

Intorno in n dimensioni

Come visto in algebra, \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma euclidea si definisce:

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0^i)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ϵ come:

$$B(x_0, \epsilon) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \epsilon \right\} \quad (\text{Bolla})$$

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono spiccioli: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Consideriamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Presi un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

- x si dice **INTERNO** ad A se $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset A$
- x si dice **DI FRONTIERA** per A se $\forall \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \epsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- x si dice **ESTERNO** ad A se $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A° . L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A . Le frontiere di A e \bar{A} coincidono.

L'insieme A si dice **aperto** se ogni punto è interno. Se \bar{A} è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice **chiuso** se $\partial A \subseteq A$. Considerando \mathbb{R}^2 , la sua frontiera è \emptyset , quindi è sia aperto che chiuso. Questa cosa vale per \emptyset . L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemni che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In \mathbb{R}^2 bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^n) \text{ è limitato se } \exists x_0 \in \mathbb{R}^2, r > 0 : A \subset B(x_0, r)$$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in \mathbb{R} . Bisogna ora definire quando un insieme è convesso, ovvero fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in \mathbb{R}^n una funzione

$$\begin{aligned} \bar{r} : I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \in I &\mapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo ora dire un insieme convesso come:

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A è convesso per archi se, per ogni coppia di punti \bar{x} e \bar{y} esiste una curva $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = \bar{x}$ e $\bar{r}(b) = \bar{y}$, $r(t) \in A$

Un insieme convesso è convesso per archi, ma non vale il viceversa.

Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con } f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{cases}$$

Obliamo già varie delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| \rightarrow 0 \iff |x_i - x_{0i}| \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ϵ/δ . Ciò ci permetterà di definire il limite di funzioni in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \iff \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = l_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad \text{con } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \underline{l} \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in \mathbb{R}^n avviene, quindi, per coordinate. Se si studiano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ posso studiare anche $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Continuità e derivabilità di funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Consideriamo $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $f \in C(I) \iff f_j \in C(\mathbb{R}) \quad \forall j = 1, \dots, n$
- f è derivabile su I se e solo se sono derivabili tutte le f_j su I

LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Poiché \mathbb{R}^n non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Potrebbe distinguere il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello K di f come

$$I = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K\}.$$

Per distinguere il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (escludere le singole coordinate ponendo le altre pari a zero / costante).

Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazioni. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo rendere. Funzioni di questo tipo sono delle funzioni radiali.

Limite (in) finito per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Dato $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A insieme aperto, definiamo $\underline{l} \in \mathbb{R}^*$ limite di f per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \in A$ se

$$\forall \mathcal{V}(\underline{l}) \exists \mathcal{U}(\underline{x}_0) : \forall \underline{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) \in \mathcal{V}$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad |f(\underline{x}) - \underline{l}| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \rightarrow \forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) > K$

Limite per $(x, y) \rightarrow \infty$

Poiché per dire che il limite esiste la funzione deve avere lo stesso limite su tutte le rette radiali (vedi definizione successionale di limite), parlare di $(x, y) \rightarrow \infty$ si complica la vita. Quando si affrontano i limiti di funzioni all'infinito, si farà riferimento alla norma del vettore (x, y) . Possiamo, allora, dire che:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall K > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > K$$

Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset \mathbb{R}^n, x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

Continuità di funzione reale a più variabili reali

Dato $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Chiamiamo f continua in $x_0 \in A$ se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma/prodotto/quoziente/composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

Proprietà delle funzioni a più variabili continue

- Se $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x \in C$ è un chiuso di \mathbb{R}^m e A è un aperto di \mathbb{R}^n allora $f^{-1}(C)$ è un chiuso in \mathbb{R}^m e $f^{-1}(A)$ è aperto in \mathbb{R}^m !! f^{-1} è la controimmagine, non la funzione inversa !!
- Di conseguenza sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$ (c è un insieme chiuso), allora $f^{-1}(c)$ è anch'esso chiuso. Poiché $f(x, y) = c$ è la definizione di un insieme di livello, per il teorema sopra essi sono chiusi
- Di conseguenza sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, considera $f((0, +\infty))^+$ aperto; per il teorema sopra avremo che la funzione sarà positiva (e con un procedimento analogo negativa) solo su insiemini aperti mentre sarà nulla su insiemini chiusi (vedi considerazione precedente)

Teoremi sulle funzioni continue

- Teorema di Weierstrass: sia $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f continua e D un insieme chiuso e limitato, f avrà un massimo ed un minimo assoluto in D .
- Teorema degli zeri: sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f continua, A connesso per archi; se esiste $x_1 \in A : f(x_1) > 0$ e $x_2 \in A : f(x_2) < 0$ allora esiste $x_0 \in A : f(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE: Considero una curva $\pi(t) : [a, b] \rightarrow A : \pi(a) = x_1 \quad \pi(b) = x_2$ (per definizione di curva π è continua).

Considero $g = f \circ \pi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, g è continua in quanto composizione di funzioni continue. Abbiamo che $g(a) = f(\pi(a)) = f(x_1) > 0$ e $g(b) = f(\pi(b)) = f(x_2) < 0$. Per il Teorema degli zeri in 1 variabile, esiste $t_0 \in [a, b] : g(t_0) = 0$. Quindi $\pi(t_0) = x_0$

- Conseguenza: se $f(x, y)$ è continua, ogni regione connessa per archi individuata dagli zeri è di segno costante. ■

Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per $x \rightarrow x_0$ di f esiste, esso è unico

2. Algebra dei limiti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [+ \infty - \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [0 \cdot \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad [\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}]$
- data $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$
- ' $g: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{w \rightarrow w_0} f(g(w)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3. Teorema del confronto: Siano f, g, h definite da $A \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R} tali che esistono definitivamente per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Allora se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

4. Teorema della permanenza del segno: Sia f continua e sia $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n : f(x_0) > 0$. Allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$.

ESEMPIO: Date $f_1(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_3(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f_4 = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Calcola $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_i(x, y)$.

$$|f_1(x, y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq 1, |y| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$$

$$|f_2(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, |x| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 0$$

$$|f_3(x, y)| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2} \leq 1 \quad \text{Studiando } f_3(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ mentre } f_3(x, 0) = 0. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Al punto $(0,0)$ ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore (cfr: definizione successionale di limite)

$$|f_4(x, y)| = \dots \leq 2 \quad \text{Studiando } f_4(x, -x) = 0, \text{ mentre } f_4(x, x) = \frac{2}{x} \rightarrow \infty. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Passaggio a coordinate reali in \mathbb{R}^2

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho \in (0, +\infty), \theta \in (-\pi; \pi] : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a x e y i corrispondenti. Nota bene: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = l \iff \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}(\rho, \theta) = l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

ESEMPIO: Consideriamo $f_1(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_2(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Calcolare il limite per $x \rightarrow (0,0)$.

$$\tilde{f}_1(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} = \rho \cos \theta \sin \theta \quad ; \quad \tilde{f}_2(\rho, \theta) = \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho} \rightarrow \text{Il limite poiché dipende da } \theta$$

$$|\tilde{f}_1(\rho, \theta)| \leq \rho \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}_1(\rho, \theta) = 0$$

$$\tilde{f}_3(\rho, \theta) = \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

Per $\rho \rightarrow 0$, abbiamo $\tilde{f}_3(\rho, \theta) \sim \rho \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$, quindi avremo un problema per $\cos \theta \rightarrow 0$. Quindi il limite non esiste.

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In \mathbb{R} i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

Derivate parziali

Consideriamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Considerando la definizione di derivabilità otteniamo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ che non ha senso poiché $\frac{h}{t}$ è un vettore. Fixiamo una direzione v , poniamo scrivere $f(x_0 + tv) - f(x_0)$ e calcolare $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$. Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usuali saranno i versori canonici di \mathbb{R}^n .

Se esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = l$, dire che esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = l$. Analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = l$.

Le derivate parziali possono esistere anche se la funzione non è continua.

Derivabilità e gradiente

Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ diciamo che f è derivabile in (x_0, y_0) . Definiamo il vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \nabla f$ il gradiente di f in (x_0, y_0) .

Derivate direzionali

Consideriamo il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv, y_0 + tw) - f(x_0, y_0)}{t}$. Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo $D_v f(x_0, y_0)$ derivata direzionale.

La derivata direzionale può esistere anche se la funzione non è continua.

Funzione differenziabile

In analogia al calcolo unidimensionale, se $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda$, possiamo scrivere che $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \rightarrow 0$. Analogamente in \mathbb{R}^n , possiamo dire che $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto $x_0 \in A$ se $\exists \in \mathbb{R}^n: f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$.

In \mathbb{R} , la definizione di derivabilità e differenziabilità coincidono. In \mathbb{R}^n , però, questo non accade più.

Applicando la definizione di differenziabilità, otteniamo che

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h, k) = o(\sqrt{h^2+k^2}) \Rightarrow \lim_{h, k \rightarrow 0, 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Quello che stiamo facendo è associare una funzione differenziale definita così:

$$\begin{aligned} \text{d} f_{x_0}: \quad & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ & x_0 \mapsto \text{d} f_{x_0}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{differenziale primo}$$

Condizione necessaria di differenziabilità

Sia f differenziabile in $x_0 \in A$. Allora:

- f è continua in $x_0 \in A$
- f è derivabile in $x_0 \in A$ e $\alpha = \nabla f(x_0)$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1 \exists D_v f(x_0) \wedge D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$ (formula del gradiente)

Significato della formula del gradiente

Espandendo l'espressione otteniamo che $D_v f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) v_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) v_2$. Questo significa che tutte le rette tangenti ai grafici delle restrizioni di f a tutte le parallele per. (x_0, y_0) sono tutte congruenti.

Chiamiamo (x, y) il vettore incrementale e $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$, possiamo scrivere che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y-y_0)}_{\text{Piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0, y_0, f(x_0, y_0))} + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

Riprendendo la definizione, abbiamo che:

$$g(x) = \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)}_{\text{con } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g \text{ affine}}$$

Tangente a $f(x_0)$

Conseguenze della differenziabilità

- Significato geometrico del gradiente: $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$ con θ l'angolo formato tra i due vettori. Il gradiente sarà, quindi, la direzione di massima crescita (discesa).

Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in intorno a x_0 e tutte le derivate parziali sono continue in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 .

Se f ha derivate parziali continue su tutto A , allora f è differenziabile su A . Possiamo dire che $f \in C^1(A)$.

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
 f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = g(h) - g(0) + g(0) - f(x_0, y_0) \\
 &\quad \hookrightarrow g(t) : [0, h] \rightarrow \mathbb{R} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0+\theta h, y_0+k) h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0+\eta k) k = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + E_1(h, k) \right) h + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + E_2(k, h) \right) k = \\
 \hookrightarrow \text{Lagrange: } g(h) - g(0) &= g'(0)h \quad \hookrightarrow E_{1,2} \rightarrow 0 \text{ per } (h, k) \rightarrow (0, 0) \\
 \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) k + E_1 h + E_2 k &= \nabla f(x_0, y_0)(h, k) + E(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) + \Theta(\sqrt{h^2+k^2}) \\
 \frac{|E(h, k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} &\leq \frac{|E(h, k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq E_1(h, k) + E_2(k, h) \rightarrow 0 \Rightarrow E(h, k) = \Theta(\sqrt{h^2+k^2}) \\
 (\text{affinché } E(h, k) &= \Theta(\sqrt{h^2+k^2})) \quad \nearrow
 \end{aligned}$$

Differenziabilità di funzioni composte

($g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in x_0 e g derivabile (o differenziabile) in $y_0 = f(x_0)$, allora $h: g \circ f$ è differenziabile in x_0 e $\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 = g(t_0)$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile (o differenziabile) in t_0 , allora $h: f \circ g$ è derivabile (o differenziabile) in t_0 e $h'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$

Gradiente e vettore tangente

La seconda ha un significato intuizionale se prengiamo $g = \pi$ con π un arco di curva continuo e differenziabile. Il vettore $\mathbf{T} = \frac{\pi'(t)}{\|\pi'(t)\|}$ è il vettore tangente alla curva in t .

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia π una sua curva di livello con π' derivabile, $\pi'(t) = 0$. Se f è differenziabile in $x_0 \in \pi(I)$, allora $\nabla f(x_0)$ è ortogonale alla curva in $x_0 = \pi(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE: $h(t) = f(\pi(t))$ su $\pi(I)$ è costante, quindi h è costante $\forall t \in I$. Segue che $h'(t_0) = 0 = \nabla f(\pi(t_0)) \cdot \pi'(t_0) \Rightarrow \nabla f(\pi(t_0)) \perp \pi'(t_0) \quad (\parallel \mathbf{T}(t_0))$

Teorema della media

Sia f differenziabile su A , Allora $\forall x_1, x_2 \in A \quad \exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$ tale che $f(x_1) - f(x_2) = \nabla f(\tilde{x})(x_2 - x_1)$

PRELIMINARE: l'espressione di una retta passante per due punti è $\pi(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Per ottenere un seguendo, scriviamo $\pi(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ con $\lambda \in [0, 1]$

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo $f(x_2) - f(x_1)$: scriviamo $\pi(t) = x = x_1 + t(x_2 - x_1)$ e consideriamo $h(t) = f(\pi(t))$. Scriviamo che $h(0) = f(x_1)$ e $h(1) = f(x_2)$. Notiamo che h risulta le ipotesi del Teorema di Lagrange. Allorciamo così che $h(1) - h(0) = h'(0) = f(x_2) - f(x_1)$. Come visto prima, abbiamo $h'(0) = \nabla f(x_1 + \Theta(x_2 - x_1)) \pi'(0)$. Siccome $\pi' = x_2 - x_1$, ottieniamo che $f(x_2) - f(x_1) = \nabla f(\tilde{x})(x_2 - x_1)$.

Differenziazione di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Diciamo che $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in A$ se f_3 è differenziabile.

Sezione ogni f_3 avrà un $\nabla f_3(x_0)$, definiamo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_0) \end{bmatrix} = J_f(x_0) \rightarrow \text{Matrice Jacobiana di } f \text{ valutata in } x_0$$

Il determinante $|J_{f(x_0)}|$ viene chiamato Jacobiano di f in x_0 .

Se f è differenziabile su A , è possibile definire

$$\begin{aligned} J_f(x) &: A \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, n, m) \\ x_0 &\mapsto J_{f(x_0)} \end{aligned}$$

Come sarà fatto $f(x_0+h) - f(x_0)$? Sappiamo che $f(x_0+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h$, quindi l'incremento di f lo poniamo scrivere riga per riga:

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \cdot h \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \cdot h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix} \cdot h = J_{f(x_0)} \cdot h$$

Differenziabilità di funzioni composte per $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Siamo $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: f(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, f differenziabile in $x_0 \in A$, g differenziabile in $y_0 = f(x_0)$. Della $h = g \circ f$ $h: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, h è differenziabile in x_0 e $J_h(x_0) = J_g(y_0) \cdot J_f(x_0)$

Teorema di Fermat

Diciamo che $x_0 \in A$ è un punto di massimo (minimo) locale per f se $\exists r > 0 : \forall x \in B(x_0, r) \cap A \quad f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).
Se al posto di $\leq (>)$ consideriamo $< (>)$ avremo un punto di massimo locale forte.

Possiamo adesso estendere il Teorema di Fermat: sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile (derivabile) in $x_0 \in A$; se x_0 è un punto di massimo (minimo) locale, si ha $\nabla f(x_0) = 0$

Chiamiamo un punto $x_0 \in A$: $\nabla f(x_0) = 0$ punto stazionario. Nota bene: un punto può essere di massimo (minimo) locale anche senza essere punto stazionario.

Poiché in \mathbb{R}^n perdiamo il concetto di crescente/decrecente, ci serve un altro modo per trovare i punti di max/min locale. Dal polinomio di Taylor possiamo dire che: data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 ; se f'' è la prima derivata non nulla in x_0 allora: se n è dispari x_0 non è stazionario; se n è pari e $f''(x_0) > 0$ è minimo, se $f''(x_0) < 0$ è massimo.
Possiamo quindi usare le derivate di ordine superiore per studiare massimi e minimi locali.

Derivata di ordine superiore

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile su A . Chiamiamo derivata seconda di f :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$$

Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avremo n^2 derivate seconde.

Teorema di Schwarz

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in A ; se $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ e la $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$ sono funzioni continue in $x_0 \in A$ allora $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0)$

Differenziabilità di ordine superiore

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile su A . Dico che f è differenziabile 2 volte in $x_0 \in A$ se la funzione $\nabla f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $x_0 \Rightarrow \forall i=1, \dots, n \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$ è differenziabile

Applicando la condizione sufficiente di differenziabilità, possiamo dire che se $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ sono continue, allora $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$ è differenziabile. In questo caso diciamo che $f \in C^2(\mathbb{R})$. Per il teorema di Schwarz, le derivate sono anche simmetriche.

Matrice Hermitiana

In \mathbb{R}^2 , definiamo matrice Hermitiana di f in x_0, y_0 la seguente matrice:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{bmatrix}$$

Se $f \in C^2$, allora $H_f(x_0, y_0) \in \mathcal{S}(2; \mathbb{R})$

Differenziale secondo

Sia $f \in C^2(A)$, chiamiamo differenziale secondo di f in $x_0 \in A$ la funzione:

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che } d^2 f(x_0)(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) h_i h_j$$

Studiando il caso per $n=2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0, y_0)(h, K) &= \dots = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) h K + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0) K^2}_{P_h(h, K)} \\ P_h(h, K) &= ah^2 + 2bhK + cK^2 \\ &= [h \ K] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Epondendoci su \mathbb{R}^n otteniamo

$$d^2 f(x_0)(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) h_i h_j = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h^T H_f(x_0) h \Rightarrow \text{polinomio di secondo grado omogeneo}$$

Possiamo, quindi, dire che $d^2 f(x_0)$ è una forma quadratica su \mathbb{R}^n .

Formula di Taylor del 2° ordine per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $f \in C^2(A)$, A aperto, e sia $x_0 \in A$, allora

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) + o(\|h\|^2)$$

avrà la formula di Taylor del 2° ordine con resto di Peano. Invece:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta h)(h)$$

avrà la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Lagrange.

Forme quadratiche

Definiamo forma quadraticha il polinomio ottenuto da: $q(h) = h^T M h$. ($M \in \mathcal{S}(n; \mathbb{R})$)

Dada $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma quadraticha, dico che q è definita:

- **positiva (negativa)** se $q(h) > 0$ (< 0) $\forall h \neq 0$;
- **semipositiva (seminegativa)** se $q(h) \geq 0$ (≤ 0) $\forall h \neq 0 \wedge \exists h \neq 0 : q(h) = 0$
- **indefinita** se $\exists h, K : q(h) > 0 \wedge q(K) < 0$

In \mathbb{R}^2 , per studiare il segno di una forma quadraticha studiamo il determinante di M

- se $|M| > 0$ q è definita positiva se $a > 0$, negativa se $a < 0$
- se $|M| = 0$ q è semidefinita
- se $|M| < 0$ q è indefinita

In \mathbb{R}^n , invece, data M_K la sottomatrice quadrata di nord-ovest, diciamo che:

- se $|M_{kk}| > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ è definita positiva
- se $(-1)^k |M_{kk}| > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ è definita negativa

Esiste un metodo più veloce usando gli autovetori/autovettori

$$q(b) = b^T M_K b = b^T S \Lambda S^T b = \tilde{b}^T \Lambda K = \tilde{q}(K)$$

\hookrightarrow diagonalizzabile poiché simmetrica

$$\tilde{q}(K) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i^2 \Rightarrow \tilde{q}(K) > 0 \quad \forall K \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

$$\tilde{q}(K) < 0 \quad \forall K \Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad \forall i$$

$$\exists \lambda_i = 0 \Rightarrow q(K) = 0 \text{ anche per } K \neq 0$$

Possiamo quindi dire che:

- se gli autovetori di M sono tutti positivi la forma è definita positiva
- se gli autovetori di M sono tutti negativi la forma è definita negativa
- se un autovettore è nullo e gli altri sono positivi allora la forma è semidefinita positiva
- se un autovettore è nullo e gli altri sono negativi allora la forma è semidefinita negativa
- se gli autovetori di M hanno segno misto allora la forma è indefinita.

Enunciamo il seguente teorema: sia q definita positiva, allora $q(b) \geq \lambda_{\min} \|b\|^2$; sia q definita negativa, allora $q(b) \leq \lambda_{\max} \|b\|^2$.

DIMOSTRAZIONE: $q(b) = \tilde{q}(K) \geq \lambda_{\min} \|K\|^2 = \lambda_{\min} \|b\|^2$ poiché il cambio di base è un'isometria ■

Massimi e minimi locali per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sia A aperto, $f \in C^2(A)$ e $x_0 \in A$ punto stazionario. Allora se $d^2 f(x_0)$ è una forma quadratica

- definita positiva (negativa) allora x_0 è un punto di minimo (massimo) locale;
- indefinita x_0 non è né max né min locale
- semidefinita non posso trovare conclusioni finché per il fatto che se c'è un estremante deve essere minimo se è semidefinita positiva e massimo se è semidefinita negativa.

DIMOSTRAZIONE Scriviamo il polinomio di Taylor: $f(x_0 + h) - f(x_0) = d^2 f(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^3 f(x_0)(h) + o(\|h\|^3) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) + o(\|h\|^2)$

Supponiamo $d^2 f(x_0)(h)$:

- definita positiva: $\frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) \geq \frac{1}{2} \lambda_m \|h\|^2 + o(\|h\|^2) = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \lambda_m + o(1) \right)$ quindi $\exists \delta > 0: \|h\| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} \lambda_m + o(1) > 0$. Quindi per $h \in B(0, \delta)$ $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ ($= 0$ solo se $h = 0$)
- definita negativa: $\frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) \leq \frac{1}{2} \lambda_M \|h\|^2 + o(\|h\|^2) < 0$ definitivamente per $h \neq 0$

Se $d^2 f(x_0)(h)$ è indefinito, allora $\exists v, w, \|v\| = \|w\| = 1: d^2 f(x_0)(v) > 0 \neq d^2 f(x_0)(w) < 0$. Allora $f(x_0 + t v) - f(x_0) - \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(t v) + o(\|tv\|^2) = \frac{1}{2} t^2 d^2 f(x_0)(v) + o(t^2) = t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f(x_0)(v) + o(1) \right)$ per $t \rightarrow 0$, quindi $\exists \delta > 0: 0 < |t| < \delta \Rightarrow f(x_0 + tv) > f(x_0)$. Possiamo scrivere la stessa cosa per w : $f(x_0 + t w) - f(x_0) = t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f(x_0)(w) + o(1) \right)$ per $t \rightarrow 0$, quindi $\exists \eta > 0: 0 < |t| < \eta \Rightarrow f(x_0 + tw) < f(x_0)$. Quindi per $|t| < \min\{\delta, \eta\} = r$ in $B(x_0, r)$ $f(x_0 + t v) > f(x_0)$ e $f(x_0 + t w) < f(x_0)$. ■

Studio di massimi e minimi vincolati

Il vincolo Ω sarà l'insieme di punti $\{(x, y): g(x, y) = 0\}$. $g(x, y) = 0$ è la curva di livello o della funzione g . Il vincolo potrà anche essere una regione di spazio $\Omega = \{(x, y): g(x, y) \leq 0\}$

Espresso un vincolo (una curva o una regione), dico che x_0 è massimo vincolato per f rispetto al vincolo Ω se è punto di massimo locale o globale per la funzione restituita a quel vincolo. Quelogo vale per i minimi.

ESEMPIO $f(x,y) = x+y$ su $C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

Guardo in C ∇f : $\nabla f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ \exists max/min per $x^2 + y^2 < 1$. Per $\nabla f = 0$ consideriamo, però, due max/min assoluti per f/c . Poiché sulla regione non abbiamo candidati, saremo per forza sulla frontiera $SC = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Parametrizziamo SC : $\{x = \cos t, y = \sin t\}$ e sostituiamo la parametrizzazione: $f(t) = f(x(t), y(t)) = \cos t + \sin t$. Studiamo i punti stazionari di f : $f'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$. Abbiamo, quindi, due candidati: $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$; $f(\frac{5\pi}{4}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ e avremo che $M = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ è massimo assoluto su C e $m = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ è minimo assoluto su C .

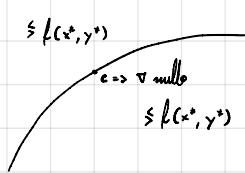
Parametrizzare il vincolo come nell'esempio non sempre è facile anche se era una bella curva. Servono, allora, strumenti un po' più raffinati.

Metodo moltiplicativo di Lagrange (Condizione necessaria per punti estremanti su un vincolo)

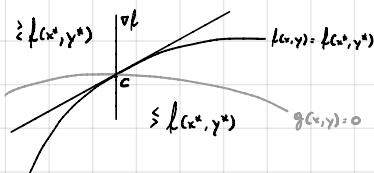
Sia $f \in C^2(A)$ $A \subset \mathbb{R}^2$, sia $g \in C^2(A)$ la funzione che definisce il vincolo tramite $g(x, y) = 0$. Se (x^*, y^*) è un punto di massimo o di minimo locale per f rispetto al vincolo $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$, allora $\exists \lambda: \nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$. λ è chiamato moltiplicatore di Lagrange.

Studiamo il significato del teorema. Consideriamo la curva di livello $f(x, y) = f(x^*, y^*)$ e c un punto di max/min locale.

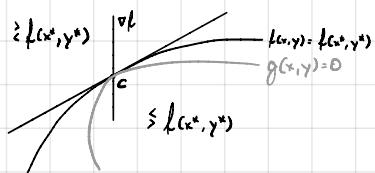
Avremo le seguenti situazioni:



caso ipotesi!

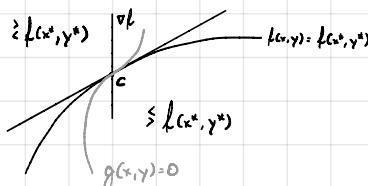


impossibile se c è max/min locale.



Le due curve, quindi, hanno la stessa tangente in c

Se le due curve condividono la tangente, allora il loro gradiente sarà parallelo. La condizione, però, non è sufficiente poiché la seguente situazione:



è possibile in quanto non è detto che se curva di livello e vincolo hanno la stessa tangente la prima non attraversi la seconda.

Definiamo $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ chiamata lagrangiana. Notiamo che (x^*, y^*) è punto critico se e solo se $\exists \lambda^*: \nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$. Questo significa che:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Il gradiente della lagrangiana ci permette, quindi, di riscrivere il teorema sopra in modo compatto.