Spazi Righe e Colonne

Prof.
Marco
Compagnoni

SPAZI RIGHE E COLONNE

- Definizione
- Rango = dimensione
- Teorema di Kronecker

SEZIONE 4.7

- Applicazioni

SEZIONE 4.8

DEFINIZIONE 4.53

$A \in Mat(m,n;\mathbb{K}) \Rightarrow$. $R(A) = \mathcal{L}(A_{R(1)}, \dots, A_{R(m)}) \subseteq Mat(1,n;\mathbb{K})$;

. $C(A) = \mathcal{L}(A_{C(1)}, \dots, A_{C(n)}) \subseteq Mat(m,1;\mathbb{K})$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $R(A) = \mathcal{L}([1\ 1\ 3],[0\ 1\ 1])$, $C(A) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

$2 + 1 = ?$

TEOREMA 4.54

$r(A) = \dim(R(A)) = \dim(C(A))$.

$\dim(R(A)) = \dim(C(A)) = r(A) = 2$ $\quad$ $C(A) = Mat(2,1;\mathbb{K})$.

La dimostrazione del teorema si spezza in più parti:

i) teorema sulle righe;

ii) teorema di Kronecker;

iii) teorema sulle colonne.

(i) Proposizione 4.55

Sia $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$ e $A \xrightarrow{MEG} S$. Allora:

i) $R(A) = R(S)$;

ii) $\dim(R(A)) = \dim(R(S)) = r(A)$ e $\mathcal{B}_{R(A)} = \{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$.

Dim: (i) le righe di S sono c.l. righe di $A \Rightarrow R(S) \subseteq R(A)$.

È vero anche $S \xrightarrow{MEG^{-1}} A \Rightarrow R(A) \subseteq R(S) \Rightarrow R(A) = R(S)$.

(ii)

$$S = \begin{array}{r} t_1 \cdot \\ +t_2 \cdot \\ \vdots \\ +t_r \cdot \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & p_1 & \dots & s_{1q_2} & \dots & s_{1q_r} & \dots & s_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & p_2 & \dots & s_{2q_r} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & p_r & \dots & s_{rn} \\ \hline & & & & O_{m-r\, n} & & & & \end{array}\right] \Rightarrow R(S) = \mathcal{L}(S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)})$$

$$O_{1n} = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot S_{R(i)} = [0 \dots \underbrace{t_1 p_1}_{=0} \dots \underbrace{t_2 p_2 + t_1 s_{2q_2}}_{=0} \dots \underbrace{t_r p_r + \sum_{i=1}^{r-1} t_i s_{iq_r}}_{=0} \dots]$$

$\Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_r = 0 \Rightarrow \{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$ è l.i. $\Rightarrow$

$\mathcal{B}_{R(A)}$ è una base e $\dim(R(A)) = \dim(R(S)) = r$. ▨

ii) TEOREMA DI KRONECKER (TEOREMA 4.57)

$A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$. Allora $r(A)=p$ sse

i) esiste sottomatrice $B \in Mat(p,p;\mathbb{K})$ con $|B| \neq 0$;

ii) ogni sottomatrice $C \in Mat(p+1,p+1;\mathbb{K})$ contenente B soddisfa $|C|=0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

minore di ordine 2

$$\boxed{|B| = -1 \neq 0}.$$

Esistono due orlature di B:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C_1| = 0 \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{|C_2| = -3+3=0}$$

minore di ordine 3

$\Rightarrow r(A) = 2$.

$$\mathcal{B}_{R(A)} = \{[0\ 1\ 0\ 3], [1\ {-1}\ {-1}\ 2]\}, \quad \mathcal{B}_{C(A)} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

(iii) COROLLARIO 4.59

i) $r(A) = r(A^T)$;

ii) $\dim(C(A)) = r(A)$.

DIM: (i) da Kronecker e $|B| = |B^T|$.

(ii) da $\dim(C(A)) = \dim(R(A^T)) = r(A^T) = r(A)$. $\blacksquare$

PROPOSIZIONE 4.61

$A \xrightarrow{MEG} S$ con $q_1, \dots, q_r$ gli indici delle colonne contenenti i pivot $\Rightarrow \{A_{c(q_1)}, \dots, A_{c(q_r)}\}$ è base di $C(A)$.

<u>OSS</u>: $\dim(C(A)) = \dim(C(S))$, ma in generale $C(A) \neq C(S)$.

In particolare $\{S_{c(q_1)}, \dots, S_{c(q_r)}\}$ NON è base di $C(A)$.

APPLICAZIONI (4.8)

Si possono sfruttare i risultati sugli spazi righe e colonne e la mappa delle componenti per risolvere esercizi (vedere le PROPOSIZIONI 4.64 - 4.65).

ESEMPIO 4.66

- $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{u}_1 = (1,1,0)$, $\underline{u}_2 = (0,1,1)$, $\underline{u}_3 = (1,0,1)$.

Verifico se $U = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è base di V.

Scriviamo la matrice con le componenti di U rispetto ad una base nota, come $\mathcal{B}_3 = \{\underline{e}_1 = (1,0,0), \underline{e}_2 = (0,1,0), \underline{e}_3 = (0,0,1)\}$:

$$A = \left[\, \underline{u}_1|_{\mathcal{B}_3} \;\; \underline{u}_2|_{\mathcal{B}_3} \;\; \underline{u}_3|_{\mathcal{B}_3} \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1 - R_3 \to R_3]{R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = S$$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(U)) = \dim(C(A)) = r(A) = 3 = \dim(V) \Rightarrow U$ è base di V.

- $V = Mat(2,2;\mathbb{Q})$, $\quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rappresentiamo i vettori rispetto alla base canonica:

$$\mathcal{B}_{2,2} = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \underline{u}_1|_{\mathcal{B}}{}^T \\ \underline{u}_2|_{\mathcal{B}}{}^T \\ \underline{u}_3|_{\mathcal{B}}{}^T \\ \underline{u}_4|_{\mathcal{B}}{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_1 \to R_4]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 + 1/2 R_2 \to R_3 \\ R_4 - 1/2 R_2 \to R_4}]{-1/2 R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_3 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4) \text{ ha } \dim(U) = r(A^T) = 3, \text{ con}$$

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \phi_{\mathcal{B}_3}^{-1}(S_{R(1)}), \phi_{\mathcal{B}_3}^{-1}(S_{R(2)}), \phi_{\mathcal{B}_3}^{-1}(S_{R(3)}) \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esempio 4.67

$V = \mathbb{R}[x]_3$, $U = \mathcal{L}(1+x, 1-x^2)$, $W = \{P(x) \in V \mid P(1) = 0\}$.

$\mathcal{B}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ Vogliamo le basi di $U, W, U+W, U \cap W$.

- $A = \left[1+x|_{\mathcal{B}_3} \quad 1-x^2|_{\mathcal{B}_3} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1 + R_3 \to R_3]{R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S \Rightarrow$

$\dim(U) = 2$, $\mathcal{B}_U = \{1+x, 1-x^2\}$. $(\mathcal{B}_U \neq \{1, 1-x\})$!

- $W = \{P(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 \mid a + b + c + d = 0\} \Rightarrow$

$d = -a - b - c \Rightarrow W = \{P(x) = a \cdot (1 - x^3) + b \cdot (x - x^3) + c \cdot (x^2 - x^3)\}$

$\dim(W) = 3$, $\mathcal{B}_W = \{1 - x^3, x - x^3, x^2 - x^3\}$.

$\cdot\ U+W = \mathcal{L}(\underbrace{1+x,\ 1-x^2}_{U},\ \underbrace{1-x^3,\ x-x^3,\ x^2-x^3}_{W})$

$$B = \left[\, 1+x|_{B_3} \quad 1-x^2|_{B_3} \quad 1-x^3|_{B_3} \quad x-x^3|_{B_3} \quad x^2-x^3|_{B_3} \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) = -(1+1) = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow r(B) = 4 = \dim(U+W) = \dim(V) \Rightarrow U+W = V \Rightarrow B_{U+W} = B_3.$

$\cdot\ \dim(U \cap W) = -\dim(U+W) + \dim(U) + \dim(W) = -4+2+3 = 1$

$1-x^2 = 1\cdot(1-x^3) - 1\cdot(x^2-x^3) \Rightarrow 1-x^2 \in W \Rightarrow$

$1-x^2 \in U \cap W \Rightarrow B_{U\cap W} = \{1-x^2\}.$

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA E ALGEBRICA (PROP. 4.68)

$V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathcal{L}(\underbrace{(1,-1,0)}_{\underline{u}_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{\underline{u}_2})$, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è base di U.

$\Rightarrow \underline{u} \in U$ sse esiste la decomposizione $\underline{u} = t_1 \cdot \underline{u}_1 + t_2 \cdot \underline{u}_2$.

Scegliamo una base di V, ad esempio $\mathcal{B}_3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, e definiamo:

$$A = [\underline{u}_1|\mathcal{B}_3 \quad \underline{u}_2|\mathcal{B}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ed } X = \underline{u}|\mathcal{B}_3. \quad \Rightarrow$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \underline{u}_1|\mathcal{B}_3 + t_2 \cdot \underline{u}_2|\mathcal{B}_3 = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = t_1 \\ y = -t_1 + t_2 \\ z = -t_2 \end{cases}} \leftarrow$$

Rappresentazione parametrica di U rispetto a $\mathcal{B}_3$

Risolvo rispetto a t_1, t_2 $\longrightarrow$

Rappresentazione algebrica di U rispetto a $\mathcal{B}_3$

Eliminiamo i due parametri: $t_1 = x$, $t_2 = -z$ $\Rightarrow$ $\boxed{x + y + z = 0}$

$$\begin{cases} t_1 = x \\ -t_1 + t_2 = y \\ -t_2 = z \end{cases} \Rightarrow [A|X] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & x+y+z \end{array}\right]$$

Il sistema ha soluzione in t_1, t_2 sse $r[A] = r[A|X]$!

ESEMPIO

$V = \mathbb{R}[x]_4 \qquad U = \mathcal{L}(\overbrace{1+x}^{\underline{u}_1}, \overbrace{x+x^2}^{\underline{u}_2}, \overbrace{1-x^2}^{\underline{u}_3}, \overbrace{x^2+x^3-x^4}^{\underline{u}_4})$

$\mathcal{B}_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}, \quad P = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$

$$A = \left[\underline{u}_1|_{\mathcal{B}_4} \ \ \underline{u}_2|_{\mathcal{B}_4} \ \ \underline{u}_3|_{\mathcal{B}_4} \ \ \underline{u}_4|_{\mathcal{B}_4} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = P|_{\mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow [A|X] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 + a_4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_0 - a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 + a_4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 + a_4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \alpha + \beta \\ a_2 = \beta + \gamma \\ a_3 = \gamma \\ a_4 = -\gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}$$

Rappresentazione parametrica di U rispetto a $\mathcal{B}_4$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{matrix}}$$

Rappresentazione algebrica di U rispetto a $\mathcal{B}_4$.

ESEMPIO 4.69

$V = A(3, \mathbb{Q})$ = matrici antisimmetriche 3×3

$$\mathcal{B} = \left\{ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$U = \mathcal{L}\left(B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \subset V$$

$$B = -1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23}$$
$$C = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23}$$
$$\Rightarrow \quad B_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \in U \iff X_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+z \\ 0 & 0 & y \end{array}\right] \Rightarrow \{B, C\} \text{ è base di } U.$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -t_1 + t_2 \\ y = 0 \\ z = t_1 + t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{Q}}$$

Rappresentazione parametrica di U rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\boxed{y = 0}$$

Rappresentazione algebrica di U rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\phi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}\right) = x \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + z \cdot A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -t_1+t_2 & 0 \\ t_1-t_2 & 0 & t_1+t_2 \\ 0 & t_1+t_2 & 0 \end{bmatrix}.$$