Appunti di analisi 1

Alexandru Gabriel Bradatan

Data compilazione: 29 settembre 2019

Indice

1 Insiemi

Vedi appunti di geometria e algebra lineare.

2 Insiemi numerici

2.1 Numeri naturali

Sono i numeri interi positivi incluso lo 0. Può essere costruito a partire da un solo numero (lo 0) basta aggiungendo un'unità ogni volta.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2.1.1 Proprietà

Contiene sempre il successore di ogni suo elemento (principio di induzione). Gode della relazione d'ordine $\leq$, il che lo rende un insieme ordinato. $\mathbb{N}$, come tutti i suoi sottoinsiemi, godono del principio del minimo intero che lo rende, insieme ai suoi sottoinsiemi, un insieme *ben* ordinato.

2.1.2 Operazioni definite

In $\mathbb{N}$ sono definite somma e prodotto: in questo modo:

$$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ somma(n1, n2) & \mapsto & n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \end{array} \qquad \cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ prodotto(n1, n2) & \mapsto & n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Proprietà delle operazioni

Commutativa $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

Associativa $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$

Distributiva $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$

2.1.3 Principio del minimo intero

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha un elemento minimo (più piccolo di tutti gli altri).

2.1.4 Il principio di induzione

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme tale che $0 \in S$ e $\forall n \in S \implies n + 1 \in S$. Allora S coincide con $\mathbb{N}$.

Il principio di induzione nella logica Il principio di induzione può essere usato per dimostrare teoremi in $\mathbb{N}$. Enunciamolo in questo modo: sia $P(n)$ un predicato che dipende da $n \in \mathbb{N}$ tale che $P(n_0)$ sia vero e che $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \implies P(n+1)$. Il predicato sarà vero per tutti gli $n \geq n_0$.

2.1.5 Fattoriale

Preso $n \in N$, il fattoriale di n sarà $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Una eccezione è lo 0: il fattoriale di 0 è $0! = 1$. Il fattoriale è un numero definito che può essere definito induttivamente: $n! = n(n-1)!$.

2.1.6 Coefficiente binomiale

Già incontrati nella probabilità:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

con $n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Convenzionalmente $\binom{0}{0} = 1$. Il coefficiente binomiale viene usato nel binomio di Newton.

2.1.7 Binomio di Newton

Il binomio di Newton ci permette di calcolare l'elevamento a qualsiasi potenza di un binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

La formula è dimostrabile per induzione (se sei proprio interessato, vedi gli appunti a penna).

2.2 Numeri interi relativi

É l'insieme $\mathbb{Z}$. Non esiste un minimo, di conseguenza non valgono il principio del minimo intero e il principio di induzione. É definita la relazione d'ordine $\leq$, quindi è un insieme ordinato ma a causa della mancata validità dei due principi nominati precedentemente, non è un insieme ben ordinato. $\mathbb{Z}$ è, inoltre, più grande di $\mathbb{N}$: $N \subset Z$.

2.2.1 Costruzione

Per costruire il numeri relativi, definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che:

$$(a, b) \sim (h, k) \iff a + k = b + h$$

Questa relazione di equivalenza ci permette di descrivere tutti i numeri negativi che sono la differenza dei numeri a e b o h e k: per esempio -1 è la classe di equivalenza $[(2, 3)]_{\sim}$. $\mathbb{Z}$ viene, quindi, definito come $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$

Dimostrazione che $\sim$ è una relazione di equivalenza Per dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, verifichiamo che soddisfi i requisiti:

- è riflessiva: $(m, n) \sim (m, n) \implies m + n = n + m$
- è simmetrica: $(a, b) \sim (c, d) = (c, d) \sim (a, b)$
- è transitiva: $(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f) \implies (a, b) \sim (e, f)$ Infatti:

$$\begin{gathered} a + d = b + c, \quad c + f = d + e \\ a - b = c - d, \quad c - d = e - f \\ a - b = e - f \\ a + f = b + e \end{gathered}$$

2.2.2 Operazioni definite

Le operazioni sono le stesse di $\mathbb{N}$ ma aggiornate:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & ((a, b)_{\sim}, (h, k)_{\sim}) & \mapsto & (a + h, b + k)_{\sim} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & ((a, b)_{\sim}, (h, k)_{\sim}) & \mapsto & (ah + bk, bh + ak)_{\sim} \end{array}$$

Proprietà delle operazioni Mantnengono le stesse proprietà che avevano in $\mathbb{N}$.

2.3 Numeri razionali

É l'insieme $\mathbb{Q}$. Non esiste un minimo, di conseguenza non valgono il principio del minimo intero e il principio di induzione. É definita la relazione d'ordine $\leq$, quindi è un insieme ordinato ma a causa della mancata validità dei due principi nominati precedentemente, non è un insieme ben ordinato.

2.3.1 Costruzione

Per costruire il numeri razionali, definiamo una relazione di equivalenza $\approx$ in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ tale che:

$$(a, b) \approx (h, k) \iff ak = bh$$

Questa relazione di equivalenza ci permette di descrivere tutti i numeri razionali che sono divisione dei numeri a e b o h e k: per esempio $^2/_3$ è la classe di equivalenza $[(2, 3)]_{\approx}$. $\mathbb{Q}$ viene, quindi, definito come $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})/\approx$

Dimostrazione che $\approx$ è una relazione di equivalenza Per dimostrare che $\approx$ è una relazione di equivalenza, verifichiamo che soddisfi i requisiti:

- è riflessiva: $(m, n) \approx (m, n) \implies mn = nm$
- è simmetrica: $(a, b) \approx (c, d) = (c, d) \approx (a, b)$
- è transitiva: $(a, b) \approx (c, d), (c, d) \approx (e, f) \implies (a, b) \approx (e, f)$ Infatti:

$$\begin{gathered} ad = bc, \quad cf = de \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \\ \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \\ af = be \end{gathered}$$

2.3.2 Operazioni definite

Le operazioni sono le stesse che sono definite in $\mathbb{Z}$ ma aggiornate:

$$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ ((a, b)_\approx, (h, k)_\approx) & \mapsto & (ak + bh, b + k)_\sim \end{array} \qquad \cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ ((a, b)_\approx, (h, k)_\approx) & \mapsto & (ah, bk)_\approx \end{array}$$

Proprietà delle operazioni Mantengono le stesse proprietà che avevano in $\mathbb{Z}$.

2.3.3 La rappresentazione decimale

La rappresentazione decimale di un numero non è nient'altro che un allineamento di cifre. Le rappresentazioni decimali che si trovano nei razionali sono limitate, illimitate periodiche. Esistono anche rappresentazioni illimitate, ma non sono contenute in $\mathbb{Q}$.

É costituita da una parte intera (necessariamente finita) e una parte decimale che può essere finita o illimitata (si ricorda che in $\mathbb{Q}$ solo illimitati periodici). Può essere scritta come:

$$x = \pm \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot 10^j + \sum_{l=0}^{m} d_l 10^{-l}$$

Dove la prima sommatoria rappresenta la parte intera e la seconda la parte decimale.

2.4 I numeri reali

L'insieme dei numeri reali contiente qualsiasi rappresentazione decimale possibile, limitata o illimitata. Di conseguenza, $\mathbb{R}$ contiene tutti gli insiemi visti fino ad ora. Nell'insieme dei reali è definita la relazione d'ordine $\leq$, rendolo un insieme ordinato. Inoltre, vale anche l'assioma di completezza, che rende $\mathbb{R}$ un insieme ordinato e completo.

2.4.1 Operazioni definite

Le operazioni definite sono sempre le stesse trovate negli insiemi precedenti:

$$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ somma(a, b) & \mapsto & a + b \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ prodotto(a, b) & \mapsto & a \cdot b \in \mathbb{R} \end{array}$$

Proprietà delle operazioni Mantengono le stesse proprietà che avevano in $\mathbb{Q}$.

2.4.2 Assioma di completezza

Siano $A, B \subseteq R$ tali che:

- $A, B \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = R$
- $\forall a \in A, \forall b \in B \; a < b$

allora esiste un unico numero reale tale che $\forall a \in A, \forall b \in B \; a \leq s \leq b$. s è detto elemento separatore.

2.5 Numeri complessi

É l'insieme che completa i numeri reali: ci permettono di risolvere le equazioni polinomiali che non riuscivamo nei reali (chiusura algebrica).

2.5.1 Costruzione

É un insieme di coppie ordinate di numeri reali appartenenti a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.5.2 Operazioni

Le operazioni sono sempre le stesse che in $\mathbb{R}$ ma aggiornate:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & somma((a,b),(c,d)) & \mapsto & (a+c, b+d) \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & prodotto((a,b),(c,d)) & \mapsto & (ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{R} \end{array}$$

3 Sommatoria

Si indica con la sigma maiuscola:

$$\sum_{i \in I} a_i$$

Dove:

- I è un insieme finito. I suoi elementi sono chiamati indici
- $(a_i), i \in I$ è una famiglia di numeri che dipendono da i

Alcune sommatorie famose

Formula di Gauss $\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Somma di una progressione geometrica

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} q^i &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= n+1 \text{ per } q=1 \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\text{Tesi: } (1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i = 1-q^{n+1}$$

$$\begin{aligned} (1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i - q\sum_{i=0}^{n} q^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} \text{ prendiamo } k = i+1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\ &= (q^0 + \sum_{i=1}^{n} q^i) - (\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}) \\ &= q^0 + \sum_{i=1}^{n} q^i - \sum_{k=1}^{n} q^k - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

Le proprietà della sommatoria

- La sommatoria è un operatore lineare
- l'indice è muto: non importa il nome dell'indice
- traslando gli indici, la sommatoria non cambia: è importante che il numero di elementi sia uguale
- si definiscono sommatorie anche su due o più famiglie di indici: $\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}$
- vale la proprietà dissociativa: $\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I}(a_i) + \sum_{i \in I}(b_i)$
- le costanti possono essere portate fuori: $\sum_{i \in I} K a_i = K \cdot \sum_{i \in I} a_i$
- può essere scomposta in sommatorie più piccole: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
- riflessione degli indici: $\sum_{i=0}^{n} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$

4 La produttoria

Si indica con un grande pi greco. E' uguale alla sommatoria ma al posto di fare la somma fa il prodotto.

Proprietà

- $\prod_{i \in I} k a_i = k^{\# i} \prod_{i \in I} a_i$
- Non vale la dissociativa

5 Intervalli e intorni

5.1 Intervallo

Per intervallo di estremi a e b si intende un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di diversi tipi:

- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Gli intervalli possono essere anche illimitati: $(a; +\infty)$.

5.2 Intorno

Preso $x_0 \in \mathbb{R}$, di dice intorno di x_0 di raggio δ l'insieme dei valori x tali che:

$$|x - x_0| < \delta$$

In generale un intorno è un intervallo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, ma un intervallo non per forza è un intorno.

6 Insiemi limitati

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. E è detto insieme limitato se $\exists m, M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E \; m \leq x \leq M$. L'insieme E è detto superiormente limitato se esiste solo M, mentre è detto inferiormente limitato se esiste solo m.

Un insieme limitato può avere un massimo e un minimo, però non è detto che li contenga. Un esempio di insieme dei questo tipo è $(-1; 1)$. Infatti gli elementi, si continuano ad avvicinare a un valore, ma a causa della completezza di $\mathbb{R}$, non lo raggiungeranno mai poichè esisterà sempre un sepratore tra l'elemento e il "bordo". Ciò sarà ancora più apparente dalla definizione di massimo e minimo. Per descrivere appieno insiemi come $(-1; 1)$ vengono aggiunti i concetti di maggiorante, minorante, estremo superiore e inferiore che completano quello di massimo e minimo.

6.1 Massimo di un insieme limitato

Viene detto M massimo per un insieme limitato superiormente E se:

- $\forall x \in E, x \leq M$
- $M \in E$

6.2 Minimo di un insieme limitato

Viene detto m minimo per un insieme limitato inferiormente E se:

- $\forall x \in E, x \geq M$
- $m \in E$

6.3 Maggiorante di un insieme limitato

Viene detto $\bar{M}$ maggiorante di un insieme limitato superiormente E se $\forall x \in E, x \geq \bar{M}$.

Si può notare come il maggiorante sia una generalizzazione del concetto di massimo. Infatti, per un insieme superiormente limitato possono esistere ∞ maggioranti.

6.4 Minorante di un insieme limitato

Viene detto $\bar{m}$ minorante di un insieme limitato inferiormente E se $\forall x \in E, x \leq \bar{m}$.

Si può notare come il minorante sia una generalizzazione del concetto di minimo. Infatti, per un insieme inferiormente limitato possono esistere ∞ minoranti.

6.5 Estremo superiore di un insieme limitato

Definiamo $Sup(E)$ estremo superiore di un insieme limitato superiormente E il minimo dei maggioranti, ossia un numero che:

- $\forall x \in E x \leq a$
- $a = Min(\mathcal{M})$

dove $\mathcal{M}$ è l'insieme dei maggioranti di E.

Un insieme limitato superiormente possiede sempre un estremo superiore: esso può essere sia interno all'insieme che esterno ad esso.

6.6 Estremo inferiore di un insieme limitato

Definiamo $Inf(E)$ estremo inferiore di un insieme limitato inferioremente E il massimo dei minoranti, ossia un numero che:

- $\forall x \in E x \geq a$
- $a = Max(m)$

dove m è l'insieme dei minoranti di E.

Un insieme limitato inferiormente possiede sempre un estremo inferiore: esso può essere sia interno all'insieme che esterno ad esso.

6.7 Collegamento tra estremo inferiore (superiore) e l'assioma di completezza

Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente (superiormente) ammette estremo inferiore (superiore).

Dimostrazione Prendiamo un insieme E limitato superiormente. Allora E ammette maggioranti. Indichiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutti i maggioranti ($\mathcal{M} = \{x \in R \mid \forall e \in E\ e \leq x\}$). L'insieme $\mathcal{M}$ così definito è limitato inferiormente (tutti gli elementi di E sono minoranti di $\mathcal{M}$). Definiamo, allora, $\mathcal{N} = \mathbb{R} - \mathcal{M}$ l'insieme di tutti gli elementi che non sono maggioranti di E. Osserviamo che:

- $\mathcal{N} \neq \emptyset$
- $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{R}$
- $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$
- $\forall y \in \mathcal{N}\ \exists \bar{e} \in E \mid \bar{e} > y$, $\forall x \in \mathcal{M}\ \exists \bar{e} \in E \mid x > \bar{e}$ quindi $y < \bar{e} < x$

Le osservazioni che abbiamo fatto non sono altro che le ipotesi dell'assioma di completezza (vedi 2.4.2). Quindi possiamo affermare che $\forall y \in \mathcal{N}, \forall x \in \mathcal{M}\ \exists s \mid y \leq s \leq x$. Questo elemento, però, dovrà essere unico in quanto dovrà essere o il minimo di $\mathcal{M}$ o il massimo di $\mathcal{N}$. Per dimostrare il teorema dobbiamo dimostrare che s appartiene a $\mathbb{M}$.

L'assurdo Per assurdo, supponiamo che s appartenga a $\mathcal{N}$. Ciò significa che s non è un maggiorante e che $\exists \bar{e} \in E \mid \bar{e} > s$. Posso, allora, costruire un elemento $s < \frac{s+\bar{e}}{2} < \bar{e}$. Questo numero è una contraddizione perché sarebbe come dire che $\frac{s+\bar{e}}{2} \in \mathcal{N}$ e quindi $y \leq s < \frac{s+\bar{e}}{2} < \bar{e} \leq x$. Così esisterebbero due elementi separatori, ciò però è un assurdo perché in questo caso l'assioma di completezza permette l'esistenza di un solo separatore. Allora $s \in \mathcal{M}$ e di conseguenza $\exists\, Sup(E)$.