FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a;b]$. Considero $[a;x]$ e f continua su $[a;x]$. Definisco:

$$F: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Tale funzione è detta FUNZIONE INTEGRALE.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE 1

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua. Allora detta $F: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f, si ha che:

1) F è derivabile in $\forall x \in (a;b)$ ed esistono la derivata destra/sinistra dell'estremo destro/sinistro
2) $F'(x) = f(x) \Rightarrow$ LA FUNZIONE INTEGRALE È PRIMITIVA DI f

DIM: $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)dt}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} f(c)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} f(c) \overset{f \text{ continua}}{=} f(x_0)$

Per media integrale: $\exists c \in [x_0; x_0+h]: f(c)(x_0+h-x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

$\Downarrow$

Siccome esiste finito, allora F è derivabile e poiché $F'(x_0) = f(x_0)$ F è primitiva di f.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE 2

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua. Sia G una primitiva di f su $[a;b]$. Allora:

1) $\int_a^b \underbrace{G'(t)dt}_{f(t)dt} = G(b) - G(a)$

DIM: Sia $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Sappiamo che F è continua e derivabile ed è primitiva di f. Costruiamo $H(x) = G(x) - F(x)$:

1) H è continua; 2) H è derivabile; 3) $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ Quindi H è costante $\Rightarrow H(x) = H(a) = H(b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(a) = G(a) - F(a) = G(a) \\ H(b) = G(b) - F(b) = \end{cases} \Rightarrow G(a) = G(b) - F(b) \Rightarrow F(b) = G(b) - G(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

ES: $\int_1^3 e^{-x^2} dx = F(3) - F(1)$

↳ continua su $[1;3] \Rightarrow \exists F(x) = \int_a^x e^{-t^2}dt \Rightarrow$ l'area con segno è finita } TH. FONDAMENTALE 1/2

$\int_1^2 x \ln(x+2)dx = F(2) - F(1) = 2\ln(4) \cancel{-2} \cancel{+2} - 2\ln(4) \cancel{+e} - \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2} - 1 + 2\ln(3) \cancel{-e} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\ln(3)$

↳ $f(t)$ continua in $[1;2] \Rightarrow$ VALE TH. FOND. CALC. $\Rightarrow \exists F(x) = \int_1^x f(t)dt = \dots = \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln(x+2) + c$

INTEGRARE FUNZIONI CON PUNTI DI DISCONTINUITÀ

<u>DISC. ELIMINABILE</u>: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione con una discontinuità eliminabile in x_0. Per calcolare l'integrale di f prolungo per continuità f definendo $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ f(x_0) & x = x_0 \end{cases}$ e calcolo $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$.

<u>DISC. SALTO</u>: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione con una discontinuità di salto in x_0. Per calcolare l'integrale di f calcolo

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \underbrace{\int_{x_0}^b f(x)dx}$

$f(x)$ cont. in $(x_0;b] \Rightarrow$ prolungo f in x_0 tale che: $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x_0 < x \leq b \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) & x = x_0 \end{cases}$

...

<u>DISC. 2ª SPECIE</u>: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione che ha in x_0 una discontinuità di 2ª specie.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \underbrace{\int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx}\right]$] INTEGRALE GENERALIZZATO

Se $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ è finito, non serve la ε (vale anche per l'altro lato)