SPAZIO DELLE RIGHE: data $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$ si dice spazio delle righe lo spazio generato dalle sue righe: $Span(A_{R(1)}, \dots A_{R(i)}) = R(A)$

SPAZIO DELLE COLONNE: data $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$ si dice spazio delle colonne lo spazio generato dalle sue colonne $Span(A_{C(1)}, \dots A_{C(i)}) = C(A)$

OSS. i vettori generatori di $Span(A_{R(1)}, \dots, A_{R(i)})$ o $Span(A_{C(1)}, \dots, A_{C(i)})$ possono essere linearmente indipendenti. La dimensione delle righe è uguale a quella delle colonne che è $r(A)$

TH. DI KRONECKER: $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$, allora $r(A) = P$ se:

es.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| \neq 0$ $\left.\begin{array}{l} C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C'| = 0 \\ C'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |C''| = 0 \end{array}\right\} r(A) = 2$

1) esiste una sottomatrice $B \in Mat(P,P;\mathbb{K})$ con $|B| \neq 0$;

2) ogni orlatura di B $(C \in Mat(P+1, P+1; \mathbb{K}))$ ha determinante 0.

COR. KRONECKER: $r(A) = r(A^T)$:

DIM: applicando Kronecker, si risolve: infatti $|B| = |B^T|$

TH. 4.54.: $r(A) = dim(R(A)) = dim(C(A))$

OSS. $R(A)$ e $C(A)$ sono proprietà intrinseche di una matrice, visto che il rango vi è collegato è anch'esso una proprietà intrinseca della matrice

DIM 4.54 (RIGHE): Sia $A \in Mat(m,n,\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala. Allora:

1) $R(A) = R(S)$: le righe di S sono una combinazione lineare delle righe di A, quindi $R(S) \subseteq R(A)$. È vero anche il contrario poiché la riduzione è reversibile, allora $R(A) \subseteq R(S)$. Le due condizioni sono entrambe vere per $R(A) = R(S)$

2) $dim(R(A)) = dim(R(S)) = r(A)$ con $B_{R(A)} = \{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$. S per definizione è una matrice del tipo $\begin{bmatrix} 0 \dots P_1 \dots S_{1q_2} \dots S_{1n} \\ \vdots \quad \dots 0 \dots P_2 \dots S_{2n} \\ \hline O_{m-r,n} \end{bmatrix} \Rightarrow R(S) = Span(S_{R(1)} \dots S_{R(r)})$.
$O_{1,n} = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot S_{R(i)} = [0 \;\dots\; t_1 P_1 \dots t_2 P_2 + t_1 S_{1q_2} \dots t_r P_r + \sum_{i=1}^{r-1} t_i S_{1q_r} \dots]$. Affinché la somma sia 0, tutte le t devono essere nulle, quindi $\{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$ è una base di $R(A)$
quindi $dim(R(A)) = dim(R(S)) = R(A)$.

DIM 4.59 (COL): scriviamo $dim(C(A)) = dim(R(A^T)) = \overbrace{r(A^T)}^{\text{dim sopra.}} = r(A)$.

PROP. 4.61: Data S la riduzione a scala di A e $q_1, \dots, q_r$ gli indici delle colonne di A contenenti i pivot, allora $\{A_{C(q_1)}, \dots, A_{C(q_r)}\}$ è una base di $C(A)$.

OSS. $dim(C(A)) = dim(C(S))$ ma $C(A) \neq C(S)$ e quindi $\{S_{C(q_1)}, \dots, S_{C(q_r)}\}$ <u>non è una base di $C(A)$.</u>

ESEMPIO 1: Verificare se $\{\overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(0,1,1)}, \overset{v_3}{(1,0,1)}\}$ è base di $V = \mathbb{R}^3$.

Scriviamo la matrice associata ai vettori:

$$\begin{array}{l} \underline{v}_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ \underline{v}_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3 \\ \underline{v}_3 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 \end{array} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\dim(C(A)) = \dim(\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)) = r(A) \Rightarrow$ riduco a scala A e ne calcolo il rango: [...]

Il rango è 3, che coincide con il numero di generatori, quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è base.

RAPP. PARAMETRICA E ALGEBRICA: Dato $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \mathrm{Span}((\underline{v}_1 = (1,-1,0)), (\underline{v}_2 = (0,1,-1)))$ e $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Ogni vettore $\underline{v} \in U$ ammette decomposizione $\underline{v} = t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2$.

Quindi $\underline{v} = (x,y,z) \in U$ se e solo se esistono t_1, t_2: $t_1(1,-1,0) + t_2(0,1,-1)$:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = -t_1 + t_2 \\ z = -t_2 \end{cases} \Rightarrow \text{rappresentazione parametrica di } U$$

Il sistema possiamo riassumerlo in: $y = -x - z \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow$ rappresentazione algebrica di U

Un vettore $\underline{v} \in U$ se e solo se il sistema ammette soluzioni in t_1, t_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right] \rightarrow [\dots] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+y+z \end{array}\right].$$

Per Rouché-Capelli, il sistema è risolubile solo se $x+y+z=0$. Questa condizione non è altro che la rappresentazione algebrica.

MATRICI

① Studia, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il rango di: $\begin{array}{cccc} A' & A'' & A''' & \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -h^2 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & +h+2 \end{bmatrix}$

$|A'| = 1 \Rightarrow r(A) \geq 1$; $|A''| = 0$; $|A'''| = -8 + 2h^2 = \underbrace{2(h+2)(h-2)}_{|A'''| = 0 \text{ per } h = \pm 2} \Rightarrow r(A) \geq 2$

se $h=2 \Rightarrow A_h \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & +4 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A_h) = 1 \Rightarrow |A| = 0$

se $h=-2 \Rightarrow A_h \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A_h) = 2$

$|A'''| \neq 0$

$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{per } h = 2 \\ 2 & \text{per } h = -2 \end{cases}$

② Studia il rango di $B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & 1+h \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & 2h \end{bmatrix}$ (B', B'', B''')

$|B'| = h \Rightarrow r(B) \geq 2$ per $h \neq 0$

$|B''| = 0$

$|B'''| = h^2 - h = h(h-1) \Rightarrow r(B) = n = 3$ per $h \neq 0$, $h \neq 1$

$B_h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |B_h| = 0 \Rightarrow r(B_h) < n \Rightarrow r(B_h) = 2$

$B_h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B_h| = 0 \Rightarrow r(B_h) < n \Rightarrow r(B_h) = 2$

③ Determinare $h \in \mathbb{R}$ tale che $A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2+h & h \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5+2h & -1 \end{bmatrix}$ $C \begin{bmatrix} h & 0 \\ 1 & 1+h \end{bmatrix}$ siano lin. dipendenti.

$$aA + bB + cC = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+4b+ch & -a-3b \\ 2a+ah+5b+2bh+c & ah-b+c+h \end{bmatrix} = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b+ch=0 \\ -a-3b=0 \\ (2+h)a+(5+2h)b+c=0 \\ ah-b+(1+h)c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & h \\ -1 & -3 & 0 \\ 2+h & 5+2h & 1 \\ h & -1 & 1+h \end{bmatrix}$$

M', M'', M'''

Studiamo il rango di M: $r(M') \neq 0 \Rightarrow r(M) \geq 2$; $r(M'') \neq 0$ per $h \neq -2$, $h \neq +1 \Rightarrow r(M)=3 \Rightarrow$ 1 sola soluzione $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A,B,C lin. ind.

per $h=-2$, consideriamo $M''' \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |M'''| = 12 \neq 0 \Rightarrow r(M)=3$

per $h=1$, consideriamo $M''' \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ +1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |M'''| = 0 \Rightarrow r(M)=2 \Rightarrow$ esistono ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ A,B,C sono lin. dip.

④ In $\mathbb{R}^4$ si considerino $v_1=(0,1,1,2)$, $v_2=(-1,0,1,2)$, $v_3(1,2,k,k+1)$. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente indipendenti?

$A \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k+1 \end{bmatrix}$ A', A''. Se $r(A)=3$ i vettori sono lin. ind. Se no sono lin. dip.

$|A'| \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

$|A''| \neq 0$ per $k \neq 1$

$A_k \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ A''' $\quad |A'''|=0 \quad (-2C_1+2C_2=C_3)$

↳ $r(A)=2$

per $k \neq 1$ i 3 vettori saranno linearmente indipendenti.

⑤ Si considerino le seguenti matrici 3x1 a val. reali: P $\begin{bmatrix} h \\ h^2-1 \\ 1-h^2 \end{bmatrix}$ Q $\begin{bmatrix} 0 \\ h+1 \\ 1 \end{bmatrix}$ R $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

5.1 Determina h tale per cui P, Q, R siano lin. ind..

5.2 Sia $X \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, discuti il sistema $AX=B$ con A pari a $[P|Q|R]$.

1) Studiamo il rango di $A=[P|Q|R]=\begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ h^2-1 & h+1 & 2 \\ 1-h^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcoliamo $|A| = h(h+1-2) = h(h-1)$. Per $h \neq 0, h \neq 1$ la matrice A avrà rango massimo e P, Q, R sono lin. ind.

2) La matrice $[A|B]$ sarà $\left[\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 0 & h \\ h^2-1 & h+1 & 2 & 1 \\ 1-h^2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Poiché $|A| \neq 0$ per $h \neq 0, h \neq 1$, il sistema avrà 1 soluzione.

per $h=0$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Il $r([A|B])=2$ e $r(A)=2$ => abbiamo ∞^1 soluzioni

per $h=1$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Il $r(A)=2$ e $r([A|B])=3$ => $\nexists$ soluzioni

6) Considera le seguenti matrici di ordine 3 a valori reali $A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.1 verifica che $r(A)=2$ e $r(B)=3$

6.2 $C(AB) \subseteq C(A)$ e $R(AB) \subseteq R(B)$

6.3 Cosa si può dire del rango di AB? Calcola AB e verifica.

1) Calcoliamo con Kronecker i due ranghi: $r(A) = [\dots] = 2$, $r(B) = [\dots] = 3$

2) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $(AB)_{R(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{R(k)}$, $(AB)_{C(j)} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} A_{C(k)}$. Le righe di AB sono comb. lineare delle righe di B, quindi lo spazio generato dalle righe di AB è contenuto in quello delle righe di B. Stessa cosa vale anche per le colonne.

3) $r(A) = \dim(C(A))$ e $r(B) = \dim(R(B))$ quindi $r(AB) \leq 2$ e $r(AB) \leq 3 \Rightarrow r(AB) \leq 2$.

AB [Homework] $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \\ 6 & -8 & -12 \end{bmatrix}$. Usando Kronecker, avremo che: $|A'| \neq 0 \Rightarrow r(AB) \geq 2$; $|A''| = 0 \Rightarrow r(AB) = 2 \Rightarrow$ le nostre osservazioni sono confermate.

7) Si considerino i seguenti polinomi: $P_1 = x^2+2$, $P_2 = 3x+4$, $P_3 = x^2+6x+6$ e sia $W = \mathrm{Span}(P_1, P_2, P_3) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

7.1 Determinare base e dimensione di W.

7.2 Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ $Q_K = (K+1)x^2 + 3Kx + 4 \in W$

1) Usiamo $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$ e scriviamo le componenti: $P_1 = (2,0,1)$, $P_2 = (4,3,0)$, $P_2 = (6,6,1)$. Mappiamo i tre vettori e studiamone il rango. $A \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[\dots]$ $r(A)=2 \Rightarrow \dim(W)=2$. La riduzione a scala di A è $S \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Prendiamo le prime due colonne di A come base: $B_W = \{x^2+2,\ 3x+4\}$

2) Affinché Q_K possa essere espressa come comb. lineare di P_1 e P_2 $\{P_1, P_2, Q_K\}$ devono essere dipendenti. Usiamo lo stesso metodo di 1 per trovare il $r(A^K)$: $A^K \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3K \\ 1 & 0 & K+1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\dots]$ $r(A^K) = 2$ con $K = \frac{1}{3} \Rightarrow Q_K \in W$ per $K = \frac{1}{3}$

8) Siano $U = \{ P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0 \}$, $W = \{ P_1(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P_1(0) = 0 , P_1''(0) = 0 \}$

8.1 Calcola una base e la dimensione di U e W

8.2 " " " " " " " U + W

1) $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. $P(x) \in U$ se $P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \Rightarrow \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1)$ con $d = -\alpha - \beta - \gamma$. $U = \text{Span}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$. Sono i 3 vettori lin. ind? Homework.
Una base di U saranno i tre vettori e quindi $B_U = \{1 - x^3, x - x^3, x^2 - x^3\}$, U avrà dimensione 3.
$P_1(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. $P(x) \in U$ se $\begin{cases} P''(0) = 2c = 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}((0,1,0,0),(0,0,0,1))$. Le basi saranno $B_W = \{x, x^3\}$ e avrà dimensione 2

2) $U + W = \text{Span}(1 - x^3, \underset{\text{dip.}}{\cancel{x - x^3}}, x^2 - x^3, x, x^3)$. Scriviamo $S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e ne calcoliamo il rango: [...] $r(S) = 4 \Rightarrow \dim(U+W) = 4$

9) Sia $V = \text{Span}(A,B,C)$ dove $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $C \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ $D \begin{bmatrix} 6 & K-2 \\ 2 & K+2 \end{bmatrix}$

9.1 Determina base e dim. di V

9.2 Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ $D \notin V$.

1) Scriviamo le matrici in base canonica e le mettiamo nella solita matrice: $S \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcoliamo il rango di S: [...] $r(S) = 2 \Rightarrow \dim(V) = 2$. La base sarà $B_V = \{A, B\}$

2) Homework

Applicazioni Lineari

La definizione è già stata data in precedenza. Un'applicazione lineare importante è la mappa delle componenti. Anche la traccia è un'applicazione lineare.

Esempi di applicazioni lineari:

1) Sia $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$, l'applicazione naturale associata è $f_A: \begin{array}{l} Mat(n,1;\mathbb{K}) \to Mat(m,1;\mathbb{K}) \\ x \mapsto Ax \end{array}$. Anch'essa è un'applicazione lineare.

2) Considerando $\mathbb{R}[x]$, la derivata di un polinomio è un'applicazione lineare (per definizione). Osservazione: una volta che conosco la derivata di una base, conosco la derivata di ogni polinomio (per definizione di base).

Nucleo ed Immagine di un'applicazione (5.2)

Lo studio di nucleo e immagine di un'applicazione lineare ci permette di estrapolare numerose caratteristiche della nostra applicazione.

DEFINIZIONE: $f \in Hom(V,W)$, $Ker(f) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = 0_W \} \subseteq V$

$f \in Hom(V,W)$, $Im(f) = \{ \underline{w} \in W \mid \underline{w} = f(\underline{v}) \ \forall \underline{v} \in V \} \subseteq W$.

PROPRIETÀ. Sia il nucleo che l'immagine di un'applicazione sono sottospazi di V e W rispettivamente.

DIM.: Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in Ker(f)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$. Dimostriamo che $t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 \in Ker(f)$: $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) = t_1 \cdot \underline{0}_v + t_2 \cdot \underline{0}_v = 0_v$.
Dimostriamo che lo 0 è contenuto: $f(0_v) = f(\underline{v} - \underline{v}) = f(\underline{v}) - f(\underline{v}) = 0_W \Rightarrow 0_v \in Ker(f)$. Per l'immagine la dimostrazione è analoga.

ESEMPI: $Ker(f_A) = Ker(A)$; $Im(A) = C(A)$

Struttura delle controimmagini (5.6)

Presa $f \in Hom(V,W)$, sia $\underline{w} \in Im(f)$ e $\underline{v}_p \in f^{-1}(\underline{w}) \Rightarrow f^{-1}(\underline{w}) = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_0 \text{ dove } \underline{v}_0 \in Ker(f) \}$.

DIM. $\underline{v} \in f^{-1}(\underline{w})$ se e solo se $f(\underline{v}) = \underline{w}$ se e solo se $f(\underline{v}) - \underline{w} = \underline{w} - \underline{w}$ se e solo se $f(\underline{v}) - f(\underline{v}_p) = \underline{0}_W$ se e solo se $f(\underline{v} - \underline{v}_p) = 0_W$ se e solo se $\underline{v} - \underline{v}_p \in Ker(f)$.

COROLLARIO f è iniettiva se solo se $Ker(f) = \{\underline{0}_v\}$ (ciò significa che esiste solo un vettore $\underline{v}$: $f(\underline{v}) = 0_v$. Non fosse così, ci sarebbero più controimmagini di 0_v, violando la definizione di iniettività.)

ALGEBRA DELLE APPLICAZIONI LINEARI

SOMMA DI FUNZIONI: Viene definita somma $(f_1+f_2)(\underline{v}) = f_1(\underline{v}) + f_2(\underline{v})$.

PRODOTTO DI FUNZIONI: Viene definita prodotto $(t f_1)(v) = t \cdot f_1(v_1)$

La struttura algebrica $(Hom(V,W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ è <u>anch'essa uno spazio vettoriale</u>.

DIM.: Verifichiamo che la funzione somma $f_1+f_2 \in Hom(V,W)$ se $f_1, f_2 \in Hom(V,W)$. Svolgiamo i seguenti passi algebrici

$(f_1+f_2)(t_1 v_1 + t_2 v_2) = f_1(t_1 v_1 + t_2 v_2) + f_2(t_1 v_1 + t_2 v_2) = t_1 f_1(v_1) + t_2 f_1(v_2) + t_1 f_2(v_1) + t_2 f_2(v_2) = t_1(f_1(v_1) + f_2(v_1)) + t_2(f_1(v_2) + f_2(v_2)) = t_1(f_1+f_2)(v_1) + t_2(f_1+f_2)(v_2)$

Analogamente $(tf)(t_1 v_1 + t_2 v_2) = t_1 (tf)(v_1) + t_2 (tf) v_2 \Rightarrow (tf) \in Hom(V,W)$.

OPERAZIONI: Le proprietà delle operazioni si verificano facilmente. Gli elementi notevoli sono:

1) $0_{vw}: \begin{array}{l} V \to W \\ v \mapsto 0_w \end{array}$ è l'elemento neutro della somma

2) $-f: \begin{array}{l} V \to W \\ v \mapsto -v \end{array}$ è l'inverso della somma.

ESEMPIO: Se consideriamo A ed f_A, studiando le operazioni su f_A, possiamo definire una nuova applicazione,

$\Upsilon: \begin{array}{l} Mat(m,n,\mathbb{K}) \to Hom(V,W) \\ \quad A \quad \mapsto f_A \end{array}$. Υ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

COMPOSIZIONE: Tra funzioni esiste una terza operazione: la composizione: $f \circ g = f(g)$. Anche la composizione ha alcune proprietà interessanti

1) se f e g sono lineari, anche $g \circ f$ lo sarà

2) gode dell'associatività

3) gode della distributività con la somma

4) è omogenea rispetto al prodotto

5) $Id_W \circ f = f$, $f \circ Id_V = f$

Le proprietà della composizione la fanno assomigliare molto al prodotto matriciale:

$$\begin{array}{ccccc} W & & U & & V \\ x & \xrightarrow{f_B} & f_B(x) & \xrightarrow{f_A} & f_A(f_B(x)) \end{array}$$

$W = Mat(p,1,\mathbb{K})$ $U = Mat(n,1,\mathbb{K})$ $V = Mat(m,1,\mathbb{K})$

$A \in Mat(m,n,\mathbb{K})$, $B \in Mat(n,p,\mathbb{K})$.

$(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = f_{AB}(x) \Rightarrow (f_A \circ f_B)(x) = f_{AB}(x) \Rightarrow$ la composizione di funzioni corrisponde al prodotto tra matrici

$\Upsilon(AB) = \Upsilon(A) \circ \Upsilon(B) \Rightarrow \Upsilon$ è un OMOMORFISMO DI ALGEBRA

$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$

APPLICAZIONI LINEARI

ISOMORFISMI

Un isomorfismo, in generale, è un'applicazione lineare invertibile. Infatti essere invertibile è condizione sufficiente affinché essa sia invertibile. Possiamo enunciare queste proprietà:

1) $f \in Hom(V,W)$ è isomorfismo se e solo se è biunivoca
2) se f è isomorfismo, anche f^{-1} lo è
3) f, g isomorfismi, $f+g$, $t \cdot f$ non sono isomorfismi ma $f \circ g$ è un isomorfismo.

RELAZIONE D'ISOMORFISMO

Detto $\Omega_{\mathbb{K}}$ l'insieme degli spazi vettoriali su campo $\mathbb{K}$, preso $\Omega_{\mathbb{K}} \times \Omega_{\mathbb{K}}$, la coppia $(V,W) \in \Omega_{\mathbb{K}} \times \Omega_{\mathbb{K}}$ è in relazione d'isomorfismo se V e W sono spazi isomorfi ($\exists f: V \to W$ ed è un isomorfismo). Per indicare la relazione scriviamo $V \overset{f}{\simeq} W$.

Esempio: V su campo $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n \Rightarrow V \overset{\phi_B}{\simeq} Mat(n,1;\mathbb{K})$

RELAZIONE D'EQUIVALENZA La relazione d'isomorfismo è una relazione d'equivalenza. (5.13)

DIM.: Verifichiamo le proprietà:

1) RIFLESSIVA: $V \overset{f}{\simeq} V \Rightarrow$ la funzione Id_V è un isomorfismo $\Rightarrow V \overset{Id}{\simeq} V$
2) SIMMETRIA: $V \overset{f}{\simeq} W,\ W \overset{g}{\simeq} V \Rightarrow V \overset{f}{\simeq} W,\ W \overset{f^{-1}}{\simeq} V$ per definizione di isomorfismo
3) TRANSITIVA: $V \sim W,\ W \sim U \to V \sim U \Rightarrow V \overset{f}{\simeq} W,\ W \overset{g}{\simeq} U \to V \overset{g \circ f}{\simeq} U$

Osservazione: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, analogo al prodotto tra matrici: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

La relazione d'isomorfismo, allora, divide $\Omega_{\mathbb{K}}$ in classi di equivalenza.

CARATTERIZZAZIONE D'ISOMORFISMO (5.14)

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f \in Hom(V,W)$. Sia $U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ ed $f(U) = \{f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_n)\} \subseteq W$.

1) Se U genera V, allora $f(U)$ è suriettiva se e solo se $f(U)$ genera W
2) f è iniettiva se e solo se $f(U)$ è linearmente indipendente $\forall U$ linearmente indipendenti
3) Se U è base di V, f è isomorfismo se e solo se $f(U)$ è base di W. (un isomorfismo è un'applicazione che mandano basi in basi)

Esempio: $V = W = Mat(3,1;\mathbb{K})$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $f_A: V \to W$, $X \mapsto AX$

Prendiamo l'insieme delle basi canoniche $U = \{E_{11}, E_{21}, E_{31}\}$. Se calcoliamo $f_A(U) = \left\{ AE_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Possiamo notare che $f_A(U)$ non è indipendente $\Rightarrow f_A$ non è iniettiva (prop. 2). Possiamo verificarlo facendo $Ker(f_A) = Ker(A) \neq \{0_V\}$

Lo spazio generato dalle immagini $Im(f_A(U)) = Span(f_A(E_{11}), f_A(E_{21})) \neq W \Rightarrow$ le immagini non sono generatori del codominio, quindi, per la prop. 1, f_A non è suriettiva. I vettori in $W \setminus Span(f_A(U))$ si possono trovare: $Span(f_A(U)) = Im(f_A) = C(A)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{[\dots]} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in Im(f_A) \quad \text{se } a+b=c$$

quando la colonna non appartiene a $C(A)$?

$f_A(U)$ non è base di W, quindi f_A non è isomorfismo.

TEOREMA D'ISOMORFISMO (5.15)

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. $V \cong W$ se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$. Valido solo per dimensioni finite.

DIM.: ($\Rightarrow$) Sia $V \cong W$ e $B_V = \{b_1, \dots, b_n\}$. So che $f(B_V) = B_W$, ciò significa che $\dim(V) = \dim(W)$.

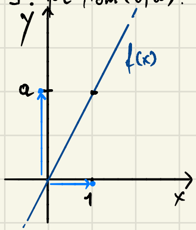
($\Leftarrow$) $\dim(V) = \dim(W) = n \Rightarrow \varnothing_{B_V}: V \to Mat(n,1;\mathbb{K})$, $\varnothing_{B_W}: W \to Mat(n,1;\mathbb{K})$. Allora abbiamo che $V \overset{\varnothing_{B_V}}{\cong} Mat(n,1;\mathbb{K})$ e $W \overset{\varnothing_{B_W}}{\cong} Mat(n,1;\mathbb{K})$, per proprietà della $\sim$ $V \overset{\varnothing_{B_W}^{-1} \circ \varnothing_{B_V}}{\sim} W$.

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = S(2;\mathbb{R}) \Rightarrow B_1 = \{1, x, x^2\}$ $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow V$ e W isomorfi

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad f = \varnothing_{B_2}^{-1} \circ \varnothing_{B_1} \Rightarrow f(P) = \varnothing_{B_2}(\varnothing_{B_1}(P)) = \varnothing_{B_2}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = a_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 \end{bmatrix}$

TEOREMA DI INTEPOLAZIONE (5.18)

Presi V, W spazi vettoriali finitamente generati su $\mathbb{K}$, $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V e $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\} \subseteq W$, allora $\exists!\, f \in Hom(V,W)$: $f(\underline{v}_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.



$f \in Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\quad B_1 = \{1\} \xrightarrow{f} \{a\} \Rightarrow f$ è l'unica applicazione che fa questo.

$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot a = ax$

Questo teorema mostra quanto siano rigide le applicazioni lineari

DIM: ESISTENZA per ogni $\underline{v}$ esiste unica la decomposizione $\underline{v} = t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_n \underline{v}_n$. Devo definire la funzione: $f(\underline{v}) = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$. f è detta FUNZIONE INTERPOLANTE. Studiamo f,
$\begin{cases} f \text{ è ben definita perchè la decomposizione esiste sempre} \\ f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$

LINEARITÀ scriviamo $v = \sum_{i=0}^{n} t_i \underline{v}_i$, $\tilde{\underline{v}} = \sum_{i=0}^{n} \hat{t}_i \underline{v}_i$. Calcoliamo $f(\alpha \underline{v} + \alpha \tilde{\underline{v}})$:

$f(\alpha(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) + \beta(\hat{t}_1 \underline{v}_1 + \dots + \hat{t}_n \underline{v}_n)) = f((\alpha t_1 + \beta \hat{t}_1) v_1 + \dots + (\alpha \hat{t}_1 + \beta \hat{t}_n) v_n) = (\alpha t_1 + \beta \hat{t}_1) w_1 + \dots + (\alpha t_n + \beta \hat{t}_n) w_n = \alpha(t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) + \beta(\hat{t}_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\tilde{\underline{v}}) \Rightarrow f$ è lineare

UNICITÀ sia f' una seconda funzione lineare tale che $f'(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$. $f'(\underline{v}) = f'(t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_n \underline{v}_n) = t_1 f'(v_1) + \dots + t_n f'(v_n) = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n = f(v) \Rightarrow f' = f$
Ossia f è unica.

MATRICE RAPPRESENTATIVA (5.20)

Dati V, W finitamente generati su $\mathbb{K}$. Siano $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$.

$\varnothing_{B_V B_W}: \; Hom(V,W) \longrightarrow Mat(m,n,\mathbb{K})$ $\qquad F_{|B_V B_W} = [\, f(\underline{v}_1)_{|B_W} | \dots | f(\underline{v}_n)_{|B_W}]$

$\qquad f \longmapsto F_{|B_V B_W}$

$O_{VW|B_V B_W} = [\, O(\underline{v}_1)_{|B_W} | \dots | O(\underline{v}_n)_{|B_W}] = [\, O_{|B_W} | \dots | O_{|B_W}] =$
$= O_{mn}$

$Id_{V|B_V B_V} = [\, Id(\underline{v}_1)_{|B_V} | \dots | Id(v_n)_{|B_V}] = [\, v_{1|B_V} | \dots | v_{n|B_V}]$
$= I_n$

$V = W = K_2[x] \quad B_V = \{1, x, x^2\}, \; B_W = \{x^2, x, 1\}$

$\frac{d}{dx}_{|B_V B_W} = \left[\frac{d}{dx}(0)_{|B_W} \,\middle|\, \frac{d}{dx}(x)_{|B_W} \,\middle|\, \frac{d}{dx}(x)_{|B_W} \right] =$
$= [\, 0_{|B_W} | 1_{|B_W} | 2x_{|B_W}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$V = Mat(n,1;\mathbb{K}) \quad W = Mat(m,1;\mathbb{K})$
$A \in Mat(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow f_A \in Hom(V,W)$

Homwork:
$\varnothing_{B_V B_W}(f_A) = A$