ANALISI 1 del 26 settembre

ESTREMI DI UN'INSIEME

(1) $E = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \mid t \in \mathbb{R} \quad t>2 \right\}$

sempre possibile

$x > 0 \quad \forall t \in E \Rightarrow$ 0 è un minorante, ma non il più piccolo.

1 è un minorante

↳ è il più grande?

$\forall \varepsilon > 0 \quad 1+\varepsilon$ non è un minorante $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} \le 1+\varepsilon \\ \exists \bar{t} \in \mathbb{R} \mid \frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} < 1+\varepsilon \end{array}}$ equivale a: $\Rightarrow$ si dice che $\bar{x}$ è l'estremo inferiore

piccolo

$$\frac{\bar{t}+1-(1+\varepsilon)(\bar{t}-2)}{\bar{t}-2} < 0 \Rightarrow \bar{t}+1-(\bar{t}-2+\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon) < 0$$

$$\cancel{\bar{t}}+1-\cancel{\bar{t}}+2-\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon < 0 \Rightarrow -\bar{t}\varepsilon < 2\varepsilon-3$$

$$\bar{t} > 2+\frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{t} \in \mathbb{R}$$

$\nexists$ l'estremo superiore $\Rightarrow$ $\forall M \in \mathbb{R}$ ($M>0$) $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ ($t_1>2$) $\mid \frac{t_1+1}{t_1-2} > M \Rightarrow$

grande

$$t_1+1-Mt_1-2M > 0$$

$$t_1(1-M)+2M-1 > 0$$

$$t_1(1-M) > -2M+1$$

$$t_1(1-M) < 2M+1 \Rightarrow t_1 < \frac{2M+1}{1-M} \Rightarrow 2 < t_1 < \frac{2M+1}{1-M}$$

$\exists t_1$

② $E = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

se voglio calcolare E, posso farlo: $\left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{4}+\frac{2}{3}; \frac{8}{27}+\frac{2}{3}; \dots \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}$ è sicuramente un minorante, appartiene all'insieme $\Rightarrow$ è minimo e estremo inferiore

qual è un possibile maggiorante? $\frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}}{3n^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3n^2} > 0 \Rightarrow 3n^2 > 0$

$\downarrow$

$\bar{x} = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow$ 1 è un maggiorante, ma è il più piccolo?

$\exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} > 1-\varepsilon \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}-\{0\} \mid \frac{\bar{n}^2-1}{3\bar{n}^2} + \frac{2}{3} > 1-\varepsilon$

$\bar{n}^2 - 1 + 2\bar{n}^2 - (1-\varepsilon)3\bar{n}^2 > 0 \quad \cancel{\bar{n}^2} - 1 + \cancel{2\bar{n}^2} - \cancel{3\bar{n}^2} + 3\varepsilon\bar{n}^2 > 0$

$3\varepsilon\bar{n}^2 - 1 > 0 \quad \bar{n}^2 > \frac{1}{3\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}-\{0\}$

$\downarrow$

È il più piccolo perché riesco a costruire un numero più piccolo

③ $E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subseteq \mathbb{R}$ (soluzione $\inf(E) = -\sqrt{2}$; $\sup(E) = \sqrt{2}$)