ISOMETRIE

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

ISOMETRIE

- Definizione ed esempi — SEZIONE 9.1
- Proprietà elementari

- Endomorfismi isometrici — SEZIONE 9.2
- $O(n;\mathbb{R})$

- Rotazioni — SEZIONE 9.3
- $SO(n;\mathbb{R})$

- Isometrie in dimensione 2, 3 — SEZIONE 9.4

ISOMETRIE (DEFINIZIONE 9.1)

$(V, \langle , \rangle_V), (W, \langle , \rangle_W)$ s.v.e. $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi euclidei, o isometria, se $f \in Hom(V, W)$ e

$$\langle f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2) \rangle_W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle_V \qquad \forall\, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V.$$

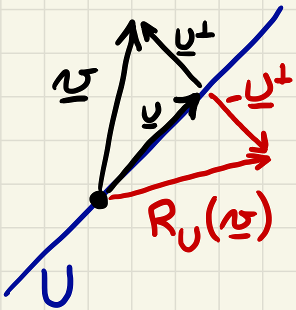
OSS: grazie alla formula di polarizzazione, f è un'isometria sse

$$\| f(\underline{v}) \|_W = \| \underline{v} \|_V \qquad \forall\, \underline{v} \in V$$

$\Rightarrow f$ è un isometria sse non cambia norme ed angoli.

ESEMPI

- U sottospazio di V, $R_U: V \to V$ riflessione ortogonale è un'isometria.

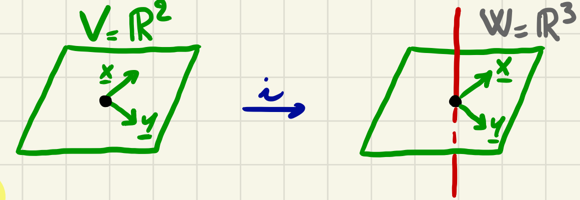


$\boxed{P_U\ ?}$

$$\| R_U(\underline{v}) \|^2 = \| \underline{u} - \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{u} \|^2 + \| -\underline{u}^\perp \|^2 =$$

$$= \| \underline{u} \|^2 + \| \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{u} + \underline{u}^\perp \|^2 = \| \underline{v} \|^2$$

- $V = \mathbb{R}^2 \quad W = \mathbb{R}^3 \qquad i : V \hookrightarrow W$, $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2, 0)$



$\underline{x} = (x_1, x_2),\ \underline{y} = (y_1, y_2) \in V \Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_E = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$i(\underline{x}) = (x_1, x_2, 0)$, $i(\underline{y}) = (y_1, y_2, 0) \Rightarrow \langle i(\underline{x}), i(\underline{y}) \rangle_E = x_1 y_1 + x_2 y_2$

- f_A con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ruota tutti i vettori di $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ isometria.

PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 9.3)

i) se f è un'isometria allora è iniettiva;

ii) $\dim(V) = \dim(W) < \infty \Rightarrow$ se f è un'isometria allora è un isomorfismo;

iii) $\dim(V) = \dim(W) < \infty \Rightarrow f$ è un'isometria sse l'immagine di una base o.n. di V è una base o.n. di W.

IDEA DIM: i) $f(\underline{v}) = \underline{0}$ sse $\|f(\underline{v})\| = \|\underline{v}\| = 0$ sse $\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$

ii) $\Rightarrow$ isometria = isomorfismo che non altera angoli e distanze $\Rightarrow$ iii) $\boxtimes$

Isometrie "Speciali"

Endomorfismi Isometrici (Definizione 9.5)

V s.v.e. Un endomorfismo isometrico è un'isometria $f \in \mathrm{End}(V)$.

L'insieme degli endomorfismi isometrici si indica con $O(V)$.

Rotazioni (Definizione 9.13)

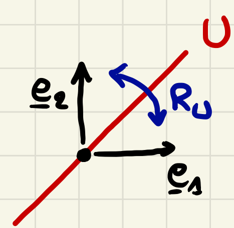
(V, ξ) s.v.e.o. Una rotazione è un endomorfismo isometrico che preserva l'orientazione, cioè tale che $\xi([f(\mathcal{B})]) = \xi([\mathcal{B}])$.

L'insieme delle rotazioni si indica con $SO(V)$.

Proposizione 9.6, Teorema 9.15

- $O(V)$ è un sottogruppo di $GL(V)$.
- $SO(V)$ è un sottogruppo di $O(V)$.

Remind: $GL(V)$ = gruppo automorfismi di V.



$R_U \in O(V) \setminus SO(V)$

PROBLEMA: come sono fatte le matrici rappresentative di $O(V)$ ed $SO(V)$?

MATRICI ORTOGONALI (DEFINIZIONE 9.7)

$Q \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ si dice ortogonale se $QQ^T = I_n$. L'insieme delle matrici ortogonali è $O(n;\mathbb{R})$.

- $I_n I_n^T = I_n^2 = I_n \Rightarrow I_n$ è ortogonale

- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow QQ^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 9.9)

i) $Q \in O(n;\mathbb{R})$ sse $Q^T \in O(n;\mathbb{R})$ ed in tal caso $Q^{-1} = Q^T$;

ii) $Q \in O(n;\mathbb{R})$ sse le righe e le colonne di Q formano basi o.n.;

iii) $Q \in O(n;\mathbb{R}) \Rightarrow |Q| = \pm 1$.

DIM: iii) $QQ^T = I_n \Rightarrow |QQ^T| = |Q||Q^T| = |Q|^2 = |I_n| = 1$ $\boxtimes$

MATRICI ORTOGONALI SPECIALI

$SO(n;\mathbb{R}) = \{ Q \in O(n;\mathbb{R}) \mid |Q| = 1 \}$.

gruppo matrici invertibili

PROPOSIZIONE 9.10, LEMMA 9.14

$O(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $GL(n;\mathbb{R})$, detto gruppo ortogonale.

$SO(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $O(n;\mathbb{R})$, detto gruppo ortogonale speciale.

RAPPRESENTAZIONE DELLE ISOMETRIE (TEOREMI 9.11 - 9.15)

V s.v.e.(o.) f.g., $\mathcal{B}$ base o.n. $\Rightarrow$

i) $\phi_{\mathcal{B}} : O(V) \longrightarrow O(n;\mathbb{R})$ è un isomorfismo di gruppi;

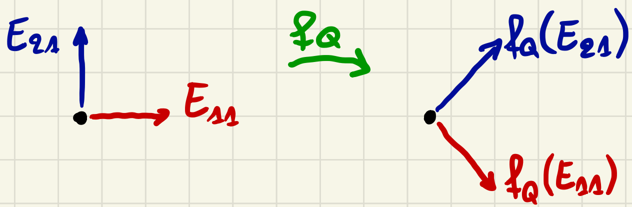
ii) $\phi_{\mathcal{B}} : SO(V) \longrightarrow SO(n;\mathbb{R})$ è un isomorfismo di gruppi.

IDEA DIM: $f \in O(V)$ sse $f(\mathcal{B})$ è base ortonormale sse $F|_{\mathcal{B}} = [\, f(\underline{v}_1)|_{\mathcal{B}} \,..\, f(\underline{v}_n)|_{\mathcal{B}} \,]$ ha colonne ortonormali, cioè sse $F|_{\mathcal{B}} \in O(n;\mathbb{R})$. $\square$

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ o.n. $\qquad f \in O(V) \iff f(B)$ o.n. $\iff$

$F_{|B} = [\, f(\underline{v}_1)_{|B} \ \dots \ f(\underline{v}_n)_{|B} \,] \in O(n; \mathbb{R})$

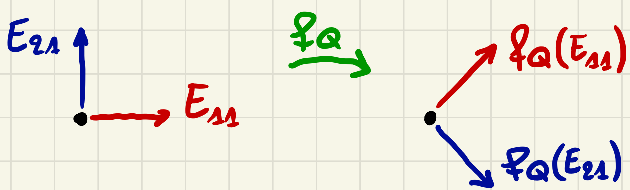
- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow f_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad f_Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



$|Q| = 1 \Rightarrow Q \in SO(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$f_Q \in SO(\mathbb{R}^2)$ rotazione

- $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow f_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad f_Q\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



$|Q| = -1 \Rightarrow Q \notin SO(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

$f_Q \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$

Rotazioni e Duale di Hodge (Proposizione 9.17)

$f \in SO(V) \Rightarrow *(f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_{n-1})) = f(*(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n))$.

ISOMETRIE IN DIMENSIONE 2 E 3

LEMMA 9.18

V s.v.e, $\dim(V) = n < \infty$, $f \in O(V)$. Allora:

i) $1, -1$ sono gli unici possibili autovalori di f;

ii) n dispari: $\begin{cases} |f| = 1 \Rightarrow 1 \text{ è autovalore}, \\ |f| = -1 \Rightarrow -1 \text{ è autovalore}; \end{cases}$

iii) n pari, $|f| = -1 \Rightarrow 1, -1$ sono autovalori.

DIM: i) λ autovalore $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Rightarrow$

$$\|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

ii) $P_f(\lambda) = |f| + \ldots + (-1)^n \lambda^n = 1 + \ldots + (-1)^n \lambda^n \in C^0(\mathbb{R})$

$P_f(0) = 1$, $\lim_{\lambda \to +\infty} P_f(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} (-1)^n \lambda^n = -\infty \Rightarrow$

esiste una radice in $[0, +\infty) \Rightarrow 1$ è autovalore. $\blacksquare$

Teorema 9.19 ($f \in O(V)$ con $\dim(V) = 2$)

i) $|f| = 1 \Rightarrow f$ ruota ogni vettore di un angolo ϑ t.c. $Tr(f) = 2\cos\vartheta$;

ii) $|f| = -1 \Rightarrow f$ è la riflessione ortogonale rispetto a V_+.

Dim: $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base o.n. di $V \Rightarrow F_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R}) \Rightarrow$

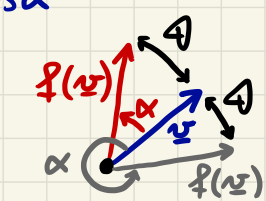
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos\alpha \quad b = \operatorname{sen}\alpha \\ c = \cos\beta \quad d = \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}.$$

• $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$: $F_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |f| = 1 \quad Tr(f) = 2\cos\alpha$.

Sia $\underline{v} = t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 \in V \Rightarrow \vartheta = \widehat{\underline{v}\, f(\underline{v})} = \arccos \dfrac{\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle}{\|\underline{v}\| \cdot \|f(\underline{v})\|}$

- $\|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$
- $\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle = \underline{v}_{|\mathcal{B}}^T F_{|\mathcal{B}}\, \underline{v}_{|\mathcal{B}} = (t_1^2 + t_2^2)\cos\alpha$

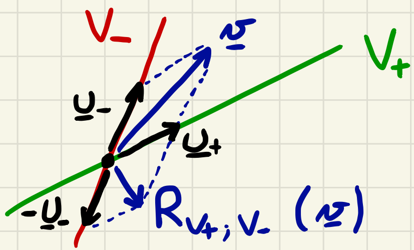
$$\Rightarrow \vartheta = \arccos(\cos\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in [0, \pi] \\ 2\pi - \alpha & \text{se } \alpha \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$



- $\mathcal{B} = \alpha - \frac{\pi}{2}$: $F_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |f| = -1 \overset{\text{LEMMA}}{\Rightarrow} \pm 1$ autovalori $\Rightarrow$

- esiste base $\tilde{\mathcal{B}} = \{ \underline{v}_+, \underline{v}_- \}$ di autovettori di f;

- $f(\underline{v}_+) = \underline{v}_+$, $f(\underline{v}_-) = -\underline{v}_- \Rightarrow f$ è la riflessione $R_{V_+;V_-}$;



- $\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle \overset{O(V)}{=} \langle f(\underline{v}_+), f(\underline{v}_-) \rangle = \langle \underline{v}_+, -\underline{v}_- \rangle = -\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle \Rightarrow$

$\langle \underline{v}_+, \underline{v}_- \rangle = 0 \Rightarrow \underline{v}_+ \perp \underline{v}_- \Rightarrow V_+^{\perp} = V_- \Rightarrow$

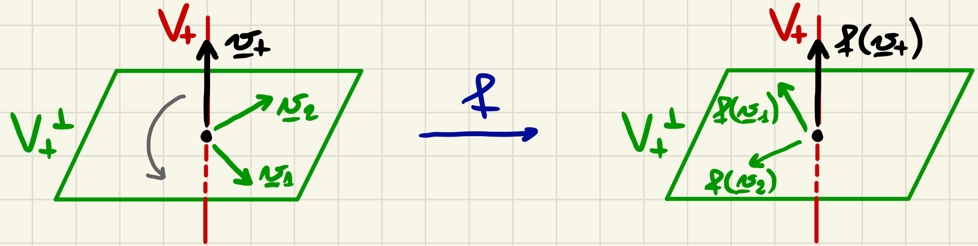
$f = R_{V_+;V_-} = R_{V_+}$.

$\boxtimes$

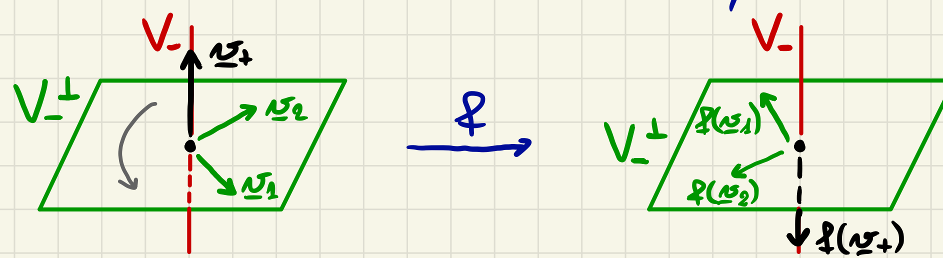
Teorema di Eulero (Teorema 9.20, $f \in O(V)$ con $\dim(V)=3$)

i) $f = Id_V$; ii) $f = -Id_V$;

iii) $\det(f)=1$, $f \neq Id_V$: 1 è autovalore con $mg(1)=1$,
f agisce come l'identità in V_+ e come una rotazione su $V_+^\perp$,
di un angolo θ tale che
$Tr(f) = 1 + 2\cos\theta$;



iv) $\det(f)=-1$, $f \neq -Id_V$: -1 è autovalore con $mg(-1)=1$,
f agisce come la riflessione in V_- e come una rotazione su $V_-^\perp$,
di un angolo θ tale che
$Tr(f) = -1 + 2\cos\theta$.



$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad A^T A = I_3 \qquad |A| = 1 \Rightarrow A \in SO(3)$$

$$\Rightarrow f_A \in SO(\mathbb{R}^3)$$

Asse di rotazione : $V_+ = \operatorname{Ker}(A - I_3) \cong \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 4,05 \\ -0,45 \\ 3,41 \end{bmatrix}\right)$

Piano di rotazione : $V_+^\perp \cong \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0,58 \\ -1 \\ -0,82 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,58 \\ 0,71 \\ -0,59 \end{bmatrix}\right)$

Angolo di rotazione : $\cos\theta = \dfrac{tr(A) - 1}{2} \Rightarrow \theta \cong 90° 25'$