Prima prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare cod. 082747**
Ingegneria Automatica - 4 Maggio 2009
Versione **A**

Esercizio 1. $(5+2+2$ punti) Sia dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ a-1 & 1 & 2 & a-1 \\ a & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni ammette il sistema.
(2) Calcolare le soluzioni del sistema quando queste sono infinite.
(3) Siano $\alpha : x+y+az = 1, \beta : (a-1)x+y+2z = a-1, \gamma : ax+(a+1)z = 0$ tre piani nello spazio affine $\mathbb{R}^3$. Senza effettuare altri calcoli, stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $\alpha \cap \beta$ è una retta, e per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ γ è parallelo alla retta $\alpha \cap \beta$.

Svolgimento. Operiamo sulle righe di $(A|B)$, effettuando l' operazione elementare $R_2 - R_1 \to R_2$.

Se $a \neq 2$, effettuiamo ancora $\frac{1}{a-2}R_2 \to R_2, R_3 - aR_2 \to R_3$ ed otteniamo la matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & a & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+2a & -a \end{array}\right).$$

Se, invece, $a = 2$, otteniamo la matrice ridotta per righe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Possiamo allora calcolare i ranghi di A e di $(A|B)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, ed abbiamo

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 2 \text{ oppure } a = -\frac{1}{2} \\ 3 & \text{se } a \neq -\frac{1}{2}, 2 \end{cases} \qquad r(A|B) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 2 \\ 3 & \text{se } a \neq 2 \end{cases}.$$

Usando il Teorema di Rouché-Capelli, concludiamo affermando che

se $a \neq -\frac{1}{2}, 2$, il sistema lineare $AX = B$ ha una sola soluzione;
se $a = 2$, il sistema $AX = B$ ha ∞^1 soluzioni;
se $a = -\frac{1}{2}$, il sistema $AX = B$ non ha soluzioni.

Posto $a = 2$, e dette $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le incognite, le due equazioni significative del sistema sono $2x + 3z = 0$ e $x + y + 2z = 1$. Posto $z = 2t$, dalla prima equazione ricaviamo $x = -3t$, e sostituendo nella seconda equazione, $y = 1 - t$. Le soluzioni del sistema, per $a = 2$, sono allora

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 1-t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

L' intersezione tra i piani α e β è una retta ogni volta che le prime due righe della matrice $(A|B)$ sono non proporzionali, ovvero se $a \neq 2$. Il piano γ è parallelo alla retta $\alpha \cap \beta$ se il sistema non ha soluzioni, ed $a \neq 2$. In conclusione, γ è parallelo alla retta $\alpha \cap \beta$ per $a = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. (3+5+1 punti) Sia data l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -x + 3y - z, -x + y + z).$$

(1) Calcolare la matrice $A = M_{B,B}(f)$ associata ad f rispetto alla base $B = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dopo aver calcolato il polinomio caratteristico di f, gli autovalori di f ed una base per ogni autospazio, stabilire se f è semplice, ed in caso affermativo, costruire una matrice P invertibile che diagonalizza A e la matrice diagonale D associata.
(3) Senza effettuare altri calcoli, determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $f + h\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è suriettiva, dove $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l' identità di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Dalla definizione di f, ricaviamo che $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1), f(0, 1, 1) = (0, 2, 2), f(0, 0, 1) = (-1, -1, 1)$. Quindi, $(1, 1, 1)$ è autovettore per f relativo all' autovalore 1, mentre $(0, 1, 1)$ è autovettore per f relativo all' autovalore 2. Inoltre, $[f(1,1,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [f(0,1,1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, [f(0,0,1)]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi, la matrice associata ad f rispetto alla base B è uguale a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è $p(t) = \det(A - tI) = (1 - t)(2 - t)^2$. Le sue radici sono $t_1 = 1, t_2 = 2$ entrambe reali, e quindi gli autovalori di f sono $t_1 = 1, t_2 = 2$. Le loro molteplicità sono $m(1) = 1, m(2) = 2$.

L' autospazio $V(1)$ ha dimensione $1 \leq \dim(V(1)) \leq m(1) = 1$, ossia $\dim(V(1)) = 1$. Quindi, $V(1) = \mathcal{L}(\vec{u_1} = (1, 1, 1))$, ed una sua base è $B_1 = (\vec{u_1})$.

L' autospazio $V(2)$ è formato dai vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ le cui componenti $X = [\vec{v}]_B$ risolvono il sistema lineare $(A - 2I)X = O$. La matrice $A - 2I$ è già ridotta per righe, e l' unica equazione del sistema è $-x - z = 0$. Quindi

$$V(2) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid [\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Posto $x = 1, y = 0$, otteniamo il vettore $\vec{u_2} = (1, 1, 1) - (0, 0, 1)$, mentre, posto $x = 0, y = 1$, otteniamo il vettore $\vec{u_3} = (0, 1, 1)$. Una base di $V(2)$ è allora $B_2 = (\vec{u_2}, \vec{u_3})$ e $\dim(V(2)) = 2$. Visto che $E = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f, allora f è semplice. Inoltre, una matrice P che diagonalizza A è

$$P = M_{E,B}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ è uguale a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata ad $f + h\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}$ rispetto alla base B è $A + hI$, e questa matrice ha rango $\neq 3$ solo se $h = -1$, oppure $h = -2$. Ovviamente, si poteva utilizzare anche la base E di autovettori, e si sarebbe ottenuta la stessa risposta.

Esercizio 3. $(5 + 3 + 1$ punti) Sia dato il sottoinsieme

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

dello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ delle matrici 3×3 ad entrate reali.

(1) Verificare che U è un sottospazio di V. Calcolarne poi una base e la dimensione.
(2) Calcolare quali matrici di U sono invertibili. Posto poi $a = 1$, calcolare A^{-1} al variare dei parametri b, c, con $A \in U$.
(3) Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è isomorfo ad U.

Svolgimento. La matrice nulla, vettore nullo di V, è in U e corrisponde ai valori $a = b = c = 0$ dei parametri.

La somma di $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}$ è uguale a

$$\begin{pmatrix} (a + a') & (b + b') & (c + c') \\ 0 & (a + a') & (b + b') \\ 0 & 0 & (a + a') \end{pmatrix}$$

ed è ancora in U essendo triangolare alta con gli elementi sulla diagonale principale uguali tra loro, come anche sono uguali tra loro gli elementi di posto $(1, 2)$ e $(2, 3)$. Quindi, U è chiuso rispetto alla somma dei suoi elementi.

Infine, se $x \in \mathbb{R}$ è uno scalare, ed $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in U$, allora il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ 0 & xa & xb \\ 0 & 0 & xa \end{pmatrix}$$

ed è ancora in U essendo triangolare alta, ed avendo uguali tra loro gli elementi sulla diagonale principale, ed uguali tra loro gli elementi di posto $(1, 2)$ e $(2, 3)$. Quindi, U è chiuso anche rispetto al prodotto per uno scalare.

In conclusione, U è un sottospazio dello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ delle matrici 3×3 ad entrate reali.

Separando il contributo dei vari parametri, abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi ogni elemento di U è combinazione lineare delle tre matrici a destra dell' uguale. Tali matrici sono anche linearmente indipendenti. Infatti, se una loro combinazione lineare è uguale alla matrice nulla, evidentemente gli scalari devono essere nulli:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $a = b = c = 0$, come annunciato.

Quindi, U ha dimensione 3 ed una sua base è

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sia $A \in U$ una matrice. $r(A) = 3$ se e solo se $a \neq 0$. Quindi sono invertibili tutti e soli gli elementi di U con $a \neq 0$. Posto $a = 1$, con calcoli facili, si ricava che la matrice aggiunta classica di A è

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visto che $\det(A) = a^3 = 1$, abbiamo che $A^{-1} = \mathrm{Adj}(A)$.

$\mathbb{R}^n$ è isomorfo ad U se e solo se $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(U) = 3$, come previsto dalla teoria.

Esercizio 4. (1+3+1 punti) Dare la definizione di autovalore per un endomorfismo $f : V \to V$. Dimostrare poi che "f è iniettivo se e solo se 0 non è autovalore di f". Infine, dati gli endomorfismi $f : V \to V$ e $g : V \to V$ aventi lo stesso vettore $\vec{v} \in V$ come autovettore, stabilire se $\vec{v}$ è autovettore per $f + g$, indicando il relativo autovalore.

Svolgimento. Per rispondere alle prime due domande basta consultare un libro di teoria.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ scalari che verificano $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $g(\vec{v}) = \mu \vec{v}$. Allora

$$(f + g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v} = (\lambda + \mu) \vec{v}.$$

Quindi $\vec{v}$ è autovettore per $f+g$ relativo alla somma degli autovalori corrispondenti di f e g.

Prima prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare cod. 082747**
Ingegneria Automatica - 4 Maggio 2009
Versione **B**

Esercizio 5. $(5+2+2$ punti) Sia dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 1 \\ a+1 & a+2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 & a \end{array}\right).$$

(1) Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se e quante soluzioni ammette il sistema.
(2) Calcolare le soluzioni del sistema quando queste sono infinite.
(3) Siano $\alpha : x+(1+a)y+z = 1, \beta : (a+1)x+(a+2)y = 0, \gamma : ax+2y+z = a$ tre piani nello spazio affine $\mathbb{R}^3$. Senza effettuare altri calcoli, stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $\alpha \cap \beta$ è una retta, e per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ γ è parallelo alla retta $\alpha \cap \beta$.

Esercizio 6. $(3+5+1$ punti) Sia data l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(x, y, z) = (-x + 2y - 2z, -x + 2y - z, -x + y).$$

(1) Calcolare la matrice $A = M_{B,B}(f)$ associata ad f rispetto alla base $B = ((2, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0))$ di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dopo aver calcolato il polinomio caratteristico di f, gli autovalori di f ed una base per ogni autospazio, stabilire se f è semplice, ed in caso affermativo, costruire una matrice P invertibile che diagonalizza A e la matrice diagonale D associata.
(3) Senza effettuare altri calcoli, determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $f+h\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è suriettiva, dove $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l' identità di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. $(5+3+1$ punti) Sia dato il sottoinsieme

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

dello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ delle matrici 3×3 ad entrate reali.

(1) Verificare che U è un sottospazio di V. Calcolarne poi una base e la dimensione.
(2) Calcolare quali matrici di U sono invertibili. Posto poi $c = 1$, calcolare A^{-1} al variare dei parametri a, b, con $A \in U$.
(3) Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è isomorfo ad U.

Esercizio 8. (1+3+1 punti) Dare la definizione di autovalore per un endomorfismo $f : V \to V$. Dimostrare poi che "f non è iniettivo se e solo se 0 è autovalore di f". Infine, dati gli endomorfismi $f : V \to V$ e $g : V \to V$ aventi lo stesso vettore $\vec{v} \in V$ come autovettore, stabilire se $\vec{v}$ è autovettore per $f \circ g$, indicando il relativo autovalore.

Seconda prova in itinere di **Geometria ed algebra lineare**
1 Luglio 2009

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 9. In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia data la conica
$$\Gamma : x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

(1) Calcolare l' equazione della retta tangente a Γ in $A(1, 0)$.
(2) Classificare, determinare una forma canonica ed il relativo cambio di riferimento, e disegnare la conica Γ.

Svolgimento. La matrice completa associata alla conica Γ è
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
e quindi la retta polare per A relativa a Γ ha equazione
$$\pi_A : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
ossia $\pi_A : y = 0$. Visto che $A \in \Gamma$, come si verifica facilmente dall' equazione di Γ e dalle coordinate di A, allora π_A è la retta tangente a Γ per A.

Il determinante di B è uguale a $\det(B) = -9 \neq 0$ e quindi $r(B) = 3$. Di conseguenza, Γ è non degenere. La matrice associata alla parte di secondo grado dell' equazione di Γ è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
ed il suo polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 - 2t - 3$. Quindi gli autovalori sono discordi, e di conseguenza Γ è un' iperbole. Gli autovalori di A sono $t_1 = 3, t_2 = -1$, entrambi di molteplicità 1, mentre $\det(B)/\det(A) = 3$. Una forma canonica di Γ è $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$, con α e β autovalori di A e $\gamma = \det(B)/\det(A)$. Posto $\alpha = -1, \beta = 3$, allora si ha $-X^2 + 3Y^2 + 3 = 0$, e quindi
$$\Gamma : \frac{X^2}{3} - Y^2 = 1.$$

L' autospazio di A relativo all' autovalore -1 è generato dal vettore di componenti ${}^t(1, 1)$ e quindi l' autospazio relativo all' autovalore 3 è generato dal vettore di componenti ${}^t(-1, 1)$. Normalizzando i due vettori, si ottiene la matrice ortogonale P del cambio di riferimento.

Il centro di simmetria dell' iperbole è il punto le cui coordinate risolvono il sistema
$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$
L' unica soluzione del sistema è $(-1, -1)$ e quindi il cambio di riferimento è associato all' equazione matriciale
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nel nuovo sistema di riferimento, gli asintoti hanno equazione $\frac{X}{\sqrt{3}} \pm Y = 0$ ed i vertici hanno coordinate $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

Un disegno qualitativo è allora facile da tracciare.

Esercizio 10. In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, siano dati il punto $A(0,1,0)$ e la retta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

(1) Calcolare l' equazione di una retta s per A ortogonale ad r. Quante rette verificano le proprietà richieste? Quali tra queste hanno distanza massima e distanza minima da r?

(2) Verificare, dopo averne calcolato l' equazione, che l' insieme S dei punti P equidistanti da A e da r formano un cilindro parabolico.

Svolgimento. Un vettore $\vec{v}$ parallelo ad r ha componenti ${}^t(-1,1,1)$. Un vettore $\vec{u}$ ortogonale a $\vec{v}$ ha componenti ${}^t(1,1,0)$, ad esempio. La retta per A parallela a $\vec{u}$ ha equazione parametrica $x = t, y = 1+t, z = 0$. Ovviamente, esistono infinite rette per A ortogonali ad r e sono tutte e sole le rette per A contenute nel piano α ortogonale ad r per A, che ha equazione $-x + (y-1) + z = 0$ ossia $\alpha : -x + y + z - 1 = 0$. Sia B la proiezione ortogonale di A su r, ossia $\{B\} = r \cap \alpha$. Sia s una retta per A del piano α. È chiaro che $d(r,s) = d(B,s) \leq d(B,A)$ essendo $A \in s$. Quindi, la retta avente distanza minima è la retta s passante per A e B, e quindi $d(r,s) = 0$, mentre la retta avente distanza massima è la retta s ortogonale alla retta per A e B visto che tale retta verifica $d(r,s) = d(B,A)$.

Sia $P(x,y,z)$ un punto. La sua distanza da A è

$$d(A,P) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

La sua distanza da r è invece

$$d(r,P) = \frac{\sqrt{(y-z+1)^2 + (-x-z+2)^2 + (x+y-1)^2}}{\sqrt{3}}$$

e quindi la superficie S ha equazione

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 6x - 6y + 6z - 3 = 0.$$

La matrice B completa associata alla quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Riducendo tale matrice, si ottiene facilmente che $r(B) = 3$, e quindi S è o un cono oppure un cilindro. La matrice A associata alla parte quadratica dell' equazione di S è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $p(t) = -t^3 + 3t^2$. Quindi $t = 0$ è autovalore di molteplicità 2 di A e quindi S è un cilindro parabolico.

Esercizio 11. Dopo aver calcolato centro e raggio della sfera σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, determinare l' equazione di una retta tangente a σ parallela al vettore $\overrightarrow{v}$ di componenti ${}^t(0, 1, 0)$ rispetto alla base ortonormale fissata. Quante rette verificano tale proprietà? Cosa forma l' insieme di tali rette? Calcolare infine l' equazione delle circonferenze intersezione di σ con piani ortogonali a $\overrightarrow{v}$ e di raggio metà del raggio di σ.

Svolgimento. Il centro di σ è $(1, 0, 0)$, mentre il raggio è uguale a 1. Visto il centro ed il raggio, possiamo dire che l' origine O è un punto di σ ed il piano tangente a σ in tale punto ha equazione $x = 0$, ossia è il piano $[yz]$. Visto che $\overrightarrow{v}$ è parallelo all' asse y, una retta tangente a σ parallela a $\overrightarrow{v}$ è proprio l' asse y che ha evidentemente equazione $x = 0, z = 0$. Esistono infinite rette che verificano la precedente proprietà ed i loro punti di contatto con σ formano la circonferenza $\Gamma = \sigma \cap [xz]$. L' insieme di tali rette individua il cilindro tangente a σ con generatrici parallel all' asse y ed avente direttrice Γ.

I piani che tagliano circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ distano $\frac{\sqrt{3}}{2}$ da $(1, 0, 0)$. Essendo poi piani ortognali all' asse y, essi hanno equazioni della forma $y = costante$. Imponendo la distanza dal centro di σ, si hanno i due piani $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 12. Dare la definizione di matrice ortogonale. Sia poi V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare di dimensione n, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo con $M_{B,B}(f)$ matrice ortogonale, essendo B una base ortonormale di V. Dimostrare che f conserva il prodotto scalare, e che è invertibile.

Svolgimento. Basta consultare un libro di teoria.

Geometria ed algebra lineare - 20 Luglio 2009

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 13. Sia dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$U = \mathcal{L}((1,1,t),(1,t,1),(0,1,t))$$

con $t \in \mathbb{R}$.

(1) Calcolare $\dim(U)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(2) Posto $t = 1$, esprimere, se possibile, uno dei generatori di U come combinazione lineare degli altri due.
(3) Posto $t = 1$, scrivere un' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente U come immagine. T è iniettiva? Ne esiste una per cui $\ker(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$? Ed una per cui $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$?

Svolgimento. Fissiamo la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e scriviamo le componenti dei vettori dati come righe della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Dalla teoria, sappiamo che $r(A) = \dim(U)$. D' altra parte, $r(A) = 3$ se, e solo se, $\det(A) \neq 0$. Effettuando i calcoli, otteniamo che $\det(A) = t^2 - 1$ e quindi $\dim(U) = 3$ se, e solo se, $t \neq \pm 1$.

Posto poi $t = -1$, riduciamo la matrice A tramite le operazioni elementari $R_2 - R_1 \to R_2, R_3 + \frac{1}{2}R_2 \to R_3$ eseguite in sequenza, ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $\dim(U) = r(A) = 2$.

Infine, posto $t = 1$, riduciamo la matrice A tramite l' operazione elementare $R_2 - R_1 \to R_2$ ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, anche in questo caso, $\dim(U) = r(A) = 2$. Detti $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ i tre generatori di U, nell' ordine del testo, e visto che per $t = 1$ i primi due vettori sono uguali, abbiamo $\vec{v_2}= 1\ \vec{v_1} + 0\ \vec{v_3}$.

Infine, sia $B = (\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare definita da $T(\vec{u_i})=\vec{v_i}$, per $i = 1,2,3$. Chiaramente, $\mathrm{Im}(T) = U$, T non è suriettiva essendo $U \neq \mathbb{R}^3$, e quindi non è neanche iniettiva, essendo $\dim\ker(T) = \dim\mathbb{R}^3 - \dim U = 1$. In alternativa, osserviamo che $\vec{u_2} - \vec{u_1} \in \ker(T)$, visto che $T(\vec{u_2} - \vec{u_1}) = T(\vec{u_2}) - T(\vec{u_1}) = \vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{0}$, e $\vec{u_2} - \vec{u_1} \neq \vec{0}$ essendo $\vec{u_1},\vec{u_2}$ linearmente indipendenti.

Perché $\ker(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$, deve capitare che $\vec{u_2} - \vec{u_1} \in U$, mentre non può capitare che $\ker(T) = \mathrm{Im}(T)$ perché i due sottospazi hanno dimensione diversa.

Esercizio 14. Sia dato il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$, e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito come $T(-1,0,0) = (-1,-2,0), T(0,2,0) = (4,2,0), T(0,0,-1) = (0,0,1)$.

(1) Dopo aver verificato che T è simmetrico, calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T, la matrice di cambio base, e la matrice diagonale associata.
(2) Usando i calcoli precedenti, ridurre a forma canonica la quadrica Q : ${}^t\underline{x}M\underline{x} = 0$ dove $\underline{x} = {}^t(x\ y\ z)$, e classificarla.
(3) Classificare la conica $\Gamma = Q \cap \alpha$ dove $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$.

Svolgimento. Sappiamo che la base canonica C è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, avendo scelto il prodotto scalare standard in tale spazio vettoriale. Dalle condizione assegnate, ricaviamo che $T(1,0,0) = (1,2,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,0)$, $T(0,0,1) = (0,0,-1)$. Scrivendo in componenti tali vettori rispetto a C, otteniamo la matrice associata a T rispetto a C e quindi

$$M_{C,C}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $M_{C,C}(T)$ simmetrica e C ortonormale, abbiamo che T è simmetrico. Per comodità, sia $A = M_{C,C}(T)$. Il polinomio caratteristico di T è $p(t) = \det(A - tI) = (-1-t)(t^2 - 2t - 3) = -(t+1)^2(t-3)$, e quindi gli autovalori di T sono $t_1 = -1$ di molteplicità $m(-1) = 2$, e $t_2 = 3$ di molteplicità $m(3) = 1$.

L' autospazio $V(3)$ contiene tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ le cui componenti X rispetto a C risolvono il sistema lineare omogeneo $(A - 3I)X = O$ e quindi sono tutti e soli i vettori le cui componenti rispetto a C sono ${}^t(a,a,0)$ con $a \in \mathbb{R}$. Passando ai vettori, abbiamo che $V(3) = \mathcal{L}(\vec{e_1})$ con $\vec{e_1}$ vettore di modulo 1 in tale autospazio. Svolgendo i calcoli, otteniamo che $[\vec{e_1}]_C = {}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

L' autospazio $V(-1)$ contiene tutti e soli i vettori le cui componenti X rispetto a C risolvono il sistema lineare omogeneo $(A + I)X = O$ e quindi sono tutti e soli i vettori le cui componenti rispetto a C sono ${}^t(a,-a,b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Un vettore di modulo 1 in tale autospazio è, ad esempio, $\vec{e_2}$ le cui componenti sono $[\vec{e_2}]_C = {}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Il secondo vettore della base ortonormale di $V(-1)$ è $\vec{e_3}=\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$ ed ha componenti $[\vec{e_3}]_C = {}^t(0,0,-1)$.

In conclusione, la matrice ortogonale di cambio base $M_{B,C}(1_{\mathbb{R}^3})$ da $B = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$) alla base canonica C è uguale a

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente, la matrice $M_{B,B}(T)$ è diagonale, ed è uguale a

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La quadrica Q ha forma canonica $3X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ ed il cambio di riferimento è descritto da $\underline{x} = P\underline{X}$ dove P è la matrice precedentemente calcolata. È evidente che Q è un cono con vertice nell' origine (gli assi sono stati solo ruotati, non è stata effettuata alcuna traslazione), ed è di rotazione, avendo un autospazio di dimensione 2. L' asse di rotazione è l' asse X.

La conica Γ ha equazione

$$\Gamma : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x^2 + 4xy + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} .$$

Proiettiamo ortogonalmente Γ sul piano $[xy]$ calcolando l' equazione del cilindro S avente Γ come direttrice e generatrici parallele all' asse z. L' equazione di S si calcola facilmente eliminando z dall' equazione di Q usando l' equazione di $\alpha : z = x+2y-1$, da cui $S : x^2 + 4xy + y^2 - (x + 2y - 1)^2 = 0$ ossia $S : -3y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$. Tagliando con $z = 0$, otteniamo una conica nel piano $[xy]$ che si verifica essere una parabola. Quindi S è un cilindro parabolico, e quindi Γ è una parabola, essendo sezione piana di un cilindro parabolico.

Esercizio 15. Siano date le rette $r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

(1) Verificare che r ed s sono sghembe e calcolare la loro distanza.
(2) Calcolare l' equazione della conica del piano $\beta : y = 2$ formata dai punti equidistanti da r e da s, e classificarla.

Svolgimento. Il sistema lineare $AX = B$ che descrive l' intersezione delle rette r ed s ha matrice completa associata

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ed è facile osservare che $r(A) = 3$ mentre $r(A|B) = 4$ (basta effettuare l' operazione elementare $R_4 - R_1 \to R_4$). Quindi le due rette sono sghembe. Visto che la retta r è l' asse x mente la retta s è parallela all' asse z ed incidente l' asse y, la loro retta comune perpendicolare è l' asse y che interseca le due rette nei punti $O(0, 0, 0)$ e $A(0, 1, 0)$. La distanza tra le due rette è quindi uguale alla distanza tra O ed A e quindi è $d(r, s) = 1$.

Sia $P(x, y, z)$ un punto dello spazio. La sua proiezione ortogonale su r è il punto $P_1(x, 0, 0)$, mentre la sua proiezione su s è il punto $P_2(0, 1, z)$. Quindi, $d(P, r) = \sqrt{y^2 + z^2}$ mentre $d(P, s) = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Uguagliando le due distanze ed elevando al quadrato, otteniamo che il luogo dei punti equidistanti dalle due rette ha equazione $S : x^2 - z^2 - 2y + 1 = 0$. S è una quadrica liscia ($r(B) = 4$) e la forma quadratica ad essa associata ha autovalori $0, 1, -1$. S è quindi un paraboloide iperbolico. Intersecando S con il piano $\beta : y = 2$ otteniamo l' equazione di Γ che risulta essere

$$\Gamma : \begin{cases} y = 2 \\ x^2 - z^2 = 3 \end{cases}$$

e quindi Γ è un' iperbole equilatera di semiassi $\sqrt{3}$.

Esercizio 16. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$T(1, 2, 1) = (-1, -2, -1), T(2, 2, 0) = (-2, -2, 0), T(0, 0, 1) = (0, 0, 3).$$

(1) L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

(2) Dare la definizione di endomorfismo diagonalizzabile.
(3) Enunciare e dimostrare una condizione necessaria e sufficiente perché un endomorfismo T sia diagonalizzabile.

Svolgimento. I vettori $(1,2,1),(2,2,0),(0,0,1)$ sono l.i. ed autovettori per T : i primi due relativi all' autovalore -1, mentre il terzo è relativo all' autovalore 3. Quindi esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T e quindi T è diagonalizzabile (detto anche semplice).

Per gli altri due punti basta consultare un libro di testo.

Geometria ed algebra lineare - 15 Settembre 2009

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 17. Siano date le rette

$$r: \begin{cases} -2x + hy + hz = 1 \\ hy + (h-2)z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} -2x + (h+1)y = h \\ -2x + hy + z = h \end{cases}.$$

(1) Determinare la loro mutua posizione al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Posto $h = 0$, determinare l' equazione della superficie ottenuta ruotando s attorno ad r. Classificare poi la superficie S ottenuta.
(3) Usando i calcoli fatti, stabilire quali superfici si ottengono per rotazione di s intorno ad r al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Scrivendo un unico sistema con le equazioni che definiscono le due rette, otteniamo il sistema lineare $AX = B$ con

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & h & h & 1 \\ 0 & h & h-2 & 1 \\ -2 & h+1 & 0 & h \\ -2 & h & 1 & h \end{array}\right).$$

Riduciamo tale matrice effettuando la sequenza di operazioni elementari $R_3 - R_1 \to R_3, R_4 - R_1 \to R_4, R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 - hR_2 \to R_3$, ed otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & h & h & 1 \\ 0 & 1 & -h & h-1 \\ 0 & 0 & h^2+h-2 & -h^2+h+1 \\ 0 & 0 & 1-h & h-1 \end{array}\right).$$

Se $h = 1$, si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

mentre se $h \neq 1$, effettuiamo ancora le operazioni elementari $R_3 \leftrightarrow R_4, R_4 + (h+2)R_3 \to R_4$ ed otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & h & h & 1 \\ 0 & 1 & -h & h-1 \\ 0 & 0 & 1-h & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2h-1 \end{array}\right).$$

In conclusione, abbiamo che, se $h = 1$, $r(A) = 2, r(A|B) = 3$, e quindi r ed s sono parallele, se $h = \frac{1}{2}$, allora $r(A) = r(A|B) = 3$, e quindi r ed s sono incidenti, ed infine, se $h \neq \frac{1}{2}, 1$, allora $r(A) = 3, r(A|B) = 4$, e quindi r ed s sono sghembe.

Per $h = 0$, dalle equazioni di r abbiamo $x = z = -\frac{1}{2}$, $\forall y$, quindi r è parallela al'asse y e le sue equazioni parametriche risultano $r : x = -\frac{1}{2}, y = \tau, z = -\frac{1}{2}$.

Procedendo analogamente, si ricava una forma parametrica per la retta s, e si ottiene $s : x = t, y = 2t, z = 2t, t \in \mathbb{R}$.

Si vede immediatamente che le rette non sono ortogonali, ed essendo sghembe, si ricava che la superficie S ottenuta ruotando s attorno ad r è un iperboloide ad una falda. Calcoliamo ora l' equazione di S. Il piano ortogonale ad r passante per il punto $P(t, 2t, 2t)$ di s ha equazione $\alpha_t : y = 2t$. La sfera di centro $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \in r$ e passante P ha equazione $\sigma_t : (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = (t+\frac{1}{2})^2 + (2t)^2 + (2t+\frac{1}{2})^2$. La superficie S è data dall' unione delle circonferenze $\alpha_t \cap \sigma_t, t \in \mathbb{R}$, ed ha quindi equazione

$$\begin{cases} y = 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 + x + z = 9t^2 + 3t \end{cases}.$$

Ricavando il parametro t dalla prima equazione, e sostituendo nella seconda, otteniamo l' equazione cartesiana di S, ossia $S : 4x^2 - 5y^2 + 4z^2 + 4x - 6y + 4z = 0$. La matrice B quadrata di ordine 4 associata ad S è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 12 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ed il suo determinante è $\det(B) = \frac{1}{16}$. Quindi, S è una quadrica liscia ed ha punti iperbolici. La matrice A associata alla parte quadratica dell' equazione di S è diagonale, e quindi A ha un autovalore positivo doppio, ed uno negativo semplice. Concludiamo quindi che S è un iperboloide ad una falda di rotazione.

S è un cilindro per $h = 1$, un cono per $h = \frac{1}{2}$, ed un iperboloide ad una falda per $h \neq \frac{1}{2}, 1$. Non è richiesto, ma si può osservare facilmente che le rette r ed s non sono mai ortogonali.

Esercizio 18. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito come

$$T(1,1,0) = (-1,-1,0), T(1,-1,0) = (0,3,1), T(0,1,1) = (0,2,2).$$

(1) Calcolare la matrice associata a T rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$ a scelta.
(2) Calcolare poi gli autovalori di T, una base per ogni suo autospazio e dire se T è diagonalizzabile. In caso affermativo, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T, la matrice di T rispetto a tale base, e la relativa matrice di cambio base.
(3) Senza effettuare altri calcoli, determinare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ le cui immagini tramite T sono ancora linearmente indipendenti.

Svolgimento. I vettori $(1,1,0), (1,-1,0), (0,1,1)$ sono linearmente indipendenti, come si verifica facilmente , e quindi $B = ((1,1,0), (1,-1,0), (0,1,1))$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo $M_{B,B}(T)$. È evidente che $T(1,1,0) = -(1,1,0)$, e che $T(0,1,1) = 2(0,1,1)$, e quindi che $(1,1,0)$ è autovettore relativo all' autovalore -1, mentre $(0,1,1$ è autovettore relativo all' autovalore 2. Infine, $T(1,-1,0) = (1,1,0) - (1,-1,0) + (1,1,0)$. Visto che la matrice $M_{B,B}(T)$ ha per colonne le componenti di $T(1,1,0), T(1,-1,0), T(0,1,1)$ rispetto alla base B, abbiamo

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Detta $A = M_{B,B}(T)$, il polinomio caratteristico di T si calcola come $\det(A - tI) = (t+1)^2(2-t)$, e quindi le sue radici sono $t_1 = -1, t_2 = 2$ con molteplicità $m(-1) = 2, m(2) = 1$.

L' autospazio $V(-1)$ contiene tutti e soli i vettori le cui componenti $X = {}^t[\overrightarrow{v}]_B$ risolvono il sistema $(A+I)X = O$. Effettuando i calcoli, otteniamo che $X = {}^t(a,0,0), a \in \mathbb{R}$, e quindi $V(-1) = \mathcal{L}((1,1,0))$ e $\dim(V(-1)) = 1 \neq m(-1)$.

L' autospazio $V(2)$ verifica invece $\dim(V(2)) = 1$, essendo $m(2) = 1$, e quindi $V(2) = \mathcal{L}((0,1,1))$.

Di conseguenza, T non è diagonalizzabile.

Visto che 0 non è autovalore per T, T è invertibile, e quindi le immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3$ sono vettori linearmente indipendenti. Il numero cercato è quindi 3.

Esercizio 19. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, siano dati i sottospazi $U = \mathcal{L}((1,1,1),(1,0,0))$ e $V = \mathcal{L}((1,1,0))$.

(1) Dopo aver verificato che $U + V$ è la loro somma diretta, calcolare una base ortonormale di U ed una di V.
(2) Dette π_U e π_V le proiezioni ortogonali sui sottospazi U e V, rispettivamente, calcolare $\pi_U(\pi_V((1,2,0)))$.
(3) Esistono sottospazi U e V per cui $\pi_U \circ \pi_V$ è l' applicazione nulla?

Svolgimento. I vettori $(1,1,1),(1,0,0),(1,1,0)$ sono linearmente indipendenti e quindi $U+V$ è somma diretta dei sottospazi U e V, rispettivamente di dimensione 2 ed 1. Una base ortonormale di V è data da $(\overrightarrow{e_3}) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)$. Una base ortonormale di U è invece data da $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) = \left((1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$, come si ricava facilmente usando il metodo di Gram-Schmidt. Ricordando che $\pi_U(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_1})\, \overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_2})\, \overrightarrow{e_2}$ e che $\pi_V = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_3})\, \overrightarrow{e_3}$, si ottiene $\pi_U(\pi_V((1,2,0))) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Perché $\pi_U \circ \pi_V$ sia nulla, basta che $V \subseteq U^{\perp}$.

Esercizio 20. Si calcoli l' equazione verificata dai punti del piano la cui distanza dalla retta $r : x - y = 1$ è metà della distanza da $F(0,2)$ e si classifichi la conica ottenuta.

Svolgimento. Sia $P(x,y)$ un punto che verifica la condizione richiesta. Allora x, y verificano l' equazione

$$\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (y-2)^2},$$

dove il primo membro è uguale alla distanza tra P e la retta r mentre il secondo membro è metà della distanza tra P ed F. Elevando al quadrato e semplificando l' equazione ottenuta, si ricava che il luogo γ dei punti che verificano la condizione data è descritto dall' equazione $\gamma : x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$. La matrice completa della conica γ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante è $\det(B) = 18 \neq 0$. Quindi, γ è una conica non degenere. Visto che la matrice A associata alla parte di secondo grado dell' equazione di γ ha determinante $\det(A) = -3 < 0$ allora γ è un' iperbole.

Geometria ed algebra lineare - 9 Febbraio 2010

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate. I primi tre esercizi valgono 9 punti ciascuno. L'esercizio 4 vale 5 punti.

Esercizio 21. Si considerino i sottospazi U, V di $\mathbb{R}^4$ generati nella maniera seguente

$$U = \mathcal{L}((1,1,1,1),(1,0,1,0)) \qquad V = \mathcal{L}((1,-1,1,-1),(-1,0,1,0)).$$

(1) Determinare una base e la dimensione del sottospazio $U+V$. Enunciare poi la Formula di Grassmann e calcolare la dimensione del sottospazio $U \cap V$.
(2) Dotato $\mathbb{R}^4$ del prodotto scalare canonico, determinare il sottospazio $U^\perp$ ortogonale ad U, ed una sua base ortonormale.
(3) Giustificare poi la seguente affermazione "Esistono vettori non nulli di $U^\perp$ ortogonali a tutti i vettori di V".

Svolgimento. Il sottospazio $U+V$ è generato dai vettori $(1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,-1,1,-1),(-1,0,1,0)$. Scritti tali vettori come righe di una matrice A, si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuando la successione di operazioni elementari $R_3 + R_1 \to R_3, R_3 - 2R_2 \to R_3, R_4 + R_2 \to R_4$, si ottiene la matrice ridotta per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\dim(U+V) = r(A)$, si ha $\dim(U+V) = 3$. Inoltre, una base di $U+V$ è $B = ((1,1,1,1),(1,0,\ 1,0),(0,0,2,0))$, essendo queste le righe non nulle della matrice ridotta.

Formula di Grassmann: Siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V sul campo K. Allora $\dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

Essendo $\dim(U) = \dim(V) = 2$, si ha che $\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Il sottospazio $U^\perp$ contiene tutti e soli i vettori (x,y,z,w) ortogonali a $(1,1,1,1)$ e $(1,0,1,0)$, essendo questi ultimi una base di U, come si verifica facilmente. Quindi, $U^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w = 0, x+z = 0\}$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo che lo definisce, si ha che $U^\perp = \mathcal{L}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$. Essendo i due vettori ortogonali e di modulo $\sqrt{2}$, una base ortonormale di $U^\perp$ è $B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

I vettori ortogonali a tutti i vettori di V formano il sottospazio $V^\perp$. I vettori di $U^\perp$ ortogonali a tutti i vettori di V sono allora tutti e soli i vettori del sottospazio $U^\perp \cap V^\perp = (U+V)^\perp$. Il sottospazio $(U+V)^\perp$ ha dimensione $\dim(U+V)^\perp = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(U+V) = 4 - 3 = 1$ e quindi esistono vettori non nulli di $U^\perp$ ortogonali a tutti i vettori di V.

Esercizio 22. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito come

$$f((x, y, z)) = (0, 3x + 3y + z, -x - y + z).$$

(1) Determinare una base e la dimensione di $\ker(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$.
(2) Calcolare gli autovalori di f e stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(3) Determinare una base per ogni autospazio di f, e, se esiste, un vettore di $\mathrm{Im}(f)$ che non sia autovettore.

Svolgimento. $\ker(f)$ è il sottospazio formato da tutti e soli i vettori che risolvono il sistema lineare omogeneo $3x+3y+z = 0, -x-y+z = 0$. Con facili calcoli, si ha che $x = -y, z = 0$, e quindi una base di $\ker(f)$ è $B_0 = ((1, -1, 0))$, e $\dim(\ker(f)) = 1$. Dal Teorema del Rango, si ottiene che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Il sottospazio $\mathrm{Im}(f)$ è invece generato dai vettori $f(1, 0, 0) = (0, 3, -1), f(0, 1, 0) = (0, 3, -1), f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$. Si verifica facilmente che il primo ed il terzo sono linearmente indipendenti, mentre il secondo è uguale al primo. Quindi, una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $B' = ((0, 3, -1), (0, 1, 1))$, coerentemente con il calcolo precedente.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = M_{C,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

come si calcola facilmente usando la definizione. Il polinomio caratteristico di f è allora uguale a $p_f(t) = \det(A - tI) = (-t)((3 - t)(1 - t) + 1) = (-t)(t - 2)^2$. Le radici di tale polinomio sono $t_1 = 0, t_2 = 2$ entrambe reali, e quindi sono entrambi autovalori di f.

L' autospazio $V(0)$ è uguale a $\ker(f)$ e quindi ha dimensione 1, ed una sua base è $B_0 = ((1, -1, 0))$.

L' autospazio $V(2)$ è dato da tutti e soli i vettori che risolvono il sistema lineare omogeneo $-2x = 0, 3x + y + z = 0, -x - y - z = 0$. Le soluzioni del sistema sono $x = 0, y = -z$, e quindi $V(2)$ ha $B_2 = ((0, 1, -1))$ come base, e dimensione 1. Essendo $\dim(V(2))$ diversa dalla molteplicità di 2 come radice del polinomio caratteristico di f, f non è diagonalizzabile.

Per trovare un vettore di $\mathrm{Im}(f)$ che non sia autovettore, basta prendere un vettore della forma $a(0, 3, -1)+b(0, 1, 1), a, b \in \mathbb{R}$, che non sia nè della forma $x(1, -1, 0), x \in \mathbb{R}$, nè della forma $y(0, 1, -1), y \in \mathbb{R}$. Basta allora scegliere $a = 1, b = 0$, e si ottiene $\vec{v} = (0, 3, -1)$, ad esempio.

Esercizio 23. Sia $\mathcal{F}(x, y, \lambda)$ il fascio di coniche dato da

$$\mathcal{F}(x, y, \lambda) : x^2 - 2(\lambda + 1)xy - \lambda y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y = 0.$$

(1) Calcolare i valori del parametro λ per cui le coniche del fascio sono degeneri, e quelli per cui la conica è una circonferenza. Detta γ tale circonferenza, trovarne centro e raggio.
(2) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro che proietta la conica di equazione $\mathcal{F}(x, y, 1) = z = 0$ parallelamente alla retta r dello spazio $\mathbb{R}^3$ avente equazioni $x = y = z - 1$. Stabilire poi se, intersecando tale cilindro con un piano, si possono ottenere ellissi.

Svolgimento. La matrice 3×3 associata alla conica generica del fascio è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda - 1 & -\lambda \\ -\lambda - 1 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di B è $\det(B) = -\lambda^3 - 3\lambda^2$ che si annulla per $\lambda = 0$ e per $\lambda = -3$. Quindi, la conica Γ_λ è degenere se, e solo se, $\lambda = 0$ oppure $\lambda = -3$.

La conica Γ_λ è una circonferenza se, e solo se, la parte quadratica dell' equazione è della forma $kx^2 + ky^2$ per qualche k reale non nullo. Nel caso in esame, la condizione è equivalente a $\lambda = -1$. Posto $\lambda = -1$, la conica Γ_λ ha equazione $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ e quindi il suo centro ha coordinate $(-1, -1)$ ed il suo raggio è $\sqrt{2}$.

Il cilindro che proietta la conica Γ_1 di equazione $\begin{cases} x^2 - 4xy - y^2 - 2x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ parallelamente alla retta $r : x = t, y = t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$, è formato da tutti e soli i punti le cui coordinate (x, y, z) soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \\ z_0 = 0 \\ x_0^2 - 4x_0y_0 - y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases}.$$

Eliminando i parametri x_0, y_0, z_0, t, si ottiene l' equazione cartesiana del cilindro cercato, ed essa è $S : x^2 - 4xy - y^2 + 2xz + 6yz - 4z^2 - 2x - 2y + 4z = 0$.

La conica Γ_1 è un' iperbole. Infatti, la parte quadratica dell' equazione è associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo. Quindi, S contiene solo iperboli come coniche non degeneri, essendo un cilindro iperbolico.

Esercizio 24. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Dare la definizione di autovalore, di autovettore e di autospazio per f. Supponendo poi che $V = \mathbb{R}^n$ ed f ammetta un autospazio di dimensione k relativo ad un autovalore $\lambda \neq 0$, dimostrare che $\dim(\ker(f) \leq n - k$, e si fornisca un esempio in cui l'uguaglianza viene ottenuta.

Svolgimento. Per le definizioni si veda un testo di teoria.

La dimensione k dell' autospazio $V(\lambda)$ è ovviamente non superiore alla dimensione di $\mathbb{R}^n$, ossia $k \leq n$.

Se f è iniettivo, allora $\dim(\ker(f)) = 0 \leq n - k$. Se f non è iniettivo, allora 0 è autovalore per f, e l' autospazio ad esso associato è $V(0) = \ker(f)$. Essendo la somma di autospazi distinti sempre diretta, abbiamo che $\dim(\ker(f)) + \dim(V(\lambda)) = \dim(V(0) + V(\lambda)) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$, da cui si ottiene la disuguaglianza da dimostrare.

Diamo ora un esempio di endomorfismo che realizza l' uguaglianza. Sia $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ una base di $\mathbb{R}^n$, sia $\lambda \neq 0$ un numero reale, e sia k un intero che verifica $1 \leq k \leq n$. Sia f l' unico endomorfismo che soddisfa le condizioni seguenti: $f(\vec{e_i}) = \lambda \vec{e_i}$ se $i = 1, \ldots, k$, e $f(\vec{e_i}) = \vec{0}$ se $i = k + 1, \ldots, n$. Si verifica facilmente che f ha l' autospazio $V(\lambda)$ di dimensione k ed il nucleo di dimensione $n - k$.