1) In $\mathbb{E}^3$ si considerino $V=(2,0,1)$ e $\pi = x+y+z=0$

1) Trovare r tale che: $V \in r \wedge r \perp \pi$

2) Determinare $H = r \cap \pi$ e $d(V,\pi)$

3) Scrivere il luogo S distanti $\sqrt{3}$ da r. È di rotazione?

1) si trova il vettore normale a π e lo si usa come direttore di r: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

2) $r \cap \pi$: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 1+t \\ x+y+z=0 \end{cases} \longrightarrow t=-1 \rightarrow H(1;-1;0) \quad \|\vec{VH}\| = \sqrt{3}$

3) $\vec{VP} = (x-2;\, y;\, z-1) \Rightarrow d(P,r) = \sqrt{\dfrac{G(\underline{n},\vec{VP})}{G(\underline{n})}} = \sqrt{\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & x+y+z-3 \\ x+y+z-3 & (x-2)^2+y^2+(z-1)^2 \end{vmatrix}}{3}} = \dots = \sqrt{\dfrac{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6y+6}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\sqrt{\dfrac{G(\underline{n};\vec{VP})}{G(\underline{n})}} = \sqrt{3} \rightarrow G(\underline{n};\vec{VP}) = 3G(\underline{n})$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6y+6=9$. È un cilindro ellittico (se due autovalori sono uguali è circolare)

2) Studiare il fascio di coniche γ_K: $(K-1)x^2+4Kxy+(K-1)y^2-6K+2=0$. Classifica le coniche e studia le degeneri. Verifica che γ_1 è un iperbole e calcolane gli asintoti. Scrivi S ottenuta ruotando γ_1 lungo ad un asintoto.

1) $C \left[\begin{array}{cc|c} K-1 & 2K & 0 \\ 2K & K-1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -6K+2 \end{array}\right]$

$\left.\begin{array}{l} I_1 = 2(K-1) \\ I_2 = (1-K)(3K-1) \\ I_3 = (-6K+2)(-1-K)(3K-1) = 2(3K-1)^2(K+1) \end{array}\right\} K=\tfrac{1}{3},\ K=-1 \Rightarrow$ degeneri $\rightarrow \begin{cases} K=-1: & (x+y)^2-4=0 \Rightarrow \text{coppia di rette} \\ K=\tfrac{1}{3}: & x^2-2xy+y^2=0 \Rightarrow \text{retta doppia} \end{cases}$

$I_2 > 0 \Rightarrow -1 < K < \tfrac{1}{3}$

$I_1 I_3 > 0 \Rightarrow K < -1 \vee K > \tfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} K < -1 & \text{IPERBOLE} \\ -1 < K < \tfrac{1}{3} & \text{ELLISSE} \\ \tfrac{1}{3} < K < 1 & \text{IPERBOLE} \\ K > 1 & \text{IPERBOLE} \end{cases}$ $K=1$ IPERBOLE EQUILATERA

2) γ_1: $xy=1 \Rightarrow$ asintoti sono gli assi cartesiani

3) Ruotiamo intorno $x=0$. $Q_0 \in \gamma_1$: $(x_0;y_0;z_0) \Rightarrow \gamma_1(Q_0)$: $x_0y_0=1 \Rightarrow \|\vec{OQ_0}\|^2 = \|\vec{OP}\|^2 \rightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2 = x^2+y^2+z^2$

prendiamo $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vettore direttore asse) e $\vec{QP} = \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \underline{v}, \vec{Q_0P} \rangle = 0 \rightarrow y=y_0$

$\begin{cases} x_0 y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2 = x^2+y^2+z^2 \\ y = y_0 \end{cases}$

$x_0y_0=1,\ z_0=0 \rightarrow \gamma_1$

$x_0^2+y_0^2+z_0^2 = x^2+y^2+z^2 \rightarrow$ $d_{(\cdot)}=d_{(\cdot)}$

$y=y_0 \rightarrow \langle\ \rangle = 0$

$\longrightarrow x^2y^2+z^2y^2=1$

3) Si consideri la sfera di $C(0,0,1)$ contenente $A(1,0,1)$. Scrivi l'equazione della sfera. Scrivi l'equazione del piano passante per A contenente r: $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$. Sia $\gamma =$ Scrivi il cono di vertice C e avente γ come direttrice.

1) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

2) Scrivo il fascio $x-y+K(x-2z)=0 \rightarrow 1-0+(1-2)=0 \Rightarrow \pi$: $2x-y-2z=0$

3) $s \perp \pi$ e $C \in s \Rightarrow s: \{ \quad \Rightarrow C' = s \cap \pi = \left(\tfrac{4}{9}; -\tfrac{2}{9}; \tfrac{5}{9}\right) \Rightarrow R = \|C'A\| = \tfrac{\sqrt{5}}{3}$

$P_0(x_0;y_0;z_0) \Rightarrow P_0 \in \gamma$: $\begin{cases} 2x_0-y_0-2z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2+(z_0-1)^2=1 \end{cases} \rightarrow \vec{VP_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0-1 \end{bmatrix}$. Il generico $P=(x;y;z)$ avrà $\vec{VP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix}$.

Per costruire il cono chiediamo che $\vec{VP} = t\vec{VP_0} \rightarrow \begin{cases} x = x_0t \\ y = y_0t \\ z-1 = (z_0-1)t \\ 2x_0-y_0-2z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2+(z_0-1)^2=1 \end{cases} \rightarrow t = x-\tfrac{1}{2}y-z+1 \Longrightarrow \tfrac{3}{4}y^2+xy+2xz-yz-2x+y=0$