


GEOMETRIA ALGEBRA LINEARE 24 settembre

---

---

---

---



A ogni riga di  $[A|B]$  corrisponde un'equazione. Verifichiamo che ogni operazione non modifichi le soluzioni:

1)  $[A|B]_{RC(i)} \rightarrow [A|B]_{RC(j)} \Rightarrow$  non modifica le soluzioni (scambia l'ordine)

2)  $[A|B]_{RC(i)} \rightarrow t \cdot [A|B]_{RC(i)} \Rightarrow$  con  $t \neq 0$  non viene modificato nulla  
 $t(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = t \cdot b_i$

3)  $[A|B]_{RC(i)} \rightarrow [A|B]_{RC(i)} + t \cdot [A|B]_{RC(j)} \Rightarrow$  dimostriamo che le due soluzioni sono uguali

①  $\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i = 0 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j = 0 \end{cases}$  ②  $\begin{cases} (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i) + t(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j) = 0 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j = 0 \end{cases}$

- Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  è la soluzione di ①. Allora  $\underbrace{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i)}_{=0} + t \underbrace{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j)}_{=0} = 0$

- Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  è la soluzione di ②. Allora  $\underbrace{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - b_i)}_{\substack{\downarrow \\ \text{uguale a } 0 \Rightarrow \text{primo} \\ \text{risultato}}}} + t \underbrace{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j)}_{\substack{\downarrow \\ \text{uguale a } 0 \Rightarrow \text{secondo} \\ \text{risultato}}}} = 0$

$\Downarrow$   
 $(x_1, \dots, x_n)$  risolve entrambi i sistemi



QUANDO STUDIABILI  
 TI PARAI UNA RISATA

ESERCITAZIONE ALGEBRA LINEARE


25 settembre

---

---

---

---



# PRODOTTO TRA MATRICI

①  $A \in \text{Mat}(2, 3; \mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B \times A$  è calcolabile? No, il numero di colonne della prima <sup>(3)</sup> è diverso dal numero di righe della prima <sup>(2)</sup>.

$B^T \times A^T$  è calcolabile? Sì, il numero di colonne della prima <sup>(3)</sup> è uguale a quello di righe della seconda <sup>(3)</sup>.

$A \times B$  è calcolabile?

Sì;  $n_A = m_B$

Quanto vale  $AB$ ?

$AB \in \text{Mat}(2, 3; \mathbb{R})$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+0-4 & 2+0+0 & 0+0+0 \\ 0-1-2 & -2+1+0 & 0-1+0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

# RIDUZIONE A SCALA

② Riduci la matrice  $A$  a scala e calcolare il rango.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = \underline{2}$$

$\hookrightarrow$  a SCALA

③ Studia il rango di  $A_K$  al variare di  $K$  in  $\mathbb{R}$ .

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & K & 2 \\ 1 & K+1 & K \\ 1 & K+1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & K & 2 \\ 0 & 1 & K-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & K & 2 \\ 0 & 1 & K-2 \\ 0 & 0 & 2-K \end{bmatrix} \rightarrow \text{Il numero di pivot dipende da } K:$$

$$\underline{K=2} \rightarrow \# \text{ pivot} = 2 \rightarrow \underline{r(A) = 2}$$

$$\underline{K \neq 2} \rightarrow \# \text{ pivot} = 3 \rightarrow \underline{r(A) = 3}$$

# SISTEMI LINEARI

④ Risolvi  $\begin{cases} 2x + 5y + z = 4 \\ -x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad [A|B] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  concatenato

$[A|B] \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{bmatrix}$

Il sistema ha soluzioni se  $\text{r}(A) = \text{r}(A|B)$ . Poiché è anche uguale a  $n$  di  $A$ , avrà 1 soluzione ( $\infty^0$ )

$\begin{cases} 2x + 5y + z = 4 \\ y + 3z = 6 \\ -11z = -22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

⑤ Risolvi  $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2x - y + z = -1 \\ -5x - 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$[A|B] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -12 & 12 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{r}(A) = 2; \text{r}(A|B) = 2$ . Il rango è, però, inferiore al numero di colonne, quindi avremo  $\infty = \infty$  soluzioni

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

⑥ ... 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -x + y + 4z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad [A|B] \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$\pi(A) = 2$ ;  $\pi(A|B) = 3 \Rightarrow$  poiché  $\pi(A) \neq \pi(A|B)$ , il sistema non ha soluzioni

⑦ Dimostrare che esistono infiniti polinomi di terzo grado  $P(x) \in \mathbb{R}(x)$  tali che 2 è una radice e  $P(1) = P(-1) = 3$ . Cosa succede se imponiamo che  $P(x)$  sia pari?

1)  $P(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{una radice}}(ax^2 + bx + c)$ ,  $P(1) = -a - b - c = 3$ ,  $P(-1) = -3a + 3b - 3c = 3$

$$\begin{cases} -a - b - c = 3 \\ -3a + 3b - 3c = 3 \end{cases} \quad [A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$\pi(A) = 2$ ;  $\pi(A|B) = 2 \Rightarrow \infty^{3-2} = \infty$

$\Downarrow$   
esistono infinite soluzioni e quindi pol.

$\hookrightarrow P(x) = (x-2)((-2-c)x^2 - x + c)$

2) Poiché  $P(2) = 0$ , affinché sia pari  $P(-2) = 0 \Rightarrow P(-2) = -4(-8 - 4c + 2 + c) = 0$

$-4(-3c - 6) = 0$

$-3c - 6 = 0$

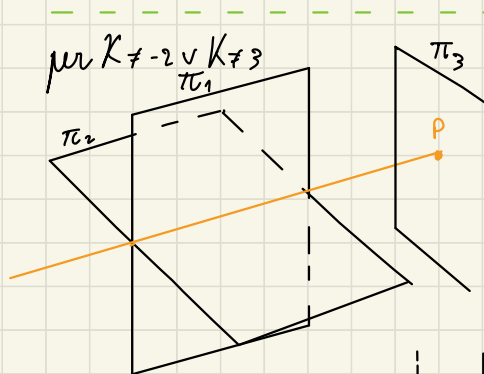
$c = -2 \Rightarrow P_2(x) = (x-2)(-x-2)$

La parità riduce il polinomio a grado 2, quindi  $P(x)$  non può essere pari (dev'essere di 3° grado per Hp)

②

Descrivere al variare di  $K \in \mathbb{R}$  il sistema e interpretarlo geometricamente.

$$\begin{cases} x + y + Kz = 2 \\ Ky + 6z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & K & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & K & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1-K & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & K & 2 \\ 0 & -1 & 1-K & 1 \\ 0 & 0 & -K+3 & 3-K \end{bmatrix}$$



per  $K \neq -2 \vee K \neq 3$

il rango dipende da  $K$ :  
 1)  $6 - K(K-1) = 0 \quad 6 - K^2 + K = 0 \quad K^2 - K - 6 = 0 \quad K = \frac{1 \pm 5}{2} \quad K_1 = 3 \quad K_2 = -2$   
 2)  $3 - K = 0 \quad K = 3$

per  $K = 3$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2 < 3 \Rightarrow \infty^1$  soluzioni ( $z = t; y = 1-2t; x = 1-t$ )

per  $K = -2$

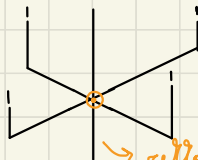
$\rho(A) = 2; \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$  sistema impossibile

per  $K \neq -2 \wedge K \neq 3$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 3 = 3 \Rightarrow 1$  soluzione  

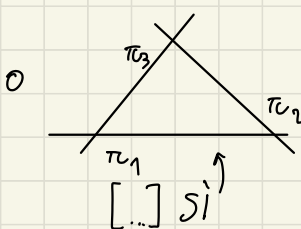
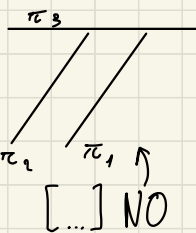
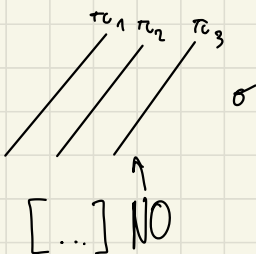
$$\begin{cases} z = \frac{1}{K+2} \\ y = \frac{3}{K+2} \\ x = \frac{K+1}{K+2} \end{cases}$$

per  $K = 3$



$\rightarrow$ retta o supporto del fascio

per  $K = 2$



per decidere studi le varie coppie di equazioni del sistema

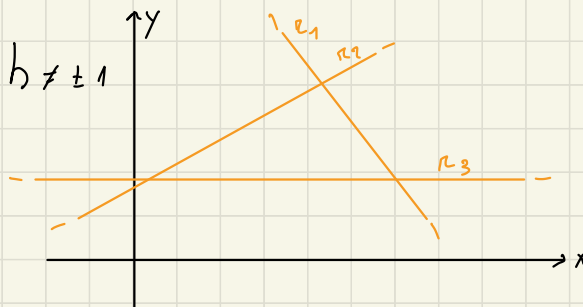
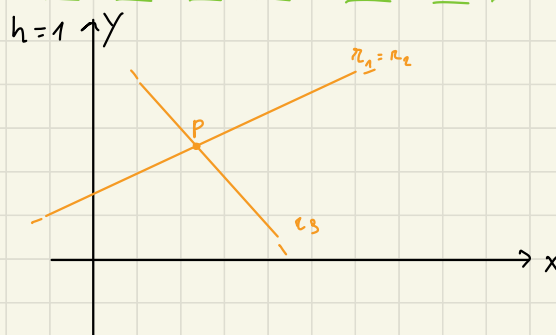
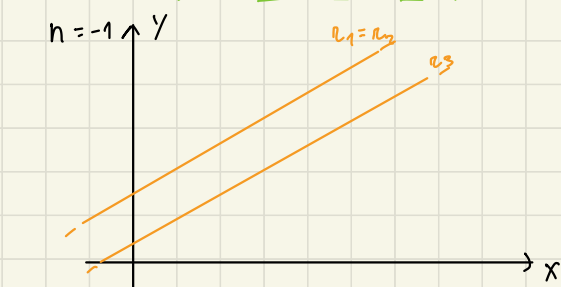


③ Uguale ad ②.

$$\begin{cases} x+hy=1 \\ hx+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases} \quad [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & h+2 & 2 \\ h & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & h+2 & 2 \\ 0 & 0 & h-1 \end{bmatrix}$$

Il rango varia in base ad  $h$

$\rightarrow$  per  $h=1$   $\pi(A)=2$ ,  $\pi(A|B)=2 \Rightarrow$  esiste una soluzione  
 per  $h=-1$   $\pi(A)=1$ ,  $\pi(A|B)=2 \Rightarrow$  sistema impossibile  
 per  $h \neq \pm 1$   $\pi(A)=2$ ,  $\pi(A|B)=3 \Rightarrow$



10

Sia  $A \in \text{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ . Definiamo  $\mathcal{C} = \{ B \in \text{Mat}(2, 2; \mathbb{R}) \mid AB = BA \}$ .

Dimostra che:

1)  $O_2 \in \mathcal{C}$

2)  $I_2 \in \mathcal{C}$

3)  $B_1, B_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow B_1 + B_2 \in \mathcal{C}$

4)  $B \in \mathcal{C}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda B \in \mathcal{C}$

5)  $B_1, B_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow B_1 B_2 \in \mathcal{C}$

1)  $A O_2 = O_2, O_2 A = O_2 \Rightarrow O_2 \in \mathcal{C}$

2)  $A I_2 = A, I_2 A = A \Rightarrow I_2 \in \mathcal{C}$

3)  $A(B_1 + B_2) = \underset{\text{distrib.}}{A B_1 + A B_2} = B_1 A + B_2 A = \underset{\text{distrib.}}{A(B_1 + B_2)} \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathcal{C}$

4)  $A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda BA = (\lambda B)A \Rightarrow \lambda B \in \mathcal{C}$

5)  $A(B_1 B_2) = (A B_1) B_2 = (B_1 A) B_2 = B_1 (A B_2) = B_1 (B_2 A) = (B_1 B_2) A \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathcal{C}$

11  
Hauswork

Risolvere ed interpretare graficamente il sistema al variare di  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + (h-1)y = 1 \\ hx + 2y = h \end{cases}$$