Punti di non derivabilità

1) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ $\Rightarrow$ punto a tangenza verticale
2) $f'^{(l)}_-(x_0) \neq f'^{(l_2/\pm\infty)}_+(x_0)$ $\Rightarrow$ punto angoloso
3) $f'_-(x_0)=\pm\infty \neq f'_+(x_0)=\pm\infty$ $\Rightarrow$ cuspide

Punti di max/min relativo

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$ $\quad x_0$ è un punto di minimo relativo se $\exists\delta>0$ $\forall x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$ $f(x)\geq f(x_0)$

″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ massimo relativo se $\exists\delta>0$ $\forall x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$ $f(x)\leq f(x_0)$

Teorema di Fermat

Sia $f:[a;b]\subseteq A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a;b)$ ed esiste finita la derivata di f in x_0. Se x_0 è max/min relativo, allora $f'(x_0)=0$ $\Rightarrow$ condizione necessaria MA NON SUFFICIENTE (vedi $y=x^3$)

DIM: x_0 min relativo $\Rightarrow \exists\delta>0$ $\forall x\in[x_0-\delta; x_0+\delta]$ $f(x)\geq f(x_0)$. Valuto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases}\geq 0 & \text{se } x>x_0\\ \leq 0 & \text{se } x<x_0\end{cases}$. Poiché $f(x)$ è derivabile in x_0: $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\end{cases}$ per permanenza del segno $\Rightarrow$ poiché i due limiti devono coincidere $f'(x_0)=0$

Possibili punti di max/min rel.

1) Se f è derivabile $f'(x_0)=0$ $\quad$ 2) Dove f non è derivabile

Teorema di Rolle

Sia $f:[a;b]\subseteq A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$ con $f(a)=f(b)$. Allora esiste $x_0\in(a;b)$: $f'(x_0)=0$

DIM. f continua in $[a;b] \Rightarrow$ Vale Weierstrass $\Rightarrow \exists x_1,x_2\in[a;b]$: $f(x_1)\leq f(x)$, $f(x_2)\geq f(x)$ $\forall x\in[a;b]$.

1) Se $x_1\in(a;b)\wedge x_2\in(a;b)$ allora f è derivabile su x_1/x_2 $\Rightarrow$ per Fermat $f(x_1)/f(x_2)=0$
2) Se $x_1=a$, $x_2=b$ $\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ per Hp $\Rightarrow f(x)$ è costante $\Rightarrow f'(x)=0$ $\forall x\in(a;b)$

OSS. f <u>non</u> continua: $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x & x\in(0;1]\end{cases}$ $\Rightarrow$ <u>non</u> continua in x_0, derivabile in $(0;1)$, $f(0)=1=f(1)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x\in(0;1)$ $\Rightarrow$ cond. necessaria

f <u>non</u> derivabile: $f(x)=|x|$ $\Rightarrow$ continua in $[0;1]$, <u>non</u> derivabile in $(0;1)$, $f(0)=1=f(0)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x\in(0;1)\setminus\{x_0\}$ $\Rightarrow$ deriv. necessaria

$f(a)\neq f(b)$: $f(x)=x$ $\Rightarrow$ ″ ″ ″, derivabile in $(0;1)$; $f(0)\neq f(1)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x\in(0;1)$ $\Rightarrow$ uguagl. necessaria

Teorema di Lagrange (non è francese)

Sia $f:[a;b]\subseteq A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$ con $x_0\in(a;b)$. Esisterà allora $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM: La retta passante per $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$ è: $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Definiamo $g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$:

1) $g(x)$ è continua (somma di funzioni continue)
2) $g(x)$ è derivabile (″ ″ ″ derivabili)
3) $g(a)=\cancel{f(a)}-\cancel{f(a)}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cancel{(a-a)}=0$; $g(b)=\cancel{f(b)}-\cancel{f(a)}-\frac{\cancel{f(b)-f(a)}}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}=0$

Possiamo applicare Rolle a $g(x) \Rightarrow g'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ $\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$