Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0,\varepsilon) = \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\varepsilon\}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall\,\varepsilon>0 \quad B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \wedge B(x,\varepsilon)\cap\bar{A}\neq\emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset\bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A\subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A\subseteq\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) è limitato se $\exists\, x_0\in\mathbb{R}^2,\ \rho>0 : A\subseteq B(x_0,\rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$. Bisogna ora definire quando un insieme è convesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$r: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n \qquad r(t)\mapsto\begin{bmatrix} r_1(t)\\ \vdots\\ r_n(t)\end{bmatrix} \quad t\in I$$

Possiamo ora dire un insieme convesso come:

Preso $A\subseteq\mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r}:[a;b]\to\mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a)=x$ e $\bar{r}(b)=y$, $r(t)\subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\underline{x}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con } f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\overline{x}) \end{cases}$$

Abbiamo già visto delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

$$\| \bar{x} - \bar{x}_0 \| \rightarrow 0 \iff | x^i - x_0^i | \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ε / δ. Ciò ci permetterà di definire il limite di funzione in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} \iff \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_J(\underline{x}) = \ell_J \quad \forall J = 1, 2, \dots, m \qquad \text{con } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ e } \ell \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in $\mathbb{R}^n$ avviene, quindi, per coordinate. Se so studiare $f^J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ posso studiare anche $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Continuità e derivabilità di funzioni $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Consideriamo $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora $f_J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $\underline{f} \in \mathcal{C}(I) \iff f_J \in \mathcal{C}(I) \quad \forall J = 1, \dots, n$
- $\underline{f}$ è derivabile su I se e solo se sono derivabili tutte le f_J su I

LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Poiché disegnare il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello K di f come $I = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K \}$.

Per disegnare il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (isolare le singole coordinate ponendo le altre pari a zero/costante).
Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazione. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo ruotare. Funzioni di questo tipo sono dette funzioni radiali.

Limite (in)finito per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A insieme aperto, definiamo $\ell \in \mathbb{R}^*$ limite di f per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \in A$ se

$$\forall V(\ell) \; \exists U(\underline{x}_0) : \; \forall x \in U \setminus \{\underline{x}_0\} \; f(\underline{x}) \in V$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \; | f(\underline{x}) - \ell | < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \rightarrow \forall K > 0 \; \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \; f(\underline{x}) > K$

Limite per $(x,y) \to \infty$

Poiché per dire che il limite esiste la funzione deve avere lo stesso limite su tutte le restrizioni (vedi definizione successionale di limite), parlare di $(x,y) \to \infty$ si complica la vita. Quando si affrontano i limiti di funzioni all'infinito, si farà riferimento alla norma del vettore (x,y). Possiamo, allora, dire che:

$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\underline{x}\| > R \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$

$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} f(\underline{x}) = +\infty$ se $\forall K > 0 \ \exists R > 0 : \forall \underline{x} \in \mathbb{R} \quad \|\underline{x}\| > R \Rightarrow |f(\underline{x})| > K$

Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\} \ \underline{x}_n \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \ \underline{x}_n \neq \underline{x}_0 : \lim_{n \to +\infty} \underline{x}_n = x_0 \quad \text{si ha} \quad \lim_{n \to +\infty} f(\underline{x}_n) = l$$

Continuità di funzioni reali a più variabili reali

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Chiamiamo f continua in $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$.

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma / prodotto / quoziente / composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

Proprietà delle funzioni a più variabili continue

- Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e se C è un chiuso di $\mathbb{R}^m$ e A è un aperto di $\mathbb{R}^m$ allora $f^{-1}(C)$ è un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$!! f^{-1} è la controimmagine, non la funzione inversa !!
  - Di conseguenza sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$ (è un insieme chiuso), allora $f^{-1}(c)$ è anch'esso chiuso. Poiché $f(x,y) = c$ è la definizione di un insieme di livello, per il teorema sopra essi sono chiusi
  - Di conseguenza sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, considero $f((0,+\infty))^{-1}$ aperto; per il teorema sopra avremo che la funzione sarà positiva (e con un procedimento analogo negativa) solo su insiemi aperti mentre sarà nulla su insiemi chiusi (vedi considerazione precedente)

Teoremi sulle funzioni continue

- Teorema di Weierstrass: sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua e D un insieme chiuso e limitato, f avrà un massimo ed un minimo assoluti in D.
- Teorema degli zeri: sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua, A connesso per archi; se esiste $\underline{x}_1 \in A : f(\underline{x}_1) > 0$ e $\underline{x}_2 \in A : f(\underline{x}_2) < 0$ allora esiste $\underline{x}_0 \in A : f(\underline{x}_0) = 0$

  DIMOSTRAZIONE: Considero una curva $\underline{r}(t)$ $\underline{r} : [a,b] \to A$: $\underline{r}(a) = \underline{x}_1$ e $\underline{r}(b) = \underline{x}_2$ (per definizione di curva $\underline{r}$ è continua).
  Considero $g = f \circ \underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$, g è continua in quanto composizione di funzioni continue. Abbiamo che $g(a) = f(\underline{r}(a)) = f(\underline{x}_1) < 0$ e $g(b) = f(\underline{r}(b)) = f(\underline{x}_2) > 0$. Per il teorema degli zeri in 1 variabile, esiste $g(t_0) = f(\underline{r}(t_0)) = 0$. Quindi $\underline{r}(t_0) = \underline{x}_0$
  - Conseguenza: se $f(x,y)$ è continua, ogni regione connessa per archi individuata dagli zeri è di segno costante. ■

Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di f esiste, esso è unico
2. Algebra dei limiti:
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f + g = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f + \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g \qquad [+\infty - \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \cdot g = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \cdot \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g \qquad [0 \cdot \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \qquad [\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}]$
   - data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(f(\underline{x})) = \lim_{t \to t_0} g(t)$
     / $g : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{w} \to \underline{w}_0} f(g(\underline{w})) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$
3. Teorema del confronto: siano f, g e h definite da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tali che almeno definitivamente per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ $f(\underline{x}) \le g(\underline{x}) \le h(\underline{x})$.
   Allora se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ e $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} h(\underline{x}) = l$ con $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = l$
4. Teorema della permanenza del segno: Sia f continua e sia $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n : f(\underline{x}_0) > 0$. Allora $\exists \delta > 0 : f(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$.

ESEMPI: Date $f_1(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $f_2(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $f_3(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ $f_4=\frac{x+y}{x^2+y^2}$. Calcola $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$.

$|f_1(x,y)|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\le 1\cdot|y|\to 0 \overset{CFR.}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)=0$

$|f_2(x,y)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1\cdot|x|\to 0 \overset{CFR.}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)=0$

$|f_3(x,y)|=\frac{|y||y|}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}\le 1$ Studiando $f_3(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$, mentre $f_3(x,0)=0$. Il limite, quindi, non esiste.

Al punto $(0,0)$ ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore (cfr: definizione successionale di limite)

$|f_4(x,y)|=\dots\le 2$ Studiando $f_4(x,-x)=0$, mentre $f_4(x,x)=\frac{2}{x}\to+\infty$. Il limite, quindi, non esiste.

Passaggio a coordinate reali in $\mathbb{R}^2$

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho\in(0;+\infty),\ \theta\in(-\pi;\pi] \ : \ \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a x e a y i corrispettivi. Nota bene: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l \iff \lim_{\rho\to 0}\tilde{f}(\rho,\theta)=l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

ESEMPI: Consideriamo $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_2(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_3(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Calcolare il limite per $\underline{x}\to(0,0)$

$\tilde{f}(\rho,\theta)=\frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho}}=\rho\cos\theta\sin\theta$

$|\tilde{f}(\rho,\theta)|\le\rho\to 0 \overset{CFR}{\Longrightarrow} \lim_{\rho\to 0}\tilde{f}(\rho,\theta)=0$

$\tilde{f}_2(\rho,\theta)=\frac{\cancel{\rho}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cancel{\rho}}\to \nexists\lim$ perché dipende da θ

$$\tilde{f}_3(\rho,\theta)=\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta}=\rho\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

Per $\rho\to 0$, abbiamo $\tilde{f}_3(\rho,\theta)\sim\rho\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, quindi avremo un problema per $\cos\theta\to 0$. Quindi il limite non esiste

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In $\mathbb{R}$ i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

Derivate parziali

Consideriamo $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Considerando la definizione di derivabilità otteniamo $\lim_{\underline{h}\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)}{\underline{h}}$ che non ha senso poiché $\underline{h}$ è un vettore. Fissiamo una direzione $\underline{v}$, possiamo scrivere $f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)$ e calcolare $\lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$. Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usate saranno i versori canonici di $\mathbb{R}^2$

Se esiste finito $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=l_1$ dirò che esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=l_1$. Analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=l_2$

Le derivabili parziali possono esistere anche se la funzione non è continua.

Derivabilità e gradiente

Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ diciamo che f è derivabile in (x_0,y_0). Definiamo il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\nabla f$ il gradiente di f in (x_0,y_0)

Derivata direzionale

Consideriamo il limite $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$. Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo $D_{\underline{v}}f(x_0,y_0)$ derivata direzionale.

La derivata direzionale può esistere anche se la funzione non è continua.

Funzione differenziabile

In analisi 1 abbiamo visto che $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda$. Possiamo, quindi scrivere che $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$. Andando in $\mathbb{R}^n$, possiamo dire che $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists\, \underline{a} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(\|h\|)$ per $\underline{h} \to \underline{0}$.

In $\mathbb{R}$, la definizione di derivabilità e differenziabilità coincidevano. In $\mathbb{R}^n$, però, questo non accade più.

Applicando la definizione di differenziabilità, otteniamo che

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(h,k) = o(\sqrt{h^2+k^2}) \Rightarrow \lim_{h,k \to 0,0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Quello che stiamo facendo è associare una funzione differenziale definita così:

$$\left.\begin{aligned} d f(\underline{x}_0) : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & \underline{x}_0 \mapsto d f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} \end{aligned}\right\} \text{differenziale primo}$$

Condizione necessaria di differenziabilità

Sia f differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$. Allora:
- f è continua in $\underline{x}_0 \in A$
- f è derivabile in $\underline{x}_0 \in A$ e $\underline{a} = \nabla f(x_0)$
- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ $\exists D_v f(\underline{x}_0) \wedge D_v f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$ (formula del gradiente)

Significato della formula del gradiente

Espandendo l'espressione otteniamo che $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) v_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) v_2$. Questo significa che tutte le rette tangenti ai grafici delle restrizioni di f a rette passanti per (x_0,y_0) sono tutte complanari.

Chiamiamo (x,y) il vettore incrementato e $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$, possiamo scrivere che

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{Piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0,y_0,f(x_0,y_0))} + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

Riprendendo la definizione, abbiamo che:

$$g(\underline{x}) = \underbrace{f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\text{Iperpiano tangente a } f(\underline{x}_0)} \quad \text{con } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ e } g \text{ affine}$$

Conseguenze della differenziabilità

- Significato geometrico del gradiente: $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (v_1,v_2) = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cos\theta$ con θ l'angolo formato tra i due vettori. Il gradiente sarà, quindi, la direzione di massima crescita (decrescita).

Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in intorno U di x_0 e tutte le derivate parziali sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.

Se f ha derivate parziali continue su tutto A, allora f è differenziabile su A. Possiamo dire che $f \in C^1(A)$.

DIMOSTRAZIONE:

$$f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0, y_0+K) + f(x_0,y_0+K) - f(x_0,y_0) = g(h) - g(0) + g(0) - f(x_0+y_0) =$$

↳ $g(t): [0;h] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(x_0+t, y_0+K)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0+\theta h, y_0+K)\, h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0+\eta K) K = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0) + \varepsilon_1(h,K)\right)h + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)\ \varepsilon_2(K)\right)K =$$

↳ Lagrange: $g(h) - g(0) = g'(\theta h)(h-0)$ ↳ $\varepsilon_{1,2} \to 0$ per $(h,K)\to(0,0)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0) K + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 K = \nabla f(x_0,y_0)(h,K) + \varepsilon(h,K) = \nabla f(x_0,y_0) + o(\sqrt{h^2+K^2})$$

$$\frac{|\varepsilon(h,K)|}{\sqrt{h^2+K^2}} \leq \frac{\varepsilon(h,K)}{\sqrt{h^2+K^2}} \leq \varepsilon_1(h,K) + \varepsilon_2(K) \to 0 \implies \varepsilon(h,K) = o(\sqrt{h^2+K^2})$$

(affinché $\varepsilon(h,K) = o(\sqrt{h^2+K^2})$) ∎

Differenziabilità di funzioni composte

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$ e g derivabile (o differenziabile) $(g: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ in $y_0 = f(x_0)$, allora $h: g \circ f$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ e $\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 = \underline{g}(t_0)$ e $\underline{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivabile (o differenziabile) in t_0, allora $h: f \circ g$ è derivabile (o differenziabile) in t_0 e $h'(t_0) = \nabla f(\underline{g}(t_0)) \cdot \underline{g}'(t_0)$

Gradiente e versore tangente

La seconda ha un significato interessante se prendiamo $\underline{g} = \underline{r}$ con $\underline{r}$ un arco di curva continuo e differenziabile. Il versore $\underline{T} = \frac{\underline{r}'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}$ è il versore tangente alla curva in t

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{r}$ una sua curva di livello con $\underline{r}$ derivabile, $\underline{r}'(t) = \underline{0}$. Se f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \underline{r}(I)$, allora $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale alla curva in $\underline{x}_0 = \underline{r}(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE: $h(t) = f(\underline{r}(t))$ su $\underline{r}(I)$ f è costante, quindi h è costante $\forall t \in I$. Segue che $h'(t_0) = 0 = \nabla f(\underline{r}(t_0)) \cdot \underline{r}'(t_0) \implies \nabla f(\underline{r}(t_0)) \perp \underline{r}'(t_0)$ $(/\!/ \underline{T}(t_0))$ ∎

Teorema della media

Sia f differenziabile su A, Allora $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A$ $\exists \tilde{\underline{x}} \in [\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ tale che $f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2) = \nabla f(\tilde{\underline{x}})(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$

PRELIMINARE: L'espressione di una retta $\underline{r}$ passante per due punti è $\underline{r}(\lambda) = \underline{x}_1 + \lambda(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Per ottenere un segmento, scriveremo $\underline{r}(\lambda) = \underline{x}_1 + \lambda(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ con $\lambda \in [0,1]$

DIMOSTRAZIONE: Riscriviamo $f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)$: usiamo $\underline{r}(t) = \underline{x} = \underline{x}_1 + t(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ e consideriamo $h(t) = f(\underline{r}(t))$. Avremo che $h(0) = f(\underline{x}_1)$ e $h(1) = f(\underline{x}_2)$. Notiamo che h rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange. Otteniamo così che $h(1) - h(0) = h'(\theta) = f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)$. Come visto prima, abbiamo $h'(\theta) = \nabla f(\underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))\, \underline{r}'(\theta)$. Siccome $\underline{r}' = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$, otteniamo che $f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1) = \nabla f(\tilde{\underline{x}})(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$. ∎

Differenziazione di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diciamo che $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$ se $\forall j$ f_j è differenziabile.

Siccome ogni f_j avrà un $\nabla f_j(\underline{x}_0)$, definiamo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix} = J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) \to \text{Matrice Jacobiana di } \underline{f} \text{ valutata in } \underline{x}_0$$

Il determinante $|J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)|$ viene chiamato Jacobiano di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$.

Se $\underline{f}$ è differenziabile su A, è possibile definire

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}): \begin{array}{l} A \to Mat(\mathbb{R}, n, m) \\ \underline{x}_0 \mapsto J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) \end{array}$$

Come sarà fatto $\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)$? Sappiamo che $f_j(\underline{x}_0+\underline{h}) - f_j(x_0) = \nabla f_j(x_0)\cdot\underline{h}$, quindi l'incremento di $\underline{f}$ lo possiamo scrivere riga per riga:

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0)\cdot\underline{h} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x}_0)\cdot\underline{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix}\cdot\underline{h} = J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}$$

Differenziabilità di funzioni composte per $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Siano $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\underline{g}: \underline{f}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $\underline{f}$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{g}$ differenziabile in $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$. Detta $\underline{h} = \underline{g}\circ\underline{f}$ $\quad \underline{h}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\underline{h}$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ e $J_{\underline{h}}(\underline{x}_0) = J_{\underline{g}}(\underline{y}_0)\cdot J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)$

Teorema di Fermat

Diciamo che $x_0 \in A$ è un punto di massimo (minimo) locale per f se $\exists r>0: \forall x \in B(x_0, r) \cap A \quad f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$.
Se al posto di $\le (\ge)$ consideriamo $< (>)$ avremo un punto di massimo locale forte.

Possiamo adesso estendere il teorema di Fermat: sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile (derivabile) in $x_0 \in A$; se x_0 è un punto di massimo (minimo) locale, si ha $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$

Chiamiamo un punto $x_0 \in A: \nabla f(x_0) = 0$ punto stazionario. Nota bene: un punto può essere di massimo (minimo) locale anche senza essere punto stazionario.

Poichè in $\mathbb{R}^n$ perdiamo il concetto di crescente/decrescente, ci serve un altro modo per trovare i punti di max/min locale. Dal polinomio di Taylor possiamo dire che: data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0; se f^n è la prima derivata non nulla in x_0 allora: se n è dispari x_0 non è stazionario; se n è pari e $f^n(x_0) > 0$ è minimo, se $f^n(x_0) < 0$ è massimo.
Possiamo quindi usare le derivate di ordine superiore per studiare massimi e minimi locali.

Derivate di ordine superiore

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile su A. Chiamiamo derivata seconda di f:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f$$

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avremo n^2 derivate seconde.

Teorema di Schwarz

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in A; se $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}f$ e la $\frac{\partial^2}{\partial x_j x_i}f$ sono funzioni continue in $x_0 \in A$ allora $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i}f(x_0)$

Differenziabilità di ordine superiore

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile su A. Dico che f è differenziabile 2 volte in $x_0 \in A$ se la funzione $\nabla f: A \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile in x_0 $\Rightarrow$ se $\forall i = 1, \dots, n$ $\frac{\partial}{\partial x_i}f$ è differenziabile

Applicando la condizione sufficiente di differenziabilità, possiamo dire che se $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}f$ sono continue, allora $\frac{\partial}{\partial x}f$ è differenziabile. In questo caso diciamo che $f \in C^2(\mathbb{R})$. Per il teorema di Schwarz, le derivate sono anche simmetriche.

Matrice Hessiana

In $\mathbb{R}^2$, definiamo matrice Hessiana di f in x_0, y_0 la seguente matrice:

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{bmatrix}$$

Se $f \in \mathcal{C}^2$, allora $Hf(x_0,y_0) \in \mathcal{S}(2;\mathbb{R})$

Differenziale secondo

Sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$, chiamo differenziale secondo di f in $x_0 \in A$ la funzione:

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{tale che } d^2 f(\underline{x}_0)(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\underline{x}_0) h_i h_j$$

Studiando il caso per $n=2$ otteniamo:

$$d^2 f(x_0,y_0)(h,K) = \dots = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0) hK + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0,y_0) K^2}_{P_2(h,K) = a h^2 + 2bhK + cK^2}$$

$$= [h \ K] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Espandendoci a $\mathbb{R}^n$ otteniamo

$$d^2 f(\underline{x}_0)(\underline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\underline{x}_0) h_i h_j = [h_1 \ h_2 \cdots h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \underline{h}^T Hf(\underline{x}_0) \underline{h} \Rightarrow$$ polinomio di secondo grado omogeneo

Possiamo, quindi, dire che $d^2 f(\underline{x}_0)$ è una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$.

Formula di Taylor del 2° ordine per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto, e sia $\underline{x}_0 \in A$, allora

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = df(\underline{x}_0)(\underline{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}_0)(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$$

sarà la formula di Taylor del 2° ordine con resto di Peano. Invece:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = df(\underline{x}_0)(\underline{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}_0 + \theta \underline{h})(\underline{h})$$

sarà la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Lagrange.

Forme quadratiche

Definiamo forme quadratiche il polinomio ottenuto da: $q(\underline{h}) = \underline{h}^T M \underline{h}$. $(M \in \mathcal{S}(n;\mathbb{R}))$

Data $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica, dico che q è definita:
- positiva (negativa) se $q(\underline{h}) > 0 \ (<0) \ \forall \underline{h} \neq 0$;
- semipositiva (seminegativa) se $q(\underline{h}) \geq 0 \ (\leq 0) \ \forall \underline{h} \neq 0 \ \wedge \ \exists \tilde{\underline{h}} \neq 0 : q(\tilde{\underline{h}}) = 0$
- indefinita se $\exists \tilde{\underline{h}}, \overline{\underline{k}} : q(\tilde{\underline{h}}) > \wedge \ q(\overline{\underline{k}}) < 0$

In $\mathbb{R}^2$, per studiare il segno di una forma quadratica studiamo il determinante di M
- se $|M| > 0$ q è definita positiva se $a > 0$, negativa se $a < 0$
- se $|M| = 0$ q è semidefinita
- se $|M| < 0$ q è indefinita

In $\mathbb{R}^n$, invece, data M_K la sottomatrice quadrata di nord-ovest, diciamo che:
- se $|M_K|>0 \quad \forall K=1,2\dots n$ è definita positiva
- se $(-1)^K|M_K|>0 \quad \forall K=1,2\dots n$ è definita negativa

Esiste un metodo più veloce usando gli autovalori/autovettori

$$q(\underline{h}) = \underline{h}^T M \underline{h} = \underline{h}^T S \Lambda S^T \underline{h} = \underline{k}^T \Lambda \underline{k} = \hat{q}(K)$$

↳ diagonalizzabile poiché simmetrica

$$\hat{q}(\underline{K}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{q}(\underline{K})>0 \quad \forall K \iff \lambda_i>0 \quad \forall i$$

$$\hat{q}(K)<0 \quad \forall K \iff \lambda_i<0 \quad \forall i$$

se $\exists \lambda_i=0 \implies q(\hat{\underline{k}})=0$ anche per $\hat{k}\neq 0$

Possiamo quindi dire che:
- se gli autovalori di M sono tutti positivi la forma è definita positiva
- se gli autovalori di M sono tutti negativi la forma è definita negativa
- se un autovalore è nullo e gli altri sono positivi allora la forma è semidefinita positiva
- se un autovalore è nullo e gli altri sono negativi allora la forma è semidefinita negativa
- se gli autovalori di M hanno segno misto allora la forma è indefinita.

Enunciamo il seguente teorema: sia q definita positiva, allora $q(\underline{h}) \geq \lambda_{min}\|h\|^2$; sia q definito negativo, allora $q(\underline{h}) \leq \lambda_{max}\|h\|^2$.

DIMOSTRAZIONE: $q(\underline{h}) = \hat{q}(\underline{K}) \geq \lambda_{min}\|K\|^2 = \lambda_{min}\|h\|^2$ perché il cambio di base è un'isometria ■

Massimi e minimi liberi per $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sia A aperto, $f\in C^2(A)$ e $\underline{x}_0\in A$ punto stazionario. Allora se $d^2f(\underline{x}_0)$ è una forma quadratica
- definita positiva (negativa) allora $\underline{x}_0$ è un punto di minimo (massimo) locale;
- indefinita $\underline{x}_0$ non è né max né min locale
- semidefinita non posso trarre conclusioni tranne per il fatto che se c'è un estremante deve essere minimo se è semidefinita positiva e massimo se è semidefinita negativa.

DIMOSTRAZIONE Scriviamo il polinomio di Taylor: $f(\underline{x}_0+h) - f(\underline{x}_0) = \underbrace{df(\underline{x}_0)(\underline{h})}_{=0} + \frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) = \frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$

Supponiamo $d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h})$:
- definita positiva: $\frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h}) \geq \frac{1}{2}\lambda_m\|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) = \|h\|^2\left(\frac{1}{2}\lambda_m + o(1)\right)$ quindi $\exists\delta>0: \|\underline{h}\|<\delta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_m + o(1)>0$. Quindi per $\underline{h}\in B(0,\delta)$ $f(\underline{x}_0+h) - f(\underline{x}_0)\geq 0$ ($=0$ solo se $\underline{h}=0$)
- definita negativa: $\frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h}) \leq \frac{1}{2}\lambda_M\|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) < 0$ definitivamente per $\underline{h}\to 0$

Se $d^2f(\underline{x}_0)(\underline{h})$ è indefinito, allora $\exists\, v, w$, $\|v\|=\|w\|=1$: $d^2f(\underline{x}_0)(\underline{v})>0$ e $d^2f(\underline{x}_0)(\underline{w})<0$. Allora $f(\underline{x}_0+t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(t\underline{v}) + o(\|t\underline{v}\|^2) = \frac{1}{2}t^2 d^2f(\underline{x}_0)(\underline{v}) + o(t^2) = t^2\left(\frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{v}) + o(1)\right)$ per $t\to 0$, quindi $\exists\delta>0: 0<|t|<\delta \Rightarrow f(\underline{x}_0+t\underline{v})>f(\underline{x}_0)$. Possiamo scrivere la stessa cosa per $\underline{w}$: $f(\underline{x}_0+t\underline{w}) - f(\underline{x}_0) = t^2\left(\frac{1}{2}d^2f(\underline{x}_0)(\underline{w}) + o(1)\right)$ per $t\to 0$, quindi $\exists\eta>0: 0<|t|<\eta \Rightarrow f(\underline{x}_0+t\underline{w})<f(\underline{x}_0)$. Quindi per $|t|<\min\{\delta,\eta\}=r$ in $B(x_0, r)$ $\forall\underline{x}=t\underline{v}$ con $|t|<r$ $f(\underline{x})>f(\underline{x}_0)$ e $\forall\underline{x}=t\underline{w}$ con $|t|<r$ $f(\underline{x})<f(\underline{x}_0)$. ■

Studio di massimi e minimi vincolati

Il vincolo Ω sarà l'insieme di punti $\{(x,y): g(x,y)=0\}$. $g(x,y)=0$ è la curva di livello 0 della funzione g. Il vincolo potrà anche essere una regione di spazio $\Omega=\{(x,y): g(x,y)\leq 0\}$

Espresso un vincolo (una curva o una regione), dico che x_0 è massimo vincolato per f rispetto al vincolo Ω se è punto di massimo locale o globale è massimo per la funzione ristretta a quel vincolo. Analogo vale per i minimi.

ESEMPIO $f(x,y) = x + y$ su $C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

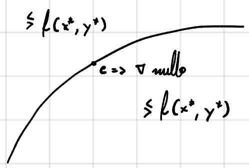
Guardo in C ∇f: $\nexists (x_0, y_0) : \nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\nexists$ max/min per $x^2 + y^2 < 1$. Per Weierstrass esisteranno, però, dei max/min assoluti per f/C. Poiché nella regione non abbiamo candidati, saranno per forza sulla frontiera $\delta C = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
Parametrizziamo δC: $\{x = \cos t \; ; \; y = \sin t\}$ e sostituiamo la parametrizzazione: $\tilde{f}(t) = f(x(t), y(t)) = \cos t + \sin t$.
Studiamo i punti stazionari di $\tilde{f}$: $\tilde{f}'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \iff \sin t = \cos t \iff t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5}{4}\pi$. Abbiamo, quindi, due candidati: $\tilde{f}(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$; $\tilde{f}(\frac{5}{4}\pi) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ e avremo che $M = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ è massimo assoluto su C e $m(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ è minimo assoluto su C.

Parametrizzare il vincolo come nell'esempio non sempre è facile anche se esso è una bella curva. Servono, allora, strumenti un po' più raffinati.

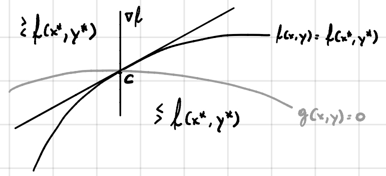
Metodo moltiplicativo di Lagrange (condizione necessaria per punti estremanti su un vincolo)

Sia $f \in C^2(A)$ $A \subset \mathbb{R}^2$. Sia $g \in C^2(A)$ la funzione che definisce il vincolo tramite $g(x,y) = 0$. Se (x^*, y^*) è un punto di massimo o di minimo locale per f ristretto al vincolo e $\nabla g(x^*, y^*) \neq \underline{0}$, allora $\exists \lambda : \nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$. λ è chiamato moltiplicatore di Lagrange.

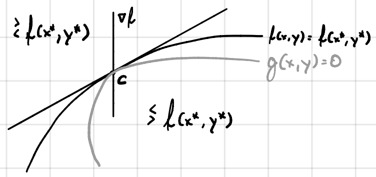
Studiamo il significato del teorema. Consideriamo la curva di livello $f(x,y) = f(x^*, y^*)$ e c un punto di max/min locale. Avremo le seguenti situazioni:



contro ipotesi!

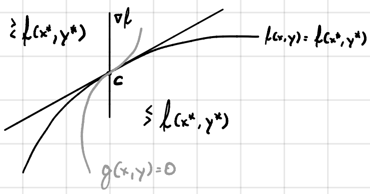


impossibile se c è max/min locale.



Le due curve, quindi, hanno la stessa tangente in c

Se le due curve condividono la tangente, allora il loro gradiente sarà parallelo. La condizione, però, non è sufficiente poiché la seguente situazione:



è possibile in quanto non è detto che se curva di livello e vincolo hanno la stessa tangente la prima non attraversi la seconda.

Definiamo $\mathcal{L}(x, y, \lambda) : f(x,y) - \lambda g(x,y)$ chiamata Lagrangiana. Notiamo che (x^*, y^*) è punto critico se e solo se $\exists \lambda^* : \nabla \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = \underline{0}$. Questo significa che:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Il gradiente della Lagrangiana ci permette, quindi, di riscrivere il teorema sopra in modo compatto.

Funzione convessa

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiamo l'epigrafico di f: $\text{Epi } f = \{(\underline{x}, y) \; \underline{x} \in A, \, y \in \mathbb{R} : y \geq f(\underline{x})\}$. Sarà, quindi, l'insieme di punti che sta sopra al grafico della funzione.

Definiamo, allora, la funzione convessa: sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A convesso; dico che f è convessa se il suo epigrafico è un insieme convesso.

Eseguendo dei calcoli, otteniamo che una funzione è convessa se: $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq f(x_1) + \lambda f(x_2)$ $\forall \lambda \in [0,1]$. Se consideriamo la disuguaglianza stretta possiamo dire che f è strettamente convessa.

Diciamo che f è concava se $-f$ è convessa.

Proprietà delle funzioni convesse
- Se A è aperto, allora $\forall i$ $\exists \frac{\partial f^+}{\partial x_i}, \frac{\partial f^-}{\partial x_i}$
- Se A è aperto e $\exists \nabla f$, allora f è differenziabile

Convessità relativa al piano tangente
Sia f differenziabile su A aperto convesso, allora f è convessa su A se e solo se $\forall \underline{x}_0 \in A, \forall \underline{x} \in A$ considero il piano tangente $f(x_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(x - \underline{x}_0)$ il grafico di f sta al di sopra, ossia $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x})(\underline{x} - x_0)$.

Convessità / concavità relativa al differenziale secondo
Sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto convesso. Se $d^2 f$ è $\forall x_0 \in A$ una forma quadratica semidefinita positiva (negativa) allora f sarà convessa (concava).

DIMOSTRAZIONE Considero per f la formula di Taylor di secondo ordine con resto di Lagrange:

$$f(x) = f(\underline{x}_0) + d f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}_0 + \theta(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0) \qquad \theta \in (0,1)$$

$d^2 f(\underline{x}_0 + \theta(\underline{x} - x_0))(\underline{x} - \underline{x}_0)$ è una forma quadratica semidefinita positiva, ossia $q(\underline{x} - x_0) \geq 0$ $\forall (\underline{x} - x_0)$, per ipotesi. Quindi $f(x) \geq f(x_0) + d f(\underline{x}_0)(\underline{x} - x_0)$ e per il teorema della convessità per la retta tangente, f è convessa. ∎

Se $d^2 f$ è definito positivo (negativo) la funzione sarà strettamente convessa (concava). La dimostrazione è identica.

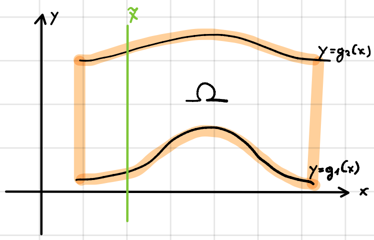
Conseguenza di questo teorema è che una funzione convessa (concava) avrà in A aperto solo minimi (massimi) relativi o assoluti.

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

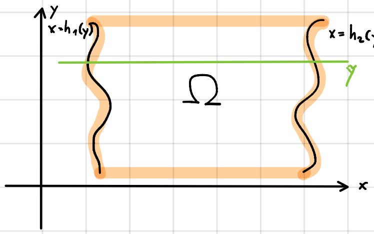
La definizione di intervallo non è immediata: $I = [a;b] \times [c,d]$. Otteniamo così un rettangolo. Suddividiamo il nostro rettangolo in molti sottorettangoli, analogamente a come facevamo in Analisi 1. Una funzione definita nel nostro rettangolo può essere, quindi, approssimata da vari gradini costanti. Poi possiamo il limite e ottenere ciò che vogliamo. L'insieme su cui integriamo, però, dovrà essere rettangolare. Di più passare da un'insieme rettangolare a uno qualsiasi con passaggi che non faremo.

Funzione integrabile
Consideriamo $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con f limitata e Ω limitato.

Definiamo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;b] \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ y-semplice. La forma di un insieme y-semplice sarà:



Analogamente $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] \wedge h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in \mathcal{C}([c;d])$ viene detto x-semplice.



Chiamiamo $\Omega = \bigcup_1^n \Omega_K$, Ω_K y-semplice o x-semplice, dominio regolare.

Sui domini regolari vale il seguente teorema: sia $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, allora f è integrabile su Ω. Se f è integrabile su Ω con integrale pari a λ scriveremo:

$$\lambda = \int_\Omega f(x)\,dx\,dy$$

Se $\Omega \in \mathbb{R}^3$ avremo invece $\lambda = \int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Insiemi misurabili

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$, esso è misurabile se $\int_\Omega 1\,dx\,dy$ $\left(\int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz\right)$ è un numero reale.

Di conseguenza possiamo dire che ogni dominio regolare è integrabile. Se $\Omega = [a;b] \times [c;d]$, allora $\int_\Omega 1\,dx\,dy = (b-a)(c-d)$.

Se Ω è misurabile definiamo $\int_\Omega 1\,dx\,dy = |\Omega|$ misura di Ω

Insiemi di misura nulla

Per definizione Ω è un insieme di misura nulla se $\int_\Omega 1\,dx\,dy = 0$. È caratterizzato dalle seguenti proprietà:
- $|\Omega| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_1, R_2, \dots, R_n$ rettangoli di $\mathbb{R}^2$: $\Omega \in \bigcup_1^n R_K \wedge \sum_1^n |\Omega_K| < \varepsilon$

Ogni unione finita di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Sia $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a;b])$, allora $|\mathrm{Graf}\, f| = 0$. Analogamente vale per $\mathbb{R}^2$.

Come corollario possiamo dire che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare, allora $|\partial\Omega| = 0$.

Enunciamo il seguente teorema: sia $f \in \mathcal{C}(\Omega \setminus A)$, f limitata $\Omega \setminus A$ con Ω regolare e $|A| = 0$, allora f è integrabile su $\Omega \setminus A$.

Proprietà dell'integrale

L'integrale è una funzione definita così: $I: \underbrace{\{f : f \text{ integrabile su } \Omega\}}_{f \in \mathcal{R}(\Omega)} \to \mathbb{R}$. Esso gode delle seguenti proprietà:
- I è lineare: $\int_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Omega f + \beta \int_\Omega g$
- I è monotona rispetto all'integranda: $f \le g \Rightarrow \int_\Omega f \le \int_\Omega g$
- I è additiva rispetto all'insieme d'integrazione: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \wedge |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$
- I è monotona rispetto all'insieme d'integrazione: $f \ge 0$, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ allora $\int_{\Omega_1} f \le \int_{\Omega_2} f$

La seconda proprietà ci permette di enunciare:
- $f \ge 0 \Rightarrow \int_\Omega f \ge 0$
- $\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega |f|$

Teorema della media integrale

Sia f integrabile su Ω e continua, allora $\exists\, w \in \Omega : \int_\Omega f = f(w)|\Omega|$. È ovvio che se $|\Omega| = 0$, allora $\int_\Omega f = 0$. Se invece $f \geq 0$ e $|\Omega| > 0$ allora se $f \in C(\Omega)$ e $\int_\Omega f = 0$ allora $f \equiv 0$ su Ω. Stessa cosa vale per $f \notin C(\Omega)$, basta rimuovere A con $|A| = 0$ che causa la discontinuità

Calcolo degli integrali multipli

Vale il seguente teorema di riduzione per domini semplici: sia $f \in C(\Omega)$, Ω y-semplice, allora

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

ESEMPIO Sia $f(x,y) = x^2 + y$ e Ω il triangolo con vertici $(0,0), (0,1), (1,0)$, ossia $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1-x\}$
Scriveremo quindi che: $\int_\Omega f = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

Cambio di coordinate negli integrali multipli

Sia f integrabile su Ω e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un cambio di coordinate, allora posto $\tilde{\Omega} = \{(u,v) \in I \times J : T(u,v) \in \Omega\}$ vale

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}(u,v)\,|\det J_T(u,v)|\,du\,dv$$

dove $\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

Integrali doppi generalizzati

Sia Ω illimitato, consideriamo Ω_K limitato da un valore K e $f(x,y) \geq 0$. L'insieme Ω_K sarà $y(x)$ semplice e quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{K \to +\infty} \int_{\Omega_K} f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

Se esistono gli integrali generalizzati iterati finiti, allora f è integrabile in senso generalizzato su Ω illimitato

Integrali in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ un insieme può essere, oltre che x o y semplice, anche z semplice. La definizione è analoga:
$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega_1 : g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$ dove $g_1, g_2 \in C(\Omega_1)$. Se il dominio è z semplice, allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega_1} \Big[\underbrace{\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\text{Integrale in } dx\,dy}\Big]\,dx\,dy \;\to\; \text{Integrazione per "fili"}$$

Possiamo anche esprimere $\Omega = \{(x,y,z) : a \leq z \leq b \wedge (x,y) \in \Omega_2\}$ e calcolare l'integrale come:

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \Big[\underbrace{\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{Integrale in } dz}\Big]\,dz \;\to\; \text{Integrazione per "strati"}$$

Se esiste $\int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$ finito, allora Ω è misurabile in $\mathbb{R}^3$ e chiamo $\int_\Omega 1 = |\Omega|$ misura o volume di Ω. Le considerazioni sugl'insiemi a misura nulla e su altre proprietà rimangono invariate.

Cambio di coordinate in $\mathbb{R}^3$

Supponiamo di avere $T : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $(x,y,z) = T(u,v,w)$, T invertibile, $T \in C^1(A)$, $T^{-1} \in C^1(\tilde{A})$ e $|J_T| \neq 0$, allora f è integrabile su Ω se e solo se $\tilde{f}\,|\det J_T|$ è integrabile su $\tilde{\Omega}$ dove $\tilde{f}(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = (f \circ T)(u,v,w)$ e
$\tilde{\Omega} = \{(u,v,w) \in A : T(u,v,w) \in A\}$ e vale $\int_\Omega f = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}\,|\det J_T|$

Massa baricentro e momento d'inerzia

Consideriamo una lamina piana. Definiamo $\rho(x,y)$ la densità di massa e Ω la superficie della lamina. Avremo che la massa, e il baricentro saranno:

$$M = \int_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy \rightarrow \text{se } \rho = K \quad M = K|\Omega|$$

$$B = (\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \left.\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M}\int_\Omega x\,\rho(x,y)\,dx\,dy \\ \bar{y} = \frac{1}{M}\int_\Omega y\,\rho(x,y)\,dx\,dy \end{cases}\right\} \text{MEDIE PESATE}$$

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse sarà:

$$I = \int_\Omega \delta^2(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{con } \delta(x,y) \text{ la distanza di } (x,y) \text{ dall'asse.}$$

↳ se $\rho(x,y) = K$ $\quad I = \frac{M}{\Omega}\int_\Omega \delta^2(x,y)\,dx\,dy$

Consideriamo ora un generico solido. La massa e il baricentro sono date da formule analoghe ma adattate a 3 dimensioni. Il momento d'inerzia, invece, se non viene specificato l'asse, si considera calcolato rispetto all'asse z diventando:

$$I = \int_\Omega \delta^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

CURVE

Definiamo il concetto di curva: chiamiamo curva in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) la coppia $(\gamma, \underline{r})$ dove $\underline{r}$ è una funzione continua definita su $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) e γ il suo insieme di punti. γ viene chiamato sostegno della curva.

Una curva $\underline{r}$ definita su $[a;b]$ a valori in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) si dice chiusa se $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$. Una curva $r: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ è semplice se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2)$ tranne per $r(a) = r(b)$ nel caso $I = [a;b]$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è piana se γ è contenuto in un piano di $\mathbb{R}^3$. Una curva piana, chiusa e semplice è detta curva di Jordan; γ divide il piano in cui è contenuta in due regioni connesse, una limitata e una illimitata.

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$ e $\underline{r}(t) = (t, f(t))$ con $\underline{r}: I \to \mathbb{R}^2$ e $r \in C(I)$. Chiamo $(\gamma, \underline{r})$ curva cartesiana.