ENDOMORFISMI ED AUTOMORFISMI (DEFINIZIONE 6.1)

- $f \in Hom(V,V) = End(V)$ si dice endomorfismo di V.
- $f \in End(V)$ invertibile si dice automorfismo di V.

L'insieme degli automorfismi di V è $\underbrace{GL(V)}$ (stesso delle matrici). Gruppo generale lineare su V

↳ gruppo rispetto a $\circ$: $\exists$ inv, $\exists$ neutro, ass., chiusa in $GL(V)$

OSSERVAZIONI

- $\circ$ è interno a $End(V)$ (ANCHE $+, \cdot$): $f, g \in End(V) \Rightarrow f \circ g \in End(V)$
- $f^k = \begin{cases} Id_V & se\ k=0 \\ f \circ \dots \circ f\ \ k\ volte & se\ k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow f^k \in End(V)$

↳ POTENZA

- $P(f) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot f^i = c_0 \cdot Id_V + c_1 \cdot f + \dots + c_k \cdot \underbrace{f^k}$ $\in End(V)$

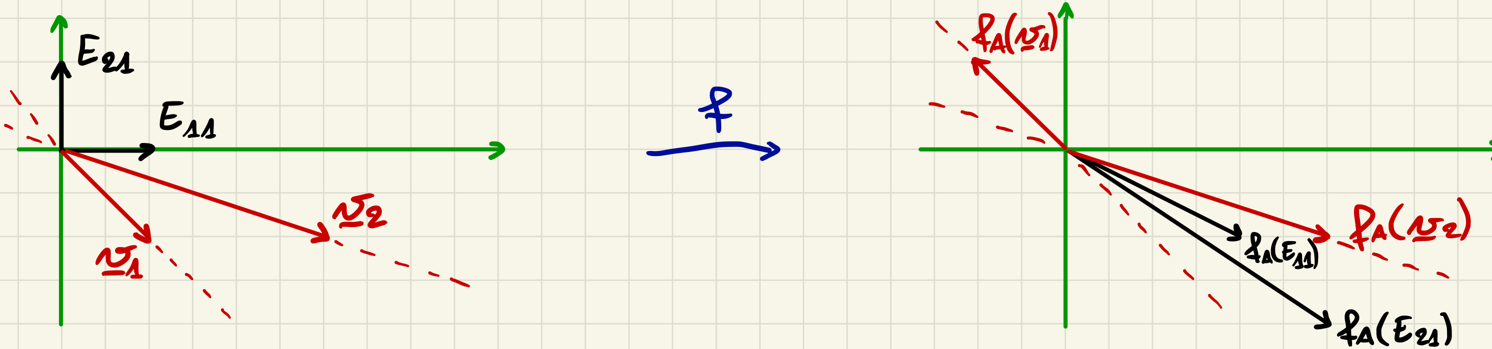
(rappr. da $\prod_{i=0}^{k} F_{\mathbb{B}}$)

- $\phi_{\mathbb{B}}(f) = \phi_{\mathbb{B}\mathbb{B}}(f) = F_{\mathbb{B}}$ $\qquad \phi_{\mathbb{B}}(P(f)) = P(F_{\mathbb{B}}) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot F_{\mathbb{B}}^i$ $\qquad \phi(f^{-1}) = F_{\mathbb{B}}^{-1}$
- $\phi_{\mathbb{B}} : GL(V) \longrightarrow GL(n; \mathbb{K})$ con $n = \dim(V)$ è un isomorfismo di gruppi, rispetto a $\circ$ e $*$.

↳ parlare di applicazioni o delle matrici rappr. è la stessa cosa

$V = Mat(2,1;\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad f_A \in End(V)$ $\quad \mathcal{B}_{21} = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$f_A(E_{11}) = A_{C(1)} = 2E_{11} - 1 \cdot E_{21}$ $\qquad f_A(E_{21}) = A_{C(2)} = 3E_{11} - 2E_{21}$



$\Rightarrow$ E_{11} ed E_{21} vengono ruotati e riscalati da f

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f_A(\underline{v}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \underline{v}_1 \qquad f_A(\underline{v}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{v}_2$

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ vengono solo riscalati da f : AUTOVETTORI

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è base di V $\Rightarrow$ $F_{|\mathcal{B}} = [\, f_A(\underline{v}_1)_{|\mathcal{B}} \;\; f_A(\underline{v}_2)_{|\mathcal{B}} \,] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$F_{|\mathcal{B}}$ è diagonale. $\quad$ $-1, 1$ AUTOVALORI

f è la riflessione rispetto a $\mathcal{L}(\underline{v}_2)$ parallela a $\mathcal{L}(\underline{v}_1)$.

Autovalori ed Autovettori (Definizione 6.3)

$\underline{v} \in V$ è autovettore di $f \in End(V)$ se:

i) $\underline{v} \neq \underline{0}$; ii) esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$.

λ è detto autovalore di f associato all'autovettore $\underline{v}$.

Applicazione Diagonalizzabile (Definizione 6.4)

$f \in End(V)$ è diagonalizzabile se esiste $\mathcal{B}$ composta da autovettori di f.

Primo Criterio di Diagonalizzabilità (Teorema 6.5) || (definizione di f diagonalizzabile)

$f \in End(V)$ è diagonalizzabile sse esiste $\mathcal{B}$ t.c. $F_{|\mathcal{B}}$ è diagonale.

DIM: $\Rightarrow$ f diagonalizzabile con $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di autovettori $\Rightarrow$

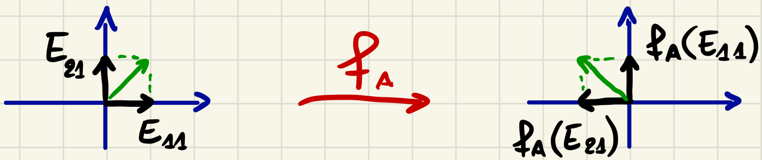
$$F_{|\mathcal{B}} = [f(\underline{v}_1)_{|\mathcal{B}} \dots f(\underline{v}_n)_{|\mathcal{B}}] = [\lambda_1 \cdot \underline{v}_{1|\mathcal{B}} \dots \lambda_n \cdot \underline{v}_{n|\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(n;\mathbb{K}).$$

$\Leftarrow$ $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base con $F_{|\mathcal{B}} = [a_{ij}]$ diagonale $\Rightarrow$

$f(\underline{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{v}_j = a_{ii} \underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_i$ è autovettore con autovalore a_{ii} $\blacksquare$

Esempi

- Id_V, O_V sono diag.: per $\forall \underline{v} \in V$ si ha $Id_V(\underline{v}) = 1 \cdot \underline{v}$, $O_V(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{v}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad V = Mat(2,1;\mathbb{R})$ $\quad f_A(E_{11}) = E_{21}$ $\quad f_A(E_{21}) = -E_{11}$



f_A ruota tutti i vettori di $\pi/2$

$\Rightarrow \nexists$ autovettori di f_A

Autospazio (Definizione 6.8)

λ autovalore di f $\Rightarrow$ $V_\lambda = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \}$ = autospazio associato a λ

Proposizione 6.9

V_λ è un sottospazio di V con $\dim(V_\lambda) \geq 1$.

Dim: • $f(\underline{0}) = \underline{0} = \lambda \cdot \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \in V_\lambda$; (OSS: $\underline{0}$ non è autovettore)

- $\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V_\lambda \Rightarrow f(t\underline{v} + \tilde{t}\underline{\tilde{v}}) = t f(\underline{v}) + \tilde{t} f(\underline{\tilde{v}}) = t\lambda\underline{v} + \tilde{t}\lambda\underline{\tilde{v}} = \lambda(t\underline{v} + \tilde{t}\underline{\tilde{v}})$;
- $V_\lambda \neq \{\underline{0}\}$ perché λ è autovalore $\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1$. $\square$

Problemi: i) Come calcolare autovalori e autovettori?

ii) Come stabilire se f è diagonalizzabile?

RELAZIONE DI SIMILITUDINE E POLINOMIO CARATTERISTICO (6.2 - 6.3)

MATRICI SIMILI (DEFINIZIONE 6.10)

$A, B \in Mat(n,n;\mathbb{K})$. B si dice simile ad A se esiste $S \in GL(n;\mathbb{K})$ tale che $B = S^{-1}AS$.

ESEMPIO: due matrici rappresentative di f rispetto $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono simili: $F_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1} F_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

PROPOSIZIONE 6.17 (criterio di diagonalizzabilità)

$f \in End(V)$ è diagonalizzabile se e solo se $F_{\mathcal{B}}$ è simile ad una matrice diagonale: $D = S^{-1} F_{\mathcal{B}} S$.

$S \; (= M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})$ è detta matrice diagonalizzante.

PROPOSIZIONE 6.11

la similitudine è una relazione di equivalenza R.

$[A] = \{ M \in Mat(n,n;\mathbb{K}) \mid M \sim_R A \}$

$Mat(n,n;\mathbb{K})/R$ = insieme delle classi di similitudine $[A]$

OSS: le matrici che rappresentano un'applicazione appartengono tutte alla stessa classe di similitudine

INVARIANTI PER SIMILITUDINE I (PROPOSIZIONE 6.12)

$r([A])$, $Tr([A])$, $det([A])$ sono funzioni ben definite.

DIM: dobbiamo dimostrare che $|A| = |B|$ se $B = S^{-1}AS$.

$|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}||A||S| = |S|^{-1}|S||A| = |A|$.

Analogamente per rango e traccia. $\blacksquare$

OSS: $A \sim B \Rightarrow$ inv. A = inv. B, viceversa è falso

INVARIANTI PER SIMILITUDINE II (PROPOSIZIONE 6.14)

- $\boxed{\text{Polinomio caratteristico di } A \text{ è } P_A(\lambda) = |A - \lambda I_m| \in \mathbb{K}[\lambda]_m}$
- I coefficienti e le radici di $P_A(\lambda)$ sono invarianti per similitudine
- $c_0 = \det(A)$ $\quad c_{m-1} = (-1)^{m-1} \operatorname{Tr}(A)$ $\quad c_m = (-1)^m \rightarrow P_A(\lambda) = c_n \cdot \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0$

DIM: $P_B(\lambda) = |B - \lambda I_m| = |S^{-1}AS - \lambda I_m| \underset{\uparrow}{=} |S^{-1}(A - \lambda I_m)S| = |A - \lambda I_m| = P_A(\lambda)$ ▨

$|S^{-1}AS - \lambda(S^{-1} I_n S)|$

ESEMPIO 6.15

- $m = 1$: $A = [a_{11}] \Rightarrow P_A(\lambda) = |a_{11} - \lambda| = a_{11} - \lambda$
- $m = 2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = |A| - \lambda \operatorname{Tr}(A) + \lambda^2$
- $m = 3$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$P_A(\lambda) = |A| - \lambda \cdot \underbrace{\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)}_{I_2(A) \,=\, \text{invariante secondo di } A} + \lambda^2 \operatorname{Tr}(A) - \lambda^3$$