Applicazioni Lineari

Prof.
Marco
Compagnoni

APPLICAZIONI LINEARI:

- Definizione
- Esempi
- Nucleo, immagine

SEZIONE 5.1

- Operazioni in $Hom(V,W)$

SEZIONE 5.2

Applicazioni Lineari (Definizione 4.4)

$(V, \mathbb{K}, +_V, \cdot_V), (W, \mathbb{K}, +_W, \cdot_V)$ spazi vettoriali.

$f: V \to W$ è un'applicazione lineare ($f \in \mathrm{Hom}(V,W)$) se:

i) $f(\underline{v} +_V \underline{\tilde{v}}) = f(\underline{v}) +_W f(\underline{\tilde{v}}) \qquad \forall \underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V$;

ii) $f(t \cdot_V \underline{v}) = t \cdot_W f(\underline{v}) \qquad \forall \underline{v} \in V \quad \forall t \in \mathbb{K}$.

Esempi

- $\phi_B : V \to \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}), \qquad n = \dim(V)$.
- $\mathrm{Tr} : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
- Sia $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}) \Rightarrow$ l'applicazione naturale associata è

$$f_A : \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m,1;\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto A * X$$

$$f_A(t_1 X_1 + t_2 X_2) = A(t_1 X_1 + t_2 X_2) = t_1 \cdot AX_1 + t_2 \cdot AX_2 = t_1 \cdot f_A(X_1) + t_2 \cdot f_A(X_2).$$

- $V = \mathbb{K}[x]$

Definiamo la derivata algebrica sulla base $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$ e poi la estendiamo su V per linearità:

$$\frac{d}{dx}(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n) = a_0 \cdot \cancel{\frac{d}{dx} 1} + a_1 \cdot \frac{d}{dx} x + \dots + a_n \cdot \frac{d}{dx} x^n =$$

$$= a_1 \cdot 1 + \dots + (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

OSS:
- per costruzione $\frac{d}{dx} \in \mathrm{Hom}(V, V)$;
- conosco $\frac{d}{dx}$ su una base $\Rightarrow$ la conosco su tutta V!

- $\det : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ non è lineare

- $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^2$

non è lineare:

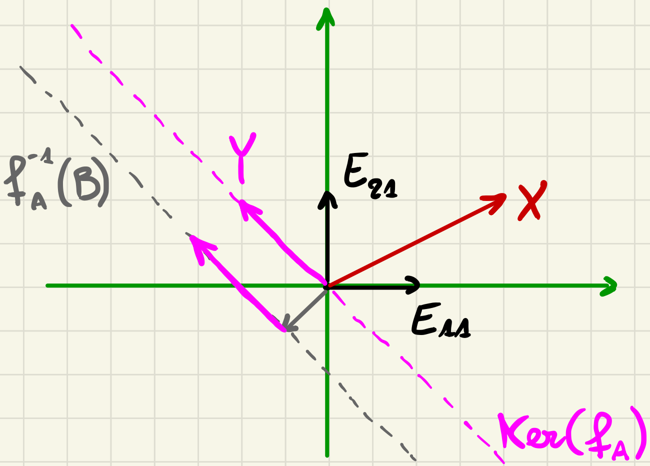
$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) = (t_1 x_1 + t_2 x_2)^2 = t_1^2 x_1^2 + 2 t_1 t_2 x_1 x_2 + t_2^2 x_2^2$$

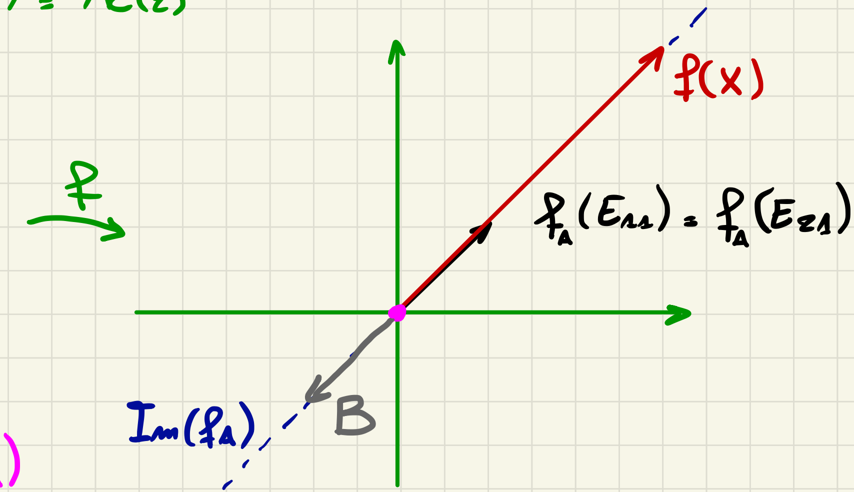
$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) = t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2$$

$\neq$

$V = \mathrm{Mat}(2,1) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f_A(X) = AX \qquad f_A \in \mathrm{Hom}(V,V)$

$f_A(E_{11}) = A_{c(1)} \qquad f_A(E_{21}) = A_{c(2)}$





$f_A(X) = f(2E_{11} + E_{21}) = 2f(E_{11}) + f(E_{21}) = 3f(E_{11})$

$f_A(t\cdot Y) = f(t\cdot(-E_{11}+E_{21})) = -t\, f(E_{11}) + t\, f(E_{21}) = O_{21} = \mathrm{Ker}(A)$

$f_A^{-1}(B) = \{X \mid AX = B\} = \{X = X_p + X_0 \mid AX_p = B,\ AX_0 = O_{21}\}$

$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nucleo ed Immagine di un'Applicazione (Definizione 5.2)

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$:

i) $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$ = nucleo di f ;

ii) $\mathrm{Im}(f) = \{\underline{w} \in W \mid \underline{w} = f(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V\}$ = immagine di f.

Proposizione 5.4 (+ Lemma 5.3)

i) $\mathrm{Ker}(f)$ è un sottospazio di V ;

ii) $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W.

Dim: i) siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$

$f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) \Rightarrow t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) = t_1 \cdot \underline{0}_W + t_2 \cdot \underline{0}_W = \underline{0}_W$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)$ è chiuso rispetto a $+, \cdot$.

$f(\underline{0}_V) = f(\underline{v} - \underline{v}) = f(\underline{v}) - f(\underline{v}) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{0}_V \in \mathrm{Ker}(f)$.

ii) Analogo. $\boxtimes$

Esempi

- ϕ_B è biunivoca $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\phi_B) = \{\underline{0}_V\}$, $\mathrm{Im}(\phi_B) = \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K})$.
- $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$.

  1 sola equazione lineare $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$
- $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $f_A \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}), \mathrm{Mat}(m,1;\mathbb{K}))$.

  $\mathrm{Ker}(f_A) = \{X \in \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}) \mid f_A(X) = AX = 0_{m1}\} = \mathrm{Ker}(A)$.

  $\mathrm{Im}(f_A) = \{B \in \mathrm{Mat}(m,1;\mathbb{K}) \mid B = f_A(X) = AX\} = C(A)$

  $$AX = A * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_{C(i)}$$
- $\mathrm{Ker}(d/dx) = \mathbb{K}[x]_0$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(d/dx) = \mathbb{K}[x]$

REMIND: soluzione generale di $AX = B$ è $X = X_P + X_0 = f_A^{-1}(B)$

- $AX_P = B$ soluzione particolare
- $AX_0 = 0$ soluzione generale

STRUTTURA DELLE CONTROIMMAGINI (TEOREMA 5.6)

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sia $\underline{w} \in W$ e $\underline{v}_P \in f^{-1}(\underline{w}) \Rightarrow$

$f^{-1}(\underline{w}) = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{v}_P + \underline{v}_0 \text{ dove } \underline{v}_0 = \mathrm{Ker}(f) \}$.

DIM: $\underline{v} \in f^{-1}(\underline{w})$ sse $f(\underline{v}) = \underline{w}$ sse

$f(\underline{v} - \underline{v}_P) = f(\underline{v}) - f(\underline{v}_P) = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}_W$ sse $\underline{v}_0 = \underline{v} - \underline{v}_P \in \mathrm{Ker}(f)$. $\blacksquare$

COROLLARIO 5.7 f è iniettiva sse $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{0}\}$.

ALGEBRA DELLE APPLICAZIONI LINEARI

PROPOSIZIONE 5.9

$(\mathrm{Hom}(V,W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

$$(f_1+f_2)(\underline{v}) = f_1(\underline{v}) + f_2(\underline{v}) \qquad (t\cdot f)(\underline{v}) = t\cdot f(\underline{v})$$

DIM: • verifichiamo che $f_1+f_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$ per $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

$$(f_1+f_2)(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = f_1(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) + f_2(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) =$$

$$= t_1 f_1(\underline{v}_1) + t_2 f_1(\underline{v}_2) + t_1 f_2(\underline{v}_1) + t_2 f_2(\underline{v}_2) =$$

$$= t_1(f_1(\underline{v}_1) + f_2(\underline{v}_1)) + t_2(f_1(\underline{v}_2) + f_2(\underline{v}_2)) =$$

$$= t_1(f_1+f_2)(\underline{v}_1) + t_2(f_1+f_2)(\underline{v}_2).$$

• Analogo per $(tf)(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1(tf)(\underline{v}_1) + t_2(tf)(\underline{v}_2)$

$\Rightarrow tf \in \mathrm{Hom}(V,W)$ per $t \in \mathbb{K}$, $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

• le proprietà delle operazioni si verificano facilmente:

$(f_1+f_2)(\underline{v}) = f_1(\underline{v}) + f_2(\underline{v}) = f_2(\underline{v}) + f_1(\underline{v}) = (f_2+f_1)(\underline{v})$

analogo per le altre

- $0_{VW} : \begin{matrix} V \to W \\ \underline{v} \mapsto \underline{0}_W \end{matrix}$ è l'elemento neutro $+$.
- $-f : \begin{matrix} V \to W \\ \underline{v} \mapsto -f(\underline{v}) \end{matrix}$ è l'inverso additivo di f. $\boxtimes$

$A, B \in Mat(m, n; \mathbb{K}) \Rightarrow$

$V = Mat(n, 1; \mathbb{K}) \quad W = Mat(m, 1; \mathbb{K}) \quad f_A, f_B \in Hom(V, W)$

$(f_A + f_B)(X) = f_A(X) + f_B(X) = AX + BX = (A+B)X = f_{A+B}(X)$

$(t f_A)(X) = t \cdot f_A(X) = t \cdot (AX) = (tA)X = f_{tA}(X)$

$0_{VW} = f_{0_{mn}} \qquad -f_A = f_{-A}$

$\Upsilon : \begin{matrix} Mat(m, n; \mathbb{K}) \to Hom(V, W) \\ A \longmapsto f_A \end{matrix}$ è un omomorfismo di spazi vettoriali

Tra funzioni esiste una terza operazione, la composizione:

$$f: \begin{array}{l} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{array} \quad , \quad g: \begin{array}{l} B \to C \\ b \mapsto g(b) \end{array} \implies g \circ f: \begin{array}{l} A \to C \\ a \mapsto g(f(a)) \end{array} .$$

PROPOSIZIONE 5.10

- f, g lineari $\implies$ $g \circ f$ lineare ;
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ proprietà associativa ;
- $h \circ (f+g) = (h \circ f) + (h \circ g)$ proprietà distributiva ;

  $(g+h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$
- $t \cdot (g \circ f) = (t \cdot g) \circ f = g \circ (t \cdot f)$ omogeneità ;
- $Id_W \circ f = f$, $f \circ Id_V = f$ $\implies$ Id_V è l'elemento neutro di $\circ$.

DIM: $(g \circ f)(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) = g(f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2)) = g(t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)) =$

$= t_1 g(f(\underline{v}_1)) + t_2 g(f(\underline{v}_2)) = t_1 \cdot (g \circ f)(\underline{v}_1) + t_2 \cdot (g \circ f)(\underline{v}_2)$ $\boxed{/}$

$A \in Mat(m, n; \mathbb{K})$, $B \in Mat(n, p; \mathbb{K})$

$U = Mat(n, 1; \mathbb{K})$ $\quad V = Mat(m, 1; \mathbb{K})$ $\quad W = Mat(p, 1; \mathbb{K})$

$f_A \in Hom(U, V)$ $\quad f_B \in Hom(W, U) \Rightarrow f_A \circ f_B \in Hom(W, V)$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A \circ f_B"'] & U \arrow[r, "f_A"] & V \end{tikzcd}$$

- $(f_A \circ f_B)(X) = f_A(f_B(X)) = f_A(BX) = A(BX) = (AB)X = f_{AB}(X)$
- $Id_U = f_{I_n}$
- $(f_A)^{-1}$ esiste se esiste A^{-1}, in tal caso $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$

$\Upsilon(A * B) = \Upsilon(A) \circ \Upsilon(B)$