SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

SPAZI VETTORIALI :

- Definizione
- Esempi
- Omomorfismi

SEZIONE 4.1

- Sottospazi
- Operazioni sui sottospazi

SEZIONE 4.2

SPAZI VETTORIALI (DEFINIZIONE 4.1)

V un insieme di elementi $\underline{v}$ detti vettori, $\mathbb{K}$ un campo.

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) & \longmapsto & \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \end{array}$$ operazione interna detta somma

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (t, \underline{v}) & \longmapsto & t \cdot \underline{v} \end{array}$$ operazione esterna detta prodotto per uno scalare

$(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è detto spazio vettoriale se:

(i) $(V, +)$ è un gruppo abeliano, con $\underline{0}$ elemento neutro e $-\underline{v}$ opposto di $\underline{v}$

(ii) $t \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = (t \cdot \underline{v}_1) + (t \cdot \underline{v}_2)$

(iii) $(t_1 + t_2) \cdot \underline{v} = (t_1 \cdot \underline{v}) + (t_2 \cdot \underline{v})$

prop. distributiva

(iv) $t_1 \cdot (t_2 \cdot \underline{v}) = (t_1 \cdot t_2) \cdot \underline{v}$ omogeneità

(v) $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ normalizzazione

ESEMPI 4.2

- $(\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale
- $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$

$+: (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\cdot: t\cdot(a_1, \dots, a_n) = (ta_1, \dots, ta_n)$

$\Rightarrow (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

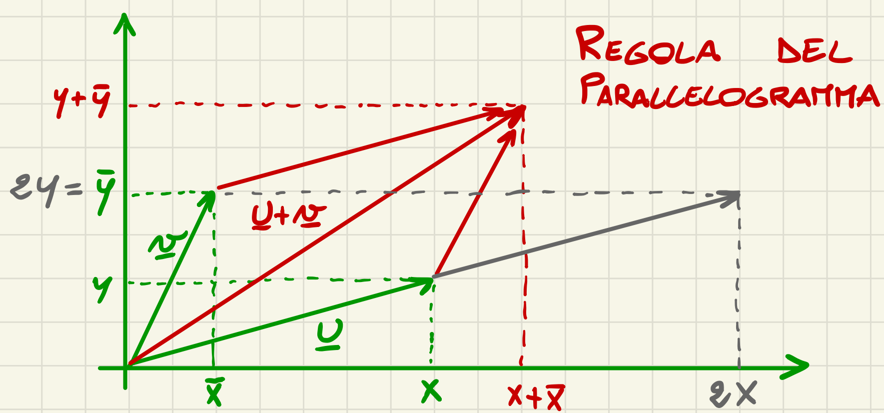
$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$\underline{u} = (x, y)$

$\underline{v} = (\bar{x}, \bar{y})$

$\underline{u} + \underline{v} = (x+\bar{x}, y+\bar{y})$

$2\underline{u} = (2x, 2y)$



- $\mathbb{K}[x] = \{ P(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \}$

$\cdot : \quad t \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (t \cdot a_i) \cdot x^i$

$+ : \quad \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$

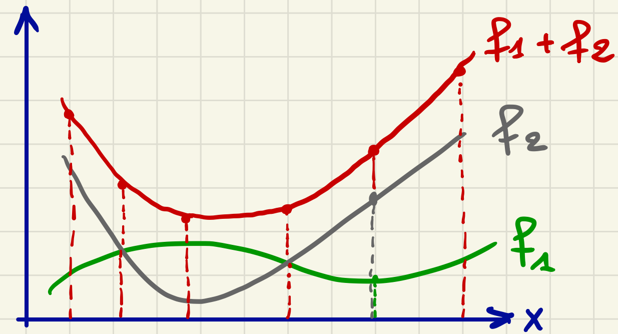
$(1 + x^2) + (-1 + x) = (1 - 1) + (0 + 1)x + (1 + 0)x^2 = x + x^2$

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ \text{funzioni } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

NOTA: una funzione f è nota se conosco $f(x)$ per ogni x

$+ : \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\cdot : \quad (t \cdot f)(x) = t \cdot f(x)$



Proprietà Elementari (Proposizione 4.3)

i) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ se e solo se $\underline{v} = \underline{w}$;

ii) $t \cdot \underline{v} = \underline{0}$ se e solo se $t = 0$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$;

iii) $\underline{0}$ e $-\underline{v}$ sono unici. In particolare $-\underline{v} = -1 \cdot \underline{v}$.

DIM: proviamo iii supponendo vere i e ii.

Sia $\underline{e}$ elemento neutro della somma $\Rightarrow$

$$\underline{v} + \underline{e} = \underline{v} = \underline{v} + \underline{0} \overset{i}{\Longrightarrow} \underline{e} = \underline{0}.$$

Analogo per l'unicità dell'inverso:

$$\underline{v} + (-1 \cdot \underline{v}) \underset{\text{normalizzazione}}{=} (1 \cdot \underline{v}) + (-1 \cdot \underline{v}) \underset{\text{distributiva}}{=} (1-1) \cdot \underline{v} = 0 \cdot \underline{v} \underset{ii}{=} \underline{0}.$$

$\blacksquare$

Gli assiomi di spazio vettoriale sono scelti in modo tale per cui valgono molte delle usuali proprietà algebriche, ma NON possiamo darle per scontate.

Omomorfismi di Spazi Vettoriali (Definizione 4.4)

$(V, \mathbb{K}, +_V, \cdot_V)$, $(W, \mathbb{K}, +_W, \cdot_W)$ due spazi vettoriali.

$f: V \to W$ è un'applicazione lineare se:

i) $f(\underline{v} +_V \underline{\tilde{v}}) = f(\underline{v}) +_W f(\underline{\tilde{v}}) \quad \forall \underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V$;

ii) $f(t \cdot_V \underline{v}) = t \cdot_W f(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V, \forall t \in \mathbb{K}$.

$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f: V \to W \text{ lineari} \}$

Esempi

- $\mathcal{O}: V \to W$, $\underline{v} \mapsto \underline{0}_W$:
  $$\mathcal{O}(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) = \underline{0}_W = \mathcal{O}(\underline{v}) + \mathcal{O}(\underline{\tilde{v}})$$
  $$\mathcal{O}(t \cdot \underline{v}) = \underline{0}_W = t \cdot \mathcal{O}(\underline{v})$$

- $\mathrm{Id}_V: V \to V$, $\underline{v} \mapsto \underline{v}$:
  $$\mathrm{Id}_V(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) = \underline{v} + \underline{\tilde{v}} = \mathrm{Id}_V(\underline{v}) + \mathrm{Id}_V(\underline{\tilde{v}})$$
  $$\mathrm{Id}_V(t \cdot \underline{v}) = t \cdot \underline{v} = t \cdot \mathrm{Id}_V(\underline{v})$$

LEMMA 4.5

$f: V \to W$ è lineare sse $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)$

DIM: ($\Rightarrow$) sia f lineare $\Rightarrow$

$f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = f(t_1\underline{v}_1) + f(t_2\underline{v}_2) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)$;

($\Leftarrow$) sia vero $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)$, allora

f è ovviamente lineare, basta prendere $t_1 = t_2 = 1$ e $t_2 = 0$. $\boxtimes$

ISOMORFISMO (DEFINIZIONE 2.19.)

Un omomorfismo f tra due strutture algebriche è un isomorfismo se è biunivoco e anche f^{-1} è un omomorfismo.

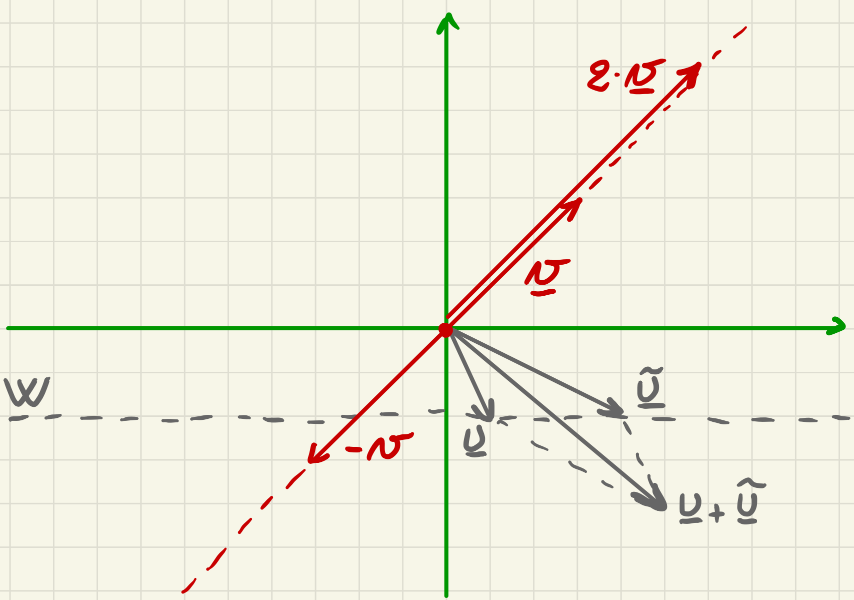
In tal caso le due strutture si dicono isomorfe.

PROPOSIZIONE 4.6

Un'applicazione lineare invertibile è un isomorfismo.

SOTTOSPAZI (DEFINIZIONE 4.9)

$(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ spazio vettoriale con $U \subseteq V$ sottoinsieme.
$(U, \mathbb{K}, +, \cdot)$ si dice sottospazio se è a sua volta uno spazio vettoriale.



$V = \mathbb{R}^2$

$U = \{ \underline{v} = (x, x),\ x \in \mathbb{R} \}$

$\underline{v} + \underline{\tilde{v}} \in U, \quad t \cdot \underline{v} \in U$

$\underline{0} \in U, \quad -\underline{v} \in U$

$W = \{ \underline{v} = (x, -1),\ x \in \mathbb{R} \}$

$\underline{u} + \underline{\tilde{u}} \notin W \quad t \cdot \underline{u} \notin W$

$\underline{0} \notin W, \quad -\underline{u} \notin W$

ESEMPI 4.10

- Sottospazi banali: $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, $(\{\underline{0}\}, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

  $(\{\underline{v}\}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ con $\underline{v} \neq 0$ non è sottospazio perché le due operazioni non sono interne: $\underline{v}+\underline{v} = 2\underline{v} \notin \{\underline{v}\}$.

- $T_a(n;\mathbb{K})$, $T_{sa}(n;\mathbb{K})$, $T_b(n;\mathbb{K})$, $T_{sb}(n;\mathbb{K})$, $D(n;\mathbb{K})$, $S(n;\mathbb{K})$ ed $A(n;\mathbb{K})$ sono sottospazi di $Mat(n,n;\mathbb{K})$.

  $GL(n;\mathbb{K})$ non è sottospazio perché non contiene O_{nn} (elemento neutro $+$).

- $\mathbb{K}[x]_n = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \text{grado}(P) \leq n\}$ è sottospazio di $\mathbb{K}[x]$.

  $\{P(x) \mid \text{grado}(P) = n\}$ non è sottospazio:

  $\text{grado}(1+x) = 1$, ma $\text{grado}(0 \cdot (1+x)) = \text{grado}(0) = 0$.

OSS: in $U \subseteq V$ la proprietà associativa, commutativa, ... sono automaticamente soddisfatte, si dicono ereditate da V.

CARATTERIZZAZIONE DEI SOTTOSPAZI (PROPOSIZIONE 4.11)

$U \subseteq V$ è sottospazio se e solo se:

i) U è chiuso rispetto a $+$;

ii) U è chiuso rispetto a $\cdot$;

iii) $\underline{0}_V \in U$.

DIM: $\Rightarrow$ U sottospazio $\Rightarrow$ per definizione valgono i), ii), iii).

$\Leftarrow$ Se valgono i), ii) dobbiamo solo verificare che

- $\underline{0} \in U$: dato $\underline{u} \in U \Rightarrow \underline{0} = 0 \cdot \underline{u} \in U$ per ii);
- $-\underline{u} \in U$: dato $\underline{u} \in U \Rightarrow -\underline{u} = -1 \cdot \underline{u} \in U$ per ii).

Il ragionamento precedente è valido se esiste almeno un vettore $\underline{u}$ in U. Il punto iii) è equivalente a questa richiesta, cioè $U \neq \emptyset$. $\square$

Proposizione 4.12

$A \in Mat(m,n;\mathbb{K}) \Rightarrow Ker(A)$ è sottospazio di $Mat(n,1;\mathbb{K})$.

Dim: siano $B, C \in Ker(A) \Rightarrow AB=0,\ AC=0 \Rightarrow$

- $A(B+C) = AB + AC = 0 + 0 = 0 \Rightarrow B+C \in Ker(A)$;
- $A(t\cdot B) = t\cdot(AB) = t\cdot 0 = 0 \Rightarrow t\cdot B \in Ker(A)$.
- $A\cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in Ker(A)$. $\boxtimes$

OSS: le soluzioni X di $[A|B]$ con $B \neq 0$ non formano un sottospazio di $Mat(n,1;\mathbb{K})$:

$$\left.\begin{array}{l} AX = B \\ A\tilde{X} = B \end{array}\right\| \Rightarrow \begin{array}{l} A(t\cdot X) = t\cdot(AX) = t\cdot B \neq B \quad \text{se } t \neq 1 \\ A(X+\tilde{X}) = AX + A\tilde{X} = B+B = 2B \neq B \end{array}$$

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni non è chiuso rispetto a $\cdot, +$.

OPERAZIONI SUI SOTTOSPAZI

SOMMA DI SOTTOSPAZI (DEFINIZIONE 4.15)

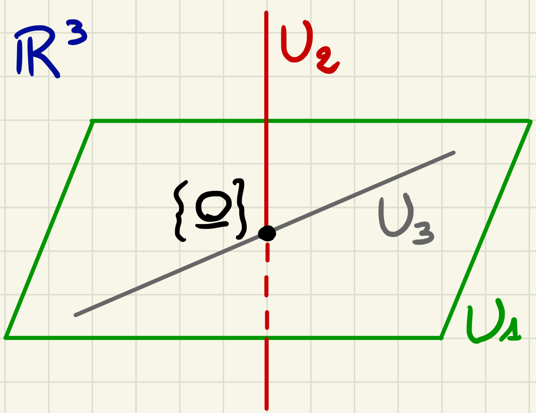
$U_1, U_2 \subseteq V \Rightarrow U_1 + U_2 = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \, , \, \underline{u}_1 \in U_1, \underline{u}_2 \in U_2 \}$.

PROPOSIZIONE 4.16

i) $U_1 \cap U_2$ è sottospazio di V;

ii) $U_1 \cup U_2$ è sottospazio di V sse $U_1 \subseteq U_2$ o $U_2 \subseteq U_1$;

iii) $U_1 + U_2$ è il più piccolo sottospazio di V contenente $U_1 \cup U_2$.



- $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$ $\quad$ $U_1 \cup U_2 \subset U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$
- $U_1 \cap U_3 = U_3$ $\quad$ $U_1 \cup U_3 = U_1 = U_1 + U_3$
- $U_2 \cap U_3 = \{\underline{0}\}$

  $U_2 + U_3 =$ piano contenente $U_2 \cup U_3$
- $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$

Definizione 4.17 : Somma Diretta

$U_1, \dots, U_m \subseteq V$ sottospazi. V si dice somma diretta dei sottospazi

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ se per ogni $\underline{v} \in V$ esiste unica

m-upla $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m) \in U_1 \times \dots \times U_m$ tale che $\underline{v} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_m$.

DECOMPOSIZIONE DI $\underline{v}$

Esempio 4.19

- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & 0 \end{bmatrix}$ in modo unico

$\Rightarrow Mat(n,n;\mathbb{K}) = T_a(n;\mathbb{K}) \oplus T_{sb}(n;\mathbb{K})$;

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+k & b \\ 0 & d+k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 0 \\ c & -k \end{bmatrix}$ per ogni $k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow Mat(n,n;\mathbb{K}) \neq T_a(n;\mathbb{K}) \oplus T_b(n;\mathbb{K})$;

- $Mat(n,n;\mathbb{K}) = S(n;\mathbb{K}) \oplus A(n;\mathbb{K})$.

CARATTERIZZAZIONE SOMMA DIRETTA (PROPOSIZIONE 4.18)

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m \quad (m \geq 2)$ se e solo se:

i) $V = U_1 + \dots + U_m$;

ii) $U_k \cap U_{\hat{k}} = \{\underline{0}\}$ per ogni K, $U_{\hat{k}} = U_1 + \dots + U_{k-1} + U_{k+1} + \dots U_m$.

$V = \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{Q}) \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$U_1 = \mathrm{Ker}(A_1) = \left\{ t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ t_1 \in \mathbb{Q} \right\}, \quad U_2 = \mathrm{Ker}(A_2) = \left\{ t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{Q} \right\} \neq V \ ;$$

$$U_1 \cap U_2 = \mathrm{Ker}\left[\frac{A_1}{A_2} \right] = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{0_{31}\} .$$

Prendiamo $U_3 = \left\{ t_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t_3 \in \mathbb{Q} \right\} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + 2t_2 + t_3 \\ b = -t_2 \\ c = -t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -c \\ t_2 = -b \\ t_3 = a + 2b + c \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la decomposizione è unica $\Rightarrow V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.