Esempi uso sv. Taylor

$\cos(e^x-1)$ $\quad x \to 0 \quad \cos(e^x-1) \to 1$ $\Rightarrow \cos\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)\right) =$

$$1-\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4}{24}+o\left(\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(t) = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4) \\ e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4) \Rightarrow e^t-1 = t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4) \end{array}\right]$$

$$= 1-\frac{\left(x^2+\frac{x^4}{4}+x^3+\cancel{\frac{x^6}{36}}+\cancel{\frac{x^8}{24}}+o(x^5)\right)}{2}+\frac{\left(x^4+\cancel{\frac{x^6}{16}}+o(x^5)\right)}{24}+o(x^4)=$$

$$= \ldots = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} \underset{x-1=t}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)-t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}-\frac{t^2}{2}+o(t^2)-\cancel{t}}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \lim_{t\to 0}-\frac{1}{2}\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} = -\frac{1}{2}$$

infin. + veloce di t^2 => meno rel.

$\ln(1+t) = t+o(t)$

$= t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ => SVIL. TAYLOR

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\sin(2x)-2x^2}{2(\sin x-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}+\cancel{\frac{4x^2}{2}}+\frac{8x^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{2x}+\frac{8x^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{2x^2}}{-8\frac{x^3}{3!}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{8}{3!}x^3+o(x^3)}{-\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+o(x^3)}{-x^3+o(x^3)} = -2$$

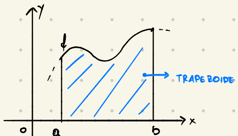
$\sin x = x+o(x)$

$= x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$e^t = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

Trapezioide

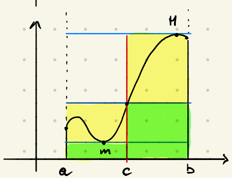
Sia $f:[a;b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in $[a;b]$. Con $T_f([a;b])$ si intende il trapezoide delimitato a f in $[a;b]$



Integrale definito

Data $f:[a;b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in $[a;b]$. Si definisce integrale definito la misura con segno di $T_f([a;b])$. Si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

ES.: $f(x)=c \quad \int_a^b c\,dx = c(b-a)$



Sia $f:[a;b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua in $[a;b]$, per Weierstrass esistono $M>f(x)\ \forall x$, $m<f(x)\ \forall x$.

Divido $[a;b]$ in due parti uguali:

esistono max e min sia per $f|[a;c]$ che per $f|[c;b]$

.... per n volte

↳ Divido $[a;b]$ in n intervalli uguali. In ogni intervallo, f è continua => per Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti e le aree delimitate saranno: $M_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $m_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$

● → Somma inf ● → Somma sup.

Si dice somma superiore $S_n=\sum_{i=0}^{n}M_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ e somma inferiore $s_n=\sum_{i=0}^{n}m_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ con $s_n\le S_n\ \forall n$. Esse sono successioni.

Per $n\to+\infty$ $\quad m(b-a)=s_1\le s_n\le S_n\le S_1$ => sono limitate. Per lo più s_n è crescente, mentre S_n è decrescente

Ciò ci indica che le due somme sono convergenti (monotone limitate) => $\lim_{n\to+\infty}s_n=\mathrm{Sup}(s_n)$, $\lim_{n\to+\infty}S_n=\mathrm{Inf}(S_n)$

È intuibile che $\mathrm{Sup}(s_n)=\mathrm{Inf}(S_n)$ => $\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$

Misura con segno di un trapezoide lungo [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{Sup}(s(n)) = \mathrm{Inf}(S(n))$$

ES.: $f(x)=x^2 \quad A:[0;1] \Rightarrow \int_0^1 x^2dx = ?$

$\frac{b-a}{n}\to\frac{1}{n} \Rightarrow x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<\ldots<x_{n-1}=\frac{n-1}{n}<x_n=1$

↳ $[x_i;x_{i+1}]=\left[\frac{i}{n};\frac{i+1}{n}\right]$

f monotona crescente in A => ha minimo $m(x_i;f(x_i))$ e massimo $M(x_{i+1};f(x_{i+1}))$

↳ $s_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n}\cdot f(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\boxed{\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3(1+\ldots)}{6n^3}=\frac{1}{3}$

Somma primi n quadrati

↳ $S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot f(x_{i+1})=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{(i+1)^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3(1+\ldots)}{6n^3}=\frac{1}{3}$