

ESERCITAZIONE GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DEL 2 OTT.



Determinante - Inversione

① Dato la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcola $|A|$.

Primo metodo: Gauss

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scambio}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scambio}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -\prod_{i=0}^n a_{ii} = (1 \cdot 1 \cdot 1) = -1$$

Secondo metodo: Laplace

$$|A| = 0 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0 - (2 \cdot 1) + 2(0 \cdot 1) = 0 - 2 + 0 = -2$$

Terzo metodo: Sarrus (solto per matrice 3×3)

$$\begin{array}{|ccc|cc} \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$|A| = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0) - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1) = \\ = (0 - 1 + 0) - (-2 + 0 + 1) = -1 - 0 = -1$$

② $|A| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \mu A + \nu B, (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. Studia l'invocabilità di C .

Prendiamo due generiche matrici 2×2 :

$$A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad C \text{ sarà} \begin{bmatrix} \mu a_{11} + \nu b_{11} & \mu a_{12} + \nu b_{12} \\ \mu a_{21} + \nu b_{21} & \mu a_{22} + \nu b_{22} \end{bmatrix}$$

Ora finché C non è invertibile, $|C| \neq 0 \Rightarrow$

$$|C| = (\mu a_{11} + \nu b_{11})(\mu a_{22} + \nu b_{22}) - (\mu a_{21} + \nu b_{21})(\mu a_{12} + \nu b_{12})$$

$$\downarrow$$

$$= \mu^2 |A| + \nu^2 |B| + \mu\nu (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21})$$

$\mu(\mu, \nu) \rightarrow$ polinomio omogeneo di grado 2

$$|C| = \mu^2(2-1) + \nu(0-1) + \mu\nu(\cancel{\mu+2-1-\cancel{1}}) = \mu^2 - \nu^2$$

$$= (\mu - \nu)(\mu + \nu) \Rightarrow C \text{ è invertibile quando: } \mu = \pm \nu$$

E' possibile trovare $A, B \mid C$ è invertibile $\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$? No

E' possibile trovare $A, B \mid C$ è singolare $\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$? $|A| = |B| = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}) = 0$
 $|C| = 0$ sempre

esempio: $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ $|A| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, Verifica che A è invertibile e calcola l'inversa.

$$|A| \neq 0 \vee \text{rk}(A) = 3 ; |A| = \dots$$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$ o Gauss-Jordan. Usiamo il secondo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & n \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{verifica che } AA^{-1} = A^{-1}A = I_3)$$

④ Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$AX = B \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A è la stessa di ③, quindi per risolvere il sistema ci basta fare:

$$A^{-1}A x = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ 1-3+0 \\ -1+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

⑤ | $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & K \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3K \end{bmatrix}$, $K \in \mathbb{R}$. Calcola il range di A al variare di K

Se $|A| \neq 0$, allora $r(A) = 3$, senno bisogna studiarlo.

$$|A| = 0 - 0 + 3K(4-2) = 3K \cdot 2 = 6K \Rightarrow r(A) = 3 \text{ per } K \neq 0$$

Calcoliamo con Gauss il range di A quando $K=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Si determini $K \in \mathbb{R}$ affinché $|A_K| = 1$ e per quel valore calcolate l'inversa.

$$K = \frac{1}{6} \Rightarrow |A| = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow A_K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{6} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Per calcolare A_K^{-1} usiamo la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_K^T = \frac{1}{|A_K|} A_K^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{6} + \frac{1}{6} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $K = \bar{K}$

La matrice A^{-1} lo abbiamo già, quindi $x = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0-\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{6} \\ 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$