1) In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, scrivere rapp. alg. e par. di:

1) retta contenente $P=(1,0,1)$, $Q=(0,1,1)$

2) piano π contenente r ed $R=(-1,h,1)$ $\forall h \in \mathbb{R}$

1) partiamo dalla parametrica: $\vec{PQ}=(-1,1,0)$, $v=\mathcal{L}((-1,1,0)) \Rightarrow r=(x,y,z)=(1,0,1)+t_1(-1,1,0)=\underline{(1-t,t,1)}.$

Per l'algebrica, partiamo dal definire $\mathcal{B}_0=\{(0,0,0),e_1,e_2,e_3\} \Rightarrow (1-t,t,1) \Rightarrow \begin{bmatrix} x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t\\t\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$

Risolviamo il sistema in funzione di t: $\left[\begin{array}{c|c}-1 & x-1\\ 1 & y\\ 0 & z-1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c}-1 & x-1\\ 0 & x+y-1\\ 0 & z-1\end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x+y=1 & \leftarrow \pi_1\\ z=1 & \leftarrow \pi_2\end{cases}} \Rightarrow r=\pi_1\cap\pi_2$

2) Prendiamo la giacitura di π: $w=\mathcal{L}(\vec{PQ},\vec{PR})=\mathcal{L}((-1,1,0),(-2,h,0)) \Rightarrow \pi=(x,y,z)=\underline{(1,0,1)+t_1(-1,1,0)+t_2(-2,h,0)}$ $\boxed{\text{!! SE I DUE VETTORI NON SONO INDIPENDENTI, ALLORA NON OTTENIAMO UN PIANO !!}}$

per $h=2$, i due vettori generano r in quanto proporzionali. Verifichiamo che $R\in r \Rightarrow \begin{cases} -1+2=1 \ \checkmark\\ 1=1\end{cases} \Rightarrow$ Tutti piani del fascio con supporto r contengono r e R.

Scriviamo l'equazione del fascio: $\mathcal{F}_r$: $\boxed{\alpha(x+y-1)+\beta(z-1)=0}$, $\alpha,\beta\neq 0$

↳ più coppie di parametri corrispondono allo stesso piano. Definiamo $K=\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow (x+y+z-1)+K(z-1)=0 \Rightarrow$ non è ambiguo MA ho perso tutti i piani $(0,\beta)=\pi_2$

Dobbiamo aggiungere a parte π_2

per $h\neq 2$: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t_1-2t_2\\ t_1+ht_2\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t_1-2t_2\\ y=t_1+ht_2\\ z=1\end{cases}$ Per trovare l'algebrica, risolviamo $\left[\begin{array}{cc|c}-1 & -2 & x-1\\ 1 & h & y\\ 0 & 0 & z-1\end{array}\right] \to \underline{z=1}$

$(x,y,z)-P$

2) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ $\quad r: \begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=0\end{cases}$.

1) Scrivere $\boxed{s \text{ avente la stessa giacitura a } r}$ e contenente $P=(1,1,1)$

↳ $r \parallel s$

1.1) Calcoliamo la rapp. parametrica di r (risolvo il sistema): $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&0&1&0\end{array}\right] \to [\dots] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&2&-1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ -y+2z=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=\boxed{\overset{x_0}{(0,1,0)}}_{Q}+\boxed{\overset{x_p}{t(-1,2,1)}}_{\underline{v}}$

La giacitura di s è $\mathcal{L}(\underline{v})$: $(1,1,1)+t(-1,2,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1-t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases} \Rightarrow$ [risolvo in t] $\Rightarrow \underline{\begin{cases} 2x+y=3\\ x+z=2\end{cases}}$

1.2) Usiamo il fascio improprio di r: $\begin{cases} x+y-z-1=0 \to \pi_1\\ x+z=0 \to \pi_2\end{cases}$. Se sposto uno dei due piani parallelamente, ottengo una retta parallela r.

Scriviamo tutti piani paralleli a π_1 ($\mathcal{F}_1$) e a π_2 ($\mathcal{F}_2$):

$\mathcal{F}_1$: $x+y-z=K_1$ $\qquad$ $\mathcal{F}_2$: $x+z=K_2$

La generica r_{K_1,K_2} sarà $\begin{cases} x+y-z=K_1\\ x+z=K_2\end{cases}$. Impongo il passaggio per P: $\begin{cases} 1+1-1=K_1\\ 1+1=K_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1=1\\ K_2=2\end{cases}$. La retta s sarà $\underline{\begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=2\end{cases}} \Rightarrow$ Le due rappresentazioni sono equivalenti: $\begin{cases} 2x+y=3\\ x+z=2\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ x+z=2\end{cases}$ +

$2x+y=2$

3) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $h\in\mathbb{R}$, $\pi_1: x+y-z=-1$, $\pi_2: x+hy-hz=-3h$, $\pi_3: hy+z=1-h$

1) Mutua posizione dei piani

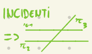
2) per $h=2$, trova $P=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$

3) per $h=-1$, verifica che i piani appartengono al medesimo fascio

trovare r sostegno del fascio e la parallela contenente P.

1) prendiamo $[A_h|B_h]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\1&h&-h&-3h\\0&h&1&1-h\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&h-1&-h+1&1-3h\\0&h&1&1-h\end{array}\right] \to \begin{vmatrix} h-1 & -h+1\\ h & 1\end{vmatrix}=\underline{3}$

per $h\neq\pm1 \Rightarrow \exists$ soluzione di $[A_h|B_h] \Rightarrow$ i piani si intersecano $\Rightarrow$ INCIDENTI

per $h=1$: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&0&0&-2\\0&1&1&0\end{array}\right] \Rightarrow$ impossibile $\qquad \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&1&-1&-3\\0&1&1&1-h\end{array}\right] \begin{array}{l} \}\to // \\ \to \times\end{array} \Rightarrow$ 

per $h=-1$ $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&-2&2&1\\0&-1&1&2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&-2&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right] \Rightarrow$ i piani si intersecano lungo una retta.

2) $h=2$: $[A'_2|B'_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=-1 \\ y-z=-5 \\ 3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow P=(4,-2,3)$

3) $h=-1$: $[A'_{-1}|B'_{-1}] = [\dots] \to r: \begin{cases} x+y-z=-1 \\ -y+z=2 \end{cases}$. Troviamo la parametrica: $\begin{cases} x=1 \\ y=t-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow r: (1,-2,0)+t(0,1,1)$.

Scriviamo s con la stessa giacitura ma punto di partenza P: $s: (4,-2,3)+t(0,1,1)$

4) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $r_1: \begin{cases} x+hy+z=1 \\ y-z=h \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases}$

1) Mutua posizione di r_1 e r_2
2) $\exists h: \exists \pi \supseteq r_1, r_2$. Rappresentazione alg/par. di π

1.1) Studiamo $r_1 \cap r_2$: $\begin{cases} -2t+h(-1+t)+\cancel{1}+t=\cancel{1} \\ -1+\cancel{t}-1-\cancel{t}=h \end{cases} \to \begin{cases} -2t+2-2t+t=0 \\ h=-2 \end{cases} \to \begin{cases} t=\frac{2}{3} \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow$ sistema risolvibile solo se $h=-2 \Rightarrow$ le due rette sono incidenti per $h=-2$ in $P=(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, +\frac{5}{3})$

Calcoliamo le giaciture $(r_1 // r_2)$. La giacitura di r_2 è $V=\mathcal{L}(-2,1,1)$. Calcoliamo quella di r_1: $(1-h^2-ht_1, -t_1, h+t_1, t_1) = \mathcal{L}((-1-h, 1, 1))$. Le due giaciture sono uguali se e solo se $-2=-1-h \Rightarrow$ $h=1 \Rightarrow$ PARALLELE

Per $h \neq 1$, $h \neq -2$ le rette sono sghembe.

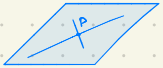
1.2) Scriviamo r_2 in forma alg.: $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ -y+z-2=0 \end{cases}$, Scriviamo $[\hat{A}|\hat{B}]$ e studiamone il rango:

$[\hat{A}|\hat{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & h \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & h-2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h-1 & 2h-1 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{array}\right]$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{per } h=1: \ r(\hat{A}|\hat{B}) > r(\hat{A}) = n-q \Rightarrow \text{PAR.} \\ \text{per } h=-2: \ r(\hat{A}|\hat{B}) = r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow \text{INC.} \\ \text{per } h\neq 1, h\neq 2 \ \ r(\hat{A}|\hat{B}) > r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow \text{SGH.} \end{array}}$

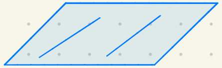
2) Le rette sono contenute in un piano se sono incidenti/parallele $\Rightarrow h=1 \vee h=2$

per $h=-2$ $r_1 \cap r_2 = P$. La giacitura di π è $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \underbrace{(0,-1,1)}_{r_2 \text{ in } t=0} + t_1(1,1,-1)+t_2(-2,1,1)$; $\begin{cases} x=-t_1-2t_2 \\ y=1-t_1+t_2 \\ z=1-t_1+t_2 \end{cases} \to -y+z=2$



per $h=1$ Costruiamo il fascio a supporto su r_1: $\mathcal{F}_r: (x+y+z-1)+K(y-z-1)=0$ Impongo che il fascio contenga $r_2 \Rightarrow$ piano per punto $P(0,1,1) \Rightarrow \cancel{0}-\cancel{1}+\cancel{1}-1+K(-1-1-1)=0$ $K=-\frac{1}{3}$

$\mathcal{F}_{r,K}: x+y+z-1-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}=0$ $x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z-\frac{2}{3}=0$

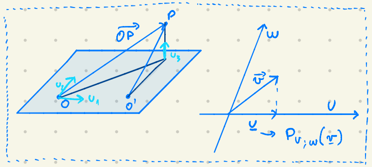


5) $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ $r_1: \begin{cases} x+iy-z=1+i \\ x-iy-z=1-i \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x-iz=1 \\ iy=i \end{cases}$, π $x+y+z=0$

1) Mutua posizione di r_1, r_2
2) Proiettare $P=r_1 \cap r_2$ su π secondo le direzioni di r_1, r_2
3) Trovare i segmenti del triangolo di vertici P, $P_{\pi,r_1}(P)$, $P_{\pi,r_2}(P)$

1) $[\hat{A}|\hat{B}] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 1 & -i & -1 & 1-i \\ 1 & 0 & -i & 1 \\ 0 & i & 0 & i \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 0 & -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 1-i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to r(\hat{A}|\hat{B}) = r(\hat{A}) > n-q \Rightarrow$ INCIDENTI

2) Calcoliamo P: [risolvo$[\tilde{A}|\tilde{B}]$] $\rightarrow$ $(1,1,0)$.



Calcoliamo $P_{\pi;r_1}$: $O=(0,0,0) \Rightarrow \vec{OP}=(1,1,0)$

Scomponiamo lungo la giacitura di π e di r_1:

$$\left.\begin{aligned} U_{r_1} &= \mathcal{L}((\underset{u_3}{1,0,1})) \\ U_{\pi} &= \mathcal{L}((\underset{u_1}{-1,1,0}),(\underset{u_2}{-1,0,1})) \end{aligned}\right] (1,1,0)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1)+\beta(1,0,1)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2+\beta=1 \\ \alpha_1+0+0=1 \\ 0+\alpha_2+\beta=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-1 \\ \beta=+1 \end{cases} \Rightarrow \vec{OP}=\underbrace{(-1,1,0)+(+1,0,-1)}_{(0,1,-1)}+\underbrace{(+1,0,+1)}$$

$$\underbrace{(0,1,-1)} \downarrow\; O-(0,1,-1)=(0,-1,1)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per r_2 e otteniamo: $P_{\pi,r_2}(P)=(-i,1,-1+i)$

Per trovare i vertici facciamo:
1) $P_{\pi,r_1}-P_{\pi,r_2}$
2) $P_{\pi,r_1}-P$
3) $P_{\pi,r_2}-P$