15/03 —

CHIARIMENTO SU SE/ALLORA

Quando la proposizione "se x allora y" ($x \Rightarrow y$)? Essa è falsa solo se A è vero mentre B è falso.
Quindi se A è falso, la relazione rimane vera!!

RELAZIONI

Una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano.

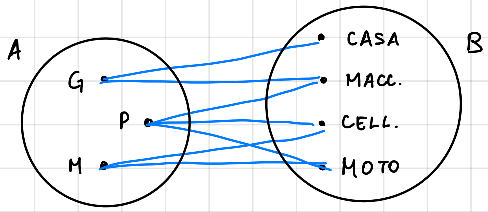
Prodotto Cartesiano

Si definisce prodotto cartesiano di $A_1, \dots, A_n$ insiemi $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \cdots a_n \in A_n\}$
Nota bene: $\{a, b\}$ è una coppia non ordinata; $(a,b) := \{a, \{b\}\}$ è una coppia ordinata (definizione data da Kuratowski)

Relazione

Definiamo una relazione n-aria su $A_1, \dots, A_n$ $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$. Di conseguenza una relazione 1-aria sarà $R \subseteq A$.

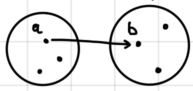
D'ora in poi parleremo principalmente di relazioni binarie $R \subseteq A_1 \times A_2$.



Notazioni:

- $R \subseteq T$ se $(a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in T$
- $R = T$ se $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
- $R \cap T = \{(a,b) \in A_1 \times A_2 : (a,b) \in R \wedge (a,b) \in T\}$
- $R \cup T = \{$ " " : " $\vee$ " $\}$
- $(a,b) \in R = aRb$

Come rappresentiamo una relazione binaria?

1) A e B sono insiemi finiti ($|A||B| < +\infty$)
   - grafo di adiacenza:  disegno la freccia se aRb

   - matrice di adiacenza: fissiamo un ordinamento di $A_1 = \{\overset{\text{I}}{G}, \overset{\text{II}}{P}, \overset{\text{III}}{M}\}$ e $A_2 = \{\overset{\text{I}}{CA}, \overset{\text{II}}{MA}, \overset{\text{III}}{CE}, \overset{\text{IV}}{MO}\}$ e definisco una matrice $A \in Mat(|A_1| \times |A_2|, \{0,1\})$ di cui gli elementi saranno

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow M_R = \begin{array}{c|cccc} & CA & MA & CE & MO \\ \hline G & 1 & 1 & 0 & 0 \\ P & 1 & 1 & 1 & 0 \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Come si comporta la matrice di adiacenza in presenza di unione ed intersezione?

- intersezione: vengono presi gli 1 presenti in entrambe le matrici $\Rightarrow (M_{R \cap T})_{ij} = (M_R)_{ij} (M_T)_{ij}$
- unione: vengono presi tutti gli 1 $\Rightarrow (M_{R \cup T})_{ij} = M_R \oplus M_T \rightarrow$ somma booleana

Prodotto di relazioni

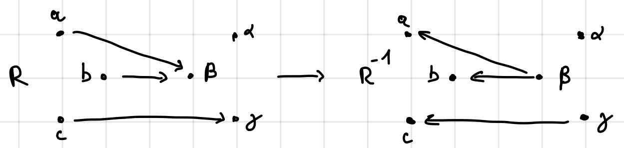
Prendiamo due relazioni $R \subseteq A_1 \times \underline{A_2}$ e $T \subseteq \underline{A_2} \times A_3$ definiamo allora il prodotto
$R \cdot T \subseteq A_1 \times A_3 = \{(a,c) \in A_1 \times A_3 : \exists b \in A_2 : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\}$

Supponiamo di conoscere $M_R \in Mat(|A_1|\times|A_2|, \{0,1\})$ e $M_T \in Mat(|A_2|\times|A_3|, \{0,1\})$, posso scrivere $(M_R M_T)_{ij} = \sum_{k=1}^{|A_2|} (M_R)_{ik}(M_T)_{kj}$
Il valore di $(M_R M_T)_{ij}$ rappresenta il numero di cammini possibili tra i nodi i e j degli insiemi di arrivo e partenza.
Se eseguiamo $M_R M_T$ ponendo tutti gli elementi maggiori di zero pari a 1, otteniamo la matrice d'adiacenza di $R\cdot T$.

Il prodotto di relazioni è associativo, ma non commutativo. Esso, inoltre, è anche compatibile con l'inclusione: se $R \subseteq T \subseteq A_1\times A_2$, $S \subseteq U \subseteq A_2 \times A_3$ allora $R\cdot S \subseteq T\cdot U$.

Inversa di una relazione

Data una relazione $R \subseteq A_1 \times A_2$, l'inversa della relazione è $R^{-1} \subseteq A_2\times A_1 = \{(b,a)\in A_2\times A_1 : (a,b) \in R\}$



Se M_R è la matrice d'incidenza di R, quella di R^{-1} sarà $M_{R^{-1}} = M_R^T$. Inoltre, è lecito scrivere che $R\cdot R^{-1} \subseteq A_1\times A_1$ e $R^{-1}\cdot R \subseteq A_2 \times A_2$.

Relazioni binarie su di un unico insieme ($R \subseteq A\times A$)

Le relazioni binarie su un unico insieme hanno matrice di adiacenza quadrata. Di conseguenza, il prodotto di relazioni è sempre possibile e possiamo definire le potenze di relazioni (valgono le solite proprietà delle potenze).
Delle relazioni notevoli di questo tipo sono:
- La relazione vuota $\emptyset$
- La relazione identità I_A (nota: $R^0 = I_A$)
- La relazione universale ω_A

Estendendo l'osservazione sul prodotto matriciale effettuata prima, possiamo affermare che $(M_R^K)_{ij}$ è il numero di percorsi di lunghezza K tra i e j

Una relazione binaria ha delle interessanti proprietà:
- si definisce seriale una relazione che soddisfa: $\forall a \in A \ \exists b \in A \ (a,b)\in R$ (ogni riga di M_R ha un 1)
- 〃 〃 riflessiva 〃 〃 〃 〃 : $\forall a\in A \ (a,a) \in R$ (la diagonale di M_R ha solo 1)
- 〃 〃 simmetrica 〃 〃 〃 〃 : $\forall a,b \in A$ se $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$ (M_R è simmetrica)
- 〃 〃 antisimmetrica 〃 〃 〃 〃 : $\forall a,b\in A$ se $(a,b)\in R$ e $(b,a) \in R \Rightarrow a=b$
- 〃 〃 transitiva 〃 〃 〃 〃 : $\forall a,b,c \in A$ se $(a,b)\in R$ e $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$ (R è transitiva $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$)
  - se una relazione è transitiva, per ogni percorso abbiamo una connessione tra inizio e fine.

Quasi nessuna di queste proprietà implica le altre: Seriale $\not\Rightarrow$ Riflessiva; Antisimmetria $\not\Rightarrow$ Non simmetria
Transitiva e simmetrica $\not\Rightarrow$ riflessiva. Però abbiamo che Riflessiva $\Rightarrow$ Seriale e Transitività, simmetria, serialità $\Rightarrow$ riflessiva

Come si comportano unione, intersezione, prodotto e inversione rispetto alle proprietà precedenti?

	$\cap$	$\cup$	$\cdot$	-1
SERIALE	✗	✓	✓	✗
RIFLESSIVA	✓	✓	✓	✓
SIMMETRICA	✓	✓	✗	✓
ANTISIMMETR.	✓	✗	✗	✓
TRANSITIVA	✓	✗	✗	✓

Chiusura di una relazione

Dato P un insieme di proprietà, la P-chiusura di $R \subseteq A \times A$ è una relazione $T \subseteq A \times A$ se $R \subseteq T$ e T è la più piccola relazione che soddisfa P.

Conseguenza della definizione è che $\forall S \subseteq A \times A$ che soddisfa P e $R \subseteq S$, $T \subseteq S$. Quindi la P-chiusura è unica.
DIMOSTRAZIONE: Prendiamo T_1 come P-chiusura e T_2 anch'essa P-chiusura. Per le proprietà sopra otteniamo $T_1 \subseteq T_2$ e $T_2 \subseteq T_1 \Rightarrow T_1 = T_2$.

Un'altra conseguenza è che se R stesso rispetta P, allora esso sarà chiusura di sé stesso.

Il seguente teorema descrive le condizioni per l'esistenza della P-chiusura di R:

Consideriamo $R \subseteq A \times A$ e fissiamo P l'insieme di proprietà. Se:
1. $\exists H \subseteq A \times A$ che soddisfa P e $R \subseteq H$
2. L'intersezione di relazioni che soddisfano P è a sua volta una relazione che soddisfa P

allora esiste la P-chiusura di R.

Usando il teorema sopra, possiamo affermare che per $P \subseteq \{$Riflessiva, Transitiva, Simmetrica$\}$ esiste sempre la P-chiusura di $R \subseteq A \times A$ e viene indicata $\bar{R}^P$. Le altre proprietà, in generale, non possono essere chiuse.

Chiusura riflessiva

Per chiudere riflessivamente una relazione R, basta aggiungere tutti cappi mancanti: $\bar{R}^{RIFL.} = R \cup I_A$ $\quad (M_R \oplus I)$

Chiusura simmetrica

Per chiudere simmetricamente una relazione R, basta aggiungere tutte le frecce al contrario: $\bar{R}^{SIMM} = R \cup R^{-1}$ $\quad (M_R \oplus M_R^T)$

Chiusura transitiva

Per chiudere transitivamente R, bisogna fare:
- $\bar{R}^{TR} = \bigcup_{K \geq 1} R^K$ dove K è la lunghezza del percorso più lungo
- $M_{\bar{R}^{TR}} = M_R \oplus M_R^2 \oplus M_R^3 \oplus \cdots \oplus M_R^i$ dove i è il piccolo indice soddisfa $M_R^{i+1} \subseteq M_R \oplus \cdots \oplus M_R^i$

DIMOSTRAZIONE: Sia $H = \bigcup_{K>0} R^K$. Dimostriamo che H è chiusura di R:
1) $R \subseteq H$
2) È transitiva: $(a,b),(b,c) \in H \Rightarrow (a,b) \in R^i \quad (b,c) \in R^{i+J} \Rightarrow (a,c) \in R^{i+J} \subseteq H$
3) Sia S una relazione $R \subseteq S$ ed è transitiva. Avremo che $R \subseteq S \Rightarrow R^2 \subseteq SR$ e $R \subseteq S \Rightarrow SR \subseteq S^2$ e quindi $R^2 \subseteq S^2$
Siccome S è transitiva otteniamo che $R^2 \subseteq S^2 \subseteq S \Rightarrow R^2 \subseteq S$. Consideriamo $R^3 = R^2 \cdot R \subseteq SR \subseteq S^2 \subseteq S$, quindi $R^3 \subseteq S$.
Continuando così, possiamo affermare che $H = \bigcup_{K>0} R^K \subseteq S$. Quindi H è la più piccola relazione transitiva che contiene R.

Chiusura riflessiva + simmetrica

$$\bar{R}^{R+S} = R \cup R^{-1} \cup I_A$$
$$M_{\bar{R}^{R+S}} = M_R \oplus M_R^T \oplus I$$

Chiusura riflessiva + transitiva

$$\bar{R}^{R+T} = \bigcup_{K>0} R^K \cup I_A = \bigcup_{K\geq 0} R^K$$

Chiusura simmetrica + transitiva

$$\overline{R}^{S+T} = \bigcup_{k>0} (R \cup R^{-1})^k$$!! Prima chiudo simmetricamente poi transitivamente

Chiusura simmetrica + riflessiva + transitiva

$$\overline{R}^{RST} = \bigcup_{k\geq 0} (R \cup R^{-1})^k$$!! Prima chiudo simmetricamente poi transitivamente.

Relazione d'equivalenza

Si dice una relazione d'equivalenza una relazione che è simmetrica, riflessiva e transitiva. La chiusura d'equivalenza esiste sempre in quanto si può sempre chiudere riflessivamente, simmetricamente e transitivamente.

Con il grafo d'adiacenza di una relazione la chiusura equivalente è immediata: basta saturare ogni connessione in ogni sezione connessa.

Se $R, T \subseteq A \times A$, avremo che $R \cap T$ è ancora d'equivalenza, R^{-1} è transitiva, $R \cup T$ e $R \cdot T$ in generale non sono transitivi

ESEMPIO: Relazione modulo $n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\equiv_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a,b) \in \equiv_n$ se $a-b = Kn$ $K \in \mathbb{Z}$. Dati $a = K_1 n + r_a$ e $b = K_2 n + r_b$.
Avremo che $a-b = (K_1-K_2)n + (r_a - r_b)$ quindi $a \equiv_n b \iff r_a = r_b$.
Dimostriamo che $\equiv_n$ è di equivalenza:
1) riflessiva: $n \mid a-a = 0$ n è sempre divisore di 0
2) simmetrica: $n \mid a-b = n \mid b-a$
3) transitiva: $n \mid a-b$ e $n \mid b-c$, quindi $r_a = r_b$ e $r_b = r_c$ e quindi $r_a = r_c \Rightarrow n \mid a-c$

Si può pensare alle relazioni di equivalenza come una generalizzazione dell'uguaglianza.

Classe d'equivalenza

Sia $\rho \subseteq A \times A$ di equivalenza, dato un elemento $a \in A$ la classe d'equivalenza con rappresentante a rispetto ρ è:

$$[a]_\rho := \{ b \in A : (a,b) \in \rho \}$$

L'insieme delle classi d'equivalenza di ρ è chiamato insieme quoziente ed è indicato con $A/\rho := \{ [a]_\rho \ a \in A \}$

Una partizione è una collezione di insiemi A_i con $i \in I$ e $A_i \subseteq A$: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e $\forall i, j \in I$ $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$. È facile capire che A/ρ forma una partizione di A. Viceversa, se $A_i, i \in I$ è una partizione di A, posso definire una relazione d'equivalenza σ tale che $A/\sigma = \{ A_i \ i \in I \}$

Relazione d'ordine

Data una relazione $R \subseteq A \times A$, essa è d'ordine se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica

Si può pensare alle relazioni d'ordine come una generalizzazione di $\leq$. Infatti si usa $\leq$ per indicare una relazione d'ordine.

Se $\forall a, b \in A$ $a \leq b$ o $b \leq a$ allora la relazione d'ordine è totale. Se invece $\exists a, b \in A$: $a \nleq b$ e $b \nleq a$ allora a e b si dicono non-confrontabili.

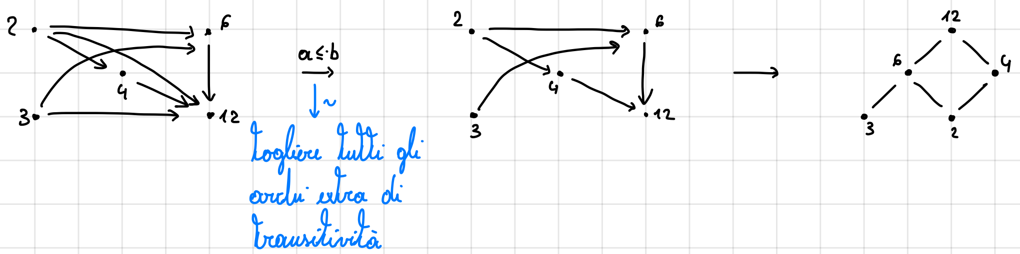
La coppia $(A, \leq)$ con $\leq$ relazione d'ordine si chiama POSET (Partially Ordered Set)

La chiusura d'ordine non sempre esiste perché in generale la chiusura antisimmetrica. Per tentare di chiudere una R antisimmetrica bisogna prima chiudere riflessivamente e transitivamente. Se quest'ultima chiusura è antisimmetrica, allora essa è la chiusura d'ordine di R.

Diagramma di Hasse di un Poset

Sia $\le \subseteq A\times A$ d'ordine. Diciamo che b copre a se $a\le b$ e non esiste alcun $c\in A$ $c\neq a,b$: $a\le c$ e $c\le b$ (si indica $a \lessdot b$)
Si definisce diagramma di Hasse di $(A,\le)$ un diagramma così costruito:
1) Nel grafo di adiacenza di $\le$ considero solo gli archi $a\to b$ con $a\lessdot b$
2) Si orientano gli archi dall'alto verso il basso: $a\to b \implies {}^{b}_{a}$

ESEMPIO: $A=\{2,3,4,6,12\}$, $\le\subseteq A\times A$ $a\le b$ se $a|b$ (a divide b)



Minimo, minimale, massimo e massimale

Dato $(A,\le)$ un Poset allora $a\in A$ è minimo se $\forall x\in A$ $a\le x$ e massimo se $\forall x\in A$ $a\ge x$. Minimo e massimo sono unici.

Chiamiamo minimale un elemento $a\in A$ tale che se $x\le a \Rightarrow x=a$. Analogamente il massimale è un $a\in A$: se $x\ge a\Rightarrow x=a$. Se minimo o massimo esistono, essi saranno rispettivamente minimale o massimale e, in più, non esistono altri minimali o massimali che non sono minimi o massimi. Un minimale/massimale non per forza è un minimo/massimo

Se A è finito e in $(A,\le)$ abbiamo un unico minimale (massimale) a, allora a è minimo (massimo). Se A è infinito, invece, la proposizione precedente non è valida.

Maggioranti, minoranti, estremo superiore e inferiore

Sia $(A,\le)$ un Poset e $B\subseteq A$. Abbiamo che $m\in A$ si dice maggiorante se $\forall x\in B$ $x\le m$ e minorante se $\forall x\in B$ $x\ge m$. Chiamiamo, quindi, estremo superiore di $B\subseteq A$ il minimo dei maggioranti di B ed estremo inferiore il massimo dei minoranti.

Reticoli

Definiamo reticolo un Poset $(A,\le)$ per cui $\exists\, \mathrm{Inf}\{a,b\}, \exists\, \mathrm{Sup}\{a,b\}$ $\forall a,b\in A$. I reticoli si possono assiomatizzare come strutture algebriche

FUNZIONI

Una funzione $f:A\to B$ è una relazione $f\subseteq A\times B$: $\forall a\in A$ $\exists!\, b\in B$: $(a,b)\in f$. Visto che l'elemento b associato ad a è unico e dipende da a (per definizione), invece di scrivere $(a,b)\in f$ si usa $b=f(a)$.

Data $f: A\to B$ con $b=f(a)$, chiamiamo:
- A dominio di f e B codominio
- $b\in B$ immagine di a.
- $a\in A$ controimmagine di b: $f^{-1}(b)=\{a\in A: f(a)=b\}$. !! $f^{-1}(E)$ può essere $\emptyset$, $f(C)$ non è mai vuoto

Composizione di funzioni

Data $f:A\to B$ e $g:B\to C$, allora il prodotto (o composizione) delle funzioni $f\cdot g$ è una funzione $f\cdot g: A\to C$.
La dicitura $f\cdot g$ è equivalente a $g\circ f(a)=g(f(a))$. Si dimostra che $I_A\cdot f=f$ e $f\cdot I_B=f$

Funzione inversa

La relazione inversa f^{-1} non sempre è una funzione. La prima condizione è che f sia iniettiva:

$\left.\begin{array}{l} - \text{ se } f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \\ - \text{ se } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \\ - \ \forall b \in B \quad f^{-1}(B) \text{ contiene al più un elemento} \end{array}\right\}$ Equivalenti

Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$, possiamo dire:

1) se f, g è iniettiva allora $f \cdot g$ è iniettiva
2) se $f \cdot g$ è iniettiva allora f è iniettiva.

L'iniettività non basta per rendere f^{-1} una funzione. Infatti può essere che la funzione f non copra tutto il codominio, rendendo la relazione inversa non funzione. Possiamo allora completare la relazione inversa con: $d = f^{-1} \cup \{(x, a_1) \quad x \in B / f(A)\}$ ($a_1 \in A$ scelto a caso). d soddisfa $f \cdot d = I_A$ ed è detta inversa destra. Si può dimostrare che f è iniettiva se e solo se f ammette inversa destra.

La seconda condizione affinchè f^{-1} sia una funzione è che sia suriettiva:

$\left.\begin{array}{ll} 1) & \forall b \in B \quad \exists a \in A: f(a) = b \\ 2) & \forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \geq 1 \\ 3) & f(A) = B \end{array}\right\}$ Equivalenti

Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$ allora:

1) se f, g sono suriettive allora $f \cdot g$ è suriettiva
2) se $f \cdot g$ è suriettiva allora g è suriettiva

Analogamente all'iniettività, f è suriettiva se e solo se possiede l'inversa sinistra ossia $\exists s: B \to A: \quad s \cdot f = I_B$. La funzione s la definiamo come $s = \forall b \in B \quad s(b) = a$ con a scelto a caso in $f^{-1}(b)$.

Diciamo che f è biettiva se e solo se f possiede inversa destra e sinistra. Le due inverse coincidono e sono la funzione inversa di f $\quad f^{-1} = s = d$

Funzione mappa

Data $\rho \subseteq A \times A$ d'equivalenza, posso costruire $\quad \pi_\rho: A \to A/\rho \quad$ con $\quad \pi_\rho(a) = [a]_\rho \quad \forall a \in A \quad$ detta mappa canonica di ρ.

La mappa canonica di ρ è suriettiva poichè $\forall [b]_\rho \in A/\rho \quad \pi_\rho(b) = [b]_\rho$ e una inversa sinistra è: $\quad s: A/\rho \to A \quad$ con $\quad s([a]_\rho) = a$

Nucleo di funzione

Data una funzione $f: A \to B$, definiamo il nucleo di f $\quad Ker f \subseteq A \times A$ come una relazione tale che $(a_1, a_2) \in Ker f$ se $f(a_1) = f(a_2)$.
La relazione $Ker f$ è di equivalenza.

Le classi di equivalenza di $Ker f$ sono $\quad [a]_{Ker f} = f^{-1}(a)$

Teorema di fattorizzazione

Data $f: A \to B$, usando il nucleo di f è possibile costruire $\pi_{Ker f}: A \to A/_{Ker f}$. Esiste un'unica funzione iniettiva $g: A/_{Ker f} \to B$ tale che $f = \pi_{Ker f} \cdot g$. Inoltre se f è suriettiva, g è biunivoca.

CARDINALITÀ DI UN INSIEME

Due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità (equipotenti, $|A| = |B|$) se esiste $g: A \to B$ biunivoca. Se $h: A \to B$ è iniettiva, allora $|A| \leq |B|$, nel caso in cui $\nexists g: A \to B$ biunivoca scriviamo $|A| < |B|$.

Se A è finito, allora può essere messo in relazione biunivoca con $\{1, \dots, n\}$. Diciamo che A è numerabile se $|A| = |\mathbb{N}|$.

Possiamo dire che:

1) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
2) $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
3) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$
4) Σ alfabeto finito, $|\Sigma^*| = |\mathbb{N}|$
5) Una famiglia di insiemi A_i $i \in I$ con $|I| \leq |\mathbb{N}|$ e $|A_i| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq |\mathbb{N}|$
6) $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ → argomento di Cantor: diagonalizzazione.

Teorema di Cantor

Prendiamo A infinito ($|A| \geq |\mathbb{N}|$) allora l'insieme delle parti di A $2^A = P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ ha cardinalità $|P(A)| > |A|$

L'infinito più piccolo di tutti ($|\mathbb{N}|$) viene detto $\aleph_0$. Quello successivo è $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Quelli superiori si costruiscono usando il teorema sopra. Non è ancora stato dimostrato se esiste A: $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$ (Ipotesi del continuo).