R+h)}} = 0$

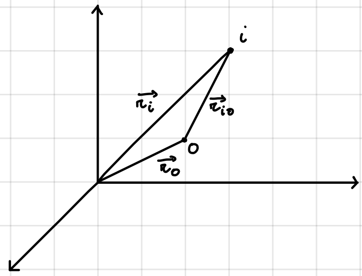
$-\frac{1}{2}v_0^2R^2 - \frac{1}{2}v_0^2Rh + \gamma Mh = 0$

$h\left(\gamma M - \frac{1}{2}v_0^2R\right) = \frac{1}{2}v_0^2R^2 \quad h = \frac{\cancel{\gamma M} \cdot \frac{1}{2}\frac{9}{16}\frac{2\gamma M}{\cancel{R}} \cdot R^2}{\cancel{\gamma M} - \frac{1}{2}\frac{9}{16}\frac{2\gamma M}{\cancel{R}}\cancel{R}} = \frac{9}{7}R$

...

9.3 SECONDA EQ. CARDINALE

Consideriamo un sistema di N punti materiali ed un polo O:



$$\vec{L}_{io} = \vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=0}^{N} \vec{L}_{io} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i \implies \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^{1} \frac{d}{dt}(\vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d\vec{r}_{io}}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{io} \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[(\vec{v}_i - \vec{v}_o) \times m_i v_i\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_{io} \times \frac{d\vec{P}_i}{dt}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\cancel{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i} - \vec{v}_o \times m_i \vec{v}_i\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_{io} \times \vec{F}_i\right]$$

$$= - v_o \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times (\vec{F}_i^{i} + \vec{F}_i^{E})$$

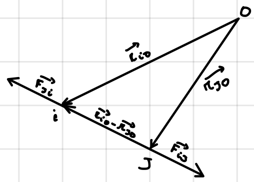
$$= - v_o \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^{i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^{E}$$

$$= - v_o \times \vec{P} + \vec{M}^{(i)} + \vec{M}^{(E)}$$

Dimostriamo che $\vec{M}^i$ è nullo:

$\vec{M}^i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^i$ → poiché parliamo di forze interne, prendiamo le forze a due a due (uguali e opposte per 3° p.d)

$\vec{M}^i_{ij} = \vec{r}_{io} \times \vec{F}^i_{ji} + \vec{r}_{jo} \times \vec{F}^i_{ij} = (\vec{r}_{io} - \vec{r}_{jo}) \times \vec{F}_{ij}$ → $r_{io} - r_{jo} \parallel \vec{F}_{ij}$ → $\vec{M}^i = 0$

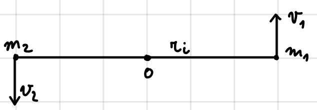


L'espressione $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = - v_o \times \vec{P} + \vec{M}^E$ è detta 2ª eq cardinale. Spesso il primo termine è nullo, quindi rimane solo il momento delle forze esterne. Noi supporremo di essere in uno di questi casi, riducendo la seconda legge cardinale a:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

È ovvio che se $\vec{M}^E = 0$, allora il momento angolare risulterà costante.

ESERCIZIO



$m_1 = m_2 = m$

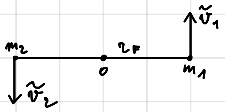
$v_1 = v_2 = v$

$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}$

$L = |m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2| = 2 m r v$

$r \perp v$, $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$

⇓ Forza interna



$r_i > r_F$

$L_i = L_F$ → $\cancel{2m} r_i v_i = \cancel{2m} r_F v_F$ → $v_F = \frac{r_i}{r_F} v_i \implies v_F > v_i$

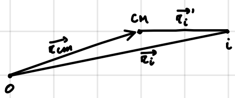
9.4 TEOREMI DI KÖNIG

Definiamo il sistema del centro di massa come un sistema di riferimento che ha origine nel centro di massa e gli assi sono paralleli al sistema inerziale. Come varia il momento angolare tra i due sistemi?

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') =$$

$$= \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \cancel{\sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i'} + \cancel{\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm}} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' =$$

$$= \vec{r}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}' = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$$



Studiamo l'energia cinetica:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' =$$

$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + E_c'$$

E_c' → energia cin. calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa.

$\frac{1}{2} M v_{cm}^2$ → E_c^{cm} → energia cinetica centro di massa

10 URTI

10.1 FORZA IMPULSIVA, URTO E IMPULSO

Si definisce forza impulsiva una forza che agisce per un periodo molto breve e con intensità più grande di tutte le altre forze. Si definisce, quindi, urto (evento impulsivo) quando due corpi interagiscono mediante una forza impulsiva. Il contatto tra i due corpi non è necessario!

Data una forza $\vec{F}$, si definisce impulso di $\vec{F}$:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = \int_{\vec{P}(t_1)}^{\vec{P}(t_2)} d\vec{P} = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$$

!!

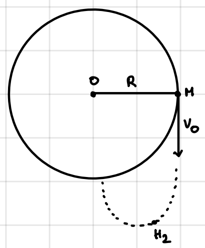
$$[I] = [F][T] = [m][L][T]^{-\cancel{2}}\cancel{[T]} = [m][v] \rightarrow \text{quantità di moto.}$$

La relazione $\vec{I} = \Delta\vec{P}$ è detta teorema dell'impulso.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 3 (11)

2)



$$V_0 = \frac{3}{4}\sqrt{2\gamma\frac{M}{R}}$$

$$L_0 = L_F \Rightarrow m v_0 R = m v_F (R+H_2)$$

$$R v_0 = (R+H_2) v_F$$

$$E_0 = E_F \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma\frac{mM}{R} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \gamma\frac{mM}{R+H_2} \quad * 2\frac{R^2(R+H_2)^2}{m}$$

$$R^2 v_0^2 (R+H_2)^2 - 2\gamma M R (R+H_2)^2 = R^2 (R+H_2)^2 v_F^2 - 2\gamma M R^2 (R+H_2)$$

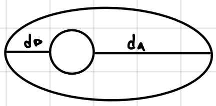
$$R v_0^2 \left[(R+H_2)^2 - R^2 \right] = 2\gamma M (R+H_2) H_2$$

$$R V_0^2 \left[(R+H_2) + R \right] = 2\gamma M (R+H_2)$$

$$\left(\frac{2\gamma M}{R V_0^2} - 1\right)(R+H_2) = R$$

$$H_2 = \frac{R}{\frac{2\gamma M}{R V_0^2} - 1} - R \quad \ldots \quad H_2 = \frac{2}{7} R$$

ESERCIZIO 5 (11)



$d_P = 500 Km \qquad d_A = 6 d_P$

$$\begin{cases} L_P = L_A \\ E_P = E_A \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{m}\, r_P v_P = \cancel{m}\, r_A v_A \\ \frac{1}{2}\cancel{m} v_P^2 - \gamma\frac{\cancel{m}M}{r_P} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 - \gamma\frac{\cancel{m}M}{r_A} \end{cases}$$

$r_A = R + d_A = 9{,}87 \cdot 10^6\, m$

$r_P = R + d_P = 6{,}87 \cdot 10^6\, m$

$$\begin{cases} r_P v_P = r_A v_A \\ r_A r_P^2 v_P^2 - 2\gamma M r_A r_P = r_A r_P^2 v_A^2 - 2\gamma M r_P^2 \end{cases}$$

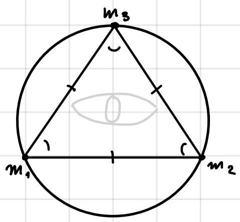
$$r_A^3 v_A - 2\gamma M r_A r_P = r_A r_P^2 v_A^2 - 2\gamma M r_P^2$$

$$r_A (r_A^2 - r_P^2)\, v_A^2 = 2\gamma M r_P (r_A - r_P)$$

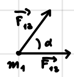
$$v_A = \sqrt{\frac{2\gamma M r_P}{r_A (r_A + r_P)}} = \ldots = 6 \cdot 10^3\, m/s$$

$$\hookrightarrow V_P = \frac{r_A}{r_P} V_A = \ldots = 8{,}18 \cdot 10^3\, \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 7 (11)



$T = ?$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{3}\, rad$



$$F_{12} = F_{13} = \gamma\frac{m^2}{\ell^2} \Rightarrow \vec{F_1} = \frac{\gamma m^2}{\ell}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{u}_y\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\frac{m^2}{b^2}\left(\sqrt{3}\,\hat{u}_x + \hat{u}_y\right)$$

$$F_1 = m a_c \Rightarrow \quad \sqrt{3}\gamma\frac{m^{\cancel{2}}}{\ell^2} = \cancel{m}\frac{V^2}{R} \rightarrow v^2 = \gamma\frac{m}{\ell} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^3}{3\gamma m}}$$

$R = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (geometria)

...

10.2 TIPI DI URTI

Studiamo il caso generico:

$\xrightarrow[m_1]{\vec{v}_{1i}}$ $\quad$ $\xleftarrow[m_2]{\vec{v}_{2i}}$ $\quad$ $\vec{F}^{(E)} = 0 \to \vec{P}$ cost $\quad m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1F} + m_2\vec{v}_{2F} = (m_1+m_2)\vec{v}_{CM}$

$$\vec{I}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\, dt = \vec{P}_{1F} - \vec{P}_{1i}$$

$$\vec{I}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt = \vec{P}_{2F} - \vec{P}_{2i}$$

Se $\vec{F}^E$ non è nulla ma non è impulsiva:

$$\vec{I}_1 = \int_{t_2}^{t_1} \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{(E)}\, dt \cong \int_{t_2}^{t_1} \vec{F}_{12} \quad ; \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{E}\, dt \cong \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt$$

$$\vec{F}_1^{E} \ll \vec{F}_{12}$$

Noi trattiamo il caso unidirezionale, riducendo l'equazione a $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1F} + m_2v_{2F}$. Ci serve un'altra condizione sulle velocità per poter risolvere la nostra equazione.

Studiando l'energia cinetica del sistema, possiamo trovare due tipi di urti:

1) URTO ELASTICO: l'energia cinetica del sistema si conserva
2) URTO ANAELASTICO: l'energia cinetica del sistema non si conserva

La variazione di energia cinetica risulta uguale al lavoro delle forze interne non conservative. Se consideriamo un istante prima e uno dopo l'urto la posizione non varia tra i due e quindi le forze interne conservative non compiono lavoro. Le forze esterne sono totalmente trascurabili in quanto hanno modulo molto più piccolo dell'impulso.

10.3 URTO ELASTICO

Poiché l'energia cinetica si conserva, allora:

$$\begin{cases} m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1F} + m_2v_{2F} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2F}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1(v_{1i} - v_{1}f) = m_2(v_{2}f - v_{2i}) \\ m_1(v_{1i} + v_{1}f)(v_{1i} - v_{1}f) = m_2(v_{2}f + v_{2i})(v_{2}f - v_{2i}) \end{cases}$$

$$v_{1i} + v_1f = v_2f + v_{2i} \;\to\; v_{1i} - v_{2i} = -(v_1f - v_2f) \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_1f = \dfrac{2m_2v_{2i} + (m_1-m_2)v_{1i}}{m_1+m_2} \\ v_2f = \dfrac{2m_1v_{1i} + (m_2-m_1)v_{2i}}{m_1+m_2} \end{cases}$$

10.3.1 CASI PARTICOLARI

- $m_1 = m_2$: $\begin{cases} v_1f = v_{2i} \\ v_2f = v_{1i} \end{cases}$ $\qquad$ - $v_{2i} = 0$: $\begin{cases} v_1f = \dfrac{(m_1-m_2)v_{1i}}{m_1+m_2} \\ v_2f = \dfrac{2m_1v_{1i}}{m_1+m_2} \end{cases}$

- $m_1 \gg m_2$: $\begin{cases} v_1f = v_{1i} \\ v_2f = 2v_{1i} \end{cases}$ $\qquad$ - $m_1 \ll m_2$: $\begin{cases} v_1f = -v_{1i} \\ v_2f = \dfrac{2m_1}{m_2}v_{1i} \simeq 0 \end{cases}$

  $v_{2i} = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $v_{2i} = 0$

10.4 URTO PERFETTAMENTE ANAELASTICO

Si dice che un urto è perfettamente anaelastico se i due corpi rimangono uniti dopo l'urto. Dimostriamo che ciò implica la massima perdita di energia possibile:

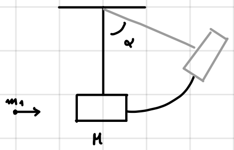
$$E_c = E_c' + E_c^{CM} \xrightarrow{\text{DOPO URTO}} E_c = \cancel{E_c'} + E_{CM} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{cm}^2 \xrightarrow{\vec{P}\text{ const}}$$

massima perdita perché $\vec{v}_{cm}$ è costante, quindi è impossibile che si annulli

$\xrightarrow{m_1} \quad \xleftarrow{m_2} \quad \Rightarrow \quad \xrightarrow{m_1+m_2}$

• • •

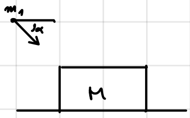
ESERCIZIO



v_0 ?

$$m v_0 = m v_1 + M v_2 \xrightarrow{v_1 = v_2 = v_F} v_F = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{(M+m)} v_F^2 = \cancel{(m+M)} g h \rightarrow h = \frac{v_F^2}{2g} = \left(\frac{m}{m+M}\right) \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow v_0 = \left(\frac{m+M}{m}\right) \sqrt{2gh}$$



v_F M?

impulso del piano sul blocco.

$$x)\ m v_0 \cos\alpha = (m+M) v_F \rightarrow v_F = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\alpha$$

N è impulsiva perché sennò non reggerebbe il piano: $F_y^E \neq 0 \rightarrow P_y$!cont

Poiché N è l'unica forza impulsiva: $\vec{I} \stackrel{\sim}{=} \vec{I}_N = \Delta P = \cancel{P_y^F} - P_y^i = m v_0 \sin\alpha$

10.5 URTI BIDIMENSIONALI

Le informazioni che usavamo fin'ora non bastano nel caso di urto elastico (abbiamo 3 eq e ce ne servono 4). Per gli urti anaelastici ciò non è un problema perché abbiamo solo 3 incognite.

11 CORPO RIGIDO

Si definisce corpo rigido un sistema di punti materiali la cui distanza rimane costante. Ciò significa che la deformazione è trascurabile.

Essendo un sistema di punti materiali, valgono le due equazioni cardinali. La definizione ha alcune conseguenze:

- il centro di massa ha distanza fissa dai punti materiali (il vettore centro di massa è costante)
- il moto di un corpo rigido è una combinazione istantanea di una rotazione e di una traslazione. Per descrivere il moto, quindi, servono 6 variabili scalari (3D).
- le forze interne non compiono lavoro.

Come modello un corpo reale con un corpo rigido? Suddivido un corpo in volumetti infinitesimi considerabili come punti materiali. Ciò ci permette di scrivere:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

Il rapporto fra il volumetto infinitesimo e la massa infinitesima è detta densità. Se la densità è costante in tutti punti del corpo, allora esso viene detto omogeneo

Studiamo le relazioni tra massa e densità:

$$M = \int dm = \underbrace{\int_V \rho\, dV}_{\text{densità}} = \underbrace{\rho \int_V dV}_{\text{omogeneo}} = \rho V \qquad \left(\rho = \frac{dm}{dV}\right)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \underbrace{\frac{\rho \int_V \vec{r}\, dV}{\rho \int_V dV}}_{\text{omogeneo}} = \frac{\int_V \vec{r}\, dV}{V}$$

Si nota quindi che la posizione del centro di massa dipende esclusivamente dalla forma e dalla densità del corpo.

$(\vec{\omega}=\vec{0})$ $(\vec{v}=0)$

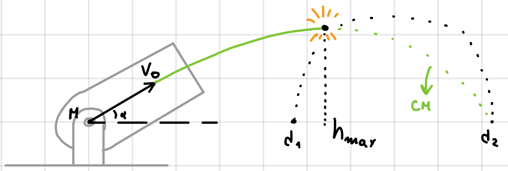
Per studiare la traslazione, basta studiare il moto del centro di massa. La rotazione, invece, si avviene intorno ad un asse fisso, si può esprimere come:

$v_i = r_i \omega$ $\qquad$ r_i: posizione di m_i dall'asse

v_i: velocità di m_i

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1



$\alpha = 30°$ $\qquad$ $v_0 = 15\ m/s$

$m_1 = \frac{1}{3} M$ $\qquad$ $d_1 = 10 m$

$m_2 = \frac{2}{3} M$ $\qquad$ $d_2 = ?$

1) $\vec{F}^E = M\vec{g}$

2) $\vec{F}^E = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = \frac{1}{3}M\vec{g} + \frac{2}{3}M\vec{g} = M\vec{g} \longrightarrow m_{TOT}\vec{a}_{cm} = \vec{F}^E = M\vec{g}$

x) $a_x = 0$

$v_x = v_0 \cos\alpha$

$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$

y) $a_y = \vec{g}$

$v_y = -gt + v_0 \sin\alpha$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t$

$y(\bar{t}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 + v_0 \sin\alpha\, \bar{t} = 0$ $\quad \bar{t} = 0$ X $\quad \bar{t} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

$\rightarrow x(\bar{t}) = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

$$x(\bar{t}) = \frac{d_1 m_1 + d_2 m_2}{M} \Rightarrow d_2 = \frac{M x(\bar{t}) - d_1 m_1}{m_2} = \frac{\cancel{M} x(\bar{t}) - \frac{1}{3} d_1 \cancel{M}}{\frac{2}{3}\cancel{M}} = \frac{3}{2}x(\bar{t}) - \frac{1}{2}d_1 = \dots = 24,8\ m$$

. . .

11.1 ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO

Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione:

$$E_c = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\text{Momento d'inerzia}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

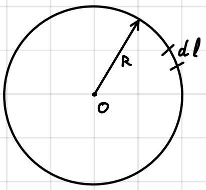
Abbiamo così definito il momento d'inerzia. Esso è uno scalare, dipende dall'asse e dalla distribuzione della massa. Si misura in $Kg \cdot m^2$.

Se passiamo dal discreto al continuo, otteniamo che:

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \, dV \underset{\text{omogeneo}}{=} \rho \int r^2 dV$$

ESERCIZIO

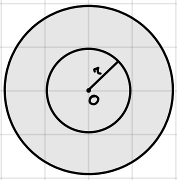
Calcoliamo il momento d'inerzia di un anello sottile omogeneo:



$$I_z = \int r^2 dm = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \, dl = R^2 \lambda \int_0^{2\pi R} dl = R^2 \lambda \, 2\pi R = MR^2$$

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

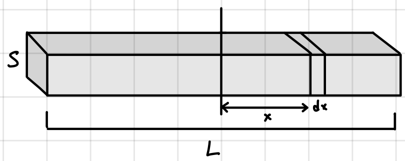
Calcoliamo I_z di un disco sottile omogeneo



$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma \, 2\pi r \, dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \sigma 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \sigma \cancel{2}\pi \frac{R^4}{\cancel{4}_2} = \frac{\sigma\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2}(\sigma\pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

$$dm = \sigma \, dS = \sigma \, 2\pi r \, dr \qquad \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

Calcola I_z di un'asta di lunghezza L e sezione S (omogenea)



$$I_z = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho S \, dx = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \rho S \left[\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right] =$$

$$= \rho S \frac{L^3}{12} = (\rho S L)\frac{L^2}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

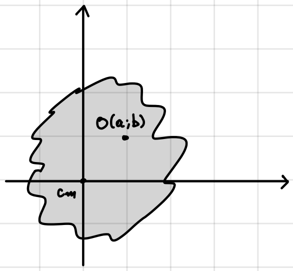
Il momento d'inerzia è additivo, rendendo quindi possibile la suddivisione in più sottoparti.

11.1.1 TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il momento d'inerzia I di un corpo che ruota intorno ad un asse O è dato dal momento d'inerzia calcolato con asse passante nel centro di massa più un termine dipendente dal quadrato della distanza tra O e il centro di massa.

$$I_O = I_{cm} + Md^2$$

Dimostrazione



$$I_O = \sum m_i r_{iO}^2 = \sum m_i[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2] = \sum m_i[x_i^2-2ax_i+a^2+y_i^2-2by_i+b^2] =$$
$$= \sum m_i(x_i^2+y_i^2) + \sum m_i(a^2+b^2) - \sum 2m_i a x_i - \sum 2m_i b y_i =$$
$$= I_{cm} + Md^2 - \underbrace{\cancel{2aMx_{cm}}}_{x_{cm}=\frac{\sum m_i x_i}{M}} - \underbrace{\cancel{2bMy_{cm}}}_{y_{cm}=\frac{\sum m_i y_i}{M}} = I_{cm} + Md^2$$

Usando il precedente teorema nel calcolo dell'energia cinetica abbiamo che:

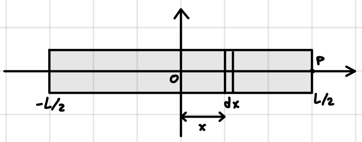
$$E_c = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 d^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$\downarrow$

assomiglia molto al teorema di König

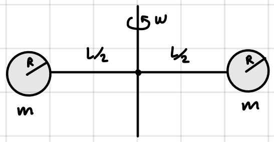
ESERCIZIO

Calcolare I_z di un'asta sottile omogenea (L, M)



$$I_{zO} = \int x^2 dm = \dots = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \dots = \frac{1}{12}ML^2$$

Calcola I_P: $\quad I_P = I_{cm} + Md^2 \underset{O \equiv CM}{=} \frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \dots = \frac{1}{3}ML^2$



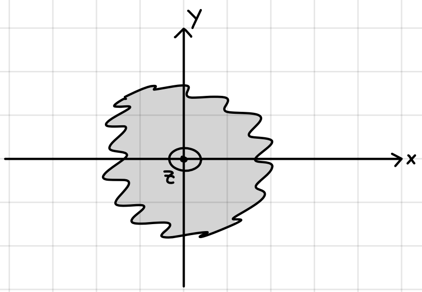
(asta con m trasc.)

$$I_{cm}^{SF.} = \frac{2}{5}mR^2$$
$$I_z^{SF} = \frac{2}{5}mR^2 + m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2$$
$$I_z = 2 I_z^{SF.}$$

11. 1. 2 TEOREMA ASSE PERPENDICOLARE

Nel caso di corpi piani, la somma di due momenti d'inerzia rispetto a due assi del piano è uguale al momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse perpendicolare passante per l'intersezione degli assi.

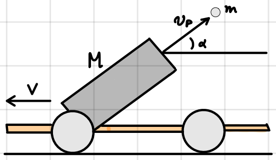
Dimostrazione:



$$I_x = \sum m_i y_i^2 \quad \rightarrow \quad I_x + I_y = \sum m_i y_i^2 + \sum m_i x_i^2 = \sum m_i(x_i+y_i) = \sum m_i d_i = I_z$$
$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 3 (12)



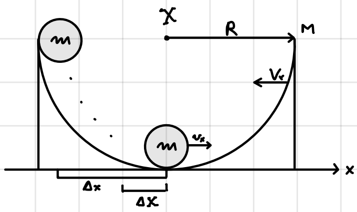
$V = ?$ $\quad \vec{I} = ?$

$$\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt} = \begin{cases} \frac{dP_x}{dt} = 0 \\ \frac{dP_y}{dt} = N - (m+M)g \end{cases}$$

P_x cost $\Rightarrow$ $m V_P \cos\alpha - MV = 0 \rightarrow V = \frac{m V_P \cos\alpha}{M}$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta\vec{P} = \vec{P}_F - \cancel{\vec{P}_0} = \vec{P}_F^M + \vec{P}_F^m = M\vec{V} + m\vec{v_P} = -MV\hat{u}_x + m v_P(\cos\alpha\,\hat{u}_x + \sin\alpha\,\hat{u}_y) = \dots = m v_P \sin\alpha\,\hat{u}_y$$

ESERCIZIO 2 (12)



$\Delta X = ?$ $\quad v_x = ?$ $\quad V_x = ?$

$$\vec{F}^E = \vec{N} + \vec{p} = (M+m)\vec{a}_{cm} = (M+m)\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \begin{cases} (M+m)\frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} = 0 \rightarrow v_{cm} \text{ cost} \\ (M+m)\frac{d^2 y_{cm}}{dt^2} = N - (M+m)g \end{cases}$$

$v_{cm\,x} = 0 \rightarrow x_{cm}(t)$ cost $\rightarrow x_{cm} = \frac{mx + MX}{m+M} = \frac{-mR}{m+M}$

τ. $\quad x(\tau) = X(\tau) \Rightarrow \quad x_{cm}(\tau) = \frac{\cancel{(m+M)}X(\tau)}{\cancel{m+M}} = X(\tau) = -\frac{mR}{m+M} \Rightarrow \Delta X = -\frac{mR}{m+M}$

$v_{cm\,x}(\tau) = \frac{m v_x - M V_x}{m+M} = 0 \rightarrow m v_x = M V_x$

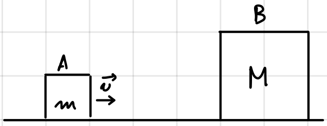
$E_0 = E_\tau \rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 \rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2} M V^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)$

$\quad \hookrightarrow V_x = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$

$\quad v_x = \dots = \sqrt{\frac{2gMR}{M+m}}$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1



$m = 50\,g$ $\quad D = 0{,}6\,m$ $\quad \mu_D = \frac{3}{10}$

$v = 5\,m/s$ $\quad V = 0\,m/s$

$M = ?\,, \quad u = ?$

$$\begin{cases} mv + MV = mu + MU \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m^2u^2 + \frac{1}{2}MU^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m(v-u) = M(U-V) \\ m(v^2-u^2) = M(U^2-V^2) \end{cases} \quad \begin{cases} " \\ v+u = U+V \end{cases} \quad \begin{cases} m(v-u) = M(v+u-2V) \\ U = v+u-V \end{cases} \quad \begin{cases} (M+m)u = (m-M)v + 2MV \\ " \end{cases}$$

$$\downarrow$$

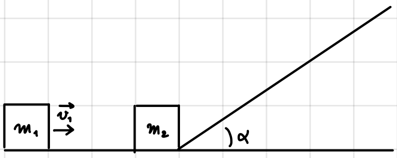
$$u = \frac{(m-M)v + \cancel{2MV}}{m+M} \rightarrow V=0$$

$$U = \frac{\cancel{(M-m)V} + 2mv}{m+M}$$

$$\Delta E_c = L_{uc} \rightarrow -\frac{1}{2}\cancel{M}U^2 = -\mu_D \cancel{M}g D \rightarrow U = \sqrt{2\mu_D g D} = \frac{2mv}{M+m} \Rightarrow \dots \; M \cong 216\,g$$

$$\hookrightarrow u = \dots \cong -3{,}12\,m/s$$

ESERCIZIO 3



1) $h' \rightarrow$ urto el

2) $h'' \rightarrow$ urto anel (tot) ; ΔE?

1) $$\begin{cases} m_1 v_1 + \ = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \ = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_1 - u_1) \\ u_2 = v_1 + u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}m_2 u_2^2 = m_2 g h' \rightarrow h' = \frac{2m_1^2 v_1^2}{g(m_1+m_2)^2}$$

2) $$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1+m_2)w \\ \frac{1}{2}(m_1+m_2)w^2 = (m_1+m_2)g h'' \end{cases} \qquad \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_1+m_2} = (m_1+m_2)g h'' \rightarrow h'' = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{v_1^2}{g}$$

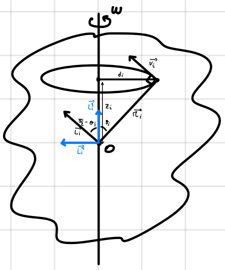
$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)w^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 v_1^2}{m_1+m_2} - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v^2$$

• • •

11.1 ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO

. . .

Calcoliamo il momento angolare di un corpo rigido in rotazione rispetto ad un'asse con polo sull'asse:



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \rightarrow L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i d_i w$

Momento angolare assiale: $L_i^z = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i r_i d_i w \sin\theta_i = m_i d_i^2 w$

$d_i = r_i \sin\theta_i$

Momento angolare radiale: $L_i^r = L_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i r_i d_i w \cos\theta_i = m_i d_i z_i w$

↓

$L_z = \sum L_i^z = \sum m_i d_i^2 w = w I_z$

$L_r = \sum L_i^r = \sum m_i d_i z_i w = w \sum m_i d_i z_i$

Ci sono casi in cui il momento angolare è solo assiale, ad esempio quando è piano. Inoltre, esiste sempre una terna di assi per i quali se il corpo ruota intorno a uno di essi il momento angolare è assiale. Questi assi sono gli assi principali d'inerzia.

Studiamo la seconda equazione cardinale nel caso in cui il corpo ruoti intorno agli assi principali:

$$\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d I_z w}{dt} = I_z \frac{dw}{dt} = I_z \alpha$$

11.2 TRASLAZIONE DI UN CORPO RIGIDO

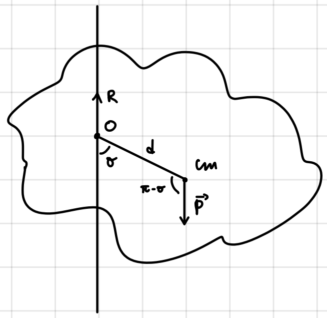
Studiamo come agiscono le forze su un corpo rigido.

$$\vec{P} = \int \vec{g}\, dm = \vec{g} \int dm = M\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm = \int \vec{r}\, dm \times \vec{g} = M r_{cm} \times \vec{g} = r_{cm} \times \vec{P}$$

$$r_{cm} = \frac{\int r\, dm}{M}$$

Quindi le forze vanno applicate nel centro di massa. Di conseguenza studiare la traslazione di un corpo rigido equivale a studiare la traslazione del suo centro di massa.

ESERCIZI



Corpo piano → momento angolare assiale

$M_z = -mg\, d \sin(\pi - \theta) = -Mg\, d \sin\alpha = I\alpha \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$

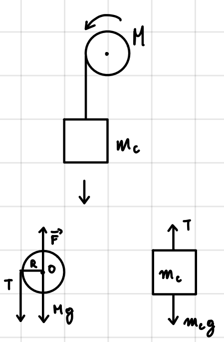
↳ ci dobbiamo limitare alle piccole oscillazioni

⇓

$\theta = \theta_0 + \sin\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}}\, t + \varphi\right)$

$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^*}{g}}$

$L^* = \frac{I}{md}$ (Lunghezza ridotta)



$a_c = ?$

$T = ?$

La carrucola è piana e ruota lungo un asse principale → momento ang assiale.

$\vec{F}^E = 0 \rightarrow \begin{cases} T + Mg = F \\ m_c g - T = m_c a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_c g - T = m_c a \\ TR = I \underbrace{\frac{R}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m_c}{(m_c + \frac{I}{R})} g \\ T = \frac{Ia}{R^2} \end{cases} \longrightarrow T = \frac{I}{R^2}\frac{m_c}{(m_c + I/R^2)} g = \dots = \frac{m_c M g}{M + 2m_c}$

$\vec{M}^E \rightarrow TR = I\alpha$

Ottenuto da $a = R\alpha$

a sua ottenuto studiando la circ. ($\Delta x = R\theta$)

...

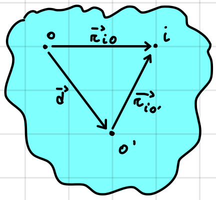
11. 3 STATICA DEL CORPO RIGIDO

$\vec F = 0 \rightarrow \vec v = \text{cost}$

$\vec F^E = 0 \rightarrow \frac{d\vec P}{dt} = 0 \rightarrow \vec P = 0$

$\vec M^E = 0 \rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = 0 \rightarrow \vec L = 0$

Nel caso statico il momento delle forze non è influenzato dalla scelta del polo. Infatti consideriamo:



$\vec M_O^E = \sum \vec r_{iO} \times \vec F_i$

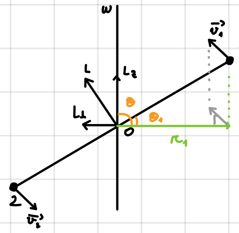
$\vec M_{O'}^E = \sum \vec r_{iO'} \times F_i$

$\vec M_O^E - \vec M_{O'}^E = \sum \vec r_{iO} \times \vec F_i^E + \sum \vec r_{iO'} \times \vec F_i^E = \sum (r_{iO} - r_{iO'}) \times \vec F_i^E = \sum \vec d \times \vec F_i^E =$

$= \vec d \times \sum \vec F_i^E = \vec d \times 0 = 0$

statico: $\sum \vec F_i^E = 0$

11. 4 DIREZIONE DELLA FORZA CHE CAUSA LA ROTAZIONE



$L_1 = m_1 \vec r_1 \times \vec v_1$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$

$L_{1z} = m_1 r_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 r_1 v_1 \sin\theta = m_1 r_1 d_1 w \sin\theta = (m_1 d_1^2) w$

$\downarrow$

$L_z = L_{1z} + L_{2z} = \underbrace{2 m d^2}_{I} w$

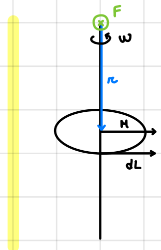
se w cost $\rightarrow \vec M^E = 0$

se w non cost $\rightarrow \vec M^E \neq 0$

Quale sarà la direzione della forza?

$\vec M^E = \frac{d\vec L}{dt}$ $\quad d\vec L$ è tangente alla circonferenza del moto di precessione di L_{RAD}.

da $\vec M^E = \vec r \times \vec F$ ricaviamo che se $\vec M$ ed $\vec r$ sono così disposti, $\vec F$ sarà:



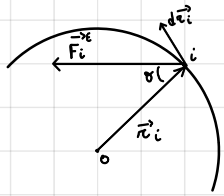
(fai reverse-regola-mano-dx mettendo $\vec r$ su pollice e $\vec M$ su medio)

• • •

11.5 LEGAME TRA MOMENTO E LAVORO IN ROTAZIONE

Essendo $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$, se ω non è costante anche E_c non è costante. Usando il teorema dell'energia cinetica scopriamo che viene effettuato un lavoro. Siccome le forze interne non compiono lavoro, esso sarà delle forze esterne. Se ω varia, α sarà diversa da 0 e quindi ci sarà momento delle forze esterne

Consideriamo:



$$dL_i = \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i \rightarrow dL = \sum dL_i = \sum \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i = \sum \vec{F}_{i_T}^E \, dS_i = \sum \underbrace{\vec{F}_{i_T} R_i}\, d\vartheta = \sum M_i^E \, d\vartheta = M^E d\vartheta$$

Momento ang.

$\vec{F}_{i_T} = \vec{F}_i \sin\vartheta$

$M^E = R_i \vec{F}_T$

Possiamo anche scrivere la seguente espressione ed arrivare alla stessa conclusione:

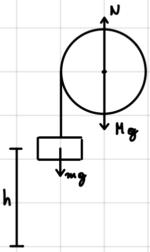
$$dL = dE_c = \frac{1}{2} I \, 2\omega \, d\omega = I\omega \, d\omega = I \frac{d\vartheta}{dt} d\omega = I\alpha \, d\vartheta = M^E d\vartheta$$

Lavoro

$$\Downarrow$$

$$P = \frac{dL}{dt} = M^E \frac{d\vartheta}{dt} = M^E \omega$$

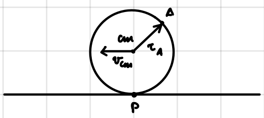
ESERCIZIO



$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + (I/R^2)}}$$

11.6 ROTOLAMENTI

Schematizziamo il rotolamento



$$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

Possiamo definire:

- rotolamento puro: in ogni istante il punto di contatto è fermo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P \rightarrow 0 = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P \Rightarrow v_{cm} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

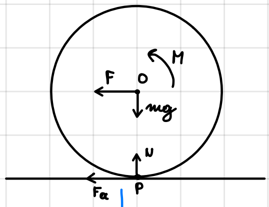
$$\vec{v}_a = -\vec{\omega} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_P) = \vec{\omega} \times \vec{d}$$

↳ rotazione intorno ad un asse passante per P

• • •

11.6.1 CONDIZIONI PER IL ROTOLAMENTO PURO

Sul corpo agiscono un momento e una forza applicata sul centro di massa. È necessaria anche una forza d'attrito di natura statica (a causa della condizione di rotolamento puro):



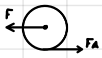
$$\begin{cases} F + F_a = m a_{cm} \\ N - mg = 0 \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{(rotolamento puro)}}{a_{cm} = -\alpha R} \Rightarrow \begin{cases} F + F_a = m a_{cm} \\ N = mg \end{cases} \text{———} \dots$$

$$F_a R - M = I\alpha \qquad\qquad F_a R - M = -\frac{I a_{cm}}{R}$$

il verso non è noto, dipende dal segno di Fa nei calcoli.

$$\dots \longrightarrow \begin{cases} a_{cm} = \frac{F + F_a}{m} \\ F_a R - M = -\frac{I}{R}\left(\frac{F + F_a}{m}\right) \end{cases} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{cases} a_{cm} = \frac{FR^2 + MR}{I + mR^2} \\ F_a = \frac{mMR - IF}{I + mR^2} \end{cases}$$

Consideriamo il caso $-\ F \neq 0,\ M = 0$: $F_a = -\frac{IF}{I + mR^2}$



↳ attrito statico → $|F_A| < \mu_s m g$ → $F \leq \mu_s m g \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$

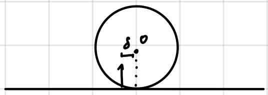
↳ se F è maggiore non siamo più in rotolamento puro

$-\ F = 0,\ M \neq 0$: $F_a = \frac{mMR}{I + mR^2} > 0$

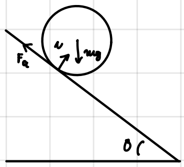
↳ $|F_a| < \mu_s N$ → $M \leq \frac{\mu_s g}{R}(I + mR^2)$

11.6.2 ATTRITO VOLVENTE

La forza di attrito, come detto prima, è statico ed è applicato, non solo su un punto, ma su una superficie. L'attrito viene chiamato attrito volvente e ha come momento: $M = N\delta$



ESERCIZIO



μ_s | rot puro?

v alla fine del piano

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_a = ma \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} mg\sin\theta - F_a = ma \\ F_a R = I\, a/R \end{cases} \rightarrow mg\sin\theta - F_a = m\frac{F_a R^2}{I}$$

$$F_A R = I\alpha = I\, a/R$$

$$F_a = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{mg\sin\theta}{3}$$

$I_{disco} = \frac{1}{2} m R^2$

$$|F_a| \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{\tan\theta}{3}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \rightarrow \dots \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,mgh}{m + \frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

ESERCITAZIONE

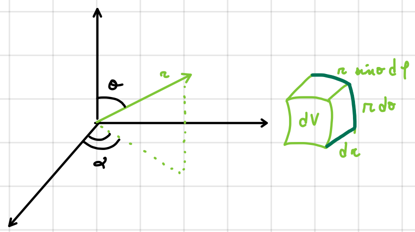
ESERCIZIO 1

$$I = \rho \int r^2 dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho\, r^2 \sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\alpha = 2\pi\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 2\pi\rho \frac{1}{5} R^5 \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \dots = 2\pi\rho \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} =$$

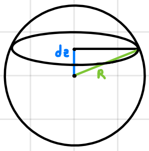
$$= \cancel{2\pi} \frac{M}{\cancel{\frac{4}{3}\pi R^3}} \frac{1}{5} R^{\cancel{5}\,2} \cancel{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5} M R^2$$

→ $dm = \rho\, dV$

→ $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\alpha$



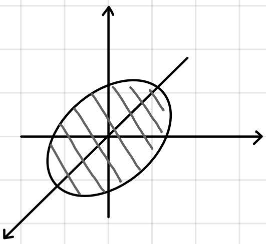
Metodo alternativo:



$$dI = \frac{1}{2} dm\,(R^2 - z^2)$$
$$dm = \rho dV = \rho\pi(R^2 - z^2)\,dz$$

$$\longrightarrow \quad I = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2-z^2)^2 dz = \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)^2 dz = \frac{1}{2}\rho\pi\left[R^4 z + \frac{1}{5}z^5 - \frac{2}{3}R^2 z^3\right]_{-R}^{R} =$$
$$= \dots = \frac{2}{5}MR^2$$

ESERCIZIO 2



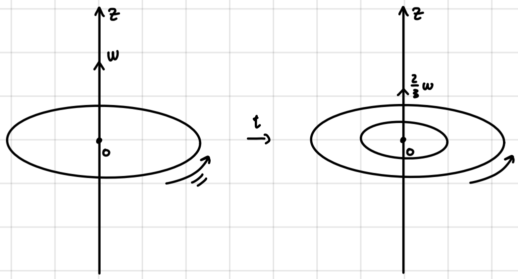
$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

coordinate polari

$$ds = r\,dr\,d\theta \rightarrow dI_x = (r \sin\theta)^2 dm = f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$ X (se voglio fare 2 integrali, sennò uso th assi perp.)

$$dI_z = dmx^2 + dmy^2 = dI_x + dI_y = 2dI_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2$$
$$dI_x = dI_y$$

ESERCIZIO 3

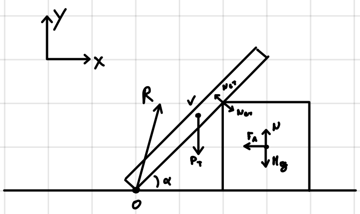


$I_i = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \omega_i = \omega \qquad M = \sigma\pi R^2 \qquad r\,?$

$I_F = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 \qquad \omega_F = \frac{2}{3}\omega \qquad m = \sigma\pi r^2$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} \text{ cost}$$
$$\Downarrow$$
$$I_i\omega_i = I_F\omega_F$$
$$\Downarrow$$
$$I_F = I_i\frac{\omega_E}{\omega_i} = \frac{3}{2}I_i \longrightarrow \frac{I_f}{I_i} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2}{\frac{1}{2}MR^2} = 1 + \frac{\cancel{\sigma\pi}r^2r^2}{\cancel{\sigma\pi}R^2R^2} = 1 + \frac{r^4}{R^4} = \frac{3}{2}$$
$$\hookrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\,R$$

ESERCIZIO 4



$\alpha = 45°$

$OV = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \qquad M = 1\,Kg \qquad \mu_s = 0{,}2 \qquad (\vec{N}_{TC} = -\vec{N}_{CT})$

$$m \mid \vec{F}_{TOT} = \vec{M}_{TOT} = 0\ ?$$

$$T: \begin{cases} R_x - \frac{N_{CT}}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{N_{CT}}{\sqrt{2}} - mg + R_y = 0 \\ -\frac{\ell}{2}\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\ell}{\sqrt{2}}N_{CT} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} R_y = mg - \frac{N_{CT}}{\sqrt{2}} \\ R_x = \frac{N_{CT}}{\sqrt{2}} \\ N_{CT} = \frac{mg}{2} \end{array}$$

$$C: \begin{cases} -F_a + \frac{N_{TC}}{\sqrt{2}} = 0 \\ N - \frac{N_{TC}}{\sqrt{2}} - Mg = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} F_A = \frac{N_{TC}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2\sqrt{2}} \le \mu_s N \\ N = Mg + \frac{N_{TC}}{\sqrt{2}} \end{array}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{mg}{2\sqrt{2}} \le \mu_s Mg + \mu_s\frac{mg}{2\sqrt{2}}$$
$$\vdots$$
$$m \le \frac{2\sqrt{2}\mu_s}{1-\mu_s}M \Longrightarrow m_{MAX} = \dots = 0{,}7\,Kg$$

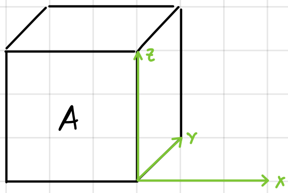
13 STATICA DEI FLUIDI

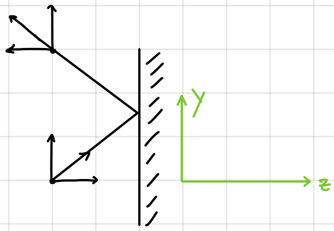
13.1 PRESSIONE SULLE PARETI ESERCITATA DAI GAS

Facciamo le seguenti ipotesi:

1) le molecole sono tutte uguali con moto continuo e disordinato $\Rightarrow \vec{v}_m = 0$
2) il gas ha densità costante
3) tutti gli urti sono elastici
4) non ci sono forze intermolecolari
5) il volume occupato dalle singole molecole è trascurabile rispetto al volume del recipiente

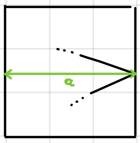
Prendiamo un contenitore cubico A e definiamo il nostro sistema di riferimento. A causa del caos molecolare, tutti i ragionamenti che faccio per un'urto contro una parete vale per tutti gli altri.





$$\left.\begin{array}{l}\Delta P_x^{tot} = P_x^f - P_x^i = -m v_x - m v_x = -2m v_x \\ \Delta P_y = 0\end{array}\right\} \quad I = 2 m v_x$$

cambiato segno perchè ci interessa la forza esercitata da molecola su parete, non viceversa



$$t = \frac{2a}{v_x} \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a} \Rightarrow F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{2 m v_x \, v_x}{2a} = \frac{m v_x^2}{a}$$

il tempo che intercorre tra due urti

gli urti sono uguali in tutte le dimensioni per ipotesi

Per calcolare la risultante delle forze applicate su x facciamo: $R_x = \sum F_{x_i} = \frac{m}{a} \sum v_{x_i}^2$. La pressione sarà, quindi:

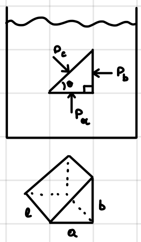
$$P = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum v_{x_i}^2 = \frac{m}{V} \sum v_{x_i}^2$$

Definiamo la velocità quadratica media come: $\bar{v}^2 = \frac{1}{N} \sum v_i^2 = \frac{1}{N} \sum (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$. Per ipotesi: $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$

Usandola nella formula di prima otteniamo:

$$P = \frac{m N}{V} \bar{v}_x^2 = \frac{m N}{3V} \bar{v}^2$$

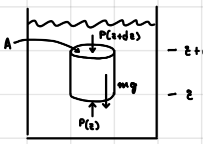
13.2 STATICA DEI FLUIDI



$S_a = La$, $S_b = Lb$, $S_c = Lc$

$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array} \begin{cases} P_c S_c \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) - P_b S_b = 0 \\ P_a S_a - P_c S_c \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_c S_c \sin\theta = P_b S_b \\ P_c S_c \cos\theta = P_a S_a \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{P_b}{P_c} = \frac{S_c}{S_b} \sin\theta = \frac{\cancel{L}c}{\cancel{L}b} \sin\theta = \frac{b}{b} = 1 \\ \frac{P_a}{P_c} = \frac{S_c}{S_a} \cos\theta = \frac{\cancel{L}c}{\cancel{L}a} \cos\theta = \frac{a}{a} = 1 \end{array} \Rightarrow P_a = P_b = P_c$$

L'esercizio sopra dimostra che in un fluido in condizioni statiche in assenza di forze esterne la pressione è uguale su tutte le superfici.
Come cambia la pressione quando consideriamo la forza peso?



$$-mg + P(z)A - P(z+dz)A = 0 \rightarrow -\rho A dz\, g + P(z)A - P(z+dz)A = 0 \rightarrow -\rho \cancel{A} g \cancel{dz} + \cancel{P(z)A} - \cancel{P(z)A} - \left(\frac{dP}{dz}\right)(z) \cancel{dz A} = 0$$

$P(z+dz) = P(z) + \left(\frac{dP}{dz}\right)(z)\, dz$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)(z) = -\rho g$$

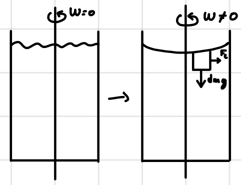
L' equazione appena scritta è l' equazione statica dei fluidi. Generalizzando al caso tridimensionale bisogna usare il gradiente:

$$\nabla P = \rho \vec{g} \quad \text{e per una qualsiasi forza} \quad \nabla P = \rho \vec{h} \quad \text{con} \quad \vec{h} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Se $\vec{h}$ è conservativa, allora essa è il gradiente dell' energia pot. $\rightarrow$ $\nabla P = \rho \nabla \phi$

Se una superficie ha P cost, avrà anche ϕ cost.
Ciò comporta che una superficie di un fluido cercherà sempre di mantenersi alla stessa altezza
(e.g. inclinare un bicchiere d'acqua)

ESERCIZIO



Curva della superficie?

$F_c = w^2 r \, dm$

$E_p = g z \, dm - \frac{1}{2} w^2 r^2 dm = \text{cost}$

$\hookrightarrow z = \left(\frac{w^2}{2g}\right) r^2 + \frac{\text{cost}}{g} \implies$ paraboloide di rotazione

Nel caso in cui non considerassimo un incremento infinitesimo dz otteniamo:

ρ cost: $\quad dP = \rho g \, dz \quad \int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{P_1}^{P_2} \rho g \, dz \quad \Delta P = -\rho g (z_2 - z_1)$ (Legge di Stevino)

$\hookrightarrow$ se $z_2 = z_1$ la pressione è uguale (Principio di Pascal)

la legge di Stevino solitamente ha forma: $P = P_0 + \rho g h$

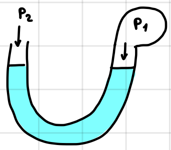
pressione idrostatica

Un' applicazione della legge di Stevino è il principio dei vasi comunicanti

...

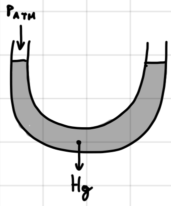
13.2.1 APPLICAZIONI LEGGE DI STEVINO

1) MANOMETRO A U:

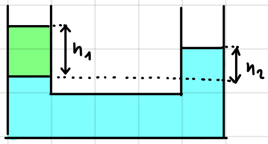


$$\longrightarrow \quad h = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

2) BAROMETRO DI TORRICELLI:

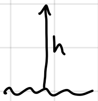


3) densità di due liquidi non miscibili:



$$P_{ATM} + \rho_1 g h_1 = P_{ATM} + \rho_2 g h_2 \quad \rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

13.4 CALO DELLA PRESSIONE CON L'ALTEZZA



$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad Hp: \quad PV = nRT \ , \ T \text{ cost.}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \frac{P}{V} m = \text{cost} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho} \rightarrow \rho = P\frac{\rho_0}{P_0}$$

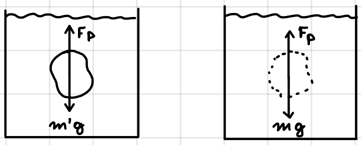
$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0}{P_0} g P \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \, dz \rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{1}{P} dP = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^h dz \rightarrow \ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} h$$

$$\Downarrow$$

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} h}$$

13.5 PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido che viene occupato dal volume del corpo immerso.



$F_P = mg$

$$F_{TOT} = m'g - F_P = m'g - mg = (m' - m)g = (\rho' V - \rho V) g = (\rho' - \rho) V g$$

$$\text{se: } \begin{cases} \rho' > \rho & F_{TOT} > 0 \\ \rho' < \rho & F_{TOT} < 0 \end{cases}$$

Se siamo nel secondo caso, prima o poi si arriverà al galleggiamento: $F_A = F_{PESO} \Rightarrow \rho' V = \rho V_{IMM}$

14 TERMODINAMICA

La Termodinamica si occupa di studiare i fenomeni legati a caldo e freddo. È nata con la nascita delle macchine termiche. Essa è anche un modo diverso di studiare un sistema: guarda il complesso del sistema.

Si dice sistema termodinamico ciò che voglio studiare; ambiente termodinamico tutto ciò che interagisce con il sistema; universo l'unione tra sistema e ambiente.

Un sistema si dice aperto se viene scambiata materia ed energia; chiuso solo energia; isolato se non interagisce con l'ambiente.

Un sistema è definito dalle variabili termodinamiche P, V, T e ρ. Le coordinate possono essere intensive (P, T, ρ) se si riferiscono ad un punto ed estensive (m, V) se si riferisce al sistema globalmente.

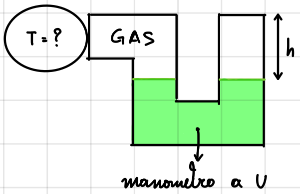
Noi studieremo sistemi semplici (1 specie chimica in 1 fase), più specificamente il sistema idrostatico, caratterizzati da P, V e T
Due sistemi separati da una parete diatermica scambiano energia e raggiungono l'equilibrio. Se, invece, sono separati da una parete adiabatica non raggiungeranno l'equilibrio.

• • •

14.1 TERMOMETRO

Misura la temperatura ed è composto da: sostanza termometrica (es. Hg); proprietà termometrica (es. volume Hg); funzione termometrica (relazione che lega la proprietà termometrica alla temperatura)

Il termometro più preciso è il termometro a gas (molto rarefatto):

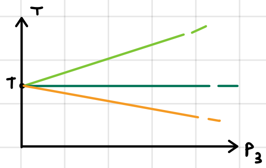


$T = 273.16 \frac{P}{P_3}$ K

↳ pressione a contatto con il punto triplo dell'acqua

PUNTO TRIPLO: I tre stati della materia coesistono. Avviene ad una certa temperatura / pressione

La temperatura misurata da un termometro a gas cambia al variare di P_3 e tenderà sempre ad un valore T:



$\Longrightarrow \quad T = \lim_{P_3 \to 0} 273.16 \frac{P}{P_3}$

Quindi più i gas sono rarefatti, più si comportano allo stesso modo. Tutto ciò è stato derivato sperimentalmente.

14.2 PRINCIPIO ∅

Se A è in equilibrio con B e B è in equilibrio con C, allora A è in equilibrio con C.
Il principio 0 non è altro che un principio transitivo.

14.3 TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

1) QUASI-STATICHE: rappresentabili come una successione di situazioni di equilibrio
2) CICLICA: stato finale e iniziale coincidono
3) ISOCORA: il volume si mantiene costante
4) ISOBARA: la pressione si mantiene costante
5) ISOTERMA: la temperatura si mantiene costante
6) ADIABATICA: si ha quando il sistema è racchiuso da pareti adiabatiche

14.4 GAS PERFETTI

Li abbiamo già incontrati con il termometro a gas. Il gas perfetto è, quindi, il comportamento a quale tendono i gas in condizioni di alta rarefazione.

Definiamo le leggi che legano le variabili di stato tra loro:

1) LEGGE DI BOYLE: In condizioni di isotermia → $PV = \text{cost}$
2) LEGGE DI VOLTA-GAY-LUSSAC: In condizione di isobaria → $V = V_0(1+\alpha t)$
3) LEGGE DI VOLTA-GAY-LUSSAC II: In condizione di isocoria → $P = P_0(1+\beta t)$

[V_0: volume a $t=0$; α cost; t = temp. in °C]
[P_0: press. a $t=0$; β cost; t = temp. in °C]

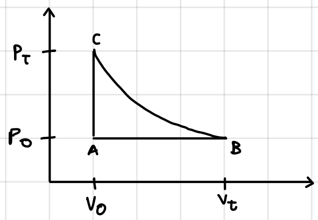
Sperimentalmente si dimostra che $\alpha = \beta = \frac{1}{273.16}$. Ciò ci permette di riscrivere le due leggi di V-G-L come:

$$V = V_0(1+\alpha t) = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+t\right) = V_0\alpha(273.16+t) = V_0\alpha T$$
$$P = P_0(1+\alpha t) = P_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+t\right) = P_0\alpha(273.16+t) = P_0\alpha T$$

con T: temp in K

Dimostriamo ora che le tre leggi non sono indipendenti:

Consideriamo le seguenti trasformazioni:



AB → isobara: $V_t = V_0(1+\alpha t)$ → $P_0 V_t = P_0 V_0 (1+\alpha t)$

BC → isocora: $P_0 V_t = P_t V_0$

$$\Downarrow$$

$$P_T \cancel{V_0} = P_0 \cancel{V_0} (1+\alpha t)$$
$$\downarrow$$
$$P_t = P_0 (1+\alpha t)$$

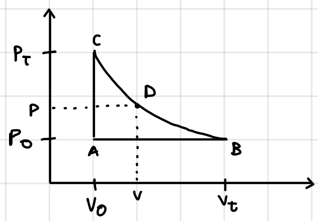
Abbiamo così ricavato una legge usando le altre due.

14.4.1 LEGGI DI AVOGADRO

1) una mole di materia contiene N_A molecole. [$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$]
2) volumi uguali di gas diversi, con stessa T e P, avranno lo stesso numero di molecole

14.4.2 EQUAZIONE DI STATO

Consideriamo:



AB → isobara: $V_t = V_0(1+\alpha t)$ → $P_0 V_t = P_0 V_0 (1+\alpha t)$

BD → isocora: $P_0 V_t = PV$

$$\Downarrow$$

$$PV = P_0 V_0 \alpha T$$

Definiamo il volume molare come $V_m = \frac{V_0}{n}$ [n = numero di moli di gas] otteniamo:

$$PV = (P_0 V_m \alpha) n T = nRT$$

con R la costante dei gas perfetti pari a $R = 8,31 \ J/mol\,K$

Un altro modo è usando la definizione di mole:

$$n = \frac{N}{N_A} \rightarrow PV = N \frac{R}{N_A} T \longrightarrow PV = N K_B T$$

con K_B la costante di Boltzmann pari a $K_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \ J/K$

...

14.4.3 LEGGE DI DALTON

La pressione di una miscela di gas è pari alla somma delle pressioni parziali.

$$PV = N K_B T \rightarrow P = \frac{N K_B T}{V} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots) K_B T}{V} = \frac{n_1 K_B T}{V} + \frac{n_2 K_B T}{V} + \dots = P_1 + P_2 + \dots$$

14.5 GAS REALE

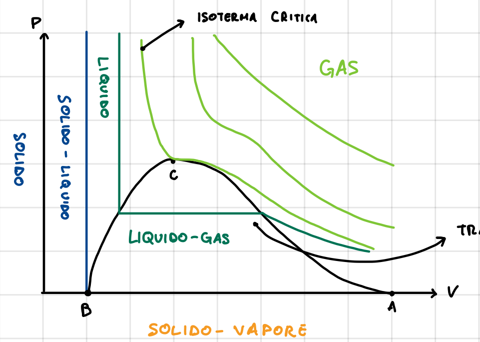
Per studiare un gas reale possiamo usare:

1) lo SVILUPPO DEL VIRIALE: aggiungere a $\frac{PV}{NRT} = 1$ dei coefficienti correttivi di grado superiore $\left[es: \frac{PV}{NRT} = 1 + bP + cP^2 \right]$
2) le EQUAZIONI DI VAN DER WALLS:

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

dove a e b sono coefficienti dipendenti dall'interazione tra le varie molecole di gas.

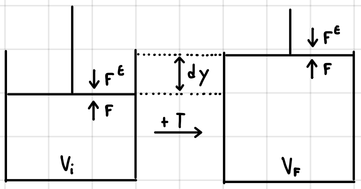
14.6 STUDIO DEGLI STADI DELLA MATERIA



B = PUNTO TRIPLO

14.7 LAVORO TERMODINAMICO

Consideriamo un cilindro con pistone riempito di gas. Partiamo dall'equilibrio e riscaldiamo finché raggiungiamo di nuovo l'equilibrio. Studiamo il lavoro:



$$\Delta E_c = L \rightarrow L = 0 \Rightarrow \delta L + \vec{F}^E d\vec{r} = 0$$

$$\delta L = -\vec{F}^E d\vec{r} = -P^E A dy \xrightarrow[P^E = -P]{\text{QUASISTATICA}} \delta L = PA\,dy = P dV$$

Considerando una superficie generica invece otteniamo: $dL_i = P\,dA_i\,dh_i \rightarrow L = P\sum dA_i dh_i = PV$

Possiamo quindi affermare che:

$$L = \int_{V_i}^{V_F} P\,dV$$

Questa relazione spiega perché si usano i grafici V-P per rappresentare le trasformazioni. La convenzione di segni dice che se $\Delta V > 0$, allora $L > 0$. Viceversa, se $\Delta V < 0$, $L < 0$.

Studiamo i lavori delle varie trasformazioni:

- ISOBARA: $L = P\int_{V_i}^{V_F} dV = P(V_F - V_i)$
- ISOCORA: $L = \int_{V_i}^{V_F} P\,dV = 0$
- ISOTERMA: $L = \int_{V_i}^{V_F} P\,dV = \int_{V_i}^{V_F} \frac{nRT}{V} dV = nRT\int_{V_i}^{V_F} \frac{dV}{V} = nRT(\ln V_F - \ln V_i)$

In generale, quindi, il lavoro dipende dalla trasformazione. Sperimentalmente si osserva che il lavoro adiabatico (lavoro tra pareti adiabatiche) dipende solo dagli stati iniziali e finali. L'esperimento usato è l'esperimento di Joule.

14.8 PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il lavoro di un sistema compiuto durante una trasformazione adiabatica dipende solo da stato finale ed iniziale, non dalla trasformazione adiabatica scelta.

Analogo a quanto detto per le forze conservative, dovrà esistere una funzione di stato U (energia interna): $L^{AD} = -\Delta U$

Se però la trasformazione non è adiabatica, il lavoro non sarà più uguale alla variazione di energia interna. Esisterà, quindi, un altro scambio energetico tra i due sistemi. Chiamo questo termine mancante calore:

$$Q = L + \Delta U \longrightarrow \delta Q = \delta L + dU \qquad [Q] = [E] = [J]$$

$\delta \neq d$: δ indica che dipende dal cammino

d indica che è indipendente dal cammino

Un'unità di misura molto usata per il calore è la caloria: calore necessario ad alzare di un grado un grammo di acqua a 1 atmosfera. La caloria è stata definita con l'esperimento di Joule.

14.9 ENTALPIA, CAPACITÀ TERMICA, CALORE SPECIFICO / MOLARE E CALORE LATENTE

Si definisce entalpia la grandezza: $H = U + PV$

Siccome U, P e V sono funzioni di stato, anche l'entalpia è una funzione di stato.

Consideriamo una trasformazione isobara:

$$\Delta U = Q - L \longrightarrow \Delta U = Q - P\Delta V \longrightarrow Q = \Delta U - P\Delta V = (U_F - U_i) - P(V_F - V_i) = H_F - H_i$$

L'entalpia è, quindi, il calore scambiato a pressione costante.

Si definisce capacità termica $C = \frac{\delta Q}{dT}$. La capacità termica è una proprietà del corpo.

Si definisce calore specifico $c = \frac{C}{m}$. A differenza della capacità termica, il calore specifico dipende dalla sostanza.

Si definisce calore molare $c_m = \frac{C}{n}$.

Per calcolare il calore scambiato integriamo:

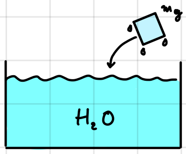
$$\delta Q = mc\,dT \to Q = \int_{T_i}^{T_F} mc\,dT = mc\int_{T_i}^{T_F} dT = mc\Delta T$$

consideriamo m, c cost

Si dice calore latente il calore necessario a far cambiare fase ad un'unità di massa di sostanza. Il calore latente si indica con λ.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2



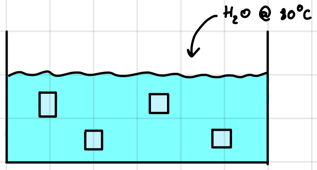
$V_{H_2O} = 500\ cm^3$ $\quad t_i = 20°C$ $\quad \lambda_g = 80\ cal/g$ $\quad m_g\ ?$

$t_f = 0°C$ $\quad c_a = 1\ cal/g°C$

$\rho_a = 10^3\ Kg/m^3 = 1\ g/cm^3$

$$\lambda_f\, m_g = c_a\, \rho_a\, V_{H_2O}\,(20°C - 0°C) \rightarrow m_g = \frac{c_a\, \rho_a\, V_{H_2O} \cdot 20°C}{\lambda_f} = 125\ g$$

ESERCIZIO 3

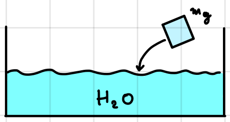


$m_a = 300g$ $\quad m = 1100g$ $\quad t = 80°C$ $\quad t_f\ ?$

$m_g = 600g$

$$\underbrace{c_a\, m\,(t - t_{eq})}_{-Q_m} = \underbrace{\lambda_f\, m_g}_{Q_{fg}} + \underbrace{c_a(m_a + m_g)\, t_{eq}}_{Q_{a\Delta t} + Q_{g\Delta t}} \rightarrow t_{eq}\,[\,c_a(m_a + m_g) + c_a m\,] = c_a m t - \lambda_f m_g \rightarrow t_{eq} = \frac{c_a m t - \lambda_f m_g}{c_a(m_a + m_g) + c_a m} = 20°C$$

ESERCIZIO 4



$V = 1L$ $\quad t_a = 25°C$ $\quad t_{eq}\ ?$

$m_g = 0{,}1\ Kg$ $\quad t_g = -20°C$

$m_g' = 0{,}5\ Kg$

$Q_{a\Delta t} = c_a m_a (0°C - t_a) = \ldots = -1{,}05 \cdot 10^5\ J$

$Q_{g\Delta t} = c_g m_g (0°C - t_g) = \ldots = 4{,}10 \cdot 10^3\ J$

$Q_{fg} = \lambda_{fg}\, m_g = \ldots = 3{,}35 \cdot 10^4\ J$

servono per valutare se il ghiaccio si scioglie o no.

$\downarrow$

$|Q_{a\Delta t}| > Q_{g\Delta t} + Q_{fg}$ $\rightarrow$ l'acqua scioglie il ghiaccio senza arrivare a 0°

$\downarrow$

$$c_a m_a (t_a - t_{eq}) = \lambda_{fg}\, m_g + c_g m_g (t_{eq} - t_g) + \underbrace{c_a m_g (t_{eq} - 0)}_{\text{ghiaccio sciolto}} \rightarrow t_{eq} = \ldots = 14{,}56\ °C$$

Considerando m_g': $\quad Q_{g\Delta t} = c_g m_g' (0°C - t_g) = \ldots = 2{,}05 \cdot 10^4\ J \rightarrow |Q_{a\Delta t}| < Q_{g\Delta t} + Q_{fg} \rightarrow$ equilibrio di acqua e ghiaccio a 0°C

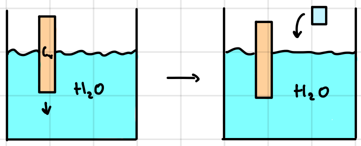
$Q_{fg} = \lambda_{fg}\, m_g' = \ldots = 1{,}68 \cdot 10^5\ J$

$\downarrow$

$-Q_{a\Delta t} = Q_{g\Delta t} + \Delta m_g\, \lambda_{fg}$

ghiaccio fuso (non è detto che tutto il ghiaccio fonda)

ESERCIZIO 5



$c_x ?$, $\quad m_c = 2Kg$, $\quad T_c = 240°C$ $\quad m_g = 0{,}5\ Kg$ $\quad T_g = 0°C$

$V_A = 1\ dm^3$, $\quad T_a = 20°C$ $\quad T_{eq_2} = 25°C$

$T_{eq_1}\ ?$

$$c_x m_c (T_c - T_{eq_1}) = c_a m_a (T_{eq_1} - m_A) \rightarrow T_{eq} = \frac{c_x m_c T_c + c_A m_A T_A}{c_A m_A + c_x m_c}$$

$$\lambda_{fg}\, m_g + c_A m_g T_{eq_2} = c_a m_a (T_{eq_1} - T_{eq_2}) + c_x m_c (T_{eq_1} - T_{eq_2}) \rightarrow \ldots \rightarrow c_x = \ldots = \ldots = 560\ J/Kg\,K$$

$\hookrightarrow T_{eq} = \ldots = 66{,}4\ °C$

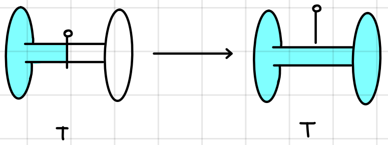
...

14.10 CALORI MOLARI A VOLUME / PRESSIONE COSTANTE

Si può dimostrare che in generale il calore molare a pressione costante C_p è sempre maggiore di quello a volume costante C_V:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT}\Big|_{V=\text{cost}} \quad ; \quad C_p = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT}\Big|_{P=\text{cost}}$$

Prima di poter dimostrare la relazione di Mayer, dimostriamo sperimentalmente che l'energia interna di un gas perfetto è funzione di T:



$\Delta U = \cancel{Q} - \cancel{L} = 0$ il gas riempie il vuoto, quindi non compie lavoro

$\downarrow$ pon. adiab.

T è l'unica che non varia

$$\Rightarrow \begin{matrix} U(P,T) \\ U(P,V) \;\times \\ U(V,T) \end{matrix} \longmapsto U(T)$$

Possiamo adesso dimostrare la relazione di Mayer:

Th: $C_p = C_V + R$ Consideriamo isocora: $dU = \delta Q - \delta L = \delta Q - PdV = \delta Q \to \delta Q = \frac{dU}{dT}dT$

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}\cdot\frac{1}{\cancel{dT}}\cancel{dT} = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \Rightarrow dU = nC_V dT \Rightarrow \delta Q = nC_V dT + PdV$$

↳ vale sempre perché U è funzione di stato

$PV = nRT \to PdV + VdP = nRdT$

$\delta Q - nC_V dT + VdP = nRdT$

$\delta Q = nC_V dT + nRdT - VdP$

$\delta Q = n(C_V + R)dT - VdP$

Consideriamo isobara: $\delta Q = n(C_V+R)dT - \cancel{VdP} \to C_p = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} = \dots = C_V + R$

Usando la relazione sopra, possiamo riscrivere il primo principio:

$$\delta Q = dU + \delta L = nC_V dT + PdV = nC_V dT + nRdT - VdP = n(C_V+R)dT - VdP = nC_p dT - VdP$$

$dU = nC_V dT$; $PdV + VdP = nRdT$; $C_p = C_V + R$

$\delta L = PdV$

14.11 TRASFORMAZIONE ADIABATICA DI UN GAS PERFETTO

Prendiamo le due equazioni fin'ora ricavate:

$$\begin{cases} \delta Q = nC_p dT - VdP \\ \delta Q = nC_V dT + PdV \end{cases} \xrightarrow{\text{ADIAB.}} \begin{cases} nC_p dT = VdP \\ nC_V dT = -PdV \end{cases} \Rightarrow \frac{C_V}{C_p} = -\frac{PdV}{VdP} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{C_V}{C_p} = -\frac{PdV}{VdP}$$

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{PdV}{VdP} \to \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = \int_{V_0}^{V} -\gamma\frac{dV}{V} \to \ln\frac{P}{P_0} = -\gamma\ln\frac{V}{V_0} \to \ln\frac{P}{P_0} = \ln\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma}\right] \to \frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma} \to P_0, V_0 \text{ generici} \to PV^{\gamma} = \text{cost}$$

La relazione sopra può essere riscritta in funzione delle altre grandezze usando $PV = nRT$:

$(T,V) \to TV^{\gamma-1} = \text{cost}$

$(P,T) \to P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cost}$

14.12 VALORI DI C_V/C_p

1) MONOATOMICO IDEALE: $C_V = \frac{3}{2}R$; $C_p = \frac{5}{2}R$; $\gamma = 5/3$

2) BIATOMICO IDEALE: $C_V = \frac{5}{2}R$; $C_p = \frac{7}{2}R$; $\gamma = 7/5$

...

14.13 LAVORO DI UN'ADIABATICA

Calcoliamo il lavoro termodinamico di una trasformazione adiabatica (quasistatica):

$$L_{AB} = \int_{V_a}^{V_B} P\,dV = \int_{V_a}^{V_B} c\,V^{-\gamma}\,dV = c\left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_a}^{V_B} = \frac{c}{1-\gamma}\left(V_B^{1-\gamma} - V_a^{1-\gamma}\right) = \frac{c\,V_B^{1-\gamma} - c\,V_a^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{P_B V_B^{\gamma} V^{1-\gamma} - P_A V_A^{\gamma} V^{1-\gamma}}{1-\gamma} =$$

$$PV^{\gamma} = c \rightarrow P = cV^{-\gamma}$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left(P_B V_B - P_A V_A\right) = -\frac{C_V}{R}\left(P_B V_B - P_A V_A\right) = -\frac{C_V}{\cancel{R}}\left(n\cancel{R}T_B - n\cancel{R}T_a\right) = nC_V\left(T_a - T_B\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{1-\frac{C_P}{C_V}} = \frac{C_V}{C_V - C_P} = -\frac{C_V}{R}$$

L'espressione sopra vale anche se la trasformazione non è quasistatica:

$$\Delta U = -L \longrightarrow L = -\Delta U = -(U_F - U_i) = -(nC_V T_F - nC_V T_i) = nC_V(T_i - T_F)$$

Se:

- $L_{AB} > 0 \rightarrow T_i > T_F$: espansione
- $L_{AB} < 0 \rightarrow T_i < T_F$: compressione

14.14 TRASFORMAZIONE POLITROPICA

Si definisce trasformazione politropica una trasformazione che ha:

$$PV^{\alpha} = \text{cost}$$

- $\rightarrow \alpha = 1$ trasf. isoterma
- $\rightarrow \alpha = \gamma$ trasf. adiabatica
- $\rightarrow \alpha = 0$ trasf. isobara

Calcolare il lavoro di una trasformazione politropica significa calcolare il lavoro delle tre trasformazioni, variando α.

14.15 SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il primo principio è un bilancio energetico. Esso, però, non fornisce informazioni sulla trasformazione: non distingue tra trasformazioni spontanee o no.

Si dice che una trasf. è reversibile se è possibile riportare sia ambiente che sistema allo stato iniziale. Il secondo principio, grossolanamente, afferma la sua inesistenza in natura.

Una trasformazione reversibile è:

- quasistatica
- priva di effetti dissipativi
- direttamente reversibile.

Definiamo macchina termica un dispositivo capace di compiere lavoro scambiando calore con dei termostati. Essa è ciclica se la macchina termica compie cicli, reversibile se suddetti cicli sono trasformazioni reversibili.

Si definisce rendimento:

$$\eta = \frac{L_{FATTO}}{Q_{ASS.}}$$

Si definisce macchina di Carnot una macchina ciclica reversibile che scambia calore con 2 termostati.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

$m_1 = 0{,}1\,Kg$, $t_1 = -10°C$ } GHIACCIO

$m_2 = 0{,}2\,Kg$, $t_2 = 160°C$ } ACQUA

$Q_{g\Delta t} = C_g m_1 (-t_1) = \dots = 500$ cal

$Q_{v\Delta t} = C_{va} m_2 (100°C - t_2) = \dots = -5280$ cal

$Q_{gf} = \lambda_g m_1 = \dots = 8000$ cal

$Q_{vc} = -\lambda_{va} m_2 = \dots = -1{,}080 \cdot 10^5$ cal

calore ceduto

$|Q_{v\Delta t} + Q_{g\Delta t}| > Q_{gf}$

$\Downarrow$

$Q_{g\Delta t} + Q_{gf} = -Q_{v\Delta t} + \lambda_v m_{cv}$ (minimo per far sciogliere il g)

$m_{cv} = \dots = 6\,g$

$\hookrightarrow$ 194 g vapore @ 100°; 6 g acqua @ 100°; 100 g acqua @ 0°

$Q'_{vc} = -\lambda_{va} m_{cv} = \dots = -1{,}048 \cdot 10^5$ cal

$Q_{a\Delta t} = C_a m_2 (100°C) = \dots = 10^4$ cal

$Q'_{vc} > Q_{a\Delta t} \rightarrow Q_{a\Delta t} = \lambda_v m'_{cv} \rightarrow m'_{cv} = \dots = 18{,}5\,g$

$\hookrightarrow$ 175,5 vapore @ 100°; 124,5 acqua @ 100°

EQUILIBRIO

ESERCIZIO 2

$m = 0{,}1\,Kg$ $\quad t_p = 20°C$

$M = 10\,Kg$ $\quad t_g = 0°C$

v : fonda $\Delta M = 0{,}02\,Kg$ di ghiaccio

$U_i = U_{ip} + \frac{1}{2} m v^2 + U_{ig}$

$U_f = U_{fp} + U_{fg} + \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 \rightarrow v_f = \frac{m}{m+M} v$ $\quad \boxed{m v = (M+m) v_f}$

$\Downarrow$

$\Delta U = U_{fp} - U_{ip} + U_{fg} - U_{ig} + \frac{1}{2}\cancel{(m+M)} \frac{m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} v^2 - \frac{1}{2} m v^2 =$

$= \Delta U_p + \Delta U_g + \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{m^2} - \cancel{m^2} + mM}{m+M}\right) v^2 =$

Siccome il sistema è isolato, $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U_g = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M} v^2 + \Delta U_p \rightarrow \lambda_g \Delta M = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M} v^2 + C_p m (0°C - t_p)$

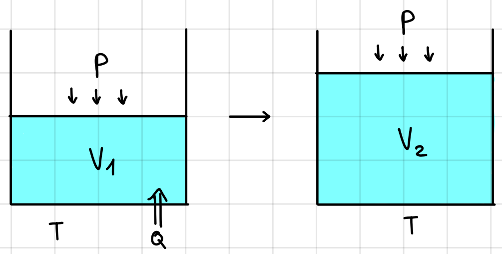
$\Downarrow$

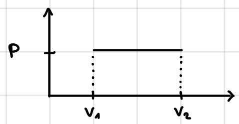
$$v = \sqrt{\frac{2(m+M)}{mM}(\lambda_g \Delta M - C_p m t_p)} = \dots = 360.68\ m/s$$

ESERCIZIO 3

$m = 0{,}1\,Kg$ $\quad t = 100°C$ $\quad p = 10^5\,Pa$

L? ΔU?





$dU = \delta Q - \delta L$

$\hookrightarrow L = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = P(V_2 - V_1) = Pm\left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_a}\right) = \dots = 1{,}67 \cdot 10^4\,J$

isobara

$Q = \lambda_v m = \dots = 2{,}26 \cdot 10^5\,J$

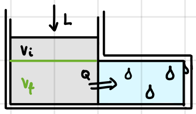
$\Downarrow$

$\Delta U = Q - L = \dots = 2.09 \cdot 10^5\,J$

ESERCIZIO 4

$n = 10$ moli $\quad V_i = 1\,m^3$

$m = 0{,}1\,Kg$ $\quad V_f$?



$Q = -\lambda_f m = 8$ Kcal

$L = \int_{V_i}^{V_f} P(T)\,dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$

Poiché il gas è perfetto: $U(T) \Rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow L = +Q$

$\Downarrow$

$-\lambda_f m = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \rightarrow V_f = V_i e^{-\frac{\lambda_f m}{nRT}} = \dots = 0{,}23\ m^3$

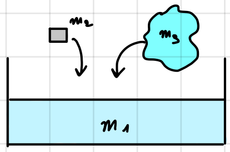
ESERCIZIO 5

m_1 ? $T_1 = -20\ °C$

$m_2 = 0,4\ Kg$ $T_2 = 60\ °C$ $c_2 = 380\ J/Kg\,K$

$m_3 = 0,8\ Kg$ $T_3 = 10\ °C$

$T = -3\ °C$



$$\overset{Q_{g\Delta t}}{c_g m_1 (T - T_1)} = \overset{Q_{x\Delta t}}{c_2 m (T_2 - T)} + \overset{Q_{a\Delta t}}{c_a m_3 (T_3 - 0)} + \overset{Q_{sa}}{\lambda_g m_3} + \overset{Q'_{a\Delta t}}{c_g m_3 (0 - T)}$$

$$\hookrightarrow m_1 = \frac{c_2 m (T_2 - T) + m_3 [c_a (T_3) + \lambda_g + c_g (0 - T)]}{c_g (T - T_1)} = \dots = 9,1\ Kg$$

ESERCIZIO 6

$n = 1$ mol $p(V - V_0) = -K$

$V_0 = 5 \cdot 10^{-2}\ m^3$

$K = 4,56\ KJ$

$V_1 = 10^{-2}\ m^3$, $P_1 = 1,14$ bar

$V_2 = 4 \cdot 10^{-2}\ m^3$, $P_2 = \frac{K}{(V_0 - V_2)} = 4,56 \cdot 10^5\ Pa$

$$L = \int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV = -K \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - V_0} = -K \ln\left(\frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0}\right) = \dots = 6,3 \cdot 10^3\ J$$

$$\Delta U = n C_v \Delta T = n \tfrac{3}{2} R (T_2 - T_1) = \dots = 26 \cdot 10^3\ J$$

$\uparrow$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \dots = 137\ K$$

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \dots = 2,19 \cdot 10^3\ K$$

$$Q = \Delta U + L = 3,2 \cdot 10^4\ J$$

ESERCIZIO EXTRA

$n = 1$ mol gas biat. ideale compresso in modo adiabatico NON reversibile da $T_a = 200K$ a $T_b = 500K$. Calcolare il lavoro effettuato sul gas.

$n = 1$ mol $T_a = 200K$

$T_b = 500K$

L ?

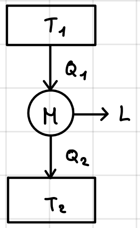
$$\Delta U = -L \rightarrow L = -\Delta U = -n C_v (T_B - T_A) = -\tfrac{5}{2} R (T_B - T_A) = -6236\ J$$

...

16.15 SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

...

Applichiamo il primo principio alle macchine termiche:



CICLICA $\Rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow Q = L \rightarrow L = Q_1 + Q_2$

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \underbrace{\frac{Q_2}{Q_1}}_{\text{negativo}} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

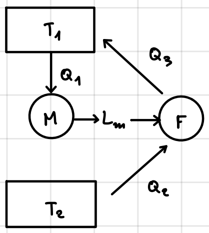
Enunciamo il secondo principio secondo Clausius: una macchina termica il cui unico risultato ($L=0$) è assorbire calore da un corpo freddo e cederlo ad uno più caldo non esiste.

Enunciamo il secondo principio secondo Kelvin-Planck: non esiste una macchina termica che trasforma il calore assorbito da un serbatoio esclusivamente in lavoro.

Dimostriamo l'equivalenza dei due principi:

1) Th: se non vale K.P., allora non vale C.
2) Th: se non vale C., allora non vale K.P.

1)



$T_1 > T_2$

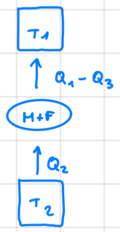
M: $L_m = Q_1$

F: $Q_2 + L_m = Q_3$

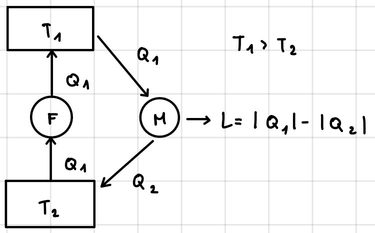
$Q_2 + Q_1 = Q_3$

M+F: $Q_1 - Q_3 = Q_1 - (Q_2 + Q_1) = \cancel{Q_1} - Q_2 - \cancel{Q_1} = -Q_2$

viola Clausius

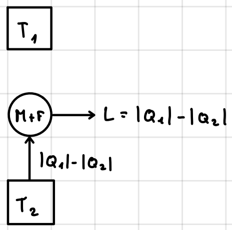


2)



$T_1 > T_2$

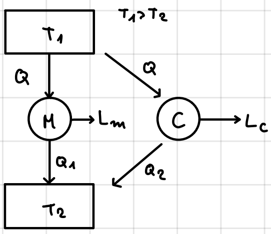
$\Rightarrow$



16.16 TEOREMA DI CARNOT

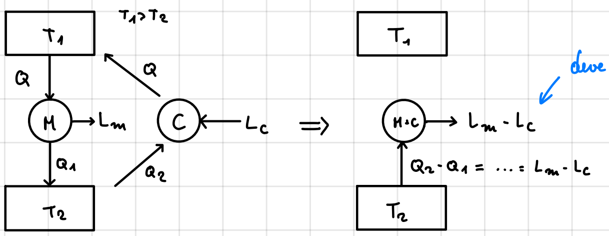
Una macchina termica di Carnot operante tra due termostati avrà rendimento maggiore rispetto ad una generica macchina operante fra gli stessi termostati. Inoltre, tutte le macchine di Carnot operanti tra gli stessi termostati hanno lo stesso rendimento.

Dimostriamo il teorema:



Applico il primo principio: $\Delta U = 0 \rightarrow \begin{cases} Q - Q_1 = L_m \rightarrow Q_1 = Q - L_m \\ Q - Q_2 = L_c \rightarrow Q_2 = Q - L_c \end{cases}$

Poiché la macchina di Carnot è reversibile, invertiamola:



deve assorbire lavoro per non violare Clausius

$\Rightarrow$ per secondo principio $L_m - L_c \leq 0$

$$\eta_M = \frac{L_m}{Q}, \quad \eta_c = \frac{L_c}{Q} \Rightarrow L_m = \eta_m \cancel{Q} \leq \eta_c \cancel{Q} = L_c$$

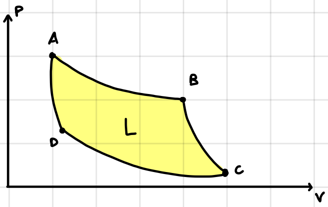
$$\eta_m \leq \eta_c$$

Dimostriamo la seconda parte: $M \to C_1$, $C \to C_2$ $\Rightarrow$ $\eta_{C_1} \le \eta_{C_2}$ per prima parte; $\eta_{C_2} \le \eta_{C_1}$ per prima parte $\Rightarrow$ $\eta_{C_1} = \eta_{C_2}$

inverti C_2 — inverti C_1

14.17 RENDIMENTO DEL CICLO DI CARNOT PER GAS PERFETTO

Si dice ciclo di Carnot il seguente ciclo:



$A \to B$ isoterma

$B \to C$ adiabatica

$C \to D$ isoterma

$D \to A$ adiabatica

Esso è il ciclo di tutte le macchine di Carnot. Calcoliamo il rendimento:

AB: $\Delta U = 0$ (isoterma) $\to$ $Q_1 = L_{AB} = \int_A^B P\,dV = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$ ← Q_1 assorbito (contatto con T_1 ($T_1 > T_2$))

BC: $PV^\gamma = \text{cost} \to TV^{\gamma-1} = \text{cost} \to$ $T_2 V_C^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1}$

CD: $\Delta U = 0$ (isoterma) $\to$ $Q_2 = L_{CD} = \dots = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$ ← Q_2 ceduto (contatto con T_2 ($T_1 > T_2$))

DA: $PV^\gamma = \text{cost} \to TV^{\gamma-1} = \text{cost} \to$ $T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$

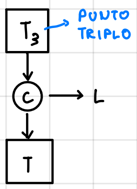
$$\eta = \frac{L}{Q_1} \underset{\Delta U = 0}{=} \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{\cancel{nR}T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)}{\cancel{nR}T_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)} = 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)}{\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)} = \boxed{1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

div. mem. a mem.

$$\begin{cases} T_2 V_C^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1} \\ T_2 V_D^{\gamma-1} = T_1 V_A^{\gamma-1} \end{cases} \to \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} \to \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

Per il teorema di Carnot, la formula sopra è il lavoro di qualsiasi macchina termica di Carnot con termostati T_1 e T_2.

Le macchine di Carnot sono ottimi termometri



$$\left.\begin{aligned} \eta_c &= 1 - \frac{T}{T_3} \\ \eta &= 1 - \frac{|Q|}{|Q_3|} \end{aligned}\right\} \to \frac{T}{T_3} = \frac{|Q|}{T_3} \Rightarrow T = T_3 \frac{|Q|}{|Q_3|}$$

$T_3 \to$ 273.16 K

$\to$ Temperatura assoluta Termodinamica

Applicando la prima parte del teorema di Carnot alla nostra formula del rendimento otteniamo:

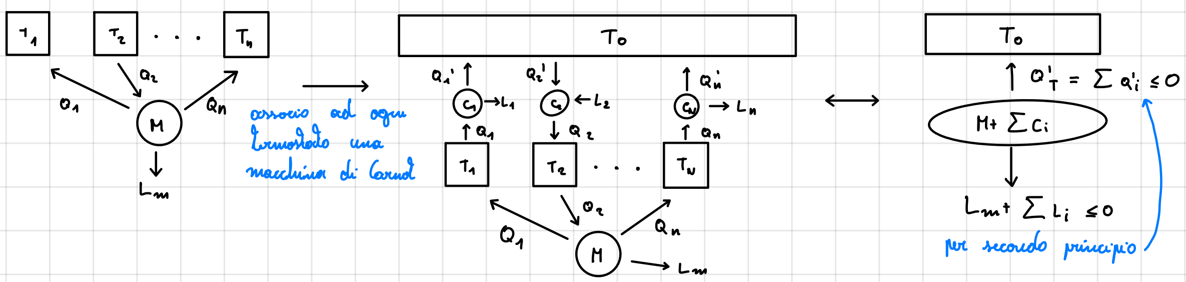
$$\eta \le \eta_c \to \cancel{1} \frac{Q_2}{Q_1} \le \cancel{1} - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0$$

L'uguaglianza vale se le trasformazioni sono reversibili.

14.18 TEOREMA DI CLAUSIUS

Consideriamo una macchina termica che scambia calore con N termostati, allora $\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \le 0$

Dimostriamo il teorema



Per le singole macchine C_i vale: $\frac{Q_i'}{T_0} + \frac{(-Q_i)}{T_i} = 0$

C: $\uparrow Q_i \rightarrow$ entrante
M: $\uparrow Q_i \rightarrow$ uscente
$\}\rightarrow$ verso opposto

$$\Downarrow$$

$$Q'_T = \sum Q'_i = \sum \frac{T_0}{T_i} Q_i \leq 0 \implies \cancel{T_0}\left(\sum \frac{Q_i}{T_i}\right) \leq 0 \implies \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

ESERCITAZIONE

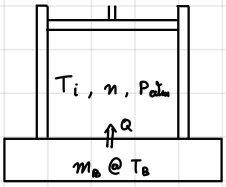
ESERCIZIO 2

$n = 10$ mol (monoat.)

$T_i = 300\,K$

$T_B = 1000\,K$ $\quad m_B = 1\,Kg$ $\quad c_B = 400\,\frac{J}{KgK}$

T_f? $\quad L$?



$$Q_B = \underbrace{m_B c_B}_{C_B}(T_f - T_B) = C_B(T_f - T_B) < 0\ J$$

$$\Delta U = Q_g - L \implies Q_g = \Delta U + L = n C_V(T_F - T_i) + L = n C_V(T_F - T_i) + nR(T_F - T_i) = n(C_V + R)(T_F - T_i)$$

$$L = P \cdot \Delta V = \cancel{P_a} \cdot \frac{nR}{\cancel{P_a}}(T_F - T_i) = nR(T_F - T_i)$$

$$\downarrow$$

$$Q_g + Q_B = 0 \rightarrow C_B(T_f - T_B) + \frac{5}{2} nR(T_F - T_i) = 0 \implies T_F = \dots = \frac{C_B T_B + \frac{5}{2} nRT_i}{C_B + \frac{5}{2} nR} = 760.64\ K$$

$$\downarrow$$

$$L = \dots = 38297.6\ J$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 4 (20)

N_2, $C_V = \frac{5}{2} R$ $M = 28\ g/mol$

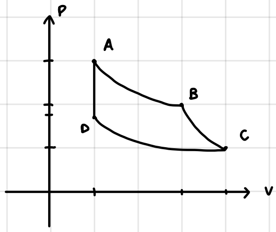
$m = 1g \rightarrow n = \frac{1}{28}\ mol$

$A \rightarrow B$ isoterma da V_A, $V_B = 3V_A$ a $T_1 = 380°C$

$B \rightarrow C$ adiabatica da V_B, V_C con $T_2 = 327°C$ finale

$C \rightarrow D$ isoterma da V_C, V_D

$D \rightarrow A$ isocora fino a p_A



$A \rightarrow B$: $W_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_1 \ln 3\ J$

$B \rightarrow C$: $\Delta U = -W_{BC} \rightarrow W_{BC} = -nC_V(T_2 - T_1)\ J$ $\qquad T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{3V_a}{V_C}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \frac{3V_a}{V_C} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_a}{V_C} = \frac{1}{3}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{5}{2}}$

$C \rightarrow D$: $W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_a} = nRT_2 \left[-\ln 3 + \frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}\right]$

$D \rightarrow A$: $W_{DA} = 0$

$\Downarrow$

$W_{TOT} = nRT_1 \ln 3 - nC_V T_2 + nC_V T_1 - nRT_2 + \frac{5}{2} nRT \ln \frac{T_2}{T_1} = \dots = 19{,}38\ J$

ESERCIZIO 1

$T \cdot V = \text{cost}$ $\qquad C_V = \frac{5}{2} R$

T_a, $\frac{V_a}{V_B}$

$\Delta U = nC_V(T_B - T_A) = nC_V T_a \left(\frac{T_B}{T_a} - 1\right) = nC_V T_a \left(\frac{V_a}{V_B} - 1\right)$

$\hookrightarrow T_B V_B = T_a V_a \Rightarrow \frac{T_B}{T_a} = \frac{V_a}{V_B}$

$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2} nRT_a \left(\frac{V_a}{V_B} - 1\right) - nRT_a \left(\frac{V_a}{V_B} - 1\right) = \frac{3}{2} nRT_a \left(\frac{V_a}{V_B} - 1\right)$

$\hookrightarrow W = \int_a^B P\,dV = \int_a^B \frac{nRT}{V} dV = nR \int_a^B \frac{T}{V} dV = nR \int_a^B \frac{T_a V_a}{V^2} dV$

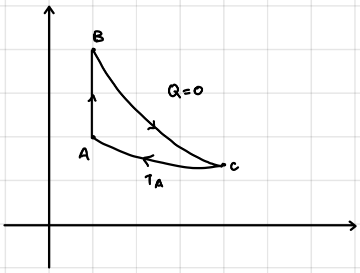
$= nRT_a V_a \left[-\frac{1}{V}\right]_a^B = nRT_a V_a \left[-\frac{1}{V_B} + \frac{1}{V_a}\right] = -\frac{nRT_a V_a}{V_B} + nRT_a =$

$= -nRT_a \left(\frac{V_a}{V_B} - 1\right)$

ESERCIZIO 2

$\frac{T_B}{T_A} = 2$

$C_V = \frac{5}{2} R$



$Q_{AB} = nC_V(T_B - T_a)$ $\qquad \Rightarrow \eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|L_{CA}|}{|L_{AB}|} = 1 - \frac{\cancel{n} RT_a \ln \frac{V_C}{V_a}}{\cancel{n} C_V (T_B - T_A)} = 1 - \frac{R}{C_V} \cdot \left(\frac{1}{\frac{T_B}{T_A} - 1}\right) \ln \frac{V_C}{V_a} = 1 - \frac{R}{C_V} \left(\frac{1}{\frac{T_B}{T_a} - 1}\right) \frac{\ln \frac{T_B}{T_a}}{\gamma - 1} = \dots = 0{,}307$

messo −

$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_a}{V_C}$

$< 0 \rightarrow$ ceduto

$B \rightarrow C$: $T_A V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_B}{T_a} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_B}{T_a} = \left(\frac{V_C}{V_a}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \left(\frac{T_B}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{V_C}{V_a}$

In caso di monoatomico: $\qquad \eta = 1 - \frac{R}{C_V} \left(\frac{1}{\frac{T_B}{T_a} - 1}\right) \frac{\ln \frac{T_B}{T_a}}{\gamma - 1} = 0{,}304$

. . .

14.19 ENTROPIA

Usando il teorema di Clausius su un ciclo reversibile otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \oint_R \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Come abbiamo fatto per le forze conservative, studiamo l'integrale:

$$\oint_R \frac{\delta Q}{T} = \int_{1,R_1}^{2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2,R_2}^{1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1,R_1}^{2} \frac{\delta Q}{T} - \int_{1,R_2}^{2} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{1,R_1}^{2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1,R_2}^{2} \frac{\delta Q}{T}$$

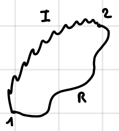
Esiste quindi una funzione di stato. Chiamiamo questa funzione entropia:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{1,R}^{2} \frac{\delta Q}{T} \quad \rightarrow \quad dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R \quad \longrightarrow$$

Per calcolare la variazione di entropia a seguito di una trasformazione irreversibile puoi usarne una reversibile con gli stessi stati iniziali e finali

14.20 PRINCIPIO DI AUMENTO DELL' ENTROPIA

Consideriamo la trasformazione ciclica sotto (I irreversibile e R reversibile):



$$\oint_I \frac{\delta Q}{T} = \int_{1\,I}^{2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2\,R}^{1} \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{1\,I}^{2} \frac{\delta Q}{T} \leq \int_{1\,R}^{2} \frac{\delta Q}{T} = \Delta S$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta S \geq \int_{1\,I}^{2} \frac{\delta Q}{T}$$

Se il sistema fosse termicamente isolato otteniamo che:

$$\Delta S \geq \int_{1\,I}^{2} \frac{\delta Q}{T} \quad \xrightarrow{\delta Q = 0} \quad \Delta S \geq 0 \quad \Rightarrow$$

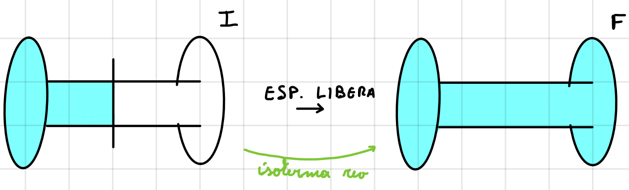
In un sistema termicamente isolato l'entropia può solo aumentare

↳ principio di aumento dell'entropia

La legge sopra viene detta principio anche se possiamo ricavarla con passaggi logici perché è possibile usarla come una formulazione del secondo principio della termodinamica.

Conseguenza del suddetto principio è che in un sistema isolato la variazione di entropia può essere usata per misurare il grado di irreversibilità delle trasformazioni al suo interno. Inoltre, un sistema ad entropia massima è sempre in equilibrio.

ESERCIZIO



Non quasist. ΔS ?

$\Delta U = 0$

Calcoliamo l'entropia considerando un'isoterma reversibile → visto che gli stati sono gli stessi, la variazione è la stessa. Consideriamo l'isoterma solo per poter fare i calcoli

$$\delta Q = \delta L = p\,dV = \frac{nRT}{V}\,dV \qquad \Delta S = \int_I^F \frac{nR\cancel{T}}{\cancel{T}V}\,dV = nR \ln\left(\frac{V_F}{V_i}\right) \geq 0$$

Calcoliamo il lavoro lungo l'isoterma

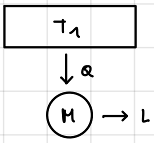
$$L_R = \int_{V_i}^{V_F} p\,dV = \dots = nRT \ln\left(\frac{V_F}{V_i}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta L = L_R - L = nRT \ln\frac{V_F}{V_i} = T\Delta S$$

lavoro dell'espansione libera irreversibile $= 0$

La trasformazione irreversibile ha meno capacità di compiere lavoro

14.20.1 LE ALTRE FORMULAZIONI RICAVATE DAL PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

Dimostriamo la formulazione di K.P.:



$\Delta S_U \geq 0$

M ciclica $\rightarrow \Delta S_M = 0$

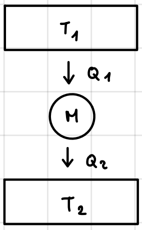
$\Delta S_U = \Delta S_{T_0} = -\frac{Q}{T_1} \geq 0 \Rightarrow Q \leq 0$

↓

non compatibile con il nostro schema

↳ dimostra K.P.

Dimostriamo l'enunciato di Clausius:



$\Delta S_U = \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} + \cancel{\Delta S_M} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \geq 0$ $\quad \frac{Q_2}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \geq 0 \rightarrow \frac{Q_2}{T_1} \geq \frac{Q_2}{T_2}$

$\Delta U = Q - \cancel{L} = Q \Rightarrow$ ciclica $\Rightarrow \Delta U = 0 = Q \rightarrow Q_1 = -Q_2$

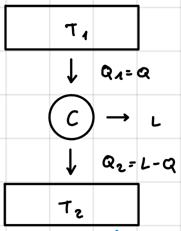
Studiamo $\frac{Q_2}{T_1} \geq \frac{Q_2}{T_2}$.

1) $Q_2 > 0 \rightarrow T_2 > T_1$ $\quad \boxed{T_1} \xleftarrow{Q_1} M \xleftarrow{Q_2} \boxed{T_2}$ $\quad T_2 > T_1$

2) $Q_2 < 0 \rightarrow T_2 < T_1$ $\quad \boxed{T_1} \xrightarrow{Q_1} M \xrightarrow{Q_2} \boxed{T_2}$ $\quad T_1 > T_2$

il calore passa sempre dal corpo più caldo a quello più freddo

14.20.2 TEOREMA DI CARNOT DAL PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA



$\Delta U = Q - L = 0 \rightarrow Q = L \Rightarrow Q + Q_2 = L \rightarrow Q_2 = L - Q$

$\Delta S_U = \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} + \cancel{\Delta S_C} = -\frac{Q}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q}{T_1} - \frac{L-Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) - \frac{L}{T_2}$

variazione d'entropia lungo un'isoterma

$T_2 \cdot \Delta S_U = T_2 Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - L \Rightarrow L = -T_2 \Delta S_U + Q\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right)$

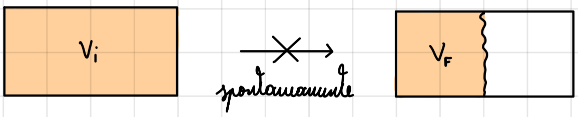
$$\eta = \frac{L}{Q} = \underbrace{-\frac{T_2 \Delta S_U}{Q}}_{\text{termine di differenza tra macchine reversibili e no}} + \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \rightarrow \text{rendimento di una macchina non reversibile}$$

↳ $\eta_C \Rightarrow \Delta S_U = 0 \Rightarrow \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

↳ poiché c'è il $-\frac{T_2 \Delta S_U}{Q}$ $\eta < \eta_C$

Nota: il rendimento di una macchina diminuisce all'aumentare di ΔS_U e quindi col numero di trasformazioni irreversibili

ESERCIZIO



$V_F < V_i$, contenitore adiabatico

Consideriamo per assurdo che sia possibile. $\rightarrow$ $\Delta U = \underset{\text{adiabatica}}{Q} - \overset{\text{pareti rigide}}{L} = 0 \Rightarrow T = \text{cost}$

Calcoliamo la variazione di entropia:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_i}^{V_F} \frac{P dV}{T} = \int_{V_i}^{V_F} \frac{nR\cancel{T}}{V\cancel{T}} dV = nR \ln \frac{V_F}{V_i} \rightarrow \text{variazione di entropia negativa} \Rightarrow \text{trasformazione impossibile}$$

↳ isot. rev: $\delta Q = \delta L$ (di un sistema isolato)

14.21 DIAGRAMMA TS - ENTROPICO

Partiamo dalla definizione di entropia:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R \rightarrow \delta Q_R = dS\, T \rightarrow Q_R = \int_i^F T\, dS \Rightarrow$$ l'area sottesa dal grafico è il calore scambiato

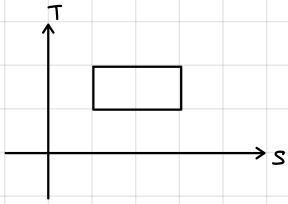
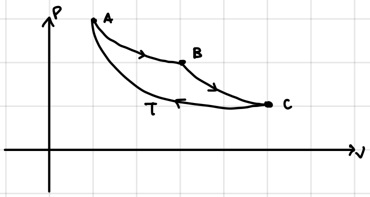


Diagramma del ciclo di Carnot

ESERCIZIO

Usando K.P. dimostrare che due curve di adiabatiche reversibili non si incrociano in PV.

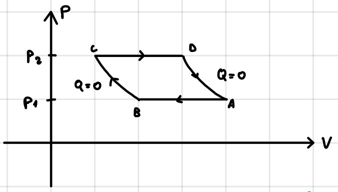
Consideriamo il ciclo:



Avremo $L > 0$. Lo scambio di calore avviene per forza durante la isoterma, quindi $Q = L > 0$. La nostra macchina termica, quindi, è monoterma e assorbe calore e lo trasforma in L, violando il principio di K.P.

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 3 (21)



$C_v = \frac{3}{2} R$

η ?

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_A} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{P_1}{P_2}\,\frac{V_A - V_B}{V_D - V_C} = 1 - \frac{P_1}{P_2}\,\frac{V_A}{V_D}\cdot\frac{\cancel{1-\frac{V_B}{V_A}}}{\cancel{1-\frac{V_C}{V_D}}} = 1 - \frac{P_1}{P_2}\,\frac{V_A}{V_D} = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$-(V_B - V_A)$

$$Q_{CD} = n C_p (T_D - T_C) > 0 \rightarrow Q_{CD} = \frac{C_p}{R} P_2 (V_D - V_C) \Rightarrow Q_{ASS}$$

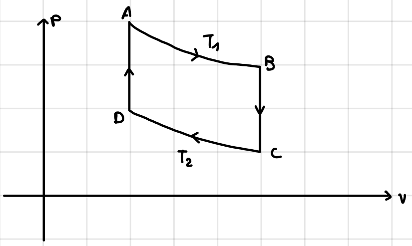
$$Q_{AB} = n C_p (T_B - T_A) < 0 \rightarrow Q_{AB} = \frac{C_p}{R} P_1 (V_B - V_A) \Rightarrow Q_{CED}$$

$$P_2 V_C^{\gamma} = P_1 V_B^{\gamma} \rightarrow \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$P_2 V_D^{\gamma} = P_1 V_A^{\gamma} \rightarrow \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} \rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

ESERCIZIO 4 (21)



$V_B = 2 V_A$

$V_C = 2 V_D$ $\quad T_1 > T_2 \quad C_v = \frac{3}{2} R$

η = ?

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{-\cancel{n} R T_2 \ln 2 + \cancel{n} C_v (T_2 - T_1)}{\cancel{n} R T_1 \ln 2 - \cancel{n} C_v (T_2 - T_1)} = 1 + \frac{\frac{3}{2}(T_1 - T_2) + T_2 \ln 2}{\frac{3}{2}(T_1 - T_2) + T_1 \ln 2}$$

$$Q_{AB} = L_{AB} = n R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \rightarrow Q_{AB} = n R T_1 \ln 2$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n C_v (T_2 - T_1) < 0$$

$$Q_{CD} = L_{CD} = n R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \rightarrow Q_{CD} = - n R T_2 \ln 2$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = n C_v (T_1 - T_2) > 0$$

ESERCIZIO 5 (21)

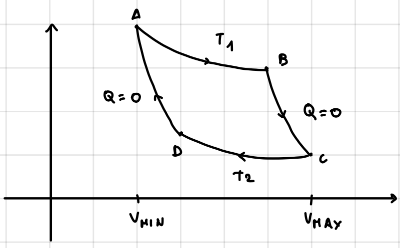
$C_v = \frac{3}{2} R$ $\quad$ Ciclo di Carnot ABCDA

$V_C = 10^{-1}\ m^3 = V_{max}$ $\quad P_C = 1{,}013$ bar

$T_2 = 290K = T_{min}$

$Q_{ASS} = 8933\ J$ $\quad L = 1930\ J$

T_1 ? $\quad V_{MIN}$?



$$Q_{AB} = n R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \rightarrow Q_{ASS} = Q_{AB} \rightarrow V_A = V_{min} = V_B\, e^{-\frac{Q_{ASS}}{nRT_1}} = V_C \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\frac{Q_{ASS}}{nRT_1}}$$

$$Q_{CD} = n R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \rightarrow Q_{ced} = Q_{CD} \rightarrow \frac{V_D}{V_C} = e^{\frac{Q_{CED}}{nRT_2}} = e^{\frac{Q_{CED}}{P_C V_C}} \Rightarrow V_D = V_C\, e^{\frac{Q_{CED}}{P_C V_C}}$$

$$L = Q_{ASS} + Q_{CED} \rightarrow Q_{CED} = L - Q_{ASS} = -7003\ J$$

$$T_2 V_D^{\gamma-1} = T_1 V_A^{\gamma-1} \rightarrow \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow V_A = V_D \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$T_2 V_C^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1} \rightarrow \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow V_B = V_C \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$Q_{ASS} = n R T_1 \ln \frac{V_C \cancel{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}}{V_D \cancel{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}} = n R T_1 \ln \frac{\cancel{V_C}}{\cancel{V_C}\, e^{\frac{Q_{CED}}{P_C V_C}}} = n R T_1 \left(-\frac{Q_{CED}}{P_C V_C}\right) = -\frac{\cancel{n R} T_1}{\cancel{n R} T_2} Q_{CED} =$$

$$= -\frac{T_1}{T_2} Q_{CED} \Rightarrow T_1 = -\frac{Q_{ASS}}{Q_{CED}} T_2 = 369.9\ K$$

$\Downarrow$

$$V_A = V_C\, e^{\frac{Q_{CED}}{P_C V_C}} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0{,}0348\ m$$

...

14.22 ENERGIA CINETICA E TEMPERATURA

Studiamo le varie grandezze termodinamiche in luce della teoria cinetica.

en. cin. media

$$U = E_c = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 = N \cdot \bar{E}_c = N \cdot \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

$$\bar{E}_c = \frac{\sum \frac{1}{2} m v_i^2}{N} = \frac{1}{2} m \frac{\sum v_i^2}{N} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PV = \frac{N m \bar{v}^2}{3} \\ U = \frac{1}{2} N m \bar{v}^2 \end{cases} \longrightarrow N m \bar{v}^2 = 2U \Rightarrow PV = \frac{2}{3} U$$

Confrontando la nostra relazione con l'equazione di stato dei gas perfetti otteniamo che:

$$\frac{2}{3} U = nRT \rightarrow U = \frac{3}{2} nRT$$ ⇒ L'energia interna aumenta all'aumentare della temperatura

Calcolando l'energia cinetica media otteniamo che:

$$\bar{E}_c = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} \frac{nRT}{N} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_a} T = \frac{3}{2} K_B T$$ ⇒ L'energia cinetica media aumenta all'aumentare della temperatura

14.23 PRINCIPIO DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

Si definiscono gradi di libertà il numero di modi indipendenti di una molecola di assorbire energia.

Il principio di equipartizione dell'energia afferma che l'energia media di una molecola sarà:

$$\bar{E} = n_L \left(\frac{1}{2} K_B T \right)$$ $n_L \rightarrow$ numero di gradi di libertà

Calcoliamo i due calori molari usando questo principio:

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V \longrightarrow dU = \delta Q - \delta L \Longrightarrow dU = \delta Q$$

$$\Downarrow$$

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{d}{dT} n N_a n_L \frac{1}{2} K_B T \right) = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} N_a n_L \frac{1}{2} K_B \left(\cancel{\frac{d}{dT} T} \right) = \frac{n_L}{2} R$$

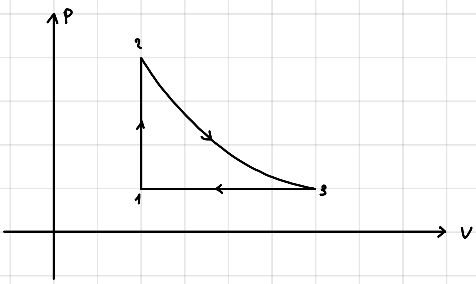
$$\Downarrow$$

1) se è monoatomico: $n_L = 3 \rightarrow C_V = \frac{3}{2} R$

2) se è biatomico: $n_L = 5 \rightarrow C_V = \frac{5}{2} R$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 6 (21)



$n = 0,2$

$C_V = \frac{5}{2} R \quad (\gamma = \frac{7}{5})$

$T_1 = 300K \qquad p_1 = 1 atm = 1,01325 \cdot 10^5 \ Pa$

$T_2 = 600K \qquad p_3 = p_1$

$$V_1 = V_2 = \frac{nRT_1}{p_1} = 4,92 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 2,03 \cdot 10^5 \ Pa$$

$$V_3 = \sqrt[\gamma]{\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_3}} = 8,08 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

$$T_3 = \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{V_3^{\gamma-1}} = 492.01 \ K$$

$$\Delta U_{12} = Q_{12} = n C_V (T_2 - T_1) = 1246,5 \ J$$

$$\Delta U_{23} = -L_{23} = n C_V (T_3 - T_2) = -448,7 \ J$$

$$\Delta U_{31} = Q_{31} - L_{31} = -797,26 \ J$$

$$L_{31} = \int_3^1 p \, dV = p_3 \int_3^1 dV = p_3 (V_1 - V_3) = -320,1 \ J$$

$$Q_{31} = n C_p (T_1 - T_3) = -1117,45 \ J$$

$$Q_{TOT} = Q_{12} + Q_{31} = 129,05 \ J$$

$$L_{TOT} = L_{23} + L_{31} = 128,6 \ J \longrightarrow \eta = \frac{L}{Q_A} = \frac{128,6}{1246,5} = 0,103$$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 2

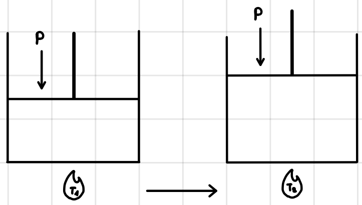
$n = 3$ mol

$C_v = \frac{5}{2} R$

$p = 1$ atm $= 1{,}1035 \cdot 10^5 \, Pa$

$T_1 = 300 \, K$

$T_2 = 400 \, K$



1) $\Delta U = n C_v (T_2 - T_1) = \dots = 6235{,}5 \, J$

2) $W = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1) = 2494{,}2 \, J$

3) $\Delta S_g = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{P dV}{T} + \int \frac{n C_v dT}{T} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + n C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = nR \ln\left(\frac{p V_B}{p V_A}\right) + n C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = nR \ln\left(\frac{\cancel{nR} T_2}{\cancel{nR} T_1}\right) + n C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = n \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)(R + C_v) = n C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

$\cong 25{,}11 \, \frac{J}{K}$

$Q = \Delta U + L = \dots = 8729{,}7 \, J$

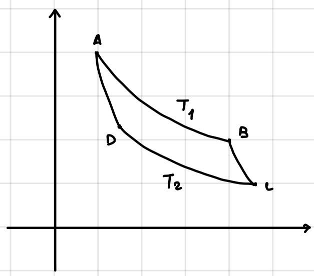
$\Delta S_s = \int \frac{\delta Q}{T} = -\frac{Q}{T_2} = -21{,}82 \, J/K$

4) $\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_s = 3{,}29 \, J/K$

ESERCIZIO 3

$T_1 = 300 K$ $\quad T_2 = 400K$

$\Delta S_1 = 3$ cal/K



1) $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{4} = 25\%$

2) $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = n C_v (T_2 - T_1)$

$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = n C_v (T_1 - T_2)$ $\Big\}$ si annullano

$W_{AB} = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

$\hookrightarrow \quad \Delta S_1 = \int \frac{P dV}{T} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \Rightarrow W_{AB} = \Delta S_1 T_1 = 1200$ cal

$W_{CD} = n R T_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$

$\hookrightarrow \quad \eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_A} \rightarrow Q_c = (\eta - 1) Q_A = \dots = -900$ cal $\Rightarrow W_{CD} = Q_A = -900$ cal

$W = Q_A + Q_c = W_{AB} + W_{CD} = 300$ cal $= 1255.8 \, J$

3) $\Delta S_2 = \frac{Q_c}{T_2} = -3$ cal/K $= -\Delta S_1$

ESERCIZIO 5

$n = 1$ mol

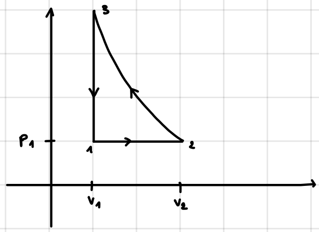
$C_v = \frac{3}{2} R$

$V_1, \; P_1, \quad V_2 = 2V_1$

$W = ?$

$Q = ?$

$\Delta S = 0$



$W_{12} = P_1 (V_2 - V_1) = P_1 V_1$

$W_{23} = n R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = R T_2 \ln(2) = 2 P_1 V_1 \ln(2)$

$\longrightarrow \quad W = W_{12} + W_{23} = P_1 V_1 (1 + 2 \ln 2)$

$Q_{12} = C_p (T_2 - T_1) = C_p P_1 V_1 \left(\frac{2 - P_1 V_1}{R}\right) = \frac{5}{2} \cancel{R} \left(\frac{P_1 V_1}{\cancel{R}}\right) = \frac{5}{2} P_1 V_1$

$Q_{23} = W_{23}$

$Q_{31} = n C_v (T_1 - T_3) = C_v (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \cancel{R} \left(\frac{P_1 V_1 - 2 P_1 V_1}{\cancel{R}}\right) = -\frac{3}{2} P_1 V_1$

$\longrightarrow$

$Q = \frac{5}{2} P_1 V_1 - \frac{3}{2} P_1 V_1 + 2 P_1 V_1 \ln 2 =$

$= P_1 V_1 + 2 P_1 V_1 \ln 2 = P_1 V_1 (1 + 2 \ln 2) = L$