# Lezione di Algebra e Geometria Lineare de 22 Ottobre

# Applicazioni lineari

## Teorema di rappresentazione (5.22)

Dati $V, W$ due s.v. finitamente generati su $\mathbb{K}$, $B_V, B_W$ le rispettive basi e $f \in Hom(V,W)$, avremo che:

1) $F_{B_V B_W}$ è l'unica matrice tale che $f(\underline{v})_{B_W} = F_{B_V B_W} \cdot f(\underline{v})_{B_V}$;
2) $\varnothing_{B_V B_W}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;
3) se $g \in Hom(V,V) \Rightarrow \varnothing_{B_V B_W}(f \circ g) = \varnothing_{B_V B_W}(f) \cdot \varnothing_{B_V B_V}(g)$

$P(x) = a + bx + cx^2$ $\quad \frac{d}{dx}(P(x)) = b + 2cx \Rightarrow$ posso usare il teorema di rappresentazione:

$L_{\left(\frac{d}{dx}(P(x))\right)_{B_W}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot P(x)_{B_W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow P(x) = 0x^2 + 2cx + b$

DIM: 1) $V \xrightarrow{f} W$. $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \Rightarrow \forall \underline{v} \in V \; \exists! \; \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{v}_i \Rightarrow f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)$ poiché $f$ è lineare per Hp.

$f(v)_{B_W} = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)\right)_{B_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)_{B_W}$ perché $\varnothing_{B_W}$ è lineare $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)_{B_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot F_{C(i)} = F_{B_V B_W} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$. La matrice colonna non è altro che la matrice delle componenti di $\underline{v}$.

Prendiamo $A$: $f(\underline{v})_{B_W} = A \cdot \underline{v}_{B_V}$. $F_{C(i)} = f(\underline{v}_i)_{B_W} = A \underline{v}_{i\,B_V} = A \cdot E_{i1} = A_{C(i)} \Rightarrow$ la tesi è dimostrata.

2) $\varnothing_{B_V B_W}(t_1 \cdot f_1 + t_2 \cdot f_2)_{C(i)} = (t_1 \cdot f_1 + t_2 f_2)(\underline{v}_i)_{B_W} = (t_1 f_1(\underline{v}_i) + t_2 f_2(\underline{v}_1))_{B_W} = (t_1 f_1(\underline{v}_i))_{B_W} + (t_2 f_2(\underline{v}_i))_{B_W} = t_1 f_1(\underline{v}_i)_{B_W} + t_2 f_2(\underline{v}_i)_{B_W} = t_1 \cdot \varnothing_{B_V B_W}(f_1)_{C(i)} + t_2 \cdot \varnothing_{B_V B_W}(f_2)_{C(i)}$

$\forall i < n$. Ciò prova che $\varnothing_{B_V B_W}$ è lineare.

Data una matrice $A$, essa rappresenta sempre un'unica applicazione. Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$, per il teorema di interpolazione, esiste un'unica $f$ tale che

$\begin{cases} f(\underline{v}_1) = a_{11} \underline{w}_1 + \dots + a_{n1} \underline{w}_m \\ \vdots \\ f(\underline{v}_n) = a_{m1} \underline{w}_1 + \dots + a_{nm} \underline{w}_n \end{cases}$ ciò vuol dire che esiste un'unica $f$ tale che $f(\underline{v}_i)_{B_W} = A_{C(1)} \Rightarrow \exists! f: \varnothing_{B_V B_W}(f) = A$

3) ...

## Conseguenze

1) $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\dim(Hom(V,W)) = n \times m$ (5.25)
2) $f \in Hom(V,W)$ è invertibile se $F_{B_V B_W}$ è invertibile. In tal caso, $\varnothing_{B_W B}(f^{-1}) = (F_{B_V B_W})^{-1}$ (5.26)
3) Il nucleo dell'applicazione è isomorfo attraverso mappa delle componenti al nucleo della matrice rappresentativa
4) Lo spazio immagine di $f$ è isomorfo attraverso mappa delle componenti a $C(F_{B_V B_W})$

ESEMPI

$V = \mathbb{R}[x]_1 \qquad W = \mathcal{S}(2;\mathbb{R}) \qquad f: V \to W \qquad f(P(x)) = \begin{bmatrix} P(1) & P(0) \\ P(0) & P(-1) \end{bmatrix}$

$P(x) = a + bx \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Studia $f$ usando il teorema di rapp.: $B_V = \{1, x\}$, $B_W = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. $F_{|B_V B_W} = \left[ f(1)_{|B_W} \mid f(x)_{|B_W} \right] = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{|B_W} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{|B_W} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]$

Riduciamo a scala $F_{|B_V B_W} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(C(F)) = 2 = \dim(I(f)) \Rightarrow B_{C_F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow B_{I_f} = \left\{ 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 2 - r(F) = 2 - 2 = 0 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) \Rightarrow$ $f$ è iniettiva, $f$ non è suriettiva

## RANGO DI UN'APPLICAZIONE

Il $r(f)$ è pari a $\dim(\mathrm{Im}(f))$. Se $V, W$ sono finiti, per isomorfismo $r(f) = r(C(F)) = r(F)$

## NULLITÀ DI UN'APPLICAZIONE

La $K(f)$ è pari a $\dim(\mathrm{Ker}(f))$. Se $V, W$ sono finiti per isomorfismo $K(f) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) = K(F)$.

## TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO (5.30)

Data $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $V$ è finito $\Rightarrow \dim(V) = r(f) + K(f)$

DIM. Supponiamo tutti e due gli spazi finiti, allora $F_{|B_V B_W} \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ con $n = \dim(V)$, $m(\dim(W))$.

$K(f) = K(F) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - r(F) = \dim(V) - r(F) = \dim(V) - r(f) \Rightarrow \dim(V) = r(f) + K(f)$.

OSS. Questo teorema è la riformulazione di Rouché-Capelli in "lingua" delle applicazioni

## COROLLARIO (5.31)

1) $f$ è suriettiva se e solo se $r(f) = \dim(W)$

2) $f$ è iniettiva se e solo se $r(f) = \dim(V)$

3) $f$ è un isomorfismo se e solo se $r = \dim(V) = \dim(W)$

## MATRICE CAMBIAMENTO DI BASE (5.32)

Prese due basi dello stesso $V$ $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i\}$, $B' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i\}$. La matrice cambiamento di base è: $M_{BB'} = \left[ \underline{v}_{1|B'} \mid \dots \mid \underline{v}_{i|B'} \right]$

ESEMPIO: $V = \mathbb{K}[x]_1$, $P(x) = a_0 + a_1 x$ $\quad B = \{1, x\}$, $B' = \{1+x, 1-x\} \Rightarrow M_{BB'} = \left[ 1_{|B'} \mid x_{|B'} \right] = \left[ \left(\frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x)\right)_{|B'} \mid \left(\frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)\right)_{|B'} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

OSS.: $M_{B'B} = M_{BB'}^{-1}$ (5.35)

## REGOLE DEL CAMBIO BASE (5.33)

1) $\underline{v}_{|B_V'} = M_{B_V B_V'} \cdot \underline{v}_{|B_V}$

2) $F_{|B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} \cdot F_{|B_V B_W} \cdot M_{B_V' B_V}$

ESEMPIO: $V = K[x]_1$, $B_V = \{1, x\}$ $B_V' = \{1+x, 1-x\}$ $M_{BB'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $M_{B'B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$P(x) = a_0 + a_1 x \Rightarrow P(x)_{|B_V} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$, $P(x)_{|B_V'} = M_{BB_V'} \cdot P(x)_{|B_V} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0 + a_1}{2} \\ \frac{a_0 - a_1}{2} \end{bmatrix}$

$f: \frac{d}{dx}$ $f: V \to W$ $V = W = K[x]_1$. $B_W = \{1, x\}$ $B_W' = \{1+x, 1-x\}$ $F_{|B_V B_W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$F_{|B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} \cdot F_{|B_V B_W} \cdot M_{|B_V' B_V} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

DIM: 1) rappresentiamo $Id_V$ con il teorema di rappresentazione rispetto a $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B_V' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$.

$\emptyset_{B_V B_V'} = [\, Id(\underline{v}_1)_{|B_V'} \mid \dots \mid Id(\underline{v}_n)_{|B_V'} \,] = [\, \underline{v}_{1|B_V'} \mid \dots \mid \underline{v}_{n|B_V'} \,] = M_{B_V B_V'}$. Usando il teorema: $\underline{v}_{|B_V'} = (Id(\underline{v}))_{|B_V'} = \underline{v}_{|B_V'} = (\emptyset_{B_V B_V'}(Id(\underline{v})))\, \underline{v}_{|B_V} =$

$= M_{B_V B_V'} \cdot \underline{v}_{|B_V} \Rightarrow$ dimostrato la Th.

# ESERCITAZIONE DI ALGEBRA DEL 23 OTTOBRE

**Es 1** Stabilire per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $(D=C)$ $f$ è iniettivo, dove $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (x+Ky, (K-1)x+2y)$

Usiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$: $f(e_1) = (1, K-1)$; $f(e_2) = (K,2) \Rightarrow A = [f(e_1)_B \mid f(e_2)_B] = \begin{bmatrix} 1 & K \\ K-1 & 2 \end{bmatrix}$.

Noi sappiamo che $f$ è iniettiva se $Ker(f) = \{0\}$. Sappiamo che $\dim(I(f)) = r(A) \Rightarrow \dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(I(f)) = 2 - r(A)$ $\boxed{\begin{cases} 0 \Rightarrow \text{iniettiva} \\ 1 \Rightarrow \text{non iniettiva per } K=2 \vee K=0 \end{cases}}$

$\hookrightarrow |A| = 2 - K(K-1) = 2 - K^2 - K \Rightarrow$ per $K=2 \vee K=0$ $\quad r(A) = 0$

**Es 2** Sia l'endorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito come $f(e_1) = te_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + te_2 + 2e_3$, $f(e_3) = (t+1)e_1 + (t+3)e_2 + 4e_3$

1) Determinare $t \in \mathbb{R}$ per cui $f$ è un automorfismo (endomorfismo biunivoco)
2) Posto $t=-2$, determina basi e dimensioni di $I(f)$
3) Posto $t=3$, " " " " $Ker(f)$

Scriviamo la matrice rappresentativa: $A = \begin{bmatrix} t & 2 & t+1 \\ 2 & t & t+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Affinché $f$ sia biunivoca, $A$ deve essere invertibile, quindi $|A| \neq 0$:

$|A| = t(4t-2t-6) - 2(8-t-3) + (t+1)(4-t) =$

$= t^2 - t - 6 \Rightarrow |A| = 0$ per $t=3 \vee t=-2$

Quindi $t$ è un automorfismo per $t \neq 3 \wedge t = -2$.

Per $t=-2$, il rango di $A$ è 2, quindi $\dim(I(f)) = 2$. Per trovare le basi di $I(f)$ riduciamo a scala $A$ e scegliamo le colonne con pivot non nullo.

La base di $I(f)$ sarà $B_I = \{(-2,2,1), (2,-2,2)\}$

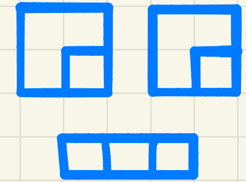
Per $t=3$, il rango di $A$ è 2. La $\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(I(f)) = 1$. Troviamo la base risolvendo $A\underline{x} = \underline{0}$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] = \dots = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x} \begin{bmatrix} 0 \\ -2K \\ K \end{bmatrix} \Rightarrow B_{Ker} = \{(0,-2,1)\}$$

**Es 3** Sia $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita come $f(P(x)) = P''(x) + KP'(x)$ con $K \in \mathbb{R}$.

1) Scrivere la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica
2) Calcolare basi e dimensioni di $I(f)$ al variare di $K$.
3) Per quali $K$ $R(x) = 5x+1$ appartiene a $I(f)$.

$E=\{1,x,x^2\}$. $P(x)=a+bx+cx^2$, $P'(x)=b+2cx$, $P''(x)=2c$. La matrice rappresentativa sarà:



$$A=[f(1)_{|E}\,|\,f(x)_{|E}\,|\,f(x^2)_{|E}]=\boxed{\begin{bmatrix}0&k&2\\0&0&2k\\0&0&0\end{bmatrix}}$$

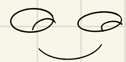
La dimensione di $I(f)$ sarà 2 per $k\neq 0$ e 1 per $k=0$. La base sarà $B_I=\begin{cases}\{(k,0,0),(2,2k,0)\} & \text{per } k\neq 0\\ \{(2,0,0)\} & \text{per } k=0\end{cases}$

$R(x)$ avrà componenti $[1,5,0]^T$. $R$ è immagine se $A\underline{x}=R_{|E}$ è risolvibile.

$$[A|R_{|E}]=\left[\begin{array}{ccc|c}0&k&2&1\\0&0&2k&5\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow \exists\ \infty^1 \text{ soluzioni} \Rightarrow R(x)\in I(f) \text{ per } k\neq 0$$

$$[A|R_{|E}]_0=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \nexists \text{ soluzione} \Rightarrow R(x)\notin I(f) \text{ per } k=0$$

Es 4 Sia $f_{|k}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito come $f_k(x)=A_k x$ con $k\in\mathbb{R}$ e $A_k=\begin{bmatrix}1&-k&1\\1&1&0\\0&2k&-1\end{bmatrix}$.



1) Determinare base e dimensione di $Ker(f_k)$

2) Verificare che per $k=1$ $(0,1,0)\in I(f_k)$

3) Verificare se per $k=0$ $f_k$ è un automorfismo e ricavare l'applicazione inversa.

$\dim(Ker(f_k))=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(I(f_k))=3-r(A_k)=\begin{cases}3-2=1 & \text{per } k=1\\ 3-3=0 & \text{per } k\neq 1\end{cases}$. Per $k\neq 1$, la base di $Ker(f_k)$ sarà $\{\underline{0}\}$. Per $k=1$, invece, risolviamo $A_1\underline{x}=\underline{0}$

$$[A_1|\underline{0}]=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\1&1&0&0\\0&2k&-1&0\end{bmatrix}=\dots=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \underline{X}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}t\\+\frac{1}{2}t\\t\end{bmatrix}\Rightarrow B_{K_1}=\{(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1)\}$$

Per $k=1$, $A_1\cdot\underline{x}=[0,1,0]^T$ deve avere soluzioni $\Rightarrow \dots \Rightarrow r(A)\neq r(A|B)\Rightarrow \nexists$ soluzioni $\Rightarrow (0,1,0)\notin I(f)$

Per $k=0$, $|A_0|\neq 0 \Rightarrow A_0$ è invertibile $\Rightarrow f_1$ è un un automorfismo. Home work: Calcola l'inversa di $f_1$.

Es 5 Definiamo una PROIEZIONE: Sia $V$ uno s.v. e $U, W$ due s.s.v tali che $V = U \oplus W$. Si dice proiezione di $\underline{v} \in V$ su $U$ parallela a $W$ il vettore $\underline{u}$ tale che $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$. $P_{U,W}: \begin{matrix} V \to U \\ \underline{v} \mapsto \underline{u} \end{matrix}$

L'applicazione $P_{U,W}$ è lineare?

Dati $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ e $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$, affinché $P_{U,W}$ sia lineare, $P_{U,W}(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1 P_{U,W}(\underline{v}_1) + t_2 P_{U,W}(\underline{v}_2) \Rightarrow$

$P_{U,W}(t_1\underline{u}_1 + t_1\underline{w}_1 + t_2\underline{u}_2 + t_2\underline{w}_2) = P_{U,W}(t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + t_1\underline{w}_1 + t_2\underline{w}_2) = t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 = t_1 P_{U,W}(\underline{v}_1) + t_2 P_{U,W}(\underline{v}_2) \Rightarrow P_{U,W}$ è lineare.

Es 6 In $\mathbb{R}^3$ si consideri la proiezione $P_{U,W}$ rappresentata da $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) Trova base e dimensione di $U$

2) Dati $\underline{v}_1 = (1,2,3)$ e $\underline{v}_2 = (K, K+1, 3K)$, calcolane le proiezioni e trova $K$ per cui esse sono basi di $U$

3) Trova base e dimensione di $W$

4) Verifica che $U+W$ è somma diretta

Il rango di $A$ è 2, quindi la dimensione di $U$ è 2. Una base di $U$ è: $B_U = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

I vettori $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ saranno: $\underline{u}_1 = P_{U,W}(\underline{v}_1) = A\,\underline{v}_1^T = (-2,-2,0)$; $\underline{u}_2 = P_{U,W}(\underline{v}_2) = A\,\underline{v}_2^T = (-2K, K+1, 0)$. Affinché $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ siano basi, $[\underline{u}_1^T | \underline{u}_2^T]$ deve avere rango massimo, e lo ha per $K \neq 1 \Rightarrow \underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono basi di $U$ per $K \neq 1$

Ricaviamoci $W$: $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} = \underline{v} - A\underline{v} = \underline{v}(I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$. Quindi il generico $\underline{w}$ sarà $\begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e quindi $\dim(W) = 1$, $B_W = \{(1,0,1)\}$

Affinché $U+W$ sia somma diretta, $\dim(U \cap W) = 0$. Lo spazio $U + W = \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,0), (1,0,1))$. I tre vettori sono indipendenti e quindi $\dim(U+W) = 3$.

Usando Grassman, avremo che: $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow U + W$ è somma diretta.

**Es 7** Sia $A \in Mat_{\mathbb{K}}(n;n)$ tale che $A^2 = O_n$ e sia $f_A \in End(Mat_{\mathbb{K}}(n;n))$ associata ad $A$

1) Dimostra che $I(f_A) \subseteq Ker(f_A)$

2) Calcolare il massimo rango possibile di $A$.

Sia $X \in Mat(n;1)$ e $Y = AX \iff Y \in I(f_A) \Rightarrow f_A(Y) = f_A(f_A(X)) = A^2 X = O_n X = O_{n1} \Rightarrow Y \in Ker(f_A)$. Siccome $Y$ è l'insieme delle immagini di $f_A$, $I(f_A) \subseteq Ker(f_A)$.

$r(A) = dim(I(f_A)) =$

**Es 8** Dato $h \in \mathbb{R}$ consideriamo $v_h' = (h+1)e_1 + he_3$; $v_h'' = -e_1 + 2he_2 + (h+1)e_3$; $v_h''' = he_2 + (h+1)e_3$; $w_h' = e_1 + he_2$; $w_h'' = e_1 + e_2 + he_3$; $w_h''' = (h-1)e_1 + he_3$

1) Determinare i valori di $h$ per quali è univocamente determinato un'applicazione $h_h$ tale che $h_h(v_h') = w_h'$; $h_h(v'') = w_h''$; $h_h(v_h''')) = w_h'''$

Per interpolazione, se $B_{v_h} = \{v_h', v_h'', v_h'''\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, allora è garantita l'esistenza e l'unicità di $h_h$. Studiamo le tre $v$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h+1 & 2h & h \\ h & h+1 & h+1 \end{bmatrix} = [v_{h|S}' \mid v_{h|S}'' \mid v_{h|S}'''].$$

Se il determinante della matrice è diverso da 0, allora i 3 vettori sono basi poiché il rango è massimo: $|M| = 2h+1 \Rightarrow$ per $h \neq \frac{1}{2}$ l'applicazione $h_h$ esiste ed è unica.

QUITTATO...

# Spazi Affini (7)

Definiamo $\mathcal{A}$ su cui è possibile studiare la geometria come quelli per cui è possibile associare a ogni due elementi in $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ un vettore $\overrightarrow{PQ}$ che inizia in P e finisce in Q.
Richiediamo che valgano alcune proprietà:

## Assiomi di Weyl (7.1)

Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto, V uno spazio vettoriale. Definiamo una funzione $\Psi: \begin{array}{l} \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to V \\ (P,Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \end{array}$. Se:

1) Per ogni punto $P \in \mathcal{A}$ fissato $\Psi_P: \begin{array}{l} \{P\}\times\mathcal{A} \to V \\ (P,Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \end{array}$ è biunivoca

2) Vale la regola del parallelogramma (o di Charles): $\Psi(P,Q)+\Psi(Q,R)=\Psi(P,R) \quad \forall P,Q,R \in \mathcal{A}$

Allora $\mathbb{A}(\mathcal{A}, V, \Psi)$ è uno spazio affine

## Esempio Fondamentale

Preso $\mathcal{A}=\mathbb{K}^n$, $V=(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$, $\Psi: \begin{array}{l} \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to V \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto (y_1-x_1,\dots,y_n-x_n) \end{array}$. La struttura $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, V, \Psi)$ è lo spazio affine naturale a $\mathbb{K}^n$.

Lo stesso procedimento si può applicare su ogni spazio vettoriale V: $V(\mathcal{V}, \mathbb{K}, +, \cdot) \to \mathbb{A}_V(\mathcal{V}, V, \Psi_V)$ con $\Psi_V: \begin{array}{l} \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to V \\ (v_1, v_2) \mapsto v_2 - v_1 \end{array}$

## Definizioni (7.2)

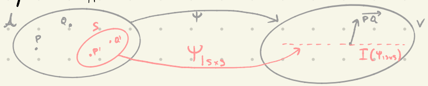
1) $P \in \mathcal{A}$ sono detti punti;
2) $(P,Q) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ è detto segmento orientato;
3) Ad ogni segmento orientato è associato un vettore detto vettore geometrico;
4) $\mathcal{A}$ è il sostegno dello spazio, V è la giacitura di $\mathbb{A}$;
5) $\dim(\mathbb{A}) = \dim(V)$;
6) Se $\dim(\mathbb{A})=1$, lo spazio affine si dice retta affine;
   " $\dim(\mathbb{A})=2$, " " " " " piano affine;

## Proprietà (7.4)

1) $\overrightarrow{PP} = 0_V$ 2) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$

## Sottospazio Affine

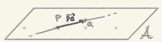
Dato uno spazio affine $\mathbb{A} = (A, V, \Psi)$, $S \subseteq A$ si dice sottospazio affine se $(S, Im(\Psi_{|S\times S}), \Psi_{|S\times S})$ è uno spazio affine




$I(\Psi_{|S\times S})$ è un sottospazio vettoriale di V detto giacitura di S. Se la dim(S) = dim($\mathbb{A}$) - 1, S è detto iperpiano di $\mathbb{A}$

## Caratterizzazione di uno Spazio Affine (7.12)

Sia $P \in S$, $U = \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid Q \in S\}$. Allora S è un sottospazio affine se e solo se U è un sottospazio vettoriale di V.



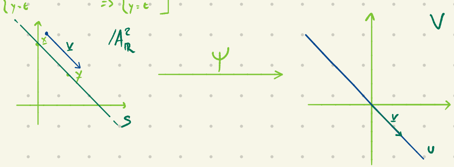

Esempio: 1) $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$: $\mathbb{K}^n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}^n\}$, $V = (\mathbb{K}^n; \mathbb{K}, +, \cdot)$

Sia $S \subseteq A$ l'insieme dei punti $\underline{x} \in A$ soluzioni di $Ax = B$. $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S$ se e solo se $Ax_1 = B \vee Ax_2 = B$. Se faccio $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = B - B = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in Ker(A)$. Allora $\overrightarrow{x_1x_2}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad S.

Poiché l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo sono uno spazio vettoriale, allora $U = \{\overrightarrow{x_1x_2} \mid x_1, x_2 \in S\}$ è un sottospazio di V. $\Rightarrow$ S è un sottospazio affine con giacitura U

OSS.: Tutti i sottospazi di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sono dello stesso tipo di quello dell'esempio 1

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\quad S: \{x + y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$ $\quad U: \{x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ $\Big] \rightarrow$ dim(S) = dim(U) = 1 $\Rightarrow$ sia retta affine che è anche iperpiano




## Sistemi di Riferimento (7.5)

Sia $\mathbb{A} = (A, V, \Psi)$ con $O \in A$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. $\mathcal{B}_0 = \{O, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è detto sistema di riferimento dove O è l'origine del sistema. L'associazione tra un vettore e le sue coordinate è gestita da $\varnothing: A \rightarrow Mat(n, 1, \mathbb{K})$, $P \mapsto \varnothing_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})$.

$P_{|\mathcal{B}_0} = \varnothing_{\mathcal{B}_0}(P) = \varnothing_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}_{\mathcal{B}}$ si dicono coordinate.