1) Sia $A\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$:

anche se A non è diag.

1) $Tr(A) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ → per def di traccia

2) $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ → per def di det per matrice diag.

3) $\mathrm{II}_2(A) = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$ → $\begin{vmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_3\end{vmatrix} = \lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$

2) f_A definita da $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

1) f_A è diagonalizzabile? Calcola la base di autovettori di A

$P_A(\lambda) = |A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = [\dots] = (\lambda-2)(\lambda^2-11\lambda+10) \to \lambda_1 = +2,\ \lambda_2 = [\dots] = 10,\ \lambda_3 = [\dots] = 1$ → 3 autovalori semplici ⇒ f_A diagonalizzabile.

$V_\lambda = Ker(f_A - \lambda Id) = Ker(A-\lambda I_3)$

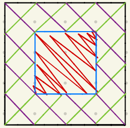
$V_2 = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 7 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-2 & 7 & 2\\ 0 & +2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$V_{10} = \begin{bmatrix}-8 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -8\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-8 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_{10} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}\right)$

$V_1 = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}\right)$

→ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow F_{A|B} = \left[f_A(v_1)\,|\,f_A(v_2)\,|\,f_A(v_3)\right] = \left[\lambda_1 v_1|_B\ \ \lambda_2 v_2|_B\ \ \lambda_3 v_3|_B\right] = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3) Discutere la diagonalizzabilità di: $A_h\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B_h = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$



$P_{A_h}(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & h-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(h-\lambda) \to \lambda_{1A} = 2,\ \lambda_{2A} = 1,\ \lambda_{3A} = h$

per $h\neq 1, h\neq 2$ ⇒ $\lambda_{1A}, \lambda_{2A}, \lambda_{3A}$ sono semplici ⇒ A_h è diagonalizzabile.

per $h=1$ ⇒ λ_{1A} è semplice, λ_{2A} ha $ma = 2$

verifichiamo la mg.: $mg(\lambda_{2A}) = dim(Ker(A_1-\lambda I)) = dim(V) - rg(A_1 - I) = 3 - rg\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 3-2 = 1$ ⇒ per $h=1$ A_h non è diagonalizzabile

per $h=2$ ⇒ λ_{2A} è semplice, λ_{1A} ha $ma = 2$

verifichiamo la mg.: $mg(\lambda_{1A}) = (dim(Ker(A_2 - 2I)) = dim(V) - rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3-1 = 2$ ⇒ λ_{1A} è regolare ⇒ per $h=2$ A_h è diagonalizzabile

P_{B_h} = Homework

4) $A_h\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & h^2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B_h\begin{bmatrix}1+h & 0 & 0\\ 0 & 1-h & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

1) Per quali valori di h A_h e B_h sono simili

2) Trova una base di autovettori di A_1

3) Trova un valore di h che renda $\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$ autovettore di A_h

1) B_h è già diagonale ⇒ $\lambda_1 = 1+h, \lambda_2 = 1-h, \lambda_3 = 2$ A_h è simile a B_h se A_h è diagonale e gli autovalori coincidono. ⇒ $P_{A_h}(\lambda) = [\dots] = (2-\mu)(1-\mu-h)(1-\mu+h) \Rightarrow \mu_1 = 2, \mu_2 = 1+h, \mu_2 = 1-h$ ⇒ gli autovalori coincidono.

Studiamo la diagonalizzabilità di A_h:

per $h\neq 0 \wedge h\neq \pm 1$ A_h è diagonalizzabile ⇒ A_h è simile a B_h

per $h=0$ μ_1 è semplice, μ_2 ha $m.a. = 2$ ⇒ $mg(\mu_2) = dim(V) - rg(A_0 - I) = 3-2 = 1$ ⇒ A_0 non è diagonalizzabile ⇒ A_0 non è simile a B_0

per $h=1$ μ_2 è semplice, μ_1 ha $m.a. = 2$ ⇒ $mg(\mu_1) = dim(V) - r(A_1 - 2I) = 3-1 = 2$ ⇒ A_1 è diagonalizzabile ⇒ A_1 è simile a B_1

per $h=-1$ μ_2 è semplice, μ_1 ha $m.a. = 2$ ⇒ $mg(\mu_1) = dim(V) - rg(A_{-1} - 2I) = 3-1 = 2$ ⇒ A_{-1} è diagonalizzabile ⇒ A_{-1} è simile a B_{-1}

2) $h=1 \Rightarrow \mu_1 = 2, \mu_2 = 0 \Rightarrow V_2 = Ker(A_1 - 2I) = Ker\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$V_0 = Ker(A_1) = Ker\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$

⇒ $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

3) $A_h\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\2h^2\\2\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\cancel{2}h^2 = 0\\ 1\cancel{2} = \cancel{2}\mu\end{cases} \to \begin{cases}h=0\\ \mu=1\end{cases}$

5) Sia $f \in End(V)$ su $\mathbb{Q}$ $(\dim(V)=3)$. a) -1 è autovalore; b) $P_f(+1)=1$; c) $Tr(f)=3$

1) Scrivere $P_f(\lambda)$
2) Dire se f è diagonalizzabile
3) Scrivere una matrice che rappresenta f.

1) $P_f(\lambda) = c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = -\lambda^3 + Tr(f)\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \Rightarrow \begin{cases} P_f(-1)=0 \\ P_f(1)=1 \end{cases} \to \begin{cases} 1-3-c_1+c_0=0 \\ -1-3+c_1+c_0=1 \end{cases} \to \begin{cases} -c_1+c_0=2 \\ +c_1+c_0=5 \end{cases} \to \begin{cases} c_0=\frac{7}{2} \\ c_1=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P_f(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{7}{2}$

2) $\begin{cases} |f| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = c_0 \\ Tr(f) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = c_2 \\ I_2(f) = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3 = c_1 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$ $\to$ HOMEWORK

3) $F_{|B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

6) Sia $\mathcal{B}_K = \{ \underline{u}=(1,K,1), \underline{v}=(1,1-K,1), \underline{w}=(1,1,-1) \}$ e $f \in End(V)$ rapp. da $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

1) Per quali K $\mathcal{B}_K$ è una base di $\mathbb{R}^3$?
2) f è diagonalizzabile?
3) Trova $\bar{K}$ tale che $\underline{u}$ è autovettore di F e verifica che $\mathcal{B}_{\bar{K}}$ è base
4) Scrivi $F_{|\mathcal{B}_{\bar{K}}}$

1) [...] $\mathcal{B}_K$ è base per $K \neq \frac{1}{2}$

2) $P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda = 1$ $\quad m.a.(\lambda)=3 \Rightarrow$ F è diag. se $F = \lambda I_3 \Rightarrow F \neq \lambda I_3 \Rightarrow F$ non è diag.

3) $F\underline{u} = \lambda\underline{u} = \underline{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+K \\ K \\ 1+K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{1}+K=\cancel{1} \\ K=K \end{cases} \begin{cases} K=0 \\ K=K \end{cases} \Rightarrow \bar{K}=0$. Poiché $\bar{K} \neq \frac{1}{2}$, $\mathcal{B}_{\bar{K}}$ è base.

4) HOMEWORK

PAGE RANK ALGORITHM

MOTORE DI RICERCA Esplorare la rete e indicizzare le pagine in modo da essere cercate per parola chiave e ordinarle in base all'affinità con le parole chiavi

GRAFO ORIENTATO Coppia ordinata di vertici e lati $G=(V,E)$, $V=\{\text{vertici}\}$, $E=\{\text{lati}\}$. Un lato è una coppia ordinata di vertici

I vari elementi (vertici e lati) possono essere pesati: $w: \begin{array}{l} \{V,E\} \to U \\ v_i \mapsto w_i \\ v_{(i,j)} \mapsto w_{i,j} \end{array}$

Nel caso di internet: $V=\{\text{pagine}\}$, $E=\{\text{link } A \to B\} \Rightarrow G(V,E)$ è orientato. L'algoritmo di Page Ranking è la funzione peso che pesa $G(V;E)$.

FUNZIONE PESO La funzione peso adottata è stata: $w: \begin{array}{l} \{V;E\} \to \mathbb{Q} \\ v_i \mapsto \sum_i w_{ij} \text{ (somma dei pesi dei link entranti)} \\ (v_i,v_j) \mapsto \frac{w_i}{n_i} \text{ (peso della pagina da cui parte diviso il numero di link uscenti)} \end{array}$

Per trovare i pesi delle pagine, si deve risolvere un sistema lineare del tipo $\underline{w} = A\underline{w}$:

1) $\underline{w}$ deve essere un autovettore di A associato a $\lambda=1$. $(\underline{w} \neq 0)$
2) $\underline{w}$ deve essere unico $\Rightarrow \dim(V_1) = mg(1) = 1$
3) L'algoritmo per calcolare $\underline{w}$ deve essere abbastanza efficiente.

$\to$ Problemi da risolvere $\Rightarrow$

1) Per come l'abbiamo definito, A è stocastica a colonne (somma elementi sulla colonna è 1) e, per un teorema, ha sempre autovalore 1