

Appunti di Meccanica

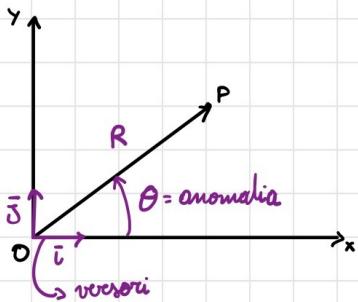
Brodalan Alexandru Gabriel

1. CINEMATICA

Qualificheremo la cinematica non nello spazio, ma solo nel piano.

1.1 Cinematica del punto

DEFINIZIONE - Posizione: da posizione del punto è un vettore con punto iniziale nell'origine del sistema di riferimento punto finale sul punto. Alcune notazioni equivalenti sono:



$$\begin{aligned}\vec{P} &= P \cdot \vec{O} = \\ &= x_p \cdot \vec{i} + y_p \cdot \vec{j} = \\ &= x_p + i y_p = \\ &= R \cos \theta + i R \sin \theta = \\ &= R e^{i\theta}\end{aligned}$$

} utilizzo del piano
cartesiano
} utilizzo del piano complesso

DEFINIZIONE - Spostamento: lo spostamento è la posizione di un punto in funzione di uno scalare (ad esempio il tempo).

DEFINIZIONE - Traiettoria: da funzione di legge y_p e x_p ($o R$ e θ) viene della traiettoria: $y_p(x_p)$

DEFINIZIONE - Ascissa curvilinea: d'ascissa curvilinea deriva la quantità di spostamento lungo la traiettoria in funzione del tempo. La formula che lega l'ascissa curvilinea al tempo è detta legge di moto.

DEFINIZIONE - Velocità: La velocità è definita come la derivata del vettore posizione nel tempo: $\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{P}(s(t))) = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{\vec{P}} \cdot \dot{s} = \dot{s} \cdot \vec{t}$$

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{t}$$

↳ tangente alla traiett.

$$\vec{v} = \dot{x}_P + i \dot{y}_P = \dot{R} e^{i\theta} + R i \dot{\theta} e^{i\theta} = \dot{R} e^{i\theta} + R \dot{\theta} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

↓ ↓

$\parallel \vec{r}$ $\perp \vec{r}$

PROPRIETÀ
DEI NUMERI COMPLESSI

DEFINIZIONE - Accelerazione L'accelerazione è definita come $\frac{d}{dt} \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \vec{P}(s(t)) \right) = \frac{d}{dt} (\ddot{s} \cdot \vec{t}) = \frac{d^2}{dt^2} s \cdot \frac{d}{ds} \vec{P} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d^2}{ds^2} \vec{P} \\ &= \ddot{s} \cdot \vec{t} + \underbrace{\dot{s}^2 \cdot \vec{n}}_{\text{si dimostra, noi lo saliamo}} / r\end{aligned}$$

Le componenti r e \vec{n} sono rispettivamente il raggio del cerchio osculatore e il versore che congiunge P e il centro della circonferenza osculatrice.

DEFINIZIONE - Circonferenza osculatrice È la circonferenza tangente alla traiettoria che meglio la approssima in quel punto.

Calcolando l'accelerazione in coordinate polari otteniamo:

$$\vec{a} = \ddot{R} e^{i\theta} + 2R\dot{\theta}e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} + R\dot{\theta}^2 e^{i(\theta + \pi)} + R\dot{\theta}^2 e^{i(\theta + \pi)}$$

↓ ↓ ↓ ↓

$\parallel \vec{r}$ a. di Coriolis variaz. di angolo componente centripeta legata
alla rotazione (\sim acc. centripeta)

1.2 Cinematica del corpo rigido

DEFINIZIONE - Corpo rigido Un corpo è detto rigido se per ogni coppia di punti del corpo, la distanza tra i punti non varia.

Un corpo rigido può compiere 3 movimenti nel piano:

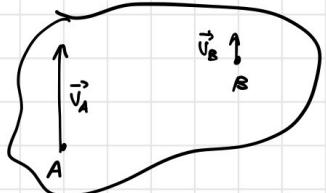
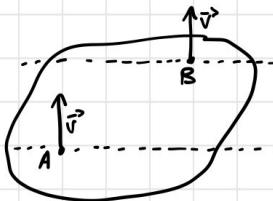
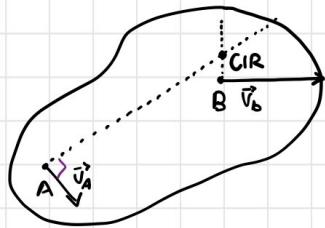
1. Traslazione: il corpo si muove mantenendo le sue orientazioni;
2. Rotazione: ogni punto del corpo ruota intorno ad un punto;
3. Rototraslazione: ogni punto del corpo si muove genericamente nel piano;

ogni punto ha
la stessa velocità.

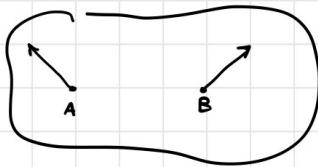
Il corpo rigido si dice che ha 3 gradi di libertà, il punto ne ha 2.

Per ogni istante, possiamo vedere ogni moto come una rotazione intorno

ad un particolare punto detto centro di rotazione risalente. Nel caso della traslazione questo punto sarà all'infinito. La velocità del CIR in un atto di moto è nulla ma non lo è per forza anche l'accelerazione.



NON È RIGIDO!!



NON È RIGIDO!!

Possiamo quindi dire che il moto è di un corpo rigido se tutti i punti hanno la stessa velocità oppure le velocità sono tali da poter definire un centro di rotazione.

TEOREMA DI RIVALS Se si conoscono 3 informazioni indipendenti di un punto e la velocità e accelerazione angolare del corpo, è possibile calcolare correttamente ogni punto del corpo.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

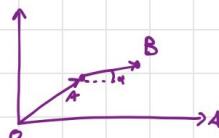
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A}))$$

$$(\vec{B} - \vec{O}) = (\vec{A} - \vec{O}) + (\vec{B} - \vec{A})$$

$$(\vec{B} - \vec{O}) = (\vec{A} - \vec{O}) + \vec{BA} e^{i\alpha}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{BA} \alpha e^{i(\alpha + \pi/2)}$$

$$\vec{a}_B \text{ si ricava derivando } \vec{v}_B$$



1.3 Vincoli

Generalmente un vincolo è una restrizione del movimento di alcuni punti del corpo. Il numero di movimenti che il vincolo blocca è detto grado di vincolo.

VINCOLO OLONOMO si dice vincolo olonomo un vincolo del tipo
 $f(x_1, x_2, \dots, t) = 0$.

VINCOLO LISCIO si dice vincolo liscio se la restrizione rimanda avanti lungo una sola direzione.

VINCOLI BILATERI si dice vincolo bilatero un vincolo che blocca il movimento in entrambe le direzioni

Ci sono alcuni vincoli tipici che vedremo tra poco:

INCASTRO



3 g.d.l -

3 g.d.v

$0 \Rightarrow$ fermo

CERNIERA

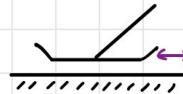


3 g.d.l -

2 g.d.v

$1 \rightarrow$ può solo ruotare
intorno

PATTINO

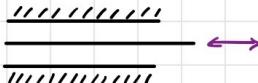


3 g.d.l -

2 g.d.v

$1 \rightarrow$ può solo trascinare
lungo una direzione

MANICOTTO

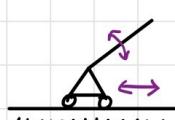


3 g.d.l -

2 g.d.v

$1 \rightarrow$ può solo trascinare
lungo una
direzione

CARRELLO

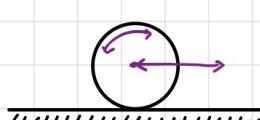


3 g.d.l -

1 g.d.v

2

ROTOLAMENTO

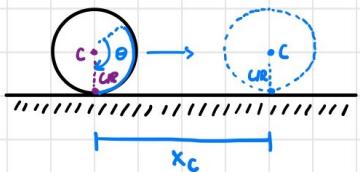


3 g.d.l -

1 g.d.v

2

PURA ROTOLAMENTO

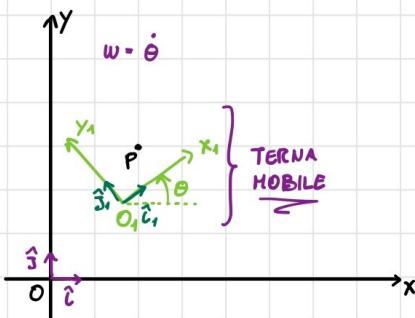


$$\begin{cases} x_c = R\theta & \leftarrow \text{puro rotolamento} \\ y_c = \text{const} & \leftarrow \text{appoggio} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2 \text{ g.d.v}$

1.4 Teorema dei nodi relativi

Il teorema può essere usato sia con punti che con corpi e sistemi. L'idea del teorema è quello di cercare di scomporre il moto assoluto di un corpo nella somma di più contributi più semplici.



$$(P-O) = (O_1 - O) + (P-O_1) = x_{01}\hat{i} + y_{01}\hat{j} + x_{P,1}\hat{i}_1 + y_{P,1}\hat{j}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \frac{d(P-O)}{dt} = \frac{d(O_1 - O)}{dt} + \frac{d(P-O_1)}{dt} \\ &= \dot{x}_{01}\hat{i} + \dot{y}_{01}\hat{j} + \dot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\hat{j}_1 + x_{P,1}\frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_{P,1}\frac{d\hat{j}_1}{dt} \\ &= \dot{x}_{01}\hat{i} + \dot{y}_{01}\hat{j} + \dot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\hat{j}_1 + x_{P,1} \cdot \vec{\omega}_1 \cdot \hat{i}_1 + y_{P,1} \cdot \vec{\omega}_1 \cdot \hat{j}_1 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \text{REG. DI POISSON}$

$$\begin{aligned} &= \dot{x}_{01}\hat{i} + \dot{y}_{01}\hat{j} + \dot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\hat{j}_1 + \vec{\omega}_1 (x_{P,1}\hat{i}_1 + y_{P,1}\hat{j}_1) \\ &= \dot{x}_{01}\hat{i} + \dot{y}_{01}\hat{j} + \vec{\omega}_1 (P - O_1) + \dot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\hat{j}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{P,T} \quad \vec{v}_{P,REL}$$

\hookrightarrow velocità di P avrebbe se fosse fermo nella terna mobile

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{v}_P}{dt} \\ &= \ddot{x}_{01}\hat{i} + \ddot{y}_{01}\hat{j} + \vec{\omega}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1) + \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1)) + \vec{\omega}_1 \vec{v}_{P,REL} + \\ &\quad + \ddot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \ddot{y}_{P,1}\hat{j}_1 + \dot{x}_{P,1}\vec{\omega}_1 \hat{i}_1 + \dot{y}_{P,1}\vec{\omega}_1 \hat{j}_1 \\ &= \ddot{x}_{01}\hat{i} + \ddot{y}_{01}\hat{j} + \vec{\omega}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1) + \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1)) + \vec{\omega}_1 \vec{v}_{P,REL} + \\ &\quad + \ddot{x}_{P,1}\hat{i}_1 + \ddot{y}_{P,1}\hat{j}_1 + \vec{\omega}_1 \vec{v}_{P,REL} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\ddot{x}_{O_1} \vec{i} + \ddot{y}_{O_1} \vec{j} + \ddot{w}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1)}_{\vec{\alpha}_{O_1}} + \underbrace{\ddot{w}_1 (\vec{w}_1 (\vec{P} - \vec{O}_1))}_{\vec{\alpha}_{P,T}} + \underbrace{\ddot{x}_{P_1} \vec{i}_1 + \ddot{y}_{P_1} \vec{j}_1}_{\vec{\alpha}_{P,REL}} + \underbrace{2 \vec{w}_1 \vec{v}_{P,REL}}_{\vec{\alpha}_{P,COR}}$$

1.5 Cinematica dei sistemi di corpi rigidi

Un sistema di corpi rigidi è un insieme di corpi rigidi interconnessi. Il numero di gradi di libertà di un sistema è:

$$n_{gdl} = n_{CE} \cdot 3 - [n_C \cdot 1 + (n_p + n_{CERU.}) \cdot 2 + n_{INC} \cdot 3]$$

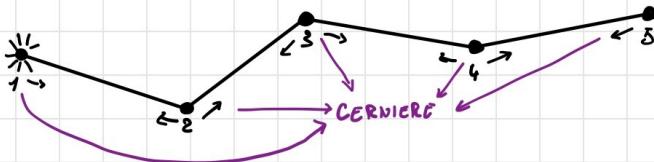
↑ corpi rigidi ↑ carri ↑ pallini ↑ cerniere ↑ incastri

Questa regola vale se i vincoli sono tutti non ridondanti e se i vincoli sono applicati o tra un corpo e l'area o tra due corpi. Distinguiamo 3 casi:

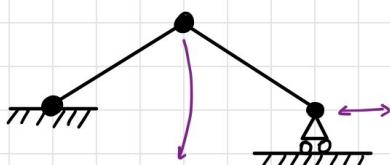
1. $n_{gdl} > 0 \rightarrow$ SISTEMA IPOSTATICO (meccanismo) \rightarrow si può muovere
2. $n_{gdl} = 0 \rightarrow$ SISTEMA ISOSTATICA (struttura) \rightarrow non si muove
3. $n_{gdl} < 0 \rightarrow$ SISTEMA IPERSTATICA (struttura) \rightarrow non si muove; non trallata
 \rightarrow ottenibile solo con vincoli ridondanti

Tra i meccanismi possiamo distinguere 2 tipi d'interesse:

1. CATENE CINEMATICHE APERTA: ci sono n corpi rigidi in cui ciascun corpo i è collegato al corpo $i-1$ e al $i+1$ -esimo. L'inizio e l'fine della catena sono liberi. La catena aperta ha almeno 1 gdl



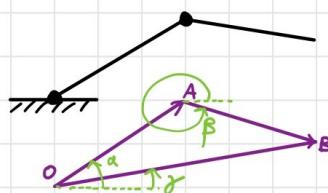
2. CATENE CINEMATICHE CHIUSE: in genere il corpo i può essere collegato anche a l'area o a corpi non adiacenti. Spesso le catene chiuse hanno 1 gdl



1.5.1 Risolvere una catena circolare chiusa

Per descrivere una catena circolare studiamo posizioni, velocità e accelerazioni dei punti più importanti.

d'equazioni vettoriali di posizione nasce dalla descrizione vettoriale del meccanismo: a partire da un punto di cui è nota la posizione (solitamente l'origine), tramite una successione di vettori di posizione si descrive un percorso che lungo i successivi membri del meccanismo porta al punto iniziale. Per questo motivo queste equazioni sono delle di chiusura.

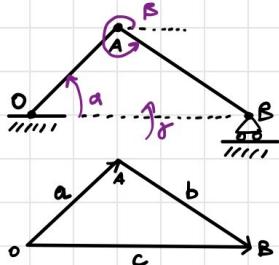


$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

$$OB e^{i\gamma} = OA e^{i\alpha} + AB e^{i\beta}$$

RISOLVIBILE CON I METODI
GIÀ VISTI

Nel caso di catene chiuse dobbiamo applicare alcuni accorgimenti. Poiché abbiamo dei vincoli su alcuni punti (ad esempio l'auroraggio a terra), non avremo 3 variabili ma meno (2 nel piano).

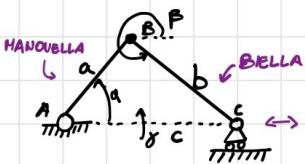


$$(B-O) = (A-O) + (B-A)$$

$$ce^{i\gamma} = ae^{i\alpha} + be^{i\beta}$$

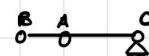
↳ numero di incognite deve essere 2 (nel piano)

MANOVELLISHO ORDINARIO CENTRATO

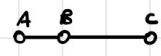


1 grado residuo

Il movimento rotatorio della manovella causa la traslazione orizzontale del punto c. Il meccanismo può assumere 2 posizioni ridondanti:

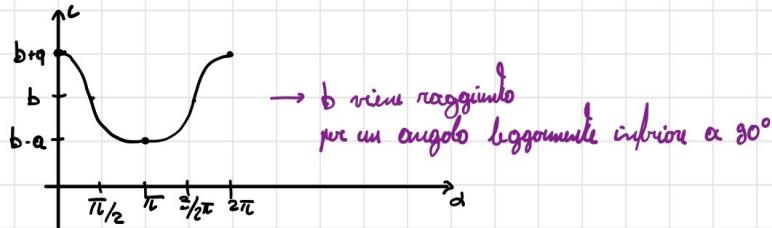


PUNTO MORTO
INFERIORE

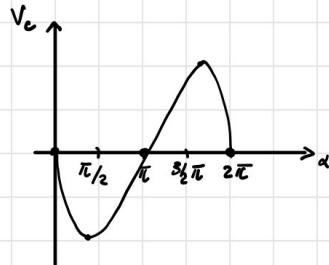


PUNTO MORTO
SUPERIORE

la distanza tra i due punti morti viene detta corsa e dipende esclusivamente dalle dimensioni della manovella: a .



Il movimento di C non è una sinusoida, ma è simile. Lo stabilimento tra il moto $(b+a; b)$ e $(b; b-a)$ è dato da $\lambda = \frac{a}{b}$. Se $a < b$ il movimento di C tende ad una sinusoida; più $\lambda \rightarrow 1$, più la sinusoida "si spacca". Non avremo mai $a > b$.



$$(C-A) = (B-A) + (C-B) \rightarrow c = a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} \rightarrow \begin{cases} c = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ 0 = a \sin \alpha + b \sin \beta \end{cases}$$

$$\text{Noti } \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rightarrow \sin \beta = -\lambda \sin \alpha \Rightarrow \beta = \beta(\alpha) \\ c = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \quad C = C(\alpha)$$

$$c = \underbrace{a \dot{\alpha} e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}}_{V_{C,T}} + \underbrace{b \dot{\beta} e^{i(B + \frac{\pi}{2})}}_{V_{C,\alpha}} \rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -a \dot{\alpha} \sin \alpha - b \dot{\beta} \sin \beta \\ 0 = a \dot{\alpha} \cos \alpha - b \dot{\beta} \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} b \sin \beta & 1 \\ -b \sin \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a \sin \alpha \\ a \cos \alpha \end{Bmatrix} \dot{\alpha} \xrightarrow{\text{poniamo tutto } \dot{\alpha} \text{ funzione di } \alpha} \begin{aligned} \dot{\beta} &= \Delta_B(\alpha) \dot{\alpha} \\ \dot{c} &= \Delta_C(\alpha) \dot{\alpha} \end{aligned}$$

\uparrow
Jacobiano
del moto

In generale, il movimento in sistemi a 1 grado di libertà sono rappresentabili come una funzione della coordinata libera per le derivate della coordinata libera.

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = -\alpha \ddot{\alpha} \sin \alpha - \alpha \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - b \ddot{\beta} \sin \beta - b \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ 0 = \alpha \ddot{\alpha} \cos \alpha - \alpha \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + b \ddot{\beta} \cos \beta - b \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases}$$

$$\left[\dots \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \end{array} \right\} = \dots$$

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\alpha) \longrightarrow \dot{\beta} = \Delta_B(\alpha) \dot{\alpha} \quad \ddot{\beta} = \frac{d[\Delta_B(\alpha) \dot{\alpha}]}{dt} = \Delta_B(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{d\Delta_B(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 \\ c &= c(\alpha) \quad \dot{c} = \Delta_C(\alpha) \dot{\alpha} \quad \ddot{c} = \dots = \Delta_C(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{d\Delta_C(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

approssimiamo con Taylor

$$c(\alpha) = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\approx a \cos \alpha + b - b \lambda^2 / 2 \sin^2 \alpha$$

$$\dot{c}(\alpha) = -\alpha \dot{\alpha} \sin \alpha - b \lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}$$

$$= -\alpha \dot{\alpha} \sin \alpha - b \lambda^2 / 2 \sin 2\alpha \dot{\alpha} = -\dot{\alpha} (a \sin \alpha + b \lambda^2 / 2 \sin 2\alpha)$$

$$\ddot{c} = -\ddot{\alpha} (a \sin \alpha + b \lambda^2 / 2 \sin 2\alpha) - \dot{\alpha}^2 (a \cos \alpha + b \lambda^2 \cos 2\alpha)$$

IPOTESI SEMPLIFICATIVA: • $\lambda \ll 1$

$$\approx \lambda c$$

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow c(\alpha) \approx a \cos \alpha + b$$

$$\dot{c}(\alpha) \approx -\alpha \dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$\ddot{c}(\alpha) \approx -\alpha \ddot{\alpha} \sin \alpha - \alpha \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$$

} APPROXIMAZIONE DEL
PRIMO ORDINE DEL MOTO

2 STATICA

2.1 Statica del punto

Dato un punto, la condizione nec. e suff. affinché il punto sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze sul punto sia nulla:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. \hookrightarrow \text{no forze esterne da realizzare}$$

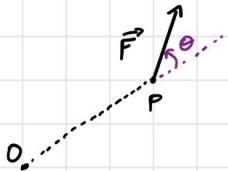
2.2 Statica del corpo rigido

A differenza del punto materiale, le forze possono essere applicate in punti differenti del corpo. In base al punto di applicazione, cambia l'effetto della forza. Formalmente, la condizione di equilibrio di un corpo rigido è:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{MOMENTO}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{il numero di equazioni coincide con} \\ \text{il numero di gradi di libertà del} \\ \text{sistema.} \end{array}$$

DEFINIZIONE - MOMENTO DI UNA FORZA Diamo dati due punti: uno dello polo (O) e l'altro punto di applicazione della forza. Il momento di una forza rispetto ad un polo è:



$$\vec{M}_0 = (P-O) \wedge \vec{F} \rightarrow |M_0| = \overline{PO} \cdot |F| \cdot \sin \theta$$

DEFINIZIONE - COPPIA DI FORZE Due forze uguali in modulo applicate su direzioni parallele. Il momento complessivo rispetto ad ogni polo è:



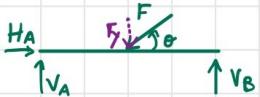
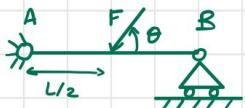
Possiamo scrivere i seguenti sistemi: 2 eq. di forze e uno oli momenti, 1 eq di forze e 2 di momenti o 3 eq. di momenti puruli i poli non siano allineati.

2.2.1 Forze (momenti) attive e reattive

Le forze (momenti) attive sono quelle forze che contribuiscono al moto. Le forze (momenti) reattive sono quelle forze generate dai vincoli. Le reazioni vincolari corrispondenti ai vincoli visti sono:



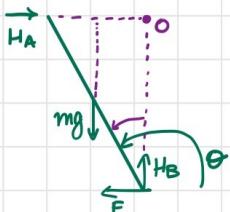
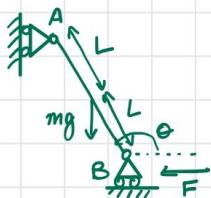
ESERCIZIO



Notti: F, θ, L
Calcolare la reazione vincolare.

$$\begin{cases} H_A - F \cos \theta = 0 & \rightarrow H_A = F \cos \theta \\ V_A + V_B - F \sin \theta = 0 & \rightarrow V_A = F \sin \theta / 2 \\ L V_B - F L / 2 \sin \theta = 0 & \rightarrow V_B = F \sin \theta / 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO



Notti: L, F, m
Calcolare θ

$$\begin{cases} H_A = F \\ H_B = mg \\ -F L \cos(\theta - \pi/2) + mg L \sin(\theta + \pi/2) = 0 \\ \rightarrow mg \sin(\theta + \pi/2) = 2F \cos(\theta - \pi/2) \\ \rightarrow \tan(\theta - \pi/2) = 2F/mg \\ \rightarrow \theta = \arctan(2F/mg) + \pi/2 \end{cases}$$

2.3 Idroca del sistema di corpi rigidi

Se ho un sistema di n corpi, il sistema visto precedentemente dà valore per ogni singolo corpo nel sistema.

Le reazioni vincolari agiscono su ogni corpo che vincolano con modulo uguali per ogni corpo ma di verso opposto. Possiamo quindi suddividere il sistema in sottosistemi, tenendo conto delle reazioni vincolari del sistema.

Ci sono considerazioni sulla struttura delle equazioni:

- Le reazioni vincolari interne ai sottosistemi non vanno incluse nelle equazioni, solo quelle "di confine".

2. le equazioni scritte sull'intero sottosistema sono dipendenti da quelle dei sottosistemi.

2.3.1 La bolla

Un'asta ha le caratteristiche di bolla (le reazioni vincolari sono parallele alla conseguente fra gli estremi dell'asta) quando:

1. Non ci sono momenti concentrati
2. Tutte le forze agiscono solo sulle estremità

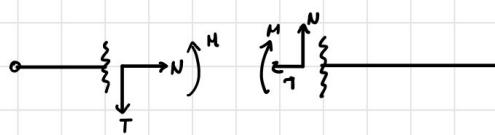
2.3.2 Azioni interne

Rappresentano le sollecitazioni interne ad un corpo e non più ai vincoli.

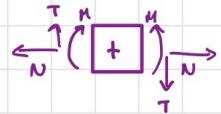
Immaginiamoci un'asta e di voler sapere il modulo della forza nel punto specificato:



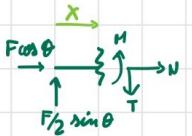
"Spacciamo" l'asta in due e trattiamola come sistema:



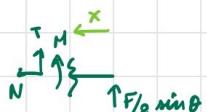
Convenzione:



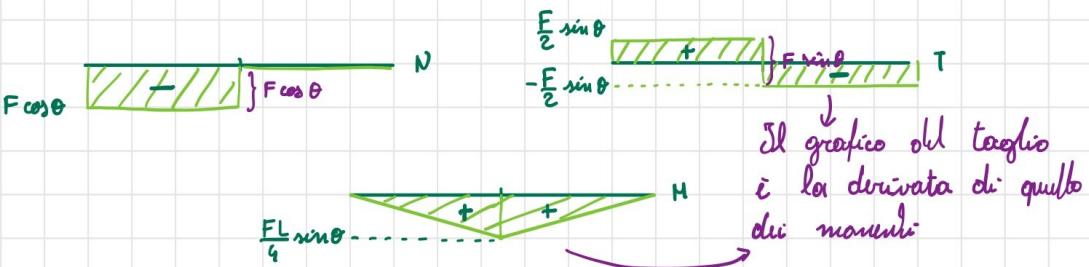
ESEMPIO



$$\begin{cases} N = -F \cos \theta \\ T = -\frac{F}{2} \sin \theta \quad \text{per } x \in (0; \frac{L}{2}) \\ M = \frac{F}{2} \sin \theta \cdot x \end{cases}$$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = +\frac{F}{2} \sin \theta \quad \text{per } x \in (\frac{L}{2}; L) \\ M = \frac{F}{2} \sin \theta \cdot x \end{cases}$$



3 DINAMICA

DEFINIZIONE - BARICENTRO È un punto con coordinate pari alla media ponderata dei punti che compongono il nostro corpo rigido. Nel caso di corpi continui la somma divenuta un'integrale:

$$x_G = \int_V p(x,y) x \, dv / m_{tot} \quad \text{con } p(x,y) \text{ la densità del corpo.}$$

Y_G ...

CORPO OMogeneo: $x_G = \rho h / m \int_A x \, dA$

DEFINIZIONE - MOMENTO D'INERZIA Il momento d'inerzia rispetto ad O è definito come:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \\ J &= \int_V p(x,y) R^2 \, dv \quad \leftarrow \text{corpo omogeneo} \end{aligned}$$

TEOREMA DI HUYGENS Il momento d'inerzia in un generico punto O è:

$$J_O = J_G + m \overline{OG}^2$$

↳ m.i. nel baricentro

Se un corpo ha forma complessa, possiamo suddividerlo in delle forme più semplici e ricavare il baricentro del corpo come baricentro dei baricentri delle forme più semplici. Per il momento d'inerzia ottieniamo:

$$J_G = J_{1G} + J_{2G} + \dots$$

$$= \mathcal{J}_1 G_1 + m_1 \overline{G_1 G^2} + \mathcal{J}_2 G_2 + m_2 \overline{G_2 G} + \dots$$

3.1 Metodi di analisi del movimento

Abbiamo due metodi per trattare il movimento di un corpo:

1. Equilibri dinamici: bilancio di forze

- Equazioni cartesiane

- Principio d'Alembert

2. Metodi energetici: moto come trasformazione d'energia

- Principio dei lavori virtuali

- Equazioni di Lagrange

- Bilancio di potenze

- Teorema dell'energia cinetica

3.1.1 Principio d'Alembert

Per un punto materiale, la somma di tutte le forze esterne e delle forze d'inerzia deve essere nulla. Per un punto materiale che si muove con accelerazione $\ddot{\alpha}$ otteniamo che la forza d'inerzia è $m\ddot{\alpha}$. Il problema è quindi ridotto ad un problema di statica equivalente.

Per un corpo rigido, esso è in equilibrio statico se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{IN} = 0 \\ \sum_i (\rho_i \cdot \vec{O}) \times \vec{F}_i + \sum_j G_j + (\vec{G} - \vec{O}) \times \vec{F}_{IN} + \vec{C}_{IN} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{OPPONE MOTO} \\ \uparrow \\ \text{oppone rotaz.} \end{array}$$



coppia di reazione
concentrica/esterna

coppia d'inerzia: tutti corpi che
come siano sparsi intorno al bariembo

$$\vec{F}_{IN} = \int_V d\vec{F}_{IN} = - \int_P \vec{\alpha}_P dV \rightarrow \text{Rivalo}$$

$$= - \vec{\alpha}_G \int_V \rho dV - \vec{\omega} \times \int_V \rho (\vec{P} - \vec{G}) dV + \vec{\omega}^2 \int_V \rho (\vec{P} - \vec{G}) dV \rightarrow \text{bariembo rispetto al bariembo}$$

$$= - \vec{\alpha}_G \int_V \rho dV - -m\vec{a}_G$$

bariembo
rispetto al
bariembo

$$\vec{C}_{IN} = \int_V (\vec{P} - \vec{G}) \times \vec{\alpha}_P \rho dV \rightarrow \text{Rivalo}$$

$$= - (\int_V (\vec{P} - \vec{G}) \rho dV) \vec{\alpha}_G - \int_V (\vec{P} - \vec{G}) \times (\vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{G})) \rho dV +$$

$$+ \int_V (\vec{P} - \vec{G}) \times (\vec{\omega}^2 (\vec{P} - \vec{G})) \rho dV =$$

$$= - \int_V \overline{P} \overline{G}^2 \vec{\omega} \rho dV = - \vec{\omega} \int_V \overline{P} \overline{G}^2 \rho dV = - \vec{\omega} \mathcal{J}_G$$

d'elusione a sistemi di corpi è identica alla statica.

3.1.2 Approssimazione energetico

DEFINIZIONE - POTENZA DI UNA FORZA

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [W] = [\text{J/s}]$$

DEFINIZIONE - POTENZA DI UNA COPPIA

$$W = \vec{C} \cdot \vec{\omega}$$

DEFINIZIONE - ENERGIA CINETICA

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Nel caso di corpo rigido:

$$\begin{aligned} dE_C &= \frac{1}{2} dm \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \\ \rightarrow E_C &= \frac{1}{2} \int_V dm \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = \frac{1}{2} \int_V \rho dv \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{v}_G + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] \cdot [\vec{v}_G + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] dv \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G \int_V \rho dv + \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v}_G \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] dv + \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] \cdot \vec{v}_G dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_G)] dv \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \cancel{\frac{1}{2} \int_V [\vec{\omega} \times \int_V \rho (\vec{r}_P - \vec{r}_G) dv] \cdot \vec{v}_G} + \frac{1}{2} [\vec{\omega} \times \int_V \rho (\vec{r}_P - \vec{r}_G) dv] \cdot \vec{v}_G \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2 \int_V \rho (\vec{r}_P - \vec{r}_G)^2 dv \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \quad \leftarrow \text{teorema di Koenig} \end{aligned}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA Dato un sistema di corpi rigidi, si ha:

$$\sum W = \frac{dE_C}{dt} \quad \begin{matrix} \text{somma di tutte le forze/coppe attive} \\ \uparrow \end{matrix}$$

Il bilancio energetico si ottiene dal teorema sopra:

$$\begin{aligned} \sum W &= \frac{dE_C}{dt} \\ \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j &= \sum_k \frac{dE_{C,k}}{dt} \\ &= \sum_k (m \vec{v}_G \cdot \vec{a}_G + J_G \vec{\omega}_G \cdot \vec{\dot{\omega}}_G) \\ \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j - \sum_k (m \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + J_G \vec{\dot{\omega}}_G \cdot \vec{\omega}_G) &= 0 \\ \underbrace{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i}_{\text{POTENZE ATTIVE}} + \underbrace{\sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j}_{\text{POTENZE D'INERZIA}} + \underbrace{\sum_k (F_{in} \cdot \vec{v}_G - C_{in} \cdot \vec{\omega}_G)}_{\text{POTENZE D'INERZIA}} &= 0 \end{aligned}$$

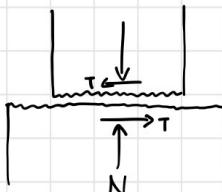
3.2 Altri

I 3 altri che vedremo sono: statico, dinamico e volventi. Gli altri si generano quando due corpi in contatto si muovono relativamente a vicenda

oltre.

L'attrito statico è presente quando $v_{REL} = 0$, mentre quello dinamico quando $v_{REL} \neq 0$.

3.2.1 Attrito statico

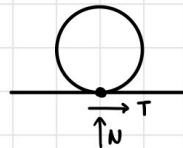


da forza è generata per effetto d'"incastro" tra le rugosità delle due superfici. Nel caso statico T si comporta come una reazione vincolare con un valore limite oltre il quale cessa la condizione di attrito statico.

$$T_{\text{lim}} = f_s \cdot |N| \Rightarrow |T| \leq |T_{\text{lim}}|$$

T dipende esclusivamente dalle forze applicate sui due corpi.

Nel caso del piano rotolamento abbiamo visto che:

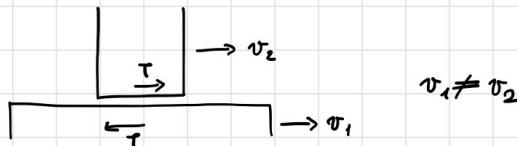


LA T È UN ATTRITO STATICO!
→ La T_{lim} è quindi una condizione di rotolamento piano.

Poiché T è una reazione vincolare, non genera potenza.

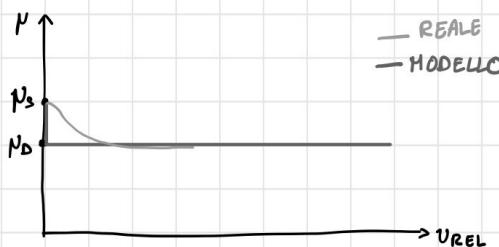
3.2.2 Attrito dinamico

Caso $v_1 > v_2$



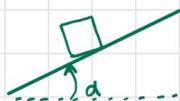
La forza T è sempre opposta alla velocità del corpo rispetto all'altro.
Nel caso dinamico la forza T non è più una reazione vincolare ed è pari a:

$$T = f_0 \cdot 1_N$$



La potenza generata da T è: $W_{DIN} = -|T| \cdot |v_{REL}|$

ESEMPIO



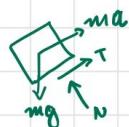
NOTI: f_s , f_0 , m

INCognite: max a per aderenza
accel. in caso di $\alpha > \alpha_{\text{LIM}}$



$$N = mg \cos \alpha \rightarrow |T| \leq f_s \cdot mg \cos \alpha$$

$$T = mg \sin \alpha \rightarrow mg \sin \alpha \leq f_s \cdot mg \cos \alpha \\ \Rightarrow \tan \alpha \leq f_s$$

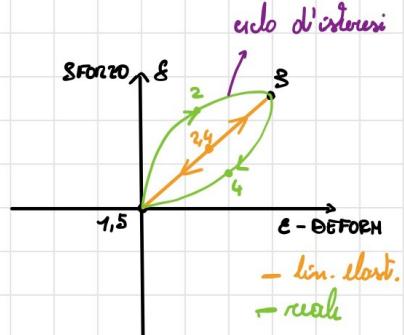
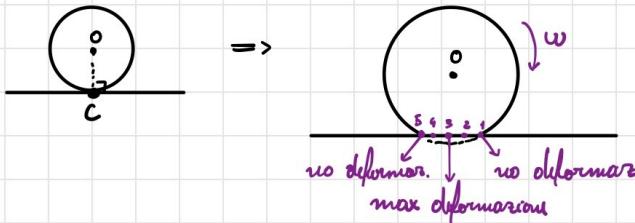


$$T + ma - mg \sin \alpha = 0$$

$$N = mg \cos \alpha \rightarrow f_0 mg \cos \alpha + ma - mg \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow a = \dots$$

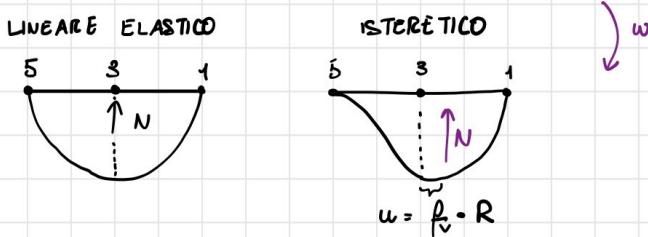
3.2.3 Cittato rotolante

Anche se il nome di cittato, la resistenza al rotolamento è un fenomeno di natura diversa. Esso nasce dalla deformabilità dei corpi. Dal punto di vista cinematico continueremo a trascurare questa deformazione.



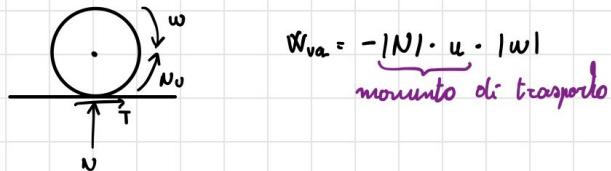
L'area coperta dal ciclo d'isterosi è "imparcellata" all'energia dissipata durante il rotolamento. Nel caso limite, il linea elastico, l'area, e quindi l'energia dissipata, è nullo.

La distribuzione di pressione nei due casi è:



In più notate come nel caso isteretico la forza N si sposta "avanti" nella direzione di rotolamento di una certa distanza u proporzionale al raggio. Nei nostri bilanci tutto ciò equivale ad aggiungere un momento aggiuntivo M_u .

Per calcolare la potenza dissipata usiamo il seguente schema:



4 MACCHINE

Il nostro modulo sarà composto da 3 componenti: MOTORE, TRASMISSIONE, UTILIZZATORE. Lavoreremo con 1 grado di libertà.

L'equazione di ripartimento sarà:

$$\begin{aligned}\sum w \cdot \frac{dE}{dt} \\ = w_H + w_T + w_U = \frac{dE_{ch}}{dt} + \frac{dE_{tr}}{dt} + \frac{dE_{ut}}{dt}\end{aligned}$$

4.1 Motori

I motori sono meccanismi che generalmente trasformano dell'energia

in energia meccanica.

$$W_H = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j$$

$$E_C = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum \frac{1}{2} J_j \omega_j^2$$

Proviamo a semplificare le equazioni sopra:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \Lambda_{\theta i} \dot{\theta}$$

$$\vec{\omega}_i = \Lambda_{\theta i} \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow W = \sum F_i \Lambda_{F i} \dot{\theta} + \sum C_j \Lambda_{C j} \dot{\theta}$$

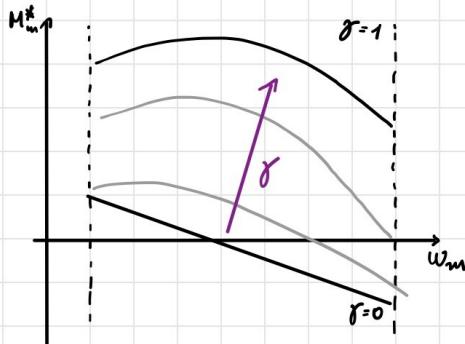
$$= \dot{\theta}_m (\sum F_i \Lambda_{F i} + \sum C_j \Lambda_{C j})$$

$$= M_m^*(\theta) \dot{\theta}_m$$

↑ covariabili d'urto del motore
 momento ridotto all'albero motore

Generalmente, si possibili definire un momento medio equivalente se le irregolarità nel moto sono abbastanza piccole.

In tutti i motori, M_m^* è funzione anche della velocità angolare del motore stesso e di un parametro di input. La M_m^* varia, quindi, una famiglia di curve.

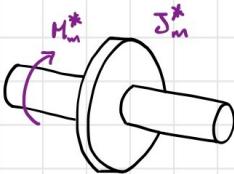


Anche per l'energia cinetica possiamo effettuare delle riduzioni simili:

$$E_C = \frac{1}{2} (\sum m_i \Lambda_{P i}^2 + \sum J_i \Lambda_i^2) \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_m^*(\theta) \omega_m^2$$

Anche per δ^* valgono delle considerazioni analoghe.

Usando le riduzioni, un motore può essere modellato come:



4.2 Uliverratore

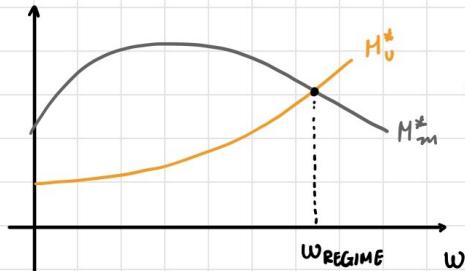
Anche l'uliverratore è generalmente un meccanismo complesso che possiamo ridurre analogamente al motore.

$$\begin{aligned} W_U &= \sum \vec{F}_{U,i} \cdot \vec{v}_i + \sum \vec{C}_{U,s} \cdot \vec{v}_s \\ &= \dots = \vec{M}_U^*(\theta) \vec{\omega}_U \\ &\quad \uparrow \text{covariabile d'ingresso all'albero.} \\ &\quad \text{monundo ridotto} \end{aligned}$$

$$E_c = \dots = \frac{1}{2} J_U^* \omega_U^2$$

4.3 Condizioni di regime

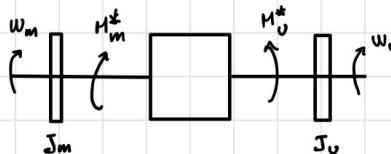
La condizione di regime si ha quando $W_{TOT} = 0$.



\Rightarrow Trascuriamo la trasmissione
in questo esempio.

4.4 La trasmissione

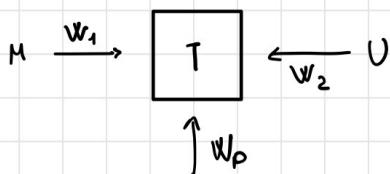
Il compito della trasmissione è quello di adattare il monundo rivolto dal motore a quello dell'uliverratore.



Il rapporto di trasmissione è indicato come

$$\tau = \frac{w_v}{w_m}$$

Poiché la dimensione della trasmissione è trascurabile rispetto a motore e utilizzatore, l'energia circolante è trascurabile. Il lavoro di una trasmissione è sempre negativo. Per modellare le varie perdite di lavoro, si usa il seguente modulo:



$$\begin{aligned} W_1 &= W_m - \frac{dE_{cm}}{dt} \\ &= M_m^* w_m - J_m^* w_m \dot{w}_m \\ W_2 &= W_v - \frac{dE_{cv}}{dt} \end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 + W_p = 0$$

Le 3 possibilità di moto sono:

1. $W_1 > 0, W_2 < 0$: moto dritto
2. $W_1 < 0, W_2 > 0$: moto retrogrado

$$W_1 + W_2 - (1 - \eta_D) W_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta_D W_1 + W_2 = 0$$

$$W_1 + W_2 - (1 - \eta_R) W_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow W_1 + \eta_R W_2 = 0$$

Per definire W_p , dobbiamo introdurre il rendimento della trasmissione:

$$\begin{aligned} W_{out} &= \eta W_{in} \Rightarrow \text{moto dritto: } W_2 = \eta W_1 \rightarrow W_p = -(1 - \eta) W_1 \\ &\Rightarrow \text{moto retrogrado: } W_1 = \eta W_2 \rightarrow W_p = -(1 - \eta) W_2 \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{NON PER FORZA} \quad \text{USUALE}$$

In alcuni casi η può variare in base al tipo di moto.

Riassumendo quello che abbiamo detto:

$$M_m^* w_m + M_v^* w_v + W_p = J_m^* w_m \dot{w}_m + J_v^* w_v + \dot{w}_v$$

Per capire quale formula di w_p usare, bisogna fare un'ipotesi e verificarla.

4.4.1 Trasmissioni in serie

Sotto ipotesi di assenza di massa dell'albero che collega le due trasmissioni, si ha:

$$w_v / w_m = \prod_i^n \tau_i$$

$$\eta = \prod_i^n \eta_i$$

