ANALISI 1 del 23 Settembre

1.0

Binomio di Newton: Dimostrazione

$$P(n) = \left\{ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right\}$$

1) $P(0) = \left\{ (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 + b^0 = 1 \right\}$ ✓

$P(1) = \left\{ (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a+b \right\}$ ✓

2) $P(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k = (a+b)^{n+1}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{P(n)} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h =$$

$h = k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + \binom{n+1-1}{n+1-1} a^{\cancel{n+1-n-1}} b^{n+1} =$$

$n: \{1, 2, \dots\}$
$k: \ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n$
$h: \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n+1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k\right] + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k$$

DIMOSTRATO!

1.1

$(2,3) \sim (1,2) \iff 2+2 = 3+1 = 4$

!! $2-3 = -1 = 1-2$!!

$(5,8) \sim (3,6) \iff 5+6 = 8+3$

!! $5-8 = -3 = 3-6$!!

1.2

Dimostrazione $- \times - = +$

$2 \cdot (-3) = -3-3 = -6$

$(-2)(-3) = ?$ Dim: $0 = b \cdot 0 = b(a-a) = ba + b(-a) = ba - ba = ab - (-a)(-b) = 0$

$\hookrightarrow \underline{ab = (-a)(-b)}$

$\Downarrow$

$\underline{2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = 6}$

1.3

Dimostrazione $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (per assurdo)

Supponiamo $\exists\, m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \mid x = \frac{m}{n} \Rightarrow m,n$ non hanno fattori comuni.

allora $\exists\, x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow \exists\, K \mid m^2 = 4K^2 \Rightarrow \underline{m^2 = 4K^2 = 2n^2} \rightarrow$ fattore comune $= 2$

$\hookrightarrow$ ASSURDO: per Hp m ed n non hanno fattori comuni

APPUNTI DI ANALISI 24 Settembre

1.1

① $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Longrightarrow \nexists\, Sup(E), Inf(E)$

② $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x-2} \leq 0\right\} = [1; 2) \Longrightarrow Sup(E) = 2, \underbrace{Inf(E) = 1 = min(E)}_{\text{LIMITATO INF.}}$

③ $E = \left\{x = n - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \Rightarrow \underbrace{Inf(E) = min(E) = 0}_{\text{LIMITATO INFERIORMENTE}}$, non è superiormente limitato

↳ $\forall M > 0,\ \exists\, \bar{x} \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \bar{x} > M$

$$\frac{\bar{n}^2 - 1}{n} > M \qquad \frac{n^2 - M\bar{n} - 1}{n} > 0$$

$$\bar{n} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

↳ $\bar{n} > \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$

ANALISI 1 del 26 settembre

ESTREMI DI UN'INSIEME

(1) $E = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \mid t \in \mathbb{R} \quad t > 2 \right\}$ → sempre possibile

$x > 0 \quad \forall t \in E \Rightarrow$ 0 è un minorante, ma non il più piccolo.
1 è un minorante
↳ è il più grande?

$\forall \varepsilon > 0$ (piccolo) $1+\varepsilon$ non è un minorante $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} \le 1+\varepsilon \\ \exists \bar{t} \in \mathbb{R} \mid \frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} < 1+\varepsilon \end{array}}$ equivale a: $\Rightarrow$ si dice che $\bar{x}$ è l'estremo inferiore

$\frac{\bar{t}+1-(1+\varepsilon)(\bar{t}-2)}{\bar{t}-2} < 0 \Rightarrow \bar{t}+1-(\bar{t}-2+\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon) < 0$

$\cancel{\bar{t}}+1-\cancel{\bar{t}}+2-\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon < 0 \Rightarrow -\bar{t}\varepsilon < 2\varepsilon - 3$

$\bar{t} > 2 + \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{t} \in \mathbb{R}$

$\nexists$ l'estremo superiore $\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ (grande) $\exists t_1 \in \mathbb{R} \mid \frac{t_1+1}{t_1-2} > M \Rightarrow$
$M > 0 \qquad t_1 > 2$

$t_1 + 1 - Mt_1 - 2M > 0$

$t_1(1-M) + 2M - 1 > 0$

$t_1(1-M) > -2M+1$

$t_1(1-M) < 2M+1 \Rightarrow t_1 < \frac{2M+1}{1-M} \Rightarrow \underline{2 < t_1 < \frac{2M+1}{1-M}}$

$\exists t_1$

② $E = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

se voglio calcolare E, posso farlo: $\left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{4}+\frac{2}{3}; \frac{8}{27}+\frac{2}{3}; \dots \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}$ è sicuramente un minorante, appartiene all'insieme $\Rightarrow$ è minimo e estremo inferiore

qual è un possibile maggiorante?
$\frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}}{3n^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3n^2} > 0 \Rightarrow 3n^2 > 0$

$\bar{x} = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow$ 1 è un maggiorante, ma è il più piccolo?

$\exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} > 1-\varepsilon \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}-\{0\} \mid \frac{\bar{n}^2-1}{3\bar{n}^2} + \frac{2}{3} > 1-\varepsilon$

$\bar{n}^2 - 1 + 2\bar{n}^2 - (1-\varepsilon)3\bar{n}^2 > 0 \qquad \cancel{\bar{n}^2}-1+\cancel{2\bar{n}^2}-\cancel{3\bar{n}^2}+3\varepsilon\bar{n}^2 > 0$

$3\varepsilon\bar{n}^2 - 1 > 0 \qquad \bar{n}^2 > \frac{1}{3\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}-\{0\}$

$\downarrow$

È il più piccolo perché riesco a costruire un numero più piccolo

③ $E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subseteq \mathbb{R}$ (soluzione $\inf(E) = -\sqrt{2}$; $\sup(E) = \sqrt{2}$)