Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0,\varepsilon) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \varepsilon\}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) è limitato se $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^2,\ \rho > 0 : A \subseteq B(x_0,\rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$. Bisogna ora definire quando un insieme è connesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\begin{aligned} r : \quad & I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & r(t) \longmapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \\ & t \in I \end{aligned}$$

Possiamo ora dire un insieme connesso come:

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r} : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = x$ e $\bar{r}(b) = y$, $r(t) \subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\underline{x}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\overline{x}) \end{cases}$$

Abbiamo già visto delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x^i - x_0^i| \to 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ε / δ. Ciò ci permetterà di definire il limite di funzioni in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_J(\underline{x}) = \ell_J \quad \forall J = 1, 2, \dots, m \qquad \text{con } f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ e } \ell \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in $\mathbb{R}^n$ avviene, quindi, per coordinate. Se so studiare $f^J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ posso studiare anche $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Continuità e derivabilità di funzioni $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Consideriamo $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, allora $f_J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $\underline{f} \in \mathcal{C}(I) \Leftrightarrow f_J \in \mathcal{C}(I) \quad \forall J = 1, \dots, n$
- $\underline{f}$ è derivabile su I se e solo se sono derivabili tutte le f_J su I

LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Poiché disegnare il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello K di f come $I = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K \}$.

Per disegnare il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (isolare le singole coordinate ponendo le altre pari a zero/costante).
Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazione. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo ruotare. Funzioni di questo tipo sono dette funzioni radiali.

Limite (in)finito per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A insieme aperto, definiamo $\ell \in \mathbb{R}^*$ limite di f per $\underline{x} \to \underline{x}_0 \in A$ se

$$\forall V(\ell) \; \exists U(\underline{x}_0) : \quad \forall x \in U \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) \in V$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell \quad \to \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad |f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \quad \to \quad \forall K > 0 \; \exists \delta = \delta(K) > 0 : \; \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) > K$

Limite per $(x,y) \to \infty$

Poiché per dire che il limite esiste la funzione deve avere lo stesso limite su tutte le restrizioni (vedi definizione successionale di limite), parlare di $(x,y) \to \infty$ si complica la vita. Quando si affrontano i limiti di funzioni all'infinito, si farà riferimento alla norma del vettore (x,y). Possiamo, allora, dire che:

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\underline{x}\| > R \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < R$$

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} f(\underline{x}) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall K > 0 \ \exists R > 0 : \forall \underline{x} \in \mathbb{R} \quad \|\underline{x}\| > R \Rightarrow |f(\underline{x})| > K$$

Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\} \ \underline{x}_n \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \ \underline{x}_n \neq \underline{x}_0 : \lim_{n \to +\infty} \underline{x}_n = x_0 \quad \text{si ha} \quad \lim_{n \to +\infty} f(\underline{x}_n) = l$$

Continuità di funzioni reali a più variabili reali

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Chiamiamo f continua in $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$.

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma / prodotto / quoziente / composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

Proprietà delle funzioni a più variabili continue

- Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e se C è un chiuso di $\mathbb{R}^m$ e A è un aperto di $\mathbb{R}^m$ allora $f^{-1}(C)$ è un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$!! f^{-1} è la controimmagine, non la funzione inversa !!
  - Di conseguenza sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$ (è un insieme chiuso), allora $f^{-1}(c)$ è anch'esso chiuso. Poiché $f(x,y) = c$ è la definizione di un insieme di livello, per il teorema sopra essi sono chiusi
  - Di conseguenza sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, considero $f((0,+\infty))^{-1}$ aperto; per il teorema sopra avremo che la funzione sarà positiva (e con un procedimento analogo negativa) solo su insiemi aperti mentre sarà nulla su insiemi chiusi (vedi considerazione precedente)

Teoremi sulle funzioni continue

- Teorema di Weierstrass: sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua e D un insieme chiuso e limitato, f avrà un massimo ed un minimo assoluti in D.
- Teorema degli zeri: sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua, A connesso per archi; se esiste $\underline{x}_1 \in A : f(\underline{x}_1) > 0$ e $\underline{x}_2 \in A : f(\underline{x}_2) < 0$ allora esiste $\underline{x}_0 \in A : f(\underline{x}_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE: Considero una curva $\underline{r}(t)$ $\underline{r}: [a,b] \to A$: $\underline{r}(a) = \underline{x}_1$ e $\underline{r}(b) = \underline{x}_2$ (per definizione di curva $\underline{r}$ è continua). Considero $g = f \circ \underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$, g è continua in quanto composizione di funzioni continue. Abbiamo che $g(a) = f(\underline{r}(a)) = f(\underline{x}_1) < 0$ e $g(b) = f(\underline{r}(b)) = f(\underline{x}_2) > 0$. Per il teorema degli zeri in 1 variabile, esiste $g(t_0) = f(\underline{r}(t_0)) = 0$. Quindi $\underline{r}(t_0) = \underline{x}_0$

- Conseguenza: se $f(x,y)$ è continua, ogni regione connessa per archi individuata dagli zeri è di segno costante. ■

Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di f esiste, esso è unico
2. Algebra dei limiti:
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f + g = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f + \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g \quad [+\infty - \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \cdot g = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \cdot \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g \quad [0 \cdot \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad [\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}]$
   - data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(f(\underline{x})) = \lim_{t \to t_0} g(t)$
     / $g: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{w} \to \underline{w}_0} f(g(\underline{w})) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$
3. Teorema del confronto: Siano f, g e h definite da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tali che almeno definitivamente per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \leq h(\underline{x})$. Allora se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ e $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} h(\underline{x}) = l$ con $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = l$
4. Teorema della permanenza del segno: Sia f continua e sia $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n : f(\underline{x}_0) > 0$. Allora $\exists \delta > 0 : f(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$.

ESEMPI: Date $f_1(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $f_2(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $f_3(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ $f_4=\frac{x+y}{x^2+y^2}$. Calcola $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$.

$|f_1(x,y)|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq 1\cdot|y|\to 0 \overset{CFR.}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)=0$

$|f_2(x,y)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1\cdot|x|\to 0 \overset{CFR.}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)=0$

$|f_3(x,y)|=\frac{|y||x|}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}\leq 1$ Studiando $f_3(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$, mentre $f_3(x,0)=0$. Il limite, quindi, non esiste.

Al punto $(0,0)$ ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore (cfr: definizione successionale di limite)

$|f_4(x,y)|=\dots\leq 2$ Studiando $f_4(x,-x)=0$, mentre $f_4(x,x)=\frac{2}{x}\to+\infty$. Il limite, quindi, non esiste.

Passaggio a coordinate reali in $\mathbb{R}^2$

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho\in(0;+\infty),\ \theta\in(-\pi;\pi] \ : \ \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a x e a y i corrispettivi. Nota bene: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l \iff \lim_{\rho\to 0}\tilde{f}(\rho,\theta)=l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

ESEMPI: Consideriamo $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_2(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_3(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Calcolare il limite per $\underline{x}\to(0,0)$

$\tilde{f}(\rho,\theta)=\frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho}}=\rho\cos\theta\sin\theta$

$|\tilde{f}(\rho,\theta)|\leq\rho\to 0 \overset{CFR}{\Longrightarrow} \lim_{\rho\to 0}\tilde{f}(\rho,\theta)=0$

$\tilde{f}_2(\rho,\theta)=\frac{\cancel{\rho}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cancel{\rho}}\to \nexists \lim$ perché dipende da θ

$$\tilde{f}_3(\rho,\theta)=\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta}=\rho\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

Per $\rho\to 0$, abbiamo $\tilde{f}_3(\rho,\theta)\sim\rho\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, quindi avremo un problema per $\cos\theta\to 0$. Quindi il limite non esiste

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In $\mathbb{R}$ i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

Derivate parziali

Consideriamo $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Considerando la definizione di derivabilità otteniamo $\lim_{\underline{h}\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)}{\underline{h}}$ che non ha senso poiché $\underline{h}$ è un vettore. Fissiamo una direzione $\underline{v}$, possiamo scrivere $f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)$ e calcolare $\lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$. Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usate saranno i versori canonici di $\mathbb{R}^2$

Se esiste finito $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=l_1$ dirò che esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=l_1$. Analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=l_2$

Le derivabili parziali possono esistere anche se la funzione non è continua.

Derivabilità e gradiente

Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ diciamo che f è derivabile in (x_0,y_0). Definiamo il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\nabla f$ il gradiente di f in (x_0,y_0)

Derivata direzionale

Consideriamo il limite $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$. Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo $D_{\underline{v}}f(x_0,y_0)$ derivata direzionale.

La derivata direzionale può esistere anche se la funzione non è continua.

Funzione differenziabile

In analisi 1 abbiamo visto che $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda$. Possiamo, quindi scrivere che $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$. Andando in $\mathbb{R}^n$, possiamo dire che $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists\, \underline{a} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(\|h\|)$ per $\underline{h} \to \underline{0}$.

In $\mathbb{R}$, la definizione di derivabilità e differenziabilità coincidevano. In $\mathbb{R}^n$, però, questo non accade più.

Applicando la definizione di differenziabilità, otteniamo che

$$f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(h,K) = o(\sqrt{h^2+K^2}) \Rightarrow \lim_{h,K \to 0,0} \frac{f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(h,K)}{\sqrt{h^2+K^2}} = 0$$

Quello che stiamo facendo è associare una funzione differenziale definita così:

$$\left.\begin{aligned} d f(\underline{x}_0):\quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & \underline{x}_0 \mapsto d f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} \end{aligned}\right\} \text{differenziale primo}$$

Condizione necessaria di differenziabilità

Sia f differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$. Allora:
- f è continua in $\underline{x}_0 \in A$
- f è derivabile in $\underline{x}_0 \in A$ e $\underline{a} = \nabla f(x_0)$
- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ $\exists D_v f(\underline{x}_0) \wedge D_v f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$ (formula del gradiente)

Significato della formula del gradiente

Espandendo l'espressione otteniamo che $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) v_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) v_2$. Questo significa che tutte le rette tangenti ai grafici delle restrizioni di f a rette passanti per (x_0,y_0) sono tutte complanari.

Chiamiamo (x,y) il vettore incrementato e $h = x - x_0$ e $K = y - y_0$, possiamo scrivere che

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{Piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0,y_0,f(x_0,y_0))} + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

Riprendendo la definizione, abbiamo che:

$$g(\underline{x}) = \underbrace{f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\text{Iperpiano tangente a } f(\underline{x}_0)} \qquad \text{con } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ e } g \text{ affine}$$

Conseguenze della differenziabilità

- Significato geometrico del gradiente: $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (v_1,v_2) = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cos\theta$ con θ l'angolo formato tra i due vettori. Il gradiente sarà, quindi, la direzione di massima crescita (decrescita).

Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in intorno U di x_0 e tutte le derivate parziali sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.

Se f ha derivate parziali continue su tutto A, allora f è differenziabile su A. Possiamo dire che $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

DIMOSTRAZIONE:

$$f(x_0+h, y_0+K)-f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0, y_0+K) + f(x_0,y_0+K) - f(x_0,y_0) = g(h)-g(0)+g(0)-f(x_0+y_0) =$$

$\hookrightarrow g(t): [0;h] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto f(x_0+t, y_0+K)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0+\theta h, y_0+K)h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0+\eta K)K = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)+\varepsilon_1(h,K)\right)h + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \ \varepsilon_2(K)\right)K =$$

$\hookrightarrow$ Lagrange: $g(h)-g(0) = g'(\theta h)(h-0)$ $\qquad \hookrightarrow \varepsilon_{1,2} \to 0$ per $(h,K)\to(0,0)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0)K + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 K = \nabla f(x_0,y_0)(h,K) + \varepsilon(h,K) = \nabla f(x_0,y_0) + o(\sqrt{h^2+K^2})$$

$$\frac{|\varepsilon(h,K)|}{\sqrt{h^2+K^2}} \leq \frac{\varepsilon(h,K)}{\sqrt{h^2+K^2}} \leq \varepsilon_1(h,K) + \varepsilon_2(K) \to 0 \implies \varepsilon(h,K) = o(\sqrt{h^2+K^2})$$

(affinché $\varepsilon(h,K) = o(\sqrt{h^2+K^2})$) ■

Differenziabilità di funzioni composte

$(g: \mathbb{R}\to\mathbb{R})$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$ e g derivabile (o differenziabile) in $y_0 = f(x_0)$, allora $h: g \circ f$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ e $\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 = \underline{g}(t_0)$ e $\underline{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivabile (o differenziabile) in t_0, allora $h: f \circ g$ è derivabile (o differenziabile) in t_0 e $h'(t_0) = \nabla f(\underline{g}(t_0)) \cdot \underline{g}'(t_0)$

Gradiente e versore tangente

La seconda ha un significato interessante se prendiamo $\underline{g} = \underline{r}$ con $\underline{r}$ un arco di curva continuo e differenziabile. Il versore $\underline{T} = \frac{\underline{r}'(t)}{||\underline{r}'(t)||}$ è il versore tangente alla curva in t

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{r}$ una sua curva di livello con $\underline{r}$ derivabile, $\underline{r}'(t) = \underline{0}$. Se f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \underline{r}(I)$, allora $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale alla curva in $\underline{x}_0 = \underline{r}(t_0)$.

DIMOSTRAZIONE: $h(t) = f(\underline{r}(t))$ su $\underline{r}(I)$ f è costante, quindi h è costante $\forall t \in I$. Segue che $h'(t_0) = 0 = \nabla f(\underline{r}(t_0)) \cdot \underline{r}'(t_0) \implies \nabla f(\underline{r}(t_0)) \perp \underline{r}'(t_0)$ $(// \underline{T}(t_0))$ ■

Teorema della media

Sia f differenziabile su A, Allora $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A$ $\exists \tilde{\underline{x}} \in [\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ tale che $f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2) = \nabla f(\tilde{\underline{x}})(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$

PRELIMINARE: L'espressione di una retta $\underline{r}$ passante per due punti è $\underline{r}(\lambda) = \underline{x}_1 + \lambda(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Per ottenere un segmento, scriveremo $\underline{r}(\lambda) = \underline{x}_1 + \lambda(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ con $\lambda \in [0,1]$

DIMOSTRAZIONE: Riscriviamo $f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)$: usiamo $\underline{r}(t) = \underline{x} = \underline{x}_1 + t(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$ e consideriamo $h(t) = f(\underline{r}(t))$. Avremo che $h(0) = f(\underline{x}_1)$ e $h(1) = f(\underline{x}_2)$. Notiamo che h rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange. Otteniamo così che $h(1) - h(0) = h'(\theta) = f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)$. Come visto prima, abbiamo $h'(\theta) = \nabla f(\underline{x}_1 + \theta(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)) \underline{r}'(\theta)$. Siccome $\underline{r}' = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$, otteniamo che $f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1) = \nabla f(\tilde{\underline{x}})(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$. ■

Differenziazione di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diciamo che $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$ se $\forall j$ f_j è differenziabile.

Siccome ogni f_j avrà un $\nabla f_j(\underline{x}_0)$, definiamo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix} = J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) \to \text{Matrice Jacobiana di } \underline{f} \text{ valutata in } \underline{x}_0$$

Il determinante $|J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)|$ viene chiamato Jacobiano di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$.

Se $\underline{f}$ è differenziabile su A, è possibile definire

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}): \begin{array}{ccl} A & \to & Mat(\mathbb{R}, n, m) \\ \underline{x}_0 & \mapsto & J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) \end{array}$$

Come sarà fatto $\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)$? Sappiamo che $f_j(\underline{x}_0+\underline{h}) - f_j(\underline{x}_0) = \nabla f_j(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}$, quindi l'incremento di $\underline{f}$ lo possiamo scrivere riga per riga:

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0)\cdot\underline{h} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x}_0)\cdot\underline{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix}\cdot\underline{h} = J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}$$

Differenziabilità di funzioni composte per $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Siano $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\underline{g}: \underline{f}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $\underline{f}$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{g}$ differenziabile in $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$. Detta $\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f}$ $\quad \underline{h}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\underline{h}$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ e $J_{\underline{h}}(\underline{x}_0) = J_{\underline{g}}(\underline{y}_0)\cdot J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)$