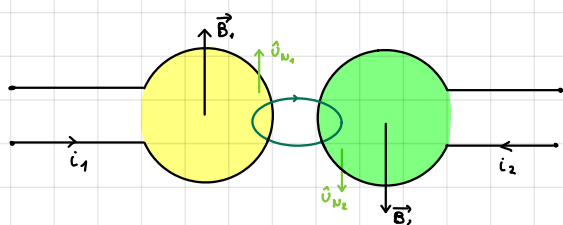


### 13.6 INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Consideriamo:

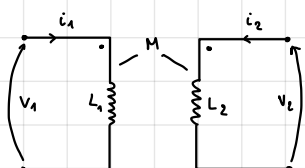


$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \rightarrow M > 0 \text{ perché } \Phi_1 \text{ e } \Phi_2 \text{ sono concordi}$$

Se considero  $N$  spire, avrò un componente con  $N$ -porte e  $2N$  morsetti descritto da:

$$\underline{\Phi} = \underline{L} \underline{i} \quad \text{con} \quad \underline{L} = \underline{L}^T$$

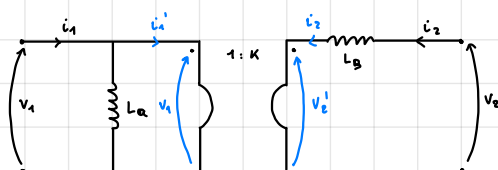
Per  $N=2$  abbiamo induttori mutuamente accoppiati:



$$\underline{V} = \frac{d}{dt} \underline{\Phi} = \underline{L} \frac{d}{dt} \underline{i} \rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{i}_1 + j\omega M \bar{i}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{i}_1 + j\omega L_2 \bar{i}_2 \end{cases}$$

Si dice accoppiamento perfetto o critico quando  $|k|=1$ . Se consideriamo  $N=2$  ciò equivale  $M = \pm \sqrt{L_1 L_2}$

Se consideriamo due induttori  $L_a$  e  $L_b$  ed un trasf. di potenza  $1:K$ , quando devono valere i parametri affinché il circuito sia equivalente ad induttori mutuamente accoppiati (e in acc. critico)



$$\begin{cases} V_2' = K V_1 \\ i_2' = -\frac{1}{K} i_1' \end{cases}$$

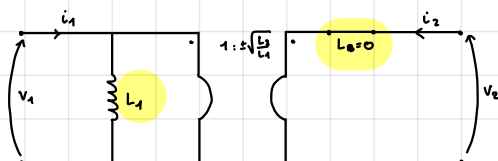
$$\begin{aligned} V_1 &= L_a \frac{d}{dt} (i_1 - i_1') = L_a \frac{di_1}{dt} + K L_b \frac{di_2}{dt} \\ V_2 &= L_b \frac{di_2}{dt} + K V_1' = L_b \frac{di_2}{dt} + K L_a \frac{di_1}{dt} + K^2 L_b \frac{di_2}{dt} \\ &= K L_a \frac{di_1}{dt} + (L_b + K^2 L_b) \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + K L_b \frac{di_2}{dt} \\ V_2 = K L_a \frac{di_1}{dt} + (L_b + K^2 L_b) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$L_1 = L_a \quad M = K L_a \quad L_2 = L_b + K^2 L_b$$

$$L_a = L_1, \quad L_b = \frac{L_2 L_1 - M^2}{L_1}$$

accoppiamento critico  
( $M = \pm \sqrt{L_1 L_2}$ )

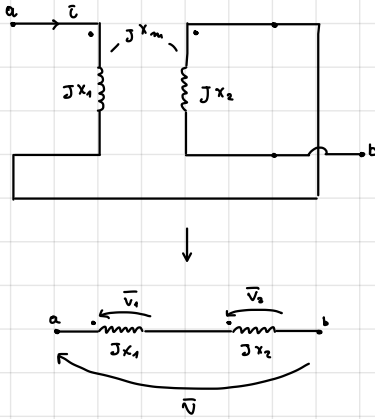


Si dice coefficiente di accoppiamento  $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ . Se  $K = \pm 1$ , l'accoppiamento è perfetto.

### 13.7 ENERGIA IMMAGAZINATA DA INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

$$\begin{aligned}
 V_1 i_1 + V_2 i_2 &= \left( L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left( M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2 = \\
 &= \frac{1}{2} L_1 \frac{d i_1^2}{dt} + \frac{1}{2} L_2 \frac{d i_2^2}{dt} + M \frac{d}{dt} i_1 i_2 = \\
 &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{W_m}
 \end{aligned}$$

### 13.8 COLLEGAMENTO IN SERIE EQUIVERSA DI INDUTTORI MUTUAM. ACCOPP.



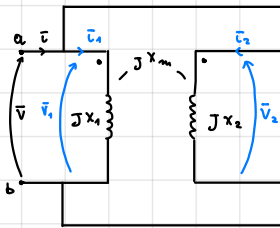
$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = j\omega L_1 \bar{i} + j\omega M \bar{i} + j\omega M \bar{i} + j\omega L_2 \bar{i} = \\
 &= j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \bar{i}
 \end{aligned}$$

$$Z_{eq} = j\omega (L_1 + L_2 + 2M)$$

Esiste anche la serie contravversa con  $Z_{eq} = j\omega (L_1 + L_2 - 2M)$



### 13.9 COLLEGAMENTO IN PARALLELO EQUIVERSO DI INDUTTORI MUTUAM. ACCOPP.



$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \\
 \bar{i} &= \bar{i}_1 + \bar{i}_2
 \end{aligned}$$

$$\bar{V} = j\omega L_1 \bar{i}_1 + j\omega M (\bar{i} - \bar{i}_1) = j\omega M \bar{i} + j\omega (L_1 - M) \bar{i}_1$$

$$\bar{V} = j\omega M \bar{i}_1 + j\omega L_2 (\bar{i} - \bar{i}_1) = j\omega L_2 \bar{i} + j\omega (M - L_2) \bar{i}_1 \rightarrow \bar{i}_1 = \frac{\bar{V} - j\omega L_2 \bar{i}}{j\omega (M - L_1)}$$

$$\hookrightarrow \bar{V} = j\omega M \bar{i} + j\omega (L_1 - M) \frac{(\bar{V} - j\omega L_2 \bar{i})}{j\omega (M - L_1)} \Rightarrow \dots$$

↓

$$Z_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{i}} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Esiste anche il parallelo contravverso con  $Z_{eq} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

