Lezione di Geometria e Algebra Lineare del 18 ottobre

Applicazioni lineari

Isomorfismi

Un isomorfismo, in generale, è un'applicazione lineare invertibile. Infatti essere invertibile è condizione sufficiente affinché essa sia invertibile. Possiamo enunciare queste proprietà:

1) $f \in Hom(V,W)$ è isomorfismo se e solo se è biunivoca
2) se f è isomorfismo, anche f^{-1} lo è
3) f, g isomorfismi, $f+g$, $t \cdot f$ non sono isomorfismi ma $f \circ g$ è un isomorfismo.

Relazione d'isomorfismo

Detto $\Omega_{\mathbb{K}}$ l'insieme degli spazi vettoriali su campo $\mathbb{K}$, preso $\Omega_{\mathbb{K}} \times \Omega_{\mathbb{K}}$, la coppia $(V, W) \in \Omega_{\mathbb{K}} \times \Omega_{\mathbb{K}}$ è in relazione d'isomorfismo se V e W sono spazi isomorfi ($\exists f: V \to W$ ed è un isomorfismo). Per indicare la relazione scriviamo $V \overset{f}{\simeq} W$.

Esempio: V su campo $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n \Rightarrow V \overset{\phi_B}{\simeq} Mat(n, 1; \mathbb{K})$

RELAZIONE D'EQUIVALENZA La relazione d'isomorfismo è una relazione d'equivalenza. (5.13)

DIM.: Verifichiamo le proprietà:

1) RIFLESSIVA: $V \simeq V \Rightarrow$ la funzione Id_V è un isomorfismo $\Rightarrow V \overset{Id}{\simeq} V$
2) SIMMETRIA: $V \simeq W$, $W \simeq V \Rightarrow V \overset{f}{\simeq} W$, $W \overset{f^{-1}}{\simeq} V$ per definizione di isomorfismo
3) TRANSITIVA: $V \sim W$, $W \sim U \to V \sim U \Rightarrow V \overset{f}{\simeq} W$, $W \overset{g}{\simeq} U \to V \overset{g \circ f}{\simeq} U$

<u>Osservazione: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, analogo al prodotto tra matrici: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$</u>

La relazione d'isomorfismo, allora, divide $\Omega_{\mathbb{K}}$ in classi di equivalenza.

Caratterizzazione d'isomorfismo (5.14)

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f \in Hom(V,W)$. Sia $U = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ ed $f(U) = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\} \subseteq W$.

1) Se U genera V, allora $f(U)$ è suriettiva se e solo se $f(U)$ genera W
2) f è iniettiva se e solo se $f(U)$ è linearmente indipendente $\forall U$ linearmente indipendenti
3) Se U è base di V, f è isomorfismo se e solo se $f(U)$ è base di W. (un isomorfismo è un'applicazione che mandano basi in basi)

Esempio: $V = W = Mat(3,1;\mathbb{K})$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $f_A: V \to W$, $X \mapsto AX$

Prendiamo l'insieme delle basi canoniche $U = \{E_{11}, E_{21}, E_{31}\}$. Se calcoliamo $f_A(U) = \left\{ AE_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, AE_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Possiamo notare che $f_A(U)$ non è indipendente $\Rightarrow$ f_A non è iniettiva (propr. 2). Possiamo verificarlo facendo $Ker(f_A) = Ker(A) \neq \{0_V\}$

Lo spazio generato dalle immagini $Im(f_A(U)) = Span(f_A(E_{11}), f_A(E_{21})) \neq W \Rightarrow$ le immagini non sono generatori del codominio, quindi, per la propr. 1, f_A non è suriettiva. I vettori in $W \setminus Span(f_A(U))$ si possono trovare: $Span(f_A(U)) = Im(f_A) = C(A)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{[\dots]} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in Im(f_A) \text{ se } a+b=c$$

quando la colonna non appartiene a $C(A)$?

$f_A(U)$ non è base di W, quindi f_A non è isomorfismo.

TEOREMA D'ISOMORFISMO (5.15)

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. $V \cong W$ se e solo se $dim(V) = dim(W)$. <u>Valido solo per dimensioni finite.</u>

DIM.: $(\Rightarrow)$ Sia $V \cong W$ e $B_V = \{b_1, \dots, b_n\}$. So che $f(B_V) = B_W$, ciò significa che $dim(V) = dim(W)$.

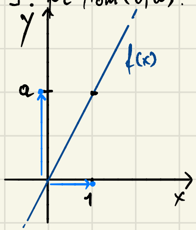
$(\Leftarrow)$ $dim(V) = dim(W) = n \Rightarrow \phi_{B_V}: V \to Mat(n,1;\mathbb{K})$, $\phi_{B_W}: W \to Mat(n,1;\mathbb{K})$. Allora abbiamo che $V \overset{\phi_{B_V}}{\cong} Mat(n,1;\mathbb{K})$ e $W \overset{\phi_{B_W}}{\cong} Mat(n,1;\mathbb{K})$, per proprietà della $\sim$ $V \underset{\sim}{\overset{\phi_{B_W}^{-1} \circ \phi_{B_V}}{\longrightarrow}} W$.

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = S(2;\mathbb{R}) \Rightarrow B_1 = \{1, x, x^2\}$ $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow V \text{ e } W$ isomorfi

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ $\quad f = \phi_{B_2}^{-1} \circ \phi_{B_1} \Rightarrow f(P) = \phi_{B_2}(\phi_{B_1}(P)) = \phi_{B_2}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 \end{bmatrix}$

TEOREMA DI INTEPOLAZIONE (5.18)

Presi V, W spazi vettoriali finitamente generati su $\mathbb{K}$, $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V e $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\} \subseteq W$, allora $\exists!\, f \in \text{Hom}(V, W)$: $f(\underline{v}_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.



$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\quad B_1 = \{1\} \xrightarrow{f} \{a\} \Rightarrow f$ è l'unica applicazione che fa questo.

$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot a = ax$

<u>Questo teorema mostra quanto siano rigide le applicazioni lineari</u>

DIM: ESISTENZA per ogni $\underline{v}$ esiste unica la decomposizione $\underline{v} = t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_n \underline{v}_n$. Devo definire la funzione:
$f(\underline{v}) = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$. f è detta <u>FUNZIONE INTERPOLANTE</u>. Studiamo f: $\begin{cases} f \text{ è ben definita perché la decomposizione esiste sempre} \\ f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$

LINEARITÀ scriviamo $v = \sum_{i=0}^{n} t_i \underline{v}_i$, $\underline{\tilde{v}} = \sum_{i=0}^{n} \hat{t}_i \underline{v}_i$. Calcoliamo $f(\alpha \underline{v} + \alpha \underline{\tilde{v}})$:

$f(\alpha(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) + \beta(\hat{t}_1 \underline{v}_1 + \dots + \hat{t}_n \underline{v}_n)) = f((\alpha t_1 + \beta \hat{t}_1) v_1 + \dots + (\alpha \hat{t}_1 + \beta \hat{t}_n) v_n) = (\alpha t_1 + \beta \hat{t}_1) w_1 + \dots + (\alpha t_n + \beta \hat{t}_n) w_n = \alpha(t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) + \beta(\hat{t}_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{\tilde{v}}) \Rightarrow f$ è lineare

UNICITÀ sia f' una seconda funzione lineare tale che $f'(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$. $f'(\underline{v}) = f'(t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_n \underline{v}_n) = t_1 f'(v_1) + \dots + t_n f'(v_n) = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n = f(v) \Rightarrow f' = f$
Ossia f è unica.

MATRICE RAPPRESENTATIVA (5.20)

Dati V, W finitamente generati su $\mathbb{K}$. Siano $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$.

$$\varnothing_{B_V B_W} : \text{Hom}(V, W) \longrightarrow \text{Mat}(m, n, \mathbb{K}) \qquad F_{|B_V B_W} = [\, f(\underline{v}_1)_{|B_W} | \dots | f(\underline{v}_n)_{|B_W} \,]$$
$$f \longmapsto F_{|B_V B_W}$$

$O_{VW|B_V B_W} = [\, O(\underline{v}_1)_{|B_W} | \dots | O(\underline{v}_n)_{|B_W} \,] = [\, O_{|B_W} | \dots | O_{|B_W} \,] =$
$= O_{mn}$

$Id_{V|B_V B_V} = [\, Id(\underline{v}_1)_{|B_V} | \dots | Id(v_n)_{|B_V} \,] = [\, v_{1|B_V} | \dots | v_{n|B_V} \,]$
$= I_n$

$V = W = K_2[x] \qquad B_V = \{1, x, x^2\}$, $B_W = \{x^2, x, 1\}$

$\frac{d}{dx}_{|B_V B_W} = [\, \frac{d}{dx}(0)_{|B_W} | \frac{d}{dx}(x)_{|B_W} | \frac{d}{dx}(x)_{|B_W} \,] =$
$= [\, 0_{|B_W} | 1_{|B_W} | 2x_{|B_W} \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$V = \text{Mat}(n, 1; \mathbb{K}) \qquad W = \text{Mat}(m, 1; \mathbb{K})$

$A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K}) \longrightarrow f_A \in \text{Hom}(V, W)$

HOMWORK:
$\varnothing_{B_V B_W}(f_A) = A$