

INTEGRALI GENERALIZZATI

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Sia $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua con f, g non positive.

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$ e $g(x) \leq 0, \forall x \in [0, +\infty)$ si ha: $\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} [-f(x)] dx$ e $\int_0^{+\infty} g(x) dx = - \int_0^{+\infty} [-g(x)] dx$

Siano $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a segno alterno. Studia f che segno nell'intervallo di x_0 . Se esiste $c \in [0, +\infty)$ tale che f ha

sempre costante allora: $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$
convergenza \rightarrow o positivo o negativo (vedi p. 10)

Sia $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a segno alterno. Se esiste $c \in [0, +\infty)$ tale che g abbia segno costante per $x \in [c, +\infty)$ ha segno costante allora

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^c g(x) dx + \int_c^{+\infty} g(x) dx$$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Se converge $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ allora converge $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Tale implica la divergenza $\int_0^{+\infty} f(x) dx \neq \int_0^{+\infty} |f(x)| dx$

Sia $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a segno alterno. Se $\int_0^{+\infty} |g(x)| dx$ converge allora $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ converge.

Tale implica la divergenza $\int_0^{+\infty} g(x) dx \neq \int_0^{+\infty} |g(x)| dx$

LEGGE INTEGRALI-SERIE

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ non crescente. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \left\{ \int_0^n f(x) dx \right\}_{n=0}^{\infty}$

Un caso di convergenza $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^n f(x) dx \right\}_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) < +\infty$ per $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \text{diverge} \Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \Rightarrow \text{si ferma a 1 perché per il teorema fondamentale del calcolo la primitiva deve essere continua.}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{(x+1)^2} dx = 1$$