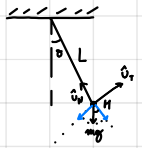
...

4.7 PENDOLO SEMPLICE

Un pendolo semplice è una massa appesa a una fune ideale attaccata al soffitto. L'attrito dell'aria non viene considerato.
La traiettoria è un arco di circonferenza, viene quindi modellato bene dal moto circolare. Come si vedrà nella nota m, ci limitiamo allo studio di piccole oscillazioni.



$$\begin{aligned}\hat{u}_T: &\begin{cases} -mg\sin\theta(t) = -m\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = -m\,a(t) \\ T - mg\cos\theta(t) = m\dfrac{ds(t)}{dt}^2\cdot\dfrac{1}{L} = m\dfrac{v(t)^2}{L}\end{cases}\\ \hat{u}_N: &\end{aligned}$$

$s(t) = L\theta(t)$

$$\begin{cases} -\cancel{m}g\sin\theta(t) = \cancel{m}L\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} \to \dfrac{d^2\theta(t)}{dt} + \dfrac{g}{L}\sin\theta(t) = 0 \xrightarrow{T'} \dfrac{d^2\theta(t)}{dt} + \dfrac{g}{L}\theta(t) = 0 \xrightarrow{M.A.} \theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t + \varphi\right) \\ T - mg\cos\theta(t) = m\dfrac{L^{\cancel{2}}}{\cancel{L}}\dfrac{d\theta(t)}{dt}^2 = mL\dfrac{d\theta(t)}{dt}\end{cases}$$

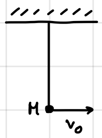
Non risolvibile analiticamente → approssimiamo con Taylor in $\theta(t) \to 0$ (piccole oscillazioni)

Sapendo che $\theta(0) = 0$, $\omega(0) = 0$:

$$\begin{cases}\theta_0 = A\sin(\varphi) \\ 0 = A\sqrt{\dfrac{g}{L}}\cos(\varphi)\end{cases} \quad \begin{cases} A = \theta_0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \longrightarrow \theta(t) = \theta_0\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right)$$

$\hookrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

ESERCIZIO



v min affinché faccia il giro

$T - mg\cos\theta(t) = L\dfrac{d\theta}{dt}^2 m = m\dfrac{v^2}{L}$

$T \geq 0 \to T = \cancel{m}\dfrac{v^2}{L} + \cancel{m}g\cos(\theta(t)) \geq 0$ $\qquad v^2 \geq -gL\cos\theta(t) \xrightarrow{\theta(t)=\pi} \underline{\underline{v \geq \sqrt{gl}}}$

(la fune non può cadere)

5 LAVORO ED ENERGIA

5.1 LAVORO

Se su un punto m. è applicata $\vec{F}$ ed esso si sposta di $d\vec{r}$, si dice lavoro infinitesimo: $dL = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Se:
- $dL > 0$, esso si dice motore $(\theta < \frac{\pi}{2})$
- $dL = 0$, esso si dice nullo $(\theta = \frac{\pi}{2})$
- $dL < 0$, esso si dice resistente $(\theta > \frac{\pi}{2})$

Studiamo le componenti $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_T\hat{u}_T + F_N\hat{u}_N)\cdot ds\,\vec{u}_T = (F_T\,\hat{u}_T\cdot\hat{u}_T + \cancel{F_N\hat{u}_N\cdot\hat{u}_T})\cdot ds = F_T\,ds$$

Si può vedere che conta solo la componente tangente al moto della forza

Se consideriamo un percorso γ da A a B possiamo definire il lavoro come: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A\gamma}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma}^{B}F_x\,dx + \int_{A\gamma}^{B}F_y\,dy + \int_{A\gamma}^{B}F_z\,dz$
L'unità di misura è il Joule ($[J] = [M][L]^2[T]^{-2}$)

Se su un punto materiale agiscono più forze, il lavoro totale è la somma dei lavori delle singole forze:

$$dL = \vec{F}_1\,d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n\,d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_N)\,d\vec{r} = \vec{F}_R\,d\vec{r}$$

5.2 POTENZA

Si definisce potenza come:

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v} \qquad [W] = [\text{Lavoro}][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-3}$$