1) Riduci $C: x^2+2xy+y^2+4\sqrt{2}x+4=0$. Scrivi il cambiamento di base che la porta in tale forma

1) $A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & c \end{array}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$

($\cdot x^2$, $\cdot \frac{xy}{2}$, $\cdot \frac{xy}{2}$, $\cdot y^2$, $\cdot \frac{x}{2}$)

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = Tr(A) = 2 \\ I_2 = |A| = 0 \\ I_3 = |C| \neq 0 \end{array}\right\} \text{PARABOLA}$$

diagonalizzo A: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0 \Rightarrow$

Vedi tabella coniche

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 2 \\ \rho = \frac{p}{|\lambda_1|} = 1 \end{array}}$$

$\Rightarrow C: \tilde{x}^2 - 2\rho\tilde{y} = 0$

$\boxed{\tilde{x}^2 - 2\tilde{y} = 0}$

Trovare però la canonica non risponde alla richiesta di trovare le trasformazioni

2) ROTAZIONE: diagonalizzo A: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$ $\quad Q_1\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = Q_1^T A Q_1 = D \quad D\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{|Q| = 1 \text{ perché } Q \in SO(\mathbb{R}^2)}$

$C_1 = C$

$A_1 = Q_1^T A Q = D \qquad B_1 = Q^T B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

TRASLAZIONE: $T_2\begin{bmatrix} \frac{A_1(1,0)}{B_1(1,0)} \\ \frac{A_1(2,0)}{B_1(2,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = A_1,\quad B_2 = A_1 T_2 + B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},\quad C_2 = \frac{[A_1(1,0)]^2}{B_1(1,0)} + C_1 = 0$

$\Downarrow$

$Q = Q_1 \qquad T = QT_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\text{Vertice orig.}} \Rightarrow$

$$\boxed{X = Q\tilde{X} + T \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

2) In un sistema B_0 scrivere il luogo dei punti tale che la distanza da $r: x-y-1=0$ sia metà di quella $F_{|B_0} = (0;2)$ e classificarla.

1) $r: x-y-1=0$, $F=(0;2)$, $P(x;y) \Rightarrow d(P,r) = \frac{1}{2}d(P;F) \Rightarrow d(P;F) = \underset{e \text{ (vedi tab.)}}{2}\, d(P;r) \Rightarrow$ IPERBOLE

$$\left.\begin{array}{l} d(P;F) = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2-4y+4} \\ d(P;r) = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \sqrt{x^2+y^2-4y+4} = 2\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} \to \dots \to \boxed{\mathcal{L}: x^2-4xy+y^2-4x+8y-2=0}$$

2) Verifichiamo che $\mathcal{L}$ è un'iperbole:

$A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ \hline -2 & 4 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_1 = Tr(A) = 2 \\ I_2 = |A| = -3 \\ I_3 = |C| = 18 \neq 0 \end{array}\right\} \boxed{\text{IPERBOLE}}$

+3) Scriviamo $\mathcal{L}$ in forma canonica: diagonalizzo A: $\lambda_1 = 3\ \ \lambda_1 = -1 \Rightarrow \tilde{c} = \frac{I_3}{I_2} = \frac{18}{-3} = -6 \Rightarrow \mathcal{L}: \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0$

$3\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = +6$

$\frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\tilde{y}^2}{6} = 1$

Asintoti: $\tilde{y} = \pm\sqrt{3}\tilde{x}$ in $\tilde{B}_0$

$x-2+y = \pm\sqrt{3}(x-2-y)$ in B_0 (a seguito della fine di +3)

ROTAZIONE: diagonalizzo $A \Rightarrow Q\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow |Q| = -1 \Rightarrow Q\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Invertito orientazione di uno dei vettori

TRASLAZIONE: $T\left[\begin{array}{c|c} A & -B \end{array}\right] = \dots = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$X = Q\tilde{X} + T \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Volendo ricavare $\tilde{x}, \tilde{y}$: $X = Q\tilde{X} + T$

$Q^T(X - T) = \tilde{X}$

3) Fissato B_0 del piano, si considerino i punti $F(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ e $V(0;0)$:

- Trovare l'asse direttore della parabola
- Scrivi la sua equazione canonica
- Determina il cambio di coordinate

1) La direttrice è la retta perpendicolare all'asse passante per il simmetrico a F: $d: y+\frac{1}{2} = -1\cdot(x+\frac{1}{2}) \to \boxed{y-x=-1}$

2) Scrivo il luogo geometrico: $\mathcal{P}: d(P;F) = d(P;d) \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2} = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathcal{P}: x^2-2xy+y^2-4x-4y=0$

Scriviamo la forma canonica: HOMEWORK

3) HOMEWORK