INTRODUZIONE AL CALCOLO VETTORIALE

ESERCIZIO 1
Si considerino i due vettori $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$:

$$\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{u}}_x + 4\vec{\mathbf{u}}_y - 5\vec{\mathbf{u}}_z$$
$$\vec{\mathbf{b}} = -1\vec{\mathbf{u}}_x + 2\vec{\mathbf{u}}_y + 6\vec{\mathbf{u}}_z$$

1. Calcolare il prodotto scalare $\lambda = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ e l'angolo θ compreso tra i due vettori;
2. Determinare il modulo quadro del vettore somma $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}|^2$ e, note le proprietá del prodotto scalare, dimostrare che $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 + 2|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|cos(\theta)$.

[1. $\lambda = -25$, $\theta = 123^o$]; [2. $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}|^2 = 41$]

ESERCIZIO 2
Una particella si sposta da un punto A$(1, 2, 3)$, ad un punto B$(1, 3, 1)$. Dopo aver determinato i vettori posizione iniziale $\vec{r_a}$ e finale $\vec{r_b}$ rispetto all'origine, fornire l'espressione del vettore spostamento $\vec{\Delta r}$.

[$\vec{\Delta r} = \vec{\mathbf{u}}_y - 2\vec{\mathbf{u}}_z$]

ESERCIZIO 3
Dati i due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$:

$$\vec{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mathbf{u}}_x - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{u}}_y$$
$$\vec{v_2} = -\sqrt{2}\vec{\mathbf{u}}_x + 2\vec{\mathbf{u}}_y$$

Calcolare:

1. il vettore somma $\vec{v_1} + \vec{v_2}$;
2. il prodotto scalare $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$;
3. la componente $w_{\parallel}$ del vettore $\vec{w} = 3\vec{\mathbf{u}}_x - 2\vec{\mathbf{u}}_y$ nella direzione e nel verso del vettore somma determinato al punto 1.

[1. $\vec{v_1} + \vec{v_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mathbf{u}}_x + \frac{3}{2}\vec{\mathbf{u}}_y$]; [2. $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = -2$]; [3. $w_{\parallel} = -3.09$]

ESERCIZIO 4
Un punto materiale si muove in un piano cartesiano (x, y) con la seguente legge oraria:

$$\vec{r}(t) = b^2 t\vec{\mathbf{u}}_x + (ct^3 - q_0)\vec{\mathbf{u}}_y$$

con b, c, $q_0 \in \mathbb{R}$.
Calcolare:

1. l'equazione della traiettoria sul piano (x, y);
2. il vettore velocitá in modulo, direzione e verso;

3. il vettore accelerazione in modulo, direzione e verso.

[1. $y = \frac{cx^3}{b^6} - q_0$]; [2. $\vec{v}(t) = b^2\vec{\mathbf{u}}_x + 3ct^2\vec{\mathbf{u}}_y$, $v(t) = \sqrt{b^4 + 9c^2t^4}$, $\vec{u}_v = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 9c^2t^4}}\vec{\mathbf{u}}_x + \frac{3ct^2}{\sqrt{b^4 + 9c^2t^4}}\vec{\mathbf{u}}_y$]; [3. $\vec{a}(t) = 6ct\vec{\mathbf{u}}_y$, $a(t) = 6ct$, $\vec{u}_a = \vec{\mathbf{u}}_y$].

ESERCIZIO 5

Dato il vettore posizione:

$$\vec{r}(t) = Rcos(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_x + Rsin(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_y + \frac{A}{2}\vec{\mathbf{u}}_z$$

con R, A, $\omega_0 \in \mathbb{R}$.
Calcolare:

1. il vettore velocitá $\vec{v}(t)$ e mostrare che é sempre ortogonale a $\vec{r}(t)$;

2. il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ e mostrare che, nel caso in cui $A = 0$, ha la stessa direzione e verso opposto a $\vec{r}(t)$.

[1.$\vec{v}(t) = -R\omega_0 sin(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_x + R\omega_0 cos(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_y$];[2. $\vec{a}(t) = -R\omega_0^2 cos(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_x - R{\omega_0}^2 sin(\omega_0 t)\vec{\mathbf{u}}_y$].