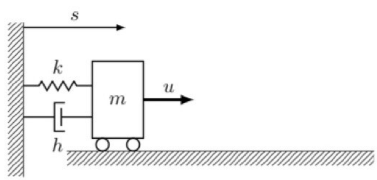
# Esercitazioni Automatica

08/03/21

## 1 Sistema massa-molla-smorzatore

Sia dato il sistema fisico riportato in Figura, che rappresenta un carrello che si muove lungo una guida orizzontale rettilinea. Si considera il contributo dell'attrito trascurabile. Al carrello di massa $m$ viene applicata una forza $u(t)$ lungo la direzione del moto. L'uscita del sistema è la posizione $p(t)$ del carrello. Il carrello è connesso a un muro con una molla con costante elastica $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ e con uno smorzatore con costante di smorzamento $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$.




1. Scrivere le equazioni del sistema nello spazio di stato.
2. Calcolare gli autovalori del sistema al variare di $k$ e $h$.
3. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
4. Posti $m = 1$, $k = h = 2$ calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
5. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
6. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
7. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione nulla e velocità $v(0) = 1$.
8. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, si trovi il valore di $\overline{u}$ tale che il sistema abbia un equilibrio in posizione $\overline{p} = 2$ e velocità nulla.
9. Dire cosa cambia nel punto precedente se la posizione e la velocità iniziali sono entrambe nulle, mentre la forza applicata al carrello è $u(t) = \overline{u} = 4$.

1) $ma = \sum F_e \rightarrow ma = u - Kp - hv$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{p} = v \\ \dot{v} = -\frac{K}{m} p - \frac{h}{m} v + \frac{1}{m} u \\ y = p \end{cases} \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & h/m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $p_a(\lambda) = \det(A - I\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ K/m & h/m - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda + \frac{K}{m}$

$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{K}{m} \rightarrow \Delta = 0$ per $\frac{h^2}{m^2} = 4\frac{K}{m}$, $\lambda = -\frac{h}{2m}$

$\Delta > 0$ $\quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$ per $\frac{h^2}{m^2} < 4\frac{K}{m}$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

3) $m = 1$, $K = 2$, $h = 3$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$ modi: $e^{-t}, e^{-2t}$

$x_L = e^{At}x(0) \rightarrow y_L = Cx_L(t) = Ce^{At}x_L(0)$

$\rightarrow e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{matrix} Av_1 = \lambda_1 v_1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -x_1 \\ -2x_1 - 3y_1 = -y_1 \end{cases} \dots \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \rightarrow \begin{cases} y_2 = -2x_2 \\ -2x_2 - 3y_2 = -2y_2 \end{cases} \dots \begin{cases} x_1 = 1 \\ y = -2 \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow T = \frac{1}{\det T^{-1}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 0)\, e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e^{-t} - e^{-2t}$ → $y_L$ si può anche calcolare come combinazione dei modi e usando le condizioni iniziali

4) Calcoli simili al punto 3. Attenzione ai numeri complessi!

combinazione lineare che elimina j

$y_L = \gamma_1 e^{(\alpha+\beta j)t} + \gamma_2 e^{(\alpha-\beta j)t} = \dots = e^{\alpha t}(\gamma_1 \cos\beta t + \gamma_2 \sin\beta t)$

$\dot{y}_L = \dots$

5) ...

6) La matrice A non è diagonalizzabile poiché

$\lambda = 0$ e $n = 2$, $n_g = 1$ $\rightarrow$ modi : $\{ e^{\lambda t}, t e^{\lambda_2 t} \} =$
$= \{ 1, t \}$

$y_L = \gamma_1 + \gamma_2 t$, $\dot{y}_L = \gamma_2$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l} y_L(0) = \gamma_1 = 1 \\ \dot{y}_L(0) = \gamma_2 = 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $y_L = 1$

7) ...

8) $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{U} : \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{U} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + \bar{U} \end{cases} \Rightarrow \bar{U} = 4$$

9) Poiché il sistema è lineare, applichiamo il PSE:

$x = x^1(t) + x^2(t)$, $x(0) = x^1(0) + x^2(0)$, $U = \bar{U} = \underbrace{U^1(t)}_{\bar{U}} + \underbrace{U^2(t)}_{0}$

$\rightarrow x(0) = (2\ 0)^T + (-2\ 0)^T = \underline{0}$

1) $\underbrace{x^1(t) = x(0)}^{\text{eq. calc. in 8}}$ $\rightarrow$ $y^1(t) = C x^1(t) = C x^1(0) = 2$

2) $x^2(t)$, $x^2(0) = (-2\ 0)^T$ $U^2(t) = 0$

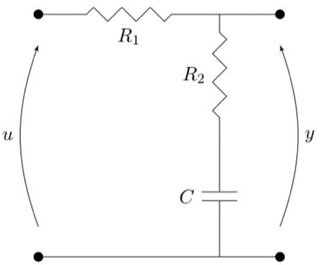
$\hookrightarrow x^2(t) = e^{At} x^2(0) \rightarrow y^2(t) = C x^2(t) = \cdots = -4e^{-t} - 2e^{-2t}$

$\Downarrow$

$y(t) = y^1(t) + y^2(t) = 2 - 4e^{-t} - 2e^{-2t}$

## 2 Circuito RC

Si consideri il partitore di tensione rappresentato in figura con $R_1 = R_2 = 1$ e $C = 1$, dove $u(t)$ è la tensione di ingresso al circuito e $y(t)$ è la tensione misurata in uscita.




1. Scrivere il modello del circuito nello spazio di stato.
2. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio per $u(t) = \overline{u}$, $\forall t \geq 0$.
3. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\,\mathrm{sca}(t)$, per condizioni iniziali nulle.
4. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}e^{-2t}$, per condizioni iniziali nulle.
5. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, per condizioni iniziali nulle.

1) $u(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) + V_c(t) \Rightarrow u(t) = \dot{V}_c(t)\, C(R_1+R_2) + V_c(t)$

$i(t) = \dot{V}_c(t)\, C$

$y(t) = V_c(t) + R_2\, i(t) = V_c(t) + R_2 \dot{V}_c(t)\, C = \cdots =$

$= V_c(t)\left(1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) + \frac{R_2}{R_1+R_2} u(t)$

$$\begin{cases} \dot{V}_c(t) = -\frac{1}{C(R_1+R_2)} V_c(t) + \frac{1}{C(R_1+R_2)} u(t) \\ y(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_c(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2} u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

2) $$\dot{x} = 0 \to \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{u} \\ \bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{u} \end{cases} \to \begin{cases} \bar{x} = \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x} = \bar{u} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x(t) = \cancel{e^{At}x(0)} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = C\left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau\right] + Du \end{cases}$$

$x(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{1}{2}\bar{u}\, d\tau = \bar{u}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t} \frac{e^{\frac{1}{2}\tau}}{2}\, d\tau =$

$= \bar{u}e^{-\frac{1}{2}t}\left[e^{\tau/2}\right]_0^t = \bar{u}e^{-\frac{1}{2}t}\left(e^{\frac{1}{2}t} - 1\right) = \bar{u}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$

$y(t) = \frac{1}{2}\bar{u}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) + \frac{1}{2}\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u}\left(2 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$

$\tau = \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 2 \to$ TEMPO DI ASSESTAMENTO: $T_a = 5 \cdot \tau = 10\ s$

4) $x(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{1}{2} \bar{u} e^{-2\tau} d\tau = \frac{\bar{u}}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}\tau} d\tau$
$= \frac{\bar{u}}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \left[ -\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}\tau} \right]_0^t = -\frac{\bar{u}}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3}\bar{u} e^{-\frac{1}{2}t}$

$y(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\bar{u}}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3}\bar{u} e^{-\frac{1}{2}t}\right) + \frac{1}{2}\bar{u} e^{-2t} = \dots = \frac{\bar{u}}{6} e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-2t}\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\bar{u}}{6}\right)$

15/03/21

1.

Si considerino i sistemi lineari $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, descritti dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Discutere le proprietà di stabilità dei sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, singolarmente.
2. Discutere le proprietà di stabilità della serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, cioè del sistema avente come ingresso $u(t) = u_1(t)$, dove $u_2(t) = y_1(t)$, e avente come uscita $y(t) = y_2(t)$.
3. Discutere le proprietà di stabilità del sistema costituito da $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ in parallelo, avente come ingresso $u(t) = u_2(t) = u_1(t)$ e avente come uscita $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.
4. I due sistemi vengono interconnessi come mostrato in Figura 1 per ottenere un sistema $\mathcal{S}$ con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Scrivere le equazioni del sistema $\mathcal{S}$ in variabili di stato.

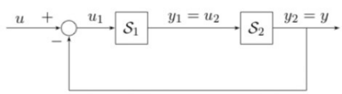



Figura 1: Sistema $\mathcal{S}$ con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

5. Discutere le proprietà di stabilità del sistema $\mathcal{S}$.
6. Dire se le proprietà di stabilità del sistema interconnesso cambiano se i sistemi vengono interconnessi come in Figura 2 e 3.

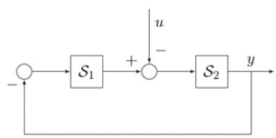



Figura 2: Sistema $\mathcal{S}$, prima variante.

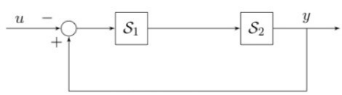
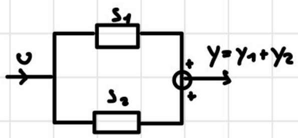



Figura 3: Sistema $\mathcal{S}$, seconda variante.

1) $S_1: \ A = 0 \rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ semplicemente stabile
$S_1: \ A = 1 \rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ instabile

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases} \longrightarrow u_2 = y_1 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + y_1 = x_2 + x_1 + u_1 \\ y = 2x_2 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \quad \lambda_1 = 0 \, , \, \lambda_2 = 1 \implies$ instabile

3) 


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \\ y = x_1 + 2x_2 + u \end{cases}$$

$A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \lambda = 0, \, \lambda = 1$
$\hookrightarrow$ instabile

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \\ y_2 = y = 2x_2 \end{cases} \to \quad \begin{matrix} u_1 = u - y = u - 2x_2 \\ u_2 = y_1 = x_1 + u_1 \end{matrix} \to \begin{cases} \dot{x}_1 = u - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = 2x_2 \end{cases}$

$A \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\det \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \iff$ segni concordi e per $n = 2$ è sufficiente per dire $Re(\lambda) < 0$

6) • primo sistema: $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 = -y_2 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 = x_2 + y_1 - u = x_2 + x_1 + u_2 - u = x_1 - x_2 - u \\ y = y_2 = 2x_2 \end{cases}$

Uguale al secondo sistema (calcolato in 4) per $u(t) = 0$, quindi as. stabile

• secondo sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 = -u + y_2 = 2x_2 - u \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 = x_2 + x_1 - u_1 = x_1 + 3x_2 - u \\ y = 2x_2 \end{cases}$

$A \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0 \to$ per C.N.S $Re(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ quindi instabile

**2.**

Si consideri il sistema non lineare con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Determinare il valore $\overline{u}$ dell'ingresso $u(t) = \overline{u}$, $t \geq 0$, a cui è associato l'equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Calcolare il movimento dello stato associato a
$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u(t) = 0, t \geq 0.$$
3. Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, associato all'ingresso $u(t) = \overline{u}$, $t \geq 0$.

1)
$$\begin{cases} -\cancel{\bar{x}_1} + \cancel{\bar{x}_2^2} + \cancel{\bar{x}_2}\bar{u} = 0 \\ \cancel{3\bar{x}_2} + \bar{u} = 0 \\ y = \cancel{\bar{x}_1} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \bar{u} = 0$$

2)
$$\dot{x}_2 = 3x_2 + \bar{u} \quad \rightarrow \quad x_2(t) = e^{At}x_2(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)} B u(\tau) d\tau =$$
$$= e^{3t}\varepsilon$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 + \overbrace{\cancel{x_2 u}}^{u(t)=0} = \underbrace{-x_1}_{A} + \underbrace{e^{6t}\varepsilon^2}_{Bu} \rightarrow x_1 = \cancel{e^{-t} \cdot 0} + \int_0^t e^{(t-\tau)} e^{6\tau} \varepsilon^2 d\tau =$$
$$= \dots = \frac{\varepsilon^2}{7}(e^{6t} - e^{-t})$$

3) Il movimento calcolato è una perturbazione del movimento che dobbiamo considerare. In alternativa a questa osservazione possiamo linearizzare il sistema. Optiamo per la seconda

$$A \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2\bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ instabile

**3.**

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 4.

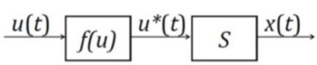



Figura 4: Sistema da analizzare

dove $S$ è il sistema lineare a tempo continuo scalare descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u^*(t),$$

e $f(u)$ è una saturazione della variabile di ingresso, cioè

$$u^* = f(u) = \begin{cases} u_M & \text{se } u \geq u_M \\ u & \text{se } -u_M < u < u_M \\ -u_M & \text{se } u \leq -u_M \end{cases}$$

descritta dal grafico in Figura 5

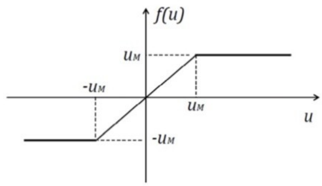



Figura 5: Saturazione

1. Si determini la condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$. Si determini la proprietà di stabilità del suddetto movimento di equilibrio.
2. Il precedente sistema viene posto in retroazione come nella Figura 6, dove $k$ è un parametro reale.

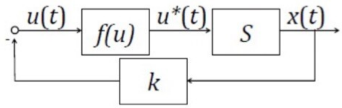



Figura 6: Sistema ad anello chiuso

(a) Scrivere l'equazione dinamica del sistema complessivo.
(b) Per quali valori del parametro $k$ l'equilibrio $x(t) = \bar{x} = 0$ risulta asintoticamente stabile?
(c) In corrispondenza dei valori di $k$ trovati al punto precedente, la proprietà di stabilità asintotica dell'equilibrio $x(t) = \bar{x} = 0$ risulta locale o globale? Si giustifichi adeguatamente la risposta.

1) $\bar{u} = 0 \rightarrow f(u) = 0 \rightarrow \dot{x} = 2x \Rightarrow$ eq. instabile

$\dot{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$

2) a. $\dot{x} = 2x(t) + f(u(t)) = 2x(t) + f(-Kx(t))$

b. linearizziamo intorno a $\bar{x}$:

$$f(-Kx) \cong f(-K\bar{x}) - K(x - \bar{x}) \cong -Kx$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 2 - K \rightarrow \dot{x} = (2-K)\delta x \rightarrow \text{per } K > 2 \ \bar{x} \text{ as. stabile}$$

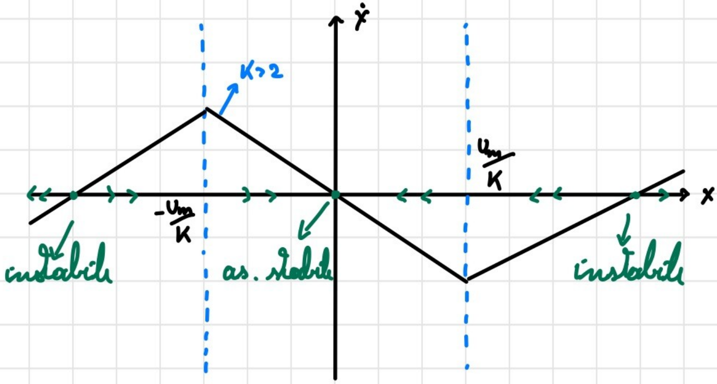
c. $\dot{x} = 2x + f(-Kx)$

1) $\dot{x} = 2x - Kx$ se $-u_M < u < u_M$
2) $\dot{x} = 2x + u_m$ se $u \geq u_m$
3) $\dot{x} = 2x - u_m$ se $u \leq -u_m$

3 equilibri:
1) $\bar{x} = 0 \rightarrow K > 2$ as. stabile
2) $\bar{x} = -\frac{u_m}{2}$
3) $\bar{x} = +\frac{u_m}{2}$

$\Big]\rightarrow$ instabili

alternativamente usiamo il metodo grafico:




5.

Si consideri il sistema pendolo rappresentato in Figura 7.

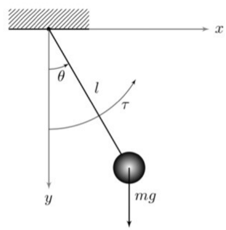



Figura 7: Sistema pendolo.

Si ipotizzi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa $m$ sia trascurabile, così che il momento d'inerzia del pendolo sia $J = ml^2$. Si supponga inoltre che è anche presente un termine di dissipazione lineare con la velocità angolare (momento di attrito $\tau_a(t) = k\dot{\theta}(t)$, $k > 0$).

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere il modello del sistema in variabili di stato, considerando come uscita l'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale, e come ingresso il momento torcente $\tau(t)$ in figura.
2. Calcolare gli stati di equilibrio del sistema associati a ingresso nullo.
3. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto precedente. Verificare che il pendolo presenta un equilibrio instabile.
4. Il pendolo viene retroazionato come mostrato in Figura 8. Trovare, se possibile, un valore costante per l'ingresso $v(t) = \overline{v}$, $t \geq 0$, e un valore per il parametro $p \in \mathbb{R}$ tali che il sistema retroazionato ammetta come stato di equilibrio lo stato di equilibrio instabile del pendolo trovato al punto precedente e che tale equilibrio sia asintoticamente stabile.

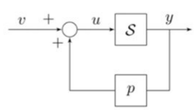



Figura 8: Sistema di controllo in retroazione del pendolo.

1) $$J\ddot{\theta}(t) = \sum M_{ext} = \tau(t) - \tau_a(t) - mgl\sin\theta$$

$$x \begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}, \quad \tau = u \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u/J - K\frac{x_2}{J} - mgl/J \sin(x_1) \\ y = x_1 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = \cancel{\frac{\bar{u}}{J}} - \cancel{\frac{K\bar{x}_2}{J}} - \frac{mgl}{J}\sin(\bar{x}_1) \end{cases} \to \quad \bar{x}' = \underline{0} \quad , \quad \bar{x}'' \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

3) • $\bar{x}'$ $\quad A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{mgl}{J}\cos(\bar{x}_1) & -\frac{K}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J} & -\frac{K}{J} \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{K}{J}\lambda + \frac{mgl}{J} \Rightarrow$ tutti i segni sono positivi $\Rightarrow$ as. stabile

• $\bar{x}''$ $\quad A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & -\frac{K}{J} \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{K}{J}\lambda - \frac{mgl}{J} \Rightarrow$ violiamo la C.N.S per l'asintotica stabilità

$\Rightarrow \exists \lambda_1 : Re(\lambda_i) > 0$

$\Rightarrow$ instabile

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{mgl}{J}\sin(x_1) - \frac{K}{J}x_2 + \frac{1}{J}(v + p x_1) \\ y = x_1 \end{cases}$

$\bar{x} \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \cancel{-\frac{mgl}{J}\sin(\pi)} + \frac{1}{J}(\bar{v} + p\pi) \\ \bar{y} = \pi \end{cases} \to \dots \to \quad \bar{v} = -p\pi$

linearizzando: $\quad A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J}\cos(\pi) + \frac{p}{J} & -\frac{K}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} + \frac{p}{J} & -\frac{K}{J} \end{bmatrix}$

$$p_a(\lambda) = \lambda^2 + \frac{K}{J}\lambda - \frac{mgl}{J} - \frac{p}{J}$$

affinché $\bar{x}$ sia as. stabile imponiamo:

$-\frac{mgl}{J} - \frac{p}{J} > 0 \to \quad p < -mgl$

# 1 Analisi di investimenti

Una banca propone un tasso d'interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale mentre un'altra propone un tasso $i_2 = 12.5\%$ annuale. Se si ha intenzione di mantenere il capitale investito $I$ per almeno un anno, quale dei due investimenti è più conveniente?

## Soluzione

Per poter analizzare la decisione si deve scrivere il modello relativo all'andamento dell'investimento. In particolare, chiamando con $x(k)$ l'ammontare dell'investimento all'istante $k$, l'equazione con cui varia è data da:

$$x(k+1) - x(k) = ix(k) \quad \Rightarrow \quad x(k+1) = (1+i)x(k)$$

Analizziamo il caso di tasso di interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale, il tempo $k$ rappresenta il trimestre corrente. L'investimento iniziale è $x(0) = I$. Essendo l'orizzonte temporale minimo di un anno, si deve analizzare l'evoluzione dell'investimento fino all'istante $k = 4$. Si ottiene, quindi:

$$\begin{aligned} x(1) &= (1+i_1)x(0) = (1+i_1)I \\ x(2) &= (1+i_1)x(1) = (1+i_1)^2 I \\ x(3) &= (1+i_1)x(2) = (1+i_1)^3 I \\ x(4) &= (1+i_1)x(3) = (1+i_1)^4 I \end{aligned}$$

Di conseguenza, dopo un anno, il capitale investito sarà pari a $(1+i_1)^4 I = 1.03^4 I \simeq 1.1255I$.

Nel caso di tasso di interesse $i_2 = 12.5\%$ annuale, il tempo $k$ rappresenta l'anno corrente. Di conseguenza, in un anno l'investimento diventa:

$$x(1) = (1+i_2)x(0) = (1+i_2)I,$$

ossia, dopo un anno, il capitale investito sarà pari a $(i+i_2)I = 1.125I$.

Di conseguenza è più conveniente investire il capitale nella prima banca.

## 2 Prestito

Una banca propone un prestito pari a $P$, con un tasso d'interesse fisso $i$ da estinguere con una rata annuale fissa $R$.

1. Se si vuole estinguere il prestito in un numero $N$ di anni, quale dovrà essere l'importo della rata $R$?
2. Fissato il valore della rata $R$, in quanti anni si estinguerà il prestito?

### Soluzione

1. Chiamando con $x(k)$ l'ammontare del debito residuo dopo $k$ anni, il modello che rappresenta il suo andamento è:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) - u(k),$$

dove $u(k) = R$, $\forall k$.

Risolvendo l'equazione alle differenze, si ottiene:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j),$$

in cui

$$A = 1+i, \quad B = -1.$$

Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned} x(k) &= (1+i)^k x(0) - \sum_{j=0}^{k-1} (1+i)^{k-j-1} u(j) \\ &= (1+i)^k P - R\frac{(1+i)^k - 1}{i} \end{aligned}$$

Utilizzando la formula precedente è possibile calcolare la rata $R$ necessaria a estinguere il prestito $P$ in $N$ anni. Infatti, imponendo che il debito residuo dopo $N$ anni sia pari a zero si ottiene:

$$(1+i)^N P - R\frac{(1+i)^N - 1}{i} = 0 \tag{1}$$

$$R = \frac{i(1+i)^N P}{(1+i)^N - 1}. \tag{2}$$

Per esempio, per estinguere un prestito di $P = 10000$ Euro, a un tasso di interesse del $i = 5\%$ in $N = 10$ anni, bisogna pagare una rata annuale pari a:

$$R = \frac{0.05 \cdot (1.05)^{10} \cdot 10000}{(1.05)^{10} - 1} \simeq 1295 \text{ Euro}.$$

Si noti che in questo caso la somma complessiva restituita alla banca è 12950 Euro.

Se si vuole estinguere il debito in $N = 20$ anni, invece sarà richiesta una rata annuale pari a:

$$R = \frac{0.05 \cdot (1.05)^{20} \cdot 10000}{(1.05)^{20} - 1} \simeq 802 \text{ Euro}.$$

Si noti che in questo caso la somma complessiva restituita alla banca è maggiore del caso precedente e pari a 16040 Euro.

L'andamento del valore della rata in funzione del numero di anni è mostrato in Figura 2.

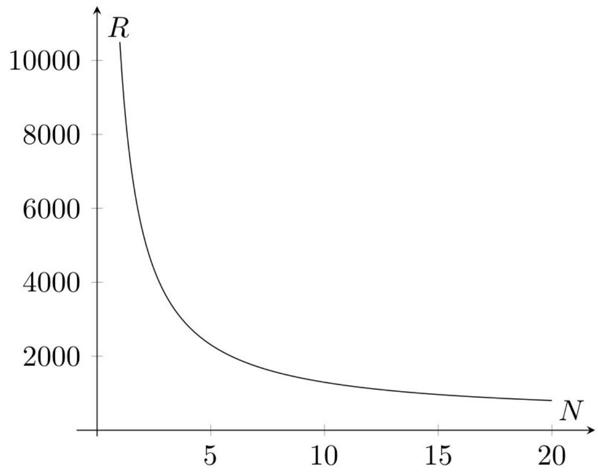



Figura 1: Andamento del valore della rata in funzione del numero di anni, per $P = 10000$ e $i = 0.05$.

2. Fissando il valore della rata $R$ e volendo trovare il quanti anni si estinguerà il prestito, si può risolvere la relazione (1) per $N$, ottenendo:

$$\begin{aligned}
&(1+i)^N P - R\frac{(1+i)^N - 1}{i} = 0\\
&i(1+i)^N P - R\left((1+i)^N - 1\right) = 0\\
&i(1+i)^N P - R(1+i)^N + R = 0\\
&(1+i)^N\,(iP - R) = -R\\
&(1+i)^N = \frac{R}{R-iP}\\
&\ln(1+i)^N = \ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)\\
&N\ln(1+i) = \ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)\\
&N = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)}{\ln(1+i)}
\end{aligned}$$

Per esempio, per estinguere un prestito di $P = 10000$ Euro, se si è quindi disposti ad avere una rata $R = 1000$ Euro, con un tasso di interesse del $i = 5\%$, saranno necessari:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{1000}{1000 - 0.05\cdot 10000}\right)}{\ln(1.05)} \simeq 14.02 \text{ anni.}$$

Se invece si vuole avere una rata più piccola, ad esempio di $R = 600$ Euro, il prestito sarà estinto in:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{600}{600 - 0.05\cdot 10000}\right)}{\ln(1.05)} \simeq 36.72 \text{ anni.}$$

L'andamento del valore del numero di anni necessari per estinguere il prestito in funzione della rata è mostrato in Figura 2. Notare che esiste un asintoto per $R = Pi = 500$ dato che la rata non è sufficiente a compensare l'effetto del tasso di interesse, ossia si stanno pagando solo gli interessi alla banca, ma non si sta ripagando il prestito, per cui per $R = 500$ saranno necessari infiniti anni per poter estinguere il prestito.

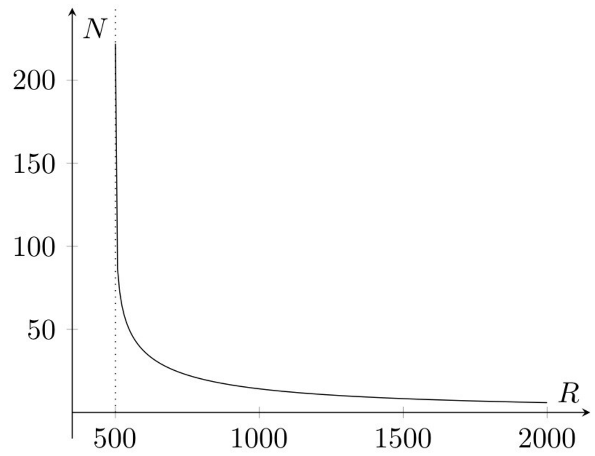



Figura 2: Andamento del valore del numero di anni necessari per estinguere il prestito in funzione della rata, per $P = 10000$ e $i = 0.05$.

# 3 Modello degli studenti universitari

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico $k$.

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno $k$ e si iscrivono nell'anno $k+1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno $k$;
- $\alpha_i \in [0,1]$: tasso degli studenti promossi nell'$i$-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\beta_i \in [0,1)$: tasso degli studenti ripetenti nell'$i$-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1-\alpha_i-\beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno $i$.

Si trascurino le iscrizioni di studenti provenienti da altre università.

1. Scrivere il modello dinamico del sistema.
2. Studiare la stabilità del sistema dinamico.
3. Posto:
$$\alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.6 \quad \alpha_3 = 0.5 \quad \beta_1 = 0.2 \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 0.5$$
determinare lo stato di equilibrio corrispondente a $u(k) = \bar{u} = 4000$.

## Soluzione

1. Il modello dinamico è:
$$\begin{cases} x_1(k+1) = \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) = \alpha_3 x_3(k) \end{cases}$$
Le cui matrici sono:
$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$
2. Poiché la matrice $A$ è triangolare, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale: $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$. Poiché si tratta di valori reali compresi tra 0 e 1, il sistema è asintoticamente stabile.
3. Imponiamo l'equilibrio con i valori numerici dati dei parametri
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \beta_1 \bar{x}_1 + \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \alpha_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = \alpha_2 \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 \\ \bar{y} = \alpha_3 \bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0.2\bar{x}_1 + 4000 \\ \bar{x}_2 = 0.5\bar{x}_1 + 0.2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = 0.6\bar{x}_2 + 0.5\bar{x}_3 \\ \bar{y} = 0.5\bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{4000}{0.8} = 5000 \\ \bar{x}_2 = \dfrac{2500}{0.8} = 3125 \\ \bar{x}_3 = \dfrac{1875}{0.5} = 3750 \\ \bar{y} = 1875 \end{cases}$$

# 4 Sistema non lineare

Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) + (x_2(t)-2)(u(t)-1) \\ x_2(t+1) &= 0.5x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

A. scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

B. si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

C. si determini il sistema linearizzato intorno alle condizioni di equilibrio trovate al punto precedente.

D. determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.

E. si calcoli il movimento dello stato del sistema con condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ e ingresso pari a $u(t) = \bar{u} = 1$.

## Soluzione

A. Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$ e $\delta y = y - \bar{y}$. Il sistema linearizzato è il seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta x_1(t+1) \\ \delta x_2(t+1) \end{bmatrix} &= A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u(t) \end{aligned}$$

where

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.5 & \bar{u}-1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

B. Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $x_1(t+1) = x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t+1) = x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 1$. L'unica condizione di equilibrio e' $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (0, 2, 1)$.

C. Il sistema linearizzato intorno alla condizione di equilibrio trovata al punto precedente presenta le seguenti matrici di sistema:

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

D. La matrice di sistema $A$ è diagonale. I suoi autovalori sono entrambi pari a 0.5, il cui modulo e' strettamente minore di 1. L'equilibrio trovato risulta pertanto un movimento asintoticamente stabile.

E. Ponendo $u(t) = \bar{u} = 1$ le equazioni del sistema risultano lineari e disaccoppiate tra loro:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) \\ x_2(t+1) &= 0.5x_2(t) + 1 \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del sistema si ottiene calcolando separatamente i movimenti dei due stati:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= 2(1 - 0.5^t) \end{aligned}$$

## 5 Competizione aziendale

Un'azienda A si divide una determinata clientela con altre aziende con cui è in competizione. All'istante temporale 0 l'azienda A detiene il 30% della clintela. Per incrementare la propria quota di mercato (pacchetto clienti) decide di puntare su una campagna pubblicitaria che promette i seguenti risultati:

- l'azienda A conquisterà, ogni mese, un ventesimo dei clienti non suoi;
- l'azienda A perderà, ogni mese, un ventesimo dei propri clienti.

Assumendo che il numero di clienti complessivi rimanga invariato:

A. costruire un modello in spazio di stato a tempo discreto in grado di descrivere l'evoluzione del pacchetto clienti dell'azienda A;

B. studiare le proprietà di stabilità del sistema definito al punto a.

C. studiare l'evoluzione del pacchetto clienti della azienda A nel tempo, e la soluzione in condizioni stazionarie;

D. considerando il modello ottenuto al punto a. indipendentemente dal contesto applicativo, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ ($x(t)$ denota lo stato del sistema)?
Inoltre, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni $t$?

### Soluzione

A. Il modello ottenuto ha come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_A(t) \\ x_C(t) \end{bmatrix}$$

dove $x_A(t)$ è il pacchetto clienti detenuto dall'azienda A, mentre $x_C(t)$ è il pacchetto clienti detenuto dalle aziende in competizione con A. Si ha dunque che le condizioni iniziali del sistema sono $x_A(0) = 30$, mentre $x_C(0) = 70$. Il modello dinamico risultante è:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} x(t)$$

che è autonomo, dato che non prevede variabili di ingresso.

B. La matrice di transizione $A$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico risulta $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9 = (\lambda - 0.9)(\lambda - 1)$. Perciò gli autovalori risultano $\lambda_1 = 1$ è $\lambda_2 = 0.9$. Il sistema è perciò semplicemente stabile.

C. Gli autovettori del sistema sono

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Le condizioni iniziali del sistema sono

$$x(0) = \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Si noti che il vettore $x(0)$ può essere scritto come una combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$, cioè $x(0) = 50v_1 - 20v_2$. Per la linearità del sistema

$$x(t) = A^t x(0) = 50A^t v_1 - 20A^t v_2 = 50\lambda_1^t v_1 - 20\lambda_2^t v_2$$

Cioè

$$x(t) = \begin{bmatrix} 50 - 20(0.9)^t \\ 50 + 20(0.9)^t \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi che $x_A(t) = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$.

Una soluzione alternativa consiste nel considerare $x_A(t) = Cx(t)$, dove $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Come noto, il movimento libero della variabile $x_A(t)$ è combinazione lineare dei modi del sistema, cioè $\lambda_1^t = 1$ e $\lambda_2^t = (0.9)^t$. Cioè, si può scrivere

$$x_A(t) = \gamma_1 + \gamma_2(0.9)^t$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} x_A(0) &= \gamma_1 + \gamma_2 &&= Cx(0) &&= 30 \\ x_A(1) &= \gamma_1 + \gamma_2(0.9) &&= CAx(0) &&= \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \end{bmatrix} x(0) = 32 \end{aligned}$$

Si ottiene che $\gamma_1 = 50$ e $\gamma_2 = -20$, e dunque

$$x_A(t) = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$$

D. Le condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ sono date dall'espressione $x(0) = \gamma v_2$, dove $\gamma \in \mathbb{R}$. Infatti, essendo $v_2$ l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0.9$, $x(t) = (0.9)^t x(0) \to 0$.
Inoltre, le condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni $t$ sono date dall'espressione $x(0) = \gamma v_1$, dove $\gamma \in \mathbb{R}$. Infatti, essendo $v_1$ l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, $x(t) = (1)^t x(0) = x(0)$.

## Soluzione alternativa

A. Dato che nel testo viene specificato che il numero totale di clienti è costante è possibile rappresentare il sistema attraverso un modello del primo ordine, dove cioè $x_C(t) = 100 - x_A(t)$, ottenendo quindi il seguente modello dinamico

$$x_A(t+1) = 0.95x_A(t) + 0.05x_C(t) = 0.95x_A(t) + 0.05(100 - x_A(t)) = 0.9x_A(t) + 5$$

B. Il modello scalare ha la forma $x(t+1) = ax(t) + bu(t)$, dove $a = 0.9$, $b = 1$, e presenta un ingresso costante $u(t) = 5$. L'autovalore è $a = 0.9$, e il modello risulta asintoticamente stabile.

C. La soluzione esplicita del sistema è data da $x(t) = a^t x(0) + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} u(k-1)$, e quindi

$$x_A(t) = (0.9)^t(30) + 5\sum_{k=0}^{t-1}(0.9)^k = 30(0.9)^t + 5\frac{1-(0.9)^t}{1-0.9} = 30(0.9)^t - 50(0.9)^t + 50 = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$$

D. Considerando questo modello, non esiste alcuna condizione iniziale tale per cui $x_A(t) \to 0$, mentre se $x_A(0) = 50$, allora $x_A(t) = 50$ per ogni $t > 0$. Infatti $\bar{x}_A = 50$ è la soluzione d'equilibrio del sistema.

# 1 Stabilità e funzione di trasferimento

Dato il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

### Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \alpha_{31} & \star & \star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= (s-1)s(s+2) - (s - (s-1)) = s^3 + s^2 - 2s - 1 \\ \alpha_{31} &= \Delta_{13} = (-1)^{1+3} s = s, \end{aligned}$$

da cui si ottiene che:

$$G(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 - 2s - 1}.$$

2. Poiché il denominatore non ha coefficienti tutti concordi in segno, è violata la condizione necessaria per l'asintotica stabilità: il sistema non è asintoticamente stabile. Inoltre, dato che i coefficienti del denominatore cambiano di segno una sola volta, si sa che esiste un autovalore con parte reale strettamente positiva.

## 2 Risposta all'esponenziale

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema.
3. Si calcoli l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.
4. Si calcoli l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso $u(t) = e^{t}$, $t \geq 0$.

### Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

   Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

2. Il denominatore della F.d.T. è dello stesso ordine della matrice $A$ del sistema, per cui esso coincide con il polinomio caratteristico di $A$. Dato che le radici del denominatore della F.d.T. sono $s = -2$ ed $s = -3$, il sistema è asintoticamente stabile per il criterio degli autovalori.

3. L'ingresso $u(t) = e^{2t}$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{2t}\right](s) = \frac{1}{s-2}.$$

   Si può quindi calcolare l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

   Si può ottenere l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)(s-2)} \end{aligned}$$

Quindi deve valere che:

$$s - 1 = \alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa $s$, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di $s$ per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$:

- Sostituendo $s = -2$:

$$-2 - 1 = \alpha_1(-2+3)(-2-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$-3 - 1 = \alpha_2(-3+2)(-3-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{4}{5}$$

- Sostituendo $s = 2$:

$$2 - 1 = \alpha_3(2+2)(2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{20}$$

Per cui l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita è:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\
&= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} + \alpha_3 e^{2t} \\
&= \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{20}e^{2t}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

Il grafico del movimento forzato dell'uscita è riportato in Figura 1.

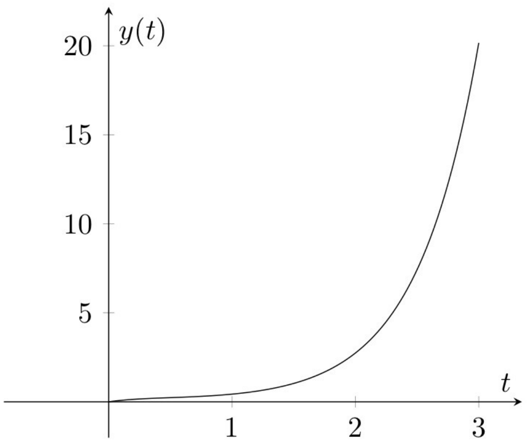



Figura 1: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$.

4. L'ingresso $u(t) = e^t$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^t\right](s) = \frac{1}{s-1}.$$

Si può quindi calcolare l'espressione del movimento forzato dell'uscita nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

Si può ottenere l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Quindi deve valere che:

$$1 = \alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa $s$, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di $s$ per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri $\alpha_1$ e $\alpha_2$:

- Sostituendo $s = -2$:

$$1 = \alpha_1(-2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$1 = \alpha_2(-3+2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -1$$

Per cui l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} \\ &= e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il grafico del movimento forzato dell'uscita è riportato in Figura 2.

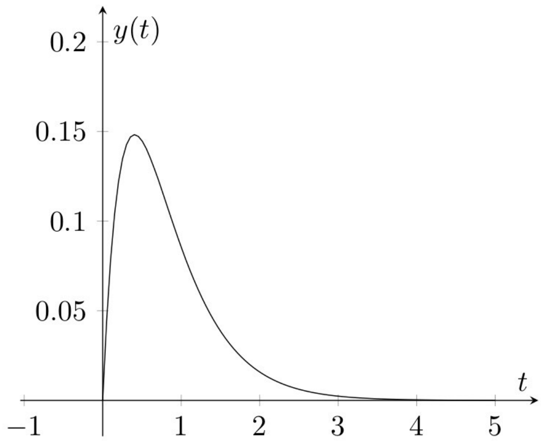



Figura 2: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^t$.

**Osservazione 1.** *Si noti che nonostante si applichi un ingresso esponenziale che tende a infinito per $t \to \infty$, l'uscita non diverge. Ciò è legato al fatto che il contributo dell'ingresso è* bloccato *dallo zero della F.d.T.. Questa proprietà è detta anche* ***proprietà bloccante degli zeri****.*

# 3 Movimento del sistema

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e valutare la stabilità del sistema.
2. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.
3. Verificare la correttezza dell'espressione applicando, se possibile, i teoremi del valore iniziale e finale.
4. Determinare il movimento dell'uscita associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

## Soluzione

1. Si può calcolare la F.d.T. utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) \end{cases} \Rightarrow \quad G(s) = \frac{10}{s+1}$$

Il sistema ha un autovalore nascosto. Infatti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Il sistema è asintoticamente stabile dato che entrambi gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

2. L'espressione dell'uscita del sistema in trasformata di Laplace è:

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{10}{(s+1)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+3} = \frac{\alpha(s+3) + \beta(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

Deve quindi valere che:

$$10 = \alpha(s+3) + \beta(s+1)$$

- Sostituendo $s = -1$:

$$10 = \alpha(-1+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$10 = \beta(-3+1), \quad \Rightarrow \quad \beta = -5$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 5^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

3. Nel punto precedente abbiamo trovato che:

$$y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$$

da cui si può verificare facilmente che

$$y(0) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Verifichiamo questi risultati con il teorema del valore iniziale (TVI) e con il teorema del valore finale (TVF)

- TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

**Osservazione 2.** *Accade sempre che $y(0) = 0$ se $G(s)$ è strettamente propria.*

- TVF: Dato che $Y(s)$ è strettamente propria e ha radici del denominatore in $s = -1$ e $s = -3$, si può applicare il TVF. Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

4. Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

in cui il movimento forzato dell'uscita è dato dall'espressione $y_F(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$.

Per calcolare il movimento libero possiamo fare la combinazione lineare dei modi del sistema. Calcoliamo, quindi gli autovalori del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Dato che $A$ è diagonale, la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore coincidono. Si ha quindi un solo modo del sistema $e^{-t}$. Quindi $y_L(t)$ è dato da

$$\begin{cases} y_L(t) = \gamma e^{-t}, t \geq 0 \\ y_L(0) = x_1(0) + x_2(0) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 3$$

Da cui

$$y_L(t) = 3e^{-t}, t \geq 0.$$

Componendo i risultati precedentemente ottenuti, otteniamo che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t) = 3e^{-t} + 5e^{-t} - 5e^{-3t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

Alternativamente si poteva trasformare il sistema utilizzando le condizioni iniziali date:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) + \dfrac{1}{s+1} \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) + \dfrac{2}{s+1} \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) + \dfrac{3}{s+1} \end{cases}$$

in cui

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \underbrace{\frac{10}{s+1}U(s)}_{M.F.} + \underbrace{\frac{3}{s+1}}_{M.L.} \\
&= \frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= 5e^{-t} - 5e^{-3t} + 3e^{-t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

# 4 Poli multipli

Dato un sistema lineare di ordine 3 avente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

1. Valutare la stabilità del sistema.
2. Tracciare l'andamento qualitativo del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso a scalino $u(t) = \text{sca}(t)$, $t \geq 0$.
3. Determinare l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso a scalino $u(t) = \text{sca}(t)$, $t \geq 0$.

## Soluzione

1. I poli del sistema sono $s_1 = -1$ con molteplicità $n_1 = 2$ e $s_2 = -2$ con molteplicità $n_2 = 1$. Dato che il sistema di partenza è di ordine 3 e ci sono 3 poli nella funzione di trasferimento, non ci sono autovalori nascosti e i poli sono tutti e soli gli autovalori di $A$. Si può concludere per il criterio degli autovalori che il sistema è asintoticamente stabile.
2. Per valutare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema, utilizziamo il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF), sulla trasformata di Laplace dell'uscita del sistema:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$$

- Calcoliamo $y(0)$ con il TVI:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\dot{y}(0)$ con il TVI:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sY(s) - y(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\ddot{y}(0)$ con il TVI:

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)} = 0.$$

- Calcoliamo $\dddot{y}(0)$ con il TVI:

$$\dddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(s\left(s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0)\right) - \ddot{y}(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{(s+1)^2(s+2)} = 1.$$

**Osservazione.** Come verificato nel caso visto, definendo $y^{(k)}(0)$ la derivata $k$-esima del movimento forzato dell'uscita all'istante $t = 0$, la regola generale è che

$$y^{(k)}(0) = 0$$

per $k = 0, \ldots, r_d - 1$ e

$$y^{(r_d)}(0) = \rho$$

dove $r_d$ è il grado relativo della funzione di trasferimento, calcolato come (grado di $D(s)$)$-$(grado di $N(s)$) e $\rho$ è la costante di trasferimento.

- Calcoliamo il valore di regime dell'uscita con il TVF. Le condizioni di applicabilità sono soddisfatte dato che tutti i poli di $Y(s)$ hanno parte reale strettamente negativa (o sono nell'origine). Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{2}.$$

- Le costanti di tempo del sistema sono:

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} = 1, \quad \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{2}$$

La costante di tempo dominante è quindi $\tau_1$. Dato che ci sono due poli coincidenti con costante di tempo $\tau_1$, il tempo di assestamento sarà circa $T_a \simeq 6.64\tau_1 = 6.64$.

L'andamento della risposta allo scalino del sistema è mostrato in Figura 3.

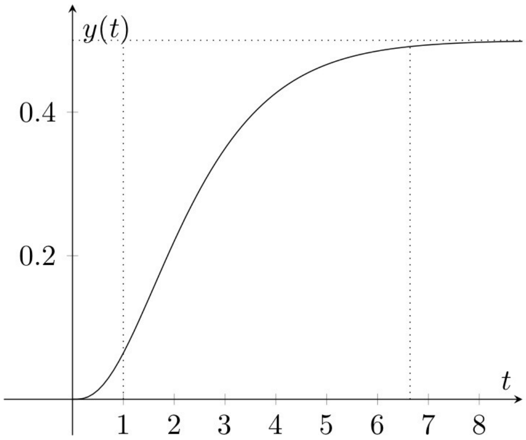



Figura 3: Risposta allo scalino del sistema.

3. Per determinare l'espressione analitica della risposta allo scalino passiamo dal dominio delle trasformate:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$$

Per poter antitrasformare, si può scomporre $Y(s)$ in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} &= \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2)} \end{aligned}$$

Deve quindi valere per ogni valore di $s$:

$$1 = \alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2$$

- Valutando in $s = 0$:

$$1 = \alpha_1(1)^2(2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

- Valutando in $s = -1$:

$$1 = \alpha_3(-1)(-1+2), \quad \alpha_3 = -1$$

- Valutando in $s = -2$:

$$1 = \alpha_4(-2)(-2+1)^2, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}$$

- Per ottenere il valore del parametro $\alpha_2$ (associato all'autovalore con $s_1 = -1$), si può sfruttare il valore dei parametri trovati, e valutare l'uguaglianza in un altro punto. Quindi l'uguaglianza diventa:

$$1 = \frac{1}{2}(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) - s(s+2) - \frac{1}{2}s(s+1)^2$$

che, valutata in $s = -3$ da:

$$\begin{aligned}
&1 = \frac{1}{2}(-3+1)^2(-3+2) + \alpha_2(-3)(-3+1)(-3+2) - (-3)(-3+2) - \frac{1}{2}(-3)(-3+1)^2 \\
&1 = \frac{1}{2}(-2)^2(-1) + \alpha_2(-3)(-2)(-1) - (-3)(-1) - \frac{1}{2}(-3)(-2)^2 \\
&1 = -2 - 6\alpha_2 - 3 + 6 \\
&\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

La risposta del sistema è quindi data da:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{(s+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 t e^{-t} + \alpha_4 e^{-2t}, \quad t \geq 0 \\
&= \frac{1}{2} - te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

# 1 Schema a blocchi

Con riferimento al seguente schema a blocchi mostrato in Figura 1

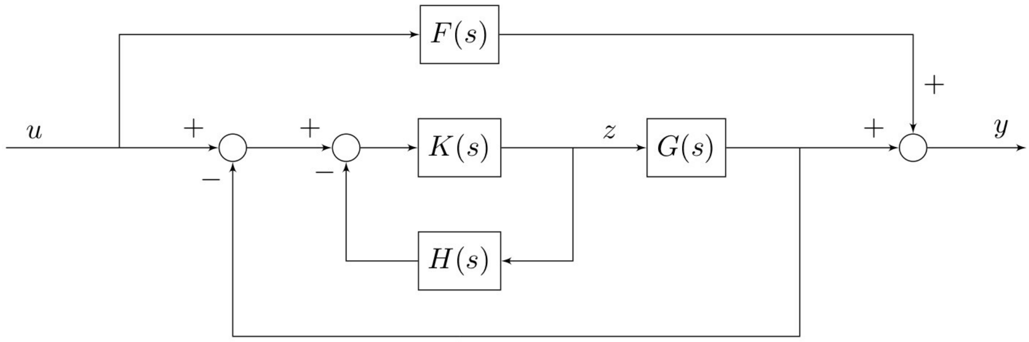



Figura 1: Schema a blocchi di riferimento.

1. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e la variabile $z(t)$.
2. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Si dica se è necessario che uno dei sistemi $G(s)$, $H(s)$, $K(s)$, $F(s)$ sia asintoticamente stabile per l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

## Soluzione

1. Si può notare che il ramo che include $F(s)$ non contribuisce al segnale $z(t)$, per cui può essere eliminato. Si può quindi riscrivere il sistema come mostrato in Figura 2.

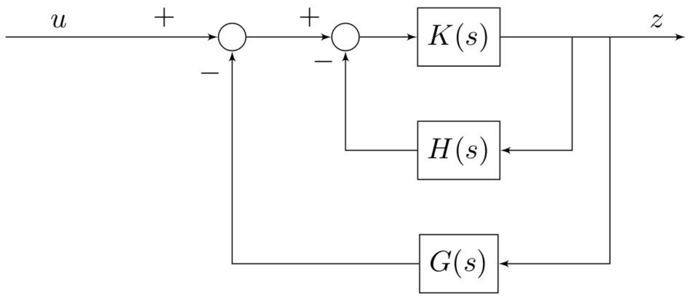



Figura 2: Schema rielaborato.

Partendo dall'anello più interno, è possibile definire la funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)H(s)},$$

e il sistema può essere riscritto come mostrato in Figura 3.

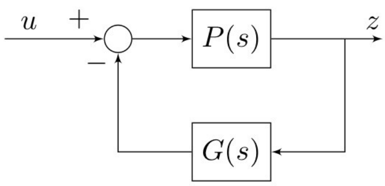



Figura 3: Schema rielaborato.

Per cui si può calcolare la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $z(t)$ come:

$$T(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)G(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)\left(H(s) + G(s)\right)}$$

2. Il sistema può essere riscritto come in Figura 4.

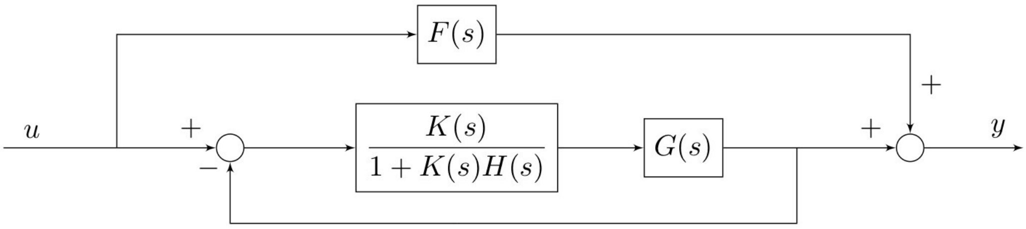



Figura 4: Schema rielaborato.

Successivamente si può riscrivere il sistema come in Figura 5.

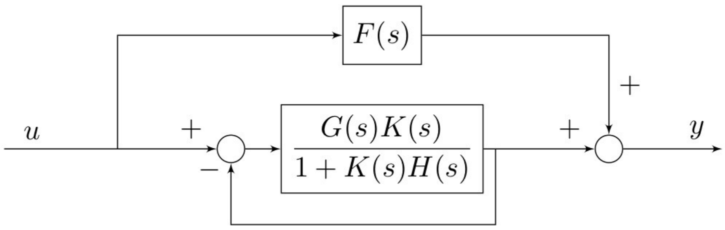



Figura 5: Schema rielaborato.

Chiamando con $L(s) = \dfrac{G(s)K(s)}{1 + K(s)H(s)}$, si può riscrivere il sistema come in Figura 6.

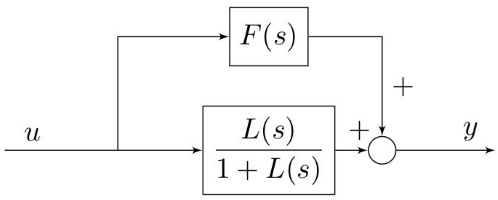



Figura 6: Schema rielaborato.

Quindi si può ricavare:

$$G_{\text{tot}} := \frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F(s) + G(s)K(s) + F(s)K(s)\left(H(s) + G(s)\right)}{1 + K(s)\left(H(s) + G(s)\right)}$$

3. $F(s)$ è in parallelo a tutto il resto: è quindi necessario che sia asintoticamente stabile.

## 2 Schemi a blocchi

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ del sistema interconnesso rappresentato in Figura 7, composto da tre sistemi lineari con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

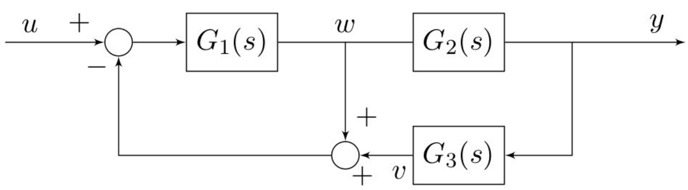



Figura 7: Sistema interconnesso.

### Soluzione

Chiamando con $e(t)$ l'ingresso di $G_1(s)$, con $w(t)$ la sua uscita e con $v(t)$ l'uscita di $G_3(s)$ si può notare che

$$e(t) = u(t) - (w(t) + v(t)) = (u(t) - v(t)) - w(t).$$

Lo schema a blocchi è, quindi, equivalente allo schema rappresentato in Figura 8.

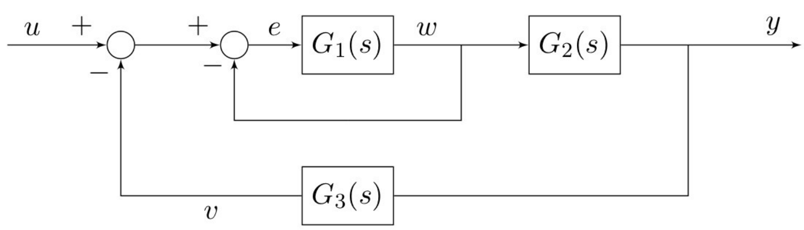



Figura 8: Schema equivalente.

Notando che $G_1(s)$ è retroazionato con retroazione negativa unitaria, si può riscrivere il sistema come mostrato in Figura 9.

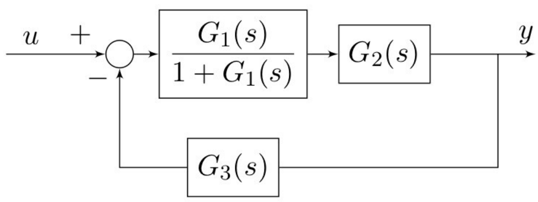



Figura 9: Schema semplificato.

È quindi ora semplice ottenere la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ come:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)}\cdot G_3(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+(1+G_2(s)G_3(s))\,G_1(s)}$$

Una soluzione alternativa consiste nello scrivere le relazioni ingresso-uscita in termini di trasformata di Laplace dei vari sistemi ed esprimere la trasformata di Laplace di $y(t)$ in funzione di $u(t)$.

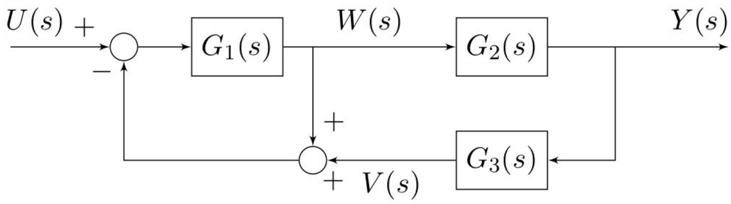



Figura 10: Analisi dei segnali nel sistema interconnesso.

Analizzando lo schema rappresentato in Figura 10, è possibile scrivere le equazioni algebriche seguenti:

$$
\begin{cases}
W(s) = G_1(s)\left(U(s) - W(s) - V(s)\right) \\
Y(s) = G_2(s)W(s) \\
V(s) = G_3(s)Y(s)
\end{cases}
$$

$$(1 + G_1(s))W(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)V(s)$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}U(s) - \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}G_3(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)}U(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)}Y(s)$$

$$(1 + G_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s))Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s),$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)\left(1 + G_2(s)G_3(s)\right)}$$

confermando il risultato precedentemente ottenuto.

# 3 Schema a blocchi

Dato lo schema a blocchi mostrato in Figura 11

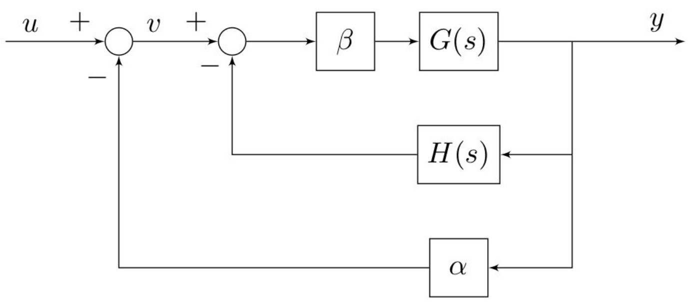



Figura 11: Schema a blocchi di riferimento.

con

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si calcolino guadagno generalizzato, tipo, poli, zeri della funzione di trasferimento ottenuta al punto precedente.
3. Studiare la stabilità del sistema cui corrisponde la funzione di trasferimento trovata al punto precedente.
4. Posti $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'ingresso $u(t) = \mathrm{sca}(t)$.

## Soluzione

1. Lo schema a blocchi può essere riscritto come mostrato in Figura 12

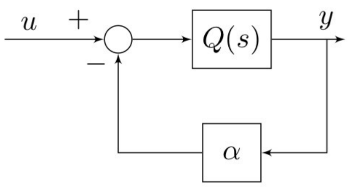



Figura 12: Schema rielaborato.

con

$$Q(s) = \frac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s)}$$

da cui si può ricavare:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{1 + \alpha Q(s)} = \frac{\dfrac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s)}}{1 + \dfrac{\alpha \beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s)}} = \frac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s) H(s) + \alpha \beta G(s)}$$

Sostituendo le espressioni di $G(s)$ e di $H(s)$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{\dfrac{\beta}{s+1}}{1+\beta\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}+\dfrac{\alpha\beta}{s+1}} = \frac{\beta(s+2)}{(s+1)(s+2)+\beta s+\alpha\beta(s+2)} \\
&= \frac{\beta(s+2)}{s^2+(3+\beta+\alpha\beta)s+2+2\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

2. La F.d.T. $F(s)$ ha le seguenti caratteristiche:

   - Il tipo della funzione di trasferimento è $g = 0$ in quanto non ci sono singolarità nell'origine.
   - Il guadagno statico si può quindi ottenere come:

   $$F(0) = \frac{2\beta}{2+2\alpha\beta} = \frac{\beta}{1+\alpha\beta}$$

     e in questo caso coincide con il guadagno generalizzato $\mu$ (dato che $g = 0$).
   - I poli del sistema sono:

   $$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-(3+\beta+\alpha\beta) \pm \sqrt{(3+\beta+\alpha\beta)^2 - 4(2+2\alpha\beta)}\right)$$

   - $F(s)$ ha un solo zero in $s = -2$.

3. Per studiare la stabilità del sistema associato a $F(s)$, dovremmo applicare il criterio di Routh al polinomio:

   $$p(s) = s^2 + (3+\beta+\alpha\beta)s + 2 + 2\alpha\beta$$

   perché è il denominatore di $F(s)$. Dato, però, che il $p(s)$ è del secondo ordine, sappiamo che la condizione necessaria affinché tutte le sue radici abbiano parte reale strettamente minore di 0 (cioè che tutti i coefficienti del polinomio abbiano lo stesso segno) è anche sufficiente. Quindi si deve risolvere il seguente sistema:

   $$\begin{cases} 1 > 0 \\ 3+\beta+\alpha\beta > 0 \\ 2+2\alpha\beta > 0 \end{cases} .$$

   Poiché $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, essi sono sempre tutti positivi. Pertanto il sistema è sempre asintoticamente stabile.

4. Ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, la F.d.T. del sistema diventa:

   $$F(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+(3+2+2)s+2+4} = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+6} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)}.$$

   Per tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema si scrive l'espressione dell'uscita in trasformata di Laplace:

   $$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)(s+6)}$$

   Si utilizzano quindi il teorema del valore iniziale (TVI) e il teorema del valore finale (TVF):

   - Utilizzo il TVI per calcolare $y(0)$:

   $$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)} = 0$$

- Utilizzo il TVI per calcolare $\dot{y}(0)$:

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sY(s) - y(0)\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s(s+2)}{(s+1)(s+6)} = 2$$

- Le ipotesi di applicabilità del TVF sono verificate, per cui utilizzo il TVF per calcolare $y_\infty$:

$$y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+6)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- La risposta allo scalino non oscilla dato che sono presenti solo poli reali.
- La costante di tempo dominante del sistema è data da:

$$\tau_d = \max_i \tau_i = \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} = 1$$

per cui il tempo di assestamento è di circa $T_a \simeq 5\tau_d = 5$ unità di tempo.

La risposta allo scalino è mostrata in Figura 13.

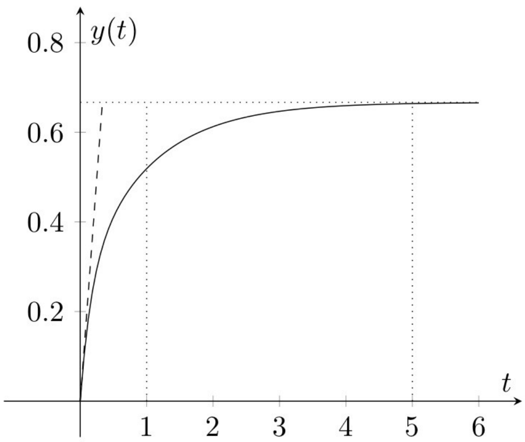



Figura 13: Risposta allo scalino del sistema.

# 4 Schema a blocchi

Si consideri il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = w(t) + 2x(t) \\ \dot{z}(t) = 4y(t) \\ \dot{y}(t) = -4y(t) + 5\,(w(t) - z(t)) \\ x(t) = u(t) + 10y(t) \end{cases}$$

1. Si disegni lo schema a blocchi corrispondente.
2. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
3. Come si sarebbe potuta calcolare tale funzione di trasferimento in modo alternativo?
4. Il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

## Soluzione

1. I blocchi corrispondenti ai sottosistemi sono mostrati in Figura 14.

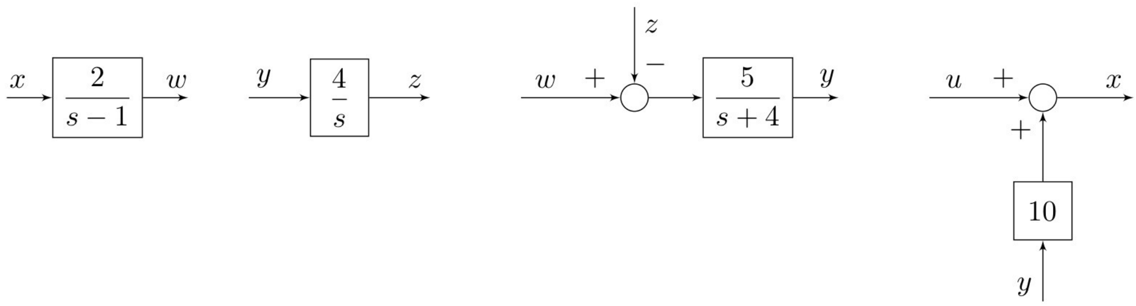



Figura 14: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

Componendo i singoli blocchi, si ottiene uno schema complessivo come mostrato in Figura 15.

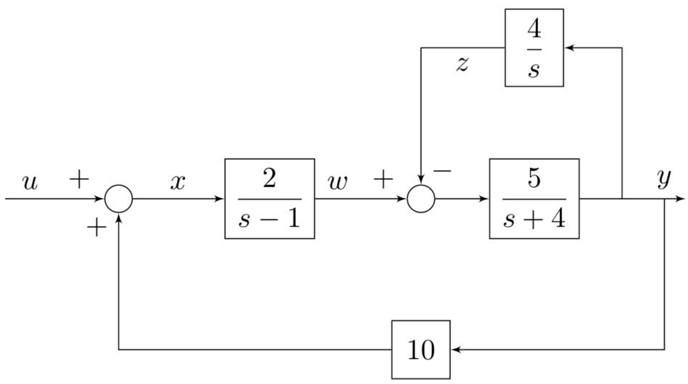



Figura 15: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

2. Per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva, si può rielaborare lo schema a blocchi. Per esempio, si può notare che il sistema può essere riscritto come mostrato in Figura 16, in cui:

$$H(s) = \frac{\dfrac{5}{s+4}}{1 + \dfrac{20}{s(s+4)}} = \frac{5s}{s^2 + 4s + 20}$$

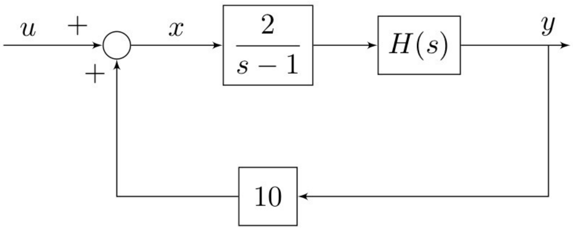



Figura 16: Blocchi corrispondenti ai sottosistemi.

A questo punto, è facile vedere che la funzione di trasferimento complessiva è:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\frac{2}{s-1}H(s)}{1-\frac{20}{s-1}H(s)} \\
&= \frac{\frac{2}{s-1}H(s)}{1-\frac{20}{s-1}H(s)} \\
&= \frac{2H(s)}{s-1-20H(s)} \\
&= \frac{2\frac{5s}{s^2+4s+20}}{s-1-20\frac{5s}{s^2+4s+20}} \\
&= \frac{10s}{(s-1)(s^2+4s+20)-100s} \\
&= \frac{10s}{s^3+3s^2-84s-20}
\end{aligned}
$$

3. La F.d.T. si poteva calcolare riscrivendo il sistema nello spazio di stato come:

$$
\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Bu(t)
$$

$$
y(t) = C \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Du(t)
$$

in cui

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0
$$

da cui si calcola la F.d.T. con la definizione:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -20 \\ 0 & s & -4 \\ -5 & 5 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(sI-A)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \alpha_{31} & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

in cui:

$$
\begin{aligned}
\det(sI - A) &= s(s-1)(s+4) - (100s - 20(s-1)) \\
&= s^3 + 3s^2 - 4s - 80s - 20 = s^3 + 3s^2 - 84s - 20 \\
\alpha_{31} &= \Delta_{13} = (-1)^{1+3} 5s = 5s
\end{aligned}
$$

per cui

$$
G(s) \frac{10s}{s^3 + 3s^2 - 84s - 20}.
$$

4. No, perché è violata la condizione necessaria sulla concordia dei segni dei coefficienti del polinomio caratteristico.

# 5 Schema a blocchi

Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in Figura 17.

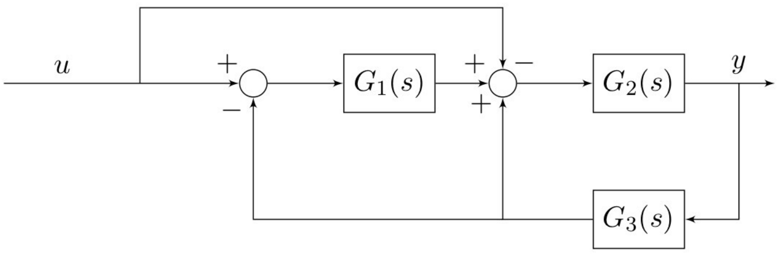



Figura 17: Schema a blocchi.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento (F.d.T.) complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.
2. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{4(1+5s)}{1+4s}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s}, \quad G_3(s) = k$$

   Per quali valori di $k$ il sistema complessivo è asintoticamente stabile?
3. Si ponga $k = 100$. Qual è il valore di regime per l'uscita a fronte di un ingresso costante $u(t) = 200$?

## Soluzione

1. Lo schema di Figura 17 è equivalente allo schema rappresentato in Figura 18.

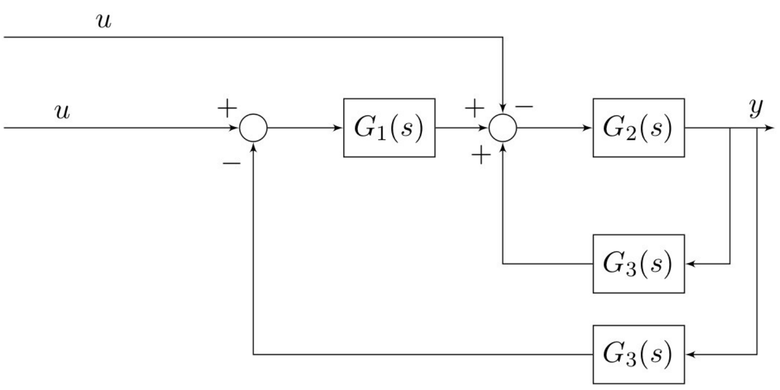



Figura 18: Schema a blocchi riscritto.

A sua volta, lo schema di Figura 18 può essere semplificato come mostrato in Figura 19.

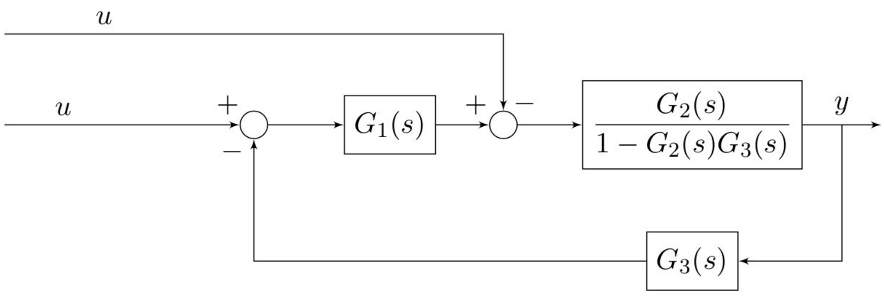



Figura 19: Schema a blocchi riscritto.

Considerando il principio di sovrapposizione degli effetti, considero l'effetto dei due ingressi (uguali e pari a $u(t)$) separatamente, ottenendo che la F.d.T. cercata può essere calcolata come il parallelo delle due seguenti:

$$F_1(s) = \frac{-G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s) - 1\right)}$$
$$F_2(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s) - 1\right)}$$

da cui risulta che la F.d.T. corrispondente è:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{G_2(s)\left(G_1(s) - 1\right)}{1 + G_2(s)G_3(s)\left(G_1(s) - 1\right)}.$$

2. La F.d.T. complessiva diventa:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\frac{2}{s}\left(\frac{4(1+5s)}{1+4s} - 1\right)}{1 + \frac{2k}{s}\left(\frac{4(1+5s)}{1+4s} - 1\right)} \\ &= \frac{2\,(3+16s)}{s(1+4s) + 2k(3+16s)} \\ &= \frac{2(16s+3)}{4s^2 + (32k+1)s + 6k} \end{aligned}$$

Dato che il sistema è ottenuto componendo tre sistemi senza parti nascoste, l'ordine del sistema complessivo è dato dalla somma degli ordini dei singoli sottosistemi. Per cui il sistema complessivo ha ordine $1+1+0 = 2$. Dato che l'ordine del sistema è pari al grado del denominatore della F.d.T. ottenuta, le radici del denominatore di $F(s)$ sono tutti e soli gli autovalori del sistema. Dato che il polinomio è di grado 2, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che tutti i coefficienti siano concordi in segno. Si può quindi imporre che:

$$\begin{cases} 32k + 1 > 0 \\ 6k > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k > 0$$

3. Per $k = 100$ la F.d.T. del sistema complessivo è:

$$F(s) = \frac{2(16s+3)}{4s^2 + 3201s + 600}$$

L'uscita del sistema nel dominio di Laplace si può quindi scrivere come:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{2(16s+3)}{4s^2 + 3201s + 600} \cdot \frac{200}{s}$$

Per calcolare il valore di regime dell'uscita $y(t)$ si può applicare il teorema del valore finale:

$$y_\infty := \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{400s(16s+3)}{s(4s^2 + 3201s + 600)} = \lim_{s\to 0} \frac{400(16s+3)}{4s^2 + 3201s + 600} = \frac{400 \cdot 3}{600} = 2.$$