

8/10/20

- 1) Dire  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  :  $(n, m) \in R \iff \exists h, k \in \mathbb{N}$  dispari,  $\exists \alpha \in \mathbb{N} : n = 2^\alpha h, m = 2^\beta k$ . Provare che  $R$  è di equivalenza e descrivere  $\frac{\mathbb{N}_0}{R}$
- 2) Dire  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  che associa a  $n$  la massima potenza di 2 che divide  $n$ , quindi possiamo dire che  $(n, m) \in R \iff f(n) = f(m)$ . Avremo, quindi, che  $R = \text{Ker}(f)$  e siccome  $\text{Ker } f$  è di equivalenza, allora  $R$  è di equivalenza  $\frac{\mathbb{N}_0}{R} = \{[2^\alpha]_R \mid n \in \mathbb{N}\}$  con  $[2^\alpha]_R \cdot \mathbb{D}$  con  $\mathbb{D} = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$

- 2) Consideriamo  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  :  $(n, m) \in S \iff \exists h, k \in \mathbb{N}$  dispari,  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N} : n = 2^\alpha h, m = 2^\beta k \wedge \alpha \leq \beta$ . Provare che  $S$  è di ordine.

- 1) riflessiva: Sia  $n \in \mathbb{N}_0$ , allora  $f(n) = f(n)$  ( $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  che abbiamo visto in 1) quindi  $(n, n) \in S$   
 transitiva: Siano  $n, m, l \in \mathbb{N}_0$ :  $(n, m) \in S \wedge (m, l) \in S$  dunque  $f(n) \leq f(m) \leq f(l) \Rightarrow f(n) \leq f(l) \Rightarrow (n, l) \in S$   
 antirimutativa: Siano  $n, m \in \mathbb{N}_0$ :  $(n, m) \in S \wedge (m, n) \in S$  dunque  $f(n) \leq f(m) \wedge f(m) \leq f(n) \Rightarrow f(n) = f(m)$ . Dobbiamo ora dimostrare che  $f$  è iniettiva. In 1, però, abbiamo visto che è possibile che  $[n]_R = [m]_R$ , quindi l'antirimutatività non è valida.  
 $\hookrightarrow$  non è una relazione d'ordine.

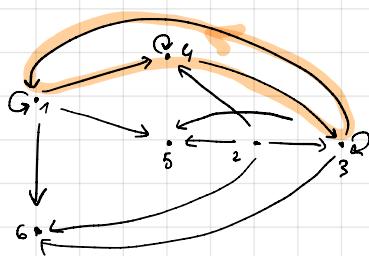
- 3) Considera  $T \subseteq \frac{\mathbb{N}_0}{R} \times \frac{\mathbb{N}_0}{R} : ([n]_R, [m]_R) \in T \iff (n, m) \in S$ , essa è d'ordine? (R ed S definiti in 1 e 2).

Dimostra che  $T$  è d'ordine.

- 1) Bisogna prima dimostrare che  $T$  è ben definita, ovvero se  $n \in [n]_R$  e  $m \in [m]_R$ , allora  $(n, m) \in S \iff (n', m') \in S$ . Sia  $(n, m) \in S \iff f(n) = f(m) \iff f(n') \leq f(m') \iff (n', m') \in S$ .  
 Dimostrare le proprietà è facile.

- 4) Dire  $R \subseteq A \times A$  con  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Dire:

- 1) Quali proprietà ha  $R$   
 2) Qual è la chiusura d'equivalenza di  $R$   
 3) Esiste la chiusura d'ordine di  $R$ ? Se sì, trovarne max, min. È un reticolo?  
 4)  $R$  contiene funzioni? Quante?  $R$  è contenuta in una funzione? Quale?

1) antirimutativa

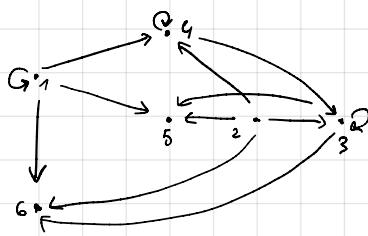
- 2) La chiusura d'equivalenza è  $w_A$ , quindi:  $w_A = \{A\}$ : Esiste solo 1 componente连通

- 3) La chiusura d'ordine non esiste perché sul ciclo orientato si formerebbero delle frane doppie, invalidando l'antirimutatività  
 4) Togliendo archi non si ottiene nessuna funzione, neanche aggiungendo archi

PRO TIP! Se hai un ciclo, la chiusura trasmette conserva il ciclo in direzione opposta

4) Si dà  $R \subseteq A \times A$  con  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con:

$A$	1	0	0	1	1	1
	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0



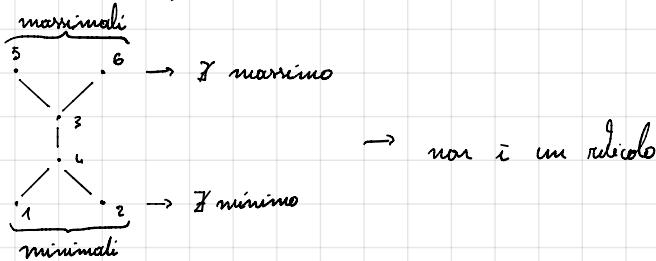
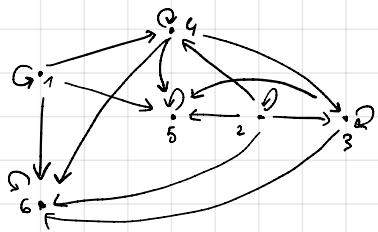
Dice:

- 1) Quali proprietà ha  $R$
- 2) Qual è la chiusura d'equivalenza di  $R$
- 3) Esiste la chiusura d'ordine di  $R$ ? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
- 4) Si dà  $T$  la chiusura d'ordine,  $T$  contiene funzioni? Quante?  $T$  è contenuta in una funzione? Quale?

1) N.A.

2)  $w_A$ ;  $w_A = \{A\}$

3) Chiediamo riflessivamente, transitivamente e disegniamo il diagramma di Hasse

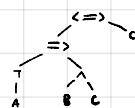


4)  $T$  non è contenuta in funzioni, ma contiene funzioni in quanto reticolato. Ci sono  $5^2 \cdot 4 \cdot 3$

22/10/20

1) Dire se sono ben formate:

1)  $((A \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow C)$  ✓



2)  $(A \Rightarrow B)$  ✗

✗

3)  $(\neg A \Rightarrow B)$  ✓

✓

2) Si dà  $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$ , stabilire se soddisfacibile:

$A$	$B$	$C$	$A \wedge B$	$\neg C$	$A \Rightarrow \neg C$	$F$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

→ soddisfacibile con 7 modelli

3) Lia  $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C) \wedge G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$ , dia se  $F \models G$  o se  $G \models F$

A	B	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$$\Rightarrow F \not\models G \wedge G \not\models F$$

3) Lia  $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C) \wedge G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$ , dia se  $F \models F \wedge G$ ,  $F \models F \vee G$ ,  $F \wedge G \models F$ ,  $F \vee G \models F$

A	B	C	F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1

$$\Rightarrow F \not\models F \wedge G \rightarrow \text{ogni formula modella una tautologia}$$

$$F \wedge G \models F$$

$F \vee G \not\models F \rightarrow \text{una tautologia non è conseguenza nessuna formula}$

4) Lia  $\Xi = \{A\}$  provare che  $(\models^{\Xi}, \models)$  è un reticolo

A	$\perp$	A	$\neg A$	T
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

