

SERIE A TERMINI NEGATIVI

Si dice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini negativi se $a_n < 0 \forall n$. Una serie a termini negativi può essere riservata in una a termini positivi:
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con $b_n = -a_n > 0 \forall n$.

SERIE DI TERMINI DI SEGNO VARIABILE

Una serie di segno variabile è ciò che modifica il nome. Una serie a segno variabile, oltre di essere divergente o convergente, può anche essere irregolare.
La condizione necessaria di convergenza continua a valere.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Per le serie positive, allora la convergenza assoluta e quella semplice (convergenza "normale") coincidono. Stessa cosa per le serie negative.

Per le serie a segno variabile le cose sono più complicate

RELAZIONE CONVERGENZA SEMPLICE - ASSOLUTA.

Ciò una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ che converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

DIM. Scriviamo $(a_n + |a_n|) - |a_n|$ da nostra serie sarà $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, la seconda converge per ipotesi. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |a_n|)$ è positiva ($(a_n - |a_n|) \geq 0 \forall n$), in più $|a_n - |a_n|| \leq 2|a_n| \forall n$. Avremo, quindi, che $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |a_n|) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dato che la seconda converge per ipotesi, anche la prima converge per criterio del confronto. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

ESEMPIO: Data $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. La serie è a segno variabile \Rightarrow studio la convergenza assoluta. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \Rightarrow$ usiamo il confronto: $|\cos(n)| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge.

SERIE A SEGNO ALTERNATO

Si dice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a segno alternato se $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n > 0 \forall n$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Ciò data una serie a segni alternati $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n > 0 \forall n$. Se valgono queste, la serie converge semplicemente:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$2) b_n \text{ è monotona decrescente}$$

DIM. Consideriamo a_n decrescente tale che $S_K = S_{K-1} + (-1)^K a_K \Rightarrow \begin{cases} S_{2h} < S_{2h+1} + a_{2h} \Rightarrow S_{2h-2} + (a_{2h} - a_{2h-2}) < S_{2h-2} \Rightarrow \text{decresce} \Rightarrow \underline{\lim}_{\text{LIM. SUP.}} S_{2h} \leq S_0, \underline{\lim}_{\text{LIM. INF.}} S_{2h} \geq S_{2h-2} - a_h \leq \dots \leq S_1 - a_m \\ S_{2h+1} = S_{2h} - a_{2h+1} = S_{2h-1} + (a_{2h} - a_{2h+1}) \Rightarrow S_{2h-1} \Rightarrow \text{crecente} \Rightarrow \overline{\lim}_{\text{LIM. INF.}} S_{2h+1} \geq S_1, \overline{\lim}_{\text{LIM. SUP.}} S_{2h+1} \geq S_{2h} - a_{2h+1} \geq \dots \geq S_0 \end{cases}$

Quindi $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim a_h = 0$ ma $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim S_{2h} - \lim S_{2h+1} = \bar{s} - \tilde{s} = 0 \Rightarrow \bar{s} = \tilde{s} \Rightarrow S_n$ converge $\Rightarrow \lim S_{2h+1} = \bar{s}$

FUNZIONI REALI A VARIABILE REALE

Sono funzioni del tipo $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Si diano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, si definisce $g(f(x))$ se $A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \text{funz. } B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} f(g(x))$ in $B \subseteq \mathbb{R} \ni g(f(x)) \in A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Non vale la comutatività fra f e g .