Derivate di ordine superiore

Per ottenere derivata 3ª, 4ª... basta ripetere il passaggio 1ª → 2ª, adattandolo a n° → n+1

Significato di derivata 1°/2°

La derivata 1° ci dà informazioni sulla PENDENZA del grafico

La derivata 2° ci dà informazioni sulla VARIAZIONE DI PENDENZA del grafico

Grafico Convesso

Una funzione f si dice convessa in $I=[a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sopra della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice convessa se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Grafico Concavo

Una funzione f si dice concava in $I=[a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sotto della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice concava se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sopra del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Punto di flesso

Sia $f(x)$ concava per $[a;x_0]$ e convessa per $[x_0;b]$. Nel punto x_0 la retta tangente attraversa il grafico di f. x_0 è detto punto di flesso

Legame derivata seconda - concavità

Sia $f:(a;b)\subseteq A \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Allora f è convessa in $(a;b)$ se e solo $f''(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$. La funzione si dice concava se e solo se $f''(x)<0$ $\forall x \in (a;b)$

+ Se in $(x_0, f(x_0))$ vi è un flesso, allora $f''(x_0)=0$. (CONDIZIONE NECESSARIA)
+ Se $f'(x)$ crescente (decrescente) allora $f(x)$ è convessa (concava).

DIM. Sia f convessa in $(a;b)$. Affinché $f'(x)$ crescente, si deve avere che $\forall x_1,x_2 \in (a;b)$, $f'(x_2)>f'(x_1)$ con $x_2>x_1$

$f(x) > f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1)$; $f(x) > f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)$ $\Rightarrow$

se $x-x_1>0 \Rightarrow f'(x_1) < \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ | se $x-x_2>0 \Rightarrow f'(x_2) < \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$

se $x-x_1<0 \Rightarrow f'(x_1) > \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ | se $x-x_2<0 \Rightarrow f'(x_2) > \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$

$f'(x)$ crescente se $f'(x_1) < \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} < f'(x_2)$

Usando Lagrange: $\exists f'(c)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x_1-x_2}$, $\exists f'(d)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ $\Rightarrow f'(c)<f'(d) \Rightarrow f'$ è crescente $\}$

---

1) $y = xe^{-\frac{1}{x+1}}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ | $f(x)<0 \quad x<0$ | $f(x)>0 \quad x>0$ | NO DISP/PARI

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ | $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x\to -1^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1 \quad x\left(e^{-\frac{1}{x+1}}-1\right) \sim x\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -1$

$\Downarrow$

ASINT. OBLIQUO BILATERO: $y=x-1$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} + \frac{xe^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} = e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2} \quad D'=D$

$f'(x)>0 \quad x^2+3x+1>0 \Rightarrow x< -\frac{3+\sqrt5}{2} \vee x> \frac{-3+\sqrt5}{2}$ $\quad \nearrow \ \searrow \ \nearrow$

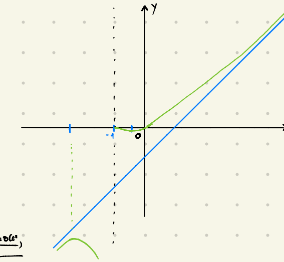
$M=\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}; f\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)\right)$, $m=\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}; f\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)\right)$

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to-1^+\\ t=\frac{1}{x+1}}} e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\frac{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+3\left(\frac{1-t}{t}\right)+1}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\frac{\frac{t^2-3t^2+t^2+o(t^2)}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\left(-t^2+o(t^2)\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{-t^2+o(t^2)}{e^t} = 0$$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{x}{x+1} + o(1) = x - 1 + \frac{1}{x+1} + o(1) =$$ SVILUPPI NECESSARI

$e^{-\frac{1}{x+1}} = 1-\frac{1}{x+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)$



---

2) $f(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | $f(x)>0 \quad x>0$, $f(x)<0 \quad x<0$ | DISPARI | $f(1)=f(-1)=0$

$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ | $\underbrace{\lim_{x\to0^-} f(x) = \ldots = 0 \ | \ \lim_{x\to0^+} f(x) = \ldots = 0}_{\text{prolungabile per continuità}}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\hookrightarrow$ NO ASINT.

$f(x) \underset{x\to1}{\sim} \cancel{1}\cdot\sqrt[3]{(\ln x)^2} = \sqrt[3]{(\ln(1+(x-1)))^2} \sim \sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow$ in $x=1$ ha una cuspide

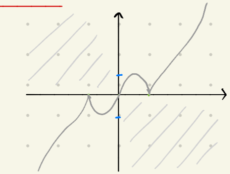
$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln(x))^2} + \frac{2}{3}\cancel{x}\left((\ln(x))^{-\frac13}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right) = \sqrt[3]{(\ln x)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3\ln x+2}{3\sqrt[3]{\ln x}}$

solo $x>0$

$\lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0^-} f'(x) = +\infty \Rightarrow$ tg v.

$f'(x)=0 \quad \ln x = -\frac32 \quad x=e^{-\frac32}$

$f''(x)=$



---

3) $f(x) = \frac{(1-|x|)^{1/5}}{x^2+1}$

$D: \mathbb{R}$ | $f(x)>0 \quad -1<x<1$, $f(x)<0 \quad x<-1 \vee x>1$ | PARI | $f(x)=0 \quad x=\pm1$, $f(0)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt[5]{\infty}}{\infty^2} = 0 \Rightarrow$ ASINT. H $\ y=0$

$f(x) \underset{x\to1}{\sim} \frac{(1-x)^{1/5}}{2} \Rightarrow$ flesso a tg v in ±1

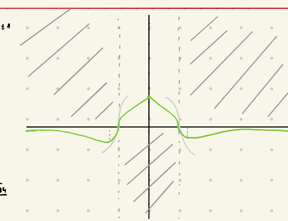
$f'(x) \underset{x\geq0}{=} \frac{\left((1-x)^{1/5}\right)'(x^2+1) - (1-x)^{1/5}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{9x^2+10x-1}{5(x^2+1)(1-x)^{4/5}}$

$\lim_{x\to+1} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-1} f'(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac15 \quad \lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac15$

$f'(x)=0 \Rightarrow 9x^2+10x-1=0 \quad x=\frac{5\pm\sqrt{34}}{9} \Rightarrow x<\frac{5-\sqrt{34}}{9} \vee x>\frac{5+\sqrt{34}}{9}$ $\quad \nearrow \ \searrow \ \nearrow$

$f''(x)= \ldots$



4) $f(x) = x\,\dfrac{2\ln x - 3}{\ln x - 2}$

$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (0; e^2) \cup (e^2; +\infty)$

$f(x) > 0$ [...]

$f(x) = 0 \quad \ln x = -\frac{3}{2} \quad x = e^{-3/2}$

HOMEWORK

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$, $\underbrace{\lim\limits_{x \to e^{2-}} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to e^{2+}} f(x) = +\infty}_{\text{ASINTOT V}: \; y = e^2}$, $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}_{\text{NO ASINT. O}}$

HOMEWORK:

$y = (2-x)\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2/3}$

$y = (1+x)\left(\ln(1+x)\right)^{1/2}$

$y = \arctan\left(\dfrac{2x+1}{|x|+1}\right)$

$y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$

$y = \dfrac{x-3}{x+2}\, e^{x-|x|}$

$y = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$