$A \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcola autovalori e autospazi di A; determina le dimensioni e le basi o.n del nucleo di A e di $Ker(A)^{\perp}$ esiste una matrice ortogonale che diagonalizzi A?

1) $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + Tr(A)\lambda^2 - II_2(A)\lambda + det(A) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - II_2(A)\lambda + det(A) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)\lambda + det(A) =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 0 = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -\lambda(\lambda-3)^2 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad ma(\lambda_1) = 1, \quad \lambda_2 = 3 \quad ma(\lambda_2) = 2$

$V_0 = Ker(A - 0 \cdot I) = Ker(A) = Ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = [\dots] = \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow Ker(A) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$V_3 = Ker(A - 3I) = Ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \{ -x+y-z=0 \Rightarrow Ker(A-3I) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$

↳ A è ortogonalmente diagonalizzabile in quanto $A \in S(n;\mathbb{K}) \Rightarrow V_0 \perp V_3$ (per teorema spettrale)

2) $Ker(A) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \mathcal{B}_{V_0} = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow dim(Ker(A)) = 1$

$Ker(A)^{\perp} = V_3 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \Rightarrow \mathcal{B}_{V_3} = [\text{ALG. GRAM-SCHMIDT}] = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow dim(Ker(A)^{\perp}) = 2$

3) Sì: A è simmetrica $\Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow \exists Q \in O(n;\mathbb{R}) : D = QAQ^T \Rightarrow Q = [\mathcal{B}_{V_0} | \mathcal{B}_{V_3}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

Siano date le seguenti matrici ortogonali: $A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $C \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Descrivi le isometrie descritte da A,B,C:

1) $|A| = +1 \Rightarrow$ A è rotazione: $\theta = \arccos\left(\frac{Tr(A)}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

2) $|B| = -1 \Rightarrow$ B è riflessione ortogonale rispetto a V_1 [autospazio relativo a $\lambda = 1$]

3) $|C| = 1 \Rightarrow$ C è rotazione: $Tr(C) = 1 + 2\cos(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$

Classificare tutte le isometrie autoaggiunte fino a $\mathbb{R}^4$

$f \in O(n;\mathbb{R}) \cap S(n;\mathbb{R}) \quad n = 1,2,3,4 \Rightarrow \lambda_+ = 1,\ \lambda_- = -1,\ |f| = \pm 1$

$\Rightarrow f$ ortogonalmente diagonalizzabile (T. spettrale) $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$ o.n di autovettori

$n=1 \rightarrow f(v) = 1 \cdot v \Rightarrow f = Id \Rightarrow$ rotazione

$\rightarrow f(v) = -1 \cdot v \Rightarrow f = -Id$

$SO \cap S = \{Id\}$

$n=2 \rightarrow F_{|B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = 1 \Rightarrow f = Id \Rightarrow$ rotazione

$\rightarrow F_{|B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = -1 \Rightarrow$ riflessione

$\rightarrow$ " $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = 1 \Rightarrow f = -Id \Rightarrow$ rotazione

$SO \cap S = \{Id, -Id\}$

$n=3 \rightarrow F_{|B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = +1 \Rightarrow f = Id \Rightarrow$ rotazione

$\rightarrow$ " $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = -1 \Rightarrow$ riflessione

$\rightarrow$ " $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = 1 \Rightarrow$ rotazione rispetto a una retta

$\rightarrow$ " $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F_{|B}| = 1 \Rightarrow f = -Id \Rightarrow$ riflessione

$SO \cap S = \{Id, R_R\ \forall R \in \mathbb{R}^3\}$

Sia $f_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F_K \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3-K & K \\ 1 & 2-K & K-2 \end{bmatrix}$. Verifica che $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore; calcola traccia, det e rg di $F_K\ \forall K$; per quali K F_K è autoaggiunta e scrivine una base o.n

1) $f(v) = \lambda v \Rightarrow F_K \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \exists \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore

2) $[\dots]\ Tr(F_K) = 3,\ |F_K| = 3K - 11,\ rg(F_K) = \begin{cases} 3 & K \neq 11/3 \\ 2 & K = 11/3 \end{cases}$

3) $F_{|K}$ autoaggiunta se $F_{|K}$ è simm $\Rightarrow K = 1$

$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 \lambda_3 = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$

$V_1 = Ker(F_1 - I) = [\dots] = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$V_4 = Ker(F_1 - 4I) = [\dots] = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$V_{-2} = Ker(F_1 + 2I) = [\dots] = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

per T. spettrale $V_1 \perp V_4 \perp V_{-2} \Rightarrow \mathcal{B}_o = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$

$\mathcal{B}_{o.n} = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}\right\}$