9.8 POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

Consideriamo il solito circuito lineare, dinamico in regime sinusoidale con:

$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_v)$ (v e i prese in convenzione normale)

$i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$

La potenza sarà:

$$p_a(t) = v(t)\,i(t) = VI\cos(\omega t + \varphi_v)\cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_I) + \frac{VI}{2}\cos(\underbrace{2\omega t + \varphi_v + \varphi_i + \varphi_v - \varphi_v}_{(2\omega t + 2\varphi_v) + (\varphi_I - \varphi_v)})$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$= \underbrace{\frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_I)}_{\text{POT. MEDIA}} + \underbrace{\frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_I)\cos(2\omega t + 2\varphi_v)}_{\text{POT. ATTIVA INST.}} + \underbrace{\frac{VI}{2}\underbrace{\sin(\varphi_v - \varphi_I)}_{-\sin(\varphi_I - \varphi_v)}\sin(2\omega t + 2\varphi_v)}_{\text{POT. REATTIVA INST.}}$$

$\frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_I) \rightarrow P$, $\frac{VI}{2}\sin(\varphi_v - \varphi_I) \rightarrow Q$

Come mai il termine $\frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_i)$ viene chiamato potenza media? Ha a che fare con l'integrale della potenza:

$$\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+T} p_a(t)\,dt = \underset{\text{media}}{\langle p_a(t)\rangle} = \frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

Passando al dominio dei fasori:

$\bar{v} = Ve^{j\varphi_v}$ $\longrightarrow$ $\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i \Rightarrow \bar{V} = |z|e^{j\varphi_z} I e^{j\varphi_i}$

$\bar{i} = Ie^{j\varphi_i}$

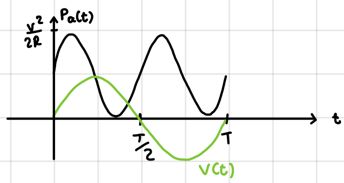
Studiamo la potenza per i nostri bipoli notevoli:

- RESISTORE:

  $\varphi_z = 0 \Rightarrow p_a(t) = \frac{VI}{2} + \frac{VI}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi_v) = \frac{V^2}{2R} + \frac{V^2}{2R}\cos(2\omega t + 2\varphi_v)$

  ↳ potenza reattiva nulla

  $P = \frac{V^2}{2R}$

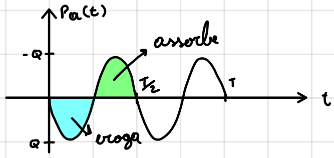


- CONDENSATORE:

  $\varphi_z = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow p_a(t) = -\frac{VI}{2}\sin(2\omega t + 2\varphi_v)$

  ↳ solo potenza reattiva

  $Q = -\frac{\omega C V^2}{2} = -\frac{I}{2\omega C} < 0$



- INDUTTORE:

  $\varphi_z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_a(t) = \frac{VI}{2}\sin(2\omega t + 2\varphi_v)$

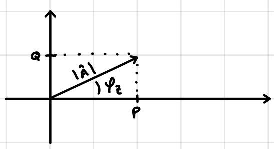
  ↳ solo potenza reattiva

  $Q = \frac{\omega L I^2}{2} = \frac{V^2}{2\omega L} > 0$

9.9 POTENZA COMPLESSA

È un numero complesso dato da:

$$\hat{A} = P + jQ = \frac{VI}{2}\cos(\varphi_v - \varphi_i) + j\frac{VI}{2}\sin(\varphi_v - \varphi_i) = \frac{VI}{2}e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = \frac{VI}{2}e^{j\varphi_z}$$



$|\hat{A}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \rightarrow$ POTENZA APPARENTE [VA]

Qual è la relazione tra $\hat{A}$ e $\bar{V}/\bar{I}$?

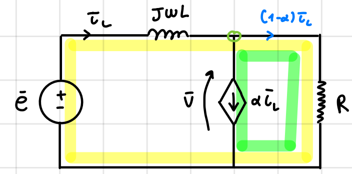
$$\hat{A} = \bar{V}\bar{I} = VI\,e^{j(\varphi_v+\varphi_i)} \quad \times$$

$$\hat{A} = \frac{\bar{V}\bar{I}}{2} = \frac{VI}{2}\,e^{j(\varphi_v+\varphi_i)} \quad \times$$

$$\hat{A} = \frac{\bar{V}\bar{I}^*}{2} = \frac{VI}{2}\,e^{j(\varphi_v-\varphi_i)} \quad \checkmark$$

↳ $\bar{I}^*$ coniugato di $\bar{I}$

ESERCIZIO



$\hat{A}_e^{cccs} = ?$

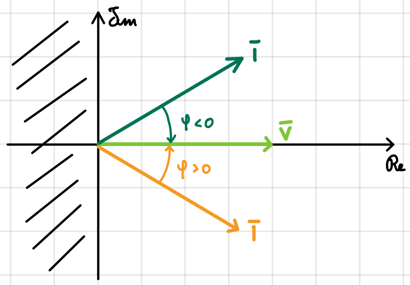
↳ $\hat{A}_e^{cccs} = -\frac{1}{2}\bar{V}\alpha\bar{I}_L^* = \frac{\alpha}{2}R(1-\alpha)\bar{I}_L\bar{I}_L^* = \frac{\alpha R}{2}(1-\alpha)|\bar{I}_L|^2 = \dots$

$\bar{e} = j\omega L\bar{I}_L + R(1-\alpha)\bar{I}_L \rightarrow \bar{I}_L = \frac{\bar{e}}{R(1-\alpha)+j\omega L}$

$\bar{V} = R(1-\alpha)\bar{I}_L$

9.10 TRIANGOLO DELLE POTENZE

Consideriamo le stesse grandezze di prima con l'unica differenza $\varphi = \varphi_z$. Rappresentiamo $\bar{V}$ e $\bar{I}$ sul piano di Gauss considerando $\varphi \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (non si perde generalità perché l'altra metà è speculare)

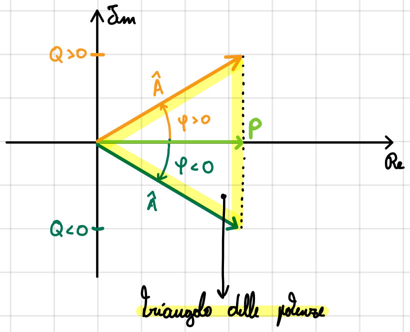


Corrente in anticipo: z è capacitiva

Corrente in ritardo: z è induttiva

Nota: i fasori ruotano in senso antiorario a pulsazione ω

Rappresentando la potenza:



Nota: i fasori ruotano con pulsazione 2ω

z induttivo: $Q>0 \rightarrow$ P in ritardo rispetto ad $\hat{A}$

z capacitivo: $Q<0 \rightarrow$ P in anticipo rispetto ad $\hat{A}$

Definiamo il fattore di potenza come: $\cos\varphi = \frac{P}{|\hat{A}|}$

9.11 TEOREMA DI BOUCHEROT

Estende il teorema di Tellegen al regime sinusoidale.

Scriviamo la KCL al k-esimo nodo:

$$\sum \alpha_h \bar{I}_h = 0 \qquad \alpha_h = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\sum \alpha_h \mathrm{Re}(\bar{I}_h) + j\sum \alpha_h \mathrm{Im}(\bar{I}_h) = 0$$

/

$$\sum \alpha_h \bar{I}_h^* = 0$$

$$\sum \alpha_h \mathrm{Re}(\bar{I}_h) - j\sum \alpha_h \mathrm{Im}(\bar{I}_h) = 0$$

⇓

$$\begin{cases} \sum \alpha_h \mathrm{Re}(\bar{I}_h) = 0 \\ \sum \alpha_h \mathrm{Im}(\bar{I}_h) = 0 \end{cases} \rightarrow$$ anche il coniugato è compatibile con il circuito

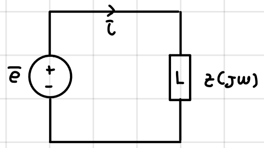
Estendiamo così Tellegen:

$$\frac{1}{2}\bar{V}\cdot\bar{I}^* = \sum P_K + jQ_K = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum P_K = \sum Q_K = 0}_{\text{TEOREMA DI BOUCHEROT}}$$

Vale, quindi, il principio di conservazione delle potenze attive e reattive

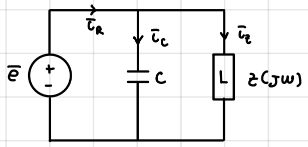
9.12 RIFASAMENTO

Considerando il seguente circuito con $Z(j\omega)$ induttivo:



$$\hat{A}_G = P_G + jQ_G = -\frac{\bar{e}\,\bar{\imath}^*}{2}$$
$$\hat{A}_L = P_L + jQ_L = \frac{\bar{e}\,\bar{\imath}^*}{2}$$

Poiché la potenza reattiva non compie lavoro, modifichiamo il circuito affinché Q_G sia nulla (rifasare). Per fare ciò basta collegare una impedenza capacitiva in parallelo al carico. Calcoliamo la capacità di rifasamento:



Per Boucherot: $\cancel{Q_G} + Q_C + Q_Z = 0 \rightarrow Q_C + Q_Z = 0 \rightarrow \frac{\omega C}{2}\cancel{|\bar{e}|^2} = \frac{\cancel{|\bar{e}|^2}}{2|Z|}\sin(\varphi_Z)$

$$\cancel{j}Q_C = \frac{\bar{e}\,\bar{\imath}_C^*}{2} = -\cancel{j}\frac{\omega C}{2}|\bar{e}|^2 \rightarrow Q_C = -\frac{\omega C}{2}|\bar{e}|^2$$
$$P_Z + jQ_Z = \frac{\bar{e}\,\bar{\imath}_Z^*}{2} = \frac{|\bar{e}|^2}{2|Z|}e^{j\varphi_Z} \Rightarrow Q_Z = \frac{|\bar{e}|^2}{2|Z|}\sin(\varphi_Z)$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{\sin(\varphi_Z)}{\omega|Z|}$$