Relazione crescente/decrescente - derivata

Se $f(x)$ cresc.: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \to \begin{matrix} N\geq 0 \\ D>0 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$ per perm. segno

Se $f(x)$ decresc.: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \to \begin{matrix} N\leq 0 \\ D>0 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$ " " "

$\Rightarrow$ Se $f(x)$ è crescente in $I=[a;b]$ e derivabile, allora $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$

Se $f(x)$ è decrescente in $I=[a;b]$ e derivabile, allora $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$

"Test di monotonia"

Sia $f: [a;b]\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e derivabile in $(a;b)$. Allora f è crescente se e solo se $f'(x)\geq 0$ / f è decrescente se e solo se $f'(x)\leq 0$

DIM: $\Rightarrow$ Vedi sopra

$\Leftarrow$ Considero $x_1, x_2 \in (a;b)$ con $x_1<x_2$: Considero $f_{|[x_1;x_2]}$: è continua in $[x_1;x_2]$ e derivabile in $(x_1;x_2)$.

Applichiamo Lagrange $\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1;x_2)$: $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$ (per Hp) $\Rightarrow$ poiché $x_2>x_1$, $f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \Rightarrow f(x)$ è crescente.

Per $f(x)$ decrescente si procede allo stesso modo.

Teorema di Cauchy

Siano $f,g: [a,b]\subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $(a;b)$ con $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)$. Allora esiste $c\in(a;b)$ tale che: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

DIM: $g(a)\neq g(b)$ per Hp. Se supponiamo $g(a)=g(b)$, per Rolle $\exists c: g'(c)=0 \Rightarrow$ contraddizione

Costruiamo $h(x) = [g(b)-g(a)]f(x) - [f(b)-f(a)]g(x)$: Notiamo che:

1) h è continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$ perché operazioni su funzioni continue

2) $h(b) = \dots = h(a) \Rightarrow$ si può applicare Rolle

Applichiamo Rolle a $h(x)$: $h'(c)=0 \Rightarrow [g(b)-g(a)]f'(c) - [f(b)-f(a)]g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Teorema di De L'Hôpital

Siano $f,g: (a;b)\subseteq A\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in $(a;b)$ escluso al massimo x_0. Se:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

2) $g'(x_0)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$

3) esista $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

IMP. VERIFICARE IPOTESI

allora $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

DIM: posso estendere per continuità $f(x)$ e $g(x)$ in modo che $f(x_0)=g(x_0)=0$. Quindi $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $\forall x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$.

Scelgo $\bar{x} \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\setminus x_0$: $\bar{x}>x_0$. Considero $[x_0,\bar{x}]$: f e g sono continue anche in $[x_0;\bar{x}]$ e derivabili in $(x_0;\bar{x})$

Per Cauchy $\exists c\in(x_0;\bar{x})$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{g(\bar{x})-g(x_0)} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Visto che $c\in(x_0;\bar{x})$, $c\in(x_0-\delta;x_0+\delta) \Rightarrow \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} - l\right| < \varepsilon$. Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\bar{x}\to x_0} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = l$

Funzione derivata e derivate di ordini sup.

Data $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in A, $\exists f': \begin{matrix} A'\subseteq A \to \mathbb{R} \\ f(x) \mapsto f'(x) \end{matrix} \Rightarrow$ La funzione derivata

Se f' è derivabile in x_0, $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0) \Rightarrow$ La derivata seconda