SUCCESSIONI

SUCCESSIONE INFINITESIMA: Una successione si dice infinitesima se diverge a 0

" INFINITA: Una successione si dice infinita se diverge a ∞

CONFRONTO TRA INFINITI: Siano a_n, b_n due infiniti, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine SUPERIORE} \\ \infty & \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine INFERIORE} \\ l & \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine.} \end{cases}$$

. Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ allora i due infiniti non sono confrontabili.

CONFRONTO TRA INFINITESIMI: Siano a_n, b_n due infinitesimi, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} 0 & \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine INFERIORE} \\ \infty & \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE} \\ l & \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine} \end{cases}$$

Se $\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ allora i due infinitesimi non sono confrontabili.

SUCCESSIONI ASINTOTICHE: Due successioni si dicono asintotiche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. L'asintotismo è una relazione di equivalenza, infatti:

1) $a_n \sim a_n$ (asint. a se stessa)
2) $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ (se b_n è asintotica rispetto ad a_n, allora anche a_n è asintotica rispetto a b_n).
3) $a_n \sim b_n$, $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1$

OSS: Se $a_n \sim b_n$ non è detto che $a_n \pm c_n \sim b_n \pm c_n$

CRITERIO DEL RAPPORTO: Sia una successione positiva a_n. Sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Se:

1) $l < 1$ allora a_n è un infinitesimo
2) $l > 1$ allora a_n è un infinito
3) $l = 1$ allora il criterio fallisce (carattere della successione non è noto)

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ Sia $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 \Rightarrow$ $n!$ è di ordine maggiore

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ Sia $c_n = \frac{n!}{n^n} > 0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim \frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n\cancel{!}} = \lim \frac{n^n \cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n\cancel{+1}}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

Per il criterio n^n è di ordine superiore.

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$

Consideriamo $b > 0$, $n^{b/2} \geq 1$, $0 \leq \log_a(n^{b/2}) \leq n^{b/2}$ quindi $\frac{\frac{b}{2} \cdot \log_a(n)}{\frac{b}{2}\, n^b} = \frac{\log_a(n^{b/2})}{\frac{b}{2}\, n^b} < \frac{n^{b/2}}{\frac{b}{2}\, n^b} = \frac{2}{b n^{b/2}}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{b n^{b/2}} = 0$ quindi per il teorema del confronto, chiamate $a_n = 0$, $c_n = \frac{2}{b n^{b/2}}$ e $b_n = \frac{\log_a(n)}{n^b} \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ Tralasciamo la c in quanto non influente. $\frac{n^b}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/b}}\right)^b = \left(\frac{\log_a(a^n)}{a^{n/b}}\right)^b$ equivale a $\frac{\log_a(\infty)}{\infty^{\circ}}$ e possiamo applicare la ③ scrivendo $(0)^b = 0$

FORMA DI INDETERMINAZIONE 1^∞: Causata principalmente da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si può scrivere che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

PROPOSIZIONI DA DIMOSTRARE: a_n è monotona crescente, a_n converge a $2 \le l \le 4$

1) dobbiamo dimostrare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \ge 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) \overset{\text{dis. Bernoulli}}{\ge} \left[1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\right) = 1$

2) a_n è crescente (vedi ①) $\Rightarrow a_1 < \dots < a_n \Rightarrow a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Costruiamo $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow b_n > a_n \ \forall n \ge 1$. Si può dimostrare che b_n è strettamente decrescente. Ciò vuol dire che $b_1 > \dots > b_n > a_n$. Quindi $b_1 > a_n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > a_n$

SERIE

SERIE: Sia $a_n : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto a_n \end{matrix}$, si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serie definita dalla somma di infiniti termini di a_n

S. SOMME PARZ.: Costruisco $s_0 = \sum_{n=0}^{0} a_n$, $s_1 = \sum_{n=0}^{1} a_n$, ..., $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è detta successione delle somme parziali: $s_k \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ k \to \sum a_n \end{matrix}$.

Per definizione s_k è una successione. Studiamone il comportamento.

1) Studiamone il limite: $\begin{cases} \exists \lim_{k \to +\infty} s_k = l \text{ finito} & \Rightarrow \text{serie CONVERGENTE} \\ \exists \lim_{k \to +\infty} s_k = \infty & \Rightarrow \text{serie DIVERGENTE} \\ \nexists \lim_{k \to +\infty} s_k & \Rightarrow \text{serie IRREGOLARE/OSCILLANTE} \end{cases}$

EX.: 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad a_n = n \Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 1+2, \dots, S_k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow S_k : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ k \mapsto \frac{k(k+1)}{2} \end{matrix}$

$\lim_{k \to +\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^2 + k}{2} = +\infty \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = (1-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}), S_3 = 1 - \frac{1}{4}, \dots, S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

$\lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad a_n = q^n \Rightarrow S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$, con $q = 1$ $S_k = k+1$

$\lim_{k \to +\infty} s_k = \begin{cases} |q| < 1 & \frac{1}{1-q} \\ |q| > 1 & +\infty \\ |q| \leq -1 & \nexists l \end{cases}$, con. $q = 1$ $\lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$

SERIE TELESCOPICA: Una serie si dice telescopica se a_n si può scrivere come $a_n = b_n + b_{n+1}$. La successione delle somme parziali scrivere come $S_k = b_0 - b_{n+1}$

C.N. CONVERGENZA: Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, affinché essa sia convergente, è necessario che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE: per ipotesi la serie converge, quindi $\lim_{k \to +\infty} s_k = l$. $S_n = a_0 + \dots + a_n$, $S_{n+1} = a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere, allora, che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1})$. Poiché per ipotesi S_n converge: $\lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = s - s = 0$.

OSS.: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ <u>LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE.</u>

SERIE A TERMINI POSITIVI

SERIE A TERMINI POSITIVI: Una serie si dice a termini positivi se $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esiste anche una serie definitivamente positiva: $a_n \geq 0 \; \forall n > n_0 \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$

OSS. Una serie a termini positivi <u>non</u> può essere irregolare. Se costruiamo $S_n = S_n + a_{n+1} \geq S_{n-1} \Rightarrow$ La successione delle somme parziali è quindi una successione monotona crescente, quindi esiste sicuramente il limite.

CRITERIO DEL CONFRONTO: Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che $a_n \leq b_n \; \forall n \geq \bar{n}$. Allora:

1) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

DIM.: Siano $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$, $T_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ la successione delle somme parziali di a_n e b_n. Dato che $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow S_k \leq T_k$ $\forall k \geq \bar{n}$.

1) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} T_k = t$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora S_k converge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

2) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora T_k diverge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

EX.: $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Per applicare il criterio bisogna maggiorare o minorare la successione: $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ $\forall n > 3$. Costruiamo $b_n = \frac{1}{n}$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente. Per il criterio del confronto, allora, anch'essa diverge.

LEZIONE

LIMITE DI SUCCESSIONI NOTEVOLI

SI DA' PER SOTTINTESO $n \to +\infty$

Sia ε_n una successione infinitesima, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \sin(\varepsilon_n) = 0$
2) $\lim \cos(\varepsilon_n) = 1$
3) $\lim \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$
4) $\lim \frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$
5) $\lim \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{\log_a(1+\varepsilon)}{\varepsilon_n} = \log_a e$
6) $\lim \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \ln a$
7) $\lim \frac{(1-\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} = \alpha$

il 5, 6, 7 vengono derivati dalla 1 riportata nella proprietà seguente.

Sia a_n una successione infinita, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$
2) $\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{1/a_n} = 1$

SUCCESSIONI ASINTOTICHE

Date a_n e b_n, esse si dicono asintotiche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Si nota che se $a_n \sim b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$

SERIE A TERMINI POSITIVI

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $a_n \sim b_n$, allora le due serie avranno lo stesso carattere.

DIM.: Per Hp $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon+1 \Rightarrow b_n(1-\varepsilon) < a_n < b_n(\varepsilon+1)$. Considerando $b_n(1-\varepsilon) < a_n$ per il criterio del rapporto, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge. La $(1-\varepsilon)$ non influisce.
Idem per l'altra parte: se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
Non è necessario dimostrare l'altro verso perché le serie positive o convergono o divergono

Esercitazione

$$\lim\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n-1-3}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n-1}{n-1}-\frac{3}{n-1}\right)^n = \lim\left(1-\frac{3}{n-1}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n-1}{-3}\right)}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{1-n}{+3}}\right)^{\frac{n\left(1-\frac{n}{3}\right)}{1-\frac{n}{3}}} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-n}{3}}\right)^{\frac{1-n}{3}}\right]^{\frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\lim\frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\frac{3}{-1}} = e^{-3}$$

$$\lim n^2\ln(1-2^{-n}) = \lim n^2\cdot\frac{\ln(1-2^{-n})}{-2^{-n}}\cdot -2^{-n} = \lim n^2\cdot(-2^{-n}) = \lim\frac{-n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim\frac{\sin(n)}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2} = \lim\frac{\sin(n)\cdot\sqrt{n^4+n^3}+n^2}{\cancel{n^4}+n^3-\cancel{n^4}} = \lim\frac{\sin n\cdot \cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n^{\cancel{3}}} = \lim\frac{\sin n}{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \lim\frac{2\sin n}{n}$$

$-1\le\sin n\le 1 \to -2\le\sin n\le 2 \to \frac{-2}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sin n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$

$$\lim\frac{\log(n^2+n)-\log(n^2)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim\ln\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)\Big/\sin\left(\tfrac{2}{n}\right) = \lim\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\cdot\frac{1/n}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)/2/n}\cdot\frac{n}{2} = \lim\log e\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{2} = \log e$$

$$\lim\frac{\log[3^n+\cos(3^n)]}{n} = \lim\frac{\log[3^n]}{n} = \lim\log[3^n]^{1/n} = \log 3$$

$\hookrightarrow 3^n+\cos 3^n \sim 3^n \Rightarrow \lim\frac{3^n+\cos 3^n}{3^n} = \lim 1+\frac{\cos 3^n}{3^n} = 1$ perché $-1\le\cos 3^n\le 1 \to \frac{-1}{3^n}\le\frac{\cos 3^n}{3^n}\le\frac{1}{3^n} \Rightarrow \lim\frac{\cos 3^n}{3^n} = \lim\frac{1}{3^n} = 0$

$$\lim\frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim\frac{\log\left[e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}{\sqrt{1+n^2}} = \lim\frac{\log e^n+\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim\frac{\log e^n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim\frac{\cancel{n}\log e}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n}} = \log e$$

$$\lim\frac{n-\ln(n+e^n)}{n-\ln(2n+e^n)} = \lim\frac{n-\ln\left(e^n\left(1+\frac{n}{e^n}\right)\right)}{n-\ln\left(e^n\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)\right)} = \lim\frac{\cancel{n-\ln(e^n)}+\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\cancel{n-\ln(e^n)}+\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim\frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim\frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{n/e^n}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{e^n}}\cdot\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)}\cdot\frac{1}{1/\frac{2n}{e^n}}\cdot\frac{\cancel{e^n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim\frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim\frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+1/n}-2} = \lim\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+1/4n}-2} = \lim\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\frac{2(1+1/4n)^{1/2}-1}{1/4n}-\frac{1}{1/4n}}\cdot\frac{1}{4n} = \lim\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}-\frac{1}{1/4n}}\cdot\frac{1}{1/4n} = \lim\frac{2}{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{1-1}\right) \qquad (8)$$

$$\lim\frac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4(n^n)-3(n!)} = \lim\frac{\cancel{n^n}\left(\frac{1}{n^2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)}{\cancel{n^n}\left(4-\frac{3(n!)}{n^n}\right)} = \lim\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{-2/n}\right)^{\frac{n}{-2}\cdot(-2)} = \frac{1}{4}e^{-2} = 1/4e^2$$

Va studiato a parte: $\lim\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow \lim\frac{1}{n^2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2}$ || rule of thumb: studia sempre quando nel raccoglimento non c'è la forma $(K-\frac{3}{n^2}+\ldots)$

$$\lim\frac{\log((n+5)!)-\log(n!+5)}{\log[2n^6+\cos(n\pi)]}$$

$$\lim\frac{n!+(2n)!}{n^n}$$

$$\lim\frac{n^n+2^n}{2^{(n^2)}}$$

$$\lim\sqrt[3]{n^9-2n^6}-\sqrt[5]{n^{15}-3n^{12}}$$

$\rightarrow$ Homework