

...

7.3 MASSA INERZIALE VS. GRAVITAZIONALE

Redondamente la forza grav. avverte questa formula:

$$m_i g = \frac{\gamma m_1 m_2}{R^2} \rightarrow \frac{m_i}{m_g} = \gamma \frac{m_1}{g R^2}$$

Sperimentalmente si è osservato che non c'è differenza tra le due masse ed esse sono equivalenti.

7.4 ORBITE DEI PIANETI

La forza gravitazionale è centrale quindi è conservativa e il suo momento angolare è costante. Questo implica che:

- 1) poiché \vec{r} ha direzione costante, le orbite sono piane
- 2) poiché il verso è costante, il senso di rotazione non può essere modificato
- 3) il modulo costante ci permette di scrivere (in sistema polare):

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m r \hat{e}_c \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta \right) = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_n \rightarrow |\vec{L}| = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const}$$

Studiando le orbite dal punto energetico possiamo dire che data $E_n = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r}$

- 1) $E_n > 0 \rightarrow$ l'orbita è aperta (il corpo ha abbastanza energia per andare all'infinito)
- 2) $E_n < 0 \rightarrow$ l'orbita è chiusa (l'orbita non può arrivare all'infinito poiché $E_c > 0$ e $E_p < 0$ sempre)

La velocità di fuga si può calcolare facendo:

$$E_n^A = E_n^B \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + \gamma \frac{Mm}{R_1} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r}$$

$$r \rightarrow \infty$$

$$\hookrightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{2\gamma M_1}{R_1} \rightarrow v=0 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M_1}{R_1}} \quad (\text{cond. limite})$$

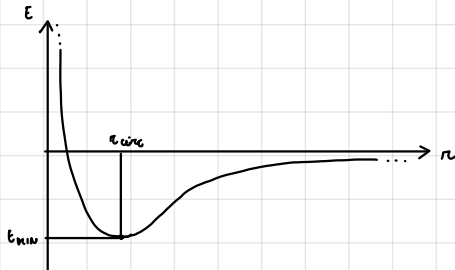
7.5 ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

Integrando calcoli (lavorando in sistema polare e assumendo moto circolare) si può scrivere che:

$$E_n = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{Mm}{r} \right]$$

ENERGIA POT. EFF.

Riduciamo così il problema ad un problema unidimensionale (tutto è una funzione di r). Plottando il potenziale efficace otteniamo il seguente grafico:



Si può dimostrare che:

- se $E_n > 0$ l'orbita è un'iperbola
- se $E_n = 0$ l'orbita è una parabola
- se $E_{min} < E_n < 0$ l'orbita è ellittica
- se $E_n = E_{min}$ l'orbita è circolare

Per trovare r_{circ} basta calcolare il minimo dell'energia potenziale efficace.

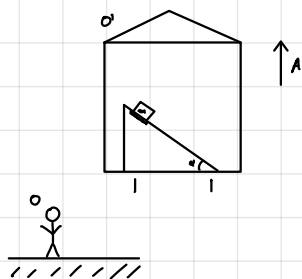
$$r_{circ} = \dots = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$$

Sostituendo questa formula in quella dell'energia meccanica, si trova che l'energia totale in moto circolare è pari a:

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 - m v^2 = - m v^2$$

ESERCITAZIONE

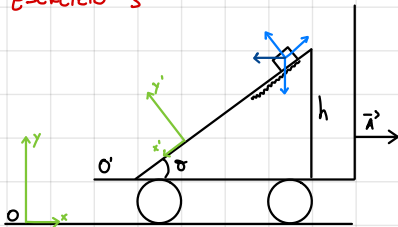
ESERCIZIO 2



$$\begin{aligned} O' \begin{cases} N \sin \alpha - F_{\text{attr}} \cos \alpha = 0 \\ N \cos \alpha - F_{\text{attr}} \sin \alpha - mg = m \cdot A \end{cases} & \quad \begin{cases} N = F_{\text{attr}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ F_{\text{attr}} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + F_{\text{attr}} \sin \alpha - mg = mA \end{cases} \\ & \quad \downarrow \\ & \quad F_{\text{attr}} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right) = m(A+g) \\ & \quad F_{\text{attr}} = m(A+g) \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad F_{\text{attr}} \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$O' \begin{cases} N \sin \alpha - F_{\text{attr}} \cos \alpha = 0 \\ N \cos \alpha + F_{\text{attr}} \sin \alpha - mg - \underbrace{mA}_{F_{\text{APP}}} = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3



A_{MAX} affinché resti fermo?

7 per $A > A_{\text{MAX}}$?

$$\begin{aligned} F'_{\text{OT}}: m \cdot \vec{a} \quad \vec{a}' &= 0 \\ &= m(\vec{a} - \vec{a}_{\text{OO}'}') \\ &= m\vec{a} - m\vec{A} \end{aligned}$$

$$\text{STATICO: } \begin{cases} mg \sin \theta + m A \cos \theta - F_{\text{attr}} = 0 \\ N - mg \cos \theta + m A \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{\text{attr}} = m(g \sin \theta + A \cos \theta) \\ N = m(g \cos \theta - A \sin \theta) \end{cases} \rightarrow F_{\text{attr}} \leq \mu_s N$$

$$F_{\text{Attr}} \leq \mu_s N \rightarrow \dots \rightarrow A(\cos \theta + \mu_s \sin \theta) \leq \mu_s g \cos \theta - g \sin \theta \rightarrow A \leq \frac{g(\mu_s \cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

$$\text{DINAMICO } (A > A_{\text{MAX}}): \begin{cases} mg \sin \theta + m A \cos \theta - \mu_0 N = m a_x' \\ N - mg \cos \theta + m A \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m a_x' = m(g \sin \theta + A \cos \theta) - \mu_0 m(g \cos \theta - A \sin \theta) \rightarrow a_x' = (g \sin \theta + A \cos \theta) - \mu_0 (g \cos \theta - A \sin \theta) \\ N = m(g \cos \theta - A \sin \theta) \end{cases}$$

$$L = \frac{h}{\sin \theta} \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2} a_x' t^2 = L \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\sin \theta \cdot a_x'}}$$