Traccia e Determinante

Prof.
Marco
Compagnoni

FUNZIONI DA

$Mat(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$:

- Traccia
- Definizione di determinante
- Determinante ed operazioni, trasposta ed inversa
- Determinante ed operazioni elementari, riduzione a scala e rango
- Formula di Laplace, aggiunta ed inversa

TRACCIA (DEFINIZIONE 3.63)

$A = [a_{ij}] \in Mat(n; \mathbb{K}) \implies Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 3.64)

i) $Tr(s \cdot A + t \cdot B) = s \cdot Tr(A) + t \cdot Tr(B)$ (linearità);

ii) $Tr(A^T) = Tr(A)$;

iii) $Tr(AB) = Tr(BA)$.

OSS: $Tr(A_1 \dots A_{k-1} A_k) = Tr(A_k A_1 \dots A_{k-1}) \neq Tr(A_1 \dots A_k A_{k-1})$

Sottomatrici (Definizione 3.65)

$A_{\widehat{i_1 \dots i_k}\ \widehat{j_1 \dots j_\ell}}$ = matrice ottenuta da A eliminando $R(i_1), \dots, R(i_k)$ e $C(j_1), \dots, C(j_k)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A_{\hat{0}\hat{0}}, \quad A_{\hat{1}\hat{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{1}\hat{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{1}\hat{3}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinante (Definizione 3.67)

$A \in Mat(n; \mathbb{K}) \Rightarrow \det(A) = |A| \in \mathbb{K}$ è definito iterativamente.

- $n = 1$: $\det([a_{11}]) = a_{11}$;
- $n > 1$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$ dove $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\hat{i}\hat{j}})$

  è detto complemento algebrico di a_{ij}.

$$n=2: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot C_{11} + b \cdot C_{12} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{vmatrix} =$$

$$= ad - bc$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} =$$

$$= 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (4-0) + 2 \cdot (1-0) = -2$$

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$\det(I_n) = 1$$

Determinante ed Algebra delle Matrici (Sezione 3.8.1)

- $|A+B| \neq |A| + |B|$
- $|t \cdot A| = t^n \cdot |A|$

Teorema di Binét (Teorema 3.83)

$|AB| = |A| \cdot |B|$, cioè il determinante è una funzione moltiplicativa.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2 \quad |B| = -1$

$|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -8 \neq |A| + |B|$, $\quad |AB| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2 = |A| \cdot |B|$.

Corollario 3.94, Proposizione 3.84

- Sia A invertibile $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- $|A^T| = |A|$.

Dim: $AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I_n| = 1$ $\square$

DETERMINANTE E RANGO (TEOREMA 3.69)

$\det(A) \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.

CoROLLARIO 3.70

. $[A|B]$ ha unica soluzione se e solo se $\det(A) \neq 0$;

. A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Schema della dimostrazione Teorema 3.69:

(i) determinante e Metodo di Eliminazione di Gauss;

(ii) sviluppi di Laplace;

(iii) determinante di matrici a scala.

(i) PROPOSIZIONE 3.72, COROLLARIO 3.77

- $A \xrightarrow{R(i) \leftrightarrow R(j)} B \implies \det(B) = -\det(A)$;
- $A \xrightarrow{t \cdot R(i) \to R(i)} B \implies \det(B) = t \cdot \det(A)$;
- $A \xrightarrow{R(i) + t \cdot R(j) \to R(i)} B \implies \det(B) = \det(A)$.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \longrightarrow$

- $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -(ad - bc)$
- $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc)$
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c-ta & d-tb \end{vmatrix} = a(d - \cancel{tb}) - b(c - \cancel{ta}) = ad - bc$

PROPOSIZIONE 3.78

Sia S riduzione a scala di A, ottenuta attraverso:

- K permutazioni di righe;
- r moltiplicazioni di righe per gli scalari $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K}^*$.

$\implies \det(S) = (-1)^K \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_r \cdot \det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2 \cdot R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S$$

$$\Rightarrow k = 1 \qquad r = 1 \qquad t_1 = 1/2 \qquad \Rightarrow \det(S) = -1/2 \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -2 \cdot 1 = -2$$

Oss: dalla Proposizione 3.78 segue quindi che

$$\det(A) = \frac{(-1)^k}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_r} \cdot \det(S),$$

che è una formula efficiente per il calcolo del determinante.

(ii) Sviluppi di Laplace per righe (Proposizione 3.74)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{per ogni} \quad 1 \le i \le n .$$

Dim: sia
$$B = \begin{bmatrix} A_{R(i)} \\ A_{R(1)} \\ \vdots \\ A_{R(i-1)} \\ A_{R(i+1)} \\ \vdots \\ A_{R(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow B$ attraverso $(i-1)$ permutazioni di righe

$$\Rightarrow |B| = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot |B_{\hat{1}\hat{j}}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{1+j} \cdot |A_{\hat{i}\hat{j}}| = (-1)^{i-1} \cdot |A|$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{2-i+j} \cdot |A_{\hat{i}\hat{j}}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{\hat{i}\hat{j}}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \quad \boxtimes$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (-2) + 4 \cdot (-1) = -2$$

Sviluppi di Laplace per colonne (Corollario 3.86)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{per ogni } 1 \leq j \leq n.$$

Dim: dagli sviluppi per righe e da $|A^T| = |A|$. $\square$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$$

Corollario 3.85

$\det(A) = 0$ se:

- una riga o una colonna di A è nulla;
- due righe o due colonne di A sono uguali.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S \implies |A| = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) DETERMINANTE DI MATRICI TRIANGOLARI (PROPOSIZIONE 3.79)

Sia A triangolare $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |6| = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot |1| = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$$

OSS: $|I_n| = 1$ per ogni n.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3.69

$A \to S \Rightarrow |A| = \dfrac{(-1)^k}{t_1 \dots t_r} |S| \neq 0$ sse $|S| \neq 0$.

Ma S è a scala $\Rightarrow S$ è triangolare alta $\Rightarrow |S| \neq 0$ sse la sua diagonale non ha elementi nulli sse $r(S) = n = r(A)$ $\boxtimes$

MATRICE AGGIUNTA (DEFINIZIONE 3.88)

$A \in Mat(n; \mathbb{K})$ con C_{ij} i suoi complementi algebrici.

Allora la matrice aggiunta $A^* \in Mat(n; \mathbb{K})$ è $(A^*)_{ij} = C_{ji}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = A^*A = -2 \cdot I_3 = |A| \cdot I_3$$

Oss: il risultato precedente è vero in generale.

TEOREMA DI LAPLACE (TEOREMA 3.89)

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot I_n$$

COROLLARIO 3.90

Se A è invertibile $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Gruppo Generale e Speciale Lineare (Teorema 3.92)

- L'insieme delle matrici invertibili in $Mat(n;\mathbb{K})$ è un gruppo rispetto a $*$, detto gruppo generale lineare $GL(n;\mathbb{K})$.
- L'insieme delle matrici con determinante 1 è un sottogruppo di $GL(n;\mathbb{K})$, detto gruppo speciale lineare $SL(n;\mathbb{K})$.
- $\det : GL(n;\mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^*, \cdot)$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi.

DIM: • se $A, B \in GL(n;\mathbb{K}) \Rightarrow |AB| = |A||B| \neq 0 \Rightarrow AB \in GL(n;\mathbb{K})$.

i) $I_n \in GL(n;\mathbb{K})$ perché $|I_n| = 1 \neq 0$.

ii) $A \in GL(n;\mathbb{K}) \Rightarrow$ esiste A^{-1} e $(A^{-1})^{-1} = A \Rightarrow A^{-1} \in GL(n;\mathbb{K})$.

iii) $*$ è associativo perché lo è in $Mat(n;\mathbb{K})$.

• $|A * B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow \det$ è un omomorfismo.

Sia infine $t \in \mathbb{K}^* \Rightarrow |T(1;t)| = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = t \Rightarrow \det$ è suriettivo. $\boxtimes$