1.0

$$I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R(1) \leftrightarrow R(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P(1,2)$$

$$\xrightarrow{5R(1) \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T(1;5)$$

$$\xrightarrow{5R(1) + R(2) \leftrightarrow R(1)} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} T(1,2,5)$$

1.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(a_{22}) + a_{12} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det(a_{21})$$

$$= a_{11} \cdot (+1) \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1) \cdot a_{21}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} = 0 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (4 - 0) + 2 \cdot (1 - 0) = -2$$

Determinante - Inversione

① Data $A\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, calcola $|A|$.

Primo metodo: Gauss

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -\prod_{i=0}^{n} a_{ii} = -(1\cdot 1\cdot 1) = -1$$

1 scambio

Secondo metodo: Laplace $\left(\sum_{j=0}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j} C_{1j}\right)$

$$|A| = 0 - \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = 0 - (2+1) + 2(0+1) = 0 - 3 + 2 = -1$$

Terzo metodo: Sarrus (solo per matrici 3x3)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]$$

$$|A| = (0\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 0) - (-1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1) =$$
$$= (0 - 1 + 0) - (-2 + 0 + 2) = -1 - 0 = -1$$

② $A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $C = \mu A + \gamma B$, $(\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Studia l'invertibilità di C.

Prendiamo due generiche matrici 2x2: $A\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$. C sarà $\begin{bmatrix}\mu a_{11} + \gamma b_{11} & \mu a_{12} + \gamma b_{12}\\ \mu a_{21} + \gamma b_{21} & \mu a_{22} + \gamma b_{22}\end{bmatrix}$

Affinché C sia invertibile, $|C| \neq 0 \Rightarrow$

$$|C| = (\mu a_{11} + \nu b_{11})(\mu a_{22} + b_{22}) - (\mu a_{21} + \nu b_{21})(\mu a_{12} + \nu b_{12})$$
$$= \mu^2 |A| + \nu^2 |B| + \mu\nu \underbrace{(a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - a_{21} b_{12} - a_{12} b_{21})}$$

$P(\mu, \nu) \rightarrow$ polinomio omogeneo di grado 2

$$|C| = \mu^2 (2-1) + \nu(0-1) + \cancel{\mu\nu(0+2-1-1)} = \mu^2 - \nu^2$$
$$= (\mu - \nu)(\mu + \nu) \Rightarrow C \text{ è invertibile quando: } \mu = \pm \nu$$

È possibile trovare $A, B \mid C$ è invertibile $\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$? No ??

È possibile trovare $A, B \mid C$ è singolare $\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$? $|A| = |B| = (a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - a_{21} b_{12} - a_{12} b_{21}) = 0$

$|C| = 0$ sempre

esempio: $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ $A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, Verifica che A è invertibile e calcola l'inversa.

$|A| \neq 0 \vee r(A) = 3$; $|A| = \dots$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$ o Gauss-Jordan. Usiamo il secondo: $[A \mid I_3] \rightarrow [I_3 \mid A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & +2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(verifica che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$)

④ Risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ y+z=0 \end{cases}$

$AX = B \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice A è la stessa di ③, quindi per risolvere il sistema ci basta fare:

$$\cancel{A^{-1}A}X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ 1-3+0 \\ -1+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

⑤ $A \begin{bmatrix} 2 & 2 & K \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3K \end{bmatrix}$, $K \in \mathbb{R}$. Calcola il rango di A al variare di K

Se $|A| \neq 0$, allora $r(A)=3$, sennò bisogna studiarlo.

$|A| = 0 - 0 + 3K(4-2) = 3K \cdot 2 = 6K \Rightarrow r(A)=3$ per $K \neq 0$

Calcoliamo con Gauss il rango di A quando $K=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=2$$

Si determini $\bar{K} \in \mathbb{R}$ affinché $|A_k| = 1$ e per quel valore calcola l'inverso.

$$\bar{K} = \frac{1}{6} = \quad |A_k| = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow A_k \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1/6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare A_k^{-1} usiamo la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A_k|} A_k^{*} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2/6 & +1/6 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2/6 \\ -\frac{1}{2} & 1 & +\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare $A x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $K = \bar{K}$

La matrice A^{-1} la abbiamo già, quindi

$$x = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & +\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 - \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} + 0 + 1/6 \\ 0 + 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2 \end{bmatrix}$$