

Appunti Geometria e algebra lineare

Alexandru Gabriel Bradatan

Data di compilazione: 22 settembre 2019

1 Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti. Tutta la matematica si basa sulla teoria assiomatica degli insiemi. Un insieme A si può indicare per elencazione ($A = \{a_1, \dots, a_n\}$) o con una condizione ($A = \{x | \text{condizione}\}$). La cardinalità di A è il numero di oggetti: $|A| = n$. La cardinalità dell'insieme vuoto è 0.

Esempi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, $\mathbb{R} = \{\text{x numeri decimali}\}$.

Un insieme particolare è l'insieme con nessun elemento detto vuoto, indicato con \emptyset . Un altro insieme particolare è l'insieme di tutti gli tutto detto insieme universo U .

1.1 Sottoinsiemi

Un insieme può essere sottoinsieme di un altro, ossia contenere una parte degli elementi dell'insieme più grande. Formalizzando si può dire che:

$$A \subset B \implies \forall a \in A, a \in B$$

1.2 Insiemi numerici

Trattati nel dettaglio negli appunti di Analisi 1.

1.3 Operazioni

Le operazioni più usate sono:

Unione $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Intersezione $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Differenza $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ Si può anche trovare indicata con \setminus

Prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ Le coppie (a, b) sono anche dette coppie (m-uple per m elementi)

2 Relazioni

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi.

Per indicare che due elementi (a_i, b_j) sono legati da una relazione R usiamo $a_i \sim_R b_j$. Per rappresentare le relazioni si possono usare i diagrammi di Venn (le patate) con le frecce che collegano i vari elementi tra di loro.

Esempio Presi $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$, calcoliamo il loro prodotto cartesiano e otterremo 16 possibili sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} R_0 &= \emptyset \\ R_1 &= \{(a_1, b_1)\}, \dots, R_4 \\ R_5 &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}, \dots, R_{10} \\ R_{11} &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}, \dots, R_{14} \\ R_{15} &= A \times B \end{aligned}$$

2.1 Relazioni particolari

Relazione d'ordine Prendiamo una relazione $R \subseteq A \times A$, essa è d'ordine se:

- è riflessiva: $(a, a) \in R \forall a \in R$
- è antisimmetrica: $(a, b), (b, a) \in R \implies a = b$
- è transitiva: $(a, b), (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

Insieme totalmente e parzialmente ordinato Siano A un insieme ed R una relazione d'ordine su A . Se per ogni $a_1, a_2 \in A$ vale $(a_1, a_2) \in R$ oppure $(a_2, a_1) \in R$, R si dice relazione d'ordine totale e la coppia (A, R) si dice insieme totalmente ordinato. In caso contrario si dice che R è una relazione d'ordine parziale e la coppia (A, R) si dice insieme parzialmente ordinato.

Relazione di equivalenza Prendiamo una relazione $R \subseteq A \times A$, essa è di equivalenza se:

- è riflessiva: $(a, a) \in R \forall a \in R$
- è simmetrica: $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$
- è transitiva: $(a, b), (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

Una modo di vedere la relazione di equivalenza è come generalizzazione dell'uguaglianza.

Classe di equivalenza Data una relazione di equivalenza R , preso un elemento a , la classe di equivalenza di a sono tutti gli elementi equivalenti equivalenti ad a , ossia:

$$[a]_R = \{b \in A | a \sim_R b\}$$

La classe di equivalenza è in sostanza l'insieme di tutti gli elementi equivalenti tra di loro.

Teorema: Ogni elemento $a \in A$ appartiene a una sola classe di equivalenza (dimostrazione nella dispensa, teorema 2.38). Teorema: Un insieme A sul quale agisce una relazione di equivalenza R è l'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza.

Insieme quoziente L'insieme quoziente A/R di A rispetto a una relazione di equivalenza R è l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

3 Funzioni

Le funzioni sono speciali relazioni che associano a ogni elemento del primo insieme un solo elemento del secondo. Una funzione in genere si indica con la lettera minuscola e usa questa notazione:

$$f : A \rightarrow B$$

L'insieme A è detto dominio, B il codominio. L'insieme di tutte le possibili funzioni che vanno da A a B si indica con B^A .

Preso $a \in A, b = f(a)$ sarà la sua immagine. La controimmagine di b è l'elemento tale che $f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$

L'insieme di tutte le immagini è detto insieme immagine e si indica con $Im(f)$.

Funzione particolare La funzione $A \times A = \Delta A = Id(A) = \{(a, a) | a \in A\}$ è detta funzione identità o insieme diagonale.

Iniettività Una funzione è detta iniettiva se $\forall a, b \in A, a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$.

Suriettività Una funzione è detta suriettiva se $\forall b \in B, \exists a \in A | f(a) = b$.

Funzione biunivoca Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva è detta biunivoca. Se una funzione è biunivoca può essere invertita ottenendo $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Composizione di funzioni Date due funzioni $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, la composizione $g \circ f$ delle due è una nuova funzione tale che $g \circ f : A \rightarrow C$. Ciò equivale a dire che $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

4 Operazioni

Le operazioni sono delle speciali funzioni: dati $n + 1$ insiemi A_1, \dots, A_{n+1} non vuoti, una operazione n -aria $*$ è una funzione che:

$$\begin{aligned} * : A_1 \times \dots \times A_n &\rightarrow A_{n+1} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto *(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Se $A_1 = \dots = A_{n+1}$ allora l'operazione è detta interna, altrimenti è detta esterna. Se $n = 2$ allora l'operazione è detta binaria e si può indicare con $a_1 * a_2$.

Esempi La somma $+$ un'operazione binaria interna a \mathbb{N}

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n1, n2) &\mapsto n3 = n1 + n2 \end{aligned}$$

La differenza è sempre un'operazione binaria, ma esterna ad \mathbb{N}

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n1, n2) &\mapsto n3 = n1 - n2 \end{aligned}$$

Le varie operazioni possono essere rappresentate in tabelle che indicano tutti i possibili casi. Ad esempio, esistono $2^4 = 16$ diverse operazioni binarie interne ($* : A \times A \rightarrow A$) ad $A = \{a_1, a_2\}$.

Proprietà delle operazioni Le operazioni possono godere di alcune proprietà:

Elemento neutro $a * e = a$

Inverso $a * a^{-1} = e$

Proprietà commutativa $a * b = b * a$

Proprietà associativa $a * (b * c) = (a * b) * c$

Proprietà distributiva Lega due operazioni: $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$

5 Struttura algebrica

Dicesi struttura algebrica l'insieme di un certo numero di insiemi A_1, \dots, A_n , chiamato *supporto della struttura* e delle operazioni $*_1, \dots, *_n$ su questi insiemi.

Tre importanti strutture sono il gruppo, l'anello e il campo.

5.1 Il gruppo

Il gruppo è una struttura algebrica del tipo $(G, *)$ dove G è un insieme e $*$ è un'operazione binaria interna a G che deve rispettare queste date proprietà $\forall a \in G$:

- Deve possedere l'elemento neutro in G
- Deve possedere l'inverso in G
- Deve godere della proprietà associativa

Se l'operazione è anche commutativa il gruppo viene detto abeliano.

5.2 L'anello

Un anello è una struttura algebrica del tipo $(A, *, \cdot)$ dove le due operazioni devono soddisfare le seguenti proprietà:

- $(A, *)$ è un gruppo abeliano
- \cdot deve avere elemento neutro in A
- \cdot deve godere della proprietà associativa
- \cdot e $*$ devono essere legate dalla proprietà distributiva

Se la seconda operazione è commutativa, allora l'anello si dice commutativo.

5.3 Il campo

Un campo è una struttura algebrica del tipo $(K, *, \cdot)$ dove le due operazioni devono soddisfare le seguenti proprietà:

- $(K, *)$ deve essere un gruppo abeliano con elemento neutro e
- Detto $K^* = K - e$, (K^*, \cdot) deve essere un gruppo abeliano
- Le due operazioni sono legate dalla proprietà distributiva

Il campo $(\mathbb{R}, +, \times)$ è uno dei campi più importanti.

5.4 Omomorfismo

Un omomorfismo tra due strutture algebriche è una funzione f che commuta tra le due con le loro operazioni. Se f è invertibile, allora viene chiamata isomorfismo.

Omomorfismo di gruppi Dati due gruppi $(A, *)$ e (B, \cdot) la funzione $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo se

$$f(a_1 * a_2) = f(b_1) \cdot f(b_2)$$

Omomorfismo di campo Dati due campi $(A, *_1, \cdot_1)$ e $(B, *_2, \cdot_2)$ la funzione $f: A \rightarrow B$ è un omomorfismo se

$$f(a_1 *_1 a_2) = f(a_1) *_2 f(a_2) \wedge f(a_1 \cdot_1 a_2) = f(a_1) \cdot_2 f(a_2)$$

6 Polinomi

Un polinomio $P(x)$ è una particolare funzione della forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Dove (a_1, \dots, a_n) (i coefficienti) appartengono a un campo K^{n+1} . L'insieme di tutti i possibili coefficienti si indica con $K[x]$. Un polinomio nelle m variabili x_1, \dots, x_m è definito induttivamente come l'espressione:

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^n Q_i(x_1, \dots, x_{m-1}) x_m^i$$

dove Q_1, \dots, Q_n sono polinomi nelle prime $m-1$ variabili. L'insieme di tutti i polinomi di questo tipo si indica con $K[x_1, \dots, x_m]$.

Se il campo K coincide con il campo dei reali $((\mathbb{R}, +, \times))$ allora $K[x] = \mathbb{R}[x]$ e sarà l'insieme di tutti i possibili polinomi con variabile reale.

Un polinomio è generalmente scritto come somma di monomi.

Il grado di un polinomio Il grado di un polinomio $P(x)$ è il massimo grado dei suoi monomi con grado diverso da 0. Il polinomio nullo ha per definizione grado indeterminato.

6.1 Divisione tra polinomi

Data la coppia $(A, B) \in K[x] \times K[x], B \neq 0$, esiste una sola coppia $(Q, R) \in K[x] \times K[x]$ tale che $A = QB + R$ per la quale $\text{grado}(R) < \text{grado}(B)$ o $\text{grado}(R) = 0$. Q e R sono rispettivamente quoziente e resto della divisione di A e B .

Molteplicità algebrica Dati $P \in K[x], r \in \mathbb{N}$ esiste un valore $m < \text{grado}(P)$ tale che $(x-r)^m$ divida $P(x)$. Tale valore è detto molteplicità algebrica di r rispetto a P . La r sarà la radice del polinomio. Se la molteplicità algebrica di r è 1, r è una radice semplice.

Chiusura algebrica Le radici di un polinomio $P \in K[x]$ di grado n rispettano la regola $m_1 + \dots + m_i \leq n$ dove m_i è la molteplicità algebrica di r_i con $i = 1, \dots, k$. Per ogni campo K esisterà un altro campo \bar{K} che lo contiene tale che ogni polinomio appartenente ad esso abbia le radici che soddisfino $m_1 + \dots + m_i = n$. Tale campo è detto chiusura algebrica di K . Se K e la sua chiusura coincidono, K si dice algebricamente completo.

Il campo dei \mathbb{C} è algebricamente chiuso, è la chiusura algebrica di \mathbb{R} e contiene la chiusura algebrica di \mathbb{Q} .

7 Matrici

Le matrici sono uno strumento fondamentale per fare i conti in matematica.

Dati due insiemi $M = 1, \dots, m$ e $N = 1, \dots, n$, una matrice di ordine (m, n) ad elementi nel campo K è una funzione definita come:

$$\begin{aligned} A: M \times N &\rightarrow K \\ (i, j) &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

L'insieme di tutte le matrici di ordine (m, n) su K viene indicato con $Mat(m, n; K)$.

La matrice nulla è indicata con 0_{mn} . La matrice identità I_{mn} è, invece, una matrice del tipo:

$$I_{mn} : \begin{array}{ccc} M \times N & \rightarrow & K \\ (m, n) & \mapsto & \Delta \end{array} \text{ con } \Delta = 1 \text{ se } i = j$$

Rappresentazione Una matrice può essere pensata come una tabella di numeri di m righe ed n colonne:

$$A = \begin{array}{ccc} & 1 & \cdots & n \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \in Mat(m, n; K) \end{array}$$

8 Sistemi lineari