

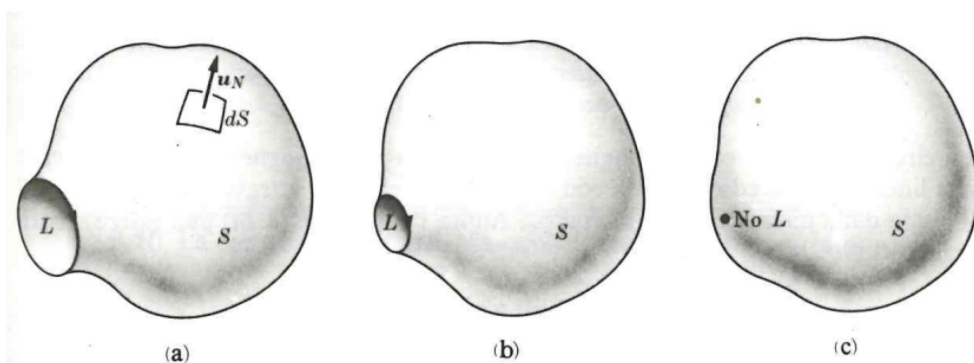
## LEGGE DI AMPÈRE - MAXWELL

Può' essere vista come la legge duale della legge di Faraday - Henry: spiega come un campo elettrico tempo-variante generi un campo magnetico.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{u}_n dS$$

LEGGE DI AMPERE  
(regime stazionario)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[ \int_S \vec{J} \cdot \hat{u}_n dS + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS \right]$$



Le consideriamo la superficie chiusa:  $\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = 0$

$$\oint_L \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\sigma + \epsilon_0 \oint_L \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$$

in condizioni stazionarie,  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{E} = 0 \Rightarrow \oint_L \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$ .  
Da ciò deriva la KCL.

In condizioni non stazionarie  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \neq 0$ , quindi  
 $\oint_L \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\sigma \neq 0$  quindi la KCL non vale più.

EQUAZIONI DI MAXWELL PER IL CAMPO ELETTROMAGNETICO  
(situazione non stazionaria)

$$\oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$$

$$-\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

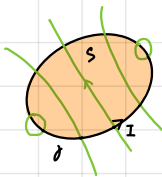
$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \left[ \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\sigma + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma \right]$$

### 13 CIRCUITI MAGNETICI

#### 13.1 AUTO E MUTUA INDUZIONE

Consideriamo una spira:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r^3} d\vec{l}$$

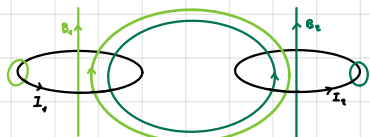


Il flusso autocatenato di  $\vec{B}$  attraverso  $S$  è:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\lambda = \int_S \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r^3} d\vec{l} \right] \cdot \vec{u}_n d\lambda = \\ &= I \int_S \underbrace{\left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r^3} d\vec{l} \right]}_{\substack{\downarrow \\ \text{autoinduttanza } [H]}} \cdot \vec{u}_n d\lambda = L \cdot I \end{aligned}$$

Abbiamo così definito l'autoinduttanza  $L$ . Essa dipende dalla geometria del circuito ed è sempre positivo.  $L > 0 \rightarrow \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  concorde con  $\vec{u}_n$

La mutua induzione è l'estensione dell'autoinduttanza a due o più spire. Consideriamo due spire:



$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2 \\ \Phi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2 \end{cases} \rightarrow L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \rightarrow L_{12} = L_{21} = L_m$$

I coefficienti  $L_{11}, L_{22}$  sono le autoinduttanze;  $L_m$  è la mutua induttanza

La mutua induzione può essere negativa. Il segno dipende dai versi di  $B_1$  e  $B_2$ . La matrice  $L$  sarà  $n \times n$ , dove  $n$  sono le spire coinvolte.

#### 13.2 CIRCUITI MAGNETICI

Applichiamo ciò che abbiamo studiato a materiali ferromagnetici. Consideriamo  $\vec{B}_s$  un campo magnetico generato da sorgenti esterne.  $\vec{B}_s$  genera nel materiale un campo magnetico dato da  $\mu_0 \vec{H}$ . Quindi:

$$\vec{B} = \vec{B}_s + \mu_0 \vec{H}$$

campo di induzione magnetica  $\downarrow$   $L$  campo di magnetizzazione

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{B}_s}{\mu_0} \rightarrow \vec{H} \triangleq \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\vec{B}_s}{\mu_0}$$

$L$  campo magnetico

Per i materiali ferromagnetici lineari vale:

$$\vec{B} = \chi_m \vec{H} \xrightarrow{\text{CHI}} \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

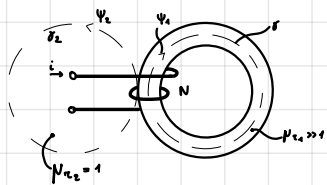
$L$  suscettività magnetica  $L$  permeabilità magnetica relativa

Le unità di misura sono:

$$\begin{aligned} \vec{B} &\rightarrow [T] & \vec{H}, \vec{H} &\rightarrow [A \cdot m^{-1}] \\ \Phi_B &\rightarrow [Wb] = [T \cdot m^2] & \chi_m &\rightarrow [1] \\ \mu &\rightarrow [H \cdot m^{-1}] \end{aligned}$$

Le equazioni di Maxwell in materiali ferromagnetici lineari non cambiano a patto di considerare  $\mu$  al posto di  $\mu_0$

Cerchiamo di stimare la matrice di induttanza di avvolgimenti di conduttori su nuclei di materiale ferr. magn. lineare

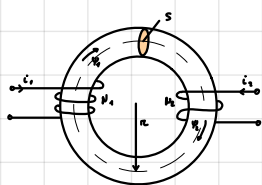


$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N i$$

$$\oint_{\gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong H_1 \gamma_1, \quad \oint_{\gamma_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong H_2 \gamma_2 \rightarrow \vec{B} \text{ e } \vec{H} \text{ sono circa costanti nel nucleo e nell'ambiente}$$

$H_1 \gamma_1 = N i_1 = H_2 \gamma_2 \rightarrow$  se  $\gamma_1 = \gamma_2$   $H_1 = H_2$  e  $B_1 \gg B_2, \Phi_{B_1} \gg \Phi_{B_2}$ . Possiamo quindi approssimare il campo magnetico totale  $\vec{B}$  e il flusso totale  $\Phi_B$  al campo magnetico dentro il ferr. magn.

Consideriamo la situazione qui e calcoliamo  $\Psi$  all'interno del nucleo.

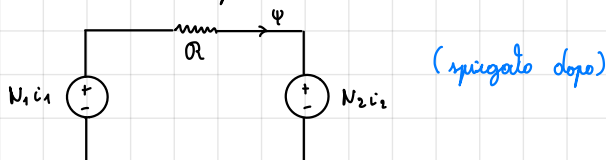


$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS = \mu_r \mu_0 HS$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = HL \Rightarrow \Psi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{L} \cdot (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$

$$\text{Definiamo la riluttanza } R = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S} \Rightarrow \Psi = \frac{N_1}{R} i_1 + \frac{N_2}{R} i_2$$

L'equivalente circuitale della situazione sopra è:



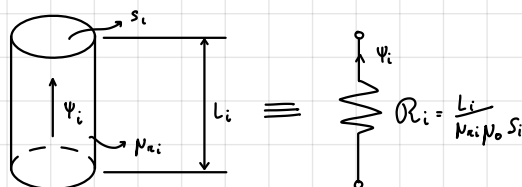
(spiegato dopo)

Calcoliamo i flussi concatenati agli avvolgimenti:

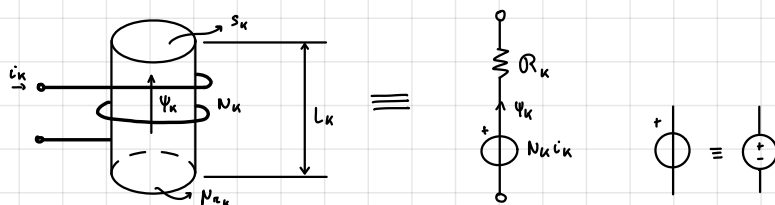
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= N_1 \Psi = \frac{N_1^2}{R} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R} i_2 \\ \Phi_2 &= N_2 \Psi = \frac{N_2 N_1}{R} i_1 + \frac{N_2^2}{R} i_2 \end{aligned} \rightarrow \Phi = L i \Rightarrow L = \begin{bmatrix} \frac{N_1^2}{R} & \frac{N_1 N_2}{R} \\ \frac{N_2 N_1}{R} & \frac{N_2^2}{R} \end{bmatrix} \text{ con } \begin{cases} \frac{N_1^2}{R}, \frac{N_2^2}{R} & \text{autoinduttanza} \\ \frac{N_1 N_2}{R} & \text{mutua induttanza} \end{cases}$$

Definiamo, quindi, i circuiti magnetici come una rete composta da lati formati da:

1) materiali magneticamente passivi  $\rightarrow$  indicati dal simbolo di resistore e caratterizzati da  $R$



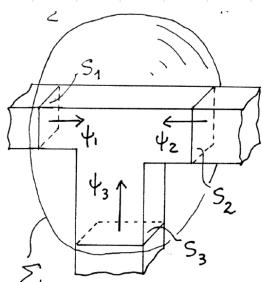
2) elementi magneticamente attivi



Uniamo ad instaurarci le seguenti analogie:

Circuito elettrico	Circuito magnetico
$R$ resistenza	$\mathcal{R}$ riluttanza
$i$ corrente	$\Psi$ flusso
$e$ forza elettromotrice	$Ni$ forza magnetomotrice
$v$ tensione elettrica	$v_H = \mathcal{R}\Psi$ "tensione magnetica"

### 13.3 KCL MAGNETICA



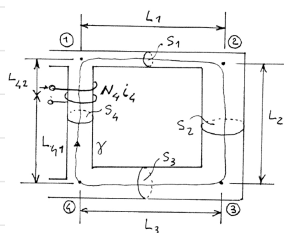
Il punto di connessione di diversi rami del circ. magn. è detto nodo.

Applicando le equazioni di Maxwell otteniamo:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{\nu}_n d\sigma = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^3 B_k S_k = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^n \Psi_k = 0$$

Obteniamo, quindi, che la somma di tutti i flussi magnetici entranti passanti per una superficie è nulla. Abbiamo semplicemente sostituito la corrente con il flusso.

### 13.4 KVL MAGNETICA



Consideriamo la legge di Ampere:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_4 i_4 \quad H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3 + H_4 L_4 + H_4 L_4 = N_4 i_4$$

Considerando gli equivalenti di prima:

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{v_H} \\ \text{---} \mathcal{R} \text{---} \end{array} \quad v_H = \mathcal{R} \Psi = \frac{L}{\mu S} \Psi = \frac{L}{\mu S} N H S = H L$$

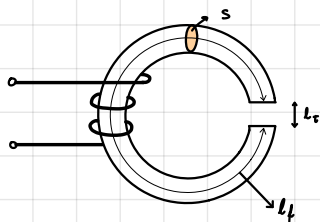
Usando la  $v_H$  trovate:

$$v_{H1} + v_{H2} + v_{H3} + v_{H41} + v_{H42} = N_4 i_4$$

Definiamo con la KVL magnetica come la somma delle cadute di tensione magnetica su di un percorso chiuso è pari alla somma delle forze magnetomotrici presenti sul percorso (prende con opportuno segno).

### 13.5 TRAFERRO

Consideriamo il solito nucleo toroidale ma con un'apertura:



Se  $l_0 \ll \sqrt{S}$ ,  $\Psi$  nel trafeiro è circa uguale alla  $\Psi$  del materiale.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_F + \mathcal{R}_T = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_0 S} \rightarrow \mu_1 \gg 1 \Rightarrow \mathcal{R} \approx \mathcal{R}_T = \frac{l_2}{\mu_0 S}$$

$$L \propto \frac{1}{\mathcal{R}} \quad \text{prop. inversa}$$

Il trafeiro, quindi, ci permette di creare un induttore ad induttanza variabile.