Rappresentazione Algebrica e Parametrica

In $A^3_{\mathbb{R}}$, costruiamo π contenente $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$. π è determinato da un suo punto, ad esempio P_1, e dalla sua giacitura $U = \{\overrightarrow{P_1Q} \in \mathbb{R}^3 \mid Q \in \pi\}$. Costruiamo una base della giacitura: $\mathcal{B}_U = \{\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,1,0), \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,0,1)\}$

Il generico $\overrightarrow{P_1Q}$ sarà: $t_1\overrightarrow{P_1P_2} + t_2\overrightarrow{P_1P_3}$. Il sistema di riferimento del piano è $\mathcal{B}_{P_1} = \{P_1, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\}$. Avremo $Q_{|\mathcal{B}_{P_1}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$

Per avere le rappresentazioni consideriamo l'intero spazio. Usiamo il sistema di riferimento canonico. Cerchiamo come scrivere il generico $Q \in \pi$ rispetto a $\mathcal{B}_0$.

$$Q_{|\mathcal{B}_0} = P_{1|\mathcal{B}_0} + \overrightarrow{P_1Q}_{|\mathcal{B}_0} = P_{1|\mathcal{B}_0} + t_1\overrightarrow{P_1P_2}_{|\mathcal{B}_0} + t_2\overrightarrow{P_1P_3}_{|\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-t_1-t \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\pi: \begin{cases} x = 1-t_1-t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \rightarrow \text{RAPP. PAR.}}$$

Se andiamo a risolvere il sistema, otteniamo la $\boxed{\text{RAPP. ALG: } \pi: x+y+z-1=0}$

Le rappresentazioni variano in base a sistema di riferimento e basi scelte.

Mutua Posizione

Siano S, T due sottospazi di A con giacitura U, W non banali. Essi si dicono:

PARALLELI: $U \subseteq W \vee W \subseteq U$

INCIDENTI: Se non sono paralleli e $S \cap T \neq \emptyset$.

SGHEMBI: Se non sono né paralleli né incidenti.

Consideriamo A spazio affine con $\dim(A) = n$ e $\mathcal{B}_0$ sistema di riferimento.

- Prendiamo S sottospazio con $\dim(S) = p$, allora $S_{|\mathcal{B}_0}: [A|B] \in Mat(n-p, n+1; \mathbb{K})$

  OSS.: $r([A|B]) = r(A)$. Voglio ∞^p soluzioni $\Rightarrow p = n - r(A)$. Se tutte le righe sono indipendenti, allora $r(A) = n-p$.
- Prendiamo T sottospazio con $\dim(T) = q$, allora $T_{|\mathcal{B}_0}: [A|B] \in Mat(n-q, n+1; \mathbb{K})$.

Definiamo $[\tilde{A}|\tilde{B}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ A' & B' \end{array}\right] \in Mat(2n-p-q; n+1; \mathbb{K})$. Questo sistema ha soluzioni pari a $S \cap T_{|\mathcal{B}_0}$. Supponiamo $p \geq q$. Allora

- $S /\!/ T$ con $T \subseteq S$ se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) = n-q$;
- S e T sono paralleli disgiunti se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) = n-q$
- S e T sono incidenti se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) > n-q$;
- S e T sono sghembe se e solo se $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) > n-q$;

DIM.: per Hp $r([A|B]) = r(A) = n-p$; $r([A'|B']) = r(A') = n-q$

Le giaciture di S e T sono i nuclei delle rispettive matrici: $U \sim Ker(A)$; $W \sim Ker(A')$. $U \cap W$ sarà la giacitura di $S \cap T \sim Ker(\left[\begin{smallmatrix} A \\ A' \end{smallmatrix}\right]) = Ker(\tilde{A})$.

PAR. Poiché $p \geq q$, $U \not\subseteq W$ quindi $S /\!/ T$ se e solo se $W \subseteq U$. Ciò è possibile se e solo se $U \cap W = W$ e quindi $r(\tilde{A}) = r(A') = n-q$

INC. Si ha incidenza se $T \cap S \neq \emptyset$, ossia se $[\tilde{A}|\tilde{B}]$ ha soluzione, ossia quando $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A})$ (per Rouché-Capelli).

Fasci di Iperpiani

Presi A, S, T con $\dim(A) = n \geq 2$; $\dim(S) = n-2$, $\dim(T) = n-1$.

1) Il fascio proprio di iperpiani con sostegno S è l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti S;
2) Il fascio improprio di iperpiani paralleli a T è l'insieme di tutti gli iperpiani paralleli a T;

Caratterizzazione Algebrica dei Fasci

Siano T_1, T_2 due iperpiani distinti del fascio di equazioni $[A_1|B_1]$, $[A_2|B_2]$, allora T appartiene al fascio se e solo se la sua equazione è combinazione lineare dei due: $[t_1A_1 + t_2A_2 | t_1B_1 + t_2B_2]$.

PR. 7.22

CO. 7.23

$\rightarrow$ VEDI APPUNTI BEEP(11-GEOMETRIA-AFFINE.PDF)