15/03 —

CHIARIMENTO SU SE/ALLORA

Quando la proposizione "se x allora y" ($x \Rightarrow y$)? Essa è falsa solo se A è vero mentre B è falso. Quindi se A è falso, la relazione rimane vera!!

RELAZIONI

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano.

Prodotto Cartesiano

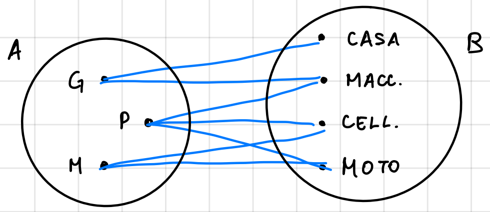
Si definisce prodotto cartesiano di $A_1, \dots, A_n$ insiemi $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \cdots a_n \in A_n\}$

Nota bene: $\{a, b\}$ è una coppia non ordinata; $(a,b) := \{a, \{b\}\}$ è una coppia ordinata (definizione data da Kuratowski)

Relazioni

Definiamo una relazione n-aria su $A_1, \dots, A_n$ $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$. Di conseguenza una relazione 1-aria sarà $R \subseteq A$.

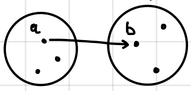
D'ora in poi parleremo principalmente di relazioni binarie $R \subseteq A_1 \times A_2$.



Notazioni:

- $R \subseteq T$ se $(a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in T$
- $R = T$ se $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
- $R \cap T = \{(a,b) \in A_1 \times A_2 : (a,b) \in R \wedge (a,b) \in T\}$
- $R \cap T = \{$ " " : " $\vee$ " $\}$
- $(a,b) \in R = a R b$

Come rappresentiamo una relazione binaria?

1) A e B sono insiemi finiti ($|A||B| < +\infty$)
   - grafo di adiacenza:  disegno la freccia se $a R b$
   - matrice di adiacenza: fissiamo un ordinamento di $A_1 = \{G', P'', M'''\}$ e $A_2 = \{CA', MA'', CE''', MO^{IV}\}$ e definisco una matrice $A \in Mat(|A_1| \times |A_2|, \{0,1\})$ di cui gli elementi saranno

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow M_R = \begin{array}{c} \\ G \\ P \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} CA & MA & CE & MO \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Come si comporta la matrice di adiacenza in presenza di unione ed intersezione?

- intersezione: vengono presi gli 1 presenti in entrambe le matrici $\Rightarrow (M_{R \cap T})_{ij} = (M_R)_{ij} (M_T)_{ij}$
- unione: vengono presi tutti gli 1 $\Rightarrow (M_{R \cup T})_{ij} = M_R \oplus M_T$ → somma booleana

Prodotto di relazioni

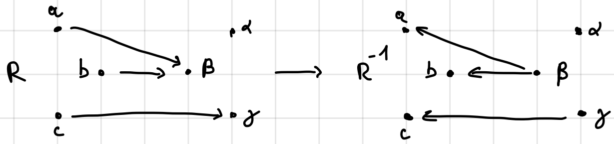
Prendiamo due relazioni $R \subseteq A_1 \times A_2$ e $T \subseteq A_2 \times A_3$ definiamo allora il prodotto

$R \cdot T \subseteq A_1 \times A_3 = \{(a,c) \in A_1 \times A_3 : \exists b \in A_2 : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\}$

Supponiamo di conoscere $M_R \in Mat(|A_1|\times|A_2|, \{0,1\})$ e $M_T \in Mat(|A_2|\times|A_3|, \{0,1\})$, posso scrivere $(M_R \times M_T)_{ij} = \sum_{k=1}^{|A_2|} (M_R)_{ik}(M_T)_{kj}$. Il prodotto di relazioni è associativo, come quello matriciale.

Inversa di una relazione

Data una relazione $R \subseteq A_1 \times A_2$, l'inversa della relazione è $R^{-1} \subseteq A_2 \times A_1 = \{(b,\alpha) \in A_2 \times A_1 : (\alpha,b) \in R\}$



Se M_R è la matrice d'incidenza di R, quella di R^{-1} sarà $M_{R^{-1}} = M_R^T$. Inoltre, è lecito scrivere che $R \cdot R^{-1} \subseteq A_1 \times A_1$ e $R^{-1} \cdot R \subseteq A_2 \times A_2$.

Relazioni binarie su di un unico insieme ($R \subseteq A \times A$)

Una relazione del genere ha delle interessanti proprietà:

- Le matrici di adiacenza sono quadrate
- Possiamo definire le potenze di relazioni: $R^4 = R \cdot R \cdot R \cdot R$; $R^0 = I_a$. Valgono anche le solite proprietà delle potenze.
- Possiamo definire la relazione identità $I_a = \{(a,a) : a \in A\}$
- $(M_R^K)_{ij}$ è pari al numero di percorsi di lunghezza K tra i e j
- si definisce seriale una relazione che soddisfa: $\forall a \in A \ \exists b \in A \ (a,b) \in R$ (ogni riga di M_R ha un 1)
- " " riflessiva " " " ": $\forall a \in A \ (a,a) \in R$ (la diagonale di M_R ha solo 1)
- " " simmetrica " " " ": $\forall a,b \in A$ se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ (M_R è simmetrica)