Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 30 Aprile 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Fissato un sistema di riferimento, consideriamo le due rette dipendenti dal parametro reale h :

$$r : \begin{cases} hx - y + 1 = 0 \\ (h-1)x - y + z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y - z - 2h + 2 = 0 \end{cases}.$$

1. Studiare la mutua posizione di r ed s al variare di h.
2. Per i valori di h per cui le rette sono incidenti, trovare il punto di intersezione.
3. Verificato che per $h = -1$ le rette sono sghembe, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente s e parallelo ad r.

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

1. Trovare dimensioni e basi di $W = \ker(A)$ ed U.
2. Trovare dimensioni e basi di $U + W$ ed $U \cap W$.
3. Completare la base di $U + W$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

3. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ rappresentata rispetto alla base canonica $S_2 = \{1, x, x^2\}$ dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare dimensioni e basi di $\ker(A)$ e dello spazio delle colonne $C(A)$.
2. Trovare dimensioni e basi di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
3. Verificare che $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$ e scrivere la matrice del cambiamento di base da S_2 a $\mathcal{B}$.
4. Scrivere la matrice A' che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzioni

1. (a) Mettendo a sistema le equazioni delle due rette otteniamo:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 0 & -1 \\ h-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2(h-1) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ h-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2(h-1) \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{array}\right).$$

Pertanto abbiamo:

- Se $h \neq 0, 1$, la matrice A ha rango 3 mentre $(A|\mathbf{b})$ ha rango 4, quindi le rette sono sghembe;
- Se $h = 0$, il rango di A è 3 e coincide con quello di $(A|\mathbf{b})$, quindi le due rette sono incidenti;
- Se $h = 1$, A ha rango 2 mentre $(A|\mathbf{b})$ ha rango 3, quindi le rette sono parallele.

(b) Per $h = 0$ le due rette si intersecano nel punto P le cui cordinate sono soluzione del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad P|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per $h = 1$, il fascio di piani a supporto su s è definito da

$$\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}|_{\mathcal{B}_O}: \quad \alpha(-y+z) + \beta(2x - y - z + 4) = 0, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponendo $\alpha \neq 0$, definiamo $k = \frac{\beta}{\alpha}$ e quindi il fascio diventa

$$\mathcal{F}_k|_{\mathcal{B}_O}: \quad 2kx - (1+k)y + (1-k)z + 4k = 0, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{F}_\infty|_{\mathcal{B}_O}: \quad 2x - y - z + 4 = 0.$$

Mettiamo a sistema l'equazione del generico piano del fascio e di r :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2k & -1-k & 1-k & -4k \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1-2k & 1 & -4k \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2+2k & 2 \end{array}\right).$$

Di conseguenza il piano è parallelo alla retta se e soltanto se $k = -1$, cioè:

$$\mathcal{F}_{-1}|_{\mathcal{B}_O}: \quad x - z + 2 = 0.$$

2. (a) Riduciamo a scala la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim(\ker(A)) = 4 - r(A) = 2$, ed una base si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_1 \\ w = t_2 \end{cases} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lo spazio U ha dimensione 2, poichè i due vettori che lo generano sono linearmente indipendenti. Inoltre, essi costituiscono una base di U.

(b) Per trovare una base di $U + W$ riduciamo a scala la matrice avente per righe i vettori delle due basi dei sottospazi:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la dimensione di $U + W$ è 3 ed una sua base è

$$\mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 1$. Inoltre, dato che per il secondo vettore della base di $\ker(A)$ vale

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

segue che questo è anche un vettore di U, e quindi costituisce una base di $U \cap W$.

(c) È immediato verificare che si puó completare $\mathcal{B}_{U+W}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo il vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

essendo questo linearmente indipendente dagli altri tre vettori.

3. (a) Risolviamo il sistema lineare omegeneo associato alla matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi $\dim(\ker(A)) = 1$ e, per il teorema del rango, $\dim(C(A)) = 3 - 1 = 2$. Una base di $C(A)$ è data dalle colonne di A corrispondenti alle colonne contenenti i pivot della sua matrice ridotta:

$$\mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Per l'isomorfismo delle coordinate, abbiamo $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(A)) = 1$ e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(C(A)) = 2$. Inoltre, $\mathcal{B}_{\ker(f)} = \{1 - x\}$ e $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \{1 + x + x^2, 1 - x + x^2\}$.

(c) La matrice delle coordinate di $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica S_2 è

$$M_{\mathcal{B},S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avendo rango 3, segue che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$. $M_{\mathcal{B},S_2}$ corrisponde alla matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ ad S_2. La matrice $M_{S_2,\mathcal{B}}$ si ottiene invertendo la matrice precedente, ad esempio con il metodo di Gauss–Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M_{S_2,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Per la regola del cambiamento di base, la matrice A' è

$$A' = M_{S_2,\mathcal{B}}\, A\, M_{\mathcal{B},S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 10 Luglio 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

   1. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   2. Esistono valori di k per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo trovare una matrice Q ortogonale che diagonalizza A.

2. Data la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

definiamo su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = \mathbf{v_1}^T \cdot G \cdot \mathbf{v_2}$.

   1. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   2. Verificare che G é la matrice di Gram del prodotto scalare in $\mathbb{R}_2[x]$ definito da $\langle P(x), Q(x) \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$, rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
   3. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}_2[x]$ rispetto al prodotto scalare del punto 2.

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, siano

$$Q|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Pi|_{\mathcal{B}_O} : \; x - y + 1 = 0.$$

   1. Trovare il luogo $\mathcal{S}$ dei punti P che soddisfano $d(P, \Pi) = \frac{1}{2}d(P, Q)$.
   2. Classificare e trovare una forma canonica di $\mathcal{S}$.
   3. Trovare la rototraslazione del sistema di riferimento necessaria a porre $\mathcal{S}$ in forma canonica.

4. Siano

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{b_1}) = \mathbf{b_1} - 2\mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}, \qquad f(\mathbf{b_2}) = 2\mathbf{b_1} + 3\mathbf{b_2}, \qquad f(\mathbf{b_3}) = 3\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}.$$

   1. Dimostrare che $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto a B.
   2. Si trovi una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   3. Trovare le controimmagini rispetto a f del vettore $\mathbf{v} = \mathbf{b_1} + 5\mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$.

Soluzioni

1. (a) Il polinomio caratteristico di A è:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda;k) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ k-1 & 0 & k+1-\lambda \end{vmatrix} = (k+1-\lambda)((1-\lambda)^2-k) = \\ &= (k+1-\lambda)(1-\lambda-\sqrt{k})(1+\lambda+\sqrt{k}) \end{aligned}$$

e quindi le sue radici sono $\lambda_1 = k+1,\ \lambda_2 = 1-\sqrt{k},\ \lambda_3 = 1+\sqrt{k}$.

- Se $k<0$ due radici sono complesse e quindi l'applicazione non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- Se $k=0$ si ha $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ e quindi l'unico autovalore ha molteplicità algebrica 3. Ma dato che la matrice A non è un multiplo dell'identità, si ha che l'applicazione non è diagonalizzabile. Infatti l'autospazio associato a 1 è

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_1) = 3-1 = 2 < 3$.

- Se $k=1$ si ha $\lambda_1=\lambda_3=2$ e quindi l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_2) = 3-1 = 2$, quindi la molteplicità geometrica di 2 è 2 ed A è diagonalizzabile. Questo è coerente con il fatto che per $k=1$ la matrice è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

- Se $k>0$ e $k\neq 1$ le radici del polinomio sono reali e distinte e quindi A è diagonalizzabile.

(b) Per il teorema spettrale, A è ortogonalmente diagonalizzabile ripetto al prodotto scalare canonico se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k=1$. In tal caso si ha:

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_0 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice ortogonale Q che diagonalizza A è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Applichiamo l'algoritmo di Gram–Schmidt alla base canonica $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \mathbf{e_2} - \frac{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{e_2}\rangle}{\|\mathbf{v_1}\|^2}\mathbf{v_1} = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{e_3} - \frac{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{e_3}\rangle}{\|\mathbf{v_1}\|^2}\mathbf{v_1} - \frac{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3}\rangle}{\|\mathbf{v_2}\|^2}\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo infine la normalizzazione, ottenendo la base ortonormale $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$ con

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/2 \\ 0 \\ 3\sqrt{5}/2 \end{pmatrix}.$$

(b) $\langle 1,1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\,dx = 1 = G_{11}$;
$\langle 1,x\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = G_{12}$, inoltre $\langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = G_{21}$;
$\langle 1,x^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3} = G_{13}$, inoltre $\langle 1,x^2\rangle = \langle x^2,1\rangle = G_{21}$ e $\langle 1,x^2\rangle = \langle x,x\rangle = G_{22}$;
$\langle x,x^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = G_{23}$, inoltre $\langle x,x^2\rangle = \langle x^2,x\rangle = G_{32}$;
$\langle x^2,x^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5} = G_{33}$.

(c) Per il teorema di rappresentazione dei prodotti scalari, si ha che le coordinate dei vettori di una base ortonormale $\{P_1, P_2, P_3\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ rispetto alla base canonica $S_2 = \{1, x, x^2\}$ sono:

$$P_1|_{S_2} = \tilde{\mathbf{v}}_1,\ P_2|_{S_2} = \tilde{\mathbf{v}}_2,\ P_3|_{S_2} = \tilde{\mathbf{v}}_3.$$

Quindi $P_1 = 1,\ P_2 = \sqrt{3}\,x$ e $P_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\,x^2$.

3. (a) Dato il punto P di coordinate

$$P|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

l'equazione $d(P,\Pi) = \frac{1}{2}d(P,Q)$ diventa:

$$\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}.$$

Quadrando entrambi i lati e semplificando, otteniamo l'equazione della quadrica

$$\mathcal{Q}|_{\mathcal{B}_O}:\ x^2 - 4xy + y^2 - z^2 + 6x - 4y + 1 = 0.$$

(b) Le matrici associate a $\mathcal{Q}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 1,\ I_2 = -5,\ I_3 = 3,\ I_4 = -8$, pertando la quadrica è un'iperboloide a due falde. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)((1-\lambda)^2-4) = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$, mentre $\tilde{a}_{44} = \frac{I_4}{I_3} = -\frac{8}{3}$. Esiste di conseguenza un sistema di riferimento canonico $\tilde{\mathcal{B}}_O$ in cui la quadrica ha equazione:

$$\mathcal{Q}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O}:\ X^2 + Y^2 - 3\,Z^2 + \frac{8}{3} = 0.$$

Osserviamo che avendo due autovalori uguali, $\mathcal{Q}$ è una quadrica di rotazione.

(c) I due sistemi di riferimento $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ sono legati dalla rototraslazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{v}.$$

L'origine $\tilde{O}$ del nuovo sistema coincide con il centro C della quadrica, le cui coordinate x_C, y_C, z_C rispetto a $\mathcal{B}_O$ si ottengono risolvendo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vettore di traslazione è quindi

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La rotazione del sistema di riferimento è quella data dalla matrice ortogonale speciale Q che diagonalizza A. Calcoliamo quindi gli autospazi di A :

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice Q è quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Segue che i vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. L'applicazione lineare f esiste ed è univocamente determinata perché è nota la sua azione sugli elementi di una base. La matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$A_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{b_1})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{b_2})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{b_3})|_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Riduciamo a scala la matrice $A_{f,\mathcal{B}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r(f) = r(A_{f,\mathcal{B}}) = 2$ ed una base di $\mathrm{Im}(f)$ è data dai vettori corrispondenti alle colonne di $A_{f,\mathcal{B}}$ contenenti i pivot:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \left\{ f(\mathbf{b_1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, f(\mathbf{b_2}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(\ker(f)) = n - r(f) = 3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad $A_{f,\mathcal{B}}$, abbiamo:

$$\mathcal{B}_{\ker(A_{f,\mathcal{B}})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_{\ker(A_{f,\mathcal{B}})} = \left\{ \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} - \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Per il teorema di rappresentazione, i vettori $\mathbf{w}$ appartenenti alla controimmagine di $\mathbf{v}$ soddisfano

$$f(\mathbf{w})|_{\mathcal{B}} = A_{f,\mathcal{B}}\,\mathbf{w}|_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}|_{\mathcal{B}}.$$

Risolviamo quindi il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Essendo il sistema risolvibile abbiamo che $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(f)$ e le sue controimmagini $\mathbf{w}$ sono:

$$\mathbf{w}|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2+t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 22 Luglio 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la funzione tale che

$$T(1) = 1 + x, \quad T(1 + x) = x + x^2, \quad T(1 + x + x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad T(1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^2.$$

   1. Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x])$ che soddisfa le condizioni precedenti e calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.
   2. Calcolare una base di $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
   3. Calcolare una base di $\ker(T) + \mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)$.

2. Siano date le matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -k+1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}.$$

   1. Calcolare autovalori e autospazi di A_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.
   2. Per quali k le matrici A_k e B_k sono simili?

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo il fascio di quadriche $\mathcal{Q}_h$ definite dalle seguenti matrici dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$B_h = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 5 & 0 & h \\ 1-h & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   1. Classificare $\mathcal{Q}_h$ al variare di h.
   2. Scrivere una forma canonica di $\mathcal{Q}_h$ per ogni h.
   3. Trovare i valori di h per i quali $\mathcal{Q}_h$ è di una superficie di rotazione reale. In tali casi trovare l'asse di rotazione di $\mathcal{Q}_h$.

Soluzioni

1. (a) L'insieme $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$. Essendo pertanto definita l'azione di T su una base, esiste un'unica applicazione lineare T che soddisfa le condizioni date. Per ottenere la matrice che rappresenta T rispetto ad S dobbiamo conoscere l'azione di T su S :

$$\begin{array}{lcl} T(1) & = & 1+x, \\ T(x) & = & T(1+x)-T(1) = x+x^2-1-x = -1+x^2, \\ T(x^2) & = & T(1+x+x^2)-T(1+x) = 1+2x+x^2-x-x^2 = 1+x, \\ T(x^3) & = & T(1+x+x^2+x^3)-T(1+x+x^2) = 1-x^2-1-2x-x^2 = -2x-2x^2. \end{array}$$

Pertanto abbiamo

$$A = \left(\begin{array}{cccc} T(1)|_S & T(x)|_S & T(x^2)|_S & T(x^3)|_S \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Se riduciamo a scala la matrice A otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ker(A) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Attraverso la mappa delle coordinate, una base di $\ker(f)$ è $\{2x+2x^2+x^3, 1-x^2\}$. Inoltre, lo spazio delle colonne $C(A)$ ha per base le prime due colonne di A e quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{1+x, -1+x^2\}$.

(c) $\ker(f)+\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(2x+2x^2+x^3, 1-x^2, 1+x, -1+x^2)$. Dobbiamo trovare un sottoinsieme massimale di generatori indipendenti. A tal fine riduciamo a scala la matrice delle coordinate rispetto a S :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che i primi tre generatori sono tra loro indipendenti, pertanto una base di $\ker(f)+\mathrm{Im}(f)$ è $\{2x+2x^2+x^3, 1-x^2, 1+x\}$. Dalla formula di Grassman si ha

$$\dim(\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) - \dim(\ker(f)+\mathrm{Im}(f)) = 1$$

ed è facile verificare che una base dell'intersezione è $\{1-x^2\}$.

2. (a) Il polinomio caratteristico di A_k è:

$$\begin{array}{rcl} P_k(\lambda) & = & \left| \begin{array}{ccc} k+1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & k-1-\lambda & -k+1 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{array} \right| = \\ & = & (k+1-\lambda)((k-1-\lambda)(-2-\lambda)-2(-k+1)) = \\ & = & (k+1-\lambda)\lambda(3-k+\lambda) \end{array}$$

e quindi le sue radici sono $\lambda_1 = k+1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = k-3$.

- Se $k \neq -1, 3$ gli autovalori sono tutti distinti e i corrispondenti autospazi hanno dimensione 1 :

$$V_{k+1} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -k+1 \\ 0 & 2 & -k-3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & k-1 \\ 0 & 0 & -2k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -k+1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_{k-3} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -k+1 \\ 0 & 2 & -k+1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -k+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

- Se $k = -1$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- Se $k = 3$ si ha $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(b) B_k è una matrice triangolare alta e i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale, che coincidono con gli autovalori di A_k.

- Per $k \neq -1, 3$ gli autovalori sono distinti e quindi entrambe le matrici sono diagonalizzabili alla medesima matrice diagonale. Da questo segue che le due matrici sono simili.
- Se $k = -1$ la matrice A_{-1} è diagonalizzabile. Dobbiamo studiare l'autospazio V_0 di B_{-1} :

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Segue che la molteplicità geometrica di 0 è uguale a 2 e quindi anche B_{-1} è diagonalizzabile e pertanto è simile ad A_{-1}.
- Se $k = 3$ la matrice A_3 non è diagonalizzabile. Dobbiamo studiare l'autospazio V_0 di B_3 :

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Segue che la molteplicità geometrica di 0 è uguale a 2 e quindi B_3 è diagonalizzabile e pertanto non è simile ad A_3.

3. (a) La classificazione di $\mathcal{Q}_h$ può essere compiuta utilizzando gli invarianti metrici delle quadriche:

$$I_1 = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{pmatrix} = 7 + 2h,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+h & 1-h \\ 1-h & 1+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1+h \end{vmatrix} = 2(5+7h),$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{vmatrix} = 5((1+h)^2 - (1-h)^2) = 20h,$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 5 & 0 & h \\ 1-h & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} 1+h & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 1-h & 1+h & 0 \end{vmatrix} = 4h(5-h^2).$$

Segue che:

- $h > \sqrt{5}$: $I_4 < 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'ellissoide reale;

- $h = \sqrt{5}$: $I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cono immaginario con vertice reale;
- $0 < h < \sqrt{5}$: $I_4 > 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'ellissoide immaginario;
- $h = 0$: $I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cilindro ellittico (reale o immaginario);
- $-\sqrt{5} < h < 0$: $I_4 < 0,\ I_1 I_3 < 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'iperboloide a due falde;
- $h = -\sqrt{5}$: $I_4 = 0,\ I_2 < 0$, quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cono reale;
- $h < -\sqrt{5}$: $I_4 > 0,\ I_2 < 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'iperboloide ad una falda.

(b) Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice dei termini di secondo grado:

$$P_h(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+h-\lambda & 0 & 1-h \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(2h-\lambda).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2h$. Dal punto precedente, l'equazione canonica di $\mathcal{Q}_h$ è sempre del tipo

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \tilde{a}_{44} = 0.$$

Se $h \neq 0$ allora $\tilde{a}_{44} = \frac{I_4}{I_3} = 1 - \frac{h^2}{5}$ mentre se $h = 0$ si ha $\tilde{a}_{44} = 1$, perché la riduzione in forma canonica di $\mathcal{Q}_0$ avviene solo attraverso una rotazione del sistema di riferimento. Pertanto una forma canonica di $\mathcal{Q}_h$ è

$$5X^2 + 2Y^2 + 2hZ^2 + 1 - \frac{h^2}{5} = 0.$$

Si deduce quindi che $\mathcal{Q}_0$ è un cilindro immaginario.

(c) La quadrica $\mathcal{Q}_h$ è di rotazione soltanto se A_h ha due autovalori coincidenti, pertanto $h = 1, \frac{5}{2}$. Per $h = 1$ la quadrica non ha punti reali, mentre per $h = \frac{5}{2}$ abbiamo un'ellissoide reale di rotazione. Per trovare il suo asse di rotazione cerchiamo il centro di $\mathcal{Q}_{5/2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5/2 \\ -3/2 & 0 & 7/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'asse è parallelo all'autospazio V_2 :

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi una rappresentazione parametrica dell'asse è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 15 Settembre 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come

$$f((x\ y\ z)^T) = (x + y + z, 2x + 2y, x + 2z)^T.$$

   1. Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alla base canonica.
   2. Verificare se l'applicazione è diagonalizzabile.
   3. Verificare se l'applicazione è un automorfismo ed in tal caso determinare l'applicazione inversa.

2. Consideriamo i seguenti tre vettori in $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro k:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

   1. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $V_k \subset \mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori.
   2. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{w} = (1\ 2\ 3\ 4)^T$ su V_0, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nel piano, consideriamo il fascio di coniche $\mathcal{C}_k$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ e definito da:

$$kx^2 + 2(1 - k)xy + ky^2 - 2kx + 2(k - 1)y = 0.$$

   1. Classificare $\mathcal{C}_k$ al variare di k.
   2. Trovare le equazioni cartesiane delle rette componenti le coniche degeneri del fascio.
   3. Trovare i punti base del fascio.

Soluzioni

1. (a) La matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alla base canonica S di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e_1})|_S & f(\mathbf{e_2})|_S & f(\mathbf{e_3})|_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico di f è

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Avendo tre autovalori reali distinti, l'applicazione f è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^3$.

(c) Essendo i tre autovalori di f diversi da zero, l'applicazione è invertibile ed è quindi un automorfismo di $\mathbb{R}^3$. L'applicazione inversa f^{-1} è rappresentata, rispetto alla base canonica S, dalla matrice inversa di A, che possiamo calcolare utilizzzando ad esempio l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

2. (a) La dimensione dello spazio vettoriale è pari al rango della matrice avente come colonne i tre vettori:

$$\dim(V_k) = \mathrm{r} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \end{pmatrix} = \mathrm{r} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} = \mathrm{r} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo considerare i seguenti casi:

- se $k \neq \pm 1$ allora $\dim(V_k) = 3$;
- se $k = 1$ allora $\dim(V_k) = 1$;
- se $k = -1$ allora $\dim(V_k) = 2$.

(b) Per prima cosa è necessario trovare una base ortogonale di V_0, utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \frac{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{v_2} \rangle}{\|\mathbf{u_1}\|^2} \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \frac{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{v_3} \rangle}{\|\mathbf{u_1}\|^2} \mathbf{u_1} - \frac{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v_3} \rangle}{\|\mathbf{u_2}\|^2} \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

La proiezione ortogonale $\mathbf{w}_0$ di $\mathbf{w}$ su V_0 è quindi

$$\mathbf{w_0} = \frac{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u_1}\|^2}\, \mathbf{u_1} + \frac{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u_2}\|^2}\, \mathbf{u_2} + \frac{\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u_3}\|^2}\, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La classificazione di $\mathcal{C}_k$ può essere compiuta utilizzando gli invarianti metrici delle coniche:

$$I_1 = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} k & 1-k \\ 1-k & k \end{pmatrix} = 2k, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} k & 1-k \\ 1-k & k \end{vmatrix} = 2k-1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} k & 1-k & -k \\ 1-k & k & k-1 \\ -k & k-1 & 0 \end{vmatrix} = k(1-2k).$$

Segue che:

- $k < \frac{1}{2}$ e $k \neq 0$: $I_3 \neq 0$ e $I_2 < 0$ quindi $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole;
- $k > \frac{1}{2}$: $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$ quindi $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse con punti reali;
- $k = 0, \frac{1}{2}$: $I_3 = 0$ quindi $\mathcal{C}_k$ è una coppia di rette.

La classificazione completa dei due casi degeneri è contenuta nel punto successivo.

(b) Le equazioni delle rette componenti le due coniche degeneri le otteniamo fattorizzando i relativi polinomi.

$$\mathcal{C}_0|_{\mathcal{B}_O} :\ 2xy - 2y = 2y(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_1|_{\mathcal{B}_O} :\ y = 0, \quad r_2|_{\mathcal{B}_O} :\ x - 1 = 0;$$

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{B}_O} :\ \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - x - y = \frac{1}{2}(x+y)^2 - (x+y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad s_1|_{\mathcal{B}_O} :\ x + y = 0, \quad s_2|_{\mathcal{B}_O} :\ x + y - 2 = 0.$$

Di conseguenza abbiamo che $\mathcal{C}_0$ è l'unione di due rette reali incidenti (ed in particolare perpendicolari), mentre $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ è l'unione di due rette reali parallele.

(c) I quattro punti base si possono trovare come intersezione di una qualsiasi coppia di coniche del fascio. In particolare possiamo intersecare le coniche degeneri e quindi le rette che le costituiscono: $P_{ij} = r_i \cap s_j,\ i, j = 1, 2$.

$$P_{11}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_{11}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{12}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_{12}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{21}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_{21}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$P_{22}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_{22}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$