Teorema ponte

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A. Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se per qualsiasi successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \neq x_0$ che tende a x_0 si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
$\{f(x_n)\}$ è una successione delle immagini di f.

DIM: 1) Hp: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, Th: $\lim_{x\to x_0} f(x_n) = l$ $\forall x_n \to x_0$. Consideriamo una successione $x_n \to x_0$. Allora $\forall \bar{\varepsilon} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0$ $|x_n - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > n_0$ $x_n \in (x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon})$. Scelgo $\delta = \bar{\varepsilon}$. Varrà anche $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ poiché siamo nello stesso intorno $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
e quindi $\forall \bar{\varepsilon} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0$ $|f(x_n) - l| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n\to x_0} f(x_n) = l$

2) Hp: $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ Th: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Dimostriamo per assurdo: neghiamo Th, allora $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \delta$ $\exists x(\delta): x(\delta) \in (x - \delta; x + \delta) - \{x_0\} \cap A$ e $|f(x(\delta)) - l| > \varepsilon$. Costruisco una successione di punti che tende a x_0 per la quale $f(x_n)$ <u>non</u> tende a l: $x_n = x(1/n)$ scegliendo $\delta = 1/n$.

1) $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n})$ $\forall n \geq 1$ $\quad (|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0)$

2) per la scelta dei $x(\delta) = x(\frac{1}{n}) = x_n$ $|f(x_n) - l| > \varepsilon_0$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \Rightarrow$ <u>ASSORDO</u>

Teorema di unicità del limite (trasportato delle succ.)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per f se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$

DIM.: CON PONTE: Per il teorema ponte abbiamo: $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l_1$, $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l_2$. Per l'unicità del limite di successione $l_1 = l_2$

SENZA PONTE: Per assurdo $l_1 \neq l_2$. Sia $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, allora $(l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon; l_2 + \varepsilon)$. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, allora $\exists \delta_1: \forall x \in (l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap A$ si ha $|f(x) - l_1| < \varepsilon$. Idem per l_2. Scelgo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Varranno, allora, $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - l_2| < \varepsilon$. Ma, essendo i due intorni disgiunti solo per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, cadiamo in assurdo.

Teorema del confronto (trasportato delle succ.)

Siano f, g, h funzioni e x_0 un punto di accumulazione. Se $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} = l$

ES: $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < x < \frac{\pi}{2} & 0 < \sin(x) < x < \tan(x) \\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 & \tan(x) < x < \sin(x) < 0 \end{array}\right] \to -x < \sin < x \Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

per $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\sin x < x < \tan x$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ per conf.}}$

$\to$ per teorema ponte $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

poiché $\frac{\sin x}{x}$ è pari, la dimostrazione vale per $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) - \{x_0\}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

per ogni successione $x_n \to 0 \Rightarrow$ costruisco $y_n = (x_n)^2 \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(y_n)}{y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$

Teorema di Cambio di variabile

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni e x_0 un punto di accumulazione per A. Se esistono $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{y\to l} g(y) = L$, allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$

$\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{f(x_n)\} \to l$. $\forall y_n \to l$ $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = L \Rightarrow \lim_{x\to l} g(f(x)) = L$.