LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 4 OTTOBRE

LEZIONE: FUNZIONI

ESERCITAZ.:

LEZIONE

FUNZIONI:

DEFINIZIONE:

una funzione è una terna di elementi A, B, f dove:

- A, B sono insiemi
- f è una relazione che lega ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B → $f: \underset{\text{dominio}}{A} \to B \rightsquigarrow$ codominio

es.: $y=\sqrt{x}$ con $A=\mathbb{R}=B$ NON è una funzione ($\exists x \in A$: f non è valida)

$y=\sqrt{x}$ con $A=\mathbb{R}^+$, $B=\mathbb{R}$ è una funzione ($\nexists x \in A$: f non è valida)

$f(a)$: è l'immagine di a

$Im(f)$: $Im(f)=\{b \in B : \exists a \in A : f(a)=b\}$

$\Gamma(f)$: è il grafico di f: $\Gamma(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x),\ x\in A\}$. N.B.: $\Gamma(f)\neq Im(f)$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE:

- limitata: $Im(f)$ è limitato, $Im \subseteq \mathbb{R}$, $\exists M>0, M\in\mathbb{R} : \forall x \in A\ -M \leq f(x) \leq M$
- sup/inf limitata: $\exists \sup(Im(f)) / \exists \inf(Im(f))$
- crescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $\underbrace{f(x_1) < f(x_2)}_{\text{strett. crescente}}$
- decrescente in $I \subseteq A$: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ o $\underbrace{f(x_1) > f(x_2)}_{\text{strett. decrescente}}$
- monotona in I: se è crescente/decrescente (strettamente) in tutto I
- pari: se $\forall x\in A\ f(x)=f(-x)$ con $x, -x \in A$
- dispari: se $\forall x\in A\ f(x)=-f(-x)$ con $x, -x \in A$

DOMINIO NATURALE: Si dice dominio naturale il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione è definita

FUNZIONE SURIETTIVA: Data $f: A \to B$ si dice che f è suriettiva se $Im(f)=B$

OSS: $\forall \bar{y} \in B$ costruisco $y=\bar{y}$ f è suriettiva se la retta $y=\bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in almeno un punto

FUNZIONE INIETTIVA: Data $f: A \to B$ si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ / $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

OSS.: $\forall y \in B$ costruisco $y = \bar{y}$. f è iniettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in al più un punto

FUNZIONE BIUNIVOCA: Data $f: A \to B$ si dice che f è biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCITAZIONE

NUMERI COMPLESSI

① $i(1+i) = i + i \cdot i = i - 1$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos\theta \\ y = \sqrt{2} \sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \to \theta = \frac{3}{4}\pi + 2K\pi \ (K \in \mathbb{Z})$

$\to i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$

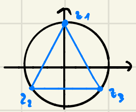
$e^{i\pi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\,3/4\pi}$

soluzioni o reali o complessi coniugati

② $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = 1 - 2 = -1$ $\quad z_{1,2} = +1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

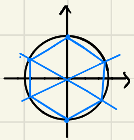
③ $z^2 + 3iz + 1 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 9i^2 - 4 = -13$ $\quad z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-13}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{13}i}{2}$

④ $z^3 = -i$ $\quad z_1 = i$ $\quad z_2 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) = \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$ $\quad z_3 = \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi$



⑤ $z^6 = -8$ $\quad z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad z_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \sin\frac{5}{6}\pi\right)$ $\quad z_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i \sin\frac{7}{6}\pi\right)$ $\quad z_5 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi\right)$

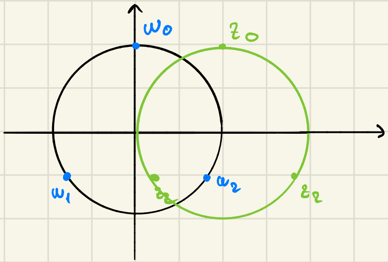
$8(\cos\pi + i\sin\pi)$ $\quad z_6 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i \sin\frac{11}{6}\pi\right)$



⑥ $(z-2)^2 + i = 0$ $\quad$ sostituiamo $z - 2$ con $w \Rightarrow w^3 = -1$ come in ④ $\Rightarrow$ $z_1 = w_1 + 2 = 2 + 1$

$z_2 = w_2 + 2 = [\ldots] = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} + 2$

$z_3 = w_3 + 2 = [\ldots] = \frac{+\sqrt{3} + i}{2} + 2$



non ha senso con radici complesse: è 1

7) $z^2 + (1+i)z + i = 0$ $\quad \Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i$ $\quad z_{1,2} = \dfrac{-1-i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1\cancel{-i}-1\cancel{+i}}{2} = -1 \\ \dfrac{\cancel{-1}-i\cancel{+1}-i}{2} = -i \end{cases}$

$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -1+i$

$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = +1-i$

8) $\underbrace{i z^2 = \bar{z}}$ → non è algebrica

poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$ $\quad \rho^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = \rho e^{-i\theta}$

$\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 1 \vee \rho = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$

con $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (k = 0, 1, 2)$

Sol: $z_0 = 0 \quad \forall\theta \quad (\rho = 0)$ (3 soluzioni coincidenti)

$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

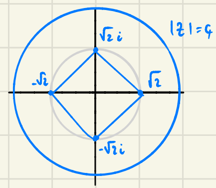
$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z_3 = e^{i\frac{7}{6}\pi} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

9) $(z^4 - 4)(|z| - 4) = 0$

$z^4 - 4 = 0 \qquad z^4 = 4$

$|z| - 4 = 0 \qquad |z| = 4$



10) $x^4 + 1 = 0$ $\quad$ Homework: Scomporre in $\mathbb{R}$