

9 CIRCUITI VARIABILI

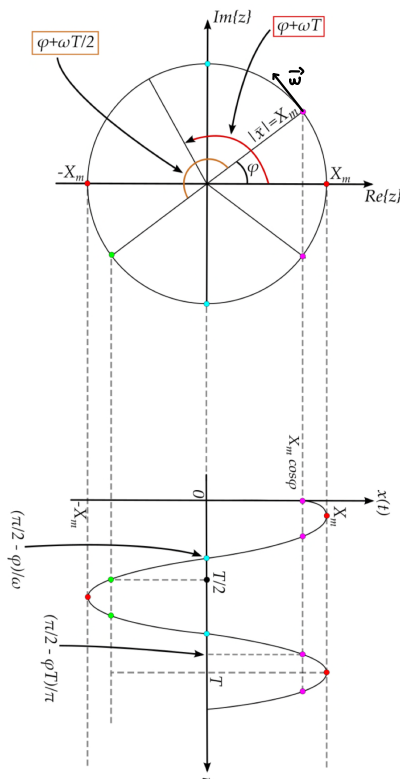
9.1 FASORI

Un fasore è un numero complesso che corrisponde a una determinata $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Il numero complesso associato è:

$$\bar{x} = X e^{i\varphi} \quad (\omega \text{ non è presente perché è fisso}).$$

\downarrow \downarrow
 modulo fase

Ciò si può interpretare graficamente come:



Per tornare dal dominio dei fasori a quello del tempo facciamo:

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \bar{x} e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ X e^{i\varphi} e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ X e^{i(\omega t + \varphi)} \} = X \operatorname{Re} \{ \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) \} = X \cos(\omega t + \varphi)$$

9.2 PROPRIETÀ DEI FASORI

1) **UNICITÀ:** date due sinusoidi, esse sono uguali solo se i due fasori corrispondono (NB: la pulsazione è costante)

2) **LINEARITÀ:** se $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ allora $\bar{x} = \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2$

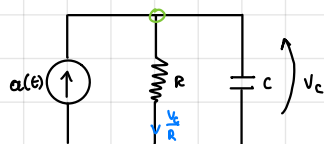
3) **DERIVAZIONE:** se $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ e $y = \frac{d}{dt} x(t)$, allora $\bar{y} = i\omega \bar{x}$

$$\text{DIM: } y(t) = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \bar{y} = \omega X e^{i\varphi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega \bar{x}$$

9.3 METODO DEI FASORI

Consideriamo un circuito costituito da n-terminali lineari al più dinamici e soggetti a ingressi sinusoidali a pulsazione fissa. Principalmente sostituiamo le $v(t)$ e $i(t)$ con i corrispondenti fasori riducendo il circuito dinamico reale ad un circuito adinamico complesso

ESERCIZIO



$$\left. \begin{aligned} a(t) &= A \cos \omega t \\ a(t) &= \frac{v_c}{R} + C \frac{dv_c}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC} v_c + \frac{a(t)}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$v_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + v_{c,ip}(t)$$

Passiamo al dominio di fasori:

$$v_{c,ip}(t) \leftrightarrow \bar{v}_{c,ip} \rightarrow i\omega \bar{v}_{c,ip} = -\frac{1}{RC} \bar{v}_{c,ip} + \frac{A}{C} \rightarrow (1 + i\omega RC) \bar{v}_{c,ip} = \frac{RA}{C} \rightarrow \bar{v}_{c,ip} = \frac{RA}{1 + i\omega RC} = \frac{RA(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$a(t) \leftrightarrow \bar{a} = A$$

Torniamo al dominio del tempo: $V_{C,IP}(t) = \text{Re} \left\{ \frac{RA}{1+(wRC)^2} (1-iwRC) e^{iwt} \right\} = \frac{RA}{1+(wRC)^2} [\cos(wt) + wRC \sin(wt)]$

Per ricavare la risposta forzata di un circuito in regime sinusoidale non bisogna necessariamente passare per l'equazione di stato. Possiamo risolvere il circuito direttamente nel dominio dei fasori. Ciò è possibile perché le leggi di Kirchhoff valgono e le equazioni dei componenti visti fino ad oggi si traducono così:

COMPONENTE	D. TEMPO	D. FASORI
C.C.	$V_C(t) = 0$	$\bar{V} = 0$
C.A.	$i_C(t) = 0$	$\bar{I} = 0$
G. IND. V	$v(t) = E \cos(wt + \varphi)$	$\bar{V} = E e^{j\varphi}$
G. IND. C	$i(t) = A \cos(wt + \varphi)$	$\bar{I} = A e^{j\varphi}$
RES.	$v(t) = R i(t)$	$\bar{V} = R \bar{I}$
G. PIL.	$\begin{cases} v_1(t) = \mu i_2(t) \\ v_2(t) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{V}_1 = \mu \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = 0 \end{cases}$
TRASFERITORE IDEALE	$\begin{cases} v_1(t) = n v_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases}$
COND.	$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$\bar{I} = j\omega C \bar{V}$
SINUS.	$v(t) = L \frac{di}{dt}$	$\bar{V} = j\omega L \bar{I}$

3.4 IMPEDENZA E AMMETTEZZA DI BIPOLI

L'impedenza e l'ammettenza sono l'estensione in regime sinusoidale di resistenza e conduttanza:

$$\begin{aligned} V = Ri \rightarrow R = \frac{V}{i} &\Rightarrow Z(j\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad [\Omega], \text{ esiste se ammette base corrente} \\ G = R^{-1} &\Rightarrow Y(j\omega) = Z(j\omega)^{-1} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \quad [S], \text{ esiste se ammette base tensione} \end{aligned}$$

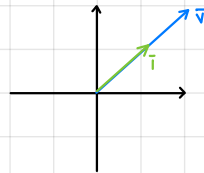
X e Y non sono fasori ma sono numeri complessi. Essendo numeri complessi possiamo esprimerli in forma algebrica:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

\downarrow
reattanza
 \downarrow
suscettanza

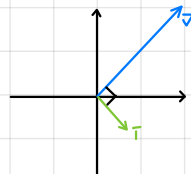
Studiando l'impedenza nel piano di Gauss possiamo vedere che esse possono introdurre sfasamenti:

- RESISTORE: $R = Z$



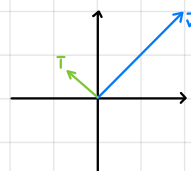
\Rightarrow non introduce sfasamento

- CONDENSATORE: $Z = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$



\Rightarrow sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ (corrente in ritardo)

- INDUTTORE: $Z = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$



\Rightarrow sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ (corrente in anticipo)

Possiamo classificare z in base alla sua reattanza:

- CAPACITIVO: $X(\omega) < 0$ (porterà la corrente in ritardo)
- RESISTIVO: $X(\omega) = 0$ (non sfasa)
- INDUTTIVO: $X(\omega) > 0$ (porterà la corrente in anticipo)