Lezione di Analisi 1 del 24 Ottobre

Serie a Termini Negativi

Si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini negativi se $a_n \leq 0 \ \forall n$. Una serie a termini negativi può essere riscritta in una a termini positivi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $b_n = -a_n \geq 0 \quad \forall n$.

Serie di Termini di Segno Variabile

Una serie a segno variabile è ciò che indica il nome. Una serie a segno variabile, oltre che essere divergente o convergente, può anche essere irregolare.

La condizione necessaria di convergenza continua a valere.

Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Per le serie positive, allora la convergenza assoluta e quella semplice (convergenza "normale") coincidono. Stessa cosa per le serie negative.

Per le serie a segno variabile le cose sono più complicate

Relazione Convergenza Semplice - Assoluta.

Sia una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ che converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

DIM. Scriviamo $(a_n + |a_n|) - |a_n|$. La nostra serie sarà $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. La seconda converge per ipotesi. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - |a_n|)$ è positiva $((a_n - |a_n|) \geq 0 \ \forall n)$, in più $(a_n - |a_n|) \leq 2|a_n| \ \forall n$. Avremo, quindi, che $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \leq 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Dato che la seconda converge per ipotesi, anche la prima converge per criterio del confronto. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

ESEMPIO: Data $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. La serie è a segno variabile $\Rightarrow$ studio la convergenza assoluta: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \Rightarrow$ usiamo il confronto: $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente.

Serie a Segno Alterno

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty}$ si dice a segno alterno se $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0 \ \forall n$

Criterio di Leibniz

Sia data una serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0 \ \forall n$. Se valgono queste, la serie converge semplicemente:

1) $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

2) b_n è monotona decrescente.

DIM. Costruiamo a_n decrescente tale che $S_K = S_{K-1} + (-1)^K a_K \Rightarrow \begin{cases} S_{2h} = S_{2h-1} + a_{2h} = S_{2h-2}(+a_{2h} - a_{2h-1}) \le S_{2h-2} \Rightarrow \text{decrescente} \Rightarrow \overbrace{\overbrace{S_{2h} \le S_0}^{\text{LIM. SUP.}},\ \overbrace{S_{2h} \ge S_{2h-2} - a_n \ge \dots \ge S_1 + a_n}^{\text{LIM. INF.}}}^{\text{CONVERGE } \lim S_{2h} = \bar{S}} \\ S_{2h+1} = S_{2h} - a_{2h+1} = S_{2h-1} + (a_{2h} - a_{2h+1}) \ge S_{2h-1} \Rightarrow \text{crescente} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{S_{2h+1} \ge S_1}_{\text{LIM. INF.}},\ \underbrace{S_{2h+1} \le S_{2h} - a_{2h+1} \le \dots \le S_0 + a_{2h+1}}_{\text{LIM. SUP}}}_{\text{CONVERGE} \rightarrow \lim S_{2h+1} = \tilde{S}} \end{cases}$

Quindi $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim a_h = 0$ ma $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim S_{2h} - \lim S_{2h+1} = \bar{S} - \tilde{S} = 0 \Rightarrow \bar{S} = \tilde{S} \Rightarrow S_n$ converge

Funzioni Reali a Variabile Reale

Sono funzioni del tipo $\underline{f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Composizione di Funzioni

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni, si definisce $g(f(x))$ se $A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(A) \subseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ e $f(g(x))$ se $B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} g(B) \subseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Non vale la commutatività tra f e g.