Polinomi di Taylor

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile. Sia $T_1^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow f(x) = T_1^{x_0}(x) + o(x-x_0)$

$R_1(x) = f(x) - T_1^{x_0}(x)$ è detto resto ed è $R_1(x) = o(x-x_0)$.

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile n volte. Esiste un unico polinomio con un resto piccolo che approssima $f(x)$ detto $T_n^{x_0}(x)$ (polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n) tale che:

$$f(x) - T_n^{x_0}(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad T_n^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

OSS: Se $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor si chiama polinomio di Mc-Laurin

DIM: $\underline{n=2} \Rightarrow T_2^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2^{x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow f(x) - T_2^{x_0}(x) = o(x-x_0)^2$

$f(x) - T_2^{x_0}(x)$ è derivabile, come anche $(x-x_0)$. Il limite risulta in $\frac{0}{0} \Rightarrow$ posso applicare il teorema di De L'Hopital $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{2\cancel{(x-x_0)}} = \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \Big[\underbrace{\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-x_0}}_{f''} - f''(x_0) \Big] = \frac{1}{2}(\cancel{f''} - \cancel{f''}) = 0 \Rightarrow \text{per De L'Hopital}$$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2^{x_0}(x)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow$ verifica la tesi.

ES: 1) $f(x) = \ln(x+1)$ $\quad T_3^1(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!}(x-1)^3 = \ln(2) + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} \Rightarrow \ln(x-1) = \underbrace{T_3^1(x) + o((x-1)^3)}_{\text{sviluppo di Taylor}}$

$f(x_0) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(x_0) = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'''(x_0) = \frac{1}{4}$

$T_3^0(x) = \ln(1) + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)^2 + \frac{2}{6}(x-0)^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Resto di Peano

$$f(x) = T_n^{x_0}(x) - \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{}$$

→ RESTO DI PEANO: è una stima sulla rapidità con cui $f(x)$ tende a x_0.

Resto di Lagrange

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile $n+1$ volte. Esiste $c \in (x_0; x)$ tale che $f(x) - T_n^{x_0}(x) = \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}$

Se posso stimare $f^{n+1}(c)$, allora $|f(x) - T_n^{x_0}(x)| < \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

DIM: $\underline{n+1=2}$. Costruisco $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$, $h(x) = (x-x_0)^2$; $g(x_0) = h(x_0) = 0$; $g'(x_0) = h'(x_0) = 0$; $g''(x_0) = f''(x)$, $h''(x) = 2$;

Considero $[x_0; x]$ $(x_0 < x)$ e restringo $g(x)$ e $h(x)$. Le due funzioni rispettano le ipotesi del teorema di Cauchy:

$\exists c \in (x_0; x): \frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g(x)}{h(x)}$

Ripeto il procedimento, restringendo a $[c; x]$. Riapplico Cauchy: $\exists d \in (c; x) \in (x_0; x)$: $\frac{g''(d)}{h''(d)} = \frac{g'(c) - g'(x)}{h'(c) - h'(c)} =$

$= \frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{g(c)}{h(c)} \Rightarrow \frac{g''(d)}{h''(d)} = \frac{f''(d)}{2} = \frac{f(x) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \Rightarrow f(x) - f(x)(x-x_0) = \frac{f''(d)}{2}(x-x_0)^2 \Rightarrow$ verifica la tesi.

Esempi:

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad T_5(x)_1 = 0 + 1(x-0) + 0 - \frac{1}{6}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$

$g(x) = \sin(x^2)$ $\qquad T_5(x)_2 = T_5(x^2)_1 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!}$

→ !! $f(g(x)) = T(g(x)) + o$ se $g(x)$ è polinomiale !!

$f(x) = \ln(\cos(x))$ $\qquad \cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{t}) \to t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) - \underbrace{\frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2}}_{\text{ininfluente}}$

$\ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{t}) \to -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4))^2}{2} +$