OSS: $A \sim B \Rightarrow$ invarianti $A =$ invarianti B. Viceversa falso

DEFINIZIONE 6.16

i) $Tr(f) = Tr(F_{|B})$;

ii) $\det(f) = \det(F_{|B})$;

iii) $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id_V) = \det(F_{|B} - \lambda I_n)$.

CALCOLO DI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI (TEOREMA 6.18)

V f.g. su campo $\mathbb{K}$, $f \in End(V)$. Allora:

i) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f sse $P_f(\lambda) = 0$;

ii) $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ è autovettore associato a λ sse $\underline{v} \in Ker(f - \lambda Id_V)$.

DIM: $\underline{v} \neq \underline{0}$ è autovettore sse $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} = \lambda \cdot Id_V(\underline{v})$ sse $(f - \lambda Id_V)(\underline{v}) = \underline{0}$ sse $\underline{v} \in Ker(f - \lambda Id_V) \setminus \{\underline{0}\}$.

Questo è possibile sse $Ker(F_{|B} - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$ sse $\underbrace{|f - \lambda Id|}_{P_f(\lambda)} = 0$. $\boxtimes$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$P_{f_A}(\lambda) = |f_A - \lambda \cdot Id_V| = |A - \lambda I_n| = P_A(\lambda) = |A| - Tr(A)\cdot\lambda + \lambda^2 =$

$= (-4+3) + \lambda^2 = -1 + \lambda^2$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$ sono gli autovalori di A !! devono appartenere a $\mathbb{K}$!!

$V_1 = Ker(f_A - \lambda_1 \cdot Id_V) = Ker(A - I_2) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$

$= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ +1 \end{bmatrix}\right) = V_1$ (AUTOSPAZIO ASSOCIATO A $\lambda = 1$)

$V_{-1} = Ker(f_A - \lambda_2 \cdot Id_V) = Ker(A + I_2) = Ker\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$

$= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = V_{-1}$ (AUTOSPAZIO ASSOCIATO A $\lambda = -1$)

CRITERI DI DIAGONALIZZABILITÀ

MOLTEPLICITÀ DEGLI AUTOVALORI (DEFINIZIONE 6.20)

i) Molteplicità algebrica $ma(\lambda) =$ molteplicità di λ come radice di $P_f(\lambda)$;

ii) Molteplicità geometrica $mg(\lambda) =$ dimensione di V_λ.

DEFINIZIONE 6.21

i) λ regolare se $ma(\lambda) = mg(\lambda)$;

ii) λ semplice se $ma(\lambda) = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)\lambda - \frac{5}{4} = \lambda^2 - 2\lambda - \frac{5}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \qquad ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = 1$$

$$[f - \lambda Id] = O_{n,1} \to f(v) - \lambda v = 0 \to f(v) = \lambda v$$

$$V_{\frac{5}{2}} = Ker \begin{bmatrix} -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -5/2 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad mg(\lambda_1) = 1$$

$$V_{-\frac{1}{2}} = Ker \begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad mg(\lambda_2) = 1$$

II° Criterio di Diagonalizzabilità (Teorema 6.22)

$\dim(V) = n < \infty$, $f \in End(V)$. f è diagonalizzabile se e solo se:

i) $P_f(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ $\iff$ $ma(\lambda_1) + .. + ma(\lambda_m) = n$;

ii) ogni λ è regolare.

Lemma 6.27

Se λ è autovalore di f $\Rightarrow$ $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

Corollario 6.28

λ semplice $\Rightarrow$ λ regolare

Condizione Sufficiente di Diagonalizzabilità (Teorema 6.23)

$\dim(V) = n < \infty$, $f \in End(V)$. f è diagonalizzabile se:

i) $P_f(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ $\iff$ $ma(\lambda_1) + .. + ma(\lambda_m) = n$;

ii) ogni λ è semplice.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ ma(λ_1) = ma$(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$ diagonalizzabile

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ base di autovettori

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$

$\lambda_1 = -1$ ma$(\lambda_1) = 1 =$ mg$(\lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ è semplice $\Rightarrow$ regolare

$\lambda_2 = 2$ ma$(\lambda_2) = 2$

$V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ mg$(\lambda_2) = \dim(V_2) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2$ è regolare

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

ESEMPIO 6.24

$\dim(V) = 2$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\quad f \in \mathrm{End}(V)$ $\Rightarrow$

$$P_f(\lambda) = |f| - \mathrm{Tr}(f)\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{\mathrm{Tr}(f) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}(f)^2 - 4|f|}}{2}$$

- su $\mathbb{R}$: $\begin{cases} \bullet\ f \text{ è diag. se } \mathrm{Tr}(f)^2 > 4|f| & \text{condizione suff.} \\ \bullet\ f \text{ non è diag. se } \mathrm{Tr}(f)^2 < 4|f| & \text{II° criterio} \end{cases}$
- f è diag. su $\mathbb{C}$ se $\mathrm{Tr}(f) \neq 4|f|$ $\quad$ condizione suff.

Se $\mathrm{Tr}(f) = 4|f| \Rightarrow \lambda_+ = \lambda_- = \frac{\mathrm{Tr}(f)}{2} = \bar{\lambda} \in \mathbb{K}$, $m_a(\bar{\lambda}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ è diag. sse $m_g(\bar{\lambda}) = 2$. $\quad$ II° criterio

$\dim(V_{\bar{\lambda}}) = 2 \Rightarrow V_{\bar{\lambda}} = V \Rightarrow$ ogni $\underline{v}$ è autovettore $\Rightarrow f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$

LEMMA 6.25

$\dim(V) = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ con $m_a(\lambda) = n$ è diagonalizzabile sse $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$.

$\Rightarrow f$ è diagonalizzabile sse $f = \bar{\lambda} \cdot \mathrm{Id}_V$.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A) = 0 > -4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow f_A$ è diag. su $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A)^2 = 0 < 4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow$

Su $\mathbb{R}$ non è diag., infatti f_A ruota i vettori di $\pi/2$.

Su $\mathbb{C}$ è diag.: $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$V_i = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right) \quad V_{-i} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) \quad \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right\}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A)^2 = 4 = 4 \cdot |A| \Rightarrow \bar{\lambda} = 1 \Rightarrow$

f_A è diag. sse $A = \bar{\lambda} I_2 = I_2$ sse $a = 0$.

Se $a \neq 0 \Rightarrow V_1 = Ker(A - I_2) = Ker\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow mg(V_1) = 1 \Rightarrow$ non esiste una base di autovettori.

COROLLARIO (LEMMA 6.29)

$U_r = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ autovettori associati a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinti $\Rightarrow U_r$ l.i.