Integrale e simmetrie

Sia $f(x)$ dispari e $[-a;b]$ non simmetrico, allora: $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

" " pari " " " " " : $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx$

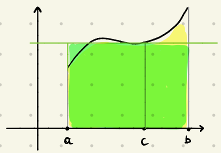
Teorema del valor medio integrale

Sia $f(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ continua. Esiste allora $c \in [a;b]$ tale che: $\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$

Per Weierstrass esistono i massimi assoluti $\Rightarrow f(x)$ è limitata $\Rightarrow \int_{a}^{b} m\,dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} M\,dx$

$\Rightarrow m \le \frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a} \le M \Rightarrow$ per i valori intermedi, $\exists$ almeno un $c \in [a;b]$ tale che:

$f(c) = \underbrace{\frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a}}_{\text{VALOR MEDIO INTEGRALE}}$



Integrale Indefinito

Data $f: A \subseteq I \to \mathbb{R}$, definiamo $F: I \to \mathbb{R}$ detta primitiva su I se:

1) Se F è derivabile in I
2) Se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Proprietà primitiva

Se prendo una funzione continua in intervallo, allora f ammette primitiva su I.

La primitiva di una funzione f non è unica.

Se f ammette una primitiva F su I allora:

1) ogni funzione della forma $F+c$ è primitiva
2) ogni altra primitiva G di f sarà della forma $F+c$

DIM: 1) $(F(x)+c)' = F(x)' + c' = F'(x) = f \Rightarrow F+c$ è primitiva

2) sia $H(x) = F(x) - G(x) \Rightarrow H'(x) = F'(x) - G'(x) = \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} = 0 \Rightarrow F$ e G differiscono per una costante $\Rightarrow G(x) = F(x) + c$

Integrale indefinito

Si indica $\int f(x)dx = \{F: I \to \mathbb{R}$ derivabili in $I \mid F'(x) = f(x)\} = F(x) + c$

Siano f, g continue in I, allora:

1) $\int K f(x)dx = K \int f(x)$
2) $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

F primitiva di f su I e G primitiva di $g(x)$ su I: $\int f(x)+g(x)dx = F(x) + G(x) + K$? $\quad (F(x) + G(x) + K)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$