Binomio di Newton

1) Nello sviluppo di $\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^7$ esistono i termini x^3 e $\sqrt{x}$? Se sì, calcolarne i coefficienti.

$$\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\,2\sqrt{x}^{\,7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\,2^{7-k}\,x^{\frac{7-k}{2}-k}(-3)^k = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\,2^{7-k}\,x^{\frac{7-3k}{2}}(-3)^k$$

- per trovare x^3 dobbiamo fare $\frac{7-3k}{2}=3$ $\quad 7-3k=6 \quad k=\frac{7-6}{3}\notin\mathbb{N} \Rightarrow$ non c'è
- $\sqrt{x}$ $\quad \frac{7-3k}{\cancel{2}}=\frac{1}{\cancel{2}} \quad 7-3k=1 \quad k=2\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x}$ è nello sviluppo
- qual è il suo coefficiente: $\binom{7}{2}2^{7-2}(-3)^2 = \frac{7!}{2!\,5!}\cdot 2^5\cdot 9 = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2!\,\cancel{5!}}\cdot 32\cdot 9 = 21\cdot 32\cdot 9 = 6048$

Estremi di un insieme

2) Determinare se esistenti min, max, inf, sup di $E=\{x\in\mathbb{R}\mid \sqrt{x^2-4x+3}\geq 2-x\}$

Risolvo la disequazione:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0\\ 2-x\geq 0\\ x^2-4x+3\geq(2-x)^2\end{cases} \cup \begin{cases} x^2-4x+3\geq 0\\ 2-x<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(x-1)(x-3)\geq 0\\ x\leq 2\\ \cancel{x^2}-\cancel{4x}+3\geq 4+\cancel{x^2}-\cancel{4x}\end{cases} \cup \begin{cases}(x-1)(x-3)\geq 0\\ x>2\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \emptyset \cup \begin{cases} x\leq 1 \cup x\geq 3\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow E=[3;+\infty)$$

$\inf(E)=\min(E)=3$; Non esistono maggioranti $\Rightarrow \nexists \sup(E), \max(E)$ $(\sup(E)=+\infty)$

③ // $E = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \leq 3 \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ (per quali a la disequazione ha soluzioni in tutto $\mathbb{R}$)

Risolvo la disequazione: $1 - x^2 + x^2 > 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso moltiplicare:

$2 - ax - x^2 \leq 3 - 3x + 3x^2$ $\quad 4x^2 + (a-3)x + 1 \geq 0$ $\quad \Delta \leq 0 \Rightarrow (a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = a^2 + 9 - 6a - 16$

$= a^2 - 6a - 7 = (a-7)(a+1) \leq 0$

$\Downarrow$

$E: [-1; 7]$

$\text{Inf}(E) = \min(E) = -1$; $\text{Sup}(E) = \max(E) = 7$

④ // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \geq \sqrt{5-2x} \right\}$ HOMEWORK

⑤ // $E = \left\{ \frac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

Di sicuro è inferiormente limitato perché $\mathbb{N} - \{0\}$ è inferiormente limitato.

0 è minorante: $\frac{n+2}{n+1} > 0$; 1 è minorante: $n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1$.

Consideriamo $1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, e vediamo se è minorante: $\frac{n+2}{n+1} \geq 1 + \varepsilon$ $\quad \frac{n+2-n-1}{n+1} \geq \varepsilon$ $\quad \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$ $\quad n+1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad n \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1$

$\downarrow$

La disuguaglianza non vale $\forall x \geq 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon$ non è minorante $\Rightarrow \text{Inf}(E) = 1$

$\nexists \min(E)$

Scriviamo $\frac{n+2}{n+1}$ come $1 + \frac{1}{n+1}$. $\frac{1}{n+1}$ decresce all'aumentare di n, quindi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2}$

Per $n = 1$ $\frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2}$ quindi $\frac{3}{2}$ è massimo ed estremo superiore $\Rightarrow$ $\max(E) = \text{Sup}(E) = \frac{3}{2}$

6 // $E = \left\{ \frac{m}{n} + 1 ,\ m \in \mathbb{N} ,\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

1 è minorante: per $m = 0$ abbiamo $\frac{0}{n} + 1 = 1$ $\Rightarrow$ $\inf(E) = \min(E) = 1$

Esiste un maggiorante M tale che $\frac{m}{n} + 1 \leq M$?

$\frac{m}{n} + 1 \leq M$ $\quad \frac{m}{n} \leq M - 1$ $\quad m \leq n(M-1) \Rightarrow$ condizione non valida per tutti gli m, n, quindi $\nexists \sup(E) = \max(E)$

7 // $E = \left\{ \frac{r}{r^2+1} ,\ r \in \mathbb{Q}^+ \right\}$ $\left(\mathbb{Q}^+ = \{ r \geq 0 ,\ r \in \mathbb{Q} \} \right)$

? Poiché $\mathbb{Q}^+$ è inferiormente limitato, $\frac{r}{r^2+1} \geq 0 \Rightarrow \exists \inf$? Se consideriamo $(r-1)^2 \geq 0$ abbiamo $\frac{r^2+1}{r} \geq \frac{2r}{r}$ $\quad \frac{r}{r^2+1} \leq \frac{1}{2}$

quindi $\frac{1}{2}$ è maggiorante. Però, per $r = 1$ $\frac{r}{r^2+1} = \frac{1}{2}$ quindi $\frac{1}{2}$ è anche massimo $\Rightarrow$ $\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{2}$

$\emptyset$ è minorante, lo è anche $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{r}{r^2+1} \geq \varepsilon$ $\quad r \geq \varepsilon r^2 + \varepsilon$ $\quad \varepsilon r^2 - r + \varepsilon \leq 0$ $\quad \Delta = 1 - 4\varepsilon^2$ $\begin{cases} > 0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ = 0 & \varepsilon^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon = \pm \frac{1}{2} \\ < 0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon < -\frac{1}{2} \vee \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$

L'espressione non vale $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, quindi ε non un minorante e quindi $\inf(E) = 0$, $\nexists \min(E)$

8 // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{\sqrt{2x+9}} \leq 2^{9-x} \right\}$ $\left(E = \left[-\frac{9}{2} ; 10 - 2\sqrt{7} \right] \right)$

9 Considero $E_1 = E \cap \mathbb{Q}$, $E_2 = E \cap \mathbb{N}$ con E uguale a 8.

$-\frac{9}{2}$ sarà ancora minimo ed estremo inferiore poiché è razionale.

$10 - 2\sqrt{7}$ non è razionale quindi non potrà più essere massimo però è ancora estremo superiore in quanto il più piccolo dei maggioranti.

E_2, invece, ha un numero finito di elementi, quindi ha sicuramente il massimo ed il minimo.

Per calcolarli devo trovare il più piccolo e il più grande intero all'interno di E_2.

Posso prendere $\emptyset$ come più piccolo ($\min(E)$ è negativo) e 4 come più grande (trovo la più piccola approssimazione del $\max(E)$).

LEZIONE

FUNZIONI:

DEFINIZIONE:

una funzione è una terna di elementi A, B, f dove:

- A, B sono insiemi
- f è una relazione che lega ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B → $f: A \to B$ (dominio: A; codominio: B)

es.: $y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R} = B$ NON è una funzione ($\exists x \in A$: f non è valida)

$y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ è una funzione ($\nexists x \in A$: f non è valida)

$f(a)$: è l'immagine di a

$\mathrm{Im}(f)$: $\mathrm{Im}(f) = \{ b \in B : \exists a \in A : f(a) = b \}$

$\Gamma(f)$: è il grafico di f: $\Gamma(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ x \in A \}$. N.B.: $\Gamma(f) \neq \mathrm{Im}(f)$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE:

- limitata: $\mathrm{Im}(f)$ è limitato, $\mathrm{Im} \subseteq \mathbb{R}$, $\exists M > 0, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A\ -M \leq f(x) \leq M$
- sup / inf limitata: $\exists \sup(\mathrm{Im}(f)) / \exists \inf(\mathrm{Im}(f))$
- crescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) < f(x_2)$ (strett. crescente)
- decrescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$ (strett. decrescente)
- monotona in I: se è crescente / decrescente (strettamente) in tutto I
- pari: se $\forall x \in A$ $f(x) = f(-x)$ con $x, -x \in A$
- dispari: se $\forall x \in A$ $f(x) = -f(-x)$ con $x, -x \in A$

DOMINIO NATURALE: Si dice dominio naturale il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione è definita

FUNZIONE SURIETTIVA: Data $f: A \to B$ si dice che f è suriettiva se $\mathrm{Im}(f) = B$

OSS: $\forall \bar{y} \in B$ costruisco $y = \bar{y}$ f è suriettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in almeno un punto

FUNZIONE INIETTIVA: Data $f: A \to B$ si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ / $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

OSS.: $\forall y \in B$ costruisco $y = \bar{y}$. f è iniettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in al più un punto

FUNZIONE BIUNIVOCA: Data $f: A \to B$ si dice che f è biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCITAZIONE

NUMERI COMPLESSI

① $i(1+i) = i + i \cdot i = i - 1$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos\theta \\ y = \sqrt{2} \sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cos\theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to \theta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\to i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$

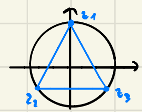
$e^{i\pi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$

soluzioni o reali o complessi coniugati

② $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = 1 - 2 = -1$ $z_{1,2} = +1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

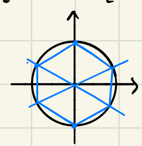
③ $z^2 + 3iz + 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9i^2 - 4 = -13$ $z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-13}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{13}i}{2}$

④ $z^3 = -i$ $z_1 = i$ $z_2 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) = \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$ $z_3 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) = \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right)$



⑤ $z^6 = -8$ $z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ $z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ $z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$ $z_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$ $z_5 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$

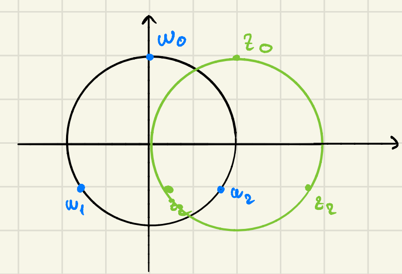
$8(\cos \pi + i \sin \pi)$ $z_6 = \sqrt[6]{8}\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right)$



⑥ $(z-2)^2 + i = 0$ sostituiamo $z - 2$ con $w \Rightarrow w^3 = -1$ come in ④ $\Rightarrow z_1 = w_1 + 2 = 2 + 1$

$z_2 = w_2 + 2 = [\dots] = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} + 2$

$z_3 = w_3 + 2 = [\dots] = \frac{+\sqrt{3} + i}{2} + 2$



(7) $z^2 + (1+i)z + i = 0$ $\quad \Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i$

non ha senso con radici complesse: $\pm$ 1

$$z_{1,2} = \frac{-1-i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1-\cancel{i}-1+\cancel{i}}{2} = -1 \\[2ex] \dfrac{-\cancel{1}-i+\cancel{1}-i}{2} = -i \end{cases}$$

$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -1+i$

$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = +1-i$

(8) $\underbrace{i z^2 = \bar{z}}$ → non è algebrica

poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$ $\quad \rho^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = \rho e^{-i\theta}$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (k = 0, 1, 2)$

Sol: $z_0 = 0 \;\; \forall\theta \;\; (\rho = 0)$ (3 soluzioni coincidenti)

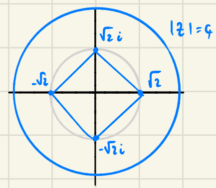
$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z_3 = e^{i\frac{7}{6}\pi} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

(9) $(z^4 - 4)(|z| - 4) = 0$ $\quad z^4 - 4 = 0 \quad z^4 = 4$

$|z| - 4 = 0 \quad |z| = 4$



(10) $x^4 + 1 = 0$ $\quad$ Homework: Scomporre in $\mathbb{R}$

$(x^2)^2 + 1^2 = 0 \quad ((x^2)^2 - 1) + 2 = 0 \quad (x^2+1)(x^2-1) + 2 = 0 \quad (x^2+1)(x-1)(x+1) + 2 = 0$

$x^4 = -1$

$\cos\pi + i\sin\pi$

$x_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

$x_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$