Appunti Geometria e algebra lineare

Alexandru Gabriel Bradatan

1 Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti. Tutta la matematica si basa sulla teoria assiomatica degli insiemi.

Un insieme A si indica: $A = a1, ..., an$. La **cardinalità di A è il numero di oggetti**: $|A| = n$. La cardinalità dell'insieme vuoto è 0.

Esempi di insiemi:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (costruzione con condizione)
- $\mathbb{R} = \{\text{x numeri decimali}\}$
- $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

1.1 Operazioni tra insiemi

Ci sono **unione** ($\cup$), **intersezione** ($\cap$) e **differenza** ($\setminus$) e **prodotto cartesiano** ($\times$).

Unione Prendo tutti gli elementi in A e B

Interesezione Prendo tutti gli elementi che sono sia in A che in B

Differenza Prendo tutti gli elementi che sono in A ma non in B

Prodotto cartesiano Insieme di **m-uple** (m-uple: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) contenenenti tutte le combinazioni degli elementi di A e B

2 Relazioni

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi.

Esempio:

$$\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2\},\ B = \{b_1, b_2\} \\
A \times B &= \{\text{tutte le combinazioni degli elementi di A e B}\} \\
R_0 &= \emptyset \\
R_1 &= \{(a_1, b_1)\}, \ldots, R_4 \\
R_5 &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}, \ldots, R_10 \\
R_{11} &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}, \ldots, R_14 \\
R_{15} &= \{A \times B\}
\end{aligned}$$

Dati due elementi (a_i, b_j) appartenenti tutti e due ad una stessa relazione R, si può scrivere che $a_i \sim_R b_j$. Per rappresentare le relazioni si possono usare i diagrammi di Venn (le patate).

3 Funzioni

Le funzioni sono speciali relazioni che associano a ogni elemento del primo insieme un elemento del secondo. Prendiamo $R_7 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$. Questa relazione **associa un elemento del primo insieme a un elemento del secondo** ed è una funzione $f : A \to B$.

L'insieme A è detto dominio, B il codominio. Se $a \in A$, allora $b = f(a)$ **sarà la sua immagine**. **L'insieme di tutte le immagini è detto insieme immagine** e si indica con $Im(f)$. La **controimmagine di b è quell'elemento tale che** $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ (la funzione inversa in questo caso è solo notazione).

Se $Im(f) =$ **codominio allora la funzione è suriettiva**. Se **ad ogni immagine corrisponde una sola controimmagine (**$|Im(f^{-1}(b))| = 1$**) allora la funzione è iniettiva**. **Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva è biunivoca**. **Una funzione è invertibile se e solo se è biunivoca**.

La funzione $A \times A = \Delta A = Id(A) = \{(a, a)|a \in A\}$ **è detta funzione identità o insieme diagonale**.

4 Operazioni

Le operazioni sono delle speciali funzioni: dati $n+1$ insiemi $A_1, \dots, A_{n+1}$ non vuoti, una operazione n-aria $*$ è una funzione che:

$$\begin{aligned} A_1 \times \cdots \times A_n &\to A_{n+1} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto *(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Se **gli insiemi usati nel prodotto cartesiano sono lo stesso insieme** A **si dice che l'operazione è interna** (esempio: la somma). Se il **numero di insiemi è 2 si dice binaria**.

Esempi di operazioni:

Somma $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n1, n2) \mapsto n3 = n1 + n2$

Differenza $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, (n1, n2) \mapsto n3 = n1 - n2$

Le varie operazioni possono essere rappresentate in tabelle che indicano tutti i posibili casi. Ad esempio, esistono $2^4 = 16$ diverse operazioni binarie interne ad $A = \{a_1, a_2\}$.

$*$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_1	a_2

Tabella 1: Esempio di operazione interna binaria ad A