15/03 —

CHIARIMENTO SU SE/ALLORA

Quando la proposizione "se x allora y" ($x \Rightarrow y$)? Essa è falsa solo se A è vero mentre B è falso. Quindi se A è falso, la relazione rimane vera !!

RELAZIONI

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano.

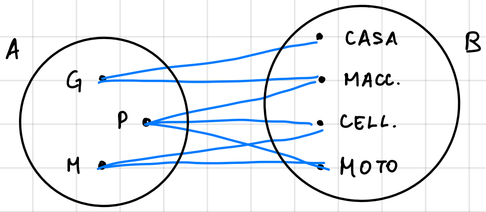
Prodotto Cartesiano

Si definisce prodotto cartesiano di $A_1, \dots, A_n$ insiemi $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \cdots a_n \in A_n\}$
Nota bene: $\{a, b\}$ è una coppia non ordinata; $(a,b) := \{a, \{b\}\}$ è una coppia ordinata (definizione data da Kuratowski)

Relazioni

Definiamo una relazione n-aria su $A_1, \dots, A_n$ $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$. Di conseguenza una relazione 1-aria sarà $R \subseteq A$.

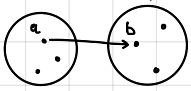
D'ora in poi parleremo principalmente di relazioni binarie $R \subseteq A_1 \times A_2$.



Notazioni:

- $R \subseteq T$ se $(a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in T$
- $R = T$ se $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
- $R \cap T = \{(a,b) \in A_1 \times A_2 : (a,b) \in R \wedge (a,b) \in T\}$
- $R \cup T = \{$ " " : " $\vee$ " $\}$
- $(a,b) \in R = a R b$

Come rappresentiamo una relazione binaria?

1) A e B sono insiemi finiti ($|A||B| < +\infty$)
   - grafo di adiacenza:  disegno la freccia se $a R b$
   - matrice di adiacenza: fissiamo un ordinamento di $A_1 = \{\overset{I}{G}, \overset{II}{P}, \overset{III}{M}\}$ e $A_2 = \{\overset{I}{CA}, \overset{II}{MA}, \overset{III}{CE}, \overset{IV}{MO}\}$ e definisco una matrice $A \in Mat(|A_1| \times |A_2|, \{0,1\})$ di cui gli elementi saranno

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow M_R = \begin{array}{c} \\ G \\ P \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} CA & MA & CE & MO \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Come si comporta la matrice di adiacenza in presenza di unione ed intersezione?
- intersezione: vengono presi gli 1 presenti in entrambe le matrici $\Rightarrow (M_{R \cap T})_{ij} = (M_R)_{ij} (M_T)_{ij}$
- unione: vengono presi tutti gli 1 $\Rightarrow (M_{R \cup T})_{ij} = M_R \oplus M_T \rightarrow$ somma booleana

Prodotto di relazioni

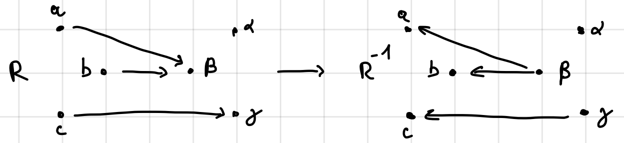
Prendiamo due relazioni $R \subseteq A_1 \times \underline{A_2}$ e $T \subseteq \underline{A_2} \times A_3$ definiamo allora il prodotto
$R \cdot T \subseteq A_1 \times A_3 = \{(a,c) \in A_1 \times A_3 : \exists b \in A_2 : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\}$

Supponiamo di conoscere $M_R \in Mat(|A_1|\times|A_2|, \{0,1\})$ e $M_T \in Mat(|A_2|\times|A_3|, \{0,1\})$, posso scrivere $(M_R M_T)_{IJ} = \sum_{K=1}^{|A_2|} (M_R)_{IK}(M_T)_{KJ}$
Il valore di $(M_R M_T)_{IJ}$ rappresenta il numero di cammini possibili tra i nodi i e j degli insiemi di arrivo e partenza.
Se eseguiamo $M_R M_T$ ponendo tutti gli elementi maggiori di zero pari a 1, otteniamo la matrice d'adiacenza di $R\cdot T$.

Il prodotto di relazioni è associativo, ma non commutativo. Esso, inoltre, è anche compatibile con l'inclusione:
se $R \subseteq T \subseteq A_1\times A_2$, $S \subseteq U \subseteq A_2\times A_3$ allora $R\cdot S \subseteq T\cdot U$.

Inversa di una relazione

Data una relazione $R \subseteq A_1\times A_2$, l'inversa della relazione è $R^{-1} \subseteq A_2\times A_1 = \{(b,a)\in A_2\times A_1 : (a,b)\in R\}$



Se M_R è la matrice d'incidenza di R, quella di R^{-1} sarà $M_{R^{-1}} = M_R^T$. Inoltre, è lecito scrivere che $R\cdot R^{-1} \subseteq A_1\times A_1$
e $R^{-1}\cdot R \subseteq A_2\times A_2$.

Relazioni binarie su di un unico insieme ($R \subseteq A\times A$)

Le relazioni binarie su un unico insieme hanno matrice di adiacenza quadrata. Di conseguenza, il prodotto di relazioni è sempre possibile e possiamo definire le potenze di relazioni (valgono le solite proprietà delle potenze).
Delle relazioni notevoli di questo tipo sono:
- La relazione vuota $\emptyset$
- La relazione identità I_A (nota: $R^0 = I_A$)
- La relazione universale ω_A

Estendendo l'osservazione sul prodotto matriciale effettuata prima, possiamo affermare che $(M_R^K)_{IJ}$ è il numero di percorsi di lunghezza K tra i e j

Una relazione binaria ha delle interessanti proprietà:
- si definisce seriale una relazione che soddisfa: $\forall a\in A\ \exists b\in A\ (a,b)\in R$ (ogni riga di M_R ha un 1)
- " " riflessiva " " " " : $\forall a\in A\ (a,a)\in R$ (la diagonale di M_R ha solo 1)
- " " simmetrica " " " " : $\forall a,b\in A$ se $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$ (M_R è simmetrica)
- " " antisimmetrica " " " " : $\forall a,b\in A$ se $(a,b)\in R$ e $(b,a)\in R \Rightarrow a=b$
- " " transitiva " " " " : $\forall a,b,c\in A$ se $(a,b)\in R$ e $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$ (R è transitiva $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$)
  - se una relazione è transitiva, per ogni percorso abbiamo una connessione tra inizio e fine.

Quasi nessuna di queste proprietà implica le altre: Seriale $\not\Rightarrow$ Riflessiva; Antisimmetrica $\not\Rightarrow$ Non simmetrica
Transitiva e simmetrica $\not\Rightarrow$ riflessiva. Però abbiamo che Riflessiva $\Rightarrow$ Seriale e Transitività, simmetria, serialità $\Rightarrow$ riflessiva

Come si comportano unione, intersezione, prodotto e inversione rispetto alle proprietà precedenti?

	$\cap$	$\cup$	$\cdot$	-1
SERIALE	✗	✓	✓	✗
RIFLESSIVA	✓	✓	✓	✓
SIMMETRICA	✓	✓	✗	✓
ANTISIMMETR.	✓	✗	✗	✓
TRANSITIVA	✓	✗	✗	✓

Chiusura di una relazione

Dato P un insieme di proprietà, la P - chiusura di $R \subseteq A \times A$ è una relazione $T \subseteq A \times A$ se $R \subseteq T$ e T è la più piccola relazione che soddisfa P.

Conseguenza della definizione è che $\forall S \subseteq A \times A$ che soddisfa P e $R \subseteq S$, $T \subseteq S$. Quindi la P - chiusura è unica.
DIMOSTRAZIONE: Prendiamo T_1 come P - chiusura e T_2 anch'essa P - chiusura. Per le proprietà sopra otteniamo $T_1 \subseteq T_2$ e $T_2 \subseteq T_1 \Rightarrow T_1 = T_2$.

Un'altra conseguenza è che se R stesso rispetta P, allora esso sarà chiusura di sé stesso.

Il seguente teorema descrive le condizioni per l'esistenza della P - chiusura di R:

Consideriamo $R \subseteq A \times A$ e fissiamo P l'insieme di proprietà. Se:
1. $\exists H \subseteq A \times A$ che soddisfa P e $R \subseteq H$
2. L'intersezione di relazioni che soddisfano P è a sua volta una relazione che soddisfa P

allora esiste la P - chiusura di R.

Usando il teorema sopra, possiamo affermare che per $P \subseteq \{$Riflessiva, Transitiva, Simmetrica$\}$ esiste sempre la P - chiusura di $R \subseteq A \times A$ e viene indicata $\bar{R}^P$. Le altre proprietà, in generale, non possono essere chiuse.

Chiusura riflessiva

Per chiudere riflessivamente una relazione R, basta aggiungere tutti cappi mancanti: $\bar{R}^{RIFL.} = R \cup I_A \quad (M_R \oplus I)$

Chiusura simmetrica

Per chiudere simmetricamente una relazione R, basta aggiungere tutte le frecce al contrario: $\bar{R}^{SIMM} = R \cup R^{-1} \quad (M_R \oplus M_R^T)$

Chiusura transitiva

Per chiudere transitivamente R, bisogna fare:
- $\bar{R}^{TR} = \bigcup_{K \geq 1} R^K$ dove K è la lunghezza del percorso più lungo
- $M_{\bar{R}^{TR}} = M_R \oplus M_R^2 \oplus M_R^3 \oplus \cdots \oplus M_R^i$ dove i è il piccolo indice soddisfa $M_R^{i+1} \subseteq M_R \oplus \cdots \oplus M_R^i$

DIMOSTRAZIONE: Sia $H = \bigcup_{K > 0} R^K$. Dimostriamo che H è chiusura di R:
1) $R \subseteq H$
2) È transitiva: $(a,b),(b,c) \in H \Rightarrow (a,b) \in R^i \quad (b,c) \in R^{i+J} \Rightarrow (a,c) \in R^{i+J} \subseteq H$
3) Sia S una relazione $R \subseteq S$ ed è transitiva. Avremo che $R \subseteq S \Rightarrow R^2 \subseteq SR$ e $R \subseteq S \Rightarrow SR \subseteq S^2$ e quindi $R^2 \subseteq S^2$. Siccome S è transitiva otteniamo che $R^2 \subseteq S^2 \subseteq S \Rightarrow R^2 \subseteq S$. Consideriamo $R^3 = R^2 \cdot R \subseteq SR \subseteq S^2 \subseteq S$, quindi $R^3 \subseteq S$. Continuando così, possiamo affermare che $H = \bigcup_{K > 0} R^K \subseteq S$. Quindi H è la più piccola relazione transitiva che contiene R.

Chiusura riflessiva + simmetrica

$$\bar{R}^{R+S} = R \cup R^{-1} \cup I_A$$

$$M_{\bar{R}^{R+S}} = M_R \oplus M_R^T \oplus I$$

Chiusura riflessiva + transitiva

$$\bar{R}^{R+T} = \bigcup_{K > 0} R^K \cup I_A = \bigcup_{K \geq 0} R^K$$

Chiusura simmetrica + transitiva

$$\overline{R}^{S+T} = \bigcup_{K>0} (R \cup R^{-1})^K$$!! Prima chiudo simmetricamente poi transitivamente

Chiusura simmetrica + riflessiva + transitiva

$$\overline{R}^{RST} = \bigcup_{K \geq 0} (R \cup R^{-1})^K$$!! Prima chiudo simmetricamente poi transitivamente.

Relazione d'equivalenza

Si dice una relazione d'equivalenza una relazione che è simmetrica, riflessiva e transitiva. La chiusura d'equivalenza esiste sempre in quanto si può sempre chiudere riflessivamente, simmetricamente e transitivamente.

Con il grafo d'adiacenza di una relazione la chiusura equivalente è immediata: basta saturare ogni connessione in ogni sezione connessa.

Se $R, T \subseteq A \times A$, avremo che $R \cap T$ è ancora d'equivalenza, R^{-1} è transitiva, $R \cup T$ e $R \cdot T$ in generale non sono transitivi

ESEMPIO: Relazione modulo $n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\equiv_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a,b) \in \equiv_n$ se $a-b = Kn$ $K \in \mathbb{Z}$. Dati $a = K_1 n + r_a$ e $b = K_2 n + r_b$.
Avremo che $a-b = (K_1 - K_2)n + (r_a - r_b)$ quindi $a \equiv_n b \iff r_a = r_b$.
Dimostriamo che $\equiv_n$ è di equivalenza:
1) riflessiva: $n \mid a-a = 0$ n è sempre divisore di 0
2) simmetrica: $n \mid a-b = n \mid b-a$
3) transitiva: $n \mid a-b$ e $n \mid b-c$, quindi $r_a = r_b$ e $r_b = r_c$ e quindi $r_a = r_c \Rightarrow n \mid a-c$

Si può pensare alle relazioni di equivalenza come una generalizzazione dell'eguaglianza.

Classe d'equivalenza

Sia $\rho \subseteq A \times A$ di equivalenza, dato un elemento $a \in A$ la classe d'equivalenza con rappresentante a rispetto ρ è:

$$[a]_\rho := \{ b \in A : (a,b) \in \rho \}$$

L'insieme delle classi d'equivalenza di ρ è chiamato insieme quoziente ed è indicato con $A/\rho := \{ [a]_\rho \ a \in A \}$

Una partizione è una collezione di insiemi A_i con $i \in I$ e $A_i \subseteq A$: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e $\forall i,j \in I$ $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$. È facile capire che A/ρ forma una partizione di A. Viceversa, se $A_i, i \in I$ è una partizione di A, posso definire una relazione d'equivalenza σ tale che $A/\sigma = \{ A_i \ i \in I \}$

Relazione d'ordine

Data una relazione $R \subseteq A \times A$, essa è d'ordine se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica

Si può pensare alle relazioni d'ordine come una generalizzazione di $\leq$. Infatti si usa $\leq$ per indicare una relazione d'ordine.

Se $\forall a,b \in A$ $a \leq b$ o $b \leq a$ allora la relazione d'ordine è totale. Se invece $\exists a,b \in A$: $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$ allora a e b si dicono non-confrontabili.

La coppia $(A, \leq)$ con $\leq$ relazione d'ordine si chiama POSET (Partially Ordered Set)

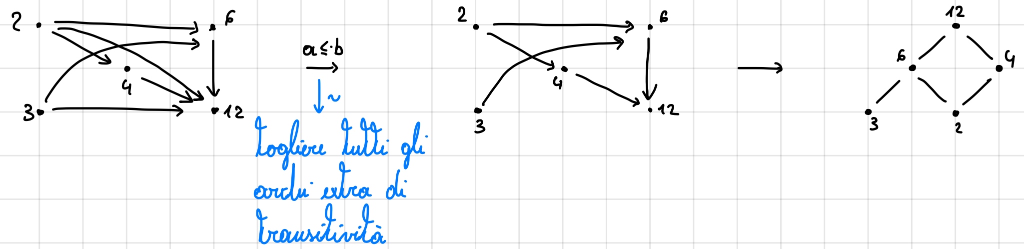
La chiusura d'ordine non sempre esiste perché in generale la chiusura antisimmetrica. Per tentare di chiudere una R antisimmetrica bisogna prima chiudere riflessivamente e transitivamente. Se quest'ultima chiusura è antisimmetrica, allora essa è la chiusura d'ordine di R.

Diagramma di Hasse di un Poset

Sia $\leq \subseteq A \times A$ d'ordine. Diciamo che b copre a se $a \leq b$ e non esiste alcun $c \in A$ $c \neq a,b$: $a \leq c$ e $c \leq b$ (si indica $a \lessdot b$)
Si definisce diagramma di Hasse di $(A, \leq)$ un diagramma così costruito:

1) Nel grafo di adiacenza di $\leq$ considero solo gli archi $a \to b$ con $a \lessdot b$
2) Si orientano gli archi dall'alto verso il basso: $a \to b \implies \overset{b}{\underset{a}{|}}$

ESEMPIO: $A = \{2,3,4,6,12\}$, $\leq \subseteq A \times A$ $a \leq b$ se $a|b$ (a divide b)



Minimo, minimale, massimo e massimale

Dato $(A, \leq)$ un Poset allora $a \in A$ è minimo se $\forall x \in A$ $a \leq x$ e massimo se $\forall x \in A$ $a \geq x$. Minimo e massimo sono unici.

Chiamiamo minimale un elemento $a \in A$ tale che se $x \leq a \implies x = a$. Analogamente il massimale è un $a \in A$: se $x \geq a \implies x = a$.
Se minimo o massimo esistono, essi saranno rispettivamente minimale o massimale e, in più, non esistono altri minimali o massimali che non sono minimi o massimi. Un minimale/massimale non per forza è un minimo/massimo

Se A è finito e in $(A, \leq)$ abbiamo un unico minimale (massimale) a, allora a è minimo (massimo). Se A è infinito, invece, la proposizione precedente non è valida.

Maggioranti, minoranti, estremo superiore e inferiore

Sia $(A, \leq)$ un Poset e $B \subseteq A$. Abbiamo che $m \in A$ si dice maggiorante se $\forall x \in B$ $x \leq m$ e minorante se $\forall x \in B$ $x \geq m$.
Chiamiamo, quindi, estremo superiore di $B \subseteq A$ il minimo dei maggioranti di B ed estremo inferiore il massimo dei minoranti.

Reticoli

Definiamo reticolo un Poset $(A, \leq)$ per cui $\exists \operatorname{Inf}\{a,b\}$, $\exists \operatorname{Sup}\{a,b\}$ $\forall a,b \in A$. I reticoli si possono assiomatizzare come strutture algebriche