Spazi Affini

Prof.
Marco
Compagnoni

SPAZI AFFINI

- Definizione
- Esempio fondamentale
- Sistema di riferimento

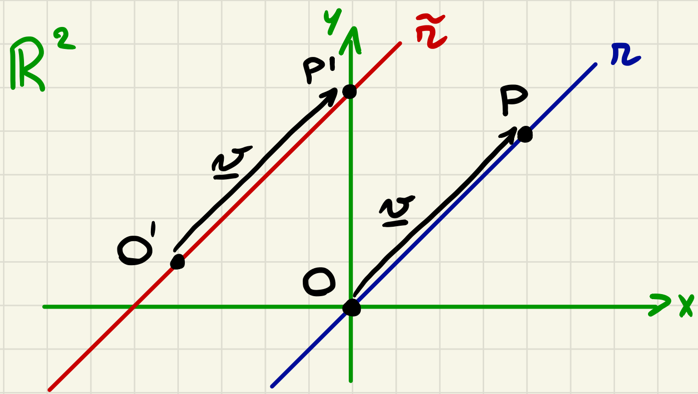
SEZIONE 7.1

- Sottospazi affini
- Rappresentazione algebrica e parametrica

SEZIONE 7.2

SPAZI AFFINI (7.1)

OBBIETTIVO: vogliamo utilizzare gli strumenti algebrici finora sviluppati per studiare la geometria di rette e piani e le loro generalizzazioni in più dimensioni.



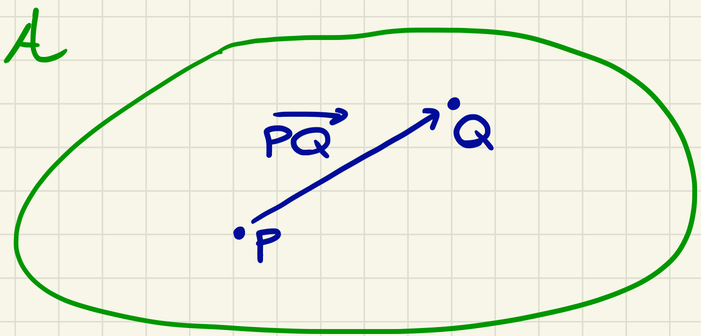
I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:

- $\mathbb{R}^2$ e $\{\underline{0}\}$;
- le rette contenenti l'origine.

Ad ogni $P \in r$ è associato un vettore $\underline{v}$ da O a P.

Una retta non contenente l'origine? Non è un sottospazio, ma però vorremmo associare in maniera naturale ad $\tilde{r}$ i vettori "paralleli" alla retta, che dovrebbero essere gli stessi di r.

IDEA: riportiamo da zero e definiamo ad hoc gli insiemi A su cui è possibile studiare la geometria come quelli per cui è possibile associare ad ogni coppia di elementi $(P, Q) \in A \times A$ un vettore $\overrightarrow{PQ}$, che possiamo pensare come lo spostamento da P a Q.



A questa associazione dobbiamo richiedere alcune proprietà

ASSIOMI DI WEYL PER GLI SPAZI AFFINI (DEFINIZIONE 7.1)

Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto, V uno spazio vettoriale e

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

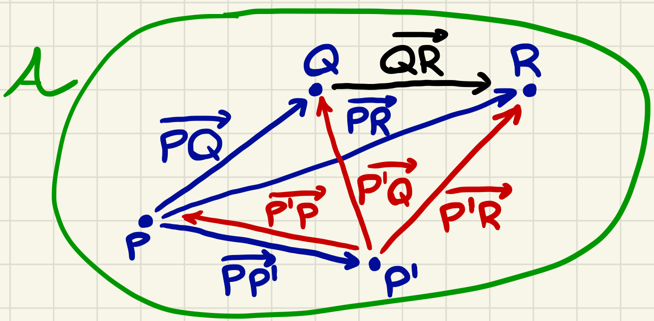
una funzione tale che:

i) per ogni $P \in \mathcal{A}$ fissato $\psi_P : \{P\} \times \mathcal{A} \to V$, $(P,Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ}$ è biunivoca;

ii) vale la regola del parallelogramma, o di Charles

$$\psi(P,Q) + \psi(Q,R) = \psi(P,R) \qquad \forall\, P, Q, R \in \mathcal{A}.$$

$\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V, \psi)$ è detto spazio affine.



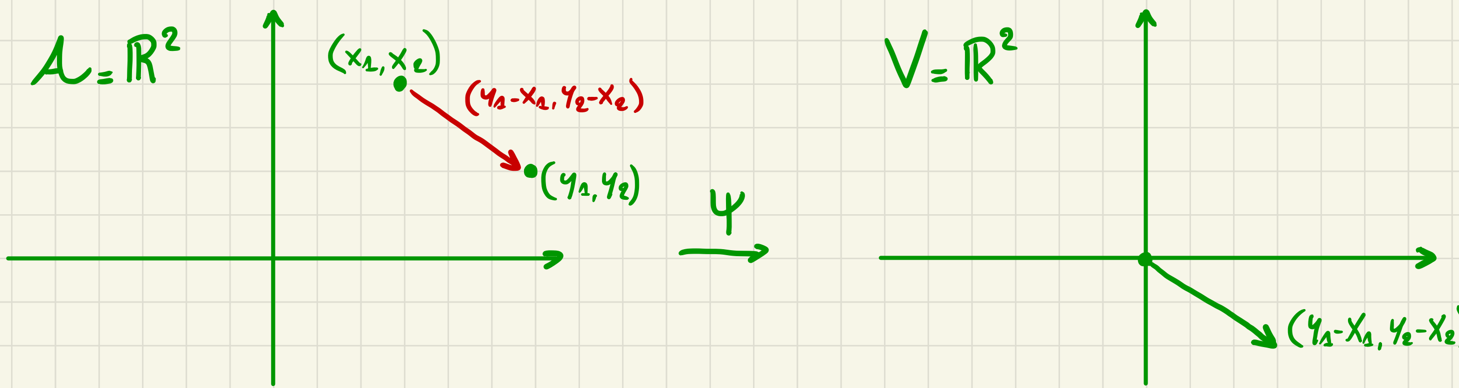
i) partendo da qualunque P è possibile raggiungere ogni Q con un unico vettore $\overrightarrow{PQ}$, e viceversa;

ii) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Esempio Fondamentale

$\mathcal{A} = \mathbb{K}^n$, $V = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$, $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$

$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \longmapsto (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$$



$$(P = (3,4), Q = (6,2)) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longmapsto \overrightarrow{PQ} = (6-3, 2-4) = (3, -2) \in V$$

$$A^n_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}^n, V, \psi)$$

Analogamente si può fare per ogni spazio vettoriale V :

$A_V = (V, V, \psi_V)$ dove $\psi_V : V \times V \longrightarrow V$.

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \longmapsto \underline{v}_2 - \underline{v}_1$$

DEFINIZIONE 7.2

- $P \in \mathcal{A}$ sono detti punti;
- $(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ è detto segmento orientato da P a Q;
- $\overrightarrow{PQ} \in V$ è detto vettore geometrico;
- $\mathcal{A}$ è il sostegno di $\mathbb{A}$, V è la giacitura di $\mathbb{A}$;
- $\dim(\mathbb{A}) = \dim(V)$;
- se $\dim(\mathbb{A}) = 1 \Rightarrow \mathbb{A}$ si dice retta affine;
- se $\dim(\mathbb{A}) = 2 \Rightarrow \mathbb{A}$ si dice piano affine.

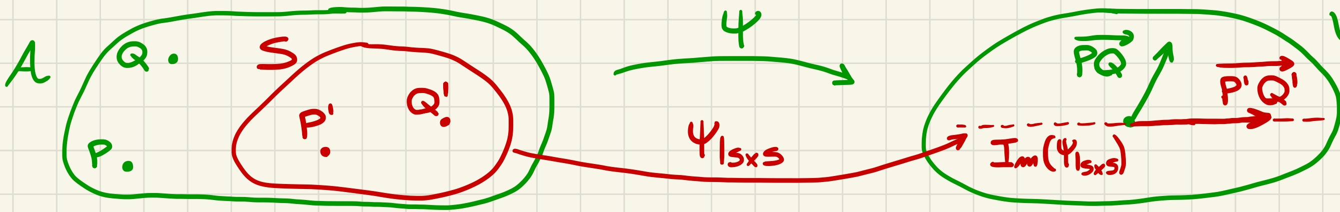
PROPRIETÀ ELEMENTARI (PROPOSIZIONE 7.4)

i) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}_V$;

ii) $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$.

Sottospazi Affini (Definizione 7.11)

$\mathbb{A}=(A,V,\psi)$ spazio affine. $S\subseteq A$ si dice sottospazio affine se $(S, \mathrm{Im}(\psi_{|S\times S}), \psi_{|S\times S})$ è uno spazio affine.



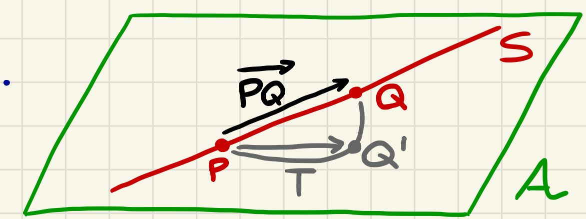
Se $\dim(S)=\dim(\mathbb{A})-1$ allora S si dice iperpiano.

$\mathrm{Im}(\psi_{|S\times S})$ è un sottospazio di V, detto giacitura di S.

Caratterizzazione dei Sottospazi Affini (Proposizione 7.12)

Siano $P\in S\subseteq A$ ed $U=\{\vec{PQ}\in V \mid Q\in S\}$.

Allora S è sottospazio affine di A se e solo se U è sottospazio vettoriale di V.



S è un sottospazio

T non è un sottospazio

$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$: $A = \mathbb{K}^n = \{ \underline{x} = (x_1, .., x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \}$, $V = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$,

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \overrightarrow{\underline{x}\,\underline{y}} = \underline{y} - \underline{x} = (y_1, ..., y_n) - (x_1, .., x_n) = (y_1 - x_1, .., y_n - x_n) \in V$.

Sia $S \subseteq A$ l'insieme dei punti $\underline{x} \in A$ soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + .. + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + .. + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow [A \mid B] \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S \iff AX_1 = B \quad AX_2 = B \Rightarrow$

$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0 \Rightarrow X_1 - X_2 \in Ker(A)$

$\Rightarrow \overrightarrow{\underline{x}_1 \underline{x}_2}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$U = \{ \overrightarrow{\underline{x}_1 \underline{x}_2} \mid \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S \}$ è un sottospazio vettoriale di V

$\Rightarrow$ S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con giacitura U.

OSS: tutti i sottospazi affini di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sono di questo tipo.

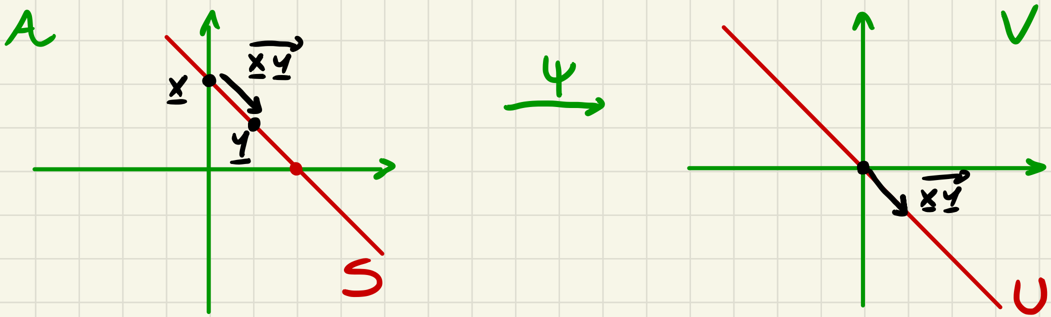
$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\quad S: \{x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$

$U: \{x + y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$

$\dim(S) = \dim(U) = 1$

rette affine

iperpiano di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



$\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ $\quad S: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$

$U: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

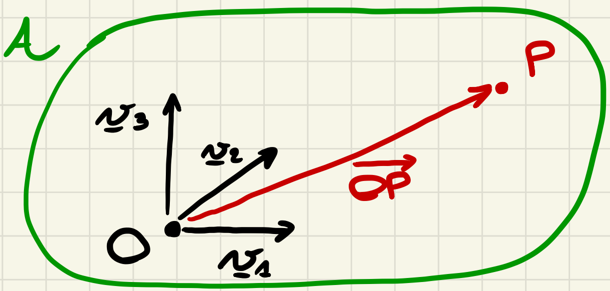
$\dim(S) = \dim(U) = 1$

S è l'intersezione di due piani affini, il cui risultato è una retta affine di giacitura U. S non è un iperpiano di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

SISTEMI DI RIFERIMENTO (DEFINIZIONE 7.5)

Sia $\mathbb{A} = (A, V, \psi)$ con $O \in A$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V.

- $\mathcal{B}_O = \{O, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema di riferimento di $\mathbb{A}$;
- O è detto origine del sistema di riferimento $\mathcal{B}_O$;
- $\phi_{\mathcal{B}_O} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Mat}(n,1;\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) \end{array}$ è detto mappa delle coordinate;
- $P_{|\mathcal{B}_O} = \phi_{\mathcal{B}_O}(P) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}_{|\mathcal{B}}$ sono dette coordinate di P.



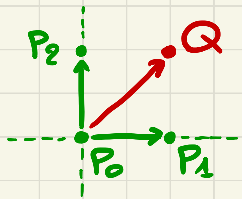
$$\overrightarrow{OP} = t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + t_3 \underline{v}_3$$

$$P_{|\mathcal{B}_O} = \overrightarrow{OP}_{|\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\quad P_0=(0,0)$, $P_1=(1,0)$, $P_2=(0,1)$ $\quad Q=(1,1)$

I tre punti permettono di definire diversi sistemi di riferimento, rispetto a cui Q ha coordinate differenti:

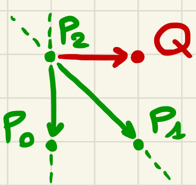
(1):



$\mathcal{B}=\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$, $\qquad \mathcal{B}_{P_0}=\{P_0,\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$.

$$\overrightarrow{P_0Q}=\overrightarrow{P_0P_1}+\overrightarrow{P_0P_2} \implies Q|_{\mathcal{B}}=\overrightarrow{P_0Q}|_{\mathcal{B}_{P_0}}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

(2):



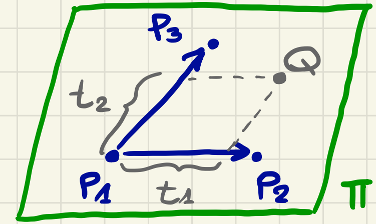
$\tilde{\mathcal{B}}=\{\overrightarrow{P_2P_1},\overrightarrow{P_2P_0}\}$, $\qquad \tilde{\mathcal{B}}_{P_2}=\{P_2,\overrightarrow{P_2P_1},\overrightarrow{P_2P_0}\}$.

$$\overrightarrow{P_2Q}=\overrightarrow{P_2P_1}-\overrightarrow{P_2P_0} \implies Q|_{\tilde{\mathcal{B}}}=\overrightarrow{P_2Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_{P_2}}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Rappresentazione Parametrica e Algebrica (Proposizione 7.16)

In $A^3_{\mathbb{R}}$ costruiamo il piano affine Π contenente

$P_1=(1,0,0)$ $\quad P_2=(0,1,0)$ $\quad P_3=(0,0,1)$.



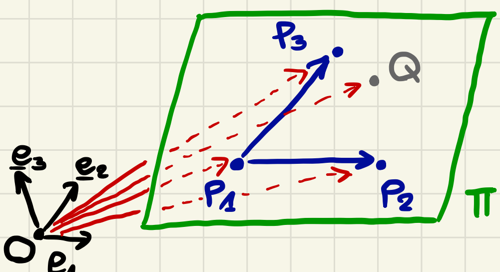
Il piano è determinato da un suo punto, P_1, e dalla sua giacitura $U=\{\overrightarrow{P_1Q}\in\mathbb{R}^3 \mid Q\in S\}$.

$B_U=\{\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,1,0),\ \overrightarrow{P_1P_3}=(-1,0,1)\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q}=t_1\cdot\overrightarrow{P_1P_2}+t_2\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

$B_{P_1}=\{P_1,\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}\}$ è un sistema di riferimento di Π $\Rightarrow$

$$Q|_{B_{P_1}} = \overrightarrow{P_1Q}|_{B_U} = \begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}\in Mat(2,1,\mathbb{R}).$$

$\dim(U)=2=\dim(V)-1 \Rightarrow \Pi$ è un iperpiano di $A^3_{\mathbb{R}}$.



$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP_1}+t_1\cdot\overrightarrow{P_1P_2}+t_2\cdot\overrightarrow{P_1P_3} \Rightarrow$$

$$Q|_{B_0}=\overrightarrow{OQ}|_B=\overrightarrow{OP_1}|_B+t_1\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|_B+t_2\cdot\overrightarrow{P_1P_3}|_B$$

$$=P_1|_{B_0}+t_1\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|_B+t_2\cdot\overrightarrow{P_1P_3}|_B$$

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA: sia $\mathcal{B}_0$ il riferimento canonico di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}_0 = \{O=(0,0,0), \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

$$A = [\overrightarrow{P_1P_2}|_{\mathcal{B}} \ \overrightarrow{P_1P_3}|_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = [P_1|_{\mathcal{B}_0}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = [Q|_{\mathcal{B}_0}] \Rightarrow$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P_1|_{\mathcal{B}_0} + t_1 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|_{\mathcal{B}} + t_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_3}|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}}$$

Rappresentazione parametrica di π rispetto a $\mathcal{B}_0$.

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA:

$t_1 = x_2 \quad t_2 = x_3 \quad \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$

devo risolvere rispetto a t_1, t_2

$$\begin{cases} -t_1 - t_2 = x_1 - 1 \\ t_1 = x_2 \\ t_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow [A|X-B] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x_1 - 1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 - 1 \end{array}\right].$$

Esempio

$A^4_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{B}_0 = \{ (0,0,0,0), \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4 \}$.

$S = \{(x,y,z,w) = (1,1,0,0) + t_1 (0,1,-1,0) + t_2 \cdot (0,1,0,-1) + t_3 \cdot (0,0,-1,1)\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$P = (x,y,z,w) \Rightarrow X = P|_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$[A|X-B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 0 & y-1 \\ -1 & 0 & -1 & z \\ 0 & -1 & 1 & w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & -1 & -w \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{y+z+w-1} \end{array}\right] \Rightarrow$$

Rappresentazione Parametrica

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = -\alpha - \beta \\ w = -\beta \end{cases}$$

Rappresentazione Algebrica

$$y + z + w - 1 = 0 \quad , \quad x - 1 = 0 .$$

In conclusione:

$U = \mathcal{L}((0,1,-1,0),(0,1,0,-1)) \Rightarrow \dim(U) = \dim(S) = 2.$

$S = \{ (x,y,z,w) = (1,1,0,0) + \alpha \cdot (0,1,-1,0) + \beta \cdot (0,1,0,-1) \} =$

$= \{ (x,y,z,w) \mid y + z + w = 1 \ , \ x = 1 \} .$

S è un piano affine in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$.