GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ANNO ACCADEMICO 2019/2020

INGEGNERIA DELL'AUTOMAZIONE, ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA E TELECOMUNICAZIONI

MODALITÀ DELL'ESAME - SCAGLIONE BRA-COM

PROF. MARCO COMPAGNONI

La partecipazione all'esame è subordinata all'iscrizione allo stesso mediante l'applicativo Servizi On Line del Politecnico. **Non si accetteranno iscrizioni all'esame oltre la data ufficiale di chiusura delle stesse.** L'esame si articola in una prova pratica ed una prova di teoria. Qualora superato, l'esame termina con la registrazione di un voto finale F nella fascia $18 \leq F \leq 30$ e Lode. Lo studente avrà facoltà di rifiutare tale voto attraverso l'applicazione Servizi On Line del Politecnico, entro la data di verbalizzazione che verrà comunicata per posta elettronica. In caso di mancato superamento dell'esame o di rifiuto del voto, tale risultato non influenzerà in alcun modo gli appelli successivi, a meno di violazioni del Codice Etico del Politecnico da parte dello studente.

1. Prova Pratica

La prova consiste nella risoluzioni scritta di alcuni esercizi. Gli esercizi potranno vertere su ogni argomento del corso e saranno ispirati a quelli svolti durante le lezioni ed esercitazioni. La risoluzione dovrà essere completa, in particolare non dovranno essere saltati passaggi ed andranno riportati tutti i conti necessari alla comprensione dello svolgimento seguito. Per la preparazione, si raccomanda lo studio di tutti i testi degli appelli d'esame degli anni precedenti.

Durante lo svolgimento degli esercizi, sarà consentito allo studente la consultazione di appunti propri (un foglio formato A4). Gli appunti potranno contenere ogni informazione che lo studente ritenga utile.

L'esame potrà essere sostenuto attraverso le due prove in itinere oppure attraverso gli appelli ordinari. Coloro che non superassero la prova saranno invitati a visionare la stessa con il docente, in una apposita data che verrà opportunamente comunicata.

1.1. **Prove in itinere.** La prima prova sarà valutata con un punteggio E_1 compreso tra 0 e 30. L'ammissione alla seconda prova è consentita se e solo se $E_1 \geq 15$. Anche la seconda prova sarà valutata con un punteggio E_2 compreso tra 0 e 30. L'ammissione alla prova di teoria è consentita se e solo se $E_2 \geq 15$. In tal caso, il voto sugli esercizi sarà la media (approssimata per eccesso) dei due voti

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2} .$$

1.2. **Appello ordinario.** La prova verrà valutata con un punteggio S compreso tra 0 e 30. L'ammissione alla prova di teoria è consentita se e solo se $E \geq 15$.

2. Prova di teoria

2.1. **Prova scritta.** Lo studente dovrà:

- rispondere a tre domande estratte dall'elenco contenuto nell'Appendice A;
- rispondere ad una domanda estratta dall'elenco contenuto nell'Appendice B;
- discutere e dimostrare un enunciato inerente al programma sviluppato nel corso, ma non necessariamente affrontato a lezione.

Durante la prova di teoria non sarà consentito l'utilizzo di nessun materiale di aiuto, cartaceo od elettronico. Le risposte alle domande dovranno essere esaurienti, ma limitate alla domanda specifica. La prova verrà valutata con un punteggio $0 \leq T \leq 30$ ed essa si considera superata se e solo se $T \geq 15$.

Ad ogni studente che superi le soglie minime $E, T \geq 15$ sarà assegnato un voto dell'esame scritto

$$S = \frac{1.5\,E + T}{2.5},$$

approssimato per eccesso (vedi Tabella 1).

S	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
15	B	B	B	B	B	B	18	18	19	19	19	20	20	21	21	21
16	B	B	B	B	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22
17	B	B	B	18	18	19	19	19	20	20	21	21	21	22	22	23
18	B	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23
19	18	18	19	19	19	20	20	21	21	21	22	22	23	23	23	24
20	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24
21	19	19	20	20	21	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25
22	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26
23	20	21	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26
24	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26	26	27
25	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26	27	27	27
26	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26	26	27	27	28	28
27	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26	27	27	27	28	28	29
28	23	24	24	24	25	25	26	26	26	27	27	28	28	28	29	29
29	24	24	25	25	25	26	26	27	27	27	28	28	29	29	29	30
30	24	25	25	26	26	26	27	27	28	28	28	29	29	30	30	30

P=S

P=27

P=28

TABELLA 1. Le valutazioni S per ogni $E, T \geq 15$. Lungo le righe abbiamo i voti degli esercizi e lungo le colonne i voti della teoria. Le valutazioni $S < 18$ non consentono il superamento dell'esame. Le valutazioni $S \geq 18$ consentono l'accettazione di un voto P, secondo la legenda indicata a fianco, oppure l'ammissione all'esame orale.

Se $S < 18$, l'esame non è superato. Se $S \geq 18$, lo studente avrà un colloquio OBBLIGATORIO con il docente, durante il quale gli verranno presentate le correzioni delle prove scritte e gli sarà proposto un voto P, dipendente da S secondo la Tabella 1. In caso di accettazione, il voto finale dell'esame sarà $F = P$.

2.2. **Prova orale.** La prova orale è riservata a coloro che rifiutano il voto proposto P. Essa prevede:

(1) la presentazione di un argomento scelto dallo studente (nell'Appendice C sono proposti alcuni possibili argomenti di discussione). La presentazione verrà valutata con un punteggio $-4 \leq O \leq 3$;

(2) l'effettuazione di ulteriori domande, esclusivamente a coloro che hanno raggiunto il voto $O = 3$ nella presentazione, a seguito delle quali verrà assegnata una valutazione orale $2 \leq O \leq 4$. Tali domande saranno relative ad argomenti inerenti al corso, ma non necessariamente affrontati a lezione.

Al termine dell'orale, il voto F risulterà dalla combinazione dei punteggi S ed O secondo la Tabella 2.

F	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
18	B	B	B	B	**18**	19	20	21	22
19	B	B	B	18	**19**	20	21	22	23
20	B	B	18	19	**20**	21	22	23	24
21	B	18	19	20	**21**	22	23	24	25
22	B	19	20	21	**22**	23	24	25	26
23	B	20	21	22	**23**	24	25	26	27
24	B	21	22	23	**24**	25	26	27	28
25	B	22	23	24	**25**	26	27	28	29
26	B	23	24	25	**26**	27	28	29	30
27	B	24	25	26	**27**	28	29	30	30L
28	B	25	26	27	**27**	28	29	30	30L
29	B	25	26	27	**28**	29	30	30	30L
30	B	26	27	28	**28**	29	30	30	30L

TABELLA 2. I voti finali F a seguito dell'orale. Lungo le righe abbiamo il voto S e lungo le colonne il voto O. Le valutazioni in rosso implicano il non superamento dell'esame.

Le note rosse al termine di ciascuna domanda danno un riferimento indicativo riguardo a dove viene trattato l'argomento in oggetto all'interno della dispensa. Durante la prova di teoria, in generale NON viene richiesto di riportare per intero tutto il materiale indicato per ogni possibile domanda, ma piuttosto di fornire una risposta il più possibile precisa, organica e completa (e possibilmente sintetica) al quesito specifico.

A.1. **Matrici.**

(1) Dare la definizione di matrice e delle operazioni fondamentali tra matrici. Definire la matrice identità e la matrice nulla. [Definizione 3.1-3.4-3.5-3.8]

(2) Elencare e dimostrare le proprietà fondamentali della somma di matrici e del prodotto per uno scalare. [Proposizione 3.7]

(3) Elencare le proprietà fondamentali del prodotto tra matrici. [Proposizione 3.10]

(4) Elencare le operazioni elementari sulle righe di una matrice, enunciare il teorema sulla riduzione a scala di una matrice ed illustrarne il funzionamento. [Definizione 3.15, Teorema 3.16]

(5) Definire il rango di una matrice ed elencare tutte le sue diverse caratterizzazioni. Enunciare il legame tra rango e determinante, nel caso di matrici quadrate. [Definizione 3.13-3.18, Teorema 3.69, Teorema 4.54]

(6) Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli ed illustrarne il funzionamento nella risoluzione del sistema associato alla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ h & -h & 1 \end{array}\right].$$

[Teorema 3.24]

(7) Dare la definizione di matrice inversa destra e sinistra e di matrice invertibile. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti per l'invertibilità di una matrice. Usare il teorema di Binét per dimostrare che A è invertibile solo se $\det(A) \neq 0$. [Definizione 3.40, Proposizione 3.60, Corollario 3.70, Teorema 3.83]

(8) Enunciare i metodi di Gauss-Jordan e della matrice aggiunta per il calcolo della matrice inversa. Applicarli a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

[Osservazione 3.56, Teorema 3.89, Corollario 3.90]

(9) Scrivere le formule degli sviluppi di Laplace per righe e per colonne, ed utilizzarle per calcolare in almeno due modi distinti il determinate della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Proposizione 3.74, Corollario 3.86]

A.2. **Spazi vettoriali.**

(1) Dare la definizione di spazio vettoriale ed indicare almeno due esempi di tale struttura. [Definizione 4.1, Esempio 4.2]

(2) Dare la definizione di sottospazio ed enunciare la sua caratterizzazione in termini di chiusura rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale. Dimostrare che esistono sempre almeno due sottospazi di uno spazio vettoriale V. [Definizione 4.9, Esempio 4.10, Proposizione 4.11]

(3) Definire il nucleo di una matrice $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ e dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}(m, 1; \mathbb{K})$. [Definizione 3.26, Proposizione 4.12]

(4) Dare le definizioni di base e mappa delle componenti. Calcolare il vettore delle componenti di

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Q})$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Date le componenti

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

calcolare il vettore $\mathbf{v}$ associato rispetto alla base $\mathcal{B}_2 = \{1+x, x\}$. [Definizione 4.22-4.24, Esempio 4.23]

(5) Dare la definizione di generatori di uno spazio vettoriale e, usando la definizione, determinare se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{K})$. [Definizione 4.27]

(6) Definire il concetto di indipendenza lineare e dimostrare che un insieme contenente il vettore $\mathbf{0}$ è linearmente dipendente. [Definizione 4.29, Lemma 4.31]

(7) Dare una definizione di base ed una sua diversa caratterizzazione. Trovare una base dello spazio vettoriale banale $V = \{\mathbf{0}\}$. [Definizioni 4.27-4.29, Teorema 4.32]

(8) Dare la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale e spiegare perché è un concetto ben definito. Fornire la dimensione di $\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}[x]_n$, giustificando la risposta. [Teorema 4.40, Definizione 4.41, Esempio 4.42]

(9) Enunciare la formula di Grassmann ed utilizzarla per dimostrare che una base di $V = U \oplus W$ si può ottenere come unione di una base di U ed una di W. [Lemma 4.48, Teorema 4.49]

(10) Fornire gli algoritmi generali per trovare una base dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice. Applicarlo alla matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Proposizioni 4.55-4.61]

A.3. **Applicazioni lineari.**

(1) Dare la definizione di applicazione lineare e fornire almeno due esempi di tali funzioni, motivando la risposta. [Definizione 4.4, Esempio 5.1]

(2) Dare la definizione di applicazione lineare e di isomorfismo. Dimostrare che f è un omomorfismo di spazi vettoriali se e solo se commuta con le combinazioni lineari di vettori. [Definizione 4.4, Lemma 4.5]

(3) Definire il nucleo di un'applicazione e dimostrare che è un sottospazio del dominio. [Definizione 5.2, Proposizione 5.4]

(4) Definire l'immagine di un'applicazione e dimostrare che è un sottospazio del codominio. [Definizione 5.2, Proposizione 5.4]

(5) Definire l'applicazione naturale f_A associata alla matrice A e calcolarne nucleo ed immagine. [Esempi 5.1-5.5]

(6) Enunciare il teorema di isomorfismo. Costruire un isomorfismo tra due generici spazi vettoriali isomorfi. [Teorema 5.15, Esempio 5.16]

(7) Enunciare il teorema di interpolazione ed illustrarne il funzionamento in un esempio. [Proposizione 5.18]

(8) Enunciare il teorema di rappresentazione e dimostrare la validità della formula di rappresentazione. [Teorema 5.22]

(9) Rappresentare le seguenti applicazioni:
  - $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x]_2)$ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio;
  - f_A applicazione associata alla matrice $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

  Calcolare $\frac{d}{dx}(1 + x)$ usando il teorema di rappresentazione.

(10) Enunciare un metodo per il calcolo del nucleo di un'applicazione, utilizzando il teorema di rappresentazione. Utilizzarlo per calcolare il nucleo di $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x]_2)$. [Proposizione 5.27]

(11) Enunciare un metodo per il calcolo dell'immagine di un'applicazione, utilizzando il teorema di rappresentazione. Utilizzarlo per calcolare l'immagine di $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x]_2)$. [Proposizione 5.27]

(12) Enunciare il teorema di nullità più rango e verificarlo per l'applicazione $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x]_2)$. [Definizione 5.29, Teorema 5.30]

A.4. **Endomorfismi e diagonalizzazione.**

(1) Definire autovalori ed autovettori di un'applicazione lineare. Utilizzando tali definizioni, dire se esistono e chi sono gli autovalori e gli autovettori dell'applicazione f_A associata a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Definizione 6.3]

(2) Definire un'applicazione diagonalizzabile. Utilizzando tale definizione e quella di autovettori, spiegare se e perchè le seguenti applicazioni sono diagonalizzabili: $f = \mathrm{Id}_V$, $f = 0_V$ ed f la rotazione dei vettori di $\mathbb{R}^2$ di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. [Definizione 6.4, Esempio 6.6]

(3) Enunciare e dimostrare il primo criterio di diagonalizzabilità. [Teorema 6.5]

(4) Dare la definizione di autospazio e dimostrare che è un sottospazio di dimensione almeno 1. [Definizione 6.8, Proposizione 6.9]

(5) Enunciare e dimostrare un metodo per il calcolo di autovalori ed autovettori di una applicazione. [Teorema 6.18]

(6) Enunciare il secondo criterio di diagonalizzabilità ed utilizzarlo per studiare la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. [Teorema 6.22]

(7) Enunciare la condizione sufficiente di diagonalizzabilità e spiegare brevemente perché è un caso particolare del secondo criterio di diagonalizzabilità. Infine, utilizzarla per studiare la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[Teorema 6.23, Corollario 6.28]

A.5. **Geometria affine.**

(1) Dare la definizione di sistema di riferimento e di mappa delle coordinate. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dare le coordinate del punto $P = (1, 2)$ rispetto a due sistemi di riferimento differenti. [Definizioni 7.5, Esempio 7.10]
(2) Dire se $S: \ x - y + 1 = 0$ è un iperpiano di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Trovare un sistema di riferimento di S e determinare la giacitura di S. [Definizione 7.11]
(3) Dare la definizione di sottospazi paralleli, incidenti e sghembi. Illustrare questi concetti con degli esempi in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. [Definizione 7.21]
(4) Dare la definizione di fascio proprio ed improprio di iperpiani. Usare questo concetto per trovare l'equazione della retta per due punti P, Q in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. [Definizione 7.31, Esempio 7.33]

A.6. **Spazi vettoriali euclidei.**

(1) Dare la definizione di prodotto scalare, norma e spazio vettoriale euclideo. Spiegare perché la norma è ben definita. [Definizioni 8.1-8.2-8.3]
(2) Dare la definizione di prodotto euclideo e dimostrare che è un prodotto scalare. [Esempio 8.4]
(3) Enunciare e dimostrare le formule di Carnot e di polarizzazione. [Proposizione 8.7]
(4) Dare le definizioni di un insieme di vettori U normalizzato, ortogonale ed ortonormale. Caratterizzare tali proprietà utilizzando $G|_U$. [Definizioni 8.8-8.16]
(5) Enunciare il teorema di Pitagora generalizzato per n vettori e dimostrarlo nel caso $n = 2$. [Proposizione 8.18]
(6) Definire il complemento ortogonale. Calcolare $\{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}\}^\perp$ in $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto euclideo. [Definizione 8.19]
(7) Dare la definizione di proiezione e riflessione ortogonale. [Proposizione 8.21, Esempio 5.1, Definizione 8.23]
(8) Dare la formula chiusa per il calcolo delle componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale. In $\mathbb{R}^2$ con prodotto euclideo, fornire una base ortonormale non canonica ed utilizzare la formula precedente per calcolare le componenti di $\mathbf{v} = (x, y)$. [Corollario 8.27]
(9) Enunciare l'Algoritmo di Gram-Schmidt ed utilizzarlo per calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, rispetto al prodotto euclideo, partendo da $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, 1)\}$. [Teorema 8.30, Corollario 8.31 e successivo commento, Esempio 8.32]
(10) Enunciare la disuguaglianza di Schwarz. Definire l'angolo tra due vettori ed utilizzare la precedente disuguaglianza per giustificare tale definizione. [Proposizione 8.34, Definizione 8.35]
(11) Dare la definizione di prodotto vettoriale. [Definizione 8.45, Esempio 8.46]

A.7. **Isometrie ed applicazioni aggiunte.**

(1) Dare la definizione di isometria e dimostrare che la riflessione ortogonale è un'isometria. [Definizione 9.1, Esempio 9.2]
(2) Dare la definizione di endomorfismo isometrico e di matrice ortogonale. Spiegare il legame tra i due concetti. [Definizioni 9.5-9.7, Teorema 9.11]
(3) Dare la definizione di rotazione e di matrice speciale ortogonale. Spiegare il legame tra i due concetti. [Definizioni 9.13, Lemma 9.14, Teorema 9.15]
(4) Dare la definizione di applicazioni autoaggiunte e caratterizzarle in termini di matrici rappresentative. [Definizioni 9.27, Proposizione 9.28]
(5) Dare la definizione di applicazioni ortogonalmente diagonalizzabili e caratterizzarle in termini di matrici rappresentative. [Definizioni 9.30, Proposizione 9.32]
(6) Enunciare il Teorema Spettrale e le sue conseguenze a livello matriciale. [Teorema 9.33, Proposizione 9.38]

A.8. **Geometria euclidea.**

(1) Dare la definizione di lunghezza di un segmento orientato e di angolo tra due segmenti. Calcolare tali quantità in $\mathbb{E}^2$ per i segmenti definiti dai punti $P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (1, 1)$. [Definizione 10.2]

(2) Dare la definizione di sistema di riferimento cartesiano e di coordinate cartesiane. Indicare il riferimento cartesiano canonico di $\mathbb{E}^2$ ed uno non canonico, fornendo la trasformazione di coordinate tra i due. [Definizione 10.4, Esempio 7.38]

(3) Dare la formula per il calcolo dell'equazione di un piano π in $\mathbb{E}^3$ e per la distanza di un punto P da π. Applicarle nel caso di π contenente $(1, 0, 0)$ e di giacitura $U = \mathcal{L}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2})$, e del punto $P = (1, 1, 1)$. Chi è il vettore ortogonale a π? [Corollario 10.12, Esempio 10.13]

A.9. **Ipersuperfici quadriche.**

(1) Dare la definizione di iperquadrica e la sua rappresentazione matriciale. Definire gli invarianti metrici delle iperquadriche e spiegare come questi si comportano a seguito della moltiplicazione dell'equazione dell'iperquadrica per una costante moltiplicativa. [Definizione 11.2-11.3-11.8, Proposizione 11.4, Esempio 11.9]

(2) Fornire la forma canonica di un'ellisse con punti reali ed illustrare la procedura necessaria ad ottenere tale rappresentazione, a partire dalla sua forma più generale.. [Teoremi 11.10-11.13, possibile variante l'iperbole]

B.1. Cenni di Algebra Astratta.

(1) Dare le definizioni di gruppi ed omomorfismi di gruppi. Fornire un esempio di entrambi. [Definizioni 2.14-2.17]

(2) Dare le definizioni di campi ed omomorfismi di campi. Fornire un esempio di entrambi. [Definizioni 2.19-2.21]

(3) Dare la definizione di relazione di equivalenza ed insieme quoziente. Fornire un esempio di entrambi. [Definizioni 2.35-2.37-2.39]

B.2. Matrici.

(1) Dimostrare che il prodotto tra matrici è commutativo, oppure provarne il contrario attraverso un controesempio.

(2) Dimostrare che il prodotto tra matrici soddisfa la proprietà di annullamento, oppure provarne il contrario attraverso un controesempio.

(3) Definire l'operazione di trasposizione, elencare e dimostrare le sue proprietà fondamentali. [Definizione 3.11, Proposizione 3.12]

(4) Dimostrare che la riduzione a scala di un sistema lineare non altera l'insieme delle soluzioni. [Proposizione 3.22]

(5) Enunciare il teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare ed illustrarne il funzionamento nella risoluzione del sistema associato alla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

[Teorema 3.28]

(6) Enunciare e dimostrare il teorema di Cramer. [Corollario 3.61]

(7) Definire la traccia di una matrice ed elencarne le proprietà fondamentali. [Definizione 3.63, Proposizione 3.64]

(8) Definire il determinante di una matrice. Utilizzare tale definizione per calcolare il determinate della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Definizioni 3.65-3.67]

(9) Descrivere il comportamento del determinante di una matrice a seguito dell'applicazione di operazioni elementari, illustrandolo attraverso esempi. [Proposizione 3.72, Corollario 3.77]

(10) Enunciare il legame tra il determinante di una matrice e di una sua riduzione a scala. Applicare il teorema al calcolo del determinante della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Proposizione 3.78]

B.3. Spazi vettoriali.

(1) Definire lo spazio $\mathbb{K}[x]_n$ e dimostrare che è uno spazio vettoriale. [Esempi 4.2-4.10]

(2) Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi, motivando la risposta:
- $U = \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$;

- $W = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x+y+1=0\}$.

(3) Definire gli spazi intersezione, somma e somma diretta di due sottospazi $U, W \subseteq V$. Spiegare la relazione tra
- $U+W$ e $U \cup W$;
- $U+W$, $U \cap W$ e $U \oplus W$.

[Definizione 4.15-4.17, Proposizione 4.16, Proposizione 4.18]

(4) Dare la definizione di spazio vettoriale finitamente generato. Fornire un esempio di spazio finitamente generato ed uno che non lo sia, motivando la risposta. [Definizione 4.35], Esempio 4.36

(5) Spiegare il funzionamento dell'algoritmo di eliminazione ed applicarlo all'insieme $U = \{1+x, 1-x, x\} \subset \mathbb{K}[x]_1$. [Teorema 4.37]

(6) Spiegare il funzionamento dell'algoritmo di completamento ed applicarlo all'insieme $U = \{[1\,1\,0], [1\,0\,1]\} \subset \mathrm{Mat}(1,3;\mathbb{Q})$. [Proposizione 4.44]

(7) Enunciare il teorema di Kronecker ed applicarlo al calcolo del rango di

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[Teorema 4.57]

(8) Fornire un algoritmo generale per individuare i vettori indipendenti nell'insieme $U = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$, utilizzando la mappa delle componenti ed il metodo di eliminazione di Gauss. Applicarlo all'insieme $U = \{1+x, 1-x, 1\} \subset \mathbb{K}[x]_2$. [Proposizione 4.65, Esempio 4.66]

(9) Fornire un algoritmo generale per trovare la rappresentazione algebrica di un sottospazio partendo da quella parametrica. Applicarlo all'esempio

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[Proposizione 4.68, Esempio 4.69]

B.4. **Applicazioni lineari.**

(1) Dire se le seguenti funzioni sono lineari, motivando la risposta:
- $$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathrm{Mat}(2,1;\mathbb{K}) \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \end{bmatrix} \end{array};$$
- $$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{K}[x] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P(x) & \longmapsto & P'(x) + 2P''(x) + 1 \end{array}.$$

(2) Definire le funzioni proiezione $\mathcal{P}_{U;W}$ e riflessione $\mathcal{R}_{U;W}$ e verificarne la linearità. [Esempio 5.1]

(3) Calcolare nucleo ed immagine della proiezione $\mathcal{P}_{U;W}$ e dell'inclusione $i_{U;V}$ e discuterne iniettività e suriettività. [Esempio 5.5]

(4) Enunciare e dimostrare il teorema di struttura delle controimmagini di un'applicazione lineare. Discuterne le conseguenze per l'iniettività dell'applicazione. [Teorema 5.6, Corollario 5.7]

(5) Dare la definizione dell'insieme $\mathrm{Hom}(V,W)$, delle operazioni fondamentali che coinvolgono i relativi oggetti e descriverne le loro proprietà. [Definizione 4.4, Proposizioni 5.9-5.10]

(6) Dare la definizione di isomorfismo, di spazi isomorfi e dimostrare che la relazione di isomorfismo è di equivalenza. [Definizione 2.13, Proposizione 5.13]

(7) Enunciare e dimostrare la regola del cambiamento di base per un vettore. [Proposizione 5.33]

(8) Enunciare la regola del cambiamento di base per un'applicazione lineare ed utilizzarla per ricavare la matrice rappresentative di $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x]_1)$ rispetto a $\mathcal{B}' = \{1+x, 1-x\}$, partendo dalla matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alla base canonica. [Proposizione 5.33]

B.5. **Endomorfismi e diagonalizzazione.**

(1) Dare la definizione di endomorfismo ed automorfismo. Fornire un esempio di automorfismo f_A non banale associato ad una matrice A e calcolare $P(f_A) = f_A^2 - f_A^0$, motivando il risultato. [Definizione 6.1, Esempio 5.11]
(2) Definire la relazione di similitudine e dimostrare che il determinante è un invariante per similitudine. [Definizione 6.10, Proposizione 6.12]
(3) Elencare i principali invarianti per similitudine. Spiegare cosa c'è di corretto nella seguente affermazione: "Due matrici sono simili se e solo se hanno gli stessi invarianti di similitudine". Illustrare con un controesempio l'eventuale parte non corretta. [Proposizioni 6.12-6.14]
(4) Definire traccia, determinante e polinomio caratteristico di un endomorfismo e spiegare perché sono ben definiti. Calcolare $P_{\mathrm{Id}_V}(\lambda)$. [Proposizioni 6.16]
(5) Definire la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Definire gli autovalori semplici e quelli regolari. Illustrare questi concetti per la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$
per ogni $a \in \mathbb{R}$. [Definizioni 6.20-6.21]

B.6. **Geometria affine.**

(1) Dare la definizione di spazio affine, di punto, di segmento orientato, di vettore geometrico, di giacitura e dimensione. Illustrare graficamente questi concetti. [Definizioni 7.1-7.2]
(2) Definire con precisione lo spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. [Esempio 7.3]
(3) Definire i sottospazi affini e caratterizzarli. [Definizioni 7.11, Proposizione 7.12]
(4) Fornire un algoritmo generale per trovare la rappresentazione algebrica di un sottospazio partendo da quella parametrica. Applicarlo al sottospazio S :
$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t_1 \cdot (1, 0, 1) + t_2 \cdot (0, 1, 1).$$
[Proposizione 7.16, Esempio 7.18]
(5) Fornire un metodo generale per studiare la mutua posizione di sottospazi affini ed applicarlo per studiare la mutua posizione delle rette $r: \ x = y = 1$ ed $s: \ x = 0, z = 0$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. [Proposizione 7.26]

B.7. **Spazi vettoriali euclidei.**

(1) Dare la definizione di prodotto di Frobenius ed esprimerlo esplicitamente rispetto alle entrate delle matrici. [Esempio 8.4]
(2) Dire se le seguenti matrici definiscono o meno dei prodotti scalari del tipo $\langle \ , \ \rangle_G$, giustificando la risposta:
$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad G_3 = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$
[Esempio 8.5]
(3) Enunciare le proprietà di bilinearità e non degenerazione del prodotto scalare, la legge di annullamento e la proprietà di omogeneità della norma. Verificare una di queste proprietà per il prodotto euclideo. [Proposizione 8.6]

(4) Definire la matrice di Gram e calcolarla per l'insieme $U = \{\mathbf{v_1} = (1,1), \mathbf{v_2} = (1,0)\}$, rispetto al prodotto scalare euclideo. Utilizzare $G|_U$ per calcolare $\langle(2,2),(2,1)\rangle_E$. [Definizione 8.10, Esempio 8.11, Proposizione 8.12]

(5) Calcolare il gramiano di $U = \{\mathbf{v_1} = (1,1), \mathbf{v_2} = (1,0)\}$. Cosa si deduce sull'indipendenza di U? [Proposizione 8.14]

(6) Enunciare la caratterizzazione metrica della proiezione. Illustrarla esplicitamente nel caso della proiezione di $\mathbf{v} = (x,y)$ su $\mathbf{e_1}$, rispetto al prodotto scalare euclideo. [Proposizione 8.24]

(7) Dare la caratterizzazione della proiezione ortogonale utilizzando le basi ortonormali. Utilizzarla per calcolare la proiezione di $\mathbf{v} = (x,y)$ sul sottospazio $x = y$, rispetto al prodotto scalare euclideo. [Proposizione 8.26]

(8) Calcolare la norma di Frobenius di

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \text{ed} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$$

e l'angolo tra le due matrici. Dire chi è $\mathbb{A}(2;\mathbb{R})^\perp$, giustificando con attenzione la risposta. [Definizione 8.19, Proposizione 8.21, Corollario 4.52]

(9) Spiegare al meglio delle proprie possibilità cosa sono le orientazioni canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Dire se $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\}$ è orientata positivamente rispetto all'orientazione canonica di $\mathbb{R}^2$. [Definizioni 8.37-8.40, Proposizione 8.39]

(10) Dare la caratterizzazione dei vettori in termini di modulo, direzione e verso e spiegare con precisione in quale struttura algebrica questa ha senso. [Proposizione 8.43 e successivo commento]

(11) Dare la formula per il calcolo del prodotto vettoriale ed utilizzarla per dimostrare l'antisimmetria del prodotto vettoriale. [Proposizioni 8.47-8.50]

B.8. **Isometrie ed applicazioni aggiunte.**

(1) Caratterizzare le isometrie in termini delle basi ortonormali. Utilizzare tale proprietà per verificare se f_A associata ad

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

è un'isometria. [Proposizione 9.3]

(2) Elencare le principali proprietà delle matrici ortogonali e dimostrare una di queste. [Proposizioni 9.9-9.10]

(3) Classificare le isometrie in dimensioni 2. Dire se f_A definita da

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

è una rotazione oppure una riflessione, trovando quindi l'eventuale angolo di rotazione oppure l'asse di riflessione. [Teorema 9.19]

(4) Enunciare il Teorema di Eulero. Classificare l'applicazione f_A definita da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Trovare l'unico autospazio di f_A fornendone un'interpretazione geometrica. [Teorema 9.20]

(5) Dare la definizione di omomorfismo aggiunto. Scrivere l'applicazione aggiunta di f_A definita da

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

rispetto al prodotto scalare canonico. [Definizioni 9.22, Proposizione 9.25]

(6) Spiegare sotto che condizioni la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ammette una decomposizione come prodotto di matrici ortogonali e diagonali, ed in tali casi scriverla esplicitamente. [Proposizione 9.38, Esempio 9.39]

B.9. **Geometria euclidea.**

(1) Definire con precisione gli spazi euclidei, illustrando tutte le strutture algebriche coinvolte nella definizione. Fornire un esempio di spazio euclideo. [Definizione 10.1]

(2) Dare la definizione di distanza tra un punto P ed un sottoinsieme S di $\mathbb{E}$ e tra due sottoinsiemi S, T. Nel caso in cui S è un sottospazio euclideo dare la formula esplicita per il calcolo della distanza di P da S. [Definizioni 10.9-10.14, Proposizione 10.10]

(3) Dare la formula generale per il calcolo della distanza tra due sottospazi ed applicarla nel caso delle rette $r: \ x = y = 1$ ed $s: \ x = 0, z = 0$ in $\mathbb{E}^3$. [Teorema 10.17, Esempio 10.18]

B.10. **Ipersuperfici quadriche.**

(1) Fornire le possibili forme canoniche di una iperquadrica. Illustrare il cambiamento di coordinate necessario per ridurre in forma canonica una iperquadrica a centro. [Teorema 11.10]

(2) Fornire la forma canonica di un'iperboloide ad una falda ed illustrare la procedura necessaria ad ottenere tale rappresentazione, a partire dalla sua forma più generale. [Teoremi 11.18-11.13, possibile variante le altre quadriche a centro]

Appendice C. Argomenti proposti per l'esame orale

L'elenco contiene alcuni possibili argomenti per la presentazione da sostenersi all'esame orale.

- Matrici, riduzione a scala e rango, sistemi lineari (Sezioni 3.1, 3.2, 3.3).
- Matrici quadrate ed inversione (Sezioni 3.4, 3.5).
- Traccia e determinante (Sezioni 3.6, 3.7, 3.8).
- Spazi vettoriali, sottospazi, formula di Grassmann (Sezioni 4.1, 4.2, 4.6).
- Basi e dimensione (Sezione 4.3, 4.4, 4.5).
- Spazi delle righe e delle colonne, mappa delle componenti (Sezioni 4.7, 4.8).
- Applicazioni lineari e loro algebra, isomorfismi e teorema di isomorfismo (Sezioni 5.1, 5.2, 5.3).
- Teorema di rappresentazione e sue applicazioni (Sezioni 5.4, 5.5).
- Autovalori, autovettori (Sezioni 6.1, 6.2, 6.3).
- Criteri di diagonalizzabilità e complementi (Sezioni 6.4, 6.5).
- Geometria affine (Capitolo 7).
- Spazi vettoriali euclidei e matrice di Gram (Sezioni 8.1, 8.2).
- Ortogonalità, basi ortonormali ed angolo tra vettori (Sezioni 8.3, 8.4, 8.5).
- Spazi vettoriali orientati, duale di Hodge (Sezioni 8.6, 8.7).
- Isometrie (Sezioni 9.1, 9.2, 9.3, 9.4).
- Teorema spettrale (Sezioni 9.5, 9.6).
- Decomposizione ai valori singolari, angoli tra sottospazi (Sezioni 9.7, 10.4).
- Geometria euclidea (Sezioni 10.1, 10.2, 10.3).
- Ipersuperfici quadriche (Capitolo 11).

Nelle seguenti tabelle presentiamo i dati relativi al numero ed alla percentuale di superamento dell'esame di Geometria e Algebra Lineare nell'Anno Accademico 2018/2019, al termine di tutte le sessione d'esame previste.

Anno iscrizione	Bocciati	Promossi	Ritirati	Totale
<2015	5	0	1	6
2015	6	4	1	11
2016	23	5	1	29
2017	28	13	3	44
2018	50	113	10	173
Totale	112	135	16	263

Tabella 3. La tabella presenta il numero di studenti bocciati, promossi e ritirati dal corso di studi a seconda del loro anno di immatricolazione.

	Promossi su iscritti	Ritirati su iscritti	Promossi su non ritirati
Vecchie matricole	24%	7%	26%
Nuove matricole	65%	6%	69%
Totale	51%	6%	55%

Tabella 4. La tabella presenta le percentuali di superamento dell'esame e di ritirati, divise tra vecchie e nuove matricole.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
Email address, M. Compagnoni: `marco.compagnoni@polimi.it`