Criterio del rapporto o della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ o $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se

1) $b > 1 \Rightarrow a_n$ non tende a 0, quindi la serie diverge

2) $b < 1 \Rightarrow a_n$ tende a 0, quindi la serie converge.

3) $b = 1 \Rightarrow$ NULL

DIM. RAD) Sia $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se $b>1$, allora $\lim a_n = +\infty$. Se $b<1$, esiste $q \in \mathbb{R}$ compreso tra b e 1 $b<q<1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |\sqrt[n]{a_n} - b| < \varepsilon \to -\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - b < \varepsilon \to$
$\to \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q \to a_n < (\varepsilon + q)^n$. Per ε piccolo, $\varepsilon + q < 1$. Usando il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (q+\varepsilon)^n$ è una serie geometrica che converge. Poiché a_n è minorata da $(q+\varepsilon)^n$, anche a_n converge

RAP) Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Esiste allora $b < q < 1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |\frac{a_{n+1}}{a_n} - b| < \varepsilon \to -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - b < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q$. Poiché lavoriamo con termini positivi, abbiamo che: $a_{n+1} < a_n(\varepsilon + q)\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0+1} < a_{n_0}(\varepsilon + q)$, $a_{n_0+2} < a_{n_0+1}(\varepsilon+q) < a_{n_0+1}(\varepsilon+q)^2$. Così possiamo dire che $a_k < (\varepsilon+q)^{k-n_0} a_{n_0}\ \forall k > n_0$. Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon+q)^{k-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{(\varepsilon+q)^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon - q)^k$. La serie è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge. Di conseguenza anche a_n converge in quanto minorata da una serie convergente.

Criterio di conversazione (sostituzione)

Sia una serie a termini positivi con a_n non crescente. La serie converge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

Divergenza serie armonica

Considerano $b_k = (1+\frac{1}{k})^k$. Supponiamo che definitivamente $(1+\frac{1}{k})^k \leq e$ $(\forall k > \bar{k})$. Avremo $\ln(1+\frac{1}{k})^k \leq \ln e \to k \ln(1+\frac{1}{k}) \leq 1 \to \ln(1+\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k} \to \ln\frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k} \to$

$$\to \underbrace{\ln k+1 - \ln k}_{\text{Succ. telescopica}} \leq \frac{1}{k} \Bigg] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie $\ln(k+1) - \ln(k)$ diverge. Anche $\frac{1}{k}$, allora divergerà $\forall k > \bar{k}$

Serie armonica generalizzata

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per $\alpha \leq 1$ la serie diverge e per $\alpha > 1$ la serie converge

DIM: Se $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ perché $n^\alpha \leq n$. Allora per il criterio del confronto la serie diverge.

Se $\alpha > 1$, definiamo la successione delle somme parziali $S_k = 1 + (\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}) + (\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha}) + (\frac{1}{8^\alpha} + \dots \leq 1 + 2\frac{1}{2^\alpha} + 4\frac{1}{4^\alpha} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots = \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p$

$S_k = \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{n^\alpha}) \leq \sum_{p=0}^{N} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^p \Rightarrow \lim \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \lim \sum_{p=0}^{N} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^p$. Il secondo, però, è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, quindi converge. Perciò, per criterio del confronto anche S_k converge e quindi la serie converge.

Serie a Termini Negativi

Si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini negativi se $a_n \leq 0 \ \forall n$. Una serie a termini negativi può essere riscritta in una a termini positivi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $b_n = -a_n \geq 0 \quad \forall n$.

Serie di Termini di Segno Variabile

Una serie a segno variabile è ciò che indica il nome. Una serie a segno variabile, oltre che essere divergente o convergente, può anche essere irregolare.

La condizione necessaria di convergenza continua a valere.

Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Per le serie positive, allora la convergenza assoluta e quella semplice (convergenza "normale") coincidono. Stessa cosa per le serie negative.

Per le serie a segno variabile le cose sono più complicate

Relazione Convergenza Semplice - Assoluta.

Sia una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ che converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

DIM. Scriviamo $(a_n + |a_n|) - |a_n|$. La nostra serie sarà $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. La seconda converge per ipotesi. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - |a_n|)$ è positiva $((a_n - |a_n|) \geq 0 \ \forall n)$, in più $(a_n - |a_n|) \leq 2|a_n| \ \forall n$. Avremo, quindi, che $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \leq 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Dato che la seconda converge per ipotesi, anche la prima converge per criterio del confronto. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

ESEMPIO: Data $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. La serie è a segno variabile $\Rightarrow$ studio la convergenza assoluta: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \Rightarrow$ usiamo il confronto: $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente.

Serie a Segno Alterno

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty}$ si dice a segno alterno se $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0 \ \forall n$

Criterio di Leibniz

Sia data una serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0 \ \forall n$. Se valgono queste, la serie converge semplicemente:

1) $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

2) b_n è monotona decrescente.

DIM. Costruiamo a_n decrescente tale che $S_K = S_{K-1} + (-1)^K a_K \Rightarrow \begin{cases} S_{2h} = S_{2h-1} + a_{2h} = S_{2h-2}(+a_{2h} - a_{2h-1}) \le S_{2h-2} \Rightarrow \text{decrescente} \Rightarrow \overbrace{\overbrace{S_{2h} \le S_0}^{\text{LIM. SUP.}},\ \overbrace{S_{2h} \ge S_{2h-2} - a_n \ge \dots \ge S_1 + a_n}^{\text{LIM. INF.}}}^{\text{CONVERGE } \lim S_{2h} = \bar{S}} \\ S_{2h+1} = S_{2h} - a_{2h+1} = S_{2h-1} + (a_{2h} - a_{2h+1}) \ge S_{2h-1} \Rightarrow \text{crescente} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{S_{2h+1} \ge S_1}_{\text{LIM. INF.}},\ \underbrace{S_{2h+1} \le S_{2h} - a_{2h+1} \le \dots \le S_0 + a_{2h+1}}_{\text{LIM. SUP}}}_{\text{CONVERGE} \to \lim S_{2h+1} = \tilde{S}} \end{cases}$

Quindi $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim a_n = 0$ ma $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim S_{2h} - \lim S_{2h+1} = \bar{S} - \tilde{S} = 0 \Rightarrow \bar{S} = \tilde{S} \Rightarrow S_n$ converge

Funzioni Reali a Variabile Reale

Sono funzioni del tipo $\underline{f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Composizione di Funzioni

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni, si definisce $g(f(x))$ se $A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(A) \subseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ e $f(g(x))$ se $B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} g(B) \subseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Non vale la commutatività tra f e g.

Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall\, I(x_0)$ questo ha intersezione non vuota con A.

Limite di Funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che f ha limite l per x che tende a x_0 ($\lim_{x \to x_0} f(x) = l$) se:

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A \quad |f(x) - l| < \varepsilon$

OSS. x_0 non deve per forza appartenere ad A $\Rightarrow f(x_0)$ può anche non avere significato

Il limite è una "distanza": $|f(x) - l| < \varepsilon$ significa che la distanza tra $f(x)$ e l deve essere nulla.