

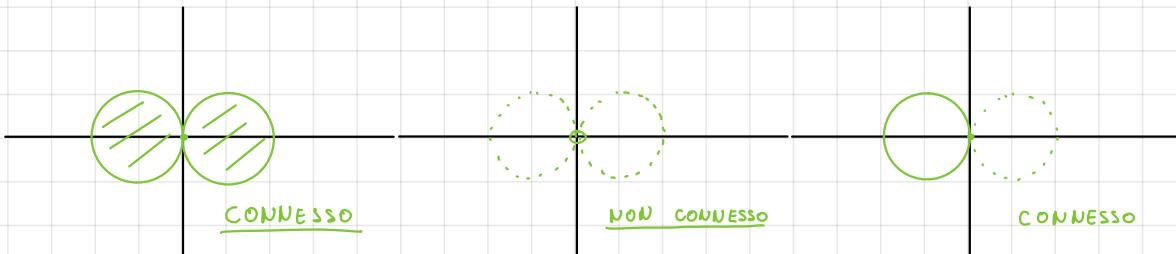
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \vee (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$B = \left\{ " " " < " " < \right\}$$

$$C = \left\{ " " " \leq " " < \right\}$$



Nota bene: nessuno degli insiemini è chiuso.

2) Dato  $C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$ , determina  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

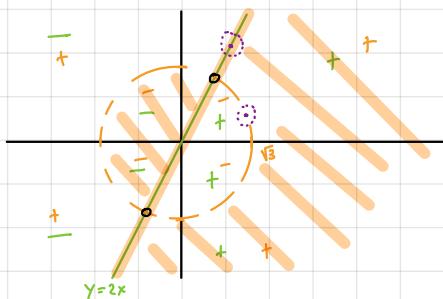
Ogni  $C_n$  è una circonferenza con raggio crescente  $R \rightarrow 2$ . L'unione  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$  viene uguale a  $C_{\infty} = \left\{ " : x^2 + y^2 \leq 2 \right\}$ . L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'esso chiuso.

Proprietà è scrivibili come:

- 1) Unione infiniti aperti è aperto
- 2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

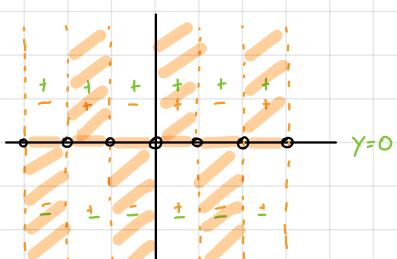
3) Consideriamo  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , determiniamo  $D$

- $f(x, y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow D$  è aperto, non chiuso ( $\partial D \not\subseteq D$ ), illimitato, scorrenso per archi
- $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 - 4} \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 4 \rightarrow$  fuori dell'ellisse di semiassi  $a=2, b=\sqrt{2} \Rightarrow D$  è aperto, non chiuso, illimitato, scorrenso per archi.
- $f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{2x-y}{x^2 + y^2 - 3}} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 2x \\ x^2 + y^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow D$  è aperto, non chiuso, illimitato, scorrenso per archi.



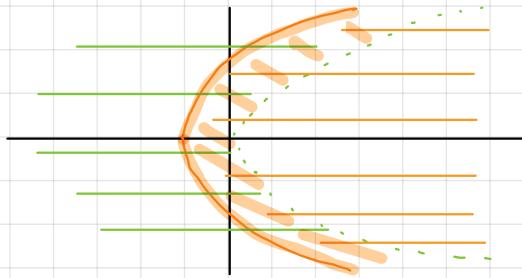
L'insieme non è aperto ( $\exists D \subset D$ ), non è chiuso ( $\exists D \not\subseteq D$ ), illimitato, scorrenso per archi

- $f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



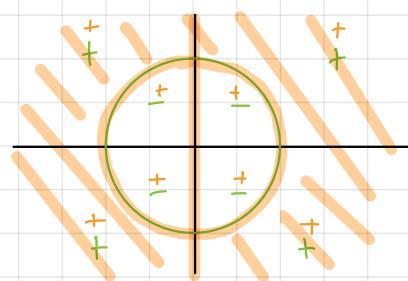
Né aperto né chiuso, illimitato, scorrenso per archi

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{-\ln(y^2 - x)} \Rightarrow \begin{cases} -\ln(y^2 - x) \geq 0 \rightarrow \ln(y^2 - x) \leq \ln 1 \rightarrow y^2 - x \leq 1 \rightarrow \\ x < y^2 \end{cases}$$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot (x^2 + y^2 - 4)} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$



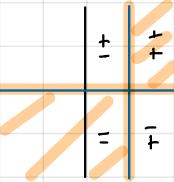
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{xy - y + 1}$$

$$D: xy - y + 1 \geq 0 \rightarrow y(x-1) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

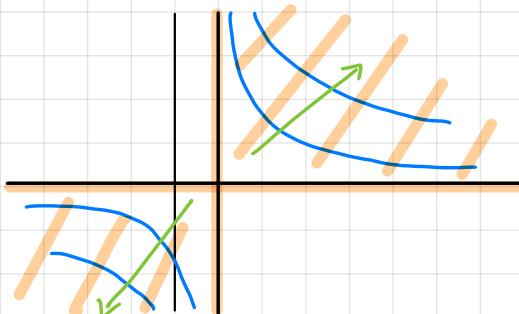
O ± sempre positiva sevea zeri in D

$$\text{LIVELLI } \sqrt{xy - y + 1} = c \quad \text{se } c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$\text{se } c < 1 \quad E_c = \emptyset$$

$$\text{se } c \geq 1 \quad \rightarrow xy - y = c(c-1)^2 \Rightarrow y = \frac{(c-1)^2}{x-1} \quad \text{per } x \neq 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow c = 1 \rightarrow y(x-1) = 0$$



$$\bullet f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$D: x^2 + y^2 > 0 \quad (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

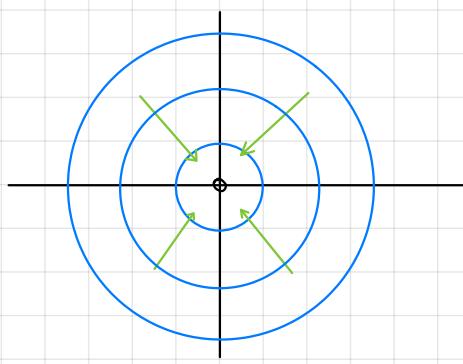
± funzione sempre positiva

O non ci sono zeri

$$\text{LIVELLI } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$$

$$c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$c > 0 \quad \frac{1}{x^2 + y^2} = c^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$



$$f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$$

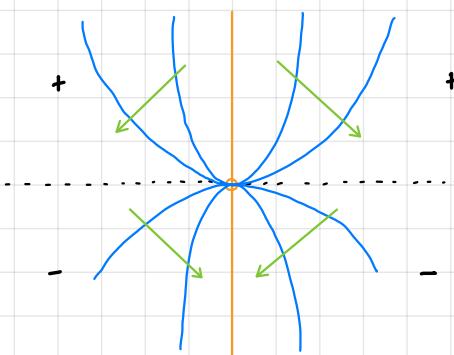
D  $D = \mathbb{R}, \{y=0\}$

O  $e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = 0 \quad x=0$

$\pm e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \rightarrow \frac{x^2}{y} > 0 \quad y > 0$

LIVELLI  $e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \quad c \leq -1 \quad E_c = \emptyset$

$c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{se } c=0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



2) Trova gli zeri di  $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4$  ( $D = \mathbb{R}$ )

$$y^2 = 8x^2 - x^4 \rightarrow y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}; \quad \text{fatto} \quad y = \sqrt{8x^2 - x^4}; \quad \text{l'altra è simmetrica}$$

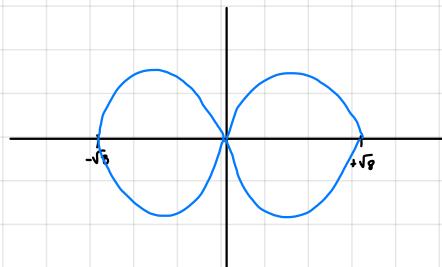
$$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

PARI,  $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y=0 \text{ se } x=0, x=\pm\sqrt{8}$

$$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \geq 0 \iff 4x(4 - x^2) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} -\sqrt{8} & -2 & 0 & 2 & \sqrt{8} \\ \hline & & & & & & \end{array}$$



28/03/20

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3y + y^3}{x^4 + y^2}$$

restringo  $y=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} \not\rightarrow \text{il limite non esiste}$

2) Calcola il dominio e verifica la continuità di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^2$$

$f$  è sicuramente continua per  $(x,y) \neq (0,0)$ . In  $(x,y) = (0,0)$  abbiamo:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} f(x,y) =$$

restringo  $y=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^6} = 0$

restringo  $x=0$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0$   
 restringo  $y=mx$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^4}{x^6 + m^2 x^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^2}{x^4 + m^2} = 0$   
 restringo  $y=x^3$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$  poiché  $\frac{1}{2} \neq 0$ , il limite non esiste  $\Rightarrow$  la funzione non è continua in  $(0,0)$

3) Calcola se esiste:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3}{x^2 + y^4} = \dots = 0$$

restringo  $y=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$   
 restringo  $x=0$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$   
 restringo  $x=y^2$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{2y^4} = 0$

Sappiamo che il limite esiste, allora  $|f(x,y)-0| < \epsilon$  ( $\forall \epsilon > 0$ )  
 Ma:  $\left| \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{|x|(|x^2| + |y^4|)}{x^2 + y^4}$ . Siccome  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|=0$ , il limite esiste e vale 0.

4)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$$

restrizione  $x=0$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{0}{y^2}} = 1$   
 ,  $y=x$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} = e^{-1}$  }  $\exists$  limite

5)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}{x^2}$$

siccome  $0 < e^{-\frac{x^2}{y^2}} \leq 1$ , il limite esisterà e sarà 0.

6) Calcola  $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^4}$ , per quale  $\alpha \in \mathbb{R}$  esiste e quanto vale

polari:  $\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^\alpha \cos^2 \theta p^3 \sin \theta}{p^{2\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0^+} p^{5-2\alpha} \cos \theta \sin \theta$

$p^{5-2\alpha}$  per  $p \rightarrow 0^+$   $\begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } 5-2\alpha > 0 \\ = 1 & \text{se } \alpha = \frac{5}{2} \\ \rightarrow +\infty & \text{se } 5-2\alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists & \alpha < \frac{5}{2} & l=0 \\ \exists & \alpha > \frac{5}{2} & \nexists l \end{cases}$

7) Calcola il limite se esiste:

$$\lim_{x,y \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2 - y^2}$$

restringo  $y=0$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$   
 polari:  $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-p^2} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$  il limite esiste e vale 0

8)

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} e^{-x^3 - y^3}$$

restringo  $y=0$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^3} = \begin{cases} 0^+ & x \rightarrow -\infty \\ +\infty & x \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists$  limite

9)

$$\lim_{x,y \rightarrow 2,-1} \frac{(y^2 - x^2 + 3)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

restringo  $x=2$ :  $\lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y^2 - 4 + 3)^2}{(y+1)^2} = \dots = 4$   
 polari:  $\begin{cases} x = 2 + p \cos \theta \\ y = -1 + p \sin \theta \end{cases} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \frac{[(-1 + p \sin \theta)^2 - (2 + p \cos \theta)^2 + 3]^2}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{[-2p \sin \theta - 4p \cos \theta + p^2 \sin^2 \theta - p^2 \cos^2 \theta]^2}{p^2}$   
 $= \lim_{p \rightarrow 0} [-2 \sin \theta - 4 \cos \theta + p \sin^2 \theta - p \cos^2 \theta]^2 = [-2 \sin \theta - 4 \cos \theta]^2 \rightarrow$  dipende da  $\theta$  e quindi  $\nexists l$

10) Dato  $f(x,y) = e^{3x+y^2}$ , calcolare  $\nabla f(0,0)$  e calcolare  $D_{\bar{v}} f(3,-2)$  dato  $\bar{v} = [2, -1]^T$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3h} - 1}{h} = 3 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h} = 0 \end{aligned} \right\} \nabla f(0,0) = [3, 0]$$

Normalizziamo  $\bar{v}$ :  $\bar{v} = \left[ \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right]$ . Ora calcoliamo  $D_{\bar{v}} f(3,-2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t\frac{2\sqrt{5}}{5}, -2+t\frac{-1}{\sqrt{5}}) - f(3,-2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{3(3+\frac{2\sqrt{5}}{5})+(-2+\frac{-1}{\sqrt{5}})^2} - e^3}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{13+\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}t^2}-e^3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{13}(e^{\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}t^2}-1)}{t} = e^{13} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}t + \frac{1}{5}t^2}{t} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{13}$$

11) Calcolare, se esiste,  $\nabla f(0,0)$  con  $f(x,y) = y^{-1}x^1y^2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0-1h|0)-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-0h^2)-0}{h} = 1 \end{aligned} \right\} \nabla f(0,0) = [0, 1]$$

12) Calcola  $\nabla f(x,y)$  data  $y \sin^2(x^2-y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= y^2 \sin(x^2-y) \cos(x^2-y)(2x+0) = 4xy \sin(x^2-y) \cos(x^2-y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= 1 \cdot \sin(x^2-y) + y^2 \sin(x^2-y) \cos(x^2-y)(-1) = \sin(x^2-y)[1-2y \cos(x^2-y)] \end{aligned}$$

13) Calcola  $\nabla f(x,y)$  data

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{3x^2y(x^6+y^2) - x^3y \cdot 6x^5}{(x^6+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x^3(x^6+y^2) - x^3y^2y}{(x^6+y^2)^2} \end{aligned} \right\}$$

Entrambe le derivate non esistono in  $(0,0)$ . Per calcolare  $\nabla f(0,0)$  bisogna usare la definizione ( $\nabla f(0,0)$  esiste perché  $f \in C$ )

$\hookrightarrow$  Le regole di derivazione non sono sempre valide per le funzioni definite a bratti (in questo caso non valgono per  $(x,y) = (0,0)$ )

14) Calcola  $\nabla f(x,y)$  con  $f(x,y) = y^x$  (definita per  $y > 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= y^x \ln y \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x y^{x-1} \end{aligned}$$

5/10/20

1)  $f(x,y) = e^{3x+y^2}$ ; calcola  $D_{\bar{v}} f(3,-2)$ ,  $\bar{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= [3e^{3x+y^2}; 2ye^{3x+y^2}] \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } \mathbb{R}^2 \\ D_{\bar{v}} f(3,-2) &= \nabla f(3,-2) \cdot \bar{v} = \dots = 2e^9/\sqrt{5} \quad (\text{formula del gradiente}) \end{aligned}$$

2)  $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \forall (x,y) = (0,0) \end{cases}$  Trovare  $\alpha$  per continuare; per tale  $\alpha$ , capire se derivabile in  $(0,0)$ ;

l'equazione del piano tangente al grafico in  $(-1,0, f(-1,0))$

11)  $D = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  sicuramente continua in  $(x,y) \neq (0,0)$

$$\text{in } (0,0) \quad \lim_{x,y \rightarrow 0,0} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\arctan(\frac{t}{n}) - \frac{\pi}{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} -\frac{\arctan(t^2)}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} -\frac{t^2}{n} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow 0, \arctan(t) + \arctan(\frac{t}{n}) \cdot \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \dots = 0 \end{aligned} \right\} \nabla f(0,0) = 0$$

$$3) f(-1,0) = \frac{\pi}{4}$$

dominio:  $\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \cdot 2[-(x^2+y^2)^2 x] \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \cdot 2[-(x^2+y^2)^2 y] \end{aligned} \right\}$  in  $(-1,0)$   $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R})$  quindi è differenziabile

$$\nabla f(-1,0) = \dots = [1; 0] \Rightarrow \nabla: z = \frac{\pi}{4} + 1(x+1) + 0(y-0) = \frac{\pi}{4} + (x+1)$$

$\hookrightarrow f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y-y_0)$

3)  $f(x,y) = 2ye^{x^2}$ ; scrivere la retta tangente alla curva di livello di  $f$  per  $(0,1)$  ( $f$  differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ )

$$f(0,1) = \dots = 2 \Rightarrow c=2 \Rightarrow 2ye^{x^2} = 2 \Rightarrow y = e^{-x^2} \Rightarrow$$

uso analisi 1

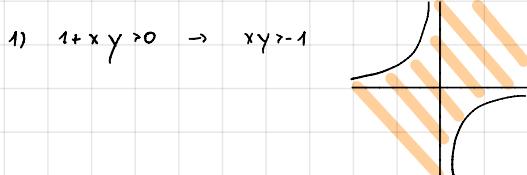
2° modo: Curva di livello  $\perp \nabla f(0,1) \rightarrow \nabla f(0,1) = \dots = [0,2] \Rightarrow m=0 \rightarrow r: y=1$

4)  $f(x,y) = \frac{\ln(y-2x)}{y^2+x}$  scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello per  $(-2,-3)$

$$f(-2,-3) = 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left[ \frac{\frac{1}{y-2x} \cdot (-2)(y^2+x) - 1 \cdot \ln(y-2x)}{(y^2+x)^2}, -\frac{1}{y-2x} \cdot 1(y^2+x) - 2y \cdot \ln(y-2x)}{(y^2+x)^2} \right] \Rightarrow \nabla f(-2,-3) = [-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}]$$

Trovò direzione  $v \perp \nabla f(-2,-3) \rightarrow -\frac{2}{7}v_x + \frac{1}{7}v_y = 0 \rightarrow v_x = 2v_y \rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow m=2 \Rightarrow r: y = -3 + 2(x+2)$

5)  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  Trova: dominio; continuità; per quali  $x$  esiste  $D_y f(0,0)$ ; se  $f$  è differenziabile in  $(0,0)$



1)  $1+xy > 0 \rightarrow xy > -1$

restringo a  $y=0: \frac{\ln(1+0)}{x^2} = 0$   
restringo a  $y=x: \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow f$  non è continua in  $(0,0)$

$$3) v = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, D_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{t^2} = \begin{cases} \text{se } \cos \alpha = 0 \vee \sin \alpha = 0 & D_v f(0,0) = 0 \\ \text{se } \cos \alpha \neq 0 \vee \sin \alpha \neq 0 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos \alpha \sin \alpha}{t^2} = \pm \infty \end{cases}$$

$\hookrightarrow$  esistono 4 derivate direzionali:  $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = \pi, \alpha = \frac{3}{2}\pi$

4)  $f$  non è differenziabile in  $(0,0)$  perché  $f$  non è continua

6)  $f(x,y) = \sqrt[3]{y} \cdot x$  Trova se:  $f$  è derivabile in  $(0,0)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  sono continue;  $f$  è differenziabile in  $(0,0)$

$$1) f \text{ continua in } \mathbb{R}^2 \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \sqrt[3]{y} \cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow \text{uso la def in } (0,0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ derivabile}$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y} \quad \text{continua in } (0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

restringo a  $y = \sqrt[3]{y^2}: \lim_{y \rightarrow 0} \dots = \frac{1}{3} \neq 0 \quad (\frac{\partial}{\partial y} f(x,y))$

non continua

3) Usiamo la definizione  $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)(x-0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{\sqrt[3]{y^2} \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$$\hookrightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{p \cos \theta} \cdot p \cos \theta}{p} = 0$$

$\hookrightarrow f$  differenziabile in  $(0,0)$  anche se le derivate non sono continue

7)  $f(x,y) = xy \ln|x-y|$  da' i continue, derivabile, differenziabile

continua in  $\mathbb{R}^2$

se  $x < y \rightarrow f(x,y) = xy^2 - x^2y \Rightarrow \nabla f(x,y) = [y^2 - 2xy; 2xy - x^2] \Rightarrow$  differenziabile

se  $x > y \rightarrow \dots$  (analogia a square) ... differenziabile

se  $y = x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0+t)y_0 \ln|x_0+t-y_0|}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 \ln h}{h} \rightarrow \begin{cases} \text{se } x_0 \neq 0 \quad \exists \frac{\partial}{\partial x} \\ \text{se } x_0 = 0 \quad \exists \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \text{si verifica } \nabla f(0,0) = [0,0]$

È differenziabile in  $(0,0)$ ?  $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{xy \ln|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow = 0 \Rightarrow$  differenziabile

$$\hookrightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^2 \cos \theta \ln |p \cos \theta - p \sin \theta|}{p} = 0$$

8)  $f(x,y) = xy^2 - y^3 - 2x^2$ ,  $g(t) = (1-t^2, t)$ . Della  $h(t) = (f \circ g)(t)$ , calcola  $h'(1)$

$g$  è differenziabile in  $t=1$ ,  $f$  è differenziabile in  $g(t_0)$

$$\hookrightarrow h'(1) = \nabla f(g(1)) \cdot g'(1) = [1, -3] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -5$$

$$g'(1) = \dots = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad g(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \nabla f(x,y) = [y^2 + 4x; 2xy - 3y^2]; \quad \nabla f(0,1) = [1; -3]$$

9)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f(x,y) = (x+y^2, e^x + 2y)$ ;  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $g(u,v) = [\log(u^2+1), u-v^2, \cos u \sin v]$ .  
Della  $h = g \circ f$ , trovare  $J_h(0,0)$

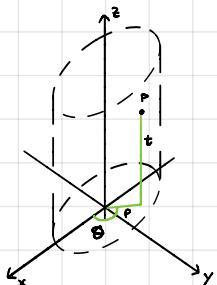
$f$  differenziabile in  $(0,0)$  e  $f(0,0) = (0,1)$ .  $g$  è differenziabile in  $f(0,0)$ .

$$\hookrightarrow J_h(0,0) = J_g(0,0) \cdot J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \\ \cos 0 \sin 0 \end{bmatrix}$$

$$J_f(x,y) : \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ e^x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v) : \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u^2+1} 2u & 0 \\ 1 & -2v \\ -\sin u \cos v & \cos u \cos v \end{bmatrix} \Rightarrow J_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

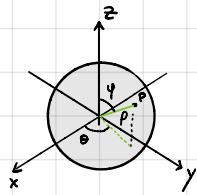
10)



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \Rightarrow [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow f(\rho, \theta, t) = (x(\rho, \theta, t), y(\rho, \theta, t), z(\rho, \theta, t)) \\ z = t \end{cases}$$

$$J_f(\rho, \theta, t) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |J_f(\rho, \theta, t)| = \dots = \rho$$

11)

 $\rho$ : distanza da  $(0,0)$  $\theta$ : sul piano  $xy$  $\varphi$ : misurato rispetto a  $z \geq 0$ 

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\Rightarrow [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi] \rightarrow f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi))$$

$$\mathcal{J}f(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix} \rightarrow |\mathcal{J}f(\rho, \theta, \varphi)| = \dots = -\rho^2 \sin \varphi$$

12/10/20

- 1)  $f(x, y) = \log(x^3 - y)$ ,  $(x_0, y_0) = (-1, -2)$ . Trova: a) differenziale secondo in  $x_0$  b) polinomio di Taylor di 2° ord in  $x_0$  c) formula di Taylor di 2° ord in  $x_0$

$$\nabla f(x, y) = \left[ \frac{3x^2}{x^3 - y}; -\frac{1}{x^3 - y} \right]$$

$$\hookrightarrow \nabla f(x_0) = [1; -1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \frac{6x(x^3 - y) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 - y)^2} = \frac{-3x^4 - 6xy}{(x^3 - y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0) = -15 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f &= -[-(x^3 - y)^{-2}] 3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3 - y)^3} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0) = 3 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= -\frac{1}{(x^3 - y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0) = -1 \end{aligned}$$

$$a) d^2 f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0)(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0)(y-y_0)^2 = -15(x+1)^2 + 6(x+1)(y+2) - 1(y+2)^2$$

$$b) P_2(x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$$

$$c) f(x, y) = P_2(x_0) + \Theta(\|x_0\|^2)$$

- 2)  $f(x, y) = x e^{-x^2-y^2}$ , studia differenzialità, simmetrie; determina estremi

$$D = \mathbb{R}^2, \text{ funzione differenziabile (derivate continue)}: \frac{\partial}{\partial x} f = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\hookrightarrow f \in C^1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = -2xye^{-x^2-y^2}$$

$$\text{SIMMETRIE: } f(-x, y) = -xe^{-x^2-y^2} = -f(x, y) \rightarrow \text{dispari in } x$$

$$f(x, -y) = xe^{-x^2-y^2} = f(x, y) \rightarrow \text{pari in } y \quad (\text{simmetria rispetto a } xz)$$

ESTREMI: da cercare nei punti stazionari:

$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Classifico usando la mat. Hessiana:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = -4xe^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = (1-2x^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -2xe^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

 $\Rightarrow A$  minimo $\Rightarrow$  per la disparità  $B$  è massimo

Non ci sono altri estremi. Poiché  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , si può concludere che gli estremi sono anche globali.

- 3)  $f(x, y) = x^4 + y^2$ ; determina gli estremi

$$D = \mathbb{R}^2, f \in C^1, f \in C^2$$

$$\nabla f(x, y) = [4x^3; 2y] \rightarrow \text{sol} [0, 0] \Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow ???$$

$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow [0, 0]$  è minimo assoluto

4)  $f(x,y) = \begin{cases} y \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ; studia continuità, derivabilità e estremi

$D = \mathbb{R}^2$ , continua per  $x_0 \neq 0$

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} y \log(x^2+y^2) \quad ; \quad \exists \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \Rightarrow \text{gli estremi sono da ricercare tra i punti di non derivabilità}$$

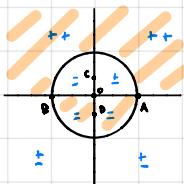
$$\hookrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} r \sin \theta \log(r^2) = 0$$

se  $x \neq 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{y+2xy}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \log(y^2)+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm \sqrt{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \log(x^2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

fruttiamo il segno:



$$A(1,0) \quad C(0,\sqrt{e}) \\ B(-1,0) \quad D(0,-\sqrt{e})$$

o: nulla

A,B: nulla

C: minimo almeno relativo

D: massimo almeno relativo

poiché  $\lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(0,y) = \pm \infty$ , gli estremi sono pur forza relativi