Esame di Geometria e Algebra Lineare
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica

Prima prova in itinere – 30 Aprile 2014

1. Siano
$$r: \begin{cases} x + h^2 z - h + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \Pi: \ x + y + (h^2+1)z - h - 1 = 0.$$

   (a) Determinare, al variare del parametro reale h, la mutua posizione di r e Π.

   (b) Per $h = \sqrt{2}$ trovare l'intersezione tra r e Π invertendo la matrice associata al sistema lineare.

2. (a) Fissato un sistema di riferimento nello spazio, scrivere l'equazione cartesiana del piano Π contenente i punti di coordinate:
$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Π è uno spazio vettoriale? Se non lo è trovare un piano $\tilde{\Pi}$ parallelo a Π che lo sia e calcolarne una base.

   (b) Sia $V = \mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$, dove
$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Trovare dimensioni e basi di V, $V + \tilde{\Pi}$ e $V \cap \tilde{\Pi}$.

   (c) Stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (1,\ 1,\ 2)^T$ appartiene a $\tilde{\Pi}$, V, $V + \tilde{\Pi}$ e $V \cap \tilde{\Pi}$.

3. Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{M}\mathrm{at}_{\mathbb{R}}(2,2)$ ed $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'applicazione rappresentata, rispetto alle basi canoniche $\mathcal{S}_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{S}_W = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovare la dimensione ed una base del nucleo $\ker(A)$ e dello spazio delle colonne $C(A)$.

   (b) Calcolare $f(1 + x^2 - x^3)$.

   (c) Trovare una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$. Si riesce a riconoscere $\mathrm{Im}(f)$?

   (d) Completare le basi del punto precedente rispettivamente ad una base $\mathcal{B}_V$ di V e ad una base $\mathcal{B}_W$ di W. Ricavare le matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{S}_V \mathcal{B}_V}$ e $M_{\mathcal{B}_W \mathcal{S}_W}$.

   (e) Dato $P \in V$, verificare che A rappresenta l'applicazione f definita come
$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) - P(0) & P(-1) - P(0) \\ P(-1) - P(0) & P(0) \end{pmatrix}$$
   rispetto alle basi canoniche.

   (f) Dopo aver scritto la matrice $\tilde{A}$ che rappresenta l'applicazione f del punto precedente rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$, verificare la regola del cambiamento di base tra A e $\tilde{A}$.

Soluzioni

1. (a) Studiamo il sistema lineare $(A|\mathbf{b})$ associato a r e Π :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & h^2+1 & h+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & -1 & -h^2 & -h-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & 1 & h^2 & h+1 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & -h+1 \end{array}\right).$$

Abbiamo $r(A) = 2$ se $h = \pm 1$, altrimenti $r(A) = 3$. Inoltre $r(A|\mathbf{b}) = 2$ se $h = 1$, altrimenti $r(A|\mathbf{b}) = 3$. Pertanto, per il teorema di Rouchè-Capelli, si hanno:

$$\begin{cases} \infty^1 & \text{soluzioni se} \quad h = 1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ è contenuta in } \Pi; \\ 0 & \text{soluzioni se} \quad h = -1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ è parallela a } \Pi; \\ 1 & \text{soluzione se} \quad h \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad r \text{ interseca } \Pi \text{ in un unico punto.} \end{cases}$$

(b) Utilizzando il metodo di inversione tramite il calcolo dell'aggiunta abbiamo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Definiamo i due vettori

$$[\overrightarrow{P_0P_1}] = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\overrightarrow{P_0P_2}] = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che i due vettori sono indipendenti, pertanto i tre punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati e definiscono un'unico piano Π, descritto in forma parametrica come:

$$\mathbf{x}(t_1, t_2) = P_0 + t_1[\overrightarrow{P_0P_1}] + t_2[\overrightarrow{P_0P_2}].$$

Un'equazione algebrica del piano si può ottenere eliminando i parametri t_1, t_2 dalla descrizione parametrica:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x+1 \\ 0 & 1 & -y+1 \\ 0 & 0 & -x+y+z-1 \end{array}\right)$$

quindi $\Pi : \ x - y - z + 1 = 0$. Il piano Π non è uno spazio vettoriale in quanto non contiene l'origine. Un piano parallelo contenente l'origine è $\tilde{\Pi} : \ x - y - z = 0$ ed una sua base è $\mathcal{B}_{\tilde{\Pi}} = \{[\overrightarrow{P_0P_1}], [\overrightarrow{P_0P_2}]\}$.

(b) Abbiamo

$$r(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v_3}) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$. Lo spazio somma è generato da

$$V + \tilde{\Pi} = \mathcal{L}\left([\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_0P_1}], [\overrightarrow{P_0P_2}]\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, [\overrightarrow{P_0P_2}]\right),$$

essendo $[\overrightarrow{P_0P_1}] = -\mathbf{v_1}$. Dato che

$$r(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|[\overrightarrow{P_0P_2}]) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

si ha che $V + \tilde{\Pi} = \mathbb{R}^3$ e quindi una sua base è la base canonica $S_3 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$. Per la formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim(V \cap \tilde{\Pi}) = \dim(V) + \dim(\tilde{\Pi}) - \dim(V + \tilde{\Pi}) = 1$$

e quindi $\mathcal{B}_{V\cap\tilde{\Pi}} = \{\mathbf{v_1}\}$.

(c) Abbiamo

- $\tilde{\Pi} = \left\{ (x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \right\}$, ma $1 - 1 - 2 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \notin \tilde{\Pi}$;
- $\det(\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \in V$;
- dato che in generale $V \subseteq V + \tilde{\Pi}$, segue che $\mathbf{v} \in V + \tilde{\Pi}$;
- $\mathbf{v} \notin \tilde{\Pi}$ quindi $\mathbf{v} \notin V \cap \tilde{\Pi}$.

3. (a) Riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(C(A)) = r(A) = 3$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(\ker(A)) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad A, abbiamo:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Per il teorema di rappresentazione, abbiamo:

$$f(1 + x^2 - x^3)|_{\mathcal{S}_W} = A \cdot (1 + x^2 - x^3)|_{\mathcal{S}_V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi $f(1 + x^2 - x^3) = 0\, E_{11} + 2\, E_{12} + 2\, E_{21} + E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Per l'isomorfismo della mappa delle coordinate, abbiamo $\mathrm{Im}(f) \simeq C(A)$ e $\ker(f) \simeq \ker(A)$ e quindi:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\ker(f)} = \{x - x^3\}.$$

È evidente che l'immagine di f coincide con il sottospazio delle matrici simmetriche reali di tipo 2×2.

(d) Un possibile completamento delle basi è:

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_V = \{x - x^3, 1, x, x^2\}.$$

Allora le matrici del cambiamento di base sono:

$$M_{\mathcal{S}_V \mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1|_{\mathcal{B}_V} & x|_{\mathcal{B}_V} & x^2|_{\mathcal{B}_V} & x^3|_{\mathcal{B}_V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}_W\mathcal{S}_W} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(e) La matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alle basi canoniche è:

$$A_{f,\{\mathcal{S}_V,\mathcal{S}_W\}} = \left(\ f(1)|_{\mathcal{S}_W} \quad f(x)|_{\mathcal{S}_W} \quad f(x^2)|_{\mathcal{S}_W} \quad f(x^3)|_{\mathcal{S}_W} \ \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{S}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

(f) La matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ è:

$$A_{f,\{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W\}} = \left(\ f(x+x^3)|_{\mathcal{B}_W} \quad f(1)|_{\mathcal{B}_W} \quad f(x)|_{\mathcal{B}_W} \quad f(x^2)|_{\mathcal{B}_W} \ \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|_{\mathcal{B}_W} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

È una semplice questione di calcolo verificare che

$$A_{f,\{\mathcal{S}_V,\mathcal{S}_W\}} = M_{\mathcal{B}_W\mathcal{S}_W} \cdot A_{f,\{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W\}} \cdot M_{\mathcal{S}_V\mathcal{B}_V}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 11 Luglio 2014		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

   1. Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice A è diagonalizzabile.
   2. Esistono valori di k per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo trovare una matrice Q ortogonale che diagonalizza A.

2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{\mathbf{x} = (x\ y\ z\ w)^T | y - z - w = 0\} \subset V$.
   1. Trovare una base ortonormale di U.
   2. Verificare se $\mathbf{v} = (2\ 1\ -3\ 1)^T$ appartiene ad U e calcolare la sua proiezione ortogonale su U.

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni:

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x^2 + y^2 - 6xy + 4x + 4y - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

   1. Scrivere una forma canonica di $\mathcal{C}$ e trovare la corrispondente rototraslazione.
   2. Trovare (se esistono) centro ed assi di simmetria di $\mathcal{C}$ e tracciare un grafico qualitativo di $\mathcal{C}$.
   3. Scrivere il sistema di equazioni relativo alla superficie di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ rispetto ad un suo asse di simmetria. Che tipo di superficie è $\mathcal{S}$?

4. Dato $V = \mathbb{R}^4$, siano

$$\mathbf{v_1} = (1\ 1\ 1\ 1), \qquad \mathbf{v_2} = (0\ 1\ 1\ 1), \qquad \mathbf{v_3} = (0\ -1\ 0\ 1), \qquad \mathbf{v_4} = (0\ 1\ 0\ 1)$$

vettori di V e $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ un'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}, \qquad f(\mathbf{v_2}) = 3\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}, \qquad f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_4}, \qquad f(\mathbf{v_4}) = -2\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} - \mathbf{v_4}.$$

   1. Verificare se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ è una base di V.
   2. L'applicazione f è univocamente determinata? Scrivere una matrice A che rappresenti f.
   3. Trovare una base di $\ker(A)$ e dello spazio delle colonne di A.
   4. Trovare una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzioni

1. (a) Il polinomio caratteristico di A è:

$$P_A(\lambda;k) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & k & k-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) = (k-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

- Se $k \neq 2, 4$ gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile.
- Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_2) = 3 - 1 = 2$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2 ed A è diagonalizzabile.
- Se $k = 4$ l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_4 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_4) = 3 - 2 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1 ed A non è diagonalizzabile.

(b) Per il teorema spettrale, A è ortogonalmente diagonalizzabile ripetto al prodotto scalare canonico se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k = 0$. In tal caso si ha:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_4 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dopo avere normalizzato gli autovettori si ottiene la matrice ortogonale Q che diagonalizza A:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Risolvendo il sistema lineare che definisce $U = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, si ottiene una base $\mathcal{B}_U$ del sottospazio formata da tre vettori:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) possiamo applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v_1'} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2'} = \mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{v_1'} \cdot \mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_1'}\|^2} \mathbf{v_1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v_3'} = \mathbf{v_3} - \frac{\mathbf{v_1'} \cdot \mathbf{v_3}}{\|\mathbf{v_1'}\|^2} \mathbf{v_1'} - \frac{\mathbf{v_2'} \cdot \mathbf{v_3}}{\|\mathbf{v_2'}\|^2} \mathbf{v_2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo infine la normalizzazione, ottenendo la base ortonormale $\tilde{\mathcal{B}}_U = \{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$ con

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(b) Il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene ad U perché le sue componenti non soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio: $1 + 3 - 1 \neq 0$. La proiezione di $\mathbf{v}$ su U è:

$$P_U(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v})\, \tilde{\mathbf{v}}_1 + (\tilde{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v})\, \tilde{\mathbf{v}}_2 + (\tilde{\mathbf{v}}_3 \cdot \mathbf{v})\, \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La curva è una conica nel piano orizzontale, con matrici associate

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 2,\ I_2 = -8,\ I_3 = 16$, pertando la conica è un'iperbole non equilatera. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$$

e gli autovalori sono $\lambda = -2, 4$, mentre $\tilde{a}_{33} = \frac{|B|}{|A|} = -2$. Esiste di conseguenza un sistema di riferimento canonico $\tilde{\mathcal{B}}_O$ in cui la conica ha equazione:

$$\mathcal{C}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \begin{cases} X^2 - 2Y^2 + 1 = 0 \\ Z = 0 \end{cases}.$$

I due sistemi di riferimento $\mathcal{B}_\mathcal{O}$ e $\tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{O}$ sono legati dalla rototraslazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{v}.$$

L'origine $\tilde{O}$ del nuovo sistema coincide con il centro C della conica. Quest'ultimo è contenuto nel piano $z = 0$ e le sue coordinate x_C, y_C rispetto a $\mathcal{B}_O$ si ottengono risolvendo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vettore di traslazione è quindi

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Due assi di $\tilde{\mathcal{B}}_O$ sono contenuti nel piano $z = 0$ e sono paralleli agli autospazi di A :

$$V_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_4 = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ne segue che due vettori ortonormali costituenti $\tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{O}$ sono:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il rimanente terzo asse è perpendicolare al piano stesso:

$$\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è di conseguenza:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che $|Q| = 1$, il che implica che $\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una terna ortonormale destrorsa.

(b) Il centro è stato individuato nel punto precedente. Esistono due assi di simmetria di $\mathcal{C}$, coincidenti con gli assi del sistema di riferimento $\tilde{\mathcal{B}}_O$ contenuti nel piano orizzontale:

$$\begin{array}{l} r_1 : \ \mathbf{x}(t) = \mathcal{C} + \mathbf{v_1} \\ r_2 : \ \mathbf{x}(t) = \mathcal{C} + \mathbf{v_2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_1|_{\mathcal{B}_O} : \ x - y = 0 \\ r_2|_{\mathcal{B}_O} : \ x + y - 2 = 0 \end{array}.$$

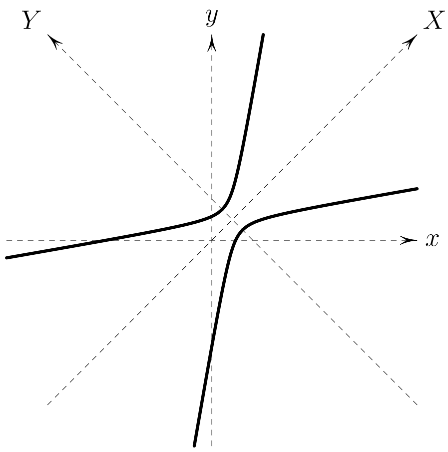

Figure 1: L'iperbole $\mathcal{C}$ ed i due sistemi di riferimento $\mathcal{B}_O$, $\tilde{\mathcal{B}}_O$.

(c) Lavoriamo nel sistema di riferimento $\tilde{\mathcal{B}}_O$. Ruotando $\mathcal{C}$ rispetto all'asse X otteniamo l'iperboloide ad una falda $\mathcal{Q}_1$ descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} X = X_0 \\ Y^2 + Z^2 = Y_0^2 + Z_0^2 \\ X_0^2 - 2Y_0^2 + 1 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_1|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \ X^2 - 2Y^2 - 2Z^2 + 1 = 0.$$

Ruotando $\mathcal{C}$ rispetto all'asse Y otteniamo l'iperboloide a due falde $\mathcal{Q}_2$ descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} Y = Y_0 \\ X^2 + Z^2 = X_0^2 + Z_0^2 \\ X_0^2 - 2Y_0^2 + 1 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_2|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \ X^2 - 2Y^2 + Z^2 + 1 = 0.$$

4. (a) Calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Segue che i vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) L'applicazione è univocamente determinata perché è nota la sua azione sugli elementi di una base. La matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$A_{f,\mathcal{B}} = \left(\; f(\mathbf{v_1})|_{\mathcal{B}} \quad f(\mathbf{v_2})|_{\mathcal{B}} \quad f(\mathbf{v_3})|_{\mathcal{B}} \quad f(\mathbf{v_4})|_{\mathcal{B}} \; \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

(c) Riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(C(A)) = r(A) = 3$ ed una base di $C(A)$ è costituita dalle prime tre colonne

$$\mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(\ker(A)) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad A, abbiamo:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Per l'isomorfismo della mappa delle coordinate, abbiamo $\mathrm{Im}(f) \simeq C(A)$ e $\ker(f) \simeq \ker(A)$ e quindi:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \{f(\mathbf{v_1}), f(\mathbf{v_2}), f(\mathbf{v_3})\} = \{(1\ 0\ 2\ 4), (0\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 1\ 2)\},$$

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \{-\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \mathbf{v_4}\} = \{(1\ 2\ 2\ 4)\}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Esame scritto: 28 Luglio 2014 – Esame orale:		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Fissato un sistema di riferimento $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo i tre piani di equazioni:

$$\begin{cases} x+ky+z-1=0 \\ x+y+kz=0 \\ 2y+kz-k=0 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

1. Discutere e interpretare geometricamente il sistema di equazioni al variare di k.
2. Risolvere il sistema per $k=0$.
3. Dire per quali valori di k esiste almeno una retta parallela a tutti e tre i piani.

2. Siano $V = \{\mathbf{x} = (x\ y\ z\ w)^T | y-z+w=0, y-w=0\}$ e $W = \mathcal{L}((1\ 0\ 1\ \ -1)^T, (0\ 1\ 2\ 0)^T)$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Trovare dimensioni e basi di V e W.
2. Provare che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di V e W.
3. Trovare una base ortonormale di $V^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico.
4. Provare che W e $V^\perp$ sono spazi isomorfi.

3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dove il parametro $k \in \mathbb{R}$ è diverso da zero.

1. Per ogni $k \neq 0$, calcolare una base ortonormale costituita da autovettori di A.
2. Dato un riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$, per ogni $k \neq 0$ riconoscere la quadrica di equazione $\mathcal{Q}|_{\mathcal{B}_O} : kx^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2y = 0$.
3. Stabilire per quali k la quadrica $\mathcal{Q}$ è di rotazione.

Soluzioni

1. 1. Attraverso il metodo di eliminazione di Gauss possiamo ridurre a scala la matrice orlata $(A|\mathbf{b})$ associata al sistema lineare:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & k & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1 \\ 0 & 2 & k & k \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & k & k \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -k^2+k+2 \end{array}\right).$$

Se $k = -2, 1$ vale $r(A|\mathbf{b}) = 3,\ r(A) = 2$, mentre negli altri casi il rango di A è massimo. Pertanto, per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha soluzione se, e soltanto se, $k \neq -2, 1$ ed in tal caso la soluzione è unica.

Geometricamente, se $k \neq -2, 1$ i tre piani si intersecano in un unico punto. Se $k = -2$, per ogni coppia di piani l'intersezione è una retta, ma le tre rette sono parallele tra loro. Se $k = 1$, i primi due piani sono paralleli e vengono tagliati dal terzo piano lungo due rette parallele.

2. Per $k = 0$ la matrice orlata ridotta a scala è:

$$(A|\mathbf{b}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,\ y = 0,\ z = 1.$$

3. Dalla dicussione del punto (1), esiste almeno una retta parallela a tutti i piani solo nei casi $k = -2, 1$.

2. 1. Il sottospazio V è definito come:

$$V = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli abbiamo $\dim(V) = 4 - 2 = 2$. Inoltre, risolvendo il sistema si ha:

$$V = \{(t_1 \quad t_2 \quad 2t_2 \quad t_2)^T,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{B}_V = \{(1\ 0\ 0\ 0)^T, (0\ 1\ 2\ 1)^T\}.$$

Il sottospazio W è generato da due vettori indipendenti, dato che

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_W = \{(1\ 0\ 1\ -1)^T, (0\ 1\ 2\ 0)^T\}.$$

2. $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ se, e soltanto se, $\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Questo è vero se, e soltanto se, i vettori delle due basi sono linearmente indipendenti. Questa condizione è equivalente al non annullarsi del determinante della seguente matrice:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

3. Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V è l'insieme dei vettori il cui prodotto scalare con i vettori di $\mathcal{B}_V$ è uguale a 0. Pertanto:

$$V^\perp = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \{(0 \quad -t_1 - 2t_2 \quad t_2 \quad t_1)^T,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}_{V^\perp} = \{\mathbf{v}_1 = (0\ \ -1\ 0\ 1)^T, \mathbf{v}_2 = (0\ \ -2\ 1\ 0)^T\}.$$

Per ottenere una base ortogonale applichiamo l'algoritmo di Gram–Schmidt:

$$\mathbf{v_1'} = \mathbf{v_1} = (0 \ -1 \ 0 \ 1)^T, \qquad \mathbf{v_2'} = \mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{v_1'} \cdot \mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_1'}\|^2}\,\mathbf{v_1'} = (0 \ -1 \ \ 1 \ -1)^T.$$

Dopo aver normalizzato si ottiene la base ortonormale:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{V^\perp} = \{(0 \ -{}^1\!/\!\sqrt{2} \ \ 0 \ \ {}^1\!/\!\sqrt{2})^T, (0 \ -{}^1\!/\!\sqrt{3} \ \ {}^1\!/\!\sqrt{3} \ -{}^1\!/\!\sqrt{3})^T\}.$$

4. W e $V^\perp$ sono isomorfi per il teorema di isomorfismo degli spazi vettoriali, in quanto $\dim(W) = \dim(V^\perp) = 2$.

3. 1. La matrice A è simmetrica, pertanto è ortogonalmente diagonalizzabile per qualunque k. Il polinomio caratteristico è:

$$P_A(\lambda;k) = \begin{vmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)((1-\lambda)^2-1) = -(\lambda-k)\lambda(\lambda-2).$$

- Se $k \neq 2$ gli autovalori sono distinti e gli autospazi sono:

$$V_k = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & k(k-2) \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_0 = \ker\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Dopo aver normalizzato otteniamo la base ortonormale di autovettori, per qualunque $k \neq 0$:

$$\mathcal{B}_V = \{(1 \ \ 0 \ \ 0)^T, (0 \ \ {}^1\!/\!\sqrt{2} \ -{}^1\!/\!\sqrt{2})^T, (0 \ \ {}^1\!/\!\sqrt{2} \ \ {}^1\!/\!\sqrt{2})^T\}.$$

2. La matrice dei termini di secondo grado e la matrice completa della quadrica sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dagli invarianti metrici $I_3 = |A| = 0$, $I_4 = |B| = -k$ si deduce che la quadrica è un paraboloide ellittico se $k > 0$ ed iperbolico se $k < 0$.

3. La superficie $\mathcal{Q}$ è una quadrica di rotazione se, e soltanto se, due autovalori di A sono uguali, ovvero se, e soltanto se, $k = 2$.

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 25 Settembre 2014		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo la retta

$$r|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} .$$

   1. Verificare che r e l'asse y sono sghembi.
   2. Trovare l'equazione della quadrica Q ottenuta dalla rotazione di r attorno all'asse y.
   3. Scrivere un'equazione canonica di Q e riconoscerla. Determinare eventuali centro e assi di simmetria di Q.

2. Sia $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare tale che

$$T(\mathbf{e_1}) = (1, 1, 0, 0), \qquad T(\mathbf{e_2}) = (0, 1, 1, -1), \qquad T(\mathbf{e_3}) = (1, 0, -1, 1).$$

   1. Dire se T esiste e se è unica.
   2. Calcolare $T((a, b, c))$.
   3. Trovare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di T.

3. Dato $k \in \mathbb{R}$, sia

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ k & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   1. Trovare i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   2. Trovare i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.
   3. Per i valori di k di cui al punto precedente individuare una matrice ortogonale Q che diagonalizza A_k.

Soluzioni

1\. 1. L'asse y è la retta di equazioni
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$
L'asse y e la retta r non si intersecano, in quanto il sistema
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$
non ha soluzione. Per ottenere una rappresentazione parametrica di r possiamo risolvere il sistema lineare che la definisce rispetto alle coordinate x, z :
$$\begin{cases} 2x + z = 1 + y \\ x - z = 2 - y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - z = 2 - y \\ 3z = -3 + 3y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 + y \end{cases}.$$
Prendendo come parametro la coordinata y, arriviamo a
$$r_{\mathcal{B}_O} : \ (x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, -1) + t\,(0, 1, 1).$$
Segue che r non è parallela all'asse y, che ha vettore direttore $(0, 1, 0)$, quindi le due rette sono sghembe.

2\. Ruotando r rispetto all'asse y otteniamo l'iperboloide ad una falda $\mathcal{Q}$ descritto dal sistema di equazioni:
$$\begin{cases} y = y_0 \\ x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 \\ x_0 = 1 \\ y_0 = t \\ z_0 = -1 + t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}|_{\mathcal{B}_O} : \ x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0.$$

3\. Per ottenere un'equazione canonica della quadrica è sufficiente osservare che
$$\mathcal{Q}|_{\mathcal{B}_O} : \ x^2 - (y - 1)^2 + z^2 - 1 = 0.$$
Definiamo il nuovo sistema di riferimento $\tilde{\mathcal{B}}_O$ dato dalla traslazione
$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \\ Z = z \end{cases}. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \ X^2 - Y^2 + Z^2 - 1 = 0.$$
Il centro C di $\mathcal{Q}$ ha coordinate
$$C|_{\mathcal{B}_O} = (0, 1, 0).$$
Gli assi di simmetria di $\mathcal{Q}$ sono le rette passanti per C e parallele agli assi coordinati x, y, z.

2\. 1. T è definita attraverso la sua azione sugli elementi di una base di $\mathbb{R}^3$ (la base canonica). Pertanto, per la formula di interpolazione T esiste ed é unica.

2\. Grazie alla linearitá di T abbiamo
$$T((a, b, c)) = T(a\,\mathbf{e_1} + b\,\mathbf{e_2} + c\,\mathbf{e_3}) = a\,T(\mathbf{e_1}) + b\,T(\mathbf{e_2}) + c\,T(\mathbf{e_3}) = (a+c, a+b, b-c, -b+c).$$

3\. Per definizione,
$$\ker(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, T((a, b, c)) = (0, 0, 0, 0)\}.$$

Di conseguenza è necessario risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b-c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=-c \\ b=c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=c(-1,1,1). \tag{1}$$

Segue che

$$\ker(T)=\mathcal{L}((-1,1,1)), \qquad \dim(\ker(T))=1.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(\mathrm{Im}(T))=3-1=2$. L'immagine di T è generata dai vettori $\{T(\mathbf{e_1}),T(\mathbf{e_2}),T(\mathbf{e_3})\}$. Per ottenere una sua base è sufficiente scegliere tra questi vettori due linearmente indipendenti, ad esempio $\mathcal{B}=\{T(\mathbf{e_1}),T(\mathbf{e_2})\}$.

3. 1. Il polinomio caratteristico di A_k è:

$$P_k(\lambda)=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ k & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)((2+\lambda)^2-k)=(2-\lambda)(2+\lambda+\sqrt{k})(2+\lambda-\sqrt{k}).$$

Di conseguenza gli autovalori sono:

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=-2-\sqrt{k}, \qquad \lambda_3=-2+\sqrt{k}.$$

- Se $k<0$, i due autovalori λ_2,λ_3 non sono reali, pertanto A_k non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- Se $k\neq 0,16$ gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile.
- Se $k=0$ si ha $\lambda_2=\lambda_3=-2$. L'autospazio associato è

$$V_{-2}=\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_{-2})=3-2=1$, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1 ed A_0 non è diagonalizzabile.

- Se $k=16$ si ha $\lambda_1=\lambda_3=2$. L'autospazio associato è

$$V_2=\ker\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_4)=3-1=2$, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore è 2 ed A_{16} è diagonalizzabile.

2. Per il teorema spettrale, A_k è ortogonalmente diagonalizzabile ripetto al prodotto scalare canonico se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k=1$.
3. Se $k=1$, gli autovalori sono

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=-3, \qquad \lambda_3=-1,$$

con relativi autospazi

$$V_2=\ker\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_{-3}=\ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_{-1}=\ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dopo avere normalizzato gli autovettori si ottiene la matrice ortogonale Q che diagonalizza A:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 10 Febbraio 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Dato il parametro reale h, consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + hy + (h-1)z = 1 \\ x + hy - z = 0 \\ x - hy + (h+2)z = 2 \end{cases}.$$

1. Discutere ed ove possibile risolvere il sistema.
2. Interpretare geometricamente i risultati.
3. Indicare un valore di h per cui le equazioni del sistema rappresentino tre piani appartenenti ad un fascio. Determinare quindi i parametri direttori della retta sostegno del fascio.

2. Dato il parametro reale h, consideriamo le seguenti matrici:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare, se esistono, i valori di h per i quali le due matrici sono simili.
2. Stabilire se esistono valori di h per cui A_h è ortogonalmente diagonalizzabile.
3. Per i valori di h di cui al punto precedente individuare una matrice ortogonale Q che diagonalizza A_h e la corrispondente matrice diagonale D.

3. Nel riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$, si consideri la conica $\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O} : x^2 + 4xy + 4y^2 - 10\sqrt{5}x = 0$.

1. Riconoscere la conica.
2. Scrivere $\mathcal{C}$ in forma canonica determinando l'opportuno cambiamento di coordinate.
3. Trovare la direzione dell'asse o degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$.

Soluzioni

1. 1. Attraverso il metodo di eliminazione di Gauss possiamo ridurre a scala la matrice orlata $(A|\mathbf{b})$ associata al sistema lineare:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & h-1 & 1 \\ 1 & h & -1 & 0 \\ 1 & -h & h+2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & 0 \\ 0 & -h & h+1 & 1 \\ 0 & -2h & h+3 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & 0 \\ 0 & h & -h-1 & -1 \\ 0 & 0 & -h+1 & 0 \end{array}\right).$$

Se $h = 1$ vale $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 2$, quindi esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se $h = 0$ abbiamo:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Quindi vale $r(A) = 2 < r(A|\mathbf{b}) = 3$ e non esistono soluzioni.
Se $h \neq 0, 1$ vale $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 3$ ed il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Geometricamente, se $h = 1$ i piani corrispondenti alle tre equazioni appartengono al medesimo fascio, a supporto sulla retta (**??**). Se $h = 0$ i tre piani si incontrano a due a due lungo rette parallele, per cui la loro intersezione è vuota. Se $h \neq 0, 1$ i tre piani si intersecano in un unico punto.

3. Dai punti 1 e 2 deduciamo che i piani appartengono ad un unico fascio se e solo se $h = 1$ ed in tal caso i parametri direttori della retta sono $(-1\ 2\ 1)^T$.

2. 1. B è una matrice diagonale ed i suoi autovalori sono $1, 1, 2$. Si ha che A_h è simile a B se e solo se è diagonalizzabile con gli stessi autovalori di B. Il polinomio caratteristico di A_h è

$$P_h(\lambda) = \det(A_h - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ h+1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - (1+2h))$$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2(1+h)}$. Gli autovalori di A_h coincidono con quelli di B se e soltanto se $h = -1$. In tal caso bisogna verificare se A_{-1} è diagonalizzabile. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio V_1 :

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli abbiamo $\dim(V_1) = 3 - 2 = 1$, pertanto A_{-1} non è diagonalizzabile e quindi A_h non è simile a B per nessun valore di h.

2. A_h è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se è simmetrica, quindi per $h = 1$.

3. Calcoliamo gli autovalori e gli autovettori di A_1. Dal punto 1 abbiamo $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$. I corrispondenti autospazi sono:

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Le matrici ortogonalizzante e diagonale sono:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. 1. Le matrici associate alla conica sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5\sqrt{5} \\ 2 & 4 & 0 \\ -5\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $I_2 = \det(A) = 0$ ed $I_3 = \det(B) = -500 \neq 0$, segue che la conica è una parabola.

2. La rotazione Q del sistema di riferimento è quella necessaria a diagonalizzare A. Calcoliamo gli autovalori di A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 0, 5.$$

I corrispondenti autospazi sono:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_5 = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice di rotazione è quindi:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

A seguito della rotazione, l'equazione della conica diventa:

$$5\tilde{y}^2 - 20\tilde{x} - 10\tilde{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\tilde{y} - 1)^2 - 4\left(\tilde{x} + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Definendo le nuove variabili $X = \tilde{x} + 1/4$ e $Y = \tilde{y} - 1$, arriviamo all'equazione canonica della parabola ed allta trasformazione completa delle coordinate:

$$Y^2 - 4X = 0, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X - 1/4 \\ Y + 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{5} \\ 9/4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

3. La parabola ha un solo asse di simmetria, passante per il vertice e la cui direzione è data dall'autovettore nullo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{5} \\ 9/4\sqrt{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$