8/10/20

1) Sia $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in R \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\alpha K$. Provare che R è di equivalenza e descrivere $\mathbb{N}_0/R$

1) Sia $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che associa a n la massima potenza di 2 che divide n, quindi possiamo dire che $(n,m) \in R \iff f(n) = f(m)$. Avremo, quindi, che $R = Ker(f)$ e siccome $Ker\, f$ è di equivalenza, allora R è di equivalenza
$\mathbb{N}_0/R = \{ [2^n]_R \mid n \in \mathbb{N} \}$ con $[2^n]_R \cdot \mathbb{D}$ con $\mathbb{D} = \{ 2m+1 \mid m \in \mathbb{N} \}$

2) Consideriamo $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\beta K \wedge \alpha \leq \beta$. Provare che S è di ordine.

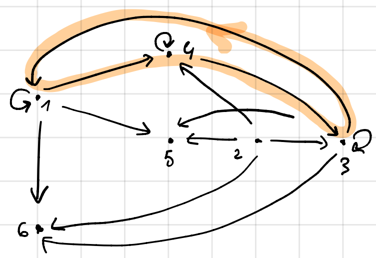
1) riflessiva: Sia $n \in \mathbb{N}_0$, allora $f(n) \leq f(n)$ ($f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che abbiamo visto in 1) quindi $(n,n) \in S$
transitiva: Siano $n, m, l \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S$ e $(m,l) \in S$ dunque $f(n) \leq f(m) \leq f(l) \Rightarrow f(n) \leq f(l) \Rightarrow (n,l) \in S$
antisimmetrica: Siano $n, m \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \wedge (m,n) \in S$ dunque $f(n) \leq f(m) \wedge f(m) \leq f(n) \Rightarrow f(n) = f(m)$. Dobbiamo ora dimostrare che f è iniettiva. In 1, però, abbiamo visto che è possibile che $[n]_R = [m]_R$, quindi l'antisimmetria non è valida.
↳ non è una relazione d'ordine.

3) Considera $T \subseteq \mathbb{N}_0/R \times \mathbb{N}_0/R$: $([n]_R, [m]_R) \in T \iff (n,m) \in S$, essa è d'ordine? ($R$ ed S definiti in 1 e 2).
Dimostra che T è d'ordine.

1) Bisogna prima dimostrare che T è ben definita, ossia se $n' \in [n]_R$ e $m' \in [m]_R$, allora $(n,m) \in S \iff (n', m') \in S$. Sia $(n,m) \in S \iff f(n) \leq f(m) \iff f(n') \leq f(m') \iff (n', m') \in S$.
Dimostrare le proprietà è facile.

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



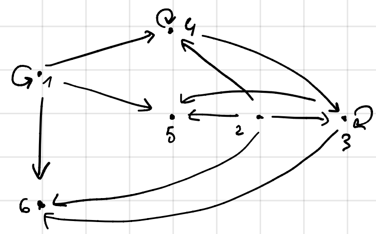
Dire:
1) Quali proprietà ha R
2) Qual è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
4) R contiene funzioni? Quante? R è contenuta in una funzione? Quale?

1) antisimmetrica
2) La chiusura d'equivalenza è ω_A, quindi $A/\omega_A = \{A\}$: Esiste solo 1 componente connessa
3) La chiusura d'ordine non esiste perché nel ciclo orientato si formeranno delle frecce doppie, invalidando l'antisimmetria
4) Togliendo archi non si ottiene nessuna funzione, neanche aggiungendo archi

PRO TIP! Se hai un ciclo, la chiusura transitiva conterrà il ciclo in direzione opposta

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

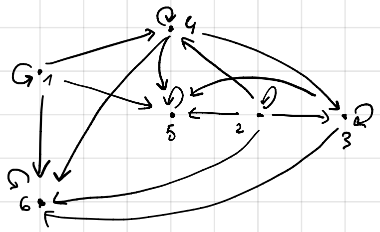
$$\begin{array}{cc} A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

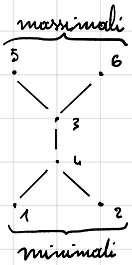


Dire:

1) Quali proprietà ha R
2) Qual'è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
4) Sia T la chiusura d'ordine, T contiene funzioni? Quante? T è contenuta in una funzione? Quale?

1) N.A.
2) ω_A ; $A/_{\omega_A} = \{A\}$
3) Chiudiamo riflessivamente, transitivamente e disegnamo il diagramma di Hasse





→ ∄ massimo

→ non è un reticolo

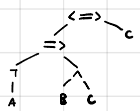
→ ∄ minimo

4) T non è contenuta in funzioni, ma contiene funzioni in quanto seriale. Ci sono $5^2 \cdot 4 \cdot 3$

22/10/20

1) Dire se sono ben formate:

1) $(((\neg A) \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow C)$ ✓



2) $(A \Rightarrow B($ ×

3) $(\neg A \Rightarrow B)$ ✓

2) Sia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$, stabilire se soddisfacibile:

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$A \Rightarrow \neg C$	F
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

→ Soddisfacibile con 7 modelli

3) Sia $F = (A \land B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$ e $G = (A \Rightarrow \neg B) \lor C$, dire se $F \models G$ o se $G \models F$

A	B	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$\Longrightarrow F \not\models G$ e $G \not\models F$

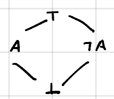
3) Sia $F = (A \land B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$ e $G = (A \Rightarrow \neg B) \lor C$, dire se $F \models F \land G$, $F \models F \lor G$, $F \land G \models F$, $F \lor G \models F$

A	B	C	F	G	F ∧ G	F ∨ G
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1

$\Longrightarrow$
$F \not\models F \land G$
$F \models F \lor G$ → ogni formula modella una tautologia
$F \land G \models F$
$F \lor G \not\models F$ → una tautologia non è conseguenza nessuna formula

4) Sia $\Phi = \{A\}$ provare che $(F(\Phi)/_{\equiv}, \models)$ è un reticolo

A	⊥	A	¬A	⊤
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1



$\Longrightarrow$ $(F_{ma}(\Phi)/_{\equiv}, \models)$ è un reticolo

23/10/20

1) Sia F la f.b.f avente t.d.v

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Stabilire se $(\neg A \Rightarrow C) \land B \models F$

Possiamo usare la t.d.v, usiamo però un metodo più efficiente: $((\neg A \Rightarrow C) \land B)^c, (\neg F)^c \vdash_R \square$ (Risoluzione).
Scriviamo in forma a clausole le formule:

$(\neg A \Rightarrow C) \land B \equiv (A \lor C) \land B \rightarrow \{\{A, C\}, \{B\}\}$

$F \xrightarrow{\text{SINTESI}} (A \Rightarrow \neg C) \land (\neg A \Rightarrow \neg(B \land C)) \equiv (\neg A \lor \neg C) \lor (A \lor \neg B \lor \neg C)$

$\neg F \equiv (A \land C) \lor (\neg A \land B \land C) \equiv (A \lor (\neg A \land B \land C)) \land (C \lor (\neg A \land B \land C)) \equiv \cancel{(A \lor \neg A)} \land (A \lor B) \land (A \lor C) \land (\neg A \lor C) \land (B \lor C) \land (\cancel{C \lor C})^{C}$

↳ $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{\neg A, C\}, \{B, C\}, \{C\}\}$

Per ottenere $\square$ ho:

$\{A,C\}$ $\{B\}$ $\{A,B\}$ $\{\neg A,C\}$ $\{B,C\}$ $\{C\}$ $\rightarrow$ Le lettere B e C sono ineliminabili $\Rightarrow$ $\square$ è irraggiungibile

↳ Operazione di pruning: eliminare le lettere che sono sempre positive/negative

Visto che $((\neg A \Rightarrow C) \wedge B)^c, (\neg F)^c \nvdash_R \square$, $(\neg A \Rightarrow C) \wedge B \nvDash F$

2) Sia F la f.b.f avente t.d.v

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	x
0	1	1	0
1	0	0	y
1	0	1	z
1	1	0	1
1	1	1	0

Trovare F non equivalente alle formule date tale che:

$$\begin{cases} \overbrace{(C \Rightarrow (A \vee B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))}^{\mathcal{G}} \vDash F \\ F \vDash \underbrace{B \Rightarrow (A \wedge B \wedge \neg C)}_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

e provare la correttezza del risultato con la risoluzione.

A	B	C	$\mathcal{G}$	F	$\mathcal{H}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1 →	1 →	1
0	1	0	0	X *	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	y →*	1
1	0	1	0	z →*	1
1	1	0	1 →	1	1
1	1	1	0	0	0

$x = 0$

$y = \{0,1\}$ → se $y=0$, $z=0$ $F = \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ prendiamo $y = 1$

$z = \{0,1\}$

↳ $F \equiv (A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee (\neg B \wedge C))$

Con la risoluzione le nostre condizioni saranno: $\begin{cases} \mathcal{G} \vDash F \iff \mathcal{G}^c, (\neg F)^c \vdash_R \square \\ F \vDash \mathcal{H} \iff F^c, (\neg \mathcal{H})^c \vdash_R \square \end{cases}$. Scriviamo le clausole:

$\neg\mathcal{H} = \neg(\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \equiv B \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$ → $\{B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$

$F \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$ → $\{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{A, C\}$

$\neg F \equiv (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \equiv (A \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \wedge (C \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (\cancel{C} \wedge B \wedge \cancel{\neg C})$

↳ $\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}$

$\mathcal{G} \equiv \neg(\neg C \vee A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \equiv (\neg A \vee (A \vee B \vee \neg C)) \wedge (\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \wedge (C \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \equiv$

$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee B)$ → $\{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{B, C\}$

$\mathcal{G}^c, (\neg F)^c \vdash_R \square$: $\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{B, C\}$

$\{B, \neg C\}$

$\{\neg C\}$ $\{C\}$

$\square$

$F^c, (\neg H)^c \vdash_R \square$: $\{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{A, C\}, \{B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$

$\{\neg B, \neg C\}$ $\{\neg A, C\}$

$\{\neg C\}$ $\{C\}$

$\square$

3) Formalizzare e provare la correttezza di questo ragionamento:

"Sapendo che: 1) Se Carla non è nata a Catania, allora Anna non è ad Alessandria e Barbara non è nata a Bologna
2) Se Anna è nata ad Alessandra, allora Carla non è nata a Catania. Ne segue che Carla è nata a Catania oppure Anna non è nata ad Alessandria."

Otteniamo le seguente formule: $\{\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B),\ A \Rightarrow \neg C\} \models C \vee \neg A$. Traduciamo in clausole:

$(\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))^c,\ (A \Rightarrow C)^c,\ (\neg(C \vee \neg A))^c \vdash_R \square$

$\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \equiv C \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B) \rightarrow \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}$

$A \Rightarrow \neg C \equiv \neg A \vee \neg C \rightarrow \{\neg A, \neg C\}$

$\neg(C \vee \neg A) \equiv \neg C \wedge A \rightarrow \{A\}, \{\neg C\}$

$\{\neg A, C\},\ \cancel{\{\neg B, C\}},\ \{\neg A, \neg C\},\ \{A\},\ \{\neg C\}$

$\{\neg A\}$

$\square$