

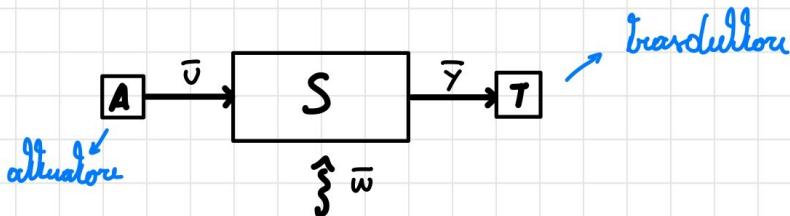
APPUNTI DI "FONDAMENTI DI AUTOMATICA"

Alexandru Beradatu Gabriel

1. INTRODUZIONE

DEFINIZIONE - AUTOMATICA insieme di strumenti matematici e ingegneristici necessari per la specifica, progetto e gestione di sistemi di controllo.

DEFINIZIONE - SISTEMA un insieme di elementi interconnessi fra di loro con l'ambiente esterno che si comporta come un tutto, secondo le proprie regole generali.



Un sistema e l'ambiente interagiscono scambiandosi grandezze fisiche o informazione.

Un sistema possiede variabili d'ingresso e d'uscita. Le variabili d'ingresso possono essere manipolabili o no (disturbi), mentre quelle d'uscita possono essere controllate o misurate. Per indicare le variabili useremo la notazione matriciale:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ IN. MAN.} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix} \text{ DIST.} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \text{ USCITE}$$

DEFINIZIONE - ATTUATORE

strumento che permette agli ingressi di assumere i valori desiderati.

DEFINIZIONE - TRASDUTTORE

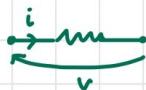
strumento che permette di misurare le variabili misurabili

strumento che permette di misurare le variabili misurabili

Ogni sistema è modellizzato da un modello matematico.

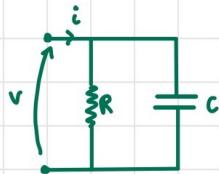
ESEMPI:

1) RESISTORE :



- IN: $U = i$
- OUT: $y = v$
- MODELLO: $y = R \cdot u$

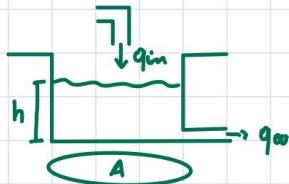
2) CIRCUITO RL:



- IN: $U = i$
- OUT: $y = v$
- MODELLO: $i = i_{in} + i_L ; v = R \cdot i_{in}$
 $C \cdot \dot{i}_L = i_L = i - i_{in} = v - \frac{v}{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} C \cdot \dot{v} = v - \frac{v}{R} \leftarrow \text{eq d' stato} \\ v = y \leftarrow \text{eq d' uscita} \end{array} \right.$$

3) SERBATOIO:

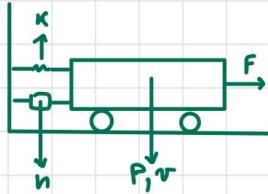


- IN: $U = q_{in}$
- OUT: $y = h$
- MODELLO: $V = Ah \rightarrow \dot{V} = Ah = U - \underbrace{K \sqrt{q_{out}}}_{\text{linear.}}$

$$Ah = U - K$$

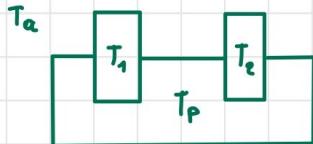
Neliamo la somiglianza tra l'esempio 1 e 2: essi sono corrispondenti dello stesso tipo di modello e quindi possono essere controllati in modo equivalente! Questo è un esempio di astrazione.

4) MASSA-MOLLA-SORZATORE



- IN: $U = F$
 - OUT: $y = P$
 - MODELLO:
- $$\begin{cases} m\ddot{v} = F - Kp - hv \\ y = P \end{cases}$$

5) SISTEMA TERMICO



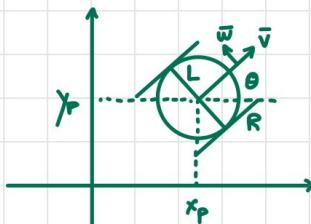
- IN: $P_1, P_2 - T_a$ disturbo
- OUT: T_P

- MODELLO: $E = cT \rightarrow \dot{E} = c\dot{T}$

\curvearrowright

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = U_1 + \gamma_{TP} (T_P - T_1) + \gamma_{TA} (T_a - T_1) \\ C_P \dot{T}_P = \gamma_{TP} (T_1 - T_P) + \gamma_{TP} (T_2 - T_P) + \gamma_{TA} (T_a - T_P) \\ C_2 \dot{T}_2 = U_2 + \gamma_{TP} (T_P - T_2) + \gamma_{TA} (T_a - T_2) \\ y = T_P \end{cases}$$

6) UNICICLO: ruote girano indipendentemente



- IN: w_R, w_L
- OUT: $\bar{y} = (x_p, y_p)^T$
- MODELLO: $v = \frac{w_R R + w_L R}{2}$; $w = (w_R - w_L) \frac{R}{L}$

\hookrightarrow possiamo usare v e w come incognite per la legge algebricamente

\curvearrowleft

$$\begin{cases} \dot{x}_p = v \cos \theta \\ \dot{y}_p = v \sin \theta \\ \theta = w \end{cases}$$

7) MEMORIA DI UN PC \rightarrow modello a tempo discreto:

m : allocazione RAM

s : memoria fissa

a : allocazioni

d, l, d_m : deallocazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t+1) = m(t) + a(t) - d_m(t) + v(t) \\ s(t+1) = s(t) + -d_s(t) - v(t) \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{N}$$
$$\hookrightarrow \begin{cases} v(t) > 0 \Rightarrow s \rightarrow m \\ v(t) < 0 \Rightarrow m \rightarrow s \end{cases}$$

1.1 Variabili di stato

Tutti gli esempi sopra tranne i primi possiedono una variabile di stato di cui è necessario conoscere il valore iniziale.

DEFINIZIONE - VARIABILE DI STATO è una variabile la cui conoscenza nell'istante iniziale è necessaria per determinare l'andamento della variabile d'uscita nel tempo.

Nel sistema a tempo continuo le variabili di stato sono quelle derivate rispetto al tempo. In generale esse rappresentano l'ammonto di qualcosa.

Per convenzione le indicheremo con x_n e le raggrupperemo nel vettore \bar{x} . Il numero di variabili di stato n è detto ordine del modello

1.2 Le equazioni del modello

Nel modello abbiamo due tipi di equazione

DEFINIZIONE - EQUAZIONE DI STATO

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow$ tenderemo a omittire il segno di vettore

Dalle le condizioni iniziali e l'andamento nel tempo degli ingressi possiamo ricavare univocamente $x(t)$. La funzione $x(t)$ può essere trovata analiticamente (raro) o con tecniche di integrazione numerica.

DEFINIZIONE - EQUAZIONE DI USCITA

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Era non i differenziale e lega le uscite alle variabili di stato e agli ingressi.

1.3 Classificazione dei modelli

Parliamo di classificazione dei modelli e non dei sistemi poiché ogni sistema può essere modellizzato con più modelli di diverso tipo e complessità / accuratezza.

- **TEMPO CONTINUO:** $t \in \mathbb{R}$
- **TEMPO DISCRETO:** $t \in \mathbb{N} (\in \mathbb{Z})$
- **ORDINE:** numero di variabili di stato / equazione di stato
- **STRETTAMENTE PROPRIO:** $y(t) = g(x(t), t) \rightarrow$ non dipende direttamente
altrimenti il sistema è proprio non strettamente da $u(t)$
- **TEMPO INVARIANTE:** $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ e $y(t) = g(x(t))$
altrimenti è detto **TEMPO VARIANTE**
- **LINEARE:** $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ e $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$
con: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$
- **STATICO:** non possiede variabili di stato
- **DINAMICO:** possiede variabili di stato
- **SISO (SINGLE IN SINGLE OUT):** $m = p = 1$ (singolo ingresso e uscita)

1.4 Movimenti di stato, uscita e d'equilibrio

Una volta definita l'equazione di stato, la condizione iniziale e l'evoluzione degli ingressi possiamo calcolare $x(t)$ chiamato movimento dello stato. Analogamente chiamiamo $y(t)$ movimento dell'uscita.

Dallo ciò, possiamo definire il movimento d'equilibrio:

DEFINIZIONE - MOVIMENTO D'EQUILIBRIO dato un sistema tempo invarianti e la sua equazione di stato definiamo l'ingresso costante $v(t) = \bar{v}$ corrispondente ad un equilibrio. Se esiste un movimento d'equilibrio, allora

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \dot{x} = f(\bar{x}, \bar{v}) = 0$$

Se $x(t_0) = \bar{x}$ e $v(t) = \bar{v}$, allora possiamo affermare che $\dot{x}(t) = 0$ e quindi $x(t) = \bar{x}$ $\forall t$ costante.

Nel caso di sistemi a tempo discreto la situazione è analoga:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(t) = x(t+1) \Rightarrow x(t+1) = f(x(t), v(t)) \\ v(t) &= \bar{v} \quad \hookrightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{v}) \end{aligned}$$

1.5 Stabilità dei movimenti

La proprietà di stabilità dei movimenti vale per tutti tipi di movimento.

Prima di definire la stabilità definiamo d' movimento nominale, ossia un qualciasi movimento, e perturbato.

DEFINIZIONE - MOVIMENTO PERTURBATO data una condizione iniziale perturbata $x(t_0) = \tilde{x}_0 \neq x_0$ e un ingresso $v(t)$, il movimento perturbato sarà $\tilde{x}(t)$

DEFINIZIONE - STABILITÀ

il movimento $x(t)$ è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \hat{x}_0 \parallel x_0 - \hat{x}_0 \parallel < \delta \Rightarrow |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t$$

DEFINIZIONE - STABILITÀ ASINTOTICA

d movimento $x(t)$ è stabile asintoticamente se esso è stabile e $|\hat{x}(t) - x(t)| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

DEFINIZIONE - INSTABILITÀ

un movimento è instabile se esso non è stabile.

La stabilità asintotica è una proprietà globale, mentre la stabilità semplice è locale, d'insieme limitato in cui un movimento è stabile nel suo bacino d'attrazione.

2. SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI A TEMPO CONTINUO

I nostri sistemi hanno forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{array}{l} A, B, C, D \text{ costanti} \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

2.1 Equilibri

Pur trovare i punti di equilibrio dobbiamo porre $\dot{x} = 0$:

$$\dot{x} = 0 \rightarrow A\bar{x} = -B\bar{u} \rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \rightarrow \begin{array}{l} 1 \text{ se } A \text{ è invertibile} \\ \rightarrow \infty \text{ se } |A| = 0 \end{array}$$

2.2 Princípio di sovrapposizione degli effetti

Supponiamo due movimenti diversi $x^a(t)$ e $x^b(t)$ (con le relative uscite $y^a(t)$ e $y^b(t)$). Allora in un sistema lineare al movimento $x(t) = \alpha x^a(t) + \beta x^b(t)$ corrisponde un'uscita pari a $y(t) = \alpha y^a(t) + \beta y^b(t)$.

2.3 Movimenti libri e forzati

DEFINIZIONE - MOVIMENTO LIBERO

definiamo movimento libero il movimento ottenuto imponendo la stessa condizione iniziale del movimento nominale ma con ingresso nullo.

DEFINIZIONE - MOVIMENTO FORZATO

analogo al movimento libero ma annullando la condizione iniziale e mantenendo gli ingressi.

In base al principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo scrivere qualsiasi movimento come somma del relativo movimento forzato e movimento libero.

2.4 Calcolo e analisi dei movimenti

Prendiamo la generica equazione di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0 \\ u(t)$$

Studiamo i casi possibili:

2.4.1 Coefficienti scalari

Consideriamo l'equazione di stato a coefficienti scalari:

$$\dot{x} = ax + bu \quad x, u \in \mathbb{R}$$

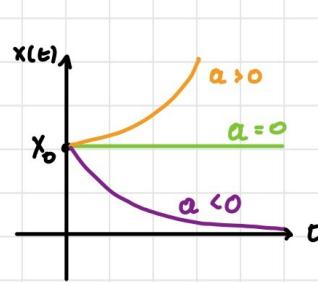
Era ha soluzione:

$$x = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

mov. libero x_L mov. forzato x_F

L'equazione scritta si chiama equazione di Lagrange.

Qualifciammo la relazione tra a e il movimento libero.



DEFINIZIONE - TEMPO DI ASSESTAMENTO ALL'Ε% Quanto tempo ci impiega $x_L(t)$ ad assumere un tempo pari a ε% di x_0 .
Il tempo di assottanamento è una proprietà del sistema ed è pari a:

$$x_L(T_\epsilon) = \frac{\epsilon}{100} x_0 = e^{\alpha T_\epsilon} x_0 \Rightarrow T_\epsilon = \frac{1}{|\alpha|} \left| \ln \frac{\epsilon}{100} \right|$$

↓
costante di tempo τ

2.4.2 Coefficienti vettoriali

L'equazione di Lagrange può essere estesa al caso vettoriale con la seguente forma:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) d\tau$$

↓ ↓
Esponenziale di matrice

ESPOENZIALE MATRICIALE

Chiamiamo esponenziale matriciale:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \rightarrow \text{sviluppo di Taylor di } e^x$$

Poiché l'esponenziale matriciale è una serie, esso potrà solo essere approssimato prendendo un K abbastanza grande.

Nel caso di matrici diagonali possiamo calcolare l'esponenziale

complesso come:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Se la matrice è diagonalizzabile, allora possiamo scrivere l'esponenziale matriciale come:

$$e^A = T^{-1} e^{A_d} T \quad \text{con: } T \text{ la matrice degli autovettori} \\ A_d \text{ la matrice diagonale degli autovalori}$$

A diagonalizzabile Consideriamo il caso con A diagonalizzabile, allora possiamo scrivere A come:

$$A = T^{-1} A_d T \quad \text{con: } T^{-1} \text{ la matrice degli autovettori} \\ A_d \text{ la matrice diagonale degli autovalori}$$

Ciò ci permette di calcolare facilmente l'esponenziale complesso come:

$$e^{At} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot T$$

Quindi possiamo affermare che $x_L(t) = x_0 e^{A(t-t_0)}$ è combinazione lineare di $e^{\lambda_i t}$:

$$x_L(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + \gamma_n e^{\lambda_n t}$$

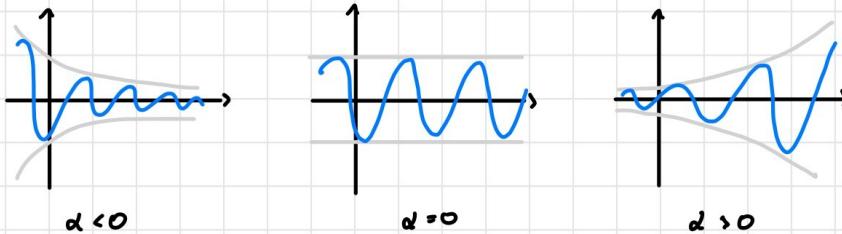
I termini esponenziali sono gli modi propri del sistema.

Analisi dei modi propri (A diagonalizzabile) Consideriamo il caso generale:

$$\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{\alpha t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

La parte reale dell'esponenziale è quella che ci interessa perché è lei che determina l'andamento del modo. Studiamo i 3 casi:

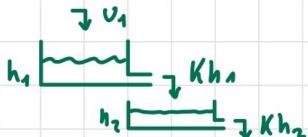
- $\alpha < 0$: $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ $t \rightarrow +\infty$
- $\alpha = 0$: $e^{\alpha t} = 1 \rightarrow$ modo oscillante limitato
- $\alpha > 0$: $e^{\alpha t} \rightarrow +\infty$ $t \rightarrow +\infty$



Possiamo dire il movimento libero converge se tutti i modi convergono, ossia hanno $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$. Analogamente il movimento libero è limitato se ogni modo è limitato, ossia $\operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0$. Se almeno uno dei modi diverge, allora in generale il movimento libero diverge.

A non diagonalizzabile Nel caso di A non diagonalizzabile continua a valere l'equazione di Lagrange, ma il calcolo dell'esponenziale complesso è più difficile. Consideriamo il seguente esempio.

ESEMPIO: due serbatoi in cascata



$$A \dot{h}_1 = u_1 - Kh_1$$

$$A \dot{h}_2 = Kh_1 - Kh_2$$

Il sistema sarà:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa_A}{A} & 0 \\ \frac{\kappa_A}{A} & -\frac{\kappa_A}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{pmatrix} u_1$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = -\frac{\kappa_A}{A} \quad n_1^A = 2 \quad n_2^A = 1 \rightarrow \text{non regolare}$$

Istudiemo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\frac{\kappa_A}{A} h_1 + \frac{1}{A} u_1 & \leftarrow \text{autonomo rispetto all'altro stato} \\ \dot{h}_2 = \frac{\kappa_A}{A} h_1 - \frac{\kappa_A}{A} h_2 \end{cases}$$

Quindi per lo studio del movimento libero possiamo studiare:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\frac{\kappa_A}{A} h_1 \\ \dot{h}_2 = \frac{\kappa_A}{A} h_1 - \frac{\kappa_A}{A} h_2 \end{cases}$$

Quindi possiamo considerare, nella seconda equazione, h_1 come una spieg di ingresso e calcolare il movimento libero in modo iterato:

$$h_1(t) = e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} h_{1,0} \rightarrow h_2(t) = e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} h_{2,0} + \int_0^t e^{-\frac{\kappa_A}{A}(t-\tau)} \frac{\kappa_A}{A} h_1(\tau) d\tau \\ = e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} h_{2,0} + e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} \frac{\kappa_A}{A} \int_0^t e^{\frac{\kappa_A}{A}\tau} h_{1,0} d\tau \\ = e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} h_{2,0} + e^{-\frac{\kappa_A}{A}t} \frac{\kappa_A}{A} h_{1,0} t$$

Il modo del primo stato è $e^{\lambda t}$ (λ se A forse stata diag.). I modi del secondo sistema è la combinazione lineare tra il modo del primo stato, dello modo semplice, più un altro $t e^{\lambda t}$ detto modo composto.

Generalizziamo ciò che abbiamo visto nell'esempio:

Se un autovalore λ_i ha $n_i^A > n_i^A$, i modi relativi a λ_i sono $e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{n_i^A - n_i^A} e^{\lambda_i t}$

I modi della forma $t^k e^{\lambda t}$ si dicono modi composti, gli altri semplici

Quelli dei modi (A non diagonalizzabile) I modi semplici si studiano in modo analogo al caso diagonalizzabile. Vediamo i modi composti:

$$t^k e^{\lambda t} = t^k e^{at} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

- $a < 0$: $t^k e^{at} \rightarrow 0$ $t \rightarrow +\infty$ (esponentiale dominante)
- $a = 0$: $t^k e^{at} = t^k \rightarrow +\infty$ $t \rightarrow +\infty$
- $a > 0$: $t^k e^{at} \rightarrow +\infty$ $t \rightarrow +\infty$

Possiamo notare che un modo composto o converge o diverge, di conseguenza il modo libero o converge o diverge

Nel caso generale possiamo dire che il movimento libero:

- converge a 0 se tutti i modi convergono: $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0 \quad \forall \lambda$
- è limitato se tutti i modi sono limitati:
 - λ regolare: $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$
- diverge se esiste un modo divergente (in generale):
 - $\exists i: \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$
 - $\exists i: \lambda_i$ non regolare $\wedge \operatorname{Re}\{\lambda_i\} = 0$

2.5 Stabilità

Consideriamo il movimento nonnullore:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{UGOMI}$$

e il perturbato:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = \tilde{x}_0 \neq x_0 \\ u(t) \end{array} \right. \Rightarrow \tilde{x}(t) = e^{At} \tilde{x}_0 + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{UGOMI}$$

Per definizione di stabilità abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists S > 0 : \forall \tilde{x}_0 \quad \|x_0 - \tilde{x}_0\| < S \Rightarrow \|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = \|e^{At}x_0 - e^{At}\tilde{x}_0\|$$

Quindi per i sistemi lineari la stabilità non dipende dagli ingressi, ma solo dai movimenti liberi.

Studiamo la differenza $x(t) - \tilde{x}(t)$:

$$x(t) - \tilde{x}(t) = e^{At}x_0 - e^{At}\tilde{x}_0 = e^{At}(x_0 - \tilde{x}_0)$$

Era è anche esser un movimento libero sotto condizione iniziale $(x_0 - \tilde{x}_0)$. Quindi, per studiare la stabilità ci basta studiare la convergenza del movimento libero:

- se $\operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0$, allora $e^{At}(x - \tilde{x})$ limitato e quindi stabile
- se $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$, allora $e^{At}(x - \tilde{x})$ stabile asintoticamente
- instabile altrimenti

Osservazione La stabilità non dipende neanché da x_0 . La stabilità, quindi, è una proprietà del sistema (non sistemi lineari). Inoltre la proprietà di stabilità asintotico è una proprietà globale.

Possiamo ora enunciare il criterio degli autovettori per la stabilità del sistema:

- $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i \Leftrightarrow$ sistema asintoticamente stabile
- $\exists \lambda_i : \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0 \Rightarrow$ sistema instabile
- $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \wedge \exists \lambda \operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$ è necessario calcolare le moltiplicità dell'autovettore con $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$

2.5.1 Proprietà sistemi aritmeticamente stabili

- Il movimento è $x(t) = e^{At}x_0 + x_F(t)$, se il sistema è aritmeticamente stabile allora dopo un transitorio $x(t) = x_F(t)$. $x_F(t)$ è il movimento forzato, controllabile da noi tramite gli ingressi
- Se il sistema è aritmeticamente stabile, allora A è invertibile e sicuramente esiste uno e un solo equilibrio e per $t \rightarrow +\infty$ il sistema tende a questo equilibrio
- Se $v(t)$ è limitata, allora anche $y(t)$ è limitata
(BIBO stability)

2.5.2 Analisi della stabilità aritmetica dal polinomio caratteristico

Calcolare gli autovalori di una matrice non sempre è facile. Per questo esistono dei metodi che ci permettono di caratterizzare la stabilità del sistema senza il calcolo di questi. In particolare ci permette di determinare il segno della parte reale degli autovalori direttamente dal polinomio caratteristico.

Il polinomio caratteristico è in generale un polinomio di grado n con forma $p_A(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$. Vediamo le diverse condizioni:

1) COND. NECESSARIA: affinché ci sia stabilità aritmetica i coefficienti a_i $i = 1..n$ devono avere lo stesso segno.
Se $n=2$ è anche sufficiente

2) CRITERIO DI ROUTH - HURWITZ

Per applicare il criterio di Routh-Hurwitz ci servono due concetti in più.

DEFINIZIONE - TABELLA DI ROUTH - HURWITZ Definiamo tabella di Routh-Hurwitz a $n+1$ righe una matrice triangolare che ha questi elementi:

- la prima riga contiene i coefficienti di indice pari di $p_A(\lambda)$
- la seconda riga contiene gli coefficienti di indice dispari di $p_A(\lambda)$
- le altre righe sono definite in modo ricorsivo:

$$l_i = -\frac{1}{K_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ K_1 & K_{i+1} \end{bmatrix} \text{ dove } \begin{pmatrix} : & : & : \\ h_1 & \dots & h_i \\ K_1 & \dots & K_i \\ l_1 & \dots & l_i \\ : & : & : \end{pmatrix}$$

Se $K_1=0$ allora la tabella di Routh-Hurwitz non è definita.
Le "servono" elementi non definiti li pongo a 0.

Possiamo ora all'analisi della tabella, che non è altro che il criterio di Routh-Hurwitz:

PROPOSIZIONE - CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ

stabile se e solo sono verificate:

1) La tabella è ben definita

2) I segni degli elementi della prima colonna devono essere concordi

Il sistema è asintoticamente

COROLARIO Il numero di autovalori con $\operatorname{Re}\{\lambda\} > 0$ è pari al numero di cambi di segno della prima colonna.

2.6 Sistemi equivalenti

Consideriamo un sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Non esiste un modo unico per definire lo stato interno del sistema, ma molti modelli equivalenti. Un modo per definire una rappresentazione equivalente è trovare una matrice di trasformazione invertibile tale per cui:

$$\tilde{x} = Qx \quad e \quad x = Q^{-1}\tilde{x} \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = Q\dot{x} \quad e \quad \dot{x} = Q^{-1}\dot{\tilde{x}}$$

Possiamo quindi ricavare il generico sistema equivalente:

$$\dot{x} = Q^{-1} \dot{\tilde{x}} = Ax + Bu = A Q^{-1} \tilde{x} + Bu$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \underbrace{QAQ^{-1}}_A \tilde{x} + \underbrace{QB}_B u$$

$$y = Cx + Du = \underbrace{CQ^{-1}}_C \tilde{x} + \underbrace{DU}_D u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \hat{A} \tilde{x} + \hat{B} u \\ y = \hat{C} \tilde{x} + \hat{D} u \end{cases}$$

Di quali proprietà godono i sistemi equivalenti?

- 1) A e \hat{A} sono matrici simili, quindi hanno gli stessi autovalori e quindi godono delle stesse proprietà di stabilità
- 2) Il movimento libero e forzato dell'uscita non variano

3 SISTEMI NON LINEARI A TEMPO CONTINUO (T.I.)

I sistemi che studieremo in questa sezione sono così definiti:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{pmatrix}$$

Il primo passo per lo studio di sistemi non lineari è la linearizzazione. La linearizzazione ci permetterà di studiare un sistema non lineare come se lo fosse nell'intorno di un equilibrio, con le dovute approssimazioni ovviamente.

3.1 Linearizzazione

Linearizzare un sistema lineare è un processo a più passi:

- 1) definiamo $u(t) = \bar{u}$ costante
- 2) definiamo lo stato di equilibrio d'interesse: $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$
- 3) sviluppiamo f e g con serie di Taylor del 1° ordine con centro (\bar{x}, \bar{u})

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{u})(x - \bar{x}) + \frac{\partial}{\partial u} f(\bar{x}, \bar{u})(u - \bar{u})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & f_n \end{pmatrix} = J_x(f) \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow A(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\frac{\partial}{\partial u} f = \dots = J_u(f) \rightarrow B(\bar{x}, \bar{u})$$

$$y = g(\bar{x}, \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} g(\bar{x}, \bar{v})(x - \bar{x}) + \frac{\partial}{\partial v} g(\bar{x}, \bar{v})(v - \bar{v})$$

\downarrow

$C(\bar{x}, \bar{v})$

\downarrow

$D(\bar{x}, \bar{v})$

Q1 Consideriamo le nuove variabili $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta v = v - \bar{v}$ e $\delta y = y - \bar{y}$. Ottieniamo, così, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} x - \cancel{\frac{d}{dt} \bar{x}} = \dot{x} \approx A(\bar{x}, \bar{v}) \delta x + B(\bar{x}, \bar{v}) \delta v \\ \delta \dot{y} = \frac{d}{dt} y - \cancel{\frac{d}{dt} \bar{y}} = \dot{y} \approx C(\bar{x}, \bar{v}) \delta x + D(\bar{x}, \bar{v}) \delta v \end{cases}$$

Chiamiamo il sistema ottenuto sistema linearizzato intorno a (\bar{x}, \bar{v}) .

Il sistema ottenuto con il metodo sopra descritto può essere utilizzato per due scopi:

- 1) Simulare le dinamiche di x e y intorno all'equilibrio
- 2) Studiare le proprietà di stabilità dell'equilibrio

Le soluzioni approssimate ricavate mediante linearizzazione sono tanto buone quanto sono piccole δx , δv e δy . Poiché siamo in equilibrio, le dinamiche saranno limitate o convergenti.

Le proprietà di stabilità del sistema possono essere studiate usando quello linearizzato.

PROPOSIZIONE - STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO Sia un sistema non lineare e la sua linearizzazione all'equilibrio. Se tutti gli autovalori di $A(\bar{x}, \bar{v})$ hanno $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ allora l'equilibrio è assolutamente stabile. Se esiste un autovalore con $\operatorname{Re}\{\lambda\} > 0$ allora l'equilibrio è instabile. Se $\operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0$ ed esiste un autovalore nullo non si può concludere nulla.

3.2 Metodo grafico

Per sistemi non lineari semplici possiamo svolgere un'analisi

grafica che può essere più accurata di quella tramite linearizzazione. Il metodo funziona per sistemi scalari di primo ordine.

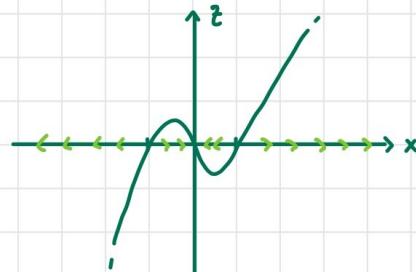
Consideriamo un sistema e un ingresso costante \bar{v} . Poiché il sistema è di primo ordine, possiamo tracciare un grafico qualitativo di $f(x, \bar{v})$ usando l'analisi. Della funzione f ci interessano gli zeri (corrispondenti agli equilibri) e il segno. Illustriamo il funzionamento con un esempio.

ESEMPIO Studiamo il sistema $\dot{x} = x(x^2 - 1) + v$ per $v(t) = 0$.

$$z = x(x^2 - 1) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} z=0 \text{ per } x=0, x=\pm 1 \\ z>0 \quad \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & + & - & + \end{matrix} \end{array}$$

$\rightarrow 0 < x < 1$



$\Rightarrow x=0$: os. stabile
 $x=\pm 1$: instabile

4. SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Il tipico sistema discreto ha forma simile a quelli continui. La principale differenza è che la variabile temporale appartiene a \mathbb{N} (discreta).

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \rightarrow \text{relazione tra prima dell'evento e dopo l'evento}$$

Un sistema LTI discreto invece sarà:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Definiamo un equilibrio come un valore \bar{x} tale che per \bar{u} fissato si ha:

$$x(t+1) = \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \rightarrow \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Se il sistema è LTI l'equilibrio sarà:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

$$(I - A)\bar{x} = B\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1}B\bar{u}$$

L'unica soluzione per
 $I - A$ invertibile

Affinché $I - A$ sia invertibile det $(I - A) \neq 0$

det $(I - A) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \neq 0 \Rightarrow$ ogni autovalore diverso da 1

4.1 Movimento degli stati nei sistemi LTI discritti

L'equazione da risolvere è una equazione ricorsiva, più facile da calcolare di una eq. differenziale:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ u(t) \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + BAu(0) + Bu(1)$$

:

↓

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^k B u(t-1-k)$$

↙

mov. libero

↙

mov. forzato

4.2 Stabilità per sistemi LTI discritti

Consideriamo il movimento:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ u(t) \quad t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^k B u(t-1-k)$$

Definiamo i **movimenti perturbati**:

$$\begin{cases} x(0) = \tilde{x}_0 \\ u(t) \quad t \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \tilde{x}(t) = A^t \tilde{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^k B u(t-1-k)$$

Usando la definizione di **stabilità** possiamo dire:

$$x(t) - \tilde{x}(t) = A^t x_0 - A^t \tilde{x}_0 = A^t (x_0 - \tilde{x}_0) \rightarrow \text{movimento libero del sistema con c.i. } x_0 - \tilde{x}_0$$

Per studiare la **stabilità**, a **bassa** studiare $A^t (x_0 - \tilde{x}_0)$:

- **STABILE** se A^t limitata $\forall t$
- **AS. STABILE** se $A^t \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$
- **INSTABILE** se A^t diverge

Come anche prima, la **stabilità** è una proprietà del **sistema**, poiché non dipende né da ingressi né da c.i.. Inoltre l'**asintotica stabilità** è una proprietà **globale**.

4.2.1 Studio di A^t

Capiamo come studiare la matrice A^t .

Se A è uno **scalare** pari ad a possiamo avere

- $a > 1$: divergente
 - $a = 1$: limitata ($a^{t+1} = a^t$)
 - $0 < a < 1$: convergente a 0
 - $a = 0$: limitata ($a^{t+1} = a^t = 0$)
 - $-1 < a < 0$: oscillante convergente a 0
 - $a = -1$: limitata ($a^t = \pm 1$)
 - $a < -1$: oscillante divergente
- }
- $|a| > 1$: divergente
 - $|a| = 1$: limitata
 - $|a| < 1$: convergente

Consideriamo ora A **diagonalizzabile**. Possiamo scrivere A^t come $T^{-1} A_d^t T$ e quindi gli elementi di A^t sono combinazioni lineari di $\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t$. Questi saranno i **modi propri** del sistema.

Se A non è diagonalizzabile, avrà oltre ai modi propri i modi composti $t^k \lambda_i^t$ con $K = 1..n-q$.

4.2.2 Studio dei modi

Studiamo prima i modi semplici. Consideriamo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = p e^{j\theta}$, $p^t e^{j\theta t}$. La parte rilevante è p^t poiché $e^{j\theta t}$ oscilla tra $[-1, 1]$. L'andamento dell'intero modo è quindi determinato da p^t :

- $0 < p < 1$: p^t converge
- $p = 1$: p^t limitato
- $p > 1$: p^t diverge

Nel caso dei modi composti lo studio è simile: cambia il componente modulante: $t^k p^t$

- $0 < p < 1$: $t^k p^t \rightarrow 0$ $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ converge
- $p = 1$: t^k diverge
- $p > 1$: $t^k p^t$ diverge

Possiamo enunciare il criterio degli autovalori:

PROPOSIZIONE - CRITERIO DEGLI AUTOVALORI

- $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1..n \Leftrightarrow$ sistema as. stabile
- $\exists i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow$ sistema instabile
- se $|\lambda_i| \leq 1$ e $\exists j : |\lambda_j| = 1$ bisogna analizzare la molteplicità degli autovalori

Poiché calcolare esplicitamente gli autovalori non è sempre fattibile, enunciamo delle condizioni sui coefficienti del polinomio caratteristico per l'orientazione stabilità:

1) C. N.: $|a_n/a_0| < 1 \quad |a_n/a_0| < n$

2) C. N.: $a_0 \cdot p_\alpha(1) = a_0 \sum_{i=0}^n a_i > 0$

3) C. S.: $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$

4) C. S.: $\sum_{i=0}^n |a_i| < |a_0|$

Esiste anche una condizione necessaria e sufficiente del criterio di

Jury. È il duale del criterio di Routh-Hurwitz:

1) Costruiamo la tabella di Jury: matrice $n \times n$ triangolare con

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & 1 \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

$$l_i = \frac{1}{h_1} \det \begin{pmatrix} h_2 & h_{2+i} \\ h_3 & h_i \end{pmatrix}$$

Se $h_1 = 0$ la tabella non è ben definita.

- 2) Applichiamo il criterio: "il sistema è os. stabile se e solo se
- la tabella è ben definita
 - i segni della prima colonna sono concordi"

5 RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI ATTRAVERSO LE TRASFORMATE

Un modo alternativo per descrivere i sistemi è la funzione di trasformata. Prima di parlare, però, ci mancano degli strumenti matematici: le trasformate. Insolte useremo la funzione di trasformata per il progetto di sistemi di controllo.

5.1 Trasformata di Laplace

DEFINIZIONE - TRASFORMATA DI LAPLACE

Si ha un segnale nel tempo $f(t)$ con $f(t) = 0$ per $t < t_0 = 0$. La trasformata di Laplace di $f(t)$ è una funzione a valori complessi così definita:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s \in \mathbb{C}$$

Ci vuole che l'integrale non sempre è definito:

$$f(t) = \text{rect}(t) \rightarrow \text{funzione rettangolo o di Heaviside}$$

$$\rightarrow s=1 \quad F(1) = \dots = \infty$$

$$\rightarrow s=-1 \quad F(-1) \text{ non ben definito}$$

L'integrale è ben definito per valori di s tali che $\operatorname{Re}\{s\} > 0$

della ascissa spiliale. Ciò che faremo sarà trovare il valore assoluto di $F(s)$ in ipotesi di convergenza dell'integrale per poi estendere il risultato anche ai valori per cui $\Re\{s\} < \sigma$:

$$F(s) = \dots = \frac{1}{s} \Rightarrow F(1) = 1 \\ F(-1) = -1 \leftarrow \text{estensione!}$$

DEFINIZIONE - ANTI TRASFORMATA

formula per il calcolo)

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \quad (\text{non enunciamo la})$$

Noi considereremo funzioni le cui trasformate sono razionali:

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con $N(s) \in D(s)$ polinomi. Chiamiamo i valori che annullano $N(s)$ zeri e quelli che annullano $D(s)$ poli.

PROPOSIZIONE - PROPRIETÀ

- 1) LINEARITÀ: $\mathcal{L}(a f(t) + b g(t)) = a \mathcal{L}(f(t)) + b \mathcal{L}(g(t))$
- 2) $\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-st} F(s)$
- 3) $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$
- 4) $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$ → operatore "derivata"
- 5) $\mathcal{L}(t f(t)) = -\frac{d}{ds} F(s)$
- 6) $\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau) dt) = \frac{1}{s} F(s)$

Calcoliamo alcuni trasformate notevoli:

$$1) \text{sca}(t) \rightarrow F(s) = \dots = \frac{1}{s}$$

$$2) e^{at} \text{sca}(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$3) \cos(wt) \text{sca}(t) \rightarrow F(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(e^{jw\tau} + e^{-jw\tau}) \text{sca}(t)\right) = \frac{1}{2(s-jw)} + \frac{1}{2(s+jw)} = \dots = \frac{1}{s^2 + w^2}$$

$$4) \sin(wt) \text{sca}(t) \rightarrow F(s) = \dots = \frac{1}{2j(s-jw)} + \frac{1}{2j(s+jw)} = \dots = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$5) t \text{sca}(t) = \text{ram}(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

5.1.1 Teoremi principali

TEOREMA - VALORE FINALE Sia $f(t)$ un segnale con trasformata razionale con il grado di $D(s)$ maggiore di $N(s)$ e con trasformata reale

poli nulli o con $\operatorname{Re}\{s\} < 0$. Allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

TEOREMA - VALORE INIZIALE

Lia $f(t)$ un segnale con trasformata razionale con il grado di $D(s)$ maggiore di $N(s)$. Allora:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s)$$

Nota bene: per le proprietà della trasformata di Laplace, possiamo alcune volte, applicare il teorema per trovare il valore iniziale delle derivate.

5.1.2 Calcolo dell'antitrasformata

Parliamo ora dell'antitrasformata. Enunciamo due metodi per il calcolo esplicito:

- $\mathcal{L}^{-1}(K) = K \delta(t)$ con K cost. e δ il delta di Dirac.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad \text{con } \phi \in C(0)$$

- METODO DEI FRATTI SEMPLICI: consideriamo $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ dove il grado di $N(s)$ è maggiore di quello di $D(s)$. Decomponiamo $F(s)$ in una somma di fratti semplici di cui conosciamo l'antitrasformata. Possiamo ottenere $\mathcal{L}(F(s))^{-1}$ sfruttando la linearità dell'antitrasformata.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \bullet \quad F(s) &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = [a_1 e^{-t} + a_2 e^{-3t}] \operatorname{rect}(t) \\ \bullet \quad F(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{a_1}{(s+1)^2} + \frac{a_2}{s+1} + \frac{a_3}{s+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = [a_1 t e^{-t} + a_2 e^{-t} + a_3 e^{-3t}] \operatorname{rect}(t) \\ \bullet \quad F(s) &= \frac{2s+1}{s^2+2s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s-1-j)} \Rightarrow \text{Come in 1 e 2} \\ &\Rightarrow D(s) = (s+1)^2 + 1 \Rightarrow F(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2+1} = a_1 \frac{s+j}{(s+1)^2+j^2} + a_2 \frac{j}{(s+1)^2+j^2} = \\ &= a_1 \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + a_2 \frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^2+1} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(F(s))^{-1} = [a_1 e^{-t} \sin(t) + a_2 e^{-t} \cos(t)] \operatorname{rect}(t) \end{aligned}$$

- METODO DEI RESIDUI

- POLI DISTINTI: il denominatore è scomponibile in $\prod_{i=0}^n (s+p_i)$. Scomponendo in fratti semplici ottieniamo:

$$F(s) = \alpha_1 \frac{1}{s+p_1} + \dots + \alpha_n \frac{1}{s+p_n}$$

Consideriamo $F(s)(s+p_i)$, possiamo usare un trucco per calcolare il generico α_i :

$$F(s)(s+p_i) = \alpha_1 \frac{s+p_i}{s+p_1} + \alpha_2 \frac{s+p_i}{s+p_2} + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n \frac{s+p_i}{s+p_n}$$

$\hookrightarrow \alpha_i = F(s)(s+p_i)|_{s=-p_i}$

ESEMPIO

$$1. F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad \alpha_1 = F(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+1)(s+3)}|_{s=-1} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \dots = \frac{1}{2}$$

- POLI COINCIDENTI: possiamo applicare lo stesso criterio ai fratti con denominatore di grado superiore, basta moltiplicare per il termine con il corretto grado. In questo caso alcuni α non sono ricavabili (quelli con forma uguale a quelli di grado alto ma con grado inferiore) con questo metodo. Per aggirare il problema basta creare un sistema con variabili le α non calcolabili e risolverlo.

5.2 Trasformata di Fourier

5.2.1 Serie di Fourier

La serie di Fourier è una serie di funzioni usata per rappresentare funzioni periodiche, scomponendole nelle loro componenti armiche, ossia un'infinità numerabile di sinusoidi con pulsazione $n\omega_0$ $n \in \mathbb{N}$:

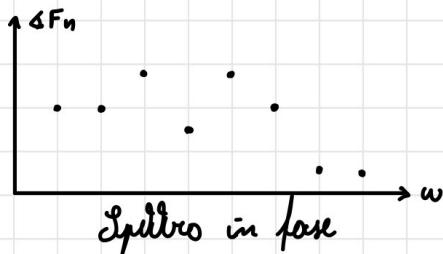
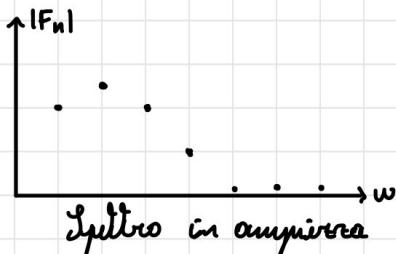
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \leftarrow f. esponenziale$$

$$= F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Re(F_n) \cos(n\omega_0 t) - Im(F_n) \sin(n\omega_0 t) = \leftarrow f. trigonometrica$$

$$= \dots = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n| \cos(\omega_0 t + \angle F_n)$$

$$\text{con } F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j n \omega t} dt$$

La scomposizione di f in serie di Fourier ci permette di studiare la nostra funzione in termini di modulo e fase.



Lo studio dello spettro ci permette di caratterizzare in modo qualitativo il nostro segnale.

5.2.2 Definizione della trasformata di Fourier

Se $f(t)$ è una funzione non periodica. Essa, a differenza delle funzioni periodiche, è scomponibile in una infinità non numerabile di armoniche. Definiamo prima l'antitrasformata di Fourier di una funzione $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw) e^{jw t} dw = \leftarrow f. \text{ esponenziale}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|F(jw)| \cos(wt + \angle F(jw)) dw \leftarrow f. \text{ trigonometrica}$$

Anche in questo caso possiamo parlare di spettro di ampiezza e di fase. A differenza del caso precedente, il grafico sarà una curva e non più un insieme di punti definiti a intervalli discosti.

Chiamiamo banda l'intervallo in cui $|F(jw)| \neq 0$.

La trasformata di Fourier si calcola come:

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jw t} dt$$

Confrontandola con la trasformata di Laplace notiamo due differenze:

- la trasformata di Laplace è calcolata su $(0; +\infty)$
- la trasformata di Fourier è calcolata solo sull'argomento del numero complesso, invece che sul numero complesso come quella di Laplace

6. FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Consideriamo sistemi LTI con forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}(x(t)) \\ U(s) &= \mathcal{L}(u(t)) \\ Y(s) &= \mathcal{L}(y(t)) \end{aligned}$$

Dove x, u, y sono le trasformate di Laplace delle variabili. Trasformando da entrambi i numeri otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x}) &= A\mathcal{L}(x) + B\mathcal{L}(u) = AX + BU = sX - x(0) \\ \Rightarrow sX - x(0) &= AX + BU \rightarrow (sI - A)x = BU + x(0) \\ X &= (sI - A)^{-1}(BU + x(0)) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{\mathcal{L}(x_L)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU}_{\mathcal{L}(x_F)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y) &= C\mathcal{L}(x) + D\mathcal{L}(u) = CX + DU = \\ &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{\mathcal{L}(y_L)} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U}_{\mathcal{L}(y_F)} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE - FUNZIONE DI TRASFERIMENTO Indichiamo funzione di trasferimento la funzione $\mathcal{L}(y_F)(s)$.

La funzione di trasferimento è una rappresentazione alternativa ed equivalente della rappresentazione di stato che caratterizza il legame tra gli ingressi e le uscite. Lo stato interno è nascosto. Possiamo chiamare la F.D.T una rappresentazione esterna, in contrasto alla rappresentazione di stato che è interna.

8.1 Sistemi equivalenti

Quando avevamo parlato di sistemi equivalenti avevamo visto come sistemi con rappresentazioni di stato differenti abbiano lo stesso comportamento ai massimi. Calcolando la F.D.T del sistema

equivalente, noteremo che essa non varia rispetto a quella del sistema iniziale.

6.2 Struttura della FDT

La generica FDT ha forma:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad \xrightarrow{\text{matrice aggiunta}}$$
$$\begin{aligned} L s (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{\det(A)} s \text{Adj}(sI - A) \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico di A è un polinomio di grado n con zeri in $s = \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori di A . Inoltre la matrice aggiunta contiene i determinanti di sottomatrici di $sI - A$, quindi di grado minore o uguale a $n-1$.

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} \underbrace{C \text{Adj}(sI - A) B}_{\substack{\text{riga} \\ \text{polinomio di grado } s^{n-1}}} + D \quad \xrightarrow{\text{colonna}}$$
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Quindi ci rimane da studiare D (non il denominatore):

- $D = 0$: il grado del denominatore sarà maggiore del numeratore.
Diciamo che la FDT è strettamente propria.
- $D \neq 0$: il grado del denominatore è paru a quello del numeratore.
Diciamo che la FDT è propria

Non può mai accadere che il grado del numeratore sia maggiore di quello del denominatore.

6.3 Proprietà della FDT

- $G(s)$ è razionale finita con $N(s)$ e $D(s)$ primi tra loro con grado v e $v-1$ rispettivamente. Il fatto che $N(s)$ e $D(s)$ siano primi tra loro ci causa di problemi perché possiamo degli autovalori in quanto $v \leq n$. Ciò può limitare le capacità discrittive della FDT.

- I poli di $G(s)$ sono tutti autovalori di A ma non vale il viceversa.
- Se posso calcolarlo $G(0) = -CA^{-1}B + D$ è il guadagno statico del sistema $\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$ con ing. cost. \bar{u} .
- Introduciamo le proprietà con un esempio:

ESEMPIO Consideriamo il sistema termico visto ad inizio corso, ma senza pistola. Esso aveva dato:

$$\begin{cases} c \dot{T}_1 = -\gamma_T (T_1 - T_2) - \gamma_a (T_1 - T_a) + P_1 \\ c \dot{T}_2 = -\gamma_T (T_2 - T_1) - \gamma_a (T_2 - T_a) + P_2 \end{cases}$$

A seconda di come definiamo ingressi e uscite ci saranno delle cancellazioni e facendo opportuni cambi riusciremo anche a capire il perché di queste cancellazioni.

$$A \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} & \frac{\gamma_a}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} & -\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \dots = (\lambda + \frac{\gamma_a}{c})(\lambda + \frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\gamma_a}{c}, \lambda_2 = -\frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}$$

Quando varia da tutti i λ saranno poli della f.d.t?

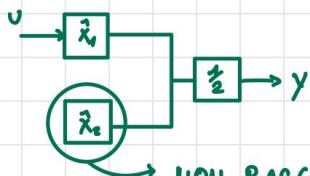
- CASO 1: $P_1 = P_2 = 0 \Leftrightarrow y = T_1$

$$T_1(s) = \dots = \frac{U(s)}{s + \frac{\gamma_a}{c}} U(s) \rightarrow \text{Trasformiamo introducendo} \begin{cases} \hat{x}_1 = T_1 + T_2 \\ \hat{x}_2 = T_1 - T_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_1 = \dot{T}_1 + \dot{T}_2 = \dots = \frac{1}{c} \{ 2u - \gamma_a(T_1 + T_2) \} = -\frac{\gamma_a}{c} \hat{x}_1 + \frac{2}{c} u$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_2 = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 = \dots = -\frac{1}{c} (2\gamma_T + \gamma_a)(T_1 - T_2) = -\frac{1}{c} (2\gamma_T + \gamma_a) \hat{x}_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}$$



NON RAGGIUNGIBILE \rightarrow escluso da fdt

- CASO 2: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $y = T_1 - T_2$

$$G(s) = \dots = \frac{1}{c} / (s + \frac{\zeta\omega_n + j\omega_n}{c}) \rightarrow \text{trasformiamo con } \begin{cases} \hat{x}_1 = T_1 + T_2 \\ \hat{x}_2 = T_1 - T_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_1 = \dots = \frac{1}{c} \left(u - \frac{\zeta\omega_n}{c} \hat{x}_1 \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_2 = \dots = \frac{1}{c} \left(u - \frac{\zeta\omega_n + 2\omega_n}{c} \hat{x}_2 \right)$$

$$\Rightarrow y = \hat{x}_2$$



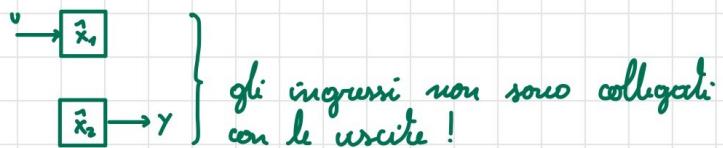
- CASO 3: $P_1 = P_2 = 0$ e $y = T_1 - T_2$

$$G(s) = \dots = 0 \rightarrow \text{trasformo con } \begin{cases} \hat{x}_1 = T_1 + T_2 \\ \hat{x}_2 = T_1 - T_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_1 = \dots = -\frac{\zeta\omega_n}{c} \hat{x}_1 + \frac{\omega_n}{c} u$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_2 = \dots = -\frac{(\zeta\omega_n + 2\omega_n)}{c} \hat{x}_2$$

$$\Rightarrow y = \hat{x}_2$$



Possiamo quindi concludere che se $v < n$ allora possono esistere stati irraggiungibili, non osservabili o entrambi. In questo caso possono esistere autovettori che non sono poli del sistema.

- Conseguenza della precedente: il fatto che i poli abbiano parte reale negativa è condizione necessaria per la stabilità del sistema (anche sufficiente se $v = n$).

6.4 Fattorizzazione delle folt

Una generica f.d.t. $G(s)$ può essere scritta nelle seguenti forme fattorizzate (canoniche)

GUADAGNO GENERALIZZATO: coincide con $G(0) \propto g = 0$

$$G(s) = \frac{N \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2 \xi_i \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2})}{s^m \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2 \xi_i \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \leftarrow \begin{array}{l} \text{COST. TEMPO} \\ \text{POLI NELL' ORIGINE} \end{array}$$

← FORMA DI BODE

COST. TEMPO → SHORZAMENTO DEL POLO
L_s g: TIPO SISTEMA → m poli ($g > 0$) o n zeri null'origine ($g < 0$)

COSTANTE DI TRASF.

$$= \frac{P \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2 \xi_i \omega_n s + \omega_n^2)}{s^m \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2 \xi_i \omega_n s + \omega_n^2)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{FORMA DI NYQUIST} \\ \hookrightarrow \text{PULSAZIONE NATURALE} \end{array}$$

Abbiamo due tipi di poli/zeri: alcuni sono interamente reali e gli altri sono complessi coniugati. Essi hanno forme:

POLI REALI :	$s = -\frac{1}{\tau_i}$
- COMPLESSI :	$s = -\xi_i \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi_i^2}$
ZERI REALI :	$s = -\frac{1}{\tau_i}$
- COMPLESSI:	$s = -\xi_i \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi_i^2}$

6.5 Rিporta della f.d. allo scalino

Consideriamo un sistema con f. ol. t $G(s)$ e ingresso lo scalino $U(t) = \text{scal}(t)$ con $U(s) = \frac{1}{s}$. Come varia la trasformata dell'urta e di conseguenza l'antitrasformata dell'urta, ossia la risposta.

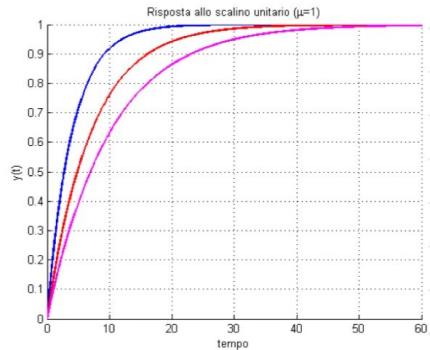
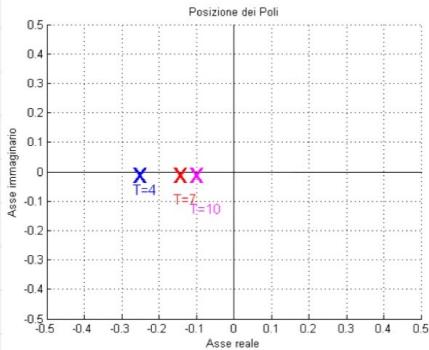
Definiamo dei parametri utili per valutare la risposta:

- VALORE DI REGIME: $y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$
- VALORE MASSIMO: $y_{\max} = \max_{t \geq 0} y(t)$
- SOVRALONGAZIONE MASSIMA PERCENTUALE: $S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$
- TEMPO DI ASSESTAMENTO: tempo necessario affinché $|y(t) - y_\infty| = e^{-\frac{y_\infty}{100}}$
- PERIODO DI OSCILLAZIONE: distanza temporale tra due massimi

Sistemi del I ordine

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1+Ts)} \rightarrow y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$



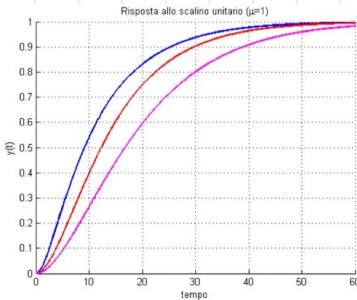
- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \dot{y}(0) = \frac{\mu}{T}$
- Più diminuisce T (il polo si sposta a sinistra) più diminuisce il tempo di salita
- Il tempo di assestamento è $T_{ae} = T|\log(0.01\varepsilon)|$, per esempio $T_{a5} \cong 3T, T_{a1} \cong 4.6T$

Sistemi del II ordine - due poli reali positivi $T_1 > T_2$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

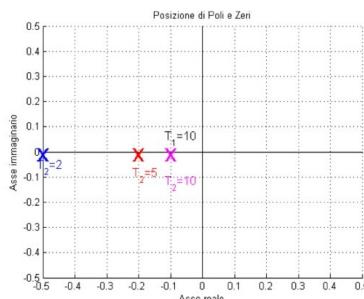
$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$y(t) = \mu(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}})sca(t)$$



- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2} (e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}) \geq 0 \quad \forall t$
- $\dot{y}(0) = 0$
- Più diminuiscono T_1 e T_2 (i poli si spostano a sinistra) più diminuiscono il tempo di salita e il tempo di assestamento T_{ae} (la relazione non è immediata)
- Se $T_2 \ll T_1$ l'esponenziale più lenta (avente costante di tempo T_1) domina la forma della risposta, e si ottiene (per $t \geq 4 \div 5 T_2$) che

$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})sca(t)$$



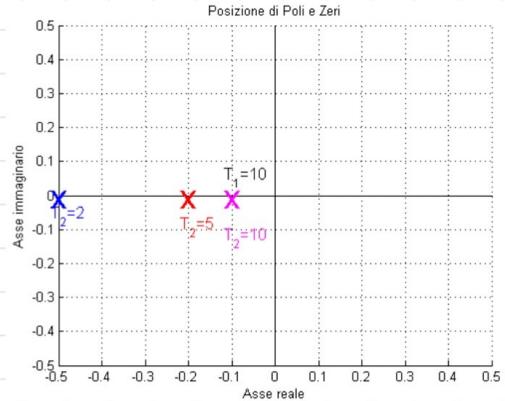
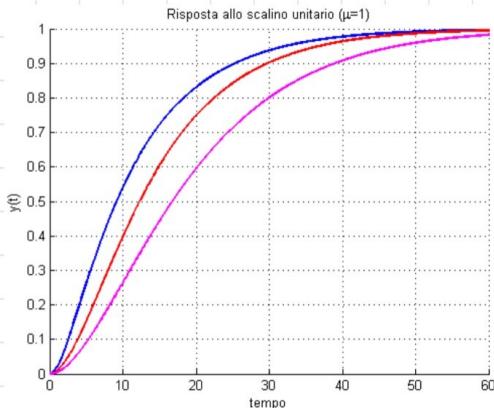
Sistemi del II ordine - due poli reali coincidenti $T_1 = T_2 = T > 0$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+Ts)^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1+Ts)^2}$$

$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T}e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$

- L'andamento qualitativo è simile al caso precedente (per $T_2 \cong T_1$)
- In questo caso è possibile valutare il tempo di assestamento:
 - $T_{a5} \cong 4.74T$
 - $T_{a1} \cong 6.64T$



Sistemi del II ordine - poli reali $T_1 > T_2 > 0$ e uno zero $\tau \neq T_1, T_2$

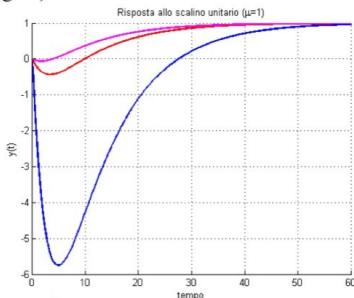
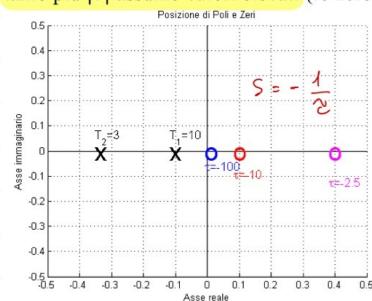
$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)sca(t)$$

- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1-T_2} \left(\frac{T_1-\tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2-\tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \rightarrow \dot{y}(0) = \frac{\mu\tau}{T_1T_2} \rightarrow$ dipende dal segno di τ !

CASO I: $\tau < 0$: $\dot{y}(0) < 0$: c'è «sottoelongazione» (RISPOSTA INVERSA), che è tanto più pronunciata tanto più $|\tau|$ assume valori elevati (lo zero si avvicina all'origine)

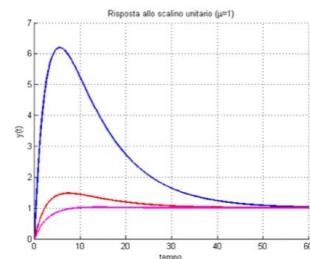
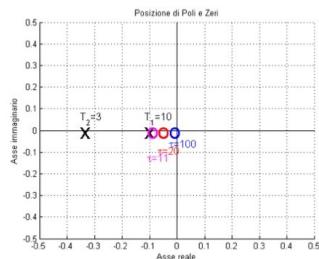


In generale, quando ci sono zeri con parte reale positiva ($s = -\frac{1}{\tau} > 0$) si verifica il fenomeno della risposta inversa.

CASO II: $\tau > T_1$

- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
- $\dot{y}(0) > 0$ (crescente al tempo $t = 0$)
- Esiste istante $\bar{t} > 0$ in cui derivata cambia segno:

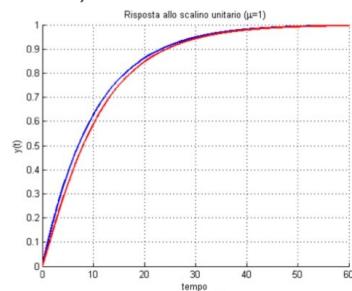
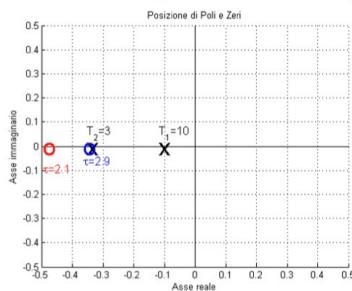
$$\bar{t} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} |\log \left| \frac{T_1 - \tau}{T_2 - \tau} \frac{T_2}{T_1} \right| |$$
cioè una **sovraelongazione**, che è tanto più marcata tanto il valore di τ aumenta (lo zero si avvicina all'origine)



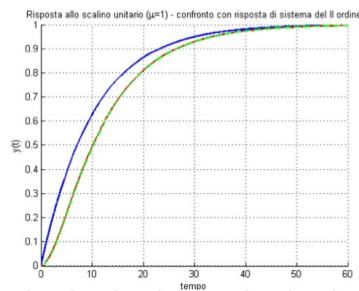
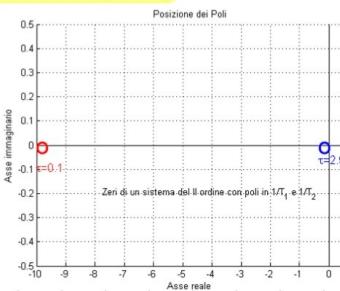
In generale, quando ci sono zeri con parte reale negativa e modulo minore di quello dei poli (reali) si verifica il fenomeno delle **sovraelongazioni** (senza oscillazioni).

CASO IV: $T_1 > T_2 > \tau$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \geq 0 \quad \forall t$$

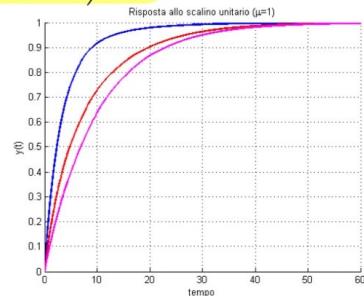
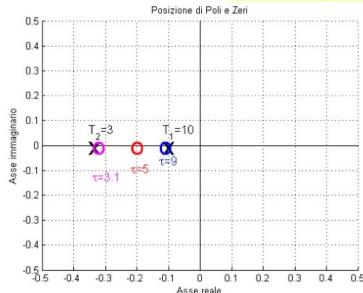


- Se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con $y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$
- Più τ diminuisce (lo zero si «allontana» a sinistra) più la risposta tende a quella del sistema del II ordine privo di zeri (caso II).



CASO III: $T_1 > \tau > T_2$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \geq 0 \quad \forall t$$



Se $\tau \cong T_1$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con

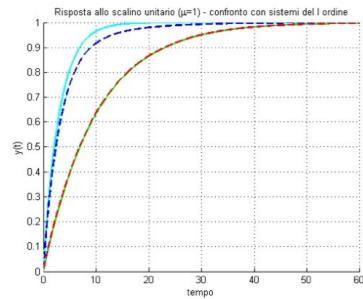
$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_2}})$$

Anche se le risposte sono leggermente diverse (coppia polo/zero trascurata ha dinamiche lente)

Se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con

$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

e in questo caso non si verifica il fenomeno della **deriva lenta** perché il polo trascurato ha dinamiche veloci



Sistemi del II ordine - poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \text{poli in } s = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \arccos(\xi)) \right) sca(t)$$

Parte reale dei poli

Parte immaginaria dei poli

- Se $\xi > 0$ il sistema è asintoticamente stabile
- Se $\xi = 0$ il sistema è semplicemente stabile e la risposta è

$$y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t))sca(t)$$

- I punti di stazionarietà ($\dot{y}(\bar{t}_k) = 0$) di $y(t)$ sono

$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

e i valori di $y(t)$ assunti in questi punti sono

$$y(\bar{t}_k) = \mu \left(1 - (-1)^k e^{-\xi \frac{k\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \right)$$

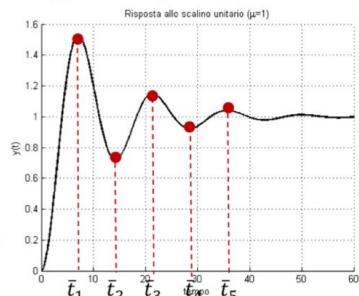
- $y_\infty = \mu$

- $y(0) = 0$

$$-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

- $y_{max} = y(\bar{t}_1) = \mu \left(1 + e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \right)$

- $S\% = 100 e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$ sovraelongazione massima percentuale



- $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$ periodo di oscillazione

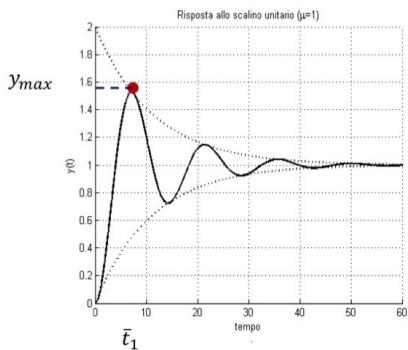
- E' facile fornire un'approssimazione del tempo di assestamento: i massimi e i minimi (punti stazionari) di $y(t)$ giacciono sulle funzioni:

$$y_M(t) = \mu(1 + e^{-\xi\omega_n t})$$

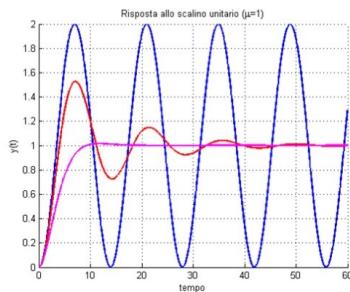
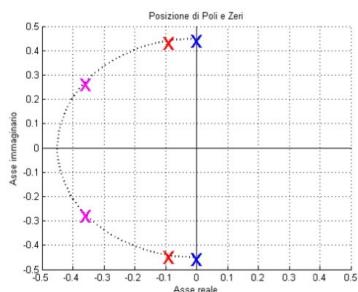
$$y_m(t) = \mu(1 - e^{-\xi\omega_n t})$$

per calcolare T_{ae} si calcolano gli istanti in cui queste funzioni «modulant» entrano nella fascia $[\mu(1 - 0.01\xi), \mu(1 + 0.01\xi)]$, e si trova:

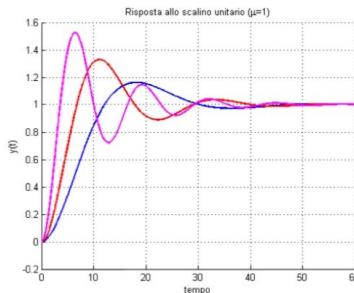
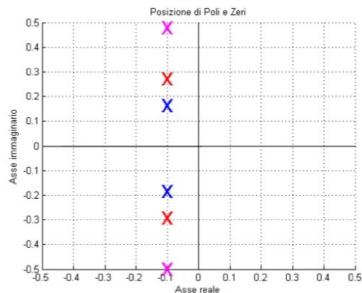
$$T_{ae} = \frac{1}{\xi\omega_n} |\log(0.01\xi)|$$



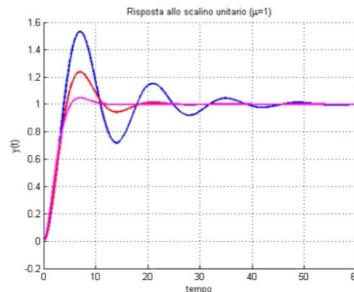
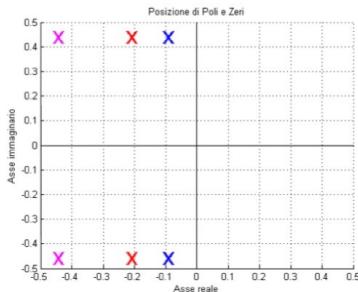
CASO I: ω_n costante, ξ variabile



CASO II: parte reale costante, parte immaginaria variabile

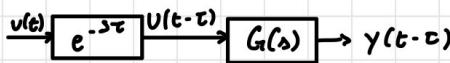


CASO III: parte reale variabile, parte immaginaria costante



6.6 Ritardo di tempo

Se consideriamo il seguente sistema:



Per le proprietà della trasformata di Laplace sappiamo che $e^{-s\tau} \delta(t)$ equivale a $\delta(t-\tau)$. Quindi una FDT pari a $e^{-s\tau}$ descrive un ritardo.

6.7 Approssimazione di FDT

Le fdt che abbiamo studiato sono molto più semplici rispetto alle fdt che troviamo scritte in forma di Bode o di Nyquist. Dobbiamo quindi ricorrere a due metodi di approssimazione.

Approssimazione ai poli dominanti Dala $G(s)$, dopo aver eseguito le opportune cancellazioni polo-zero, i poli dominanti sono i poli (si ricorda generalmente complessi) ultimamente più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri. Per "ultimamente" intendiamo almeno una decade (ossia un decimo).

REGOLA: la risposta allo scalino di un sistema con poli dominanti può essere approssimata con quella di un sistema con funzione di trasferimento avente soltanto il polo dominante e il guadagno pari a quello di partenza.

E' opportuno tener conto di zeri:

- che abbiano distanza dall'asse immaginario confrontabile o minore con quella dei poli dominanti
- che abbiano parte reale positiva

Per fare in che il guadagno non cambi, bisogna prima portare il sistema in forma di Bode.

Cancellazione polo - zero

REGOLA: qualora ci siano coppie polo-zero vicini tra loro nel piano complesso con parte reale negativa, è possibile forzare la cancellazione mantenendo invariati gli altri parametri (tra i quali il GUADAGNO) per ottenere un modello approssimato di ordine ridotto ma con caratteristiche simili a quello di partenza (almeno per quanto riguarda la risposta allo scalino).

Come prima per non alterare il guadagno conviene passare per la forma di Bode.

6.8 Schemi a blocchi e interconnessione

Consideriamo due sistemi LTI di primo ordine S_1 e S_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

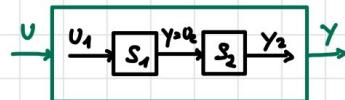
Studiamo i vari modi di interconnessione tra questi due sistemi: la serie, il parallelo e la retroazione.

SERIE 1) FORMA DI STATO:

$$U_1 = U$$

$$U_2 = Y_2 = C_1 x_1 + D_1 U_1 = C_1 x_1 + D_1 U$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 U \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 U) \\ y = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 U) \end{cases}$$

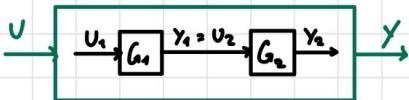


- L'ordine del sistema risultante è la somma degli ordini dei singoli sistemi
- La matrice A_{eq} è una matrice triangolare a blocchi e l'insieme degli autovalori di A_{eq} λ_{eq} è $\lambda_1 \cup \lambda_2$.

2) F.D.T:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_2(s) = G_2(s) U_2(s) = G_2(s) Y_1(s) = \\ &= G_2(s)(G_1(s) U_1(s)) = G_2(s) G_1(s) U_1(s) \end{aligned}$$

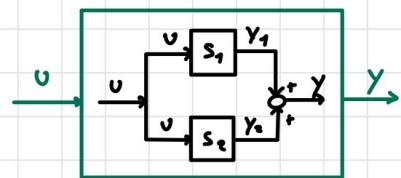
$$\rightarrow G_{eq} = G_2 G_1 = \frac{N_1(s) N_2(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$



- Se G_1 e G_2 sono in forma minima, in generale $D_{eq} = D_1 D_2$ e quindi l'insieme dei poli della serie è l'unione degli insiemi di poli dei sottosistemi.
- Potranno verificarsi delle cancellazioni tra N_1 e D_2 o tra N_2 e D_1 . Esistono quindi delle parti "nascoste" del sistema che non possiamo più controllare. Se queste sono stabili le chiamiamo cancellazioni lecite, se non sono assolutamente stabili le chiameremo non lecite. Nel caso di cancellazioni non lecite non possiamo accettare il sistema e diremo che la serie non è possibile.

PARALLELO 1) FORMA DI STATO:

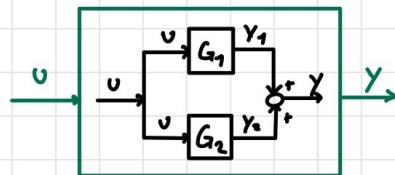
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = y_1 + y_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$



- L'ordine del sistema risultante è la somma degli ordini dei sottosistemi
- Si ha ancora che $\Lambda_{eq} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$

2) FDT:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) = \\ &= G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = \\ &= (G_1(s) + G_2(s))U(s) \\ \text{L} \> \> G_{eq} &= G_1 + G_2 = \frac{N_1 D_2 + N_2 D_1}{D_1 D_2} \end{aligned}$$



- Se esistono poli in comune tra G_1 e G_2 possono esservi delle cancellazioni e dovranno agire come nel caso della serie.

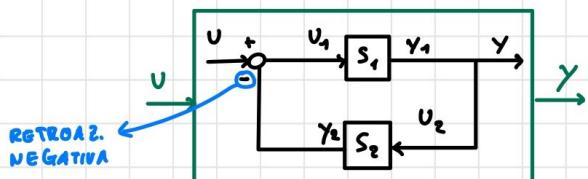
RETROAZIONE

Consideriamo $D_1 = 0$

1) FORMA DI STATO :

$$B_1 U_1 = B_1 (U - Y_2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 U - B_1 C_2 x_2 - B_1 D_2 C_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = Y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$



- L'ordine del sistema risultante è la somma degli ordini dei sottosistemi.
- Gli autovetori del sistema equivalente non sono più ereditati dai sottosistemi.

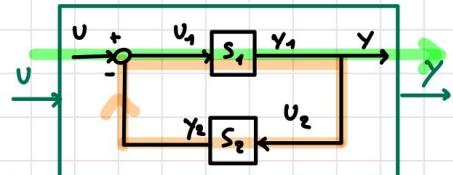
2) FDT:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = G_1(s) U_1(s) = \\ &= G_1(s) (U(s) - Y_2(s)) = \\ &= G_1(s) (U(s) - G_2(s) Y(s)) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow Y(s) (1 + G_1(s) G_2(s)) = G_1(s) U(s)$$

$$\hookrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} \rightarrow \text{FUNZIONE DI AUDATA}$$

$$\rightarrow \text{FUNZIONE DI ANELLO APERTO } (L)$$



- F. D'AUDATA: funzione ottenuta percorrendo il sistema ignorando l'anello.
- F. DI ANELLO APERTO: funzione ottenuta percorrendo solo l'anello.

Nel caso di retroazione positiva, invece che negativa, si considera $1 - L$, con L la funzione d'anello aperto. La struttura della fdt ha forma generale:

$$G_{eq} = \frac{N_1 D_2}{N_1 N_2 + D_1 D_2}$$

polinomio caratteristico del sistema retroazionato

Ci saranno delle cancellazioni se N_1 ha fattori in comune con D_2 , ovvia $G_1(s)$ ha zeri in comune con i poli di $G_2(s)$. Per le cancellazioni non basta vale lo stesso discorso.

6.3 Risposta del sistema ad altri ingressi comuni

INGRESSI ESPONENZIALI L'ingresso $u(t)$ avrà forma: $u(t) = \bar{u} e^{\alpha t}$ $t \geq 0$. L'uscita sarà una combinazione lineare dei modi osservabili del sistema o uno dipendente dall'ingresso. Esisterà una $x(0) = \bar{x}$ tale che $y(t) = \bar{y} e^{\alpha t}$? Consideriamo un sistema con movimento $x = \bar{x} e^{\alpha t}$, per rispondere alla nostra domanda \bar{x} deve soddisfare:

$$(\alpha I - A)\bar{x} = B\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = (\alpha I - A)^{-1}B\bar{u} \quad \text{se } \alpha \text{ non è autoval.}$$

Ciò ci permette di dire:

$$\begin{aligned} y(t) &= C\bar{x}e^{\alpha t} + D\bar{u}e^{\alpha t} \\ &= \underbrace{(C(\alpha I - A)^{-1}B\bar{u} + D)}_{G(\alpha)} e^{\alpha t} \Rightarrow y(t) = G(\alpha)\bar{u}e^{\alpha t} + G(\alpha)u(t) \end{aligned}$$

Rispondendo ad questo che ci eravamo posti. Generalizziamo con il seguente teorema.

TEOREMA - RISPOSTA ESPONENZIALE Si applichi un ingresso $u(t) = \bar{u} e^{\lambda t}$ ad un sistema avendo $G(s)$ f.d.t. dove $\lambda \in \mathbb{C}$ non è autovalore di A . Allora:

- 1) $\exists x(0) = \bar{x} = (\lambda I - A)^{-1}B\bar{u}$ tale che $y(t) = \bar{y}(t) = G(\lambda)\bar{u}e^{\lambda t}$
- 2) Se il sistema è asintoticamente stabile $\forall x(0) \neq \bar{x}$ allora $y(t) \rightarrow \bar{y}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$

Possiamo notare 3 cose:

- 1) La dinamica di $\varepsilon = y - \bar{y}$ è anch'essa un movimento. Inoltre $\varepsilon \rightarrow 0$ esponenzialmente con tempo di arretramento pari a quello del movimento libero.
- 2) Se λ è polo di $G(s)$ allora $y(t) = \bar{y} + t e^{\lambda t}$ modo composto.

Se λ è zero di $G(s)$ allora $\tilde{y} = G(\lambda) v(t) = 0$. Questa proprietà è della proprietà bloccante degli zeri.

INGRESSI SINUSOIDALI L'ingresso $v(t)$ avrà forma pari a

$$v(t) = \bar{v} \cos \omega t = \frac{\bar{v}}{2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = v_a(t) + v_b(t)$$

Possiamo studiare indipendentemente v_a e v_b come ingressi esponenziali

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{\bar{v}}{2} e^{j\omega t} \Rightarrow \exists x(0) = (j\omega I - A)^{-1} B \frac{\bar{v}}{2} \Rightarrow y_a(t) = \tilde{y}_a(t) = G(j\omega) \frac{\bar{v}}{2} e^{j\omega t} \\ v_b &= \frac{\bar{v}}{2} e^{-j\omega t} \Rightarrow \dots \quad \dots \Rightarrow y_b(t) = \tilde{y}_b(t) = G(-j\omega) \frac{\bar{v}}{2} e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, se $v = v_a + v_b$ allora $\exists x(0) = \bar{x} = x_a(0) + x_b(0)$ tale che $y = \tilde{y} = \tilde{y}_a + \tilde{y}_b$. Esprimiamo \tilde{y} :

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{\bar{v}}{2} (G(j\omega) e^{j\omega t} + G(-j\omega) e^{-j\omega t}) = \frac{\bar{v}}{2} (G(j\omega) e^{j\omega t} + \overline{G(j\omega)} e^{-j\omega t}) = \\ &= \bar{v} [\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) - \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \frac{j}{2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})] = \\ &= \bar{v} [\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \sin(\omega t)]. \\ &= \bar{v} |G(j\omega)| [\cos(\angle G(j\omega)) \cos(\omega t) - \sin(\angle G(j\omega)) \sin(\omega t)] = \\ &= \bar{v} |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$

TEOREMA - RISPOSTA SINUSOIDALE Si applichi un ingresso $v(t) = \bar{v} \cos(\omega t)$ ad un sistema avente fdL $G(s)$ dove $j\omega$ non sia autovalore di A . Allora:

- 1) $\exists x(0)$ tale che $y(t) = \tilde{y} = \bar{v} |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega))$
- 2) se il sistema è asintoticamente stabile $\forall x(0) \neq \bar{x}$ allora $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$

INGRESSO PERIODICO sia l'ingresso una funzione $f(t)$ periodica con pulsazione ω_0 sviluppabile in serie di Fourier. Possiamo dire che $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{jn\omega_0 t}$ con V_n i coefficienti di Fourier n -esimi. Si consideri una generica componente $v_n(t) = V_n e^{jn\omega_0 t}$. Per il teorema della risposta esponenziale esiste condizione iniziale \bar{x}_n tale che se $x(0) = \bar{x}_n$ allora $y = \tilde{y} = G(j\omega_0) V_n e^{jn\omega_0 t}$ (se $j\omega_0$ non è autovalore). Per il principio di sovrapposizione possiamo estendere il teorema a

tutto la serie ottenendo $y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j_n w_0) v_n e^{j n w_0 t}$ serie di Fourier con coefficienti $G(j_n w_0) v_n$. Quindi $y(t)$ è anche una periodica con periodo uguali a $v(t)$.

TEOREMA - RISPOSTA PERIODICA

Si applichi un ingresso $v(t)$ periodico scomponibile con serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{j n w_0 t}$ avente fdt $G(s)$ dove $j_n w_0$ non sia autovalore. Allora:

- 1) $\exists x(0)$ tale che $y(t) = \tilde{y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j_n w_0) v_n e^{j n w_0 t}$
- 2) se il sistema è asintoticamente stabile $x(0) \neq \bar{x}$ allora $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$

INGRESSI FOURIER - TRASFORMABILI

Sia $f(t)$ una funzione che ammette trasformata di Fourier. Possiamo dire che l'ingresso $v(t)$ sarà $v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw) e^{jwt} dw$. Ragioniamo in modo analogo al caso con ingresso periodico. Ottieniamo così

$$y = \tilde{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(jw) F(jw) e^{jwt} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jw) e^{jwt} dw$$

\hookrightarrow risposta in frequenza

TEOREMA - RISPOSTA F. TRASF.

Si applichi un ingresso $v(t)$ Fourier trasformabile con trasformata $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(jw) e^{jwt} dw$ avente fdt $G(s)$ dove jw non sia autovalore. Allora:

- 1) $\exists x(0)$ tale che $y(t) = \tilde{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(jw) V(jw) e^{jwt} dw$
- 2) se il sistema è asintoticamente stabile $x(0) \neq \bar{x}$ allora $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$

Per poter corollare $G(jw)$ utilizziamo due grafici: $|G(jw)|$ e $\angle G(jw)$ rappresentandoli in base a w su dei particolari assi. Questi grafici sono detti diagrammi di Bode.

6.10 Tracciamento del diagramma di Bode.

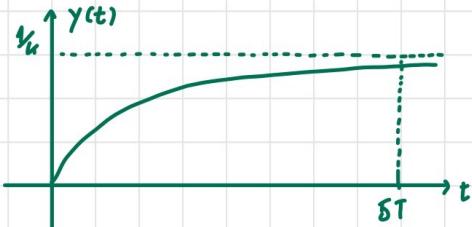
ESERCIZIO Calcoliamo la risposta allo scalino del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{A} (-Kx + u) \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{PDT}} y(s) = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{K}{A}} u(s) \Rightarrow G(s) = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{1}{K/A}}$$

La folt i già in forma di Nyquist. Possiamo vedere che il sistema ha un solo polo in $s = -\frac{A}{K}$. Portando la folt in forma di Bode ottieniamo

$$G(s) = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{A}{K}s} \Rightarrow N = \frac{1}{K} \\ T = \frac{A}{K} \rightarrow T_a = 5T$$

La risposta allo scalino sarà:



$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \dots = 0$$

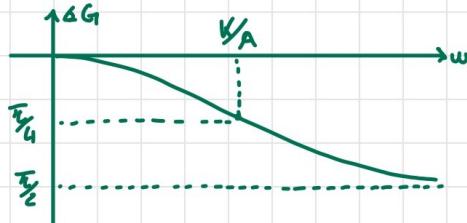
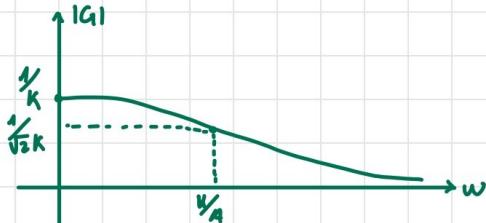
$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 L(\dot{y}(t)) = \dots = \frac{1}{K}$$

Definiamo il valore $\dot{y}(0) = \frac{1}{K}$ costante di trasferimento. Era i lo stesso costante di trasferimento incontrata nella forma di Nyquist. In generale la costante di trasferimento è il valore della prima derivata non nulla della risposta allo scalino nell'origine.

Studiamo ora la risposta al generico ingresso calcolando $G(j\omega)$:

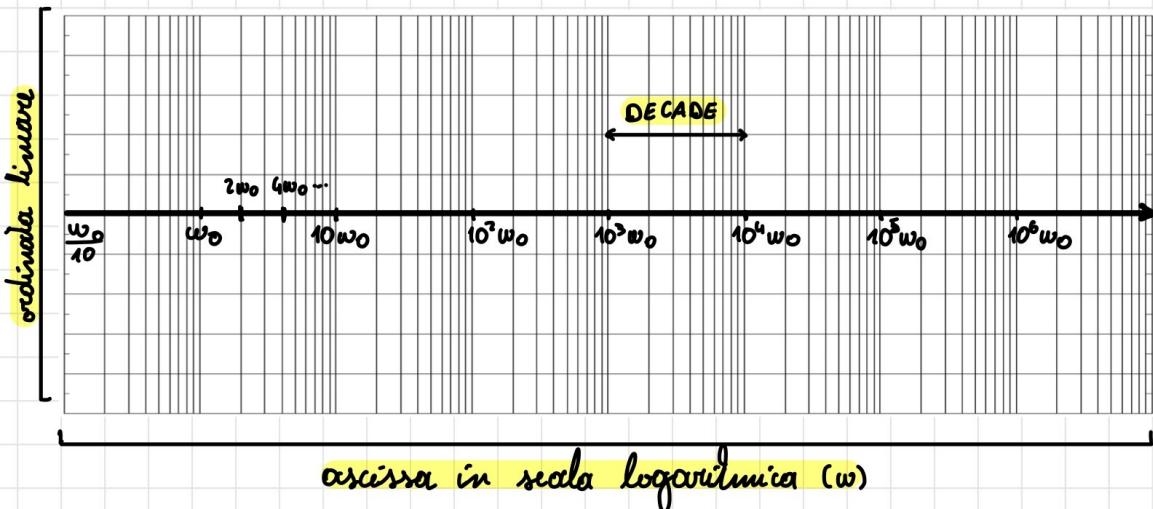
$$G(j\omega) = \frac{\frac{1}{K}}{1 + j\omega \frac{A}{K}} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{\frac{1}{K}}{\sqrt{1 + \omega^2 A^2/K^2}} \\ \rightarrow \angle G(j\omega) = \arctan \left\{ \frac{|G| \sin \theta}{|G| \cos \theta} \right\} = \\ = \arctan \left(-\omega \frac{A}{K} \right)$$

Rappresentando le due parti ottieniamo:



Abbiamo così ottenuto una variante "nativa" dei diagrammi di Brode.

Il tracciamento dei diagrammi di Brode in questa maniera può risultare difficile e laborioso. Facciamo un nuovo **sistema** di assi in grado di semplificare la vita: la carta semilogaritmica.



Dove w_0 indica il "fondo secca" ovvero una pulsazione al di sotto della quale non accade nulla. I valori intermedi sono già automaticamente indicati sulla carta semilogaritmica.

Prima di parlare di fatti quadratici tracciamento, bisogna portare il sistema in forma di Brode. Bisogna considerare la parametrizzazione in $j\omega$ di questa. Poi può procedere al calcolo di modulo e fase.

DIAGRAMMA DEL MODULO Consideriamo ora il modulo del generico $G(j\omega)$. Poiché esso sarà una produttoria di più termini, per semplificare si è deciso di indicare il modulo in dB. Esso si calcolerà con:

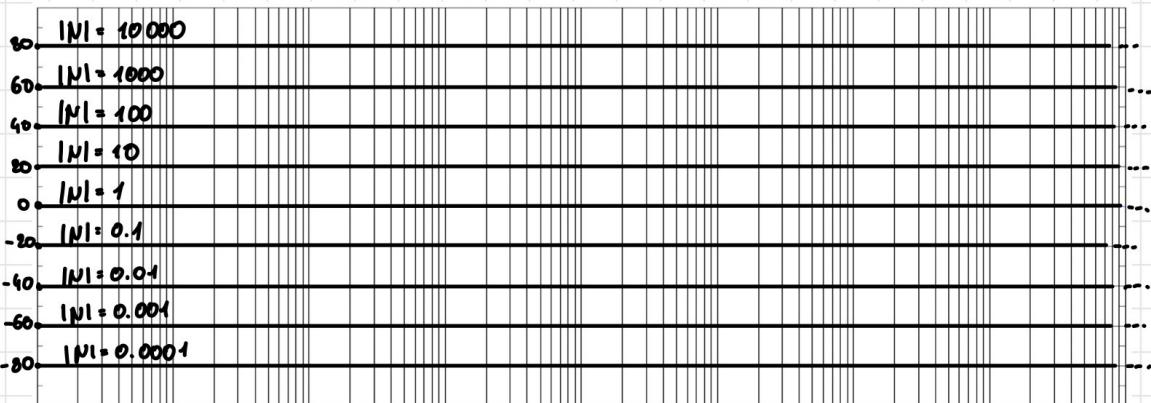
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \rightarrow \text{poiché } G \text{ è lineare usciamo } 20 \text{ e non } 10$$

La proprietà del logaritmo ci permette di trasformare le produttorie in sommatorie:

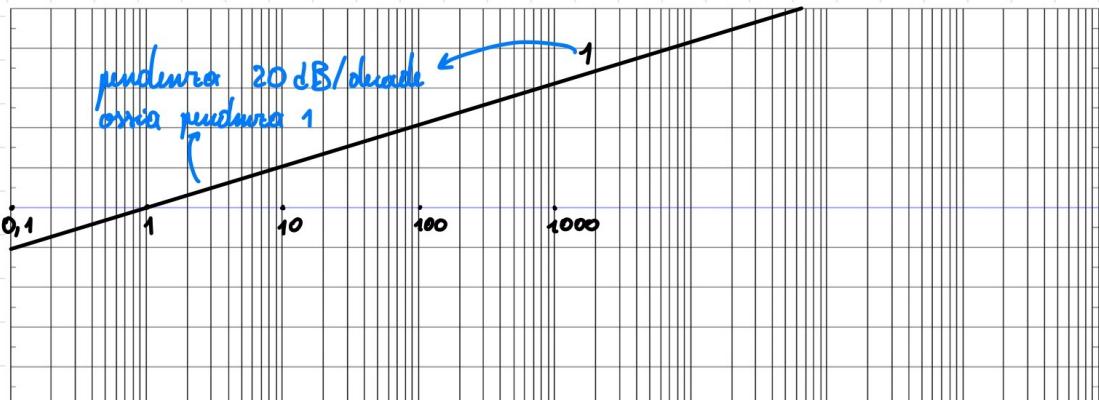
$$|G(j\omega)|_{dB} = |N|_{dB} + \sum |1 + j\omega \tau_i|_{dB} + \sum |1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\omega_m}|_{dB} - \\ - |j\omega|^2_{dB} - \sum |1 + j\omega T_i|_{dB} - \sum |1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\omega_m}|$$

Dobbiamo quindi imparare a tracciare i diagrammi dei termini qui sopra e della loro somma. Poiché i termini con segno negativo hanno forma praticamente identica a quelli, ci basterà imparare a disegnare questi ultimi.

- $G(j\omega) = N \Rightarrow |G(j\omega)| = N \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |N|$

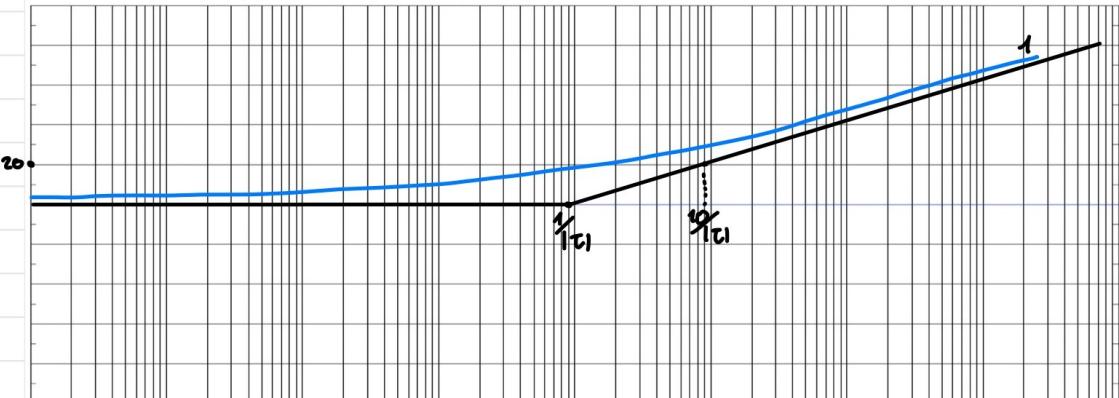


- Qualificheremo il contributo di $|j\omega|^2_{dB}$. Per fare ciò consideriamo $G(s) = s$ ($G(s) = \frac{1}{s-1}$ in forma di Bode) $\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega$



L'elevamento a zero, quindi, a modificare la pendenza della retta: man mano che ω aumenta la retta ruota in senso orario. La pendenza 1 corrisponde a $\omega = -1$.

- $G(s) = 1 + ST \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$
 - se $\omega \ll \frac{1}{T}$ $|G|_{dB} = 0$
 - se $\omega \gg \frac{1}{T}$ $|G|_{dB} = 20 \log_{10} \omega T$



Quando ci costa approssimare in questo modo? Calcoliamo l'errore nel punto di maggior approssimazione, ovvero $|G(j\frac{1}{T})|$:

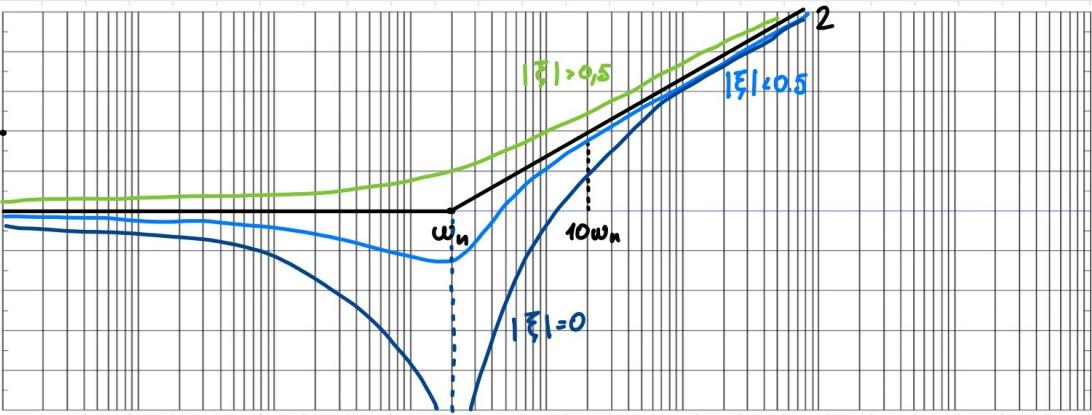
$$|G(j\frac{1}{T})|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{T^2}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 8 \text{ dB}$$

Nel caso di $G(s) = \frac{1}{1+s}$ ci basta ribaltare il grafico rispetto all'asse delle ascisse.

- $G(s) = 1 + \frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \omega_n s \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$
 - se $\omega \ll \omega_n$ $|G|_{dB} = 0$
 - se $\omega \gg \omega_n$ $|G|_{dB} = 40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

Anche in questo caso studiamo l'errore nel punto di massima approssimazione ($|G(j\omega_n)|_{dB}$). L'errore viene ad essere $20 \log_{10} 2|\xi|$:

- se $|\xi| = 0.5$ l'errore è nullo
- se $|\xi| < 0.5$ l'errore è negativo, se $|\xi| = 0$ è infinito
- se $|\xi| > 0.5$ l'errore è positivo



Studiando $|G|_{dB}$ si trova che per $|\xi| = \sqrt{2}/2$ esiste un punto di minimo. La pulsazione in questo punto è $w_n = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ la pulsazione di risonanza. Per valori piccoli di $|\xi|$ consideriamo $w_n = w_n$.

Considerando $G(s) = 1/(1 + \frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi w_n s)$, ci basta semplicemente ribaltare il grafico rispetto alle ascisse.

Possiamo ora studiare la somma delle varie componenti:

- per $w < \min(\zeta\tau_1, \zeta\tau_1, w_n, \omega_n)$ gli unici contributi significativi sono quelli dati dal guadagno 1_{VGB} e da 1_{SG}^{1dB}
- quando si incontra una singolarità l'effetto è lineare

Stabiliamo allora delle "regole" di tracciamento del grafico analogico del modulo:

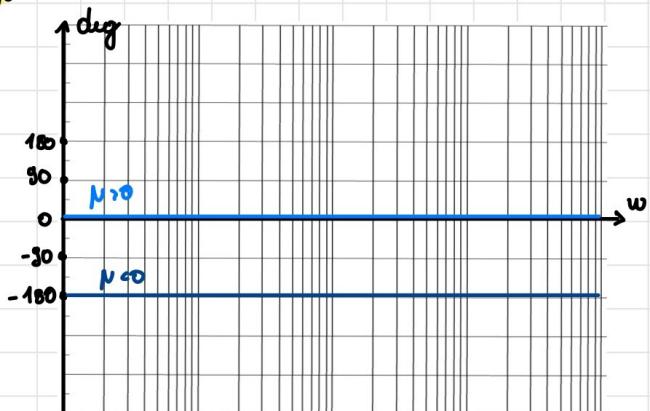
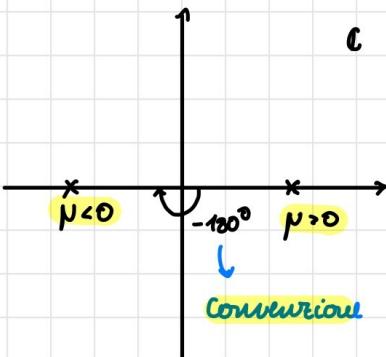
1. Il tratto iniziale ha pendenza $-g$ e in $w=1$ esso (o la sua prosecuzione) ha valore 1^{1dB}
2. In corrispondenza di uno zero con costante di tempo τ_1 la pendenza aumenta di $20dB/\text{deci}$ moltiplicato per la molteplicità dello zero
3. In corrispondenza di un polo con costante di tempo τ_1 la pendenza diminuisce di $20dB/\text{deci}$ moltiplicato per la molteplicità del polo.
4. In corrispondenza di pulsazioni naturali ω_n la pendenza aumenta di n unità pari al doppio della molteplicità della singolarità
5. In corrispondenza di pulsazioni naturali ω_n la pendenza diminuisce di n unità pari al doppio della molteplicità della singolarità

DIAGRAMMA DELLA FASE Consideriamo ancora una folt $G(s)$ in forma di Brode. Per le regole dei numeri complessi, sappiamo che lo spartimento del prodotto di numeri complessi è la somma degli spartimenti dei singoli numeri. Quindi nel caso della folt avremo:

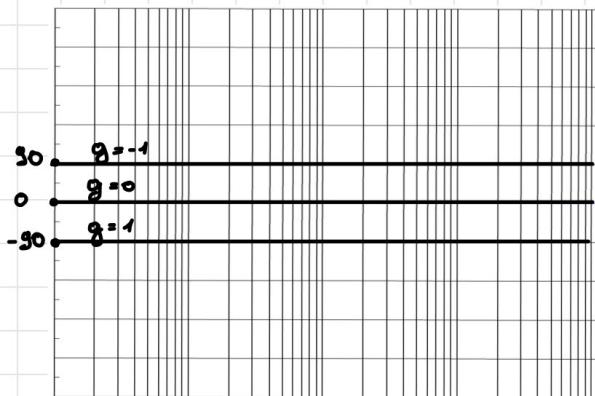
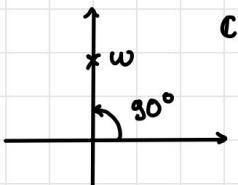
$$\Delta G(j\omega) = \Delta \mu + \sum \Delta [1 + j\omega \tau_i] + \sum \Delta \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2 j \frac{\xi_i}{\omega_{ni}} \omega \right] - \Delta [(j\omega)^g] - \sum \Delta [1 + j\omega \tau_i] - \sum \Delta \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2 j \frac{\xi_i}{\omega_{ni}} \omega \right]$$

Possiamo in questo caso studiare i singoli termini e dopo studiare la somma senza ricorrere ad espedienti come nel caso del modulo.

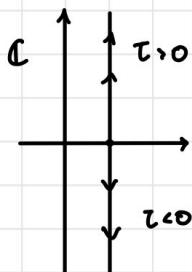
- $G_1(s) = N \Rightarrow \Delta G(j\omega) = \Delta \mu$



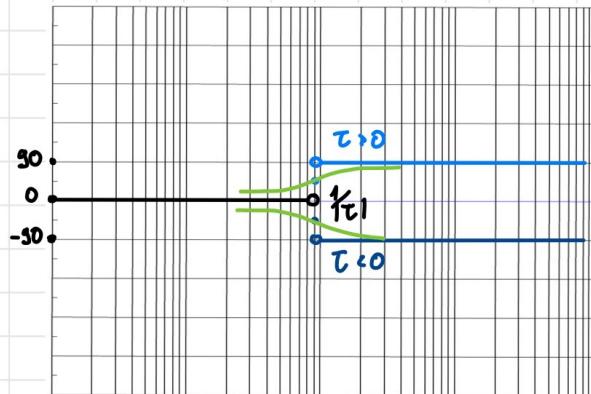
- $G(s) = s \Rightarrow G(j\omega) = j\omega \Rightarrow \Delta[(j\omega)^g] = g \Delta(j\omega) = g \cdot \frac{\pi}{2}$



• $G(s) = 1 + s\tau \Rightarrow G(j\omega) = 1 + j\omega\tau \Rightarrow \Delta G(j\omega) = \arctan(\omega\tau)$

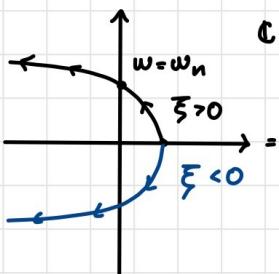


$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & \omega \leq \frac{\pi}{|\tau|} \\ \pm \frac{\pi}{2} & \omega > \frac{\pi}{|\tau|} \end{cases}$$

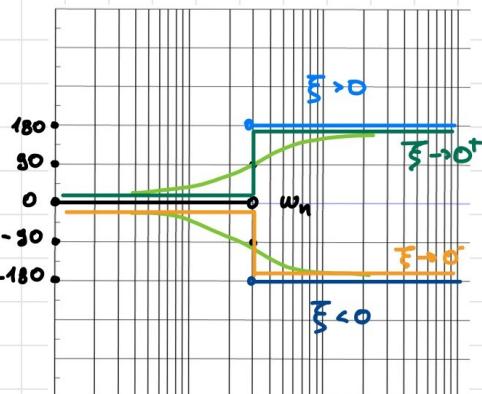


Nel caso della sottrazione ci basterà considerare l'inverso, ossia $-\Delta[1+s\tau]$. Una decade dopo le singolarità l'errore è di 5.7° .

• $G(s) = 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$



$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & \omega < \omega_n \\ \pi & \omega > \omega_n \wedge \xi > 0 \\ -\pi & \omega > \omega_n \wedge \xi < 0 \end{cases}$$



In questo caso l'errore causato dall'approssimazione non è facilmente calcolabile a causa della presenza di ξ . Nel caso della sottrazione, ci basta considerare il grafico come se avesse la ξ del senso opposto.

Possiamo adesso studiare la somma delle componenti. Il graffico somma sarà una linea costante a tratti con le seguenti caratteristiche:

- per w "piccoli" gli unici contributi saranno quelli di n e di $(jw)^n$

- man mano che si incontrano singolarità si aggiunge il loro effetto linearmente

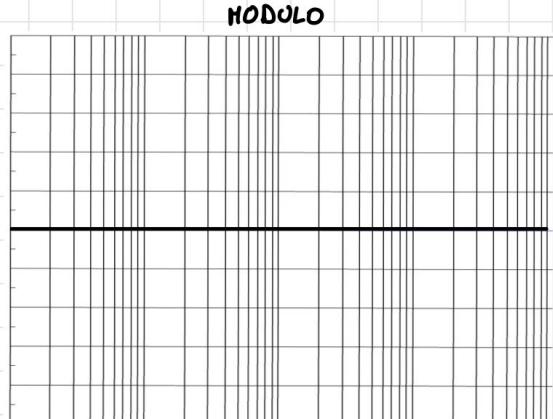
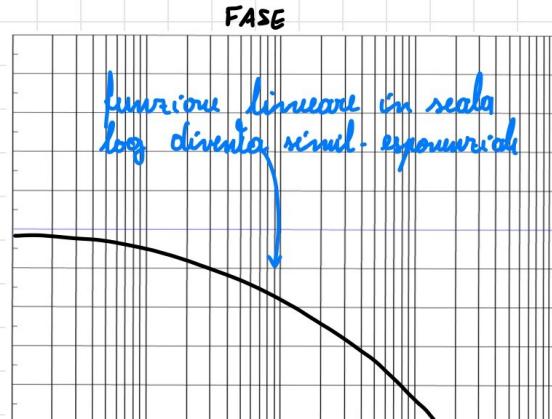
Enunciamo ora le "regole" di tracciamento del grafico asintotico della fase:

- il tratto iniziale ha ordinata $\approx \mu - \frac{\pi}{2} g$
- in corrispondenza di:
 - zero reale:
 - se $T > 0$ la fase aumenta di $\frac{\pi}{2}$
 - se $T < 0$ la fase diminuisce di $\frac{\pi}{2}$
 - polo reale:
 - se $T > 0$ la fase diminuisce di $\frac{\pi}{2}$
 - se $T < 0$ la fase aumenta di $\frac{\pi}{2}$
 - coppia di zero:
 - se $S > 0$ la fase aumenta di π
 - se $S < 0$ la fase diminuisce di π
 - coppia di poli:
 - se $\xi > 0$ la fase diminuisce di π
 - se $\xi < 0$ la fase aumenta di π



moltiplicato per la
moltiplicità della
singolarità

RITARDO DEL TEMPO Consideriamo $G(s) = e^{-st}$. Otterremo che $G(jw) = e^{-jw\tau}$. Il modulo di $G(jw)$ è 1, mentre la fase è $w\tau$ lineare proporzionale a w . Se volessi tracciare i diagrammi di Bode otteniamo:



CALCOLO ESPlicito DELLA FASE Perché l'errore del grafico orizzontale della fase è maggiore, può essere utile avere un modo per calcolare la fase esplicitamente.

$$\Delta G(j\omega) \cdot \Delta \nu - g^{\frac{R}{2}} + \sum \Delta [1 + j\omega \tau_i] - \sum \Delta [1 + j\omega T_i] + \\ + \sum \Delta [1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2 \xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}}] - \sum \Delta [1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2 \xi \frac{\omega}{\omega_{ni}}]$$

- $\Delta [1 + j\omega \tau_i] = \cotan(\omega \tau_i)$
- $\Delta [1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2 \xi \frac{\omega}{\omega_{ni}}] = \begin{cases} \cotan(\frac{\Im m}{\Re e}) & \omega < \omega_n \\ \cotan(\frac{\Im m}{\Re e}) + 180^\circ & \omega > \omega_n, \xi > 0 \\ \cotan(\frac{\Im m}{\Re e}) - 180^\circ & \omega > \omega_n, \xi < 0 \end{cases}$

6.11 Sistemi a fase minima

Un sistema viene detto a fase minima se:

- $N=0$
- le singolarità hanno tutte $\operatorname{Re}\{\cdot\} < 0$
- non ha ritardi

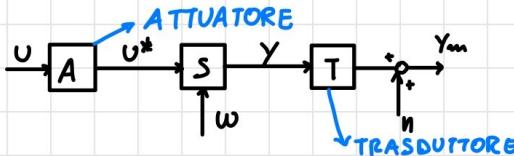
Se un sistema è a fase minima, allora il diagramma della fase può essere ricavato dal diagramma del modulo.

7 SISTEMI DI CONTROLLO

Fin ora abbiamo caratterizzato un sistema come ingresso - stato - uscita. Facciamo ora un passo in più: controlliamo il sistema. Controllare i sistemi significa manipolare gli ingressi affinché le uscite siano della forma desiderata. Per fare ciò dobbiamo rivedere la nostra schematizzazione.

7.1 Sistema

Nella nostra nuova schematizzazione, il sistema complessivo è così caratterizzato:

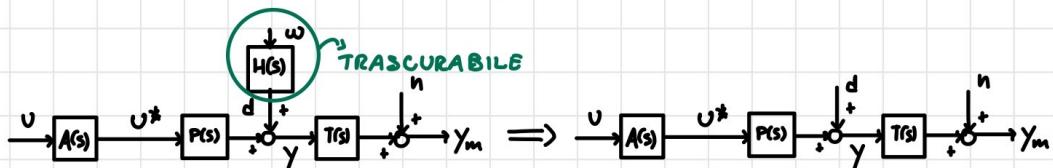


Con:

- $U(t)$: valore desiderato ingresso
- $w(t)$: disturbo (ingr. non manip.)
- $y(t)$: uscita da controllare
- $n(t)$: il rumore di misura
- $y_m(t)$: misura dell'uscita

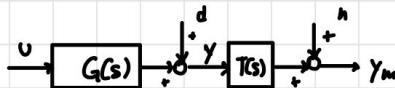
Oggiungiamo delle ipotesi per semplificare il tutto:

- LINEARITÀ: ci permette di applicare il PSE e quindi di individuare 2 FDT tra $U^* - y$ e $w - y$:

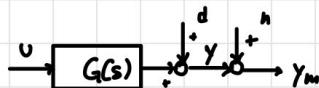


con $d(t)$ l'effetto del rumore sul nostro sistema. Poiché solitamente lo $H(s)$ è un filtro passa-basso, d è un segnale lento.

- Consideriamo la catena $A - P$ come una unica FDT $G(s)$:



- Consideriamo un rumore ben lontano e abbandoniamo veloci da poter trascurarne le dinamiche:



7.2 Fasi della modellizzazione di un sistema di controllo

Una volta fatto precisiamo che per sistema di controllo intendiamo sia il sistema da controllare che il controllore. Ora percorriamo i vari passi:

1. Descrizione delle dinamiche del sistema

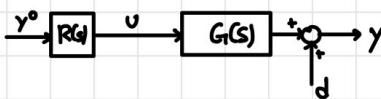
2. Lotta/corallorizzazione di sensori e attuatori
3. Corallorizzare $d(t)$ e $n(t)$
4. Corallorizzare i valori desiderati di $y(t)$: $y^*(t)$ o set-point

7.3 Schemi di controllo di riferimento

Abbiamo 2 possibili scelte: schema in anello aperto e schema in anello chiuso.

SCHEMA IN ANELLO APERTO

Questo schema prevede un controllore $R(s)$ a molla rispetto al sistema che definisce $v(t)$ in base a $y^*(t)$:



Il principale problema è che stiamo completamente trascurando la misura. Facendo qualche calcolo ottieniamo:

$$Y(s) = R(s)G(s)Y^*(s) + D(s) \Rightarrow y(t) = R(s)G(s)y^*(t) + d(t)$$

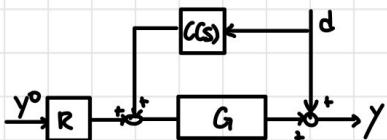
Affinché si abbia $y(t) = y^*(t)$, trascurando $d(t)$, bisogna avere che $R(s) = 1/G(s)$. Possiamo notare qualche problema:

- Può essere che $G(s)$ non sia forse minima. Per esempio
 - se G ha zeri con parte reale positiva causiamo l'instabilità di $R(s)$ e del sistema, poiché introduciamo un polo instabile per poi renderlo narcotico (**cancellazione non lucida**)
 - se G è instabile stiamo semplicemente narcotizzando l'instabilità (**cancellazione non lucida**)
- Supponiamo il controllore è progettato su un modello "nominale" (semplificato) $G^*(s)$ leggermente diverso da G . Considerando $G(s) = G^*(s) + \Delta G(s)$, ottieniamo:

$$R = \frac{1}{G^*(s)} \Rightarrow y(t) = R(s)G(s)y^*(t) = \frac{1}{G^*(s)}(G^*(s) + \Delta G(s))y^*(t) = y^*(t) + \frac{\Delta G(s)}{G^*(s)}y^*(t)$$

Quindi lo schema in anello aperto non è in grado di attenuare le incertezze di modello.

- Come visto prima, lo schema in anello aperto non può nemmeno attenuare il disturbo d . Se $d(t)$ è misurabile, possiamo attenuarlo con un compensatore:



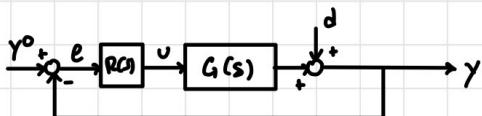
$$y(t) = R(s)G(s)y^0(t) + (1 + G(s)C(s))d(t)$$

$$\hookrightarrow \text{CASO IDEALE: } C(s) = -\frac{1}{G(s)}$$

problemi con fase non minima

- Se $G(s)$ è instanciata propria, $R(s)$ risulterebbe non propria. Il problema è risolvibile considerando $R(s)G(s) = 1/(1 + \frac{1}{T_{\text{RC}}})$, un filtro passa-basso con banda molto ampia da avere un transitorio molto veloce e accettabile.

SCHEMA IN ANELLO CHIUSO È uno schema retroazionato così strutturato (trascurriamo $n(t)$):



$e(t)$: errore di controllo

Il vantaggio dello schema retroazionario è che ci permette di stabilizzare i sistemi instabili. Calcoliamo $y(t)$ usando il PSE:

funzione di sensibilità comp.

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^0}{d} & \rightarrow F(s) = \frac{\text{F. ANDATA}}{1 + L(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \\ \frac{d}{d} & \rightarrow S(s) = \frac{\text{F. ANDATA}}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} y(t) &= F(s)y^0(t) + S(s)d(t) \\ & \text{funzione di sensibilità} \end{aligned}$$

Abbiamo innanzitutto bisogno che $F(s) \neq 0$ e $S(s) \neq 0$ per avere FDT di sistemi asintoticamente stabili. Inoltre vorremmo che $y \approx y^0$, cosa possibile solo solitamente per $F(s) = 1$ e $S(s) = 0$. Possiamo, però, andare

vicino. Poiché y_0 è un segnale lento, per ottenere l'effetto " $F(s) = 1$ " poniamo F pari ad un filtro passa-basso con banda maggiore rispetto a y_0 , rilassando la condizione α : $|F(s)| = 1$ è il segnale $y^*(t)$. Possiamo fare il complementare per ottenere $S(s)$, considerando un filtro passa-alto. Grazie alla complementarietà di F e S possiamo realizzare il tutto senza infrangere le leggi della fisica.

7.4 Requisiti dei sistemi di controllo

1) Circitotica stabilità

1) Prestazioni statiche: a regime $y(t) \rightarrow \bar{y}_0$ per $t \rightarrow +\infty$. Il punto viene rilassato in $|y(t) - \bar{y}_0| < \epsilon$

2) Prestazioni dinamiche:

- tempo di assettamento
- sovraetensione percentuale massima

3) Attenuazione dei disturbi e dei rumori

Questi requisiti li richiederemo sia in condizioni nominali che perturbate.

7.5 Analisi dei sistemi di controllo

7.5.1 Circitotica stabilità

Consideriamo un sistema controllato con schema ad anello chiuso.

Prestabilmente avevamo già i contributi di y^* e di all'urto.

Consideriamo ora anche la presenza di $n(t)$. Allora:

$$\frac{y(t)}{n(t)} = - \frac{L(s)}{1 + L(s)} = - F(s)$$

La stabilità del sistema può essere, così, ricondotta allo studio di

$$P_L = N_L(s) + D_L(s)$$

$N_L(s)$ = numeratore di L
 $D_L(s)$ = denominatore di L

Poiché P_i è un polinomio caratteristico possiamo applicare diversi metodi:

1) METODO DIRETTO: calcolo dei poli o criterio di Routh. I problemi di questo metodo sono:

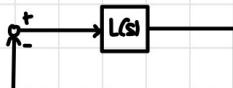
- non ci permette di capire quanto è robusta la stabilità rispetto alle incertezze di modello
- non ci fornisce elementi per il progetto

2) METODI INDIRETTI: sono dei metodi grafici che analizzano $L(s)$. Essi ci possono dare spunti sia sul progetto sia sulla robustezza del modello.

CRITERIO DI NYQUIST Esso misura il tracciamento del diagramma di Nyquist, ossia un diagramma che traccia l'andamento in \mathbb{C} dei valori di $L(s)$ dove s prende valori sul cosiddetto "percorso di Nyquist". Per percorso di Nyquist intendiamo una linea chiusa nel piano \mathbb{C} che ingloba tutto l'asse immaginario, chiudendosi all'infinito includendo il semipiano destro. Se $L(s)$ ha poli sull'asse immaginario, il percorso di Nyquist compie delle semicirconvenze di raggio ϵ infinitesimo (verso dx) intorno ai poli stessi. Il percorso ha verso di percorrenza concorde con la crescita di w . Giacché ci aspettiamo che il diagramma di Nyquist sia una linea chiusa con verso crescente w e w crescente. Esistono delle regole per il tracciamento del diagramma di Nyquist. Noi vedremo solo quelle per il tracciamento a partire dai diagrammi di Brode. Per tracciare il diagramma di Nyquist a partire da quello di Brode dobbiamo in pratica tradurre nel piano complesso i grafici di modulo e fase e poi aggiungere il suo riflesso rispetto all'asse reale. Uniamo i vari punti notevoli come $L(0)$, $|L(s)| w \rightarrow \infty$ e vari zeri del modulo come riferimenti (ricorda che il diagramma di Brode è in scala semiologaritmica !!). Se otteniamo un arco di cerchio verticale, dobbiamo inoltre ricordarci di collegarlo con $|L(0)|$. Possiamo ora enunciare il criterio di Nyquist:

PROPOSIZIONE - CRITERIO DI NYQUIST Considerando il sistema $\textcircled{*}$

retroazionario, si tracci il suo diagramma di Nyquist. Si definiscono p il numero di poli di $L(s)$ con $\text{Re}[s] > 0$ e n il numero di giri compiuti intorno al punto -1 ($n > 0$ se il senso è antiorario e $n < 0$ viceversa; n infinito se si passa per -1). Il sistema è os. stabile se $p=n$.



Se il sistema è in retroazione positiva, considereremo i giri intorno a $+1$. Se il sistema riceverà un guadagno K , anche qui non c'è variazione se non per il considerare i giri di $L(s)$ intorno a $\pm \frac{1}{K}$

STABILITÀ ROBUSTA Ci occupiamoci ora di analizzare la stabilità rispetto alle incertezze del modello. Consideriamo che fatti: $L^0(s)$, la funzione del cerchio nominale, e $L(s)$, la funzione del cerchio reale. Noi faremo riferimento ad incertezza di tipo moltiplicativo, ossia considereremo $L(s) = \Delta(s)L^0(s)$. Considereremo due ipotesi sull'incertezza di modello:

1. $\Delta(s)$ non ha poli positivi ($p=0$)
2. $\Delta(s)$ è limitata in modulo.

Quando facciamo la robustezza tramite due parametri: l'incertezza di guadagno e quella di fase.

INCERTEZZA DI GUADAGNO Supponiamo che $\Delta(s) = K$, $K \geq 1$ e che

1. $L^0(s)$ non ha poli instabili
2. $L^0(s)$ sia strettamente propria
3. Il guadagno è positivo
4. Il diagramma polare (metà del diagramma di Nyquist) attraversa il semiasse reale negativo in un solo punto

La prima ipotesi ci garantisce il diagramma di Nyquist di $L^0(s)$

sarà a destra di -1 poiché, per il criterio di Nyquist, per avere as. stabilità $n = p = 0$. La seconda ipotesi ci garantisce che il diagramma polare finirà nell'origine. Inoltre, grazie alla terza ipotesi sappiamo che il punto di origine del diagramma sarà sul semiasse positivo. L'ultima ipotesi ci garantisce, infine, che il diagramma polare farà solo un giro, rendendo il diagramma di Nyquist relativo contenuto in un intervallo definito.

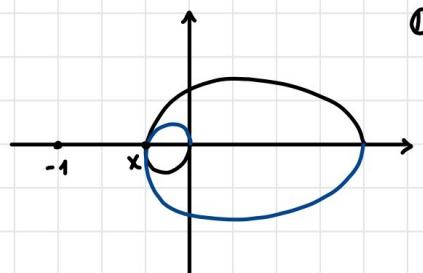
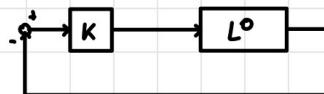


Diagramma di Nyquist di $L^0(s)$
che rispetta le ipotesi.

Poiché il nostro sistema reale è modellizzato da:



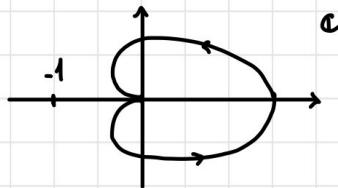
Per l'estensione del criterio di Nyquist, esso sarà stabile se, $n = p = 0$ intorno al punto $-\frac{1}{K}$. Chiamando x il punto di attraversamento del semiasse neg., ricaviamo la condizione $-\frac{1}{K} < x$ per l'as. stabilità. Elaborandola ottieniamo:

$$-\frac{1}{K} < x \rightarrow |x| < \frac{1}{K} \rightarrow K < \frac{1}{|x|} = K_m$$

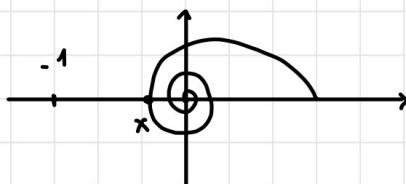
Ottienendo il margine di guadagno. Più alto sarà K_m , più robusto sarà il sistema rispetto a incertezze di guadagno.

Proviamo a rilassare l'ultima ipotesi:

1) Nessun attraversamento del semiasse negativo: $\text{Im } \omega$ può essere infinito poiché $\omega = 0$



2) Più attraversamenti del semiasse negativo: consideriamo ω come l'attraversamento con ascissa minore

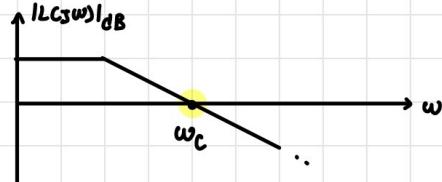
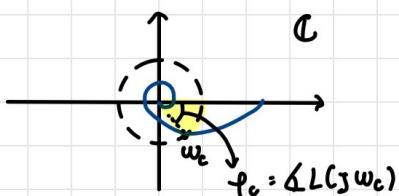


Con degli accorgimenti possiamo, quindi, rimuovere quest'ultima ipotesi

INCERTEZZA DI FASE Consideriamo $\Delta(s) = e^{-\delta \phi}$. Stiamo considerando un effetto analogo a quello introdotto dal ritardo. Anche qui, poniamo le opportune ipotesi:

1. $L^*(s)$ abbia $\rho = 0$
2. $L^*(s)$ sia strettamente propria
3. Il guadagno reale maggiore di 1
4. Il diagramma polare attraversi la circonferenza di raggio 1 in uno e un solo punto

Un diagramma di Nyquist che rispetta queste ipotesi è il seguente:



Con w_c la frequenza di taglio (critica) e φ_c la fase critica. Possiamo osservare che se $|\varphi_c| < 180^\circ$ avremo stabilità del nonimale e per $|\varphi_c| \geq 180^\circ$ avremo, ovviamente, instabilità. Consideriamo ora l'incertezza. Possiamo scrivere φ_c come $\varphi_c = \varphi_c^0 - \Delta\varphi$ con $\Delta\varphi > 0$. Applicando lo stesso ragionamento otteniamo che:

$$|\varphi_c| = |\varphi_c^0 - \Delta\varphi| < 180^\circ \rightarrow |\varphi_c^0| + |\Delta\varphi| < 180^\circ \rightarrow |\Delta\varphi| < 180^\circ - |\varphi_c^0| \Leftrightarrow \varphi_m$$

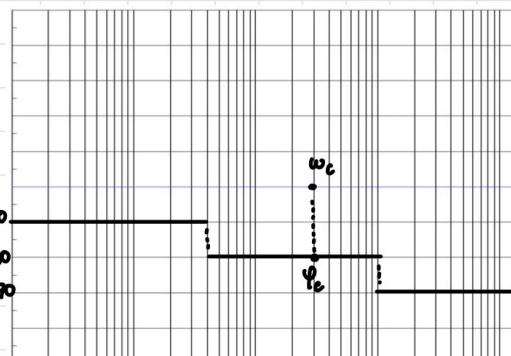
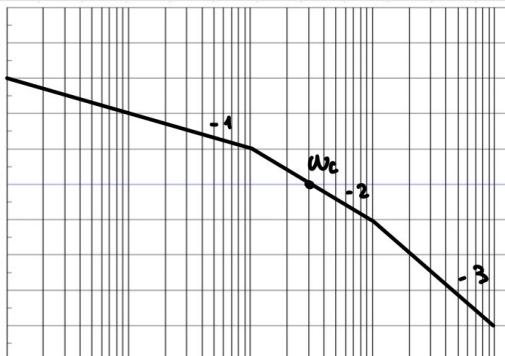
Ottieniamo così il margine di fase. Più grande è φ_m , più robusto sarà il sistema rispetto a incertezze di fase.

Proviamo a rilassare, anche qui, l'ultima ipotesi:

- 1) Non c'è attraversamento: il guadagno è compreso tra 0 e 1 e quindi non sono definibili né w_c né φ_c . Possiamo per convenzione $\varphi_m = +\infty$
- 2) Ci sono più attraversamenti ma $n=0$: posso ancora definire φ_c . Consideriamo la φ_c più vicina a 180° (in modulo).

NOTA BENE: Incertezza di modulo e di fase non sempre bastano per garantire la robustezza. Considerati sempre insieme e come una "condizione necessaria".

CALCOLO DELLE INCERTEZZE Il modo più semplice per calcolare φ_m e φ_c è osservando i diagrammi di Bode.



Consideriamo due tipici diagrammi di Bode. Il margine di fase è definito come $\Phi_m = 180 - |P_c| = 180 - |\text{Im}[\text{L}(j\omega_c)]|$ con $|\text{Im}[\text{L}(j\omega_c)]| = 0$. La frequenza di taglio è facilmente individuabile sul diagramma. Il resto dei passaggi è banale. Il problema principale è causato dall'approssimazione del nostro diagramma circuituale. Il diagramma del modulo è altrettanto preciso, quello della fase però no. L'iamo quindi costretti ad usare l'espressione analitica della fase. Passiamo al calcolo di Φ_m . Esso è definito come $\Phi_m = \text{Im}[\text{L}(j\omega\pi)]$ dove $\text{Im}[\text{L}(j\omega\pi)] = -180^\circ$. Il problema è di nuovo, il diagramma della fase: abbiamo un intero intervallo di valori in cui la fase è -180° . L'iamo, perciò, costretti ad andare a tentativi per trovare $\omega\pi$.

CRITERIO DI BODE È il secondo dei criteri indiretti. Esso si basa sullo studio dei diagrammi di Bode ed è solamente sufficiente per l'as. stabilità. Il criterio di Bode ha alcune condizioni di applicabilità:

0. $L(s)$ deve avere proprietà \leftarrow ipotesi che semplifica l'analisi
1. $p=0$ (p definito come prima)
2. Esiste solo un attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma del modulo.

PROPOSIZIONE - CRITERIO DI BODE

Consideriamo il sistema ad anello chiuso



Se le condizioni di applicabilità sono verificate, allora il sistema è circuitualmente stabile se e solo se sono verificate:

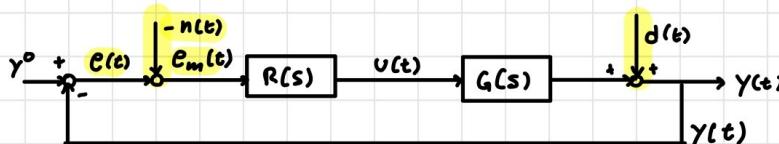
1. $n > 0 \leftarrow$ quadruo generale
2. $\Phi_m > 0$

OSSERVAZIONE Se $L(s)$ è a fase minima sappiamo che possiamo ricavare il diagramma di fase del modulo: se $n=0$, la fase iniziale sarà -90° , per ogni polo la variazione della fase è di

-90° e per ogni zero la variazione sarà $+90^\circ$. In l'attraversamento dell'asse a 0 dB avviene con una penditura di $-p$, allora la differenza tra il numero di poli e quello di zeri sarà proprio p , rendendo $\varphi_c = -90^\circ \cdot p$. Questo ci permette di scrivere $\varphi_m = 180 - 90 \cdot p$. Tuttavia $\varphi_m > 0$, $p=1$ quindi l'attraversamento dovrà avere penditura -1 .

7.5.2 Prestazioni dei sistemi di controllo

Rigoriamo il sistema:



Abbiamo così evidenziato $e_m(t)$, l'errore di controllo. Possiamo, quindi, dividere le variabili in esogene e d'interesse:

ESOGENE	INTERESSE
$y^o(t)$	$y(t)$
$d(t)$	$e(t)$
$n(t)$	$u(t)$

Possiamo legare i due gruppi di variabili con:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ E(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^o(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

$$Q(s) = \frac{P}{1+L} \text{ funzione di sensibilità del controllo}$$

PRESTAZIONI STATICHE Abbiamo detto che un sistema gode di buone prestazioni statiche se $y(t) \rightarrow \bar{y}^o$ per $t \rightarrow +\infty$ oppure $|y(t) - \bar{y}^o| \leq \epsilon$ arbitrariamente. Abbiamo, quindi, guardare come varia $F(s)$. Ricordiamo anche che rientra sotto ipotesi di as. stabilità del sistema, quindi $F(s)$ ha solo poli con parte reale negativa e quindi $F(0)$,

ossia il guadagno statico, è ben definito. Sotto queste ipotesi le nostre condizioni saranno:

$$y(t) \rightarrow F(0) \bar{y}^0 \quad t \rightarrow +\infty$$

(Quindi più $F(0)$ è lontana da 1, peggiori saranno le performance statiche). Studiamo $F(0)$:

$$F(0) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L}{s^q} \frac{\pi_i (1+s\tau_i) \pi_L (1+2\frac{s}{\alpha_i} s + \frac{s^2}{\alpha_i^2})}{\pi_i (1+s\tau_i) \pi_L (1+2\frac{s}{\beta_{w_i}} s + \frac{s^2}{\beta_{w_i}^2})}$$

\hookrightarrow tende a 1 per $s \rightarrow 0$

$$\Rightarrow F(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N_L / s^q}{1 + N_L / s^q} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N_L}{N_L + s^q} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \\ \frac{N_L}{1+N_L} & \text{se } q=0 \\ 0 & \text{se } q < 0 \text{ N.A.} \end{cases}$$

Nel caso $q=0$, poiché $N_F = N_L / (1+N_L)$ se N_L è abbastanza alto, il guadagno $N_F \approx 1$. Più in generale avremo che $c(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, oppure $|c(t)| < \varepsilon$, a fronte delle variabili esogeni $y^0(t)$, $d(t)$ e $n(t)$. Considereremo meglio questo caso generale:

$$E(s) = S(s) Y^0(s) - S(s) D(s) + F(s) N(s)$$

$$= C_1 \frac{S(s)}{s^{r_1}} - C_2 \frac{S(s)}{s^{r_2}} + \frac{F(s)}{s^{r_3}}$$

$\overset{\downarrow}{E_1} \quad \overset{\downarrow}{E_2} \quad \overset{\downarrow}{E_3}$

$$\Rightarrow \text{per teo. risposta finale: } E_i(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s)}{s^{r_i-1}} = \dots =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{q-r_i+1}}{s^q + N_L}$$

\Rightarrow disturbo costante

$$\pi_i = 1 \Rightarrow e_i(\infty) = \frac{s^q}{s^q + N_L} = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 0 \\ \frac{1}{1+N_L} & \text{se } q = 0 \\ \text{N.A.} & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

Quindi i disturbi costanti ($\pi_i = 1$) sono attenuabili dal tutto dal sistema di controllo. Nel caso di disturbi non costanti ($\pi_i > 1$) otteniamo

$$\pi_i > 1 \Rightarrow e_i(\infty) = \frac{s^q \cdot \pi_i + 1}{s^q + N_L} = \begin{cases} 0 & \text{se } q > \pi_i - 1 \\ \frac{1}{N_L} & \text{se } q = \pi_i - 1 \\ \infty & \text{se } q < \pi_i - 1 \end{cases}$$

Analizziamo $E_3(s)$:

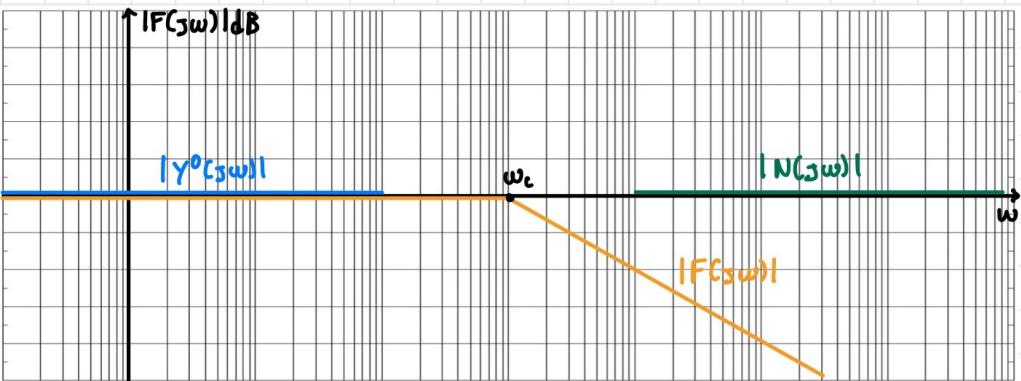
$$\Rightarrow \text{per teo. risposta finale: } e_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F(s)}{s^{n_3}} = \dots = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N_L}{s^q + N_L} \frac{1}{s^{n_3-1}}$$

$$\Rightarrow e_3(\infty) = \begin{cases} N_L / 1 + N_L & q = 0 \leftarrow \text{senza da farre} \\ 1 & q > 0 \\ \infty & n_3 > 1 \leftarrow \text{senza colpo} \end{cases}$$

Il sistema non è, quindi, tollerante a guasti nell'attuatore.

PRESTAZIONI DINAMICHE E ATTENUAZIONE DI $n(t)$ Se si vuole analizzare la relazione dinamica tra y e y^* studieremo $F(s)$. Poiché $F(s)$ lega anche y e N , studieremo anche questa relazione come "effetto collaterale".

In generale y^* e N sono in due bande separate: y^* è lento mentre N è veloce. In generale mi aspetto che il diagramma del modulo di $F(j\omega)$:



$$\Rightarrow |F(jw)| = \frac{|L(jw)|}{|1 + L(jw)|} = \begin{cases} 1 \text{ dB} = 0 & w < w_c \\ |L(jw)| \text{ dB} & w > w_c \end{cases}$$

APPROX.
↳ in ipotesi di out. di Brodi

È quindi importante che w_c stia a metà tra le due bande in modo da non eliminare Y^o e ottenere N . Se $|F(jw)|$ rispetta questi criteri, allora sarà in grado di seguire Y^o . Con quale tempo di osservamento vorrà, però, seguire Y^o e con quale regolarità? Per trovare questi due parametri studiamo l'approssimazione ai poli dominanti della risposta allo scalino:

- se $\varphi_m > 75^\circ$ approssimiamo $F(s)$ con una funzione del primo ordine:

$$F(s) = N_F / (1 + \frac{s}{w_c})$$

- se $\varphi_m < 75^\circ$ approssimiamo $F(s)$ con una funzione del secondo ordine:

$$F(s) = N_F / \left(1 + 2 \frac{\xi_F}{w_c} s + \frac{s^2}{w_c^2} \right) \quad \text{con } |F(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{2 \xi_F}}$$

$$= \frac{|L(jw_c)|}{|1 + L(jw_c)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\varphi_m}}}$$

$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \varphi_c}} = \dots =$$

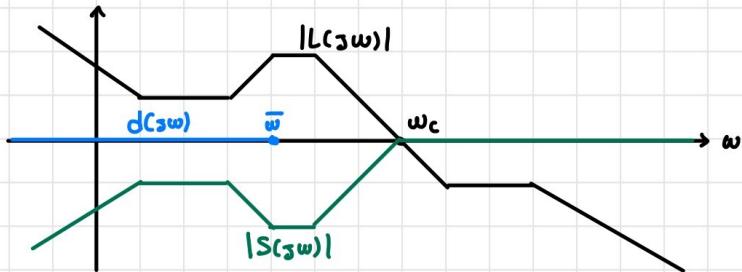
$$= \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \varphi_m}} = \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 + 2(-1 + 2 \sin \frac{\varphi_m}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \sin \frac{\varphi_m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\varphi_m}{2}}$$

$\hookrightarrow \xi_F = \tan \frac{\varphi_m}{2} \sim \xi_F = \frac{\varphi_m}{100}$

↳ in gradi

ATTENZIONE DI $d(t)$ In questo caso dobbiamo considerare la forma di $S(s)$. In generale $d(t)$ è un segnale lento, perciò $S(s)$ dovrà esercitare un fattore di attenuazione sulla banda di $d(t)$. Al di fuori di tale, non ci interessa. L'ideale è che $S(s)$ sia un filtro passa-alto. Quand'eravamo $S(s)$ scopriamo che effettivamente abbiamo un passa-alto:



$$S(s) \cdot \frac{1}{1+L(s)} \Rightarrow |S(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

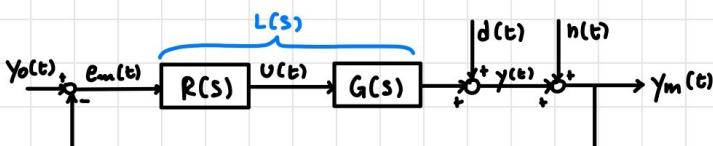
Affinché ci sia **attenuazione**, deve essere $\omega_c > \bar{\omega}$. In ω_c come possiamo approssimare?

$$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1+L(j\omega_c)|} = |F(j\omega_c)|$$

Ricordando, applichiamo il **teorema della risposta in frequenza**:

- $d(t) = A \sin(\omega_d t) \Rightarrow y(t) = A |S(j\omega_d)| \sin(\omega_d t + \delta S(j\omega_d))$
↳ se $\omega_d < \omega_c$: $S(j\omega_d) = \frac{1}{|L(j\omega_d)|}$
- $n(t) = A \sin(\omega_n t) \Rightarrow y(t) = A |F(j\omega_n)| \sin(\omega_n t + \delta F(j\omega_n))$
↳ se $\omega_n > \omega_c$: $F(j\omega_n) = |L(j\omega_n)|$

RIASSUNTO Consideriamo il sistema di controllo:



Ricordando che $e(t) = y^o(t) - y(t)$ è l'errore di controllo.

1) Se $\mathcal{L}(y^o(t)) = \frac{1}{s^n}$:

$$\boxed{n=1} \quad e_{n0} = \begin{cases} 0 & g > 0 \\ \frac{1}{1+\mu_c} & g = 0 \end{cases} \quad \boxed{n \geq 1} \quad e_{n0} = \begin{cases} 0 & g > n-1 \\ \frac{1}{\mu_c} & g = n-1 \\ \infty & 0 \leq g < n-1 \end{cases}$$

2) Per capire la risposta di $y(t)$ a $y^o(t) = \text{real}(t)$

$$d(t) = n(t) \cdot 0$$

$$F(s) = \begin{cases} \frac{\mu_r}{1 + \frac{s}{\omega_c}} & \varphi_m > 75^\circ \\ \frac{\mu_r}{1 + \frac{s^2 \xi_F}{\omega_c} s + \frac{s^2}{\omega_c^2}} & \varphi_m < 75^\circ \\ \quad \downarrow \quad \xi_F \approx \varphi_m / 100 \end{cases}$$

$$N_F = \begin{cases} 1 & g = 0 \\ \mu_c / (1 + \mu_c) & g > 0 \end{cases}$$

Se $\varphi_m > 75^\circ$, avremo $T_{ass} = 5/\omega_c$ e $S\% = 0$. Se $\varphi_m < 75^\circ$ avremo $T_{ass} = 5 \tau = \frac{5}{\xi_F \omega_c}$ e $S\% = 100 \exp \left\{ - \xi_F \pi / \sqrt{1 - \xi_F^2} \right\}$ con un periodo di oscillazione pari a $T_p = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi_F^2}}$.

3) ATTENUAZIONE E DISTURBI Ricordando che $S(s) = Y(s)/D(s)$ e $F(s) = Y'(s)/N(s)$, applichiamo il teorema della risposta in frequenza

$$d(t) = A \sin(\omega_c t) \Rightarrow y(t) = A |S(j\omega_c)| \sin(\omega_c t + \Delta S(j\omega_c))$$

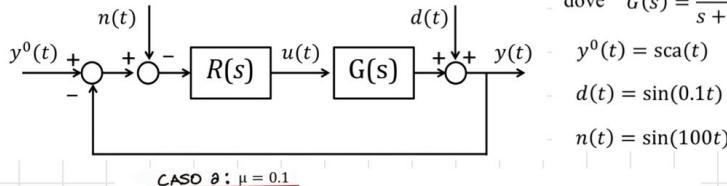
↳ se $\omega_c < \omega_h$: $S(j\omega_c) = \frac{1}{1 + L(j\omega_c)}$

$$n(t) = A \sin(\omega_h t) \Rightarrow y(t) = A |F(j\omega_h)| \sin(\omega_h t + \Delta F(j\omega_h))$$

↳ se $\omega_h > \omega_c$: $F(j\omega_h) = 1 + L(j\omega_h)$

ESEMPI

Si consideri lo schema:

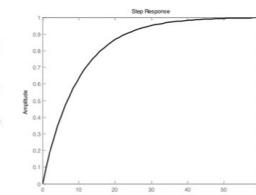
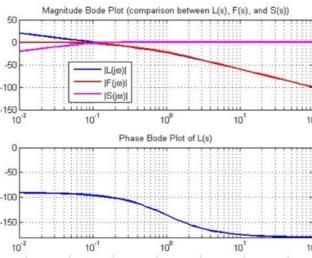


- $g = 1, \mu_F = 1.$
- $\omega_c \cong 0.1 \text{ rad/s}$
- $\varphi_c \cong -95.7^\circ, \varphi_m \cong 84.3^\circ > 75^\circ$

$$F(s) \cong \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c} = \frac{1}{1 + 10s}$$

$$y^0(t) = \text{sca}(t)$$

Risposta allo scalino



$$y_\infty = 1$$

$$T_{a1} \cong \frac{5}{\omega_c} = 50 \text{ s}$$

$$d(t) = \sin(0.1t) \quad |S(j0.1)| \cong \frac{1}{|L(j0.1)|} = -3 \text{ dB} \cong 0.7$$

$$n(t) = \sin(100t) \quad |F(j100)| \cong |L(j100)| = -100 \text{ dB} \cong 10^{-5}$$

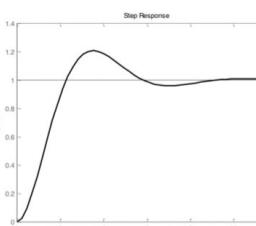
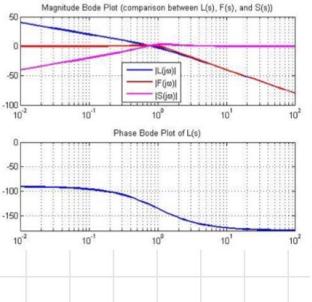
CASO b: $\mu = 1$

- $g = 1, \mu_F = 1.$
- $\omega_c \cong 1 \text{ rad/s}$
- $\varphi_c \cong -135^\circ, \varphi_m \cong 45^\circ < 75^\circ$

$$F(s) \cong \frac{1}{1 + 0.9s + s^2}$$

$$y^0(t) = \text{sca}(t)$$

Risposta allo scalino



$$\begin{aligned} & y_\infty = 1 \\ & S\% = 20\% \\ & T_{a1} = 11 \text{ s} \\ & T_p = 7 \text{ s} \end{aligned}$$

$$d(t) = \sin(0.1t) \quad |S(j0.1)| \cong \frac{1}{|L(j0.1)|} = -20 \text{ dB} \cong 0.1$$

$$n(t) = \sin(100t) \quad |F(j100)| \cong |L(j100)| = -80 \text{ dB} \cong 10^{-4}$$

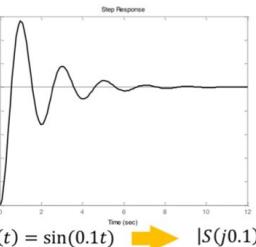
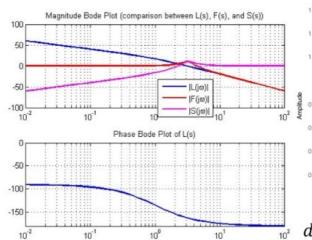
CASO c: $\mu = 10$

- $g = 1, \mu_F = 1.$
- $\omega_c = 3.16 \text{ rad/s}$
- $\varphi_c \cong -162^\circ, \varphi_m \cong 18^\circ < 75^\circ$

$$F(s) \cong \frac{1}{1 + 0.1138s + 0.1s^2}$$

$$y^0(t) = \text{sca}(t)$$

Risposta allo scalino



$$\begin{aligned} & y_\infty = 1 \\ & S\% = 56\% \\ & T_{a1} = 8 \text{ s} \\ & T_p = 2 \text{ s} \end{aligned}$$

$$d(t) = \sin(0.1t) \quad |S(j0.1)| \cong \frac{1}{|L(j0.1)|} = -40 \text{ dB} \cong 0.01$$

$$n(t) = \sin(100t) \quad |F(j100)| \cong |L(j100)| = -60 \text{ dB} \cong 10^{-3}$$

$$\text{dove } G(s) = \frac{1}{s+1} \quad R(s) = \frac{\mu}{s} \quad L(s) = \frac{\mu}{s(s+1)}$$

Risposta allo scalino?

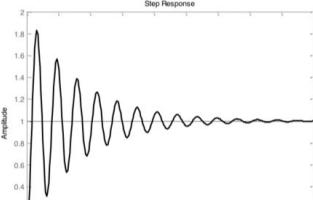
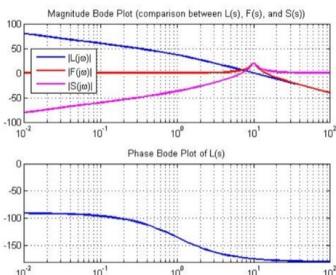
Attenuazione dei disturbi?

- $g = 1, \mu_F = 1.$
- $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$
- $\varphi_c \approx -174^\circ, \varphi_m \approx 6^\circ < 75^\circ$

$$\Rightarrow F(s) \cong \frac{1}{1 + 0.012s + 0.01s^2}$$

$$y^0(t) = \text{sca}(t)$$

Risposta allo scalino



- $y_\infty = 1$
- $S\% = 83\%$
- $T_{a1} = 8.33 \text{ s}$
- $T_p = 0.6 \text{ s}$

$$d(t) = \sin(0.1t) \Rightarrow |S(j0.1)| \cong \frac{1}{|L(j0.1)|} = -60 \text{ dB} \cong 0.001$$

$$n(t) = \sin(100t) \Rightarrow |F(j100)| \cong |L(j100)| = -40 \text{ dB} \cong 10^{-2}$$

7.6 Progetto dei sistemi di controllo

Il progetto di un sistema di controllo può essere diviso in 3 diverse fasi:

- Definizione di **requisiti e specifiche** (T_{ass} , $S\%$, perturbazioni statiche, attenuazione di $d(t)$ e $n(t)$)
- Graduzione dei requisiti in proprietà di $L(s)$.
- Individuare l'insieme di $L(s)$ che possiedono le proprietà richieste
- Trovare $R(s)$ tale che $R(s)G(s) = L(s)$

7.6.1 Graduzione dei requisiti

STABILITÀ Poiché tutti i conti che abbiamo fatto li abbiamo fatti in ipotesi di applicabilità del criterio di Bode, possiamo usarlo per verificare la stabilità. Le 3 ipotesi sono:

- $L(s)$ strettamente propria
- $\rho = 0$
- $|L(j\omega)| \text{dB}$ attraversa le assisse in un solo punto.

Purtroppo non è possibile sempre rispettarlo. Infatti, $R(s)$ non deve effettuare cancellazioni non lineari sulle singolarità di $G(s)$, ossia di singolarità con $\text{Re}\{\cdot\} \geq 0$. Tuttavia $R(s)$ può, quindi, avere poli con $\text{Re}\{\cdot\} \geq 0$. La terza ipotesi, inoltre, ci impone che $L(s)$ non abbia zeri nell'origine. Garantisce ciò, $L(s)$ deve rispettare il criterio di Bode, ossia:

$$\begin{cases} \mu_L > 0 \\ \rho_m > 0 \end{cases}$$

PRESTAZIONI STATICHE Sia $\tilde{\alpha}(y^*(t)) = c/s^n$. Supponiamo di richiedere che $e_\infty = 0$ o $|e_\infty| < \bar{e}$: (vedi anche per $\tilde{\alpha}(d(t)) = c/s^n$)

	$c_{\text{scalt}}(t)$	$c_{\text{ram}}(t)$	$c_{\text{pare}}(t)$
$g_L = 0$	$c \cdot \frac{1}{1+\mu_L}$	$+\infty$	$+\infty$
$g_L = 1$	0	c/μ_L	$+\infty$
$g_L = 2$	0	0	c/μ_L
$g_L = 3$	0	0	0



TEMPO DI ASSESTAMENTO E SOVRAELONGAZIONE Supponiamo che ci venga chiesto $T_{\text{ass}} \leq \bar{T}$ e $S\% \leq \bar{S}$. Consideriamo la nostra approssimazione più dominante:

$$\rho_m = 75^\circ$$

$$T_{\text{ass}} = \frac{\bar{\delta}}{w_c} \Rightarrow w_c \geq \frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}$$

$$S\% = 0$$

$$0 < \rho_m < 75^\circ$$

$$T_{\text{ass}} = \frac{\bar{\delta}}{\xi_F w_c} \Rightarrow w_c \rho_m / 100 \leq \frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}$$

$$S\% = 100 \exp \left\{ - \xi_F \pi / \sqrt{1 - \xi_F^2} \right\} \leq \bar{S} \rightarrow \text{ambo i numeri} \leq 1$$

$$\rightarrow \xi_F \pi / \sqrt{1 - \xi_F^2} \geq |\ln \frac{\bar{S}}{100}|$$

$$\rightarrow \xi_F / \sqrt{1 - \xi_F^2} \geq a \quad \nearrow \ln 1/\bar{S}$$

$$\rightarrow \xi_F^2 \geq a(1 - \xi_F^2) \Rightarrow \rho_m / 100 = \xi_F \geq \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \leq 1$$

STABILITÀ ROBUSTA

Rispetto a errori di guadagno si può richiedere che $K_m > \bar{K} > 1$, mentre rispetto a sfasamenti $\rho_m > \bar{\rho} > 0$. La presenza di uno sfasamento $e^{-j\omega t}$ che causa ρ_m non modifica w_c , poiché $|e^{-j\omega t}| = 1$, ma modifica solo la fase di $L(s)$:

$$4(L(j\omega)e^{-j\omega t}) = 4L(j\omega) - \omega t^{180^\circ/\pi}$$

La fase critica φ_c^* a seguito del ritardo sarà:

$$\varphi_c^* = \varphi_c^o - w_c T \frac{180}{\pi} \Rightarrow \varphi_m^* = 180 - |\varphi_c^*| = \dots = \varphi_m^o - w_c T \frac{180}{\pi}$$

Quindi per garantire robustezza contro i ritardi φ_m^o deve essere sufficientemente alto e w_c deve essere contenuto.

ATTENUAZIONE DEL DISTURBO In genere ci verrà detto che $d(t)$ avrà valori in una certa banda $[\underline{\omega}_d, \bar{\omega}_d]$. Inoltre ci verrà chiesto un limite inferiore di attenuazione (e.g. "almeno 20 dB", si ricorda che usiamo 10 come fattore). Dovrò verificare 2 cose:

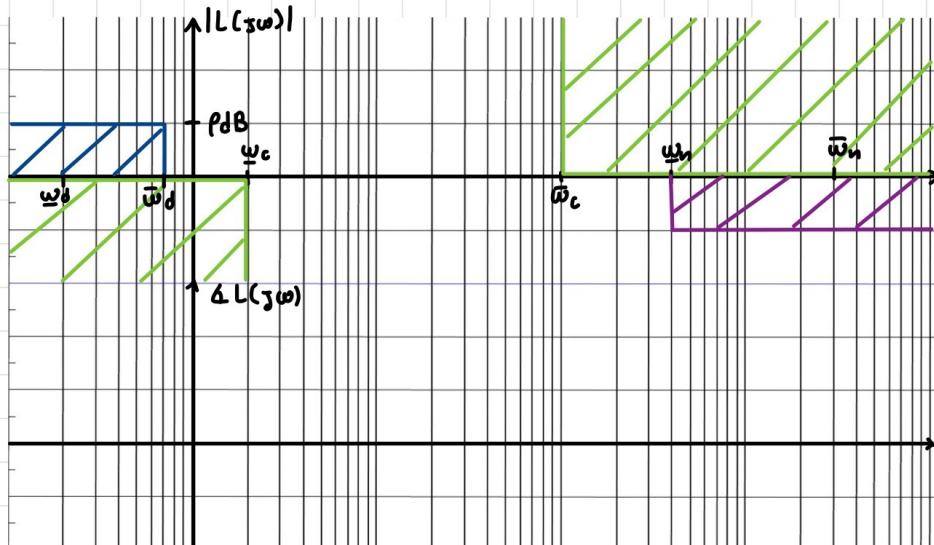
- 1) $w_c > \underline{\omega}_d$
- 2) $|L(j\omega)| \cdot \frac{1}{|L(j\omega)|} \leq 1/\rho \Rightarrow |L(j\omega)| \geq \rho$ (ρ fattore di attenuazione)

ATTENUAZIONE DI $n(t)$ Analogamente al disturbo $d(t)$, dovremo verificare, dato $n(t) \in [\underline{\omega}_n; \bar{\omega}_n]$:

- 1) $w_c < \bar{\omega}_d$
- 2) $|F(j\omega)| = |L(j\omega)| \leq 1/\rho$ (ρ fattore di attenuazione)

7.6.2 Individuazione delle possibili $L(s)$

Esistono dei requisiti che possono essere rappresentati graficamente: quelli su w_c e modulo.



La nostra $L(s)$ avrà, quindi:

- poli con $\operatorname{Re}\{\cdot\} \leq 0$, ma se $G(s)$ ha già poli con $\operatorname{Re}\{\cdot\} > 0$ non posso cancellarli (cancellazione non lecita)
- può avere zeri con $\operatorname{Re}\{\cdot\} > 0$, ma questi sono nulli e solo quelli di $G(s)$
- se $G(s)$ ha poli con $\operatorname{Re}\{\cdot\} > 0$, non posso cancellarli (cancellazione non lecita)
- affinché $R(s)$ sia propria, il grado relativo di $L(s)$ sarà maggiore rispetto a quello di $G(s)$ (per grado relativo si intende la differenza tra il numero di poli e quello di zeri)
- poiché $R(s)$ non può avere zeri nell'origine $s=0$, quindi $g_L > g_G$

7.6.3 Definizione di $L(s)$

PER INVERSIONE si sceglie una funzione ad ampio dominio $L^*(s)$ che soddisfa i requisiti e per inversione troviamo $R(s) = L^*(s)/G(s)$

SINTESI DIRETTA DI $R(s)$ Consiste in due fasi:

1) Scegliamo il tipo e il guadagno di $R(s)$ in modo che siano soddisfatte le prestazioni richieste. Definiamo quindi:

$$R_1(s) = \frac{P_a}{s B_a}$$

2) Si calcola $L_1(s) = R_1(s)G(s)$. Consideriamo il comportamento di $L_1(s)$. Le prestazioni sono nei limiti stabili? Se sì $R(s) = R_1(s)$, altrimenti aggiungiamo poli e zeri a $R_1(s)$ quanto basta per fare regolare i limiti.

ESEMPIO $G(s) = \frac{0.1(1+s)}{(1+10s)(1+0.1s)}$

Specifiche:

- $S \leq 30\%$, $T_{avg} \leq 10s$
- $y^o(t) = \operatorname{real}(t)$, $o^o(t) = \pm 2 \operatorname{real}(t) \Rightarrow |e_{av}| \leq 0.1$
- $d(t)$ in banda $[0.01, 0.1]$ deve essere attenuato di 20dB
- $n(t)$ in banda $[10, 1000]$ deve essere attenuato di 20dB

1) $L(s)$?

- $\rho_m > 75^\circ \Rightarrow S\% = 0, T_{an} = \frac{\xi_F \pi}{\omega_c} \leq 10 \Rightarrow \omega_c \geq 0.5 \text{ rad/s}$
- $\rho_m < 75^\circ:$

$$S\% = 100 e^{-\frac{\xi_F \pi}{\sqrt{1-\xi_F^2}}} \Rightarrow \frac{\xi_F \pi}{\sqrt{1-\xi_F^2}} \geq \frac{1 \ln(0.3)}{\pi} = \alpha = 0.3882$$

$$\Rightarrow \xi_F \geq \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = 0.36 \Rightarrow \xi_F > 36^\circ$$

$$T_{ans} = \frac{s}{\omega_c \xi_F} \leq 10 \Rightarrow \omega_c \xi_F \geq 0.5$$

2) $y^0(t) = \sin(\omega t), d(t) = \pm 2 \sin(\omega t), |e_{\omega}| \leq 0.1$

$$\Rightarrow |e_{\omega}| \leq |e_{y^0}| + |e_d|$$

- caso $g_L = 0: |e_{y^0}| = \frac{1}{1+\mu_L}, |e_d| = 2|e_{y^0}| \Rightarrow |e_{\omega}| \leq \frac{3}{1+\mu_L} \leq 0.1$

$$\Rightarrow \mu_L \geq 29 \rightarrow \mu_L = \mu_R \mu_N = 0.1 \mu_R \geq 29 \Rightarrow \mu_R \geq 290$$

$$\Rightarrow R_1(s) = \mu_R$$

- caso $g_L = 1: |e_{y^0}| = |e_d| = 0 \Rightarrow |e_{\omega}| = 0$

$$\Rightarrow R_2(s) = \mu_R / s \quad \mu_R > 0$$

3) $d(t) \in [0.01, 0.1], \rho \geq 10 \Rightarrow \omega_c > 0.1, |L(j\omega)| \geq 10 \text{ (20dB)}$

$$n(t) \in [10, 100], \rho \geq 20 \Rightarrow \omega_c < 10, |L(j\omega)| \leq \frac{1}{10} (-20dB)$$

PROGETTO

1) $R_1(s) = \mu_R \quad \mu_R \geq 290; \text{ plottiamo con } \mu_R = 1000 \Rightarrow \mu_R = 100$

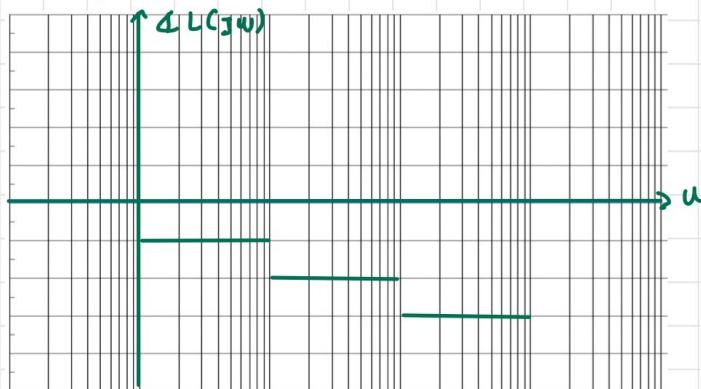
$$\Rightarrow L_1(s) = \mu_R G(s) = \frac{100 (1+s)}{(1+10s)(1+0.1s)} \quad X$$



Per corrugare proviamo ad aggiungere 2 poli in 1:

$$L_1' = \frac{100}{(1+0.1s)(1+10s)(1+s)} \Rightarrow R_1(s) = \frac{1000}{(1+s)^2}$$

Disegniamo il diagramma di fase per valutare la stabilità



$$\begin{aligned} \omega_c &= \sqrt{10} \text{ rad/s} \\ \left| \tilde{L}(j\omega_c) \right| &= 1 \\ \tilde{\rho}/\omega_c^2 &= 1 \\ \hookrightarrow \omega_c &= \sqrt{\tilde{\rho}} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L(j\omega_c) &= -\Delta(1+j0.1\omega_c) - \Delta(1+j\omega_c) - \Delta(1+j10\omega_c) \\ &\Rightarrow \text{arctan}(0.1\omega_c) - \text{arctan}(\omega_c) - \text{arctan}(10\omega_c) = -178.2^\circ \\ \Rightarrow \varphi_m &= 1.8^\circ > 0 \rightarrow \text{troppo piccolo!} \end{aligned}$$

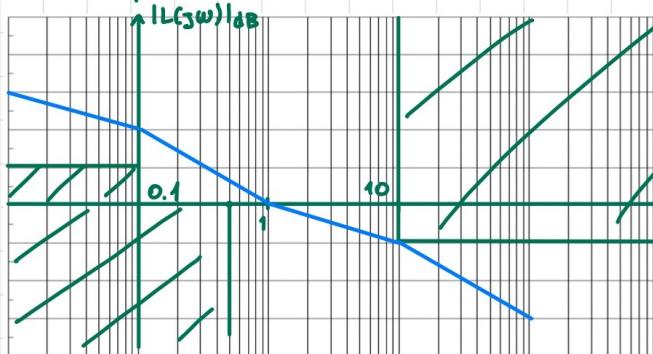
Per risolvere il polo in 10 in zero:

$$L_1''(s) = \frac{(1+0.1s)100}{(1+s)(1+10s)} \quad \omega_c = 3.16 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \varphi_m = -\text{atan}(\omega_c) - \text{atan}(10\omega_c) + \text{atan}(0.1\omega_c) = 36.8^\circ$$

Controlliamo Tans: $\omega_c \bar{\zeta}_F = 0.36 \cdot 3.16 > 0.5$

$$2) R_1(s) = N_a/s \Rightarrow L_1 = \frac{(1+s)\mu_e}{s(1+0.1s)(1+10s)}$$



$$N_L = 10, \quad \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c = -90^\circ - 84.3^\circ + 45^\circ - 5.7^\circ = -135^\circ \Rightarrow \varphi_m = 180^\circ - |135^\circ| = 45^\circ$$

$$\overline{\xi}_F = 0.45 \Rightarrow \overline{\xi}_F \omega_c = 0.45 \times 0.5 \times$$

Percorreggere tutto uno zero in 10:

$$L(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+10s)} \quad \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c = -90 - 84.3 + 45 \Rightarrow \varphi_m = 50.7 \Rightarrow \overline{\xi}_F \approx 0.5 \Rightarrow \overline{\xi}_F \omega_c = 0.5$$

$$\hookrightarrow R(s) = \frac{100(1+0.1s)}{s}$$

$$\text{ESEMPIO} \quad G(s) = \frac{0.1(1-0.1s)}{(1+10s)(1+s)}$$

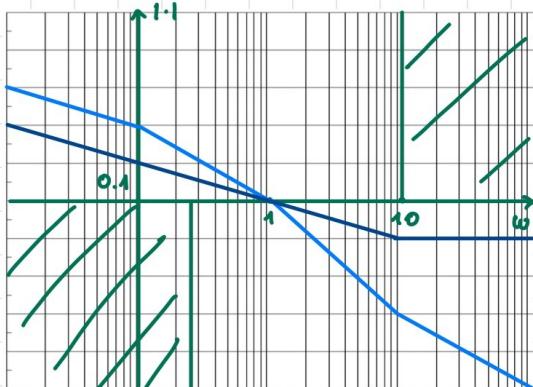
- Specifiche:
- $SY \leq 20\%$, $T_{ARS} \leq 20s$
 - $\cos \gamma^\circ = A \cos(\omega t)$, $d(\omega) = \pm A \omega \cos(\omega t)$, $e_d = 0$
 $\hookrightarrow g \geq 1$

- $\varphi_m < 75^\circ$: $SY \leq 20\% \Rightarrow \dots \Rightarrow \overline{\xi}_F \geq 0.45 \Rightarrow \varphi_m = 45^\circ$
 $T_{ARS} \leq 20s \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_c > 0.25 \text{ rad/s}$
- $\varphi_m > 75^\circ$: $SY = 0$, $T_{ARS} \leq 20s \Rightarrow \omega_c > 0.025 \text{ rad/s}$

$$R(s) = N_r / s \quad L(s) = \frac{N_r 0.1(1-0.1s)}{s(1+10s)(1+s)}$$

$$\hookrightarrow N_r = 10, \quad \omega_c = 1 \text{ rad/s}, \quad \varphi_m = 0 \times$$

$$\hookrightarrow L'(s) = \frac{(1-0.1s)}{s(1+\frac{s}{100})} \quad \varphi_c = \dots = -96.7^\circ \Rightarrow \varphi_m = 93.7^\circ > 75^\circ \Rightarrow SY = 0$$



$$L'(s) = R(s)G(s)$$

$$\hookrightarrow R(s) = L'(s) / G(s) = \dots$$

$$\text{ESEMPIO } G(s) = \frac{0.1(1-0.1s)}{(1+10s)(1+s)} e^{-s\tau}$$

- Specifiche:
- $SY \leq 20\%$ $T_{ans} \leq 20s$
 - con $y^o = A \cos(\omega t)$, $d(t) = \pm A \sin(\omega t)$ $e_{d0}=0$

Se prendiamo il regolatore dell'esempio 2 ottieniamo:

$$L(s) = \frac{(1-0.1)}{s(1+\frac{s}{100})} e^{-s\tau} \Rightarrow \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c = -36.7^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180}{\pi} = -36.7^\circ - 43^\circ$$

$$\varphi_m = 83.7^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180}{\pi} = 83.7^\circ - 43^\circ = 40.7^\circ + 45^\circ$$

↳ abbiamo perso un requisito!

Scioltiamo il quadagno per abbassare ω_c :

$$L(s) = \frac{0.5(1-0.1s)}{s(1+\frac{s}{100})} e^{-s\tau} \Rightarrow \omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c \geq -90^\circ - 5.7^\circ$$

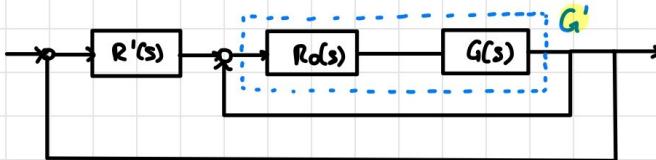
$$\varphi_m \geq 180 - 95.7^\circ - \omega_c \tau \frac{180}{\pi} = 62.8^\circ$$

$$\xi_p \omega_c = 0.6 \cdot 0.5 > 0.25$$

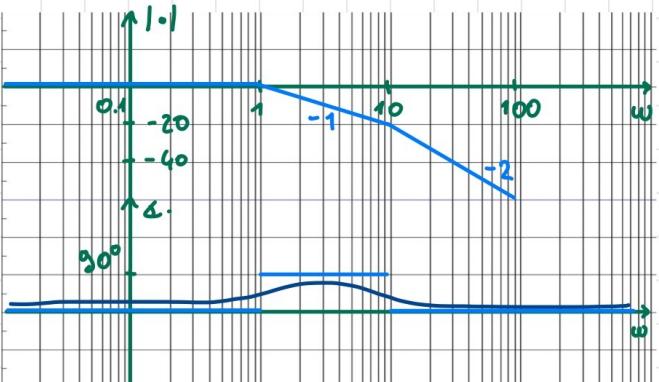
7.7 Come controlliamo sistemi instabili?

Nel caso di sistemi instabili dobbiamo:

- 1) Trovare un regolatore $R_0(s)$ più semplice possibile che permette di rendere il sistema retroazionato as. stabile per Nyquist
- 2) Vedere a definire un controllore $R'(s)$ che controlli il sistema $G'(s)$.



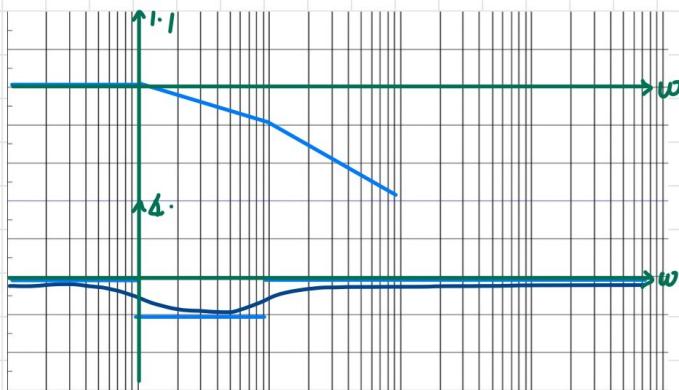
$$\text{ESEMPIO } G(s) = \frac{1}{(1-s)(1+0.1s)}$$



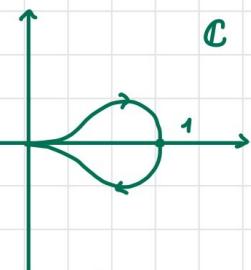
$n = p = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{K} \in (0, 1) \Rightarrow$ prendiamo $K = -2$.

A questo punto definiamo: $G'(s) = \frac{-2G(s)}{1 - 2G(s)} = \frac{2}{1 + 0.3s + 0.1s^2}$

ESEMPIO



$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1-s)}$$



Non possiamo usare semplicemente il guadagno poiché $n = -1$. Dobbiamo aggiungere uno zero per minimizzare $(1+10s)$ e aggiungere un polo ad alta frequenza oltre ad un eventuale guadagno:

$$\tilde{R}(s) = \frac{(1+10s)}{(1+0.1s)} \cdot (-2)$$

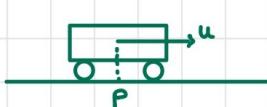
In sistemi di questo tipo si può trovare che:

$$Y(t)/d(t) = \frac{1}{1+R(s)} G(s) \cdot S(s) \quad Y(t)/n(t) = -G'(s)(R'(s)+1) / 1+R'(s)G'(s)$$

7.8 Regolatori PID

Dei tipi di regolatori molto importanti sono i cosiddetti regolatori PID (proporzionale - integrativo - derivativo). Per capire il funzionamento facciamo 3 esempi.

ESEMPIO 1 (CARRELLO CON ATTRITO)



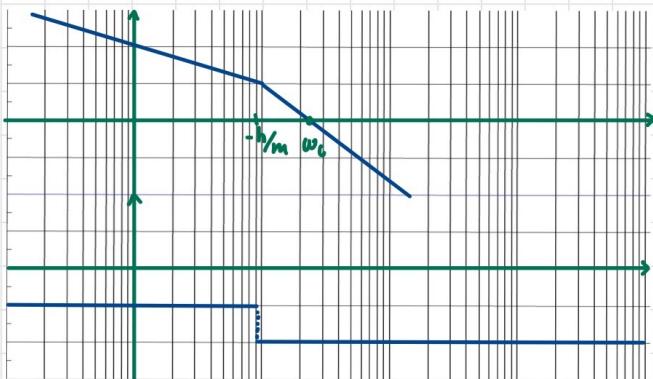
$$\begin{cases} m \ddot{p} = u - h \dot{p} \\ d(t) = 0 \end{cases} \quad y(t) = p(t) \quad \begin{cases} p(0) = 0 \\ \dot{p}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m \ddot{p}) &= \mathcal{L}(u - h \dot{p}) \Rightarrow m s^2 Y(s) = U(s) - h s Y(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{1/m s^2 + h s}{m s^2 + h} U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1/m s^2 + h s}{m s^2 + h} \end{aligned}$$

$$\text{BODE: } G(s) = \frac{1/h}{s(1 + m/h s)} \Rightarrow n_G = 1, g_G = 1 \\ \text{POLO: } s = -\frac{h}{m}$$

Il problema è trovare regolatore tale che 1) il sistema ad anello chiuso sia ar. stabile; 2) $\omega_0 = 0$ con y^0 costante

$$g_L > 0, g_R = 1 \Rightarrow g_E = 0 \Rightarrow \text{regolatore statico: } R(s) = n_R$$



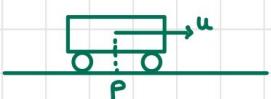
$$L(s) = \frac{n_L}{s(1 + m/h s)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c &\in (-180^\circ; -90^\circ) \\ \varphi_m &\in (0^\circ; 90^\circ) \\ \Rightarrow R(s) &= R_1(s) = n_R \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(s) = R(s) E(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(U(s)) = n_R \mathcal{L}^{-1}(E(s)) \\ \text{t.s.r. di misura}$$

$$\Rightarrow U(t) = n_R e(t) \rightarrow \text{REGOLATORE PROPOZIONALE (P)}$$

ESEMPIO 2. (CARRELLO SENZA ATTRITO)

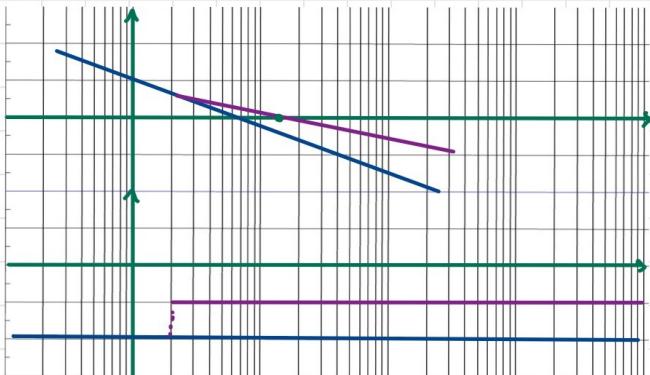


$$\begin{cases} m \ddot{p} = u - h \dot{p} \\ d(t) = 0 \end{cases} \quad y(t) = p(t) \quad \begin{cases} p(0) = 0 \\ \dot{p}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m \ddot{p}) &= \mathcal{L}(u) \Rightarrow m s^2 Y(s) = U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{m s^2} U(s) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{1}{m s^2} \Rightarrow g_R = 2, \mu_L = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Il problema è trovare regolatore tale che 1) il sistema ad anello chiuso sia ar. stabile; 2) $\dot{e}_\infty = 0$ con y^* costante

$$g_L > 0, g_R = 1 \Rightarrow g_R = 0 \Rightarrow \text{regolatore statico: } R(s) = \mu_R$$

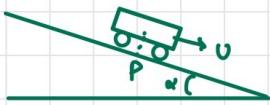


$$\varphi_c = -180^\circ \Rightarrow \rho_m = 0 \\ L_s + \text{polo}$$

$$\Rightarrow R(s) = \mu_R (1 + \tau s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U(s)) &= \mathcal{L}(R(s) E(s)) \\ \Rightarrow U(s) &= \mu_R e(s) + \mu_R \tau \dot{e}(s) \\ \Rightarrow R. \text{ PROP - DERIVATIVO} \end{aligned}$$

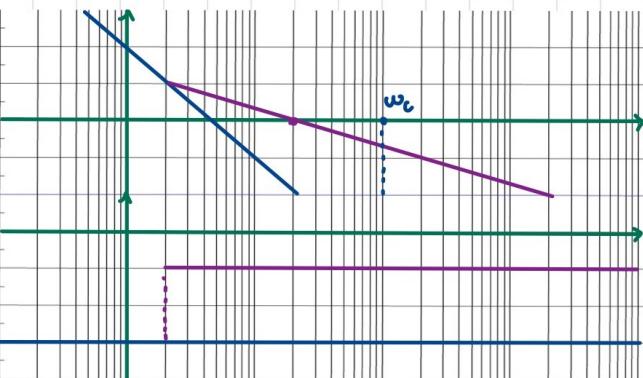
ESEMPIO 3. (CARRELLO SENZA ATTRITO SU PIANO INCLINATO)



$$\begin{aligned} m \ddot{p} &= u + m g \sin(\alpha) \Rightarrow m s^2 Y(s) = U(s) + m g \sin(\alpha) / s \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{m s^2} U(s) + \frac{m g \sin(\alpha)}{s^3} \\ \Rightarrow d(t) &= g \sin(\alpha) \mathcal{L}(\frac{1}{s^2}) = g \sin(\alpha) t^{1/2} \operatorname{sech}(t) \end{aligned}$$

Il problema è trovare regolatore tale che 1) il sistema ad anello chiuso sia ar. stabile; 2) $\dot{e}_\infty = 0$ con y^* costante e $d(t)$ calcolato.

$$L_s \quad g_L > 2, g_R = 2 \Rightarrow g_R = 1! \Rightarrow R(s) = \mu_R / s; L(s) = \mu_L / s^3$$



Per stabilizzare il sistema, dobbiamo aggiungere 2 poli "prima di w_c ".

$$R(s) = \frac{N_r}{s} (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$$

$$\Rightarrow L(s) = \frac{N_r}{s^3} (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$$

$$R(s) = \dots = \frac{N_r}{s} + (T_1 + T_2) \mu_r + T_1 T_2 \mu_r s$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(U(s)) = \mathcal{L}^{-1}(R(s) E(s)) \Rightarrow U(t) = \mu_r \int_0^t e(\tau) d\tau + (T_1 + T_2) \mu_r e(t) + T_1 T_2 \mu_r \dot{e}(t)$$

\Rightarrow REGOLATORE PROP. - DERIV. - INTEGRATIVO

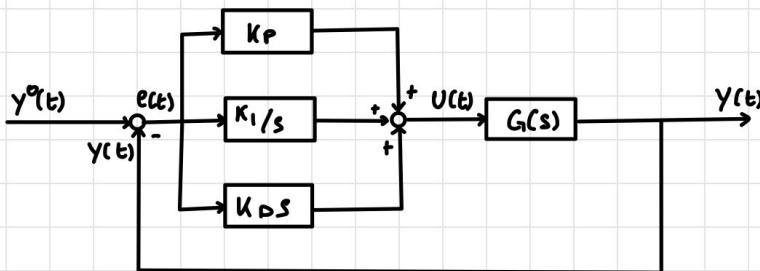
7.8.1 Struttura dei regolatori PID

In genere un regolatore PID sono composti da 3 termini: uno proporzionale, uno integrativo e uno derivativo.

$$R(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

$$= K_p (1 + T_D s + \frac{1}{T_I s}) \quad \text{con } T_{\pm} \text{ costanti di tempo}$$

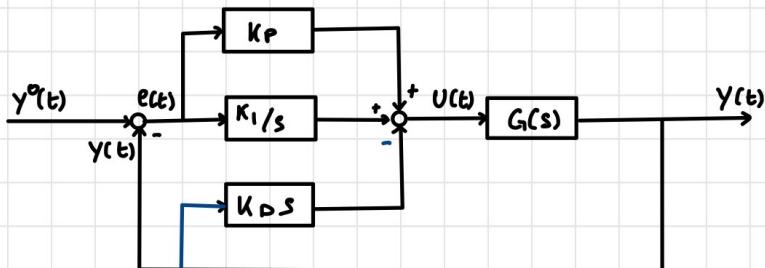
Nella pratica, il termine derivativo si corruga con un polo ad alta frequenza: solitamente $1 + T_D s / N \quad N \gg 1$. In uno schema a blocchi, il regolatore PID ha forma:



I regolatori PID soffrono, però, di alcuni problemi e necessitano di aggiustamenti.

7.8.2 Effetto dell'azione derivativa a fronte di scalini

Derivare la funzione scalino causa dei problemi: se $y^0(t) = \text{scal}(t)$, $y(t) \rightarrow +\infty$. La soluzione sarà spostare l'ingresso di K_Ds alla retroazione.



Questa soluzione causerà una risposta lenta dell'azione derivativo, ma questo di solito non è un problema.

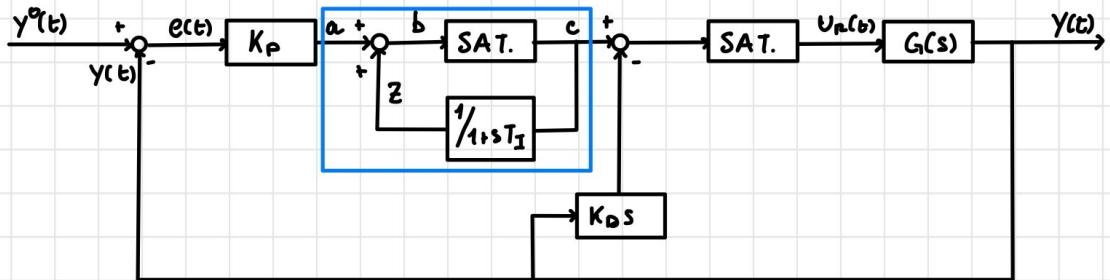
7.8.3 Causa dell'azione integrante (wind-up)

Si consideri un attuatore soggetto a saturazione. A causa di era, un attuatore può non raggiungere il valore richiesto dall'integratore e analogamente può non rendere abbattuta velocemente sotto la soglia di saturazione.



Si può notare come dopo che $e(t)$ diventa negativo, la $u(t)$ non risponda, spesso portando il sistema a comportamenti instabili. Modifichiamo il nostro regolatore tenendo di eliminare l'effetto

introducono una azione anti-windup (carica).



In zona "lineare", la porzione evidenziata si comporta come se $b=c$. La FDT del blockettino in questo caso sarà:

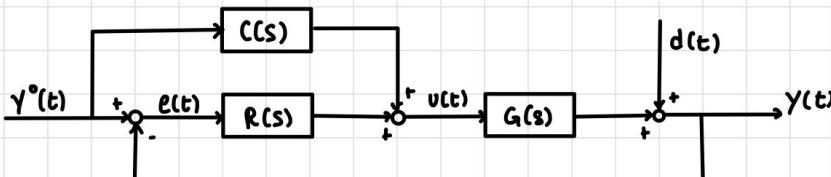
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_I}} = \frac{1}{sT_I} + 1$$

Fuori dalla zona lineare, invece, c sarà pari al valore massimo. Quindi il valore costante di c si riserverà nella FDT ar. stabile $\frac{1}{1+sT_I}$, facendola tendere asymptoticamente al valore di c . Quando z si stabilirà al nuovo valore, otteniamo che $b=c+K_p e$. Oppure $e(t)$ diventerà negativo, la stabilità si romperà e si ritornrà subito nella zona ad azione lineare.

7.9 Schemi di controllo avanzati

Nella pratica non esistono sistemi che sono o ad anello aperto o ad anello chiuso ma si usano combinazioni di componenti in entrambe le configurazioni. Vediamo due schemi di questo tipo: il compensatore del riferimento e il compensatore del disturbo misurabile.

7.9.1 Compensatore del riferimento



Questo schema ci permette di unire la velocità del controllo ad anello aperto con la stabilità di quello ad anello chiuso. Che valore deve assumere $C(s)$ affinché tutto funzioni?

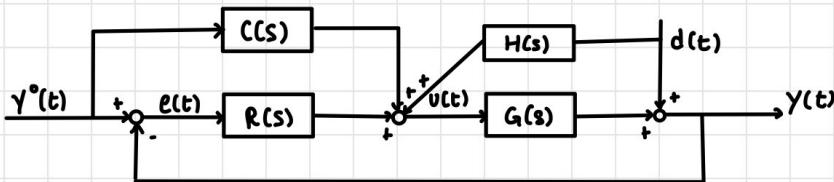
$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{Y^*(s)} &= \frac{C(s) G(s)}{1 + R(s) G(s)} + \frac{R(s) G(s)}{1 + R(s) G(s)} = \\ &= \frac{C(s) G(s) + R(s) G(s)}{1 + R(s) G(s)} = 1 \quad \text{idealmente} \\ \Rightarrow C(s) &= 1/G(s)\end{aligned}$$

d' inversione di $G(s)$ non deve arrivare $\forall s$ poiché l' aspetto dinamico è gestito dall' anello chiuso. In generale basta:

$$C(s) = \text{const.} = 1/G(0)$$

7.9.2 Compensatori del disturbo minore

Se il disturbo $d(t)$ è minore, è possibile compensarlo in modo analogo:



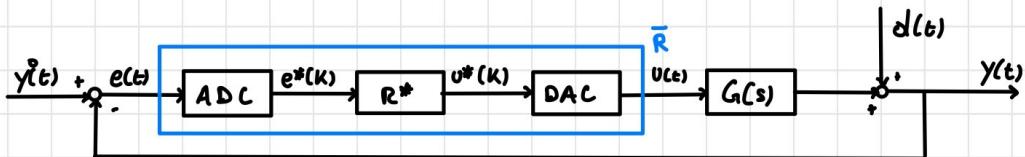
Calcoliamo il valore ideale di $H(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1}{1 + R(s)G(s)} + \frac{H(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1 + H(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = 0 \quad \text{idealmente} \\ \Rightarrow H(s) &= -1/G(s)\end{aligned}$$

La funzione $H(s)$ non sempre è realizzabile. Se d è costante a brevi, possiamo prendere $H(s)$ costante pari a $-1/G(0)$. Se, ad esempio, $d = A \sin(\omega t)$, progettiamo $H(s)$ tale che $H(j\omega) = -1/G(j\omega)$.

8 REALIZZAZIONE DIGITALE DEI CONTROLLORI

Il sistema, per come lo abbiamo considerato noi, è a tempo continuo e quindi è analogico. Se vogliamo realizzare un sistema digitale dobbiamo modificare il nostro solito schema:

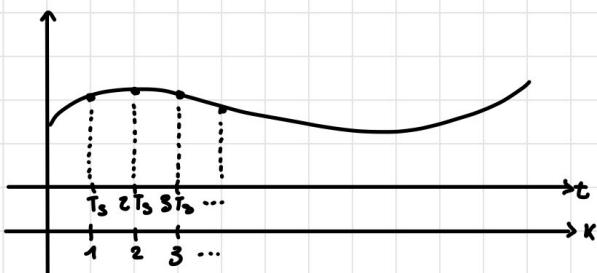


La carica è due essere il più possibile vicina alla $G(s)$ progettata. Il regolatore R^* può essere visto come un sistema a tempo discreto. Di conseguenza dobbiamo prima introdurre gli strumenti per lavorare con segnali discreti e poi progettare sistemi discreti.

8.1 Segnali e sistemi a tempo discreto

Abbiamo già incontrato i sistemi a tempo discreto in precedenza. Estendiamo il concetto introducendo di FDT per sistemi a tempo discreto e la relativa trasformata.

TRASFORMATA Z La trasformata Z si applica a segnali a tempo discreto $f^*(k)$, $k \in \mathbb{N}$.



T_s : Tempo di campionamento (cost)

La scrittura $f^*(k) = f(kT_s)$ è detta **campionamento del segnale**. Definiamo la **trasformata Z** come:

$$F^*(z) = Z(f^*(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^*(k) z^{-k} \quad z \in \mathbb{C}$$

La serie della trasformata convergerà se $|z| > r$ raggio di

convergenza. Noi considereremo solo segnali con trasformata Z razionali con questa forma:

$$F^*(z) = N^*(z) / D^*(z)$$

Le definizioni di polo e zero sono invariate. Le proprietà della trasformata Z che ci interessano sono:

1) LINEARITÀ: $Z(f^*(K) + \beta g^*(K)) = \alpha Z(f^*(K)) + \beta Z(g^*(K))$

2) RITARDO: $Z(f^*(K-1)) = z^{-1} Z(f^*(K))$

3) ANTICIPO: $Z(f^*(K+1)) = z Z(f^*(K)) - z f(0)$

FDT DI SISTEMI A TEMPO DISCRETO fino ad ora i sistemi a t.d. considerati erano espressi in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(K+1) = Ax^*(K) + Bu^*(K) \\ y^*(K) = Cx^*(K) + Du^*(K) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{ipotesi di LTI} \\ \text{stabile se } |\lambda_i| < 1 \forall i \end{array}$$

Proviamo ora una rappresentazione alternativa. Definiamo la FDT come:

$$\begin{aligned} Z(x^*(K+1)) &= Z(Ax^*(K) + Bu^*(K)) \\ \rightarrow Zx^*(z) - Zx^*(0) &= AZx^*(z) + BU^*(z) \\ \Rightarrow X^*(z) &= \underbrace{(zI - A)^{-1} Zx^*(0)}_{Z(x_L^*)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} BU^*(z)}_{Z(x_F^*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(y^*(K)) &= Z(Cx^*(K) + Du^*(K)) \\ \rightarrow Y^*(z) &= CX^*(z) + DU^*(z) \\ &= \underbrace{C(zI - A)^{-1} Zx^*(0)}_{Z(y_L^*)} + \underbrace{(C(zI - A)^{-1} B + D)U^*(z)}_{Z(y_F^*)} \end{aligned}$$

Per definire la FDT, consideriamo solo il movimento forzato, ottenendo:

$$Y^*(z) = G^*(z) U^*(z) \quad \text{con } G^*(z) = C(zI - A)^{-1} B + D = \frac{N^*(z)}{D^*(z)}$$

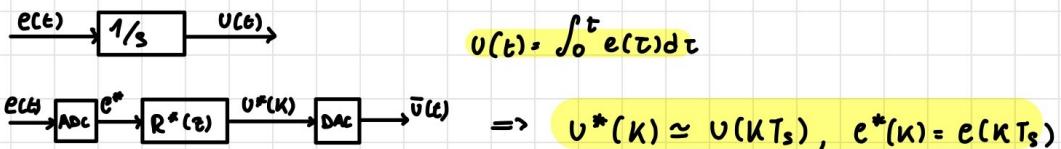
Dove $D^*(z)$, a meno di cancellazioni, è il polinomio caratteristico di A e $N^*(z)$ ha grado n se $D \neq 0$ e minore di n se $D = 0$. Quindi i poli di $G^*(z)$ sono autovalori di A (non vale il contrario). Una condizione necessaria per la stabilità sarà che G^* dovrà avere poli minori di 1 in modulo. Chiamiamo $G^*(z)$ rappresentazione esterna. La rappresentazione esterna nel tempo si può ricavare così:

$$\begin{aligned}
 G^*(z) &= \frac{N^*(z)}{D^*(z)} = \frac{\beta_0 z^v + \beta_1 z^{v-1} + \dots + \beta_v}{z^v + \alpha_1 z^{v-1} + \dots + \alpha_v} \cdot \frac{1/z^v}{1/z^v} = \\
 &= \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_v z^{-v}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_v z^{-v}} \\
 Y^*(z) &= \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_v z^{-v}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_v z^{-v}} U^*(z) \\
 \rightarrow (1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_v z^{-v}) Y^*(z) &= (\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_v z^{-v}) U^*(z) \\
 \rightarrow Y^*(z) + \alpha_1 z^{-1} Y^*(z) + \dots + \alpha_v z^{-v} Y^*(z) &= \beta_0 U^*(z) + \beta_1 z^{-1} U^*(z) + \dots \\
 \Rightarrow y^*(k) + \alpha_1 y^*(k-1) + \dots + \alpha_v y^*(k-v) &= \beta_0 u^*(k) + \beta_1 u^*(k-1) + \dots + \beta_v u^*(k-v) \\
 \Rightarrow y^*(k) &= -\alpha_1 y^*(k-1) - \dots - \alpha_v y^*(k-v) + \beta_0 u^*(k) + \beta_1 u^*(k-1) + \dots + \beta_v u^*(k-v)
 \end{aligned}$$

8.2 Il regolatore digitale

Il problema, ora, è di trovare $R^*(z)$ che meglio approssima una nota $R(s)$.

CASO DELL'INTEGRATORE Partiamo da un caso semplice: l'integratore. Supponiamo che $R(s) = 1/s$. Il nostro "sistema" sarà:

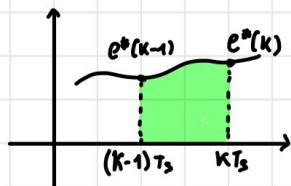


Il nostro obiettivo è avvicinare il più possibile $y^*(k)$ e $u(t)$ (nisi punti di campionamento). Facciamo i conti:

$$u(kT_s) = \int_0^{kT_s} e(\tau) d\tau = \int_0^{(k-1)T_s} e(\tau) d\tau + \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} e(\tau) d\tau =$$

$$= U((K-1)T_s) + \int_{(K-1)T_s}^{KT_s} e(\tau) d\tau \approx$$

$$= U^*(K-1) + A$$



L'integrale approssimato può essere calcolato in 3 modi:

$$A = \begin{cases} e^*(K-1) T_s & \text{EULERO ESPLICITO} \\ e^*(K) T_s & \text{IMPLICITO} \\ e^*(K-1) + e^*(K)/2 T_s & \text{TUSTIN (TRAPEZI)} \end{cases} \rightarrow A = [d e^*(K) + (1-\alpha) e^*(K-1)] T_s$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U(KT_s) &\approx U^*(K-1) + [d e^*(K) + (1-\alpha) e^*(K-1)] T_s \\ \Rightarrow Z(U^*(K) - U^*(K-1)) &= Z([d e^*(K) + (1-\alpha) e^*(K-1)] T_s) \\ \rightarrow U^*(z) (1 - z^{-1}) &= E^*(z) (d + (1-\alpha) z^{-1}) T_s \\ \rightarrow \frac{U^*(z)}{E^*(z)} &= \frac{T_s [d + (1-\alpha) z^{-1}]}{1 - z^{-1}} = R^*(s) \end{aligned}$$

CASO GENERALE È facile ricavare anche il regolatore digitale del derivatore:

$$s = (1/T_s)^{-1} \rightarrow \left(\frac{T_s [d + (1-\alpha) z^{-1}]}{1 - z^{-1}} \right)^{-1} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s [d + (1-\alpha) z^{-1}]}$$

Ci basta calcolare quindi:

$$R(s) \rightarrow R^*(z) = R \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s [d + (1-\alpha) z^{-1}]} \right)$$

PROPRIETA $R^*(z)$

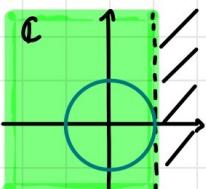
- 1) $R^*(z)$ è razionale se $R(s)$ è razionale
- 2) se $R(s)$ è propria lo sarà anche R^* e dello stesso ordine solo se $R(s)$ non ha poli in $s = 1/\alpha T_s$ (non accadrà mai)

3) se $R(s)$ ha $\rho=0$ non è detto che anche $R^*(z)$ sia non instabile. Consideriamo $R(s)$ con un polo in \bar{s} , il polo di $R^*(z)$ in \bar{z} sarà tale che:

$$\bar{z} = \frac{1 + (1-\alpha)T_s \bar{s}}{1 - \alpha T_s \bar{s}}$$

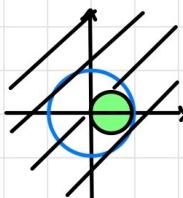
de $\operatorname{Re}\{\bar{s}\} \leq 0$, i garantito che $|\bar{z}| \leq 1$?

- $\alpha = 0 \Rightarrow \bar{z} = 1 + T_s \bar{s}$



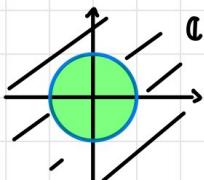
\Rightarrow posso garantire $|\bar{z}| \leq 1$ se T_s è opportunamente piccolo

- $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{1 - T_s \bar{s}}$



\Rightarrow posso garantire $|\bar{z}| \leq 1$ sempre

- $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1 + \frac{1}{2} \bar{s} T_s}{1 - \frac{1}{2} T_s}$



\Rightarrow posso garantire $|\bar{z}| \leq 1$ sempre

8.3 Il campionatore

Affinché sia possibile ricostruire accuratamente un segnale, il campionatore dovrà campionare alla giusta frequenza. Il teorema di Shannon ci aiuta a scegliere la giusta frequenza.

TEOREMA - T. DI SHANNON

Se un segnale è limitato in banda $[0; \bar{\omega}]$, allora esso è univocamente ricostruibile a partire dal suo

seguito campionato si vale:

$$w_s > 2\bar{w} \Rightarrow T_s < \pi/\bar{w}$$

Cerchiamo una frequenza di campionamento adatta:

$$\begin{aligned} E_N(s) &= \frac{1}{1+L(s)} \left(Y^0(s) - D(s) - N(s) \right) = \\ &= S(s)(Y^0(s) - D(s)) - S(s)N(s) \end{aligned}$$

La banda è tra $[0; w_c]$

Introduciamo un filtro pass-basso che elimini le componenti ad alta frequenza indesiderate (filtro anti-aliasing):

$$F_{AA}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{w_m}} \quad w_{AA} \gg w_c \text{ per non indurre fenomeni instabili}$$

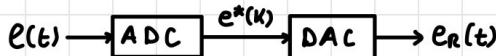
Il segnale in ingresso al campionatore arriva quindi in banda $[0; w_{AA}]$. Quindi per il teorema di Shannon $w_s = \frac{\pi}{T_s} > 2w_{AA}$. In pratica, di solito si sceglie w_s in un range $[20w_c; 50w_c]$.

8.4 Il mantinitore

Il mantinitore fa l'operazione inversa rispetto al campionatore: fa sì che $v(t)$ rimanga $v(k)$ per la durata del campione.



Supponiamo di possedere la curva rappresentata con ingresso $e(t)$ e uscita $e_R(t)$. Possiamo affermare che $e(t) = e_R(t)$ in ipotesi di campionamento perfetto secondo il teorema di Shannon?



Purtroppo no. Il teorema di Shannon garantisce la ricostruzione

perfetta solo per un ricordatore ideale non-causal (non real-time). Il reale ricordatore, a meno di alcune approssimazioni, può essere espresso come $e_R(t) \approx e(t - \tau_s)$, $\tau_s = T_s/2$. La cascatina sopra può essere quindi espressa come $e^{-\tau_s s}$. Se consideriamo la cascata completa ADC - $R^*(z)$ - DAC, la posiamo considerare circa pari a $R(s) e^{-\tau_s s}$.

8.5 Procedura di progetto

La prima fase del progetto di un controllore digitale è programmare una $R(s)$ a tempo continuo con un margine di fase sufficientemente alto. Successivamente discretizziamo $R(s)$ calcolando $R^*(z)$. Successivamente servirà calcolare il corrispondente nel tempo di $R^*(z)$ in quanto sarà quello a venir implementato. Servirà, successivamente, scegliere la frequenza di campionamento e il filtro anti-aliasing in modo da non destabilizzare il sistema con:

- 1) filtro AA troppo basso
- 2) ritardo introdotto da ADC/DAC
- 3) eventuale ritardo di elaborazione del controllore digitale

$$\varphi_m^{\text{REAL}} = \varphi_m^{\text{IDEALE}} + \angle F_{AA}(jw) - (\tau_s + \tau_{ELAB}) w_c \frac{180}{\pi}$$

\angle - arctan(w_c/w_{AA})