

ESERCITAZIONE ANALISI 1

1° OTTOBRE



Binomio di Newton

- ① Nello sviluppo di $(2\sqrt{x} - \frac{3}{x})^7$ esistono i termini x^3 e \sqrt{x} ? Se sì, calcolare i coefficienti.

$$\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2\sqrt{x}^{7-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^{7-k} x^{\frac{7-k}{2}} (-3)^k = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^{7-k} x^{\frac{7-3k}{2}} (-3)^k$$

- per trovare x^3 dobbiamo fare $\frac{7-3k}{2} = 3$ $7-3k=6$ $k = \frac{7-6}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ non c'è

- per trovare \sqrt{x} dobbiamo fare $\frac{7-3k}{2} = \frac{1}{2}$ $7-3k=1$ $k = \frac{7-1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x}$ è nello sviluppo

- qual è il suo coefficiente: $\binom{7}{k} 2^{7-k} (-3)^k = \frac{7!}{k!(7-k)!} \cdot 2^5 \cdot 9 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 5!} \cdot 32 \cdot 9 = 21 \cdot 32 \cdot 9 = \underline{\underline{6048}}$

Estremi di una funzione

- ② Determinare se esistono min, max, inf, sup di $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2-x\}$

Risolvo la disequazione:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 4x^2 - 6x \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow \emptyset \cup \begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 3 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow E = [3; +\infty)$

Inf(E) = min(E) = 3; Non esistono maggioranti $\Rightarrow \exists \text{Sup}(E), \text{max}(E)$ ($\text{Sup}(E) = +\infty$)

③ // $E = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{2-\alpha x - x^2}{1-x+x^2} \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ (per quali α la diseguaglianza ha soluzioni in tutto \mathbb{R})
 | Ovvvero la diseguaglianza: $1-x^2+x^2 > 0 \quad \Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso moltiplicare:

$$2-\alpha x - x^2 \leq 3 - 3x + 3x^2 \quad 4x^2 + (\alpha-3)x + 1 \geq 0 \quad \Delta \leq 0 \Rightarrow (\alpha-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = \alpha^2 - 6\alpha - 7 = (\alpha-7)(\alpha+1) \leq 0$$

$$\Downarrow \quad \alpha \in [-1, 7]$$

$$\inf(E) = \min(E) = -1; \quad \sup(E) = \max(E) = 7$$

④ // $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \geq \sqrt{5-2x} \right\}$ HOMEWORK

⑤ // $E = \left\{ \frac{n+2}{n+1}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

Ovvvero i numeri limitati poiché $\mathbb{N} - \{0\}$ i numeri limitati.

$$0 \text{ è minore: } \frac{n+2}{n+1} > 0; \quad 1 \text{ è minore: } n+2 > n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1.$$

$$\text{Consideriamo } 1+\varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0, \text{ e vediamo se è minore: } \frac{n+2}{n+1} \geq 1+\varepsilon \quad \frac{n+2-n-1}{n+1} \geq \varepsilon \quad \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon \quad n+1 \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

↓
 La diseguaglianza non vale $\forall x \geq 1 \Rightarrow 1+\varepsilon \text{ non è minore} \Rightarrow \inf(E) = 1$
3 minimo

Scriviamo $\frac{n+2}{n+1}$ come $1 + \frac{1}{n+1}$. $\frac{1}{n+1}$ decresce all'aumentare di n , quindi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2}$

$$\text{Per } n=1 \quad \frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2} \text{ quindi } \frac{3}{2} \text{ è massimo ed estremo superiore} \Rightarrow \max(E) = \sup(E) = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{6} \quad E = \left\{ \frac{m}{n} + 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

\emptyset è minore: per $m=0$ abbiamo $\frac{0}{n} + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\lim}(E) = \min(E) = 1$

Esiste un maggiorante M tale che $\frac{m}{n} + 1 \leq M$?

$\frac{m}{n} + 1 \leq M \quad \frac{m}{n} \leq M - 1 \quad m \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow$ condizione non valida per tutti gli m, n , quindi $\overline{\lim}(E) = \max(E)$

$$\textcircled{7} \quad E = \left\{ \frac{x}{x+1}, \quad x \in \mathbb{Q}^+ \right\} \quad (\mathbb{Q}^+ = \{x > 0, \quad x \in \mathbb{Q}\})$$

? Poiché \mathbb{Q}^+ è inferiormente limitato, $\frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow \exists \underline{\lim}$. Se consideriamo $(x-1)^2 \geq 0$ abbiamo $\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ quindi $\frac{1}{2}$ è maggiorante. Però, per $x=1 \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ quindi $\frac{1}{2}$ è anche minimo $\Rightarrow \underline{\lim}(E) = \max(E) = \frac{1}{2}$

$$0 \text{ è minore, lo è anche } \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} > \varepsilon \quad x > \varepsilon^2 + \varepsilon \quad \varepsilon x^2 - x - \varepsilon < 0 \quad \Delta = 1 + \varepsilon^2 \begin{cases} > 0 & \varepsilon^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ = 0 & \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \pm \frac{1}{2} \\ < 0 & \varepsilon^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon < -\frac{1}{2} \vee \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'espressione non vale $\forall x \in \mathbb{Q}^+$, quindi ε non è minore e quindi $\underline{\lim}(E) = 0$, $\overline{\lim}(E) = \max(E)$

$$\textcircled{8} \quad E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{\sqrt{2+x}} \leq 2^{3-x} \right\} \quad (E = [-\frac{9}{2}, 10 - 2\sqrt{2}])$$

\textcircled{9} Considero $E_1 = E \cap \mathbb{Q}$, $E_2 = E \cap \mathbb{N}$ con E uguale a \textcircled{8}.

$-\frac{9}{2}$ sarà ancora minimo ed estremo inferiore poiché è razionale.

$10 - 2\sqrt{2}$ non è razionale quindi non potrà più essere minimo però è ancora estremo superiore in quanto il più piccolo dei maggioranti.

E_2 , invece, ha un numero finito di elementi, quindi ha sicuramente il massimo ed il minimo.

Potrei calcolare due tracce il più piccolo e il più grande intero all'interno di E_2 .

Potrei prendere \emptyset come più piccolo ($\min(E)$ è negativo) e q come più grande (trovo la più grande approssimazione del $\max(E)$).

LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 4 OTTOBRE

LEZIONE: FUNZIONI

ESERCITAZ.: N. COMPLESSI



LEZIONE

FUNZIONI:

DEFINIZIONE:

una funzione è una terna di elementi A, B, f dove:

- A, B sono insiem

- f è una relazione da A a B col ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B $\rightarrow f: A \xrightarrow{\text{dominio}} B \xrightarrow{\text{codominio}}$

es: $y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R} = B$ NON è una funzione ($\exists x \in A : f$ non è valida)

$y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ è una funzione ($\forall x \in A : f$ non è valida)

$f(a)$: è l'immagine di a

$\text{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$

$\Gamma(f) = \text{graffico di } f : \Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in A\}$. N.B.: $\Gamma(f) \neq \text{Im}(f)$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE:

- limitata: $\text{Im}(f)$ è limitato, $\text{Im} \subseteq \mathbb{R}$, $\exists M > 0, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A - M \leq f(x) \leq M$

- sup / inf limitata: $\exists \sup(\text{Im}(f)) / \exists \inf(\text{Im}(f))$

- crescente in ICA: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) < f(x_2)$

- decrescente in ICA: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$

- monotona in I: se è crescente / decrescente (strettamente) in tutto I

- pari: se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ con $x, -x \in A$

- doppi: se $\forall x \in A : f(x) = -f(-x)$ con $x, -x \in A$

DOMINIO NATURALE: Il più grande sottoinsieme di \mathbb{R} in cui la funzione è definita

FUNZIONE SURIETTIVA: Dato $f: A \rightarrow B$ si dice che f è suriettiva se $\text{Im}(f) = B$

OSS: $\forall \bar{y} \in B$ esistono $y = \bar{y}$ f è suriettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in almeno un punto

FUNZIONE INIETTIVA: Dada $f: A \rightarrow B$ si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ / $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

OSS.: $\forall y \in B$ contiene $y = \bar{y}$. f è iniettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in al più un punto

FUNZIONE BIUNIQUA: Dada $f: A \rightarrow B$ si dice che f è biunica se è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCITAZIONE

NUMERI COMPLESSI

$$\textcircled{1} \quad i(1+i) = i + i \cdot i = i - 1$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$i - 1 = \sqrt{2} (\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$e^{i\pi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

sottrai o reali o complessi coniugati

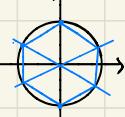
$$\textcircled{2} \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - \alpha c = 1 - 2 = -1 \quad z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

$$\textcircled{3} \quad z^2 + 3iz + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9c^2 - 4 = -18 \quad z_{1,2} = \frac{-3ic \pm \sqrt{-18}}{2} = \frac{-3ic \pm \sqrt{18}i}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad z^3 = -i \quad z_1 = i \quad z_2 = \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = z_3$$

$$\textcircled{5} \quad z^6 = -8 \quad z_1 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad z_2 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad z_3 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \quad z_4 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{3}{6}\pi + i \sin \frac{3}{6}\pi \right) \quad z_5 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right)$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad z_6 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)$$

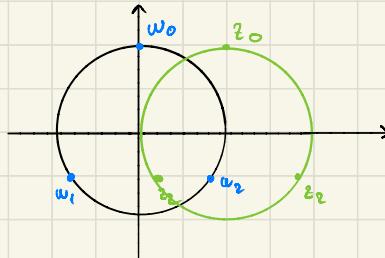


$$\textcircled{6} \quad (z-2)^2 + i = 0$$

sostituiamo $z-2$ con $w \Rightarrow w^2 = -i$ come in $\textcircled{4} \Rightarrow z_1 = w_1 + 2 = 2 + 1$

$$z_2 = w_2 + 2 = [...] = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} + 2$$

$$z_3 = w_3 + 2 = [...] = \frac{i\sqrt{3} + i}{2} + 2$$



$$\textcircled{7} \quad z^2 + (1+i)z + i = 0 \quad \Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i$$

non ho numeri con radici complesse: $\tilde{z} = 1$

$$z_{1,2} = \frac{-1-i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \begin{cases} \frac{-1-i + i}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1-i - i}{2} = -1-i \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \quad \boxed{i \cdot z^2 = \bar{z}}$$

NON è algebrica

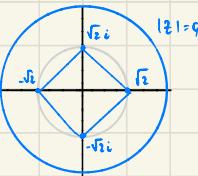
poniamo $z = pe^{i\theta}$, $\bar{z} = pe^{-i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot p^2 e^{i2\theta + \frac{\pi}{2}} = pe^{-i\theta}$ $p^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = pe^{-i\theta}$

$\text{dcl: } z_0 = 0 \quad \forall \theta \quad (p=0)$ (solutions coincident)

$$z_1 = \bar{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}-i}{2}$$

$$z_2 = \bar{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = i$$

$$z_3 = \bar{e}^{i\frac{5\pi}{2}} = \frac{-\sqrt{2}-i}{2}$$



$$\textcircled{9} \quad (z^4 - 4)(1z - 4) = 0$$

$$z^4 - 4 = 0 \quad z^4 = 4$$

$$|z|^4 - 4 = 0 \quad |z|^4 = 4$$

$\textcircled{10} \quad x^4 + 1 = 0$ Homework: Scavopore in IR

$$(x^2)^2 + 1^2 = 0 \quad ((x^2)^2 - 1) + 2 = 0 \quad (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2 = 0 \quad (x^2 + 1)(x-1)(x+1) \cdot 2 = 0$$

$$x^4 = -1$$

$$\omega \pi + i \sin \pi$$

$$x_0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = -1 - i$$

$$\begin{cases} p^2 = p \\ 2\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \vee p = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \vee p = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ (K=0, 1, 2)