18 settembre 2019

"Istruzioni per l'uso"

Diviso in lezione ed esercitazione. Le esercitazioni divise in due squadre in base all'alfabeto. Il calendario della settimana verrà caricato su beep.

Contatti: cecilia.rizzi@polimi.it (informazioni particolari).

Non c'è la frequenza obbligatoria ma sono cazzi tuoi. **Potrebbero inserirsi delle ore il lunedì**.

Libri

- Bramanti, Pagani, Salsa: Analisi 1
- Crasta, Malusa: Analisi Matematica 1

Eserciziari suggeriti sul sito. Prestare attenzione alle cose che trovi online.

Esame

Diviso in parte scritta e parte orale.

- **Scritta**: esercizi e teoria (valutato in 33)
  - 4 multiple-choice (penalità se sbagli)
  - 10 domande aperte (Se fai meno di 4 vieni direttamente bocciato)
  - 19 punti di esercizi (Se fai meno di 9 vieni direttamente bocciato)
- **Orale**:
  - Dipende dal voto: se lo scritto è alto si fa una correzione prova, sennò classico orale.
  - Puoi sempre chiede di fare l'orale (devi rifiutare il voto)

Prove in itinere: ~ lunedì 4 novembre e 9 gennaio. Funzionano allo stesso modo ma sono su metà programma. Se non passi la prima prova non puoi fare la seconda prova. Minimo è 15, ma la media deve essere lo stesso più di 18. Al primo appello si fa l'esame in una sola sessione su tutto.

Per frequentare l'esame bisogna iscriversi non oltre la scadenza (anche se puoi). Bisogna portare un documento valido.

Relazioni d'ordine, d'equivalenza

Due relazioni possono essere:

- **Relazione d'ordine** se rispetta **le 3 proprietà**:
  i. è **riflessiva**: la relazione di può applicare allo stesso insieme (es. $A \subseteq A$)
  ii. è **antisimmetrica**: se i due insiemi possono essere invertiti, allora sono uguali (es. $A \subseteq B, B \subseteq A => A = B$)
  iii. è **transitiva**: se la relazione vale per A e B e per B e C, allora vale anche per A e C (es. $A \subseteq B, B \subseteq C => A \subseteq C$)
  Esempio: l'inclusione, $>=$. Le relazione d'ordine ordinano le cose (tipo i numeri)
- **Relazione d'equivalenza** (~) se rispetta **le tre proprietà**:
  i. è **riflessiva**
  ii. è **simmetrica**
  iii. è **transitiva**
  Esempio: congruenza, similitudine, parallelismo, frazioni equivalenti (1/2 = 2/4)

Logica

Relazioni logiche

Le solite.

Contronominale: $\forall x \in A | p(x) => q(x)$ equivale logicamente a $\forall x \in A | q(x)^{-} => p(x)^{-}$

Dimostrazione per assurdo

Suppongo vera l'ipotesi e nego la tesi per arrivare a una contraddizione.

Insiemi

Non viene definito (**concetto primitivo**): una collezione, famiglia, classe di oggetti (non necessariamente numeri). Indicato solitamente con una lettera maiuscola.

Rappresentati per:

- elencazione: $A = a, b, c$
- condizione: $A = letterealfabeto$

Un oggetto può appartenere ($\in$) o non appartenere ($\notin$) ad un insieme.

- **Insiemi uguali**: A e B sono uguali ($A = B$) se hanno gli stessi elementi: $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- **Sotto insiemi**: A può essere contenuto o uguale in B ($A \subseteq B \vee A \subset B$). A è un sotto insieme di B se $\forall a \in Ba \in B$. Il simbolo è detto **inclusione**.
  L'inclusione è una relazione d'ordine.

Operazioni sugli insiemi

Le operazioni sono unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano, insieme complementare.

Insiemi particolari

- **Insieme vuoto**: $\emptyset$
- **Insieme universo**: U, contiene tutto

Definizione operazioni

- **Unione**: $A \cup B = x \in U | x \in A \vee x \in B$
- **Intersezione**: $A \cap B = x \in U | x \in A \wedge x \in B$
- **Complementare**: $A^c = \bar{A} = x \in U | x \notin A$
- **Differenza**: $A\ B = x \in U | x \in A \wedge x \notin B$
- **Prodotto cartesiano**: $A \times B = (x, y) | x \in A \wedge x \in B$
- **Intersezione e unione sono commutative, associative**

19 settembre 2019

Numeri

Numeri naturali

Sono tutti i numeri **interi positivi incluso lo 0**.

$$N = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Può **essere costruito a partire da un solo numero**: basta aggiungere un'unità ogni volta.

Ha la **proprietà di contenere sempre il successore a un numero**: ci permette di usare il **principio di induzione**. Tutti i sottoinsiemi di N gode del principio del minimo intero. Poiché è valido il principio del minimo intero, N è un insieme ben ordinato.

Principio di induzione

Sia $S \subseteq N$ un sottoinsieme tale che:

- $0 \in S$
- $\forall n \in S => n+1 \in S$ (S ha sempre un successore)

Allora S coincide con N.

Il **principio di induzione ha una traduzione in termini logici**. Il principio di induzione può essere usato per dimostrare teoremi in N.

Principio di induzione (logico)

Sia P(n) un predicato (proposizione) che dipende da $n \in N$ tale che:

- quando P(0) è vero
- $\forall n \in NP(n) => p(n+1)$: assumendo P(n) come vero, riesco a dimostrare che il successore è vero

> Dimostra $P(n) = 2^n > n \forall n \in N$ P(0) è vera: $2^0 > 0$ Suppongo che P(n) è vera, dimostro P(n+1): $2^n \cdot 2 > 2n >= n+1$ quindi $P(n+1)$ è vera.

Principio del minimo intero

Ogni sottoinsieme di N ha un elemento minimo (più piccolo di tutti gli altri).

Definizioni operazioni in N

- **somma** $+ : N \times N \rightarrow N \; somma(n1, n2) \rightarrow n_1 + n_2 \in N$
- **prodotto**: $* : N \times N \rightarrow N \; prodotto(n1, n2) \rightarrow n1 \cdot n2 \in N$

Proprietà delle operazioni

- **commutativa**: $n1 + n2 = n2 + n1$
- **associativa**: $n1 + (n2 + n3) = (n1 + n2) + n3$
- **distributiva**: $n1 \cdot (n2 + n3) = n1 \cdot n2 + n1 \cdot n3$

La sommatoria

Si indica con la **sigma maiuscola**

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \sum_{i=0}^{3} a_i$$

Dove:

- I è un **insieme finito**. I suoi elementi sono chiamati **indici** (segnaposti: indicano una posizione)
- $(a_i)_{a \in I}$ è una **famiglia di numeri che dipendono da** i

> $I = 1, 2, 3$
> $a_i = 2^i$
> $\sum_{i \in I} a_i = 2^1 + 2^2 + 2^3$

Formula di Gauss (sommatoria dei primi n numeri naturali): $\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ **Somma di una progressione geometrica** (Dimostrazione in 1.1):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a \sum_{i=0}^{n} q^i = a(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q})$$
$$\text{se } q = 1 \sum_{i=0}^{n} a(1)^i = a(n+1)$$

Proprietà

La sommatoria è **un operatore lineare**

- **l'indice è muto**: non importa il nome dell'indice

- **traslando gli indici, la sommatoria non cambia**: è importante che il numero di elementi sia uguale
- **si definiscono sommatorie anche su due o più famiglie di indici**: prima sommo una famiglia, poi l'altra:
  > $\sum i \in I, j \in J a_{ij}$ Es: $\sum_{i \in I, j \in J} (i)^J = \sum_{i=1}^{2} (\sum_{j=0}^{3} (i)^j)$
- **vale la proprietà dissociativa**:
  > $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} (a_i) + \sum_{i \in I} (b_i)$
- **le costanti possono essere portate fuori**:
  > $\sum_{i \in I} K a_i = K \cdot \sum_{i \in I} a_i$
- **scomposizione di una sommatoria**:
  > $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
- **riflessione degli indici**
  > $\sum_{i=0}^{n} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$

La produttoria

Si indica con un grande pi greco. E' uguale alla sommatoria ma al posto di fare la somma fa il prodotto.

Proprietà

- $\prod_{i \in I} k a_i = k^i \prod_{i \in I} a_i$
- Non vale la dissociativa

23 settembre 2019

Numeri

[...]

Numeri naturali

[...]

Principio di induzione (Logico)

Sia $P(n)$ un predicato dipendente da $n \in N$, se valgono le seguenti due proprietà:

- $P(n_0)$ è vera ($n_0 \in N$ è il punto di partenza)
- Se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Il problema dell'induzione è che bisogna avere la formula di partenza.

Il principio di induzione è **strettamente legato il principio del minimo intero.** Infatti il minimo di $P(n)$ è proprio n_0.

Principio del minimo intero

Ogni sottoinsieme non vuoto di N ha elemento minimo. In N tale minimo è 0.

Fattoriale

Preso $n \in N$, il fattoriale sarà $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Eccezione è lo 0: $0! = 1$

Il fattoriale è un numero definito induttivamente, infatti $n! = (n-1)!n$.

Si può fare solo a partire dai numeri naturali.

Coefficiente binomiale

Già visti in probabilità: calcolare il numero di combinazioni.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dove $n \in N; 0 \leq K \leq n$. Convenzionalmente:

$$\binom{0}{0} = 1$$

Si può fare solo a partire dai numeri naturali.

Compare nel binomio di Newton, che ci permette di elevare un binomio alla 5:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Con $a, b \in R, n \in N$. Il coefficiente di Newton si può dimostrare per induzione (vedi 1.0).

Numeri interi relativi

Non esiste un minimo, di conseguenza **non valgono il principio del minimo intero e il principio di induzione non valgono.**

Nell'insieme $N \times N$ definisco una relazione di equivalenza $\sim$ tale che:

$$(m,n) \sim (h,k) <=> m+k = n+h$$

Questa $[(m,n)]_\sim$ è la classe di equivalenza della sottrazione $m-n$ (esempi 1.1). Tutte le coppie infatti, danno la stessa somma, ma anche la stessa differenza.

> Dimostrazione che $\sim$ è una relazione di equivalenza:
>
> - è riflessiva: $(m,n) \sim (m,n) => m+n = n+m$
> - è simmetrica: $(a,b) \sim (c,d) = (c,d) \sim (a,b)$
> - è transitiva

Z viene, quindi, definito come $Z = N \times N / \sim$ (quoziente tra la classe di equivalenza e $N \times N$).

Caratteristiche

Z è più grande di N: $N \subset Z$.

Operazioni

- Somma: $(m,n)_\sim + (h,k)_\sim = (m+h, n+k)_\sim$
- Prodotto: $(m,n)_\sim \cdot (h,k)_\sim = (mh+nk; hn+mk)_\sim$

Perché $+ \cdot + = +ecc...$? (vedi 1.2)

Proprietà

- Non vale il principio del minimo intero, quindi non è ben ordinato
- E' un insieme totalmente ordinato

Numeri razionali

Nell'insieme $Z \times (Z-0)$ definisco una relazione di equivalenza $\sim\sim$ tale che:

$$(m,n) \in Z \times (Z-0)$$
$$(m,n) \sim\sim (h,k) <=> m \cdot k = n \cdot k$$

Questa $[(m,n)]_{\sim\sim}$ è la classe di equivalenza della divisione m/n. Q, quindi, è $Q = Z \times (Z-0) / \sim\sim$

> Dimostra che $\sim\sim$ è una relazione di equivalenza: Homework

Ciascuna delle frazioni può essere espressa come un numero decimale.

La rappresentazione decimale

Non è altro che un allineamento di cifre. Può essere limitata, illimitata periodica.

$$x = \pm \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot 10^j + \sum_{l=0}^{m} d_l 10^{-l}$$

La parte intera è necessariamente finita. La parte decimale può essere infinita. Ad ogni numero razionale è associata una rappresentazione decimale o limitata o illimitata periodica. I numeri illimitati non periodici non rientrano nei numeri razionali.

> 1537,28 = 1 · 10 ^3 + 5 · 10^2 + 3 · 10 · 7 + 2 · 10^{-1} + 8 · 10^{-2}

Proprietà

- E' un insieme totalmente ordinato, ma non è ben ordinato (non vale il principio del minimo).

Numeri Reali

La costruzione dei numeri reali avviene sempre con le classi di equivalenza, ma la saltiamo.

I numeri reali non i numeri decimali illimitati non periodici. Risalgono a Pitagora (ha scoperto la $\sqrt{2}$)

> DImostrazione che $\sqrt{2}$ è reale Se x è un numero tale che $x^2 = 2$, allora x non è razionale. (Vedi 1.3)

24 settembre 2019

Numeri

Numeri razionali

Relazioni d'ordine

Definiamo in Q la relazione d'ordine $\leq$.

- E' compatibile con le operazioni:

  $$a \leq b \implies a+c \leq b+c \implies ac \leq bc \quad \text{(a patto che } c > 0)$$

  La presenza di $\leq$ ci permette di affermare che Q è un campo totalmente ordinato.

Numeri reali

R è una qualsiasi rappresentazione decimale, un qualsiasi allineamento di decimali. Di conseguenza, $Q \subseteq R$.

R è un campo ordinato completo (non ci sono buchi). La differenza, infatti, che c'è tra Q ed R è la completezza.

Operazioni

Su R sono definite 2 operazioni (derivate da Q):

- $+ : \forall a, b \in R \; a+b \in R$
  - La somma è: commutativa, associativa, con elemento neutro e inverso.
- $\cdot : \forall a, b \in R \; ab \in R$
  - Il prodotto è: commutativo, associativo, con elemento neutro e inverso per per ogni elemento ad esclusione dell'elemento neutro della somma

Le due operazioni sono legate dalla proprietà distributiva.

Relazioni d'ordine

R eredita la relazione d'ordine leq da Q. Questo rende R un campo ordinato.

In R però vale anche un'altra proprietà: l'assioma di completezza. Questo rende R, oltre che ordinato, completo.

Assioma di completezza

Siano $A, B \subseteq R$ tali che $A, B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$ e a $A \cup B = R$ e $\forall a \in A, \forall b \in Ba < b$ allora esiste un unico numero reale tale che $\forall a \in A, \forall b \in Ba \leq s \leq b$. s è detto elemento separatore.

Intervalli

Per intervallo di estremi a, b si intende un sottoinsieme di R. Può essere di diversi tipi:

- $(a; b) = x \in R | a < x < b$: intervalli aperti
- $[a; b] = x \in R | a \leq x \leq b$: intervalli chiusi
- e gli altri due misti

Esistono anche gli intervalli illimitati: $(a; +\infty)$

Intorno

Preso $x_0 \in R$ si dice intorno di x_0 di raggio δ l'insieme dei valori x reali che distano da x_0 meno di δ. In generale un intorno è un intervallo, ma non è detto che un intervallo sia un intorno.

$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$
$$|x - x_0| < \delta$$

Insiemi limitati

Sia E un insieme numerico sottoinsieme dei reali. E si dice un insieme limitato se $\exists m, M \in R | \forall x \in E m \leq x \leq M$.

E si dice superiormente limitato se esiste $\exists M \in R | \forall x \in R x \leq M$ E si dice inferiormente limitato se esiste $\exists m \in R | \forall x \in R x \geq m$

Possono esistere insieme limitati senza massimo e minimo (es.: $(-1, 1)$). Per ciò si include anche il concetto di maggiorante e minorante. Osserva: esistono infiniti maggioranti e minoranti per uno stesso insieme limitato. Per questo vengono anche definiti l'estremo superiore e inferiore

Massimo

Definiamo M massimo per E se:

- $\forall x \in E, x \leq M$
- $M \in E$

Minimo

Definiamo m minimo per E se:

- $\forall x \in E, x \geq m$
- $m \in E$

Maggiorante

Definiamo $\bar{M}$ maggiorante di E se $\forall x \in E, x \leq \bar{M}$

Minorante

Definiamo $\bar{m}$ minorante di E se $\forall x \in E, x \geq \bar{m}$

Estremo superiore

Definiamo $Sup(E)$ estremo superiore il minimo dei maggioranti:

- $\forall x \in E x \leq a$
- $a = Min(M)$ dove M è l'insieme dei maggioranti per E

Estremo inferiore

Definiamo $Inf(E)$ estremo inferiore il massimo dei minoranti:

- $\forall x \in E x \geq a$
- $a = Max(m)$ dove m è l'insieme dei minoranti per E

26 settembre 2019

Collegamento tra l'esistenza degli estremi e la completezza di R

Ogni insieme contenuto in R non vuoto limitato superiormente/inferiormente ammette estremo superiore/inferiore

Dimostrazione

Supponiamo che E sia limitato superiormente. Allora E ammette maggioranti. Indichiamo con M l'insieme di tutti i maggioranti ($M = x \in R | \forall e \in E e \leq x$). L'insieme M così definito è limitato inferiormente (tutti gli elementi di E costituiscono dei minoranti). Definisco, allora, $N = R - M$ (tutti gli elementi che non sono maggioranti). Osserviamo che:

1. $N \neq \emptyset$
2. $M \cup N = R$

3. $M \cap N = \emptyset$
4. $\forall y \in N \implies \exists \bar{e} \in E | \bar{e} > y \ \forall x \in M \implies \exists \bar{e} \in E | x > \bar{e}$ quindi $y < \bar{e} < x$

Queste quattro osservazioni sono le ipotesi dell'assioma di completezza. Quindi $\exists s \forall y \in N, \forall x \in M | y \leq s \leq x$. Verifico che $s \in M$ (significa che s è il più piccolo dei maggioranti).

Per assurdo, supponiamo che s appartenga ad N. Allora s non è un maggiorante e significa che $\exists \bar{e} \in E | \bar{e} > s$. Costruisco un elemento pari a $s < \frac{s+\bar{e}}{2} < \bar{e}$. Questo numero è una contraddizione perché sarebbe come dire che $\frac{s+\bar{e}}{2} \in N$ e quindi $y \leq s < \frac{s+\bar{e}}{2} < \bar{e} \leq x$. Così io avrei costruito due elementi separatori, ciò però è un assurdo perché l'assioma di completezza afferma che esiste un solo separatore. Allora l'assurdo sta nel negare la tesi e quindi $s \in M$ ed esiste l'estremo superiore di E.

Numeri complessi

Completano i numeri reali: ci permettono di risolvere le equazioni polinomiali che non riuscivamo nei reali. Si è costruito, allora, un campo più grande dei reali $(C, +, *)$.

Costruzione

E' un insieme di coppie ordinate di numeri reali appartenenti a $R \times R$. Le operazioni sono queste:

- Somma : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Prodotto: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

1.0

Binomio di Newton: Dimostrazione

$$P(n) = \left\{ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right\}$$

1) $P(0) = \left\{ (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 + b^0 = 1 \right\}$ ✓

$P(1) = \left\{ (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a+b \right\}$ ✓

2) $P(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k = (a+b)^{n+1}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{P(n)} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h =$$

$h = k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + \binom{n+1-1}{n+1-1} a^{\cancel{n+1-n-1}} b^{n+1} =$$

$n: \{1, 2, \dots\}$
$k: 0 \quad 1 \quad 2 \dots n$
$h: 1 \quad 2 \quad 3 \dots n+1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k\right] + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k}}$$

DIMOSTRATO!

1.1

$(2,3) \sim (1,2) \iff 2+2 = 3+1 = 4$

!! $2-3 = -1 = 1-2$!!

$(5,8) \sim (3,6) \iff 5+6 = 8+3$

!! $5-8 = -3 = 3-6$!!

1.2

Dimostrazione $- \times - = +$

$2 \cdot (-3) = -3-3 = -6$

$(-2)(-3) = ?$ Dim: $0 = b \cdot 0 = b(a-a) = ba + b(-a) = ba - ba = ab - (-a)(-b) = 0$

$\hookrightarrow ab = (-a)(-b)$

$\Downarrow$

$2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = 6$

1.3

Dimostrazione $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (per assurdo)

Supponiamo $\exists\, m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \mid x = \frac{m}{n} \Rightarrow m,n$ non hanno fattori comuni.
allora $\exists\, x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow \exists\, K \mid m^2 = 4K^2 \Rightarrow m^2 = 4K^2 = 2n^2 \rightarrow$ fattore comune $= 2$

$\hookrightarrow$ ASSURDO: per Hp m ed n non hanno fattori comuni

1.1

(1) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty) \Longrightarrow \nexists\, Sup(E), Inf(E)$

(2) $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{x-2} \leq 0 \right\} = [1;2) \Longrightarrow Sup(E) = 2, \underbrace{Inf(E) = 1 = min(E)}_{\text{LIMITATO INF.}}$

(3) $E = \left\{ x = n - \frac{1}{n},\; n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \Rightarrow \underbrace{Inf(E) = min(E) = 0}_{\text{LIMITATO INFERIORMENTE}}$, non è superiormente limitato

↳ $\forall M > 0,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \bar{x} > M$

$$\frac{\bar{n}^2 - 1}{n} > M \qquad \frac{n^2 - M\bar{n} - 1}{n} > 0$$

$$\bar{n} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

↳ $\bar{n} > \dfrac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$

ESTREMI DI UN'INSIEME

(1) $E = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \quad t > 2 \right\}$

sempre possibile

$x > 0 \quad \forall t \in E \Rightarrow$ 0 è un minorante, ma non il più piccolo.

1 è un minorante

↳ è il più grande?

$\forall \varepsilon > 0 \quad 1+\varepsilon$ non è un minorante $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} \le 1+\varepsilon \\ \exists \bar{t} \in \mathbb{R} \mid \frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} < 1+\varepsilon \end{array}}$ equivale a: $\Rightarrow$ si dice che $\bar{x}$ è l'estremo inferiore

piccolo

$$\frac{\bar{t}+1-(1+\varepsilon)(\bar{t}-2)}{\bar{t}-2} < 0 \Rightarrow \bar{t}+1-(\bar{t}-2+\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon) < 0$$

$$\cancel{\bar{t}}+1-\cancel{\bar{t}}+2-\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon < 0 \Rightarrow -\bar{t}\varepsilon < 2\varepsilon-3$$

$$\bar{t} > 2+\frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{t} \in \mathbb{R}$$

grande

$\nexists$ l'estremo superiore $\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ (M > 0) \quad \exists t_1 \in \mathbb{R}\ (t_1 > 2) \mid \frac{t_1+1}{t_1-2} > M \Rightarrow$

$$t_1 + 1 - Mt_1 - 2M > 0$$

$$t_1(1-M) + 2M - 1 > 0$$

$$t_1(1-M) > -2M+1$$

$$t_1(1-M) < 2M+1 \Rightarrow t_1 < \frac{2M+1}{1-M} \Rightarrow 2 < t_1 < \frac{2M+1}{1-M}$$

$\exists t_1$

② $E = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

se voglio calcolare E, posso farlo: $\left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{4} + \frac{2}{3}; \frac{8}{27} + \frac{2}{3}; \dots \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}$ è sicuramente un minorante, appartiene all'insieme $\Rightarrow$ è minimo e estremo inferiore

qual è un possibile maggiorante? $\frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}}{3n^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3n^2} > 0 \Rightarrow 3n^2 > 0$

$\bar{x} = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow 1$ è un maggiorante, ma è il più piccolo?

$\exists\, \bar{x} \in E \mid \bar{x} > 1-\varepsilon \Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \frac{\bar{n}^2-1}{3\bar{n}^2} + \frac{2}{3} > 1-\varepsilon$

$\bar{n}^2 - 1 + 2\bar{n}^2 - (1-\varepsilon)3\bar{n}^2 > 0 \quad \cancel{\bar{n}^2}-1+\cancel{2\bar{n}^2}-\cancel{3\bar{n}^2}+3\varepsilon\bar{n}^2 > 0$

$3\varepsilon\bar{n}^2 - 1 > 0 \quad \bar{n}^2 > \frac{1}{3\varepsilon} \Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} - \{0\}$

È il più piccolo perché riesco a costruire un numero più piccolo

③ $E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subseteq \mathbb{R}$ (soluzione $\inf(E) = -\sqrt{2}$; $\sup(E) = \sqrt{2}$)

30 settembre 2019

Numeri

[...]

Numeri complessi

E' l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $R \times R$: $z \leftrightarrow (a, b) \in R$. L'insieme dei numeri complessi è un campo $(C, +, *)$. I numeri complessi estendono i reali: i numeri reali sono le coppie $(a, 0)$. I complessi ci permettono di calcolare tutte le radici di tutti le espressioni polinomiali.

Proprietà

C perde l'ordine rispetto a R. Infatti in R potevamo dire $x^2 \geq 0$, ma in C questo non è possibile: $i^2 = -1 \geq 0$ ASSURDO!!. Non può quindi essere definita una relazione d'ordine tra numeri complessi e, di conseguenza, le disequazioni non si possono fare.

Operazioni (rappresentazione algebrica)

- somma: $+ : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- prodotto: $* : (a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Proprietà:

- le operazioni sono interne
- sono commutative
- sono associative
- la somma ha elemento neutro $(0, 0)$ e inverso $(-a, -b)$
- il prodotto ha elemento neutro $(1, 0)$ e inverso $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$

La forma algebrica dei numeri complessi

Che tipo di numeri sono $(0, 1)$. Usando le operazioni troviamo che:

$$(0, a) + (0, b) = (0, a + b)$$
$$(0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) \text{"="} -1$$

Il numero $(0, 1)$ è un numero il cui prodotto con sé stesso è uguale a -1. In R questo non esiste. $(0, 1)^2 = -1$ quindi il numero è $\sqrt{-1} = i$ dove i è detto unità immaginaria. Ciò ci permette di scrivere un numero complesso come:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a * 1 + b * i = a + ib$$

Questa forma è detta **forma algebrica** del numero complesso z. Si può indicare con:

- $Re(z) = a$: parte reale di z
- $Im(z) = b$: parte immaginaria di z
- i: unità immaginaria

La forma algebrica ci permette di semplificare le operazioni. Infatti ci basta usare le regole dell'algebra simbolica.

- somma: $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
- prodotto: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bd(i)^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

La forma trigonometrica

Visto che abbiamo definito C come $R \times R$, possiamo rappresentare un numero complesso come una coppia di coordinate in un piano cartesiano chiamato piano di Gauss:

- sull'asse orizzontale metteremo la parte reale e lo chiameremo asse reale
- sull'asse verticale metteremo la parte immaginaria e lo chiameremo asse immaginario

Il numero complesso di solito non viene identificato come un punto ma come un vettore. Il vettore avrà queste caratteristiche:

- punto di applicazione: origine
- direzione: la retta passante per origine e per il punto (a,b). La retta avrà un angolo θ con l'asse reale che viene chiamato **argomento** ($Arg(z)$).
- modulo: il **modulo** viene indicato con $\rho = |z|$

La rappresentazione polare avrà forma: $z = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta))$. Questa forma si dice trigonometrica. Osservazioni:

- ρ sarà sempre positivo
- l'angolo θ non è definito in modo unico ($\theta = \theta + 2k\pi$)

Come passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica

Basta calcolare le funzioni trigonometriche ed eseguire i calcoli:

$$z = 2[\cos(\pi \div 3) + i\sin(\pi \div 3)] = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Come passare dalla forma algebrica a quella trigonometrica

Passare dalla algebrica alla trigonometrica è un po' più storto, ma basta usare delle semplici formule:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Poiché l'arcotangente restituisce due angoli, per trovare la θ giusta devo il valore di a e b:

- se $a > 0, b > 0$ allora θ appartiene al primo quadrante
- se $a < 0, b > 0$ allora θ appartiene al secondo quadrante
- se $a < 0, b < 0$ allora θ appartiene al terzo quadrante
- se $a > 0, b < 0$ allora θ appartiene al quarto quadrante

Il coniugato di un numero complesso

Dato $z = a + bi = \rho[cos\theta + isin\theta]$ viene detto coniugato di z il numero

$$\bar{z} = a - bi = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \rho[\cos\theta - i\sin\theta]$$

Proprietà del coniugato

- se sommo un numero e il suo coniugato ottengo: $a + ib + a - ib = 2a$ quindi $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- se sottraggo un numero al suo coniugato ottengo: $z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2bi$ quindi $z + \bar{z} = 2Im(z)$
- se moltiplico un numero per il suo coniugato ottengo: $z * \bar{z} = a^2 + abi - abi - i^2b^2 = a^2 + b^2 = \rho^2$
- se divido un numero per il suo coniugato ottengo: $z/\bar{z} = \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{z^2}{\rho^2}$

Disuguaglianza triangolare

$\forall z, w \in C|z + w| \leq |z| + |w|$

Dimostrazione

Per le proprietà viste prima, scriviamo:

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + \bar{w}z + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + (w\bar{z} + z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(w\bar{z}) \leq$$
$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w\bar{z}| \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w||\bar{z}| \leq$$
$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w||z| \leq (|z| + |w|)^2$$
$$|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

Nella dimostrazione abbiamo utilizzato le seguenti relazioni:

$$|Re(z)| \leq |z|$$
$$|Im(z)| \leq |z|$$
$$|zw| = |z||w|$$
$$(w\bar{z} + \bar{w}z) = 2Re(w\bar{z})$$

2 ottobre 2019

Numeri

[...]

Numeri complessi

[...]

L'elevamento a potenza (formula di De Moivre)

Il prodotto tra le rappresentazioni trigonometriche si calcola esattamente come con la rappresentazione algebrica (prodotto di polinomi). Usando le formule goniometriche possiamo definire il prodtto come:

$$z * w = r * \rho[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta\phi)]$$

Se consideriamo il prodotto con $z = w$, allora abbiamo che:

$$z^2 = \rho^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$$

Generalizzando possiamo scrivere che la potenza n-esima di z è:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Questa è detta formula di De Moivre.

Analizzando la formula scopriamo che:

- ρ^n comporta una modifica al diametro della circonferenza su cui poggia il vettore
- $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ comporta una rotazione del vettore di un angolo θ per ogni n

Questo si può vedere nella "rotazione" del vettore corrispondente a i. Le potenze presentano una certa ciclicità ($i^5 = i^1$) e questo conferma il fatto che C non è un insieme ordinato.

L'estrazione di radici

In C la radice di un numero è sempre estraibile. Possiamo definire un numero $z \in C$ radice n-esima di w tale che $z^n = w$ con $w \in C, w \neq 0, n \in N$.

Infatti dato $w = r[\cos\phi + i\sin\phi] \in C, w \neq 0, n \geq 1 \in N$ allora esistono n radici $n-esime$ di w ed avranno la forma:

$$z_k = \rho_k[\cos\theta_k + i\sin(\theta_k)]$$

con:

- $\rho_k = \sqrt[n]{\rho}$
- $\theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$ con $k \in 0, \ldots, n-1$

Osservazione: nel piano di Gauss, le radici di un numero si dispongono come un poligono regolare di n lati su una circonferenza di centro nell'origine e di raggio $\sqrt[n]{r}$. Infatti, eseguendo i calcoli, risulta che tra una radice e l'altra c'è sempre una distanza regolare di $\frac{2\pi}{n}$

Dimostrazione

Dimostriamo che z_k è radice n-esima:

$$\rho_k^n[\cos(n\theta_k) + i\sin(n\theta_k)] = \\ = r[\cos(\phi + 2k\pi) + i\sin(\phi + 2k\pi)] = w$$

Per definizione le radici sono almeno n. Perché non possono prendere $k \geq n$. Scriviamo $k = n + a$, allora

$$\theta_k = \frac{\phi + 2n\pi + 2a\pi}{n} = \frac{\phi + 2a\pi}{n} + 2\pi$$

. Il 2π non ci crea problemi. Consideriamo la a:

- se $a < n$, allora coincide con qualche radice già trovata con $k < n$
- se $a = n$, allora separando la frazione otteniamo un altro 2π e cadiamo nel caso $k = 0$
- se $a > n$, decompongo a come prodotto tra n e il resto r e ritorno nel nel primo caso

Forma esponenziale

Dato un numero complesso, esso può essere scritto in forma esponenziale in questo modo:

$$z = \rho[\cos\theta + i\sin\theta] = \rho e^{i\theta}$$

Per prodotto, divisione, potenza valgono le consuete proprietà delle potenze.

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione polinomiale algebrica complessa a coefficienti complessi di grado n avrà esattamente n soluzioni contate con la loro molteplicità algebrica.

Binomio di Newton

① Nello sviluppo di $\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^7$ esistono i termini x^3 e $\sqrt{x}$? Se sì, calcolarne i coefficienti.

$$\sum_{K=0}^{7}\binom{7}{K}2\sqrt{x}^{\,7-K}\left(-\frac{3}{x}\right)^K=\sum_{K=0}^{7}\binom{7}{K}2^{7-K}x^{\frac{7-K}{2}-K}(-3)^K=\sum_{K=0}^{7}\binom{7}{K}2^{7-K}x^{\frac{7-3K}{2}}(-3)^K$$

- per trovare x^3 dobbiamo fare $\frac{7-3K}{2}=3$ $\quad 7-3K=6 \quad K=\frac{7-6}{3}\notin\mathbb{N} \Rightarrow$ non c'è
- $\sqrt{x}$ $\quad \frac{7-3K}{\cancel{2}}=\frac{1}{\cancel{2}}$ $\quad 7-3K=1 \quad K=2\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\sqrt{x}$ è nello sviluppo
- qual è il suo coefficiente: $\binom{7}{2}2^{7-2}(-3)^2=\frac{7!}{2!\,5!}\cdot2^5\cdot9=\frac{7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{2!\,\cancel{5!}}\cdot32\cdot9=21\cdot32\cdot9=6048$

Estremi di un insieme

② Determinare se esistenti min, max, inf, sup di $E=\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^2-4x+3}\geq 2-x\}$

Risolvo la disequazione:

$$\begin{cases}x^2-4x+3\geq0\\2-x\geq0\\x^2-4x+3\geq(2-x)^2\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-4x+3\geq0\\2-x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(x-1)(x-3)\geq0\\x\leq-2\\\cancel{x^2}-\cancel{4x}+3\geq4+\cancel{x^2}-\cancel{4x}\end{cases}\cup\begin{cases}(x-1)(x-3)\geq0\\x>2\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\ \emptyset\ \cup\begin{cases}x\leq1 \cup x\geq3\\x>2\end{cases}\Rightarrow x\geq3\Rightarrow E=[3;+\infty)$$

$\inf(E)=\min(E)=3$; Non esistono maggioranti $\Rightarrow \nexists \sup(E),\max(E)$ $(\sup(E)=+\infty)$

3 // $E = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \le 3 \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ (per quali a la disequazione ha soluzioni in tutto $\mathbb{R}$)

Risolvo la disequazione: $1 - x^2 + x^2 > 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso moltiplicare:

$2 - ax - x^2 \le 3 - 3x + 3x^2$ $\quad 4x^2 + (a-3)x + 1 \ge 0$ $\quad \Delta \le 0 \Rightarrow (a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = a^2 + 9 - 6a - 16$

$= a^2 - 6a - 7 = (a-7)(a+1) \le 0$

$\Downarrow$

$E: [-1; 7]$

$\inf(E) = \min(E) = -1$; $\sup(E) = \max(E) = 7$

4 // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \ge \sqrt{5-2x} \right\}$ HOMEWORK

5 // $E = \left\{ \frac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

Di sicuro è inferiormente limitato perchè $\mathbb{N} - \{0\}$ è inferiormente limitato.

0 è minorante: $\frac{n+2}{n+1} > 0$; 1 è minorante: $n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1$.

Consideriamo $1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, e vediamo se è minorante: $\frac{n+2}{n+1} \ge 1 + \varepsilon$ $\quad \frac{n+2-n-1}{n+1} \ge \varepsilon$ $\quad \frac{1}{n+1} \ge \varepsilon$ $\quad n+1 \le \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad n \le \frac{1}{\varepsilon} + 1$

$\downarrow$

La disuguaglianza non vale $\forall x \ge 1 \Rightarrow$ $1+\varepsilon$ non è minorante $\Rightarrow \inf(E) = 1$

$\nexists \min(E)$

Scriviamo $\frac{n+2}{n+1}$ come $1 + \frac{1}{n+1}$. $\frac{1}{n+1}$ decresce all'aumentare di n, quindi $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} \le \frac{3}{2}$

Per $n = 1$ $\frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2}$ quindi $\frac{3}{2}$ è massimo ed estremo superiore $\Rightarrow$ $\max(E) = \sup(E) = \frac{3}{2}$

6 //

$E = \left\{ \frac{m}{n}+1 \ , \ m \in \mathbb{N} \ , \ n \in \mathbb{N}-\{0\} \right\}$

1 è minorante: per $m=0$ abbiamo $\frac{0}{n}+1=1 \Rightarrow$ $\underline{\inf(E) = \min(E) = 1}$

Esiste un maggiorante M tale che $\frac{m}{n}+1 \le M$?

$\frac{m}{n}+1 \le M \quad \frac{m}{n} \le M-1 \quad m \le n(M-1) \Rightarrow$ condizione non valida per tutti gli m, n, quindi $\underline{\nexists \ \sup(E) = \max(E)}$

7 //

$E = \left\{ \frac{r}{r^2+1} \ , \ r \in \mathbb{Q}^+ \right\}$ $\quad (\mathbb{Q}^+ = \{ r \geq 0 \ , \ r \in \mathbb{Q} \})$

? Poiché $\mathbb{Q}^+$ è inferiormente limitato, $\frac{r}{r^2+1} \geq 0 \Rightarrow \exists \inf$? Se consideriamo $(r-1)^2 \geq 0$ abbiamo $\frac{r^2+1}{r} \geq \frac{2r}{r}$ $\quad \frac{r}{r^2+1} \le \frac{1}{2}$

quindi $\frac{1}{2}$ è maggiorante. Però, per $r=1$ $\frac{r}{r^2+1} = \frac{1}{2}$ quindi $\frac{1}{2}$ è anche massimo $\Rightarrow$ $\underline{\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{2}}$

$\emptyset$ è minorante, lo è anche $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{r}{r^2+1} \geq \varepsilon \quad r \geq \varepsilon r^2 + \varepsilon \quad \varepsilon r^2 - r + \varepsilon \le 0 \quad \Delta = 1-4\varepsilon^2$
$\begin{cases} >0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ =0 & \varepsilon^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon = \pm\frac{1}{2} \\ <0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon < -\frac{1}{2} \vee \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$

L'espressione non vale $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, quindi ε non un minorante e quindi $\underline{\inf(E) = 0 \ , \ \nexists \min(E)}$

8 //

$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{\sqrt{2x+9}} \le 2^{9-x} \right\}$ $\quad \left(E = \left[-\frac{9}{2} ; 10 - 2\sqrt{7} \right] \right)$

9 Considero $E_1 = E \cap \mathbb{Q}$, $E_2 = E \cap \mathbb{N}$ con E uguale a 8.

$-\frac{9}{2}$ sarà ancora minimo ed estremo inferiore poiché è razionale.

$10-\sqrt{7}$ non è razionale quindi non potrà più essere massimo però è ancora estremo superiore in quanto il più piccolo dei maggioranti.

E_2, invece, ha un numero finito di elementi, quindi ha sicuramente il massimo ed il minimo.
Per calcolarli devo trovare il più piccolo e il più grande intero all'interno di E_2.
Posso prendere $\emptyset$ come più piccolo ($\min(E)$ è negativo) e 4 come più grande (trovo la più piccola approssimazione del $\max(E)$).

LEZIONE

FUNZIONI:

DEFINIZIONE:

una funzione è una terna di elementi A, B, f dove:

- A, B sono insiemi
- f è una relazione che lega ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B $\rightarrow$ $f: A \rightarrow B$ (domino ↕ A; B → codominio)

es.: $y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R} = B$ NON è una funzione ($\exists x \in A$: f non è valida)

$y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ è una funzione ($\nexists x \in A$: f non è valida)

$f(a)$: è l'immagine di a

$Im(f)$: $Im(f) = \{ b \in B : \exists a \in A : f(a) = b \}$

$\Gamma(f)$: è il grafico di f: $\Gamma(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ x \in A \}$. N.B.: $\Gamma(f) \neq Im(f)$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE:

- limitata: $Im(f)$ è limitato, $Im \subseteq \mathbb{R}$, $\exists M > 0, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A\ -M \leq f(x) \leq M$
- sup / inf limitata: $\exists \, Sup(Im(f)) / \exists \, Inf(Im(f))$
- crescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) < f(x_2)$ strett. crescente
- decrescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$ strett. decrescente
- monotòna in I: se è crescente / decrescente (strettamente) in tutto I
- pari: se $\forall x \in A$ $f(x) = f(-x)$ con $x, -x \in A$
- dispari: se $\forall x \in A$ $f(x) = -f(-x)$ con $x, -x \in A$

DOMINIO NATURALE: Si dice dominio naturale il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione è definita

FUNZIONE SURIETTIVA: Data $f: A \rightarrow B$ si dice che f è suriettiva se $Im(f) = B$

OSS: $\forall \bar{y} \in B$ costruisco $y = \bar{y}$ f è suriettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in almeno un punto

FUNZIONE INIETTIVA: Data $f: A \to B$ si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ / $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

OSS.: $\forall y \in B$ costruisco $y=\bar{y}$. f è iniettiva se la retta $y=\bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in al più un punto

FUNZIONE BIUNIVOCA: Data $f: A \to B$ si dice che f è biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCITAZIONE

NUMERI COMPLESSI

① $i(1+i) = i + i \cdot i = i - 1$

$\rho = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to \theta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\to i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

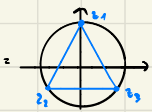
$e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

soluzioni o reali o complessi coniugati

② $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = 1 - 2 = -1$ $\quad z_{1,2} = +1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

③ $z^2 + 3iz + 1 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 9i^2 - 4 = -13$ $\quad z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-13}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{13}i}{2}$

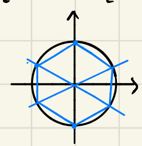
④ $z^3 = -i$ $\quad z_1 = i$ $\quad z_2 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) = \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$ $\quad z_3 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi$



⑤ $z^6 = -8$ $\quad 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ $\quad z_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$ $\quad z_5 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

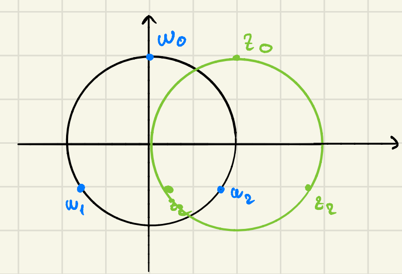
$z_6 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$



⑥ $(z-2)^2 + i = 0$ $\quad$ sostituiamo $z-2$ con $w \Rightarrow w^3 = -1$ come in ④ $\Rightarrow$ $z_1 = w_1 + 2 = 2+1$

$z_2 = w_2 + 2 = [\dots] = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} + 2$

$z_3 = w_3 + 2 = [\dots] = \frac{+\sqrt{3}+i}{2} + 2$



7. $z^2 + (1+i)z + i = 0$ $\qquad \Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i$

non ha senso con radici complesse: ± !

$$z_{1,2} = \frac{-1-i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1 \cancel{-i} -1 \cancel{+i}}{2} = -1 \\[2ex] \dfrac{\cancel{-1} -i \cancel{+1} -i}{2} = -i \end{cases}$$

$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right) = -1+i$

$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right) = +1-i$

8. $\underbrace{i z^2 = \overline{z}}$

non è algebrica

poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$ $\qquad \rho^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = \rho e^{-i\theta}$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad (k = 0, 1, 2)$

Sol: $z_0 = 0 \quad \forall \theta \quad (\rho = 0)$ (3 soluzioni coincidenti)

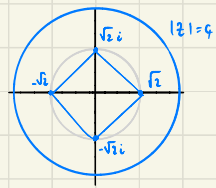
$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

$z_2 = e^{+i\frac{\pi}{2}} = i$

$z_3 = e^{i\frac{7}{6}\pi} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$

9. $(z^4 - 4)(|z| - 4) = 0$ $\qquad z^4 - 4 = 0 \qquad z^4 = 4$

$|z| - 4 = 0 \qquad |z| = 4$



10. $x^4 + 1 = 0$ $\qquad$ Homework: Scomporre in $\mathbb{R}$

$(x^2)^2 + 1^2 = 0 \qquad ((x^2)^2 - 1) + 2 = 0 \qquad (x^2+1)(x^2-1) + 2 = 0 \qquad (x^2+1)(x-1)(x+1) + 2 = 0$

$x^4 = -1$

$\cos \pi + i \sin \pi$

$x_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2} i}{2}$

$x_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} i}{2}$

FUNZIONI:

Funzione inversa: con l'ipotesi che f sia iniettiva, è possibile definire f^{-1} tale che: $f^{-1}: Im(f) \to D_f$, $y \mapsto x$

$|\forall y \in Im(f)\ \exists! x \in D_f : f(x) = y \Rightarrow$ rende f^{-1} una funzione$|$

La funzione inversa non per forza è definita in tutto il dominio di f.: es. log, arcsin...

N.B. Il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del grafico della funzione normale.

SUCCESSIONI:

DEFINIZIONE: è una serie ordinata di numeri. Una funzione del tipo: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ è detta successione. Per indicare tutti gli elementi della successione si usa $\{a_n\}$

SUCCESSIONE POSITIVA: una successione è positiva se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$

si dice definitivamente positiva se $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \geq 0$

" NEGATIVA: una successione è negativa se $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq 0$

si dice definitivamente negativa se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ a_n \leq 0$

" LIMITATA: una successione si dice limitata superiormente se $\exists \sup(\{a_n\})$

una successione si dice limitata inferiormente se $\exists \inf(\{a_n\})$

" CRESCENTE: una successione si dice crescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\to$ >)

una successione si dice definitivamente crescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ a_n \geq a_{n+1}$ (strettamente $\to$ >)

" DECRESCENTE: una successione si dice decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\to$ <)

una successione si dice definitivamente decrescente se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ a_n \leq a_{n+1}$ (strettamente $\to$ <)

CARATTERE DI UNA SUCC.

SUCCESSIONE CONVERGENTE: una successione si dice convergente se $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$

ESEMPIO: $a_n = \frac{n-1}{n}$ con $n \neq 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Per dimostrarlo uso la definizione: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \to \left|\frac{\cancel{n} - 1 - \cancel{n}}{n}\right| < \varepsilon \to \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$

Scelgo $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ poiché $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, il limite è verificato

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE (SUCCESSIONI): Sia a_n una funzione convergente a $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, allora l è unico.

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, supponiamo esistano due limiti che convergono a $m \neq l$: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = m$. Ciò significa che
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - m| < \varepsilon$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n_0 \geq n\ |a_n - l| < \varepsilon$.

Posso allora scrivere: $|l - m| = |l - a_n + a_n - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)| \underset{\text{dis. triang}}{\leq} |l - a_n| + |a_n - m| \underset{\forall n \geq \max(n_1, n_2)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |l - m| \leq 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, ma ciò è vero solo per $m = l$ $\Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ il limite di una successione convergente è unico (se finito)

SUCCESSIONI DIVERGENTI: Una successione a_n è divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n \geq M$

a $-\infty$ $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n < -M$

SUCCESSIONI IRREGOLARI: Una successione a_n è irregolare se non è né convergente né divergente

NUMERI COMPLESSI

(1) $z \cdot |z| + 2z + i = 0$ poniamo $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (x+iy)(\sqrt{x^2+y^2}) - 2(x+iy) + i = 0$

$$\overbrace{\underbrace{x\sqrt{x^2+y^2} - 2x}_{Re(w)} + i\underbrace{(y\sqrt{x^2+y} - 2y + 1)}_{Im(w)}}^{w} = 0$$

l'equazione è risolta quando $\underbrace{\begin{cases} Re(w) = Re(0) \\ Im(w) = Im(0) \end{cases}}_{\text{sistema in } \mathbb{R}} \to \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2} - 2) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x = 0 \\ y\sqrt{y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = i$

$\begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = i(-1-\sqrt{2})$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

② $\operatorname{Im}\left(\frac{z(1+i)-\bar{z}(1-i)}{z-\bar{z}}\right)=0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Mettiamo in forma algebrica: $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ $\Rightarrow \frac{(x+iy)(1+i)-(x-iy)(1-i)}{(x+iy)-(x-iy)} =$

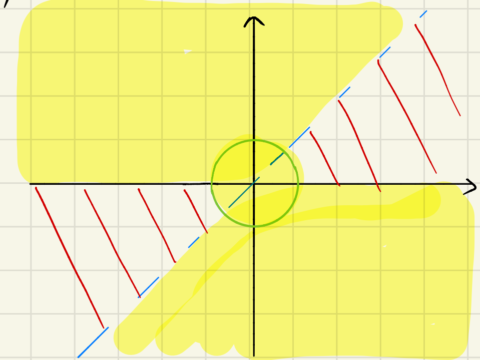
$= \frac{\cancel{x}+iy+ix-\cancel{y}-\cancel{x}+ix+iy+\cancel{y}}{2iy} = \frac{2i(x+y)}{2iy} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow$ puramente reale

Disegna

$E = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z(1+i)-\bar{z}(1-i)}{z-\bar{z}} < 2 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z|<1 \right\} =$

$= \left\{ x+iy \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{x+y}{y} < 2 \right\} \cup \left\{ x+iy \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} < 1 \right\}$

$\frac{x+y}{y} < 2 \rightarrow \frac{x-y}{y} < 0$



$E_1 = \{ v \in \mathbb{C} \mid v = \bar{z},\ z \in E \} \Rightarrow$ riflessione lungo x di E

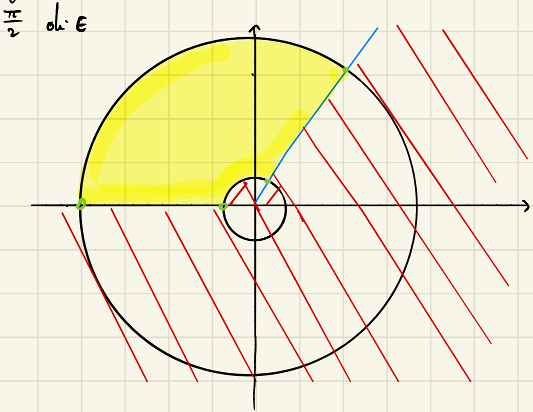
$E_2 = \{ v \in \mathbb{C} \mid v = iz,\ z \in E \} \Rightarrow$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$ di E

$E_3 = \{ w \in \mathbb{C} \mid w = -z,\ z \in E \}$

$E_4 = \{ t \in \mathbb{C} \mid t = \frac{1}{z},\ z \in E \}$ HOMEWORK

③ $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \le |z| \le 8,\ \frac{\pi}{3} \le \arg(z) < \pi \right\}$

$B = \{ w \in \mathbb{C} \mid w^3 = z \}$ Homework



$$\textcircled{5}\quad \begin{cases} |z-i| < |z+1| \\ z^5 = 2i \end{cases}$$

$\rightarrow z = x+iy \Rightarrow z-i = x + i(y-1)$ $\quad |z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ distanza z-1

$z+1 = x+1+iy$ $\quad |z+i| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ distanza z -i

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2+y^2} \qquad x^2+(y-1)^2 < (x+1)^2+y^2 \qquad y > -x$$

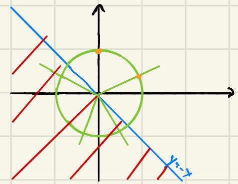
$|z_1 - z_2| =$ distanza tra z_1, z_2 (DIMOSTRA)

$$z^5 = 2i$$

$$z^5 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \rho^5 = 2 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[5]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \quad (k = 0 \dots 4) \end{cases}$$



TRASF. GRAFICI

$f(x)+K \Rightarrow$ sposta in verticale: $+K$ verso l'alto; $-K$ verso il basso

$Kf(x) \Rightarrow$ deforma in verticale: $K>1$ allarga il grafico; $0<K<1$ schiaccia il grafico

$-f(x) \Rightarrow$ riflessione rispetto a x

$$|f(x)| \Rightarrow \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

$f(x+K) \Rightarrow$ sposta in orizzontale: $+K$ a sinistra; $-K$ a destra

$f(Kx) \Rightarrow$ deforma in orizzontale: $K>1$ schiaccia; $0<K<1$ allarga

$f(-x) \Rightarrow$ riflessione rispetto a y

$$f(|x|) \Rightarrow \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Disegnare $f(x)$: $2 - |x+3|$ $\quad |\sqrt[3]{-x} + 1|$ partendo da grafici noti

HOMEWORK

$-e^{x-2} + 1$ $\quad |2 \ln|x-1||$

$1 - \dfrac{1}{|x-\frac{1}{2}|}$ $\quad \sqrt{x-1} - 1$

SUCCESSIONI

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE (SUCCESSIONI MONOTONE): Sia a_n una successione crescente/decrescente, allora a_n ammette sempre limite $l = \sup(a_n)$. Se a_n è superiormente limitata, allora l è finito. Se a_n non è superiormente limitata, allora $\sup(a_n) = +\infty$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo a_n crescente limitata superiormente, allora a_n converge ad $l \in \mathbb{R} = \sup(a_n)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < a_{n+1}$. $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < M$. Consideriamo $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ ammette estremo superiore (ass. compl.) pari a $\sup(a_n)$
Voglio dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - \sup(a_n)| < \varepsilon$. Per definizione $\sup(a_n)$ è maggiorante di $\{a_n\}$ quindi $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq \sup(a_n) \Rightarrow$
$|a_n - \sup(a_n)| = \sup(a_n) - a_n \Rightarrow \sup(a_n) - \varepsilon < a_n$. Poiché $\sup(a_n)$ è il più grande dei maggioranti, $\sup(a_n) - \varepsilon$ non è un maggiorante.
Esiste quindi $\bar{n}$ tale che $\sup(a_n) - \varepsilon < a_{\bar{n}} < \sup(a_n)$. Poiché è crescente, allora $a_{\bar{n}+1} > a_{\bar{n}} > \sup(a_n) - \varepsilon$. Quindi $\forall n > \bar{n}$, $a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Ciò, verifica la tesi: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ |\sup(a_n) - a_n| < \varepsilon$, che riscritto sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Se prendiamo a_n divergente crescente, allora $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n > M$. Per definizione, $\forall n > n_0\ a_n > a_{n_0}$
$\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ a_n > a_{n_0} > M$

NOTA BENE: il teorema non vale per successioni del tipo: inferiormente limitata crescente

TEOREMA: Se una successione converge allora è limitata

DIMOSTRAZIONE: Per Hp: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$. La Th sarà: $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0\ a_n < M$. Possiamo scrivere $|a_n|$ come:
$|a_n| \overset{\forall n > n_0}{=} |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq \overset{\text{PER Hp}}{\varepsilon + |l|}$. Costruisco M tale che: $M = \max(\varepsilon + |l|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0 - 1}|)$, allora $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$ quindi a_n è limitata.
Il viceversa non vale.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO: Sia a_n una successione non negativa, convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$.
" " " " non positiva, " " " $l \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE: per Hp: $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$; $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$. Unendo le due condizioni, possiamo scrivere che
$0 \leq a_n < l + \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow l \geq 0$. Se per assurdo $l < 0$, allora la condizione prima descritta non sarebbe valida $\forall \varepsilon > 0$.

COROLLARIO PERM. SEGNO: Siano a_n e b_n due successioni convergenti. Se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}\ a_n \leq b_n \Rightarrow l_a \leq l_b$

DIMOSTRAZIONE: Costruiamo $c_n = b_n - a_n$, allora $c_n \geq 0\ \forall n \geq \bar{n}$. Possiamo scrivere che $\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} b_n - a_n \overset{\text{PER PERM. SEGNO}}{=} K \geq 0$. Usando l'algebra dei limiti, avremo che: $\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = m - l \geq 0 \Rightarrow m \geq l$

TEOREMA DEL CONFRONTO (SUCCESS.): Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$. Se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ \ a_n \leq b_n \leq c_n$, allora b_n converge ad l

DIMOSTRAZIONE: Hp: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1\ |c_n - l| < \varepsilon$. $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon$

Posso allora costruire la seguente disequazione: $l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon\ \forall n \geq \max(n_0, n, \bar{n})$, ma ciò equivale a dire che $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

ALGEBRA DEI LIMITI: Siano a_n e b_n due successioni convergenti tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$; $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$. Allora avremo:

- $\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = l \cdot m$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ con $m \neq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = l^m$ con $l \geq 0$

DIMOSTRAZIONE (SOMMA): Le Hp sono sempre le stesse. La Th sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ |a_n + b_n - (l + m)| < \varepsilon$.

Possiamo scrivere che: $|a_n + b_n - (l+m)| = |(a_n - l) + (b_n - l)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| \underset{\forall n \geq \max(n_0, n_1)}{\leq} 2\varepsilon$ per Hp

LEZIONE

SUCCESSIONI

ALGEBRA DEI LIMITI: Date a_n una successione convergente e b_n una divergente. $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = l,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty\right)$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & l>0 \\ -\infty & l<0 \\ ? & l=0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE (RAPP.): Hp: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n\geq n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$, $\forall M>0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1\ b_n > M$. Th: $\forall \varepsilon>0\ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \tilde{n}\ \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon$. Usiamo la disuguaglianza triangolare: $|a_n - l| \leq |a_n| + |-l| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |l| + \varepsilon$. Questo ci dice che a_n converge. Posso scegliere $M = \frac{1}{\varepsilon}$, quindi $b_n > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon(|l|+\varepsilon) \Rightarrow$ questa è la tesi $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

FORME INDETERMINATE: Siano a_n e b_n successioni divergenti. Si chiamano forme indeterminate le seguenti: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$

↳ riconducibili alle altre due forme

GESTIONE: metodi algebrici, stabilire l'ordine degli infiniti

ES. ALG.: $\lim_{n\to+\infty} (n^3 - n^5) = \lim_{n\to+\infty} n^5\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^5\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n^5 \cdot (-1)\right) = -\infty$

ORD.: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{2-n^7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^7\left(\frac{2}{n^7}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{n^4\left(\frac{2}{n^7}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4(-1)} = 0^-$

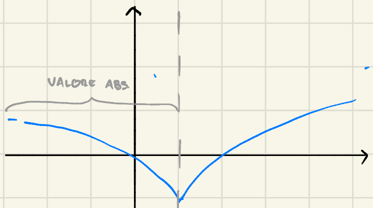
SOSTITUZIONI: Le sostituzioni (es.: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{t\to 0} t$) non hanno senso per le successioni perché $n \to 0 = \alpha_0$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI: Serve a risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0$ (log infinito di ordine inf. alla potenza)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ (exp ordine maggiore di potenza)
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

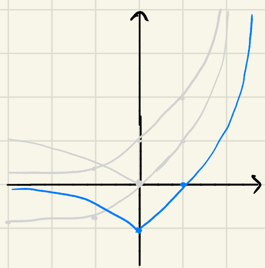
ESERCITAZIONE

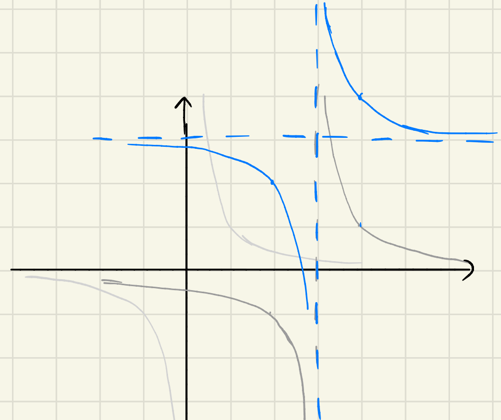
①



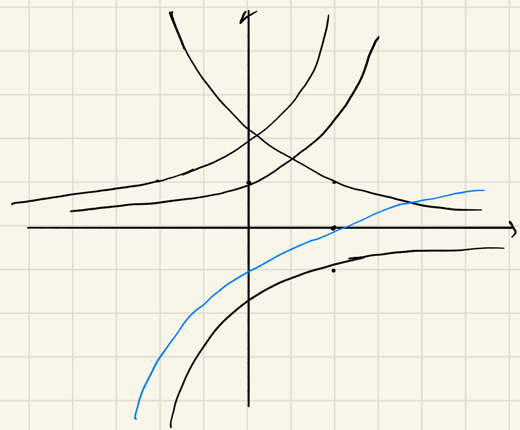
$\sqrt{x} \to \sqrt{|x|} \to \sqrt{|x-1|} \to$

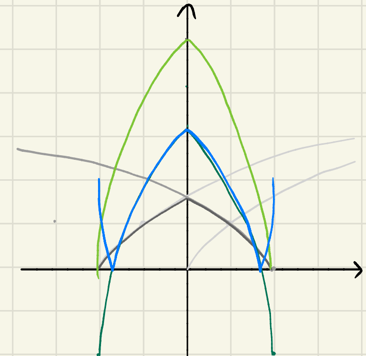
$\sqrt{|x-1|}-1$





$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-3} \to \frac{1}{x-3}+3$





$\sqrt{x} \to \sqrt{x+2} \to \sqrt{|x|+2} \to \sqrt{2-|x|}$

$\to 3\sqrt{2-|x|} \to 3\sqrt{2-|x|}-2 \to |3\sqrt{2-|x|}-2|$

FUNZIONE INVERSA: $f: A \to B$ f^{-1} è una funzione tale che $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_B \\ f^{-1} \circ f = id_A \end{cases}$

2. $f(x) = 2 - 3x \to f^{-1}(x) = -\frac{x-2}{3}$
3. $f(x) = x^3 + 3x - 2 \to$ monotona crescente $\to$ invertibile $\to f^{-1}(x) = ?$
4. $f(x) = x^2 - 2x \to$ non invertibile in $\mathbb{R}$

   invertibile se $D = [1; +\infty)$, $C = [-1; +\infty) \to f^{-1}(x) =$ Homework
5. $f(x) = \frac{x}{x-3}$ $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\} \to$ invertibile $\to f^{-1}(x) = -\frac{3x}{1-x}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

6. $a_n = n^3 \cdot \sin\frac{1}{n^4}$ $\lim_{n \to +\infty} n^3 \sin\frac{1}{n^4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}} = 0$ Homework: dim. con definizione $(\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ |a_n| < \varepsilon$

$\left| n^3 \sin\frac{1}{n^4} \right| < \varepsilon \overset{\text{no}}{\Rightarrow} n^3 \sin\frac{1}{n^4} < \varepsilon$ $\frac{1}{n^4} \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^4}\right) < \frac{1}{n^4}\ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\Rightarrow n^3 \sin\frac{1}{n^4} \leq n^3 \frac{1}{n^4} \Rightarrow n^3 \sin\frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$