

Intorno in  $n$  dimensioni

Come visto in algebra,  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma euclidea si definisce:

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0^i)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio  $\epsilon$  come:

$$B(x_0, \epsilon) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \epsilon \right\} \quad (\text{Bolla})$$

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in  $n$  dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono spiccioli: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Consideriamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Presi un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ :

- $x$  si dice **INTERNO** ad  $A$  se  $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset A$
- $x$  si dice **DI FRONTIERA** per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \epsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- $x$  si dice **ESTERNO** ad  $A$  se  $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad  $A$  viene indicato con  $A^\circ$ . L'insieme dei punti di frontiera di  $A$  è indicato con  $\partial A$ . Le frontiere di  $A$  e  $\bar{A}$  coincidono.

L'insieme  $A$  si dice **aperto** se ogni punto è interno. Se  $\bar{A}$  è aperto, allora  $A$  è chiuso e viceversa.  $A$  si dice **chiuso** se  $\partial A \subseteq A$ . Considerando  $\mathbb{R}^2$ , la sua frontiera è  $\emptyset$ , quindi è sia aperto che chiuso. Questa cosa vale per  $\emptyset$ . L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemni che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In  $\mathbb{R}^2$  bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^n) \text{ è limitato se } \exists x_0 \in \mathbb{R}^2, r > 0 : A \subset B(x_0, r)$$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in  $\mathbb{R}$ . Bisogna ora definire quando un insieme è **connesso**, ovvero fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in  $\mathbb{R}^n$  una funzione

$$\begin{aligned} \bar{r} : I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \in I &\mapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo ora dire un insieme connesso come:

Preso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  è connesso per archi se, per ogni coppia di punti  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  esiste una curva  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\bar{r}(a) = \bar{x}$  e  $\bar{r}(b) = \bar{y}$ ,  $r(t) \in A$

Un insieme connesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

## Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con } f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{cases}$$

Obliamo già varie delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

## LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| \rightarrow 0 \iff |x_i - x_{0i}| \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di  $\epsilon/\delta$ . Ciò ci permetterà di definire il limite di funzioni in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \iff \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = l_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad \text{con } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \underline{l} \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in  $\mathbb{R}^n$  avviene, quindi, per coordinate. Se si studiano  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  posso studiare anche  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

## Continuità e derivabilità di funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Consideriamo  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora  $f_j: I \rightarrow \mathbb{R}$  che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $f \in C(I) \iff f_j \in C(I) \quad \forall j = 1, \dots, n$
- $f$  è derivabile su  $I$  se e solo se sono derivabili tutte le  $f_j$  su  $I$

## LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Poiché  $\mathbb{R}^n$  non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Potrebbe distinguere il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello  $K$  di  $f$  come

$$I = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K\}.$$

Per distinguere il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (escludere le singole coordinate ponendo le altre pari a zero / costante).

Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazioni. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo rendere. Funzioni di questo tipo sono delle funzioni radiali.

## Limite (in) finito per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Dato  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  insieme aperto, definiamo  $\underline{l} \in \mathbb{R}^*$  limite di  $f$  per  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \in A$  se

$$\forall \mathcal{V}(\underline{l}) \exists \mathcal{U}(\underline{x}_0) : \forall \underline{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) \in \mathcal{V}$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad |f(\underline{x}) - \underline{l}| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \rightarrow \forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) > K$

## Limite per $(x, y) \rightarrow \infty$

Poiché per dire che il limite esiste la funzione deve avere lo stesso limite su tutte le rette radiali (vedi definizione successionale di limite), parlare di  $(x, y) \rightarrow \infty$  si complica la vita. Quando si affrontano i limiti di funzioni all'infinito, si farà riferimento alla norma del vettore  $(x, y)$ . Possiamo, allora, dire che:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall K > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > K$$

## Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset \mathbb{R}^n, x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

## Continuità di funzione reale a più variabili reali

Dato  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Chiamiamo  $f$  continua in  $x_0 \in A$  se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma/prodotto/quoziente/composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

## Proprietà delle funzioni a più variabili continue

- Se  $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $x \in C$  è un chiuso di  $\mathbb{R}^m$  e  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  allora  $f^{-1}(C)$  è un chiuso in  $\mathbb{R}^m$  e  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $\mathbb{R}^m$  !!  $f^{-1}$  è la controimmagine, non la funzione inversa !!
- Di conseguenza sia  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $c \in \mathbb{R}$  ( $c$  un insieme chiuso), allora  $f^{-1}(c)$  è anch'esso chiuso. Poiché  $f(x, y) = c$  è la definizione di un insieme di livello, per il teorema sopra essi sono chiusi
- Di conseguenza sia  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , considera  $f((0, +\infty))^+$  aperto; per il teorema sopra avremo che la funzione sarà positiva (e con un procedimento analogo negativa) solo su insiemini aperti mentre sarà nulla su insiemini chiusi (vedi considerazione precedente)

## Teoremi sulle funzioni continue

- Teorema di Weierstrass: sia  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua e  $D$  un insieme chiuso e limitato,  $f$  avrà un massimo ed un minimo assoluto in  $D$ .
- Teorema degli zeri: sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua,  $A$  connesso per archi; se esiste  $x_1 \in A : f(x_1) > 0$  e  $x_2 \in A : f(x_2) < 0$  allora esiste  $x_0 \in A : f(x_0) = 0$

**DIMOSTRAZIONE:** Considero una curva  $\pi(t) : [a, b] \rightarrow A : \pi(a) = x_1 \quad \pi(b) = x_2$  (per definizione di curva  $\pi$  è continua).

Considero  $g = f \circ \pi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  è continua in quanto composizione di funzioni continue. Abbiamo che  $g(a) = f(\pi(a)) = f(x_1) > 0$  e  $g(b) = f(\pi(b)) = f(x_2) < 0$ . Per il Teorema degli zeri in 1 variabile, esiste  $t_0 \in [a, b] : g(t_0) = 0$ . Quindi  $\pi(t_0) = x_0$ .

- Conseguenza: se  $f(x, y)$  è continua, ogni regione connessa per archi individuata dagli zeri è di segno costante.

## Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per  $x \rightarrow x_0$  di  $f$  esiste, esso è unico

### 2. Algebra dei limiti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [+ \infty - \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [0 \cdot \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad [\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}]$
- data  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$   
 $'$   $g: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo  $\lim_{w \rightarrow w_0} f(g(w)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3. Teorema del confronto: Siano  $f, g, h$  definite da  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$  tali che esistono definitivamente per  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Allora se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  con  $l \in \mathbb{R}^*$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

4. Teorema della permanenza del segno: Sia  $f$  continua e sia  $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n : f(x_0) > 0$ . Allora  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$ .

**ESEMPIO:** Date  $f_1(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_3(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ,  $f_4 = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ . Calcola  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_i(x, y)$ .

$$|f_1(x, y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq 1, |y| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$$

$$|f_2(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, |x| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 0$$

$$|f_3(x, y)| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2} \leq 1 \quad \text{Studiando } f_3(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ mentre } f_3(x, 0) = 0. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Al punto  $(0,0)$  ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore (cfr: definizione successionale di limite)

$$|f_4(x, y)| = \dots \leq 2 \quad \text{Studiando } f_4(x, -x) = 0, \text{ mentre } f_4(x, x) = \frac{2}{x} \rightarrow \infty. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Passaggio a coordinate reali in  $\mathbb{R}^2$

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho \in (0, +\infty), \theta \in (-\pi; \pi] : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a  $x$  e  $y$  i corrispondenti. Nota bene:  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ .

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = l \iff \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}(\rho, \theta) = l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

**ESEMPIO:** Consideriamo  $f_1(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ . Calcolare il limite per  $x \rightarrow (0,0)$

$$\tilde{f}_1(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} = \rho \cos \theta \sin \theta \quad ; \quad \tilde{f}_2(\rho, \theta) = \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho} \rightarrow \text{Il limite poiché dipende da } \theta$$

$$|\tilde{f}_1(\rho, \theta)| \leq \rho \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}_1(\rho, \theta) = 0$$

$$\tilde{f}_3(\rho, \theta) = \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

Per  $\rho \rightarrow 0$ , abbiamo  $\tilde{f}_3(\rho, \theta) \sim \rho \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ , quindi avremo un problema per  $\cos \theta \rightarrow 0$ . Quindi il limite non esiste

## DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In  $\mathbb{R}$  i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

### Derivate parziali

Consideriamo  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerando la definizione di derivabilità otteniamo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  che non ha senso poiché  $\frac{h}{t}$  è un vettore. Fixiamo una direzione  $v$ , poniamo scrivere  $f(x_0 + tv) - f(x_0)$  e calcolare  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ . Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usuali saranno i versori canonici di  $\mathbb{R}^n$

Se esiste finito  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = l$ , dire che esiste la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = l$ . Analogamente per  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = l$ .

Le derivate parziali possono esistere anche se la funzione non è continua.

### Derivabilità e gradiente

Se esistono  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  diciamo che  $f$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$ . Definiamo il vettore  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \nabla f$  il gradiente di  $f$  in  $(x_0, y_0)$

### Derivate direzionali

Consideriamo il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv, y_0 + tw) - f(x_0, y_0)}{t}$ . Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo  $D_v f(x_0, y_0)$  derivata direzionale.

La derivata direzionale può esistere anche se la funzione non è continua.

### Funzione differenziabile

In analogia al calcolo unidimensionale, se  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda$ , possiamo scrivere che  $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$  per  $h \rightarrow 0$ . Analogamente in  $\mathbb{R}^n$ , possiamo dire che  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile nel punto  $x_0 \in A$  se  $\exists \underline{a} \in \mathbb{R}^n$ :  $f(x_0+h) - f(x_0) = \underline{a} \cdot h + o(\|h\|)$  per  $h \rightarrow 0$ .

In  $\mathbb{R}$ , la definizione di derivabilità e differenziabilità coincidono. In  $\mathbb{R}^n$ , però, questo non accade più.

Applicando la definizione di differenziabilità, otteniamo che

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) = o(\sqrt{h^2+k^2}) \Rightarrow \lim_{h, k \rightarrow 0, 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

### Condizione necessaria di differenziabilità

Sia  $f$  differenziabile in  $x_0 \in A$ . Allora:

- $f$  è continua in  $x_0 \in A$
- $f$  è derivabile in  $x_0 \in A$  e  $\underline{a} = \nabla f(x_0)$
- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\underline{v}\|=1 \exists D_{\underline{v}} f(x_0) \wedge D_{\underline{v}} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \underline{v}$  (formula del gradiente)

### Significato della formula del gradiente

Esplorando l'espressione otteniamo che  $D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) v_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) v_2$ . Questo significa che tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni di  $f$  a tutte le penne per  $(x_0, y_0)$  sono tutte complanari.

Chiamiamo  $(x, y)$  il vettore incrementale e  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$ , possiamo scrivere che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y-y_0)}_{\text{Piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0, y_0, f(x_0, y_0))} + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

Riprendendo la definizione, abbiamo che:

$$g(x) = \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)}_{\text{con } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g \text{ affine}}$$

Tangente a  $f(x_0)$

### Conseguenze della differenziabilità

- Significato geometrico del gradiente:  $D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$  con  $\theta$  l'angolo formato tra i due vettori. Il gradiente sarà, quindi, la direzione di massima crescita (derivate).

### Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è derivabile in intorno a  $x_0$ , tutte le derivate parziali sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

Se  $f$  ha derivate parziali continue su tutto  $A$ , allora  $f$  è differenziabile su  $A$ . Possiamo dire che  $f \in C^1(A)$ .