LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 11 OTTOBRE

LEZIONE

SUCCESSIONI

ALGEBRA DEI LIMITI: Date a_n una successione convergente e b_n una divergente. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l, \; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty\right)$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE (RAPP.): Hp: $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \; |a_n - l| < \varepsilon$, $\forall M>0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1 \; b_n > M$. Th: $\forall \varepsilon>0 \; \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \tilde{n} \; \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon$. Usiamo la disuguaglianza triangolare: $|a_n - l| < |a_n| + |-l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |l| + \varepsilon$. Questo ci dice che a_n converge. Posso scegliere $M = \frac{1}{\varepsilon}$, quindi $b_n > \frac{1}{\varepsilon} \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon(|l| + \varepsilon) \Rightarrow$ questa è la tesi $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

FORME INDETERMINATE: Siano a_n e b_n successioni divergenti. Si chiamano forme indeterminate le seguenti: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$

↳ riconducibili alle altre due forme

GESTIONE: metodi algebrici, stabilire l'ordine degli infiniti

ES. ALG.: $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3 - n^5) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^5\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 \cdot (-1)\right) = -\infty$

ORD.: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{2-n^7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^7\left(\frac{2}{n^7}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{n^4\left(\frac{2}{n^7}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4(-1)} = 0^-$

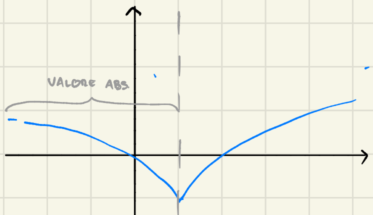
SOSTITUZIONI: Le sostituzioni (es.: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{t\to 0} t$) non hanno senso per le successioni perché $n \to 0 = a_0$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI: Serve a risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0$ (log infinito di ordine inf. alla potenza)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ (exp ordine maggiore di potenza)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

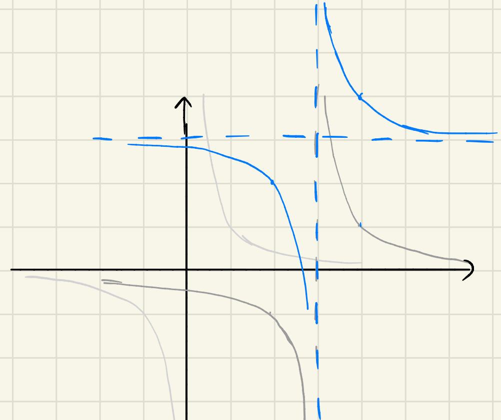
ESERCITAZIONE

1

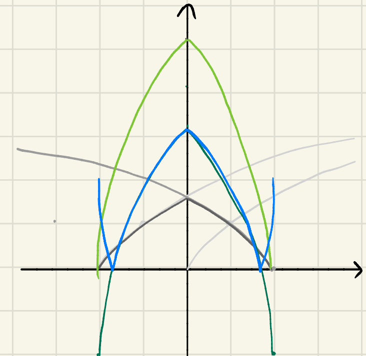


$\sqrt{x} \to \sqrt{|x|} \to \sqrt{|x-1|} \to$

$\sqrt{|x-1|}-1$

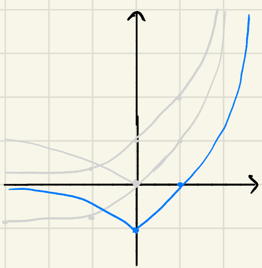


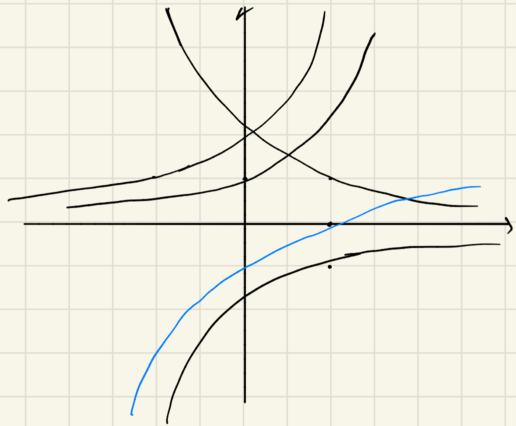
$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-3} \to \frac{1}{x-3}+3$



$\sqrt{x} \to \sqrt{x+2} \to \sqrt{|x|+2} \to \sqrt{2-|x|}$

$\to 3\sqrt{2-|x|} \to 3\sqrt{2-|x|}-2 \to |3\sqrt{2-|x|}-2|$





FUNZIONE INVERSA:

$f: A \to B$ $\quad f^{-1}$ è una funzione tale che $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_B \\ f^{-1} \circ f = id_A \end{cases}$

2. $f(x) = 2 - 3x \rightarrow f^{-1}(x) = -\dfrac{x-2}{3}$
3. $f(x) = x^3 + 3x - 2 \rightarrow$ monotona crescente $\rightarrow$ invertibile $\rightarrow f^{-1}(x) = \,?$
4. $f(x) = x^2 - 2x \rightarrow$ non invertibile in $\mathbb{R}$

   invertibile se $D = [1; +\infty)$, $C = [-1; +\infty) \rightarrow f^{-1}(x) =$ Homework
5. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ $\quad f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow$ invertibile $\rightarrow f^{-1}(x) = -\dfrac{3x}{1-x}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

6. $a_n = n^3 \cdot \sin \dfrac{1}{n^4}$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} n^3 \sin \dfrac{1}{n^4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}} = 0$

Homework: dim. con definizione $(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \; |a_n| < \varepsilon$

$\left| n^3 \sin \frac{1}{n^4} \right| < \varepsilon \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} < \varepsilon \qquad \frac{1}{n^4} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^4}\right) < \frac{1}{n^4} \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq n^3 \frac{1}{n^4} \Rightarrow n^3 \sin \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$