LEZIONE DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 15 OTTOBRE

ALEXANDRU GABRIEL BRADATAU

SPAZIO DELLE RIGHE: dato $A \in Mat(m, n; \mathbb{K})$ si dice spazio delle righe lo spazio generato dalle sue righe: $Span(A_{R(1)}, \dots A_{R(i)}) = R(A)$

" " COLONNE: " " colonne lo spazio generato dalle sue colonne $Span(A_{C(1)}, \dots A_{C(i)}) = C(A)$

OSS. i vettori generatori di $Span(A_{R(1)}, \dots, A_{R(i)})$ o $Span(A_{C(1)}, \dots, A_{C(i)})$ possono essere linearmente indipendenti. La dimensione delle righe è uguale a quella delle colonne che è $r(A)$

TH. DI KRONECKER: $A \in Mat(m, n; \mathbb{K})$, allora $r(A) = p$ se:

es.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| \neq 0$ $\left.\begin{array}{l} C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C'| = 0 \\ C'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |C''| = 0 \end{array}\right\} r(A) = 2$

1) esiste una sottomatrice $B \in Mat(p, p; \mathbb{K})$ con $|B| \neq 0$;

2) ogni orlatura di B $(C \in Mat(p+1, p+1; \mathbb{K}))$ ha determinante 0.

COR. KRONECKER: $r(A) = r(A^T)$:

DIM: applicando Kronecker, si risolve: infatti $|B| = |B^T|$

TH. 4.54.: $r(A) = dim(R(A)) = dim(C(A))$

OSS. $R(A)$ e $C(A)$ sono proprietà intrinseche di una matrice, visto che il rango vi è collegato è anch'esso una proprietà intrinseca della matrice

DIM 4.54 (RIGHE): Sia $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala. Allora:

1) $R(A) = R(S)$: le righe di S sono una combinazione lineare delle righe di A, quindi $R(S) \subseteq R(A)$. È vero anche il contrario poiché la riduzione è reversibile, allora $R(A) \subseteq R(S)$. Le due condizioni sono entrambe vere per $R(A) = R(S)$

2) $dim(R(A)) = dim(R(S)) = r(A)$ con $B_{R(A)} = \{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$. S per definizione è una matrice del tipo $\begin{bmatrix} 0 \dots p_1 \dots S_{1q_2} \dots S_{1n} \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \dots p_r \dots S_{rn} \\ \hline O_{m-r,n} \end{bmatrix} \Rightarrow R(S) = Span(S_{R(1)} \dots S_{R(r)})$.

$O_{1n} = \sum_{i=1}^{r} t_i \cdot S_{R(i)} = [0 \ \dots \ t_1 p_1 \dots t_2 p_2 + t_1 s_{1q_2} \dots \ t_r p_r + \sum_{i=1}^{r-1} t_i s_{iq_r} \dots]$. Affinché la somma sia 0, tutte le t devono essere nulle, quindi $\{S_{R(1)}, \dots, S_{R(r)}\}$ è una base di $R(A)$

quindi $dim(R(A)) = dim(R(S)) = R(A)$.

DIM 4.59 (COL): scriviamo $dim(C(A)) = dim(R(A^T)) = \overbrace{r(A^T)}^{\text{dim sopra}} = r(A)$.

PROP. 4.61: Data S la riduzione a scala di A e $q_1, \dots, q_r$ gli indici delle colonne di A contenenti i pivot, allora $\{A_{C(q_1)}, \dots, A_{C(q_r)}\}$ è una base di $C(A)$.

OSS. $dim(C(A)) = dim(C(S))$ ma $C(A) \neq C(S)$ e quindi $\{S_{C(q_1)}, \dots, S_{C(q_r)}\}$ non è una base di $C(A)$.

ESEMPIO 1: Verificare se $\{\overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(0,1,1)}, \overset{v_3}{(1,0,1)}\}$ è base di $V = \mathbb{R}^3$.

Scriviamo la matrice associata ai vettori:

$$\begin{array}{l} \underline{v}_1 = \\ \underline{v}_2 = \\ \underline{v}_3 = \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \cdot e_1 + \\ 0 \cdot e_1 + \\ 1 \cdot e_1 + \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \cdot e_2 + \\ 1 \cdot e_2 + \\ 0 \cdot e_2 + \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \cdot e_3 \\ 1 \cdot e_3 \\ 1 \cdot e_3 \end{array} \right] \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\dim(C(A)) = \dim(\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)) = r(A) \Rightarrow$ riduco a scala A e ne calcolo il rango: [...]

Il rango è 3, che coincide con il numero di generatori, quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è base.

RAPP. PARAMETRICA E ALGEBRICA: Dato $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \mathrm{Span}((\underline{v}_1 = (1,-1,0)), (\underline{v}_2 = (0,1,-1)))$ e $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Ogni vettore $\underline{v} \in U$ ammette decomposizione $\underline{v} = t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2$.

Quindi $\underline{v} = (x,y,z) \in U$ se e solo se esistono t_1, t_2: $t_1(1,-1,0) + t_2(0,1,-1)$:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = -t_1 + t_2 \\ z = -t_2 \end{cases} \Rightarrow \text{rappresentazione parametrica di } U$$

Il sistema possiamo riassumerlo in: $y = -x - z \Rightarrow x + y + z = 0$] $\Rightarrow$ rappresentazione algebrica di U

Un vettore $\underline{v} \in U$ se e solo se il sistema ammette soluzioni in t_1, t_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right] \to [\dots] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+y+z \end{array}\right].$$

Per Rouché-Capelli, il sistema è risolubile solo se $x+y+z=0$. Questa condizione non è altro che la rappresentazione algebrica.