ESERCITAZIONE DI ANALISI DEL 9 OTTOBRE

NUMERI COMPLESSI

1) $z \cdot |z| + 2z + i = 0$

poniamo $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (x+iy)(\sqrt{x^2+y^2}) - 2(x+iy) + i = 0$

$$\overbrace{\underbrace{x\sqrt{x^2+y^2} - 2x}_{Re(w)} + i\underbrace{(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1)}_{Im(w)}}^{w} = 0$$

l'equazione è risolta quando $\underbrace{\begin{cases} Re(w) = Re(0) \\ Im(w) = Im(0) \end{cases}}_{\text{sistema in } \mathbb{R}} \to \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2} - 2) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 0 \\ y\sqrt{y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = i$

$\begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = i(-1-\sqrt{2})$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

② $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z(1+i)-\bar z(1-i)}{z-\bar z}\right)=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

Mettiamo in forma algebrica: $z = x+iy$, $\bar z = x-iy$ $\Rightarrow \dfrac{(x+iy)(1+i)-(x-iy)(1-i)}{(x+iy)-(x-iy)} =$

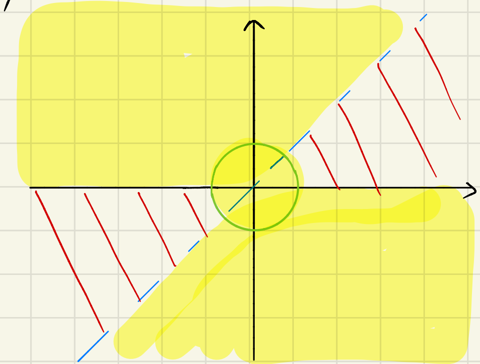
$= \dfrac{\cancel{x}+iy+ix-\cancel{y}-\cancel{x}+ix+iy+\cancel{y}}{2iy} = \dfrac{2i(x+y)}{2iy} = \dfrac{x+y}{y} \Rightarrow$ puramente reale

Disegna

$E = \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{z(1+i)-\bar z(1-i)}{z-\bar z} < 2 \right\} \cup \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |z|<1 \right\} =$

$= \left\{ x+iy\in\mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{x+y}{\underbrace{y}_{\neq 0}} < 2 \right\} \cup \left\{ x+iy\in\mathbb{C} \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2}<1 \right\}$

$\dfrac{x+y}{y} < 2 \rightarrow \dfrac{x-y}{y} < 0$



$E_1 = \{ v\in\mathbb{C} \mid v=\bar z,\ z\in E\} \Rightarrow$ riflessione lungo x di E

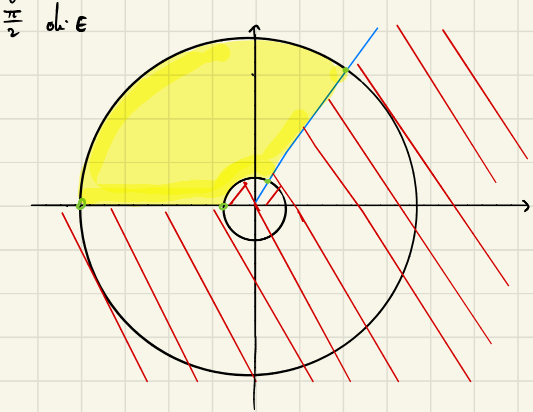
$E_2 = \{ v\in\mathbb{C} \mid v=iz,\ z\in E\} \Rightarrow$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$ di E

$E_3 = \{ w\in\mathbb{C} \mid w=-z,\ z\in E\}$

$E_4 = \{ t\in\mathbb{C} \mid t=\frac{1}{z},\ z\in E\}$ HOMEWORK

③ $A = \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; 1\le |z| \le 8 ,\ \dfrac{\pi}{3} \le \arg(z) < \pi \right\}$

$B = \{ w\in\mathbb{C} \mid w^3 = z\}$ Homework



(5) $\begin{cases} |z-i| < |z+1| \\ z^5 = 2i \end{cases}$ → $z = x+iy \Rightarrow$ $z-i = x + i(y-1)$; $z+1 = x+1+iy$

distanza z-1

$|z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$|z+i| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

distanza z-i

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ $\quad x^2+(y-1)^2 < (x+1)^2+y^2$ $\quad y > -x$

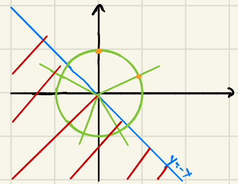
$|z_1 - z_2| =$ distanza tra z_1, z_2 (DIMOSTRA)

$z^5 = 2i$

$z^5 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} \rho^5 = 2 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} \rho = \sqrt[5]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \quad (k = 0 \dots 4) \end{cases}$



TRASF. GRAFICI

$f(x)+K$ ⇒ sposta in verticale: $+K$ verso l'alto; $-K$ verso il basso

$Kf(x)$ ⇒ deforma in verticale: $K>1$ allarga il grafico; $0<K<1$ schiaccia il grafico

$-f(x)$ ⇒ riflessione rispetto a x

$|f(x)|$ ⇒ $\begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

$f(x+K)$ ⇒ sposta in orizzontale: $+K$ a sinistra; $-K$ a destra

$f(Kx)$ ⇒ deforma in orizzontale: $K>1$ schiaccia; $0<K<1$ allarga

$f(-x)$ ⇒ riflessione rispetto a y

$f(|x|)$ ⇒ $\begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$

Disegnare $f(x)$: $2 - |x+3|$ $\quad |\sqrt[3]{-x} + 1|$ partendo da grafici noti

HOMEWORK

$-e^{x-2} + 1$ $\quad |2 \ln|x-1||$

$1 - \dfrac{1}{|x - \frac{1}{2}|}$ $\quad \sqrt{x-1} - 1$