TEOREMA 11.10 (riduzione in forma canonica)

Siano $r(A) = r$, $r(C) = q$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori non nulli di A.

Allora esiste $\tilde{\mathcal{B}}_0$ s.r.c.p.o. tale che $\mathcal{Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0}$ è:

i) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 = 0$ se $q = r$;

ii) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 + \tilde{c} = 0$ se $q = r+1$;

iii) $\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 + 2P\tilde{x}_{r+1} = 0$ se $q = r+2$.

DIM: REMIND: $X = Q\tilde{X} + T$ con $Q \in SO(n;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\tilde{A} = Q^T A Q$, $\tilde{B} = Q^T(AT + B)$, $\tilde{c} = T^T A T + 2B^T T + c$

- $A \in S(n;\mathbb{R}) \Rightarrow$ esiste $Q \in SO(n;\mathbb{R})$ t.c.

$$\tilde{A} = Q^T A Q = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix} & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{r,r} \end{array}\right] \Rightarrow \tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r^2$$

dove $r = r(\tilde{A}) = r(A)$.

- $r = r(A) = r([A|B])$: esiste T tale che $AT = -B \Rightarrow$

$AT + B = O_{n1} \Rightarrow \tilde{B} = O_{n1} \Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}_1 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r + \tilde{c} = 0$

$\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{c} \end{array}\right]$ e quindi $q = r(\tilde{C}) = \begin{cases} r & \text{se } \tilde{c} = 0 \\ r+1 & \text{se } \tilde{c} \neq 0 \end{cases}$.

- $r = r(A) < r([A|B])$: bisogna eseguire 4 cambiamenti di coordinate in successione.

i) $X = Q_1 X_1$ t.c. $A_1 = Q_1^T A Q_1 \in \Delta(n;\mathbb{R})$, $B_1 = Q_1^T B$, $c_1 = c$;

ii) $X_1 = X_2 + T_2$ dove $(T_2)_{i1} = \begin{cases} -\dfrac{(B_1)_{i1}}{\lambda_i} & 1 \le i \le r, \\ 0 & r+1 \le i \le n. \end{cases}$

$\Rightarrow A_2 = A_1$, $B_2 = A_1 T_2 + B_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline * \end{array}\right]\!\begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \\ \end{array} \neq O_{n1}$, $c_2 = -\sum_{i=1}^{r} \dfrac{(B_1)_{i1}^2}{\lambda_i} + c_1$.

iii) $B_2 \in U = \{ M \in Mat(n,1;\mathbb{R}) \mid (M)_{i1} = 0 \text{ per } 1 \le i \le r \}$.

$\dim(U) = n - r \Rightarrow$ possiamo costruire una base o.n.p.o. di U

$\left\{ \dfrac{B_2}{\|B_2\|_F}, M_1, \dots, M_{n-r-1} \right\}$ e definire la matrice

$$Q_3 = \left[I_{nr} \;\middle|\; \frac{B_2}{\|B_2\|_F} \;\; M_1 \, \dots \, M_{n-r-1} \right] \in SO(n;\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad X_2 = Q_3 X :$$

$$A_3 = Q_3^T A_2 Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & *^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix} & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & * \end{array}\right] = A_2$$

$$B_3 = Q_3^T B_2 = \left[\begin{array}{c} O_{r1} \\ \hline p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \quad \text{dove} \quad p = \|B_2\|_F > 0, \qquad c_3 = c_2 .$$

iv) $X_3 = X_4 + T_4$ dove $(T_4)_{i1} = \begin{cases} -c_3/2p & i = r+1, \\ 0 & i \neq r+1. \end{cases}$

$\Rightarrow A_4 = A_3 = \tilde{A}$, $\quad B_4 = \cancel{A_3} T_4 + B_3 = B_3 = \tilde{B}$,

$\quad c_4 = T_4^T \cancel{A_3} T_4 + 2 B_3^T T_4 + c_3 = -c_3 + c_3 = 0 = \tilde{c}$.

$\Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}_1 + \dots + \lambda_r \tilde{x}_r + 2p\, \tilde{x}_{r+1} = 0$.

Quindi: • $X = Q_1 X_1 = Q_1 (X_2 + T_2) = Q_1(Q_3 X_3 + T_2) = Q_1(Q_3(\tilde{X} + T_4) + T_2)$

$\Rightarrow X = Q \tilde{X} + T$ dove $Q = Q_1 Q_3 \in SO(n;\mathbb{R})$, $T = Q_1(Q_3 T_4 + T_2)$

• $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow q = r(C) = r(\tilde{C}) = r + 2$.

$\blacksquare$

ESEMPI

- $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$ in $\mathbb{E}^2 \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = 1 \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r(C) = 2 = r(A) \end{cases}$

$Q = I_2 \qquad r([A|B]) = r(A) = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \tilde{x} - 1 \\ y = \tilde{y} \end{cases} \Rightarrow (\tilde{x} - 1)^2 + \tilde{y}^2 + 2\tilde{x} - 2 + 1 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 0$

Ω è costituito dal solo punto $\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0$ ed è un esempio di conica degenere.

Se prendessimo la stessa equazione in $\mathbb{E}^3$?

Avremmo una quadrica degenere "corrispondente" alla retta $x = 1,\ y = 0$.

- $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2y+2z+1=0$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=1 \qquad r(C)=3$

- Autovalori di A: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=0$

Autovettori di A: $\mathcal{B}=\left\{\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix},\ \underline{v}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\ \underline{v}_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow Q_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\in SO(3;\mathbb{R}) \qquad X_1=Q_1X$$

$$A_1=Q_1^TAQ=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad B_1=Q_1^TB=\begin{bmatrix}2/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix},\qquad c_1=c=1.$$

Invarianti Metrici (Definizione 11.8)

- $I_i = (-1)^{n-i} c_{n-i} \qquad 1 \le i \le n$, dove $P_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$;
- $I_{n+1} = |C|$.

$n=2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \underbrace{\overbrace{|A|}^{I_2}}_{c_0} \underbrace{- \overbrace{Tr(A)}^{I_1}}_{c_1} \lambda + \lambda^2$

$n=3$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$P_A(\lambda) = \underbrace{\overbrace{|A|}^{I_3}}_{c_0} \underbrace{- \left(\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}^{I_2} \right)}_{c_1} \lambda \underbrace{+ \overbrace{Tr(A)}^{I_1}}_{c_2} \lambda^2 - \lambda^3$$

OSS: gli invarianti non cambiano a seguito del cambio di coordinate, ma moltiplicando l'equazione di Q per k si ottiene

$I_i' = k^i \cdot I_i \qquad 1 \le i \le n+1$.

Classificazione Curve Coniche (Teorema 11.13)

In $\mathbb{E}^2$ l'equazione di ogni curva conica può essere ridotta ad una ed una sola delle seguenti forme canoniche:

$r(C)$	$r(A)$	I_3	I_2	$I_1 I_3$	*Forma canonica*	*Moduli*	*Nome*
3	2	$\neq 0$	> 0	< 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha, \beta > 0$	*Ellisse con punti reali*
3	2	$\neq 0$	> 0	> 0	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = -1$	$\alpha, \beta > 0$	*Ellisse privo di punti reali*
3	2	$\neq 0$	< 0		$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} - \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha, \beta > 0$	*Iperbole*
3	1	$\neq 0$	$= 0$		$\tilde{x}^2 - 2\rho\tilde{y} = 0$	$\rho > 0$	*Parabola*
2	2	$= 0$	> 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \tilde{y}^2 = 0$	$\alpha > 0$	*Coppia di rette incidenti con un unico punto reale*
2	2	$= 0$	< 0	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} - \tilde{y}^2 = 0$	$\alpha > 0$	*Coppia di rette incidenti con infiniti punti reali*
2	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} = 1$	$\alpha > 0$	*Coppia di rette parallele con infiniti punti reali*
2	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} = -1$	$\alpha > 0$	*Coppia di rette parallele prive di punti reali*
1	1	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\tilde{x}^2 = 0$		*Retta doppia*

DIM: studiamo il primo caso, gli altri sono analoghi.

$r(C) = 3$, $r(A) = 2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{Q}|\tilde{B}_0 : \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 , \\ I_2 = \lambda_1 \lambda_2 , \; I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \tilde{c} \neq 0 \end{cases}$$

Supponiamo $I_2 > 0$ $\Rightarrow$ λ_1, λ_2 concordi in segno $\Rightarrow$

$I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2 \tilde{c} < 0$ implica che $\tilde{c}$ ha segno discorde da λ_1, λ_2 $\Rightarrow$ $\alpha = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_1}}$, $\beta = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_2}} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{x}^2}{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_1}} + \frac{\tilde{y}^2}{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_2}} = 1 \Rightarrow \frac{\tilde{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\beta^2} = 1 \qquad \blacksquare$$

ESEMPIO 11.14

$$\mathcal{Q} : x^2 + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad I_1 = 4 \quad I_2 = 3 \quad I_3 = -4$$

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è un'ellisse $\quad (I_2 > 0,\ I_1 I_3 < 0)$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \tilde{c} = \frac{I_3}{I_2} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - \frac{4}{3} = 0$$

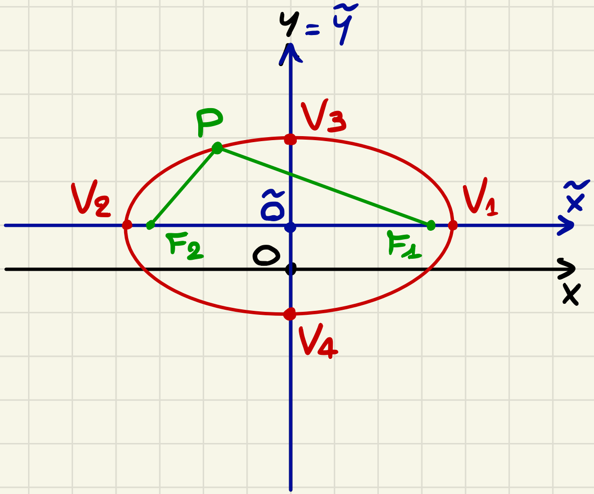
$$\alpha = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \beta = \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_0} : \frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

$$X = Q\tilde{X} + T \qquad Q = I \qquad T : [A|-B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \\ y = \tilde{y} + 1/3 \end{cases} \qquad \frac{\tilde{x}^2}{(2/\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{y}^2}{(2/3)^2} = 1$$

Studiamo le proprietà geometriche dell'ellisse.



- Vertici:

$$V_1|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad V_2|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_3|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \qquad V_4|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

- Fuochi: $\varphi = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{11}/3 \implies$

$$F_1|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{11}/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2|_{\tilde{B}_0} = \begin{bmatrix} -\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{11}/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\alpha = 4/\sqrt{3}$$

- $\tilde{O}$ è centro di simmetria: $\tilde{O}|_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} = T$.
- $\tilde{x}, \tilde{y}$ sono assi di simmetria:

$$r_1|_{B_0}: \; P|_{B_0} = \tilde{O}|_{B_0} + t\, v_1|_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2|_{B_0}: \; P|_{B_0} = \tilde{O}|_{B_0} + t\, v_2|_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovettori di A