Geometria Euclidea

Prof.
Marco
Compagnoni

GEOMETRIA EUCLIDEA:

- Spazi euclidei
- Distanze e angoli
- Isometrie e proiezioni

SEZIONE 10.1

- Distanza punto-sottospazio
- Rappresentazione iperpiani
- Distanza punto-iperpiano

SEZIONE 10.2

DEFINIZIONE 10.1

Uno spazio euclideo $\mathbb{E} = (A, V, \langle , \rangle, \varphi)$ è uno spazio affine dove $(V, \langle , \rangle)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

ESEMPIO FONDAMENTALE: $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot), \langle , \rangle_E, \varphi)$, dove $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \overrightarrow{\underline{x}\,\underline{y}} = \underline{y} - \underline{x}$, è lo spazio euclideo canonico.

DEFINIZIONE 10.2

Siano P_1, Q_1, P_2, Q_2 punti di $\mathbb{E}$. Allora:

i) $d: \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P_1, Q_1) \longmapsto \|\overrightarrow{P_1Q_1}\| \end{array}$ è la distanza tra P_1 e Q_1, detta anche lunghezza del segmento orientato (P_1, Q_1);

ii) l'angolo tra i segmenti $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ è

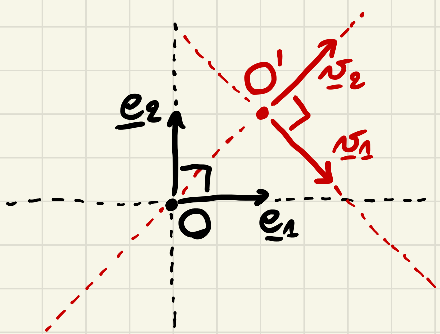
$$\widehat{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)} = \widehat{\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}}.$$

DEFINIZIONE 10.4

Un sistema di riferimento cartesiano di $\mathbb{E}$ è un sistema di riferimento $\mathcal{B}_O = \{O, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ in cui $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortonormale di V.
Le coordinate associate si dicono cartesiane.

$\mathbb{E}^2$
- $\mathcal{B}_O = \{ O = (0,0), \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ sistema di riferimento canonico
- $\mathcal{B}'_{O'} = \{ O' = (1,1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \}$

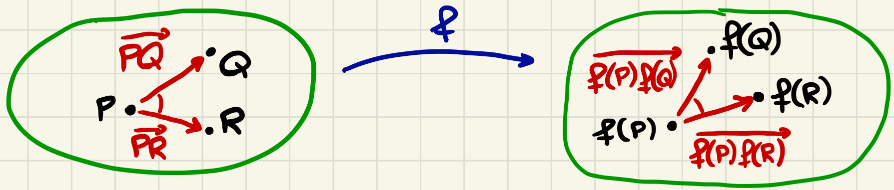
Sono sistemi di riferimento cartesiano



$\mathcal{B}_O, \mathcal{B}'_{O'}$ hanno la stessa orientazione

DEFINIZIONI 10.6 - 10.8

- $f: \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ è un isometria se $\bar{f}: V \to V$ è un'isometria, dove $\bar{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.



f è un' isometria se non altera angoli e distanze, ad esempio l'identità, le rotazioni e le traslazioni.

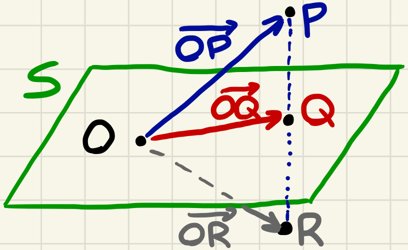
- $S \subseteq \mathbb{E}_1$ e $T \subseteq \mathbb{E}_2$ sono congruenti se esiste un isometria t.c. $f(S) = T$.

COROLLARIO (IV postulato di Euclide)

Due angoli retti sono sempre congruenti.

IDEA DIM: è sempre possibile trovare una rototraslazione che manda una coppia di rette perpendicolare in una qualsiasi altra coppia di rette perpendicolari $\boxtimes$

ESEMPIO 10.17 (proiezione e riflessione ortogonale)



S di giacitura U $\Rightarrow$

- $Q = P_U(P)$ è il punto tale che $\vec{OQ} = P_U(\vec{OP})$
- $R = R_U(P)$ è il punto tale che $\vec{OR} = R_U(\vec{OP})$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \mid x+y+z=1\}$ $\qquad P = (1,1,1) \notin S$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_U = \{\underbrace{(-1,1,0)}_{\underline{u}_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{\underline{u}_2}\}$ non è o.n.

$\underline{\tilde{u}}_1 = \underline{u}_1$, $\quad \underline{\tilde{u}}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{\tilde{u}}_1 \rangle}{\|\underline{\tilde{u}}_1\|^2} \cdot \underline{u}_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = (-1/2, -1/2, 1)$

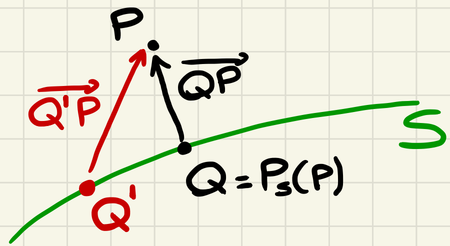
$\Rightarrow \mathcal{B}'_U = \{\underline{u}'_1 = \frac{\underline{\tilde{u}}_1}{\|\underline{\tilde{u}}_1\|}, \underline{u}'_2 = \frac{\underline{\tilde{u}}_2}{\|\underline{\tilde{u}}_2\|}\} = \{(-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$

$O = (1,0,0) \in S \Rightarrow \vec{OP} = P - O = (0,1,1) \Rightarrow$

$\vec{OQ} = \langle \vec{OP}, \underline{u}'_1 \rangle \cdot \underline{u}'_1 + \langle \vec{OP}, \underline{u}'_2 \rangle \cdot \underline{u}'_2 = (-1/2, 1/2, 0) + (-1/6, -1/6, 2/6) = (-2/3, 1/3, 1/3) \Rightarrow Q = (1/3, 1/3, 1/3)$

$\vec{OR} = \vec{OP} - 2(\vec{OP} - \vec{OQ}) = 2\vec{OQ} - \vec{OP} = (-4/3, -1/3, -1/3) \Rightarrow R = (-1/3, -1/3, -1/3).$

DISTANZA PUNTO - SOTTOSPAZIO



DEFINIZIONE 10.9

$S \neq \emptyset$ sottoinsieme di $\mathbb{E}$, P punto

$\Rightarrow d(S,P) = \inf_{Q \in S} d(Q,P)$.

PROPOSIZIONE 10.10

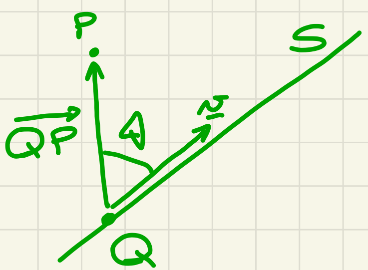
S sottospazio di dimensione finita con giacitura U.

i) $d(S,P) = \| \overrightarrow{P_S(P)P} \|$;

ii) siano $Q \in S$ e $B_U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ base $\Rightarrow d(S,P) = \sqrt{\dfrac{G(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m, \overrightarrow{QP})}{G(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m)}}$.

$\dim(S) = 1$: $\cdot\ G(\underline{u}, \overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}\|^2 & \langle \underline{u}, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \underline{u}, \overrightarrow{QP} \rangle & \|\overrightarrow{QP}\|^2 \end{vmatrix} = \|\underline{u}\|^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 - \langle \underline{u}, QP \rangle^2$

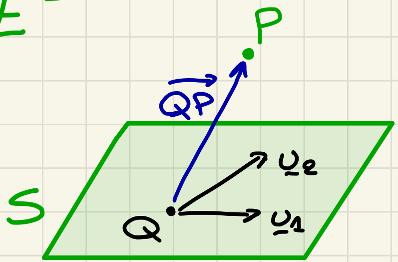
$= \|\underline{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{QP}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \vartheta) = \|\underline{u}\|^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta$



$\cdot\ G(\underline{u}) = \|\underline{u}\|^2$

$\Rightarrow d(S,P) = \|\overrightarrow{QP}\| \cdot \operatorname{sen} \vartheta$

$\mathbb{E}^3$



$Q = (1,0,0), \quad \underline{u}_1 = (1,0,0), \; \underline{u}_2 = (0,1,1)$

$P = (x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = (x-1, y, z)$

$$d(P,S) = \sqrt{\frac{G(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \overrightarrow{QP})}{G(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}}$$

$$G(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \langle \underline{u}_1, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \|\underline{u}_2\|^2 & \langle \underline{u}_2, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \overrightarrow{QP} \rangle & \langle \underline{u}_2, \overrightarrow{QP} \rangle & \|\overrightarrow{QP}\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & y+z \\ x-1 & y+z & (x-1)^2+y^2+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{2(x-1)^2} + 2y^2 + 2z^2 - \cancel{2(x-1)^2} - y^2 - z^2 - 2yz = (y-z)^2$$

$$G(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \|\underline{u}_2\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \; d(P,S) = \sqrt{\frac{(y-z)^2}{2}} = \frac{|y-z|}{\sqrt{2}} \quad \leftarrow \quad \text{QUADRATO PERFETTO}$$

$P \in S$ sse $d(P,S) = 0$ sse $y - z = 0$ $\leftarrow$ EQ. S

COROLLARIO 10.12 ($\dim(\mathbb{E}) = n$, $\dim(S) = n-1$)

Sia $\mathcal{B}_Q$ un sistema di riferimento cartesiano con $Q \in S$. Allora:

i) se $S_{|\mathcal{B}_Q}: \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c = 0$ e $P_{|\mathcal{B}_Q} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ $\Rightarrow$ $d(S,P) = \dfrac{|\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i + c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$;

ii) se $U = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1})$ e $P \in \mathbb{E}$ $\Rightarrow$ $S_{|\mathcal{B}_Q}: |\underline{u}_{1|\mathcal{B}} \dots \underline{u}_{n|\mathcal{B}} \; P_{|\mathcal{B}_Q}| = 0$.

$Q = (1,0,0)$, $\underline{u}_1 = (1,0,0)$, $\underline{u}_2 = (0,1,1)$, $P = (x,y,z)$.

$\mathcal{B}_Q = \{Q, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

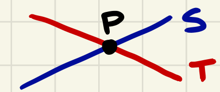
$$\Rightarrow S_{|\mathcal{B}_0} : |\underline{u}_{1|\mathcal{B}} \; \underline{u}_{2|\mathcal{B}} \; \overrightarrow{QP}_{|\mathcal{B}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = z - y = 0$$

$$\Rightarrow d(S,P) = \frac{|-y+z|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-y+z|}{\sqrt{2}}$$

PROPOSIZIONE 10.16

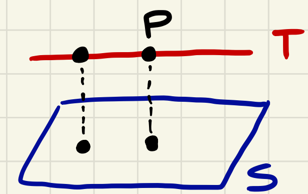
S, T sottospazi con giacitura U, W. Se i due spazi sono:

i) incidenti $\Rightarrow$ $d(S,T) = 0$;



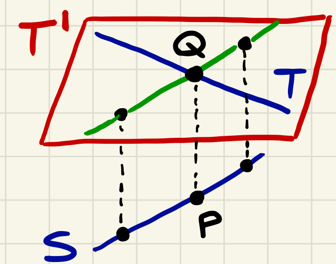
ii) paralleli con $W \subseteq U$ $\Rightarrow$ $d(S,T) = d(S,P)$

dove P è un generico punto di T;



iii) sghembi $\Rightarrow$ $d(S,T) = d(S,T')$ dove

T' è il più piccolo sottospazio affine contenente T e parallelo ad S.



OSS: $d(S,T) = d(P,T')$ dove P è un generico punto di S.

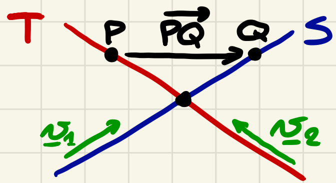
TEOREMA 10.17

S, T con giacitura U, W. Siano $(P,Q) \in S \times T$ e

$\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_m \}$ base di $U+W$ $\Rightarrow$ $d(S,T) = \sqrt{\dfrac{G(v_1, \dots, v_m, \overrightarrow{PQ})}{G(v_1, \dots, v_m)}}$.

IDEA DIM:

i) S, T incidenti

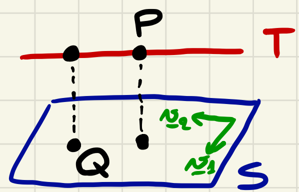


$U+W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, $\overrightarrow{PQ} \in U+W$

$\Rightarrow G(v_1, v_2, \overrightarrow{PQ}) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{G(v_1, v_2, \overrightarrow{PQ})}{G(v_1, v_2)}} = 0 = d(S,T)$

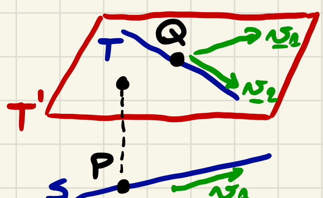
ii) S, T paralleli



$W \subseteq U \Rightarrow U + W = U = \mathcal{L}(v_1, v_2) \Rightarrow$

$d(S,T) = d(P,S) = \sqrt{\dfrac{G(v_1, v_2, \overrightarrow{QP})}{G(v_1, v_2)}}$

iii) S, T sghembi



$U+W =$ giacitura di $T' = \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$d(S,T) = d(P,T') = \sqrt{\dfrac{G(v_1, v_2, \overrightarrow{QP})}{G(v_1, v_2)}}$

$\square$