

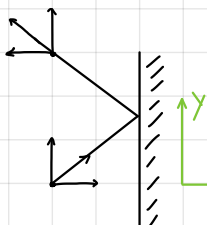
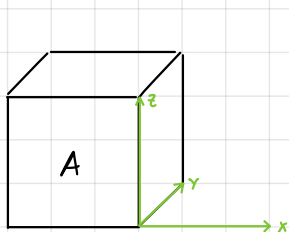
13 STATICA DEI FLUIDI

13.1 PRESSIONE SULLE PARETI ESERCITATA DAI GAS

Facciamo le seguenti ipotesi:

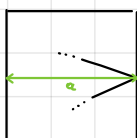
- 1) le molecole sono tutte uguali con moto continuo e disordinato $\Rightarrow \vec{v}_m = 0$
- 2) il gas ha densità costante
- 3) tutti gli urti sono elastici
- 4) non ci sono forze intermolecolari
- 5) il volume occupato dalle singole molecole è trascurabile rispetto al volume del recipiente

Prendiamo un contenitore cubico A e definiamo il nostro sistema di riferimento. Al corso del cas. molecolare, tutti i ragionamenti che faccio per un' urto contro una parete vale per tutti gli altri.



$$\Delta P_x^m = P_x^f - P_x^i = -m v_x - m v_x = -2m v_x \quad \left. \begin{array}{l} \Delta P_y = 0 \\ \Delta P_z = 0 \end{array} \right\} I = 2m v_x$$

considero ogni parete ci interessa la forza esercitata da molecola su parete, non viceversa



$$t = \frac{2a}{v_x} \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a} \Rightarrow F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{-2m v_x v_x}{2a} = -\frac{m v_x^2}{a}$$

il tempo che percorre tra due urti

gli urti sono uguali in tutte le dimensioni per ipotesi

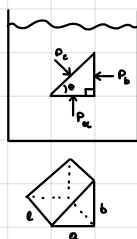
Per calcolare la risultante delle forze applicate su x facciamo: $R_x = \sum F_{xi} = \frac{m}{a} \sum v_{xi}^2$. La pressione sarà, quindi:

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum v_{xi}^2 = \frac{m}{V} \sum v_{xi}^2$$

Definiamo la velocità quadratica media come: $\bar{v}^2 = \frac{1}{N} \sum v_i^2 = \frac{1}{N} \sum (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2) = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$. Per ipotesi: $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$. Usando nella formula di prima otteniamo:

$$p = \frac{m N}{V} \bar{v}_x^2 = \frac{m N}{3V} \bar{v}^2$$

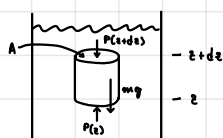
13.2 STATICA DEI FLUIDI



$$S_a = L a, S_b = L b, S_c = L c$$

$$\begin{aligned} x: & \begin{cases} P_c S_c \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) - P_b S_b = 0 \\ P_a S_a - P_c S_c \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_c S_c \sin \theta = P_b S_b \\ P_c S_c \cos \theta = P_a S_a \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} \frac{P_b}{P_c} &= \frac{S_c}{S_b} \sin \theta = \frac{L c}{L b} \sin \theta = \frac{b}{b} = 1 \\ \frac{P_a}{P_c} &= \frac{S_c}{S_a} \cos \theta = \frac{L c}{L a} \cos \theta = \frac{a}{a} = 1 \end{aligned} \Rightarrow P_a = P_b = P_c \end{aligned}$$

L'esercizio sopra dimostra che in un fluido in condizioni statiche in assenza di forze esterne la pressione è uguale su tutte le superfici. Come cambia la pressione quando consideriamo la forza peso?



$$\begin{aligned} -mg + P(z)A - P(z+dz)A &= 0 \rightarrow -PA dz + P(z)A - P(z+dz)A = 0 \rightarrow -PA dz + P(z)A - P(z)A - \left(\frac{dP}{dz}\right)(dz)A = 0 \\ P(z+dz) &= P(z) + \left(\frac{dP}{dz}\right)(dz) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)(dz) = -Pg$$

L'equazione appena scritta è l'equazione statica dei fluidi. Generalizzando al caso tridimensionale bisogna usare il gradiente:

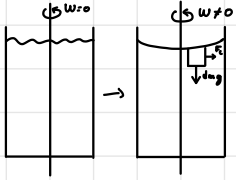
$$\nabla P = \rho \vec{g} \quad \text{e per una qualsiasi forza} \quad \nabla P = \rho \vec{h} \quad \text{con} \quad \vec{h} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Se \vec{h} è conservativo, allora essa è il gradiente dell'energia pot. $\rightarrow \nabla P = \rho \nabla \phi$

Se una superficie ha P const., avrà anche ϕ const.

Ciò comporta che una superficie di un fluido inclinata sempre si manterrà alla stessa altezza (e.g. inclinare un bicchiere d'acqua)

ESERCIZIO



Curva della superficie?

$$F_c = w \cdot n \cdot dm$$

$$E_p = \rho g z \, dm = \frac{1}{2} w \cdot n^2 \, dm = \text{const}$$

$$\hookrightarrow z = \left(\frac{w}{2g} \right) n^2 + \frac{\text{const}}{g} \Rightarrow \text{parabola di rotazione}$$

Nel caso in cui non considerassimo un incremento infinitesimo dz otteniamo:

$$P \text{ const:} \quad dP = -\rho g \, dz \quad \int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{P_1}^{P_2} -\rho g \, dz$$

$$\Delta P = -\rho g (z_2 - z_1) \quad (\text{Legge di Stevino})$$

\hookrightarrow se $z_2 = z_1$, la pressione è uguale (Principio di Pascal)

la legge di Stevino rotazionale ha forma: $P = P_0 + \rho g h$
pressione idrostatica

Un'applicazione della legge di Stevino è il principio dei vasi comunicanti