# Esame di Geometria e Algebra Lineare

**Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Prima prova in itinere – A.A. 2017/18**

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
|---|---|---|
| | | |

1. Dato il parametro reale $a$, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ -x+y+(a-1)z=1-a \\ 2x+ay+(a+2)z=a \end{cases} .$$

   i. Discutere il numero delle soluzioni del sistema in funzione di $a$.

   ii. Trovare gli eventuali valori di $a$ per cui le tre equazioni definiscono in $\mathbb{R}^3$ tre piani appartenenti al medesimo fascio proprio. In tal caso, scrivere una rappresentazione parametrica della retta a sostegno del fascio.

   iii. Per $a=0$ calcolare la soluzione del sistema.

2. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i seguenti sottospazi:

$$U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z=0\} \qquad \text{e} \qquad V=\mathcal{L}\left((1,1,0,0)\,,(2,-1,0,1)\,,(4,1,0,1)\right).$$

   i. Determinare dimensioni e basi di $U, V$ ed una rappresentazione algebrica di $V$.

   ii. Determinare dimensioni e basi di $U\cap V$ e $U+V$.

   iii. Completare la base di $U\cap V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

3. Consideriamo la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   i. Determinare una base $\mathcal{B}=\{\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A$.

   ii. Scrivere la matrice $M$ che rappresenta l'applicazione $f_A(\mathbf{x})=A\,\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

   iii. Trovare una base del nucleo ed una dell'immagine di $f_A$.

**Soluzioni**

1. i. Studiamo il sistema lineare:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a-1 & 1-a \\ 2 & a & a+2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2a-1 & 2-a \\ 0 & a-2 & -a+2 & a-2 \end{array}\right].$$

Se $a = 2$ la matrice è già ridotta a scala:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Se $a \neq 2$, possiamo invece semplificare l'ultima riga ed ottenere

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2a-1 & 2-a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a+1 & -a \end{array}\right].$$

La classificazione delle soluzioni del sistema è quindi:

- $a = 2$ : vale $r([A|B]) = r(A) = 2 = 3 - 1$ e pertanto esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro;
- $a = -\frac{1}{2}$ : vale $r([A|B]) = 3 > 2 = r(A)$, quindi il sistema non ammette soluzioni;
- $a \neq -\frac{1}{2}, 2$ : vale $r([A|B]) = r(A) = 3$, di conseguenza esiste un'unica soluzione.

ii. I tre piani hanno una retta in comune se e solo se $a = 2$. La rappresentazione parametrica della retta si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 2y + 3z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii. Se $a = 0$ il sistema ridotto a scala è:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y - z = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

2. i. Il sottospazio $U$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare:

$$x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ w = \gamma \end{cases}$$

e quindi

$$(x, y, z, w) = \alpha \cdot (-1, 1, 0, 0) + \beta \cdot (-1, 0, 1, 0) + \gamma \cdot (0, 0, 0, 1), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pertanto una base di $U$ è $\mathcal{B}_U = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e la sua dimensione è 3.
Per studiare il sottospazio $W$ riduciamo a scala la seguente matrice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & -3 & -3 & -x+y \\ 0 & 1 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 1 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+3w \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right].$$

Dalla posizione dei pivot deduciamo che $\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 1)\}$ è una base di $W$ e quindi la sua dimensione è 2. Una sua rappresentazione algebrica è

$$\begin{cases} -x + y + 3w = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

ii. Per studiare l'intersezione dei due sottospazi sostituiamo la rappresentazione parametrica di $U$ nelle equazioni di $W$ :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\alpha+3\gamma=0 \\ \beta=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{2}s \\ \beta=0 \\ \gamma=s \end{cases}$$

Di conseguenza i vettori in $U \cap W$ sono

$$(x,y,z,w)=s\cdot\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0,1\right),\ s\in\mathbb{R}.$$

Quindi il sottospazio ha dimensione 1 ed una sua base è $\{(3,-3,0,2)\}$. Utilizzando la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=4,$$

da cui ricaviamo che $U+W=\mathbb{R}^4$. Una sua base è quindi ad esempio la base canonica $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}\}$.

iii. É immediato verificare che l'insieme $\{(3,-3,0,2),\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}\}$ è linearmente indipendente e quindi è una base di $\mathbb{R}^4$.

3. i. Il polinomio caratteristico della matrice è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2\lambda.$$

Di conseguenza gli autovalori sono $\lambda_1=\lambda_2=1$, di molteplicità algebrica 2, e $\lambda_3=0$, che è un autovalore semplice. Gli autospazi associati sono

$$V_1=\ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$V_0=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Quindi una base di autovettori è

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

ii. Poiché $f_A(\mathbf{b_i})=\lambda_i\cdot\mathbf{b_i}$ per $i=1,2,3$, la matrice che rappresenta $f_A$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii. Osserviamo che $V_0=\ker(f_A)$, da cui una base del nucleo è:

$$\mathcal{B}_{\ker(f_A)}=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

L'immagine di $f_A$ corrisponde allo spazio delle colonne di $A$. Dalla riduzione a scala della matrice sappiamo che una base di questo spazio è costituita dalle prime due colonne di $A$:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f_A)}=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

| Esame di Geometria e Algebra Lineare | | |
|---|---|---|
| **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Seconda prova in itinere – A.A. 2017/18** | | |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

1. Sia $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\}$.

   i. Determinare una base ortonormale di $U$ ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Determinare la proiezione ortogonale $P_U(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ su $U$.

   iii. Determinare il coseno dell'angolo tra $\mathbf{v}$ e $P_U(\mathbf{v})$.

2. In $\mathbb{E}^2$ consideriamo la conica $\gamma$ di equazione $2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0$.

   i. Classificare $\gamma$ e scrivere una sua forma canonica.

   ii. Determinare l'eventuale centro di simmetria e le equazioni cartesiane degli assi di simmetria di $\gamma$.

   iii. Determinare le intersezioni di $\gamma$ con gli assi cartesiani ed abbozzare un disegno della conica. Se $(x_0, y_0)$ è un punto di $\gamma$, quale segno può avere $y_0$?

3. In $\mathbb{E}^3$ si consideri la sfera $\sigma$ di centro $C = (0, 0, 1)$ e contenente $A = (1, 0, 1)$.

   i. Scrivere l'equazione cartesiana di $\sigma$.

   ii. Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $A$ e contenente la retta

   $$r : \begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

   Determinare centro e raggio della circonferenza $\gamma = \sigma \cap \pi$.

   iii. Scrivere l'equazione cartesiana del cono di vertice $C$ ed avente $\gamma$ come direttrice.

## Soluzioni

1. i. Una base $\mathcal{B}_U$ di $U$ si ottiene risolvendo il sistema lineare $x+y-z=0$ :

$$\begin{cases} x=-t_1+t_2 \\ y=t_1 \\ z=t_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (x,y,z)=t_1\cdot(-1,1,0)+t_2\cdot(1,0,1), \\ \mathcal{B}_U=\{\mathbf{u_1}=(-1,1,0),\mathbf{u_2}=(1,0,1)\}. \end{array}$$

Per ottenere una base ortogonale applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{u_1'}=\mathbf{u_1}=(-1,1,0), \quad \mathbf{u_2'}=\mathbf{u_2}-\frac{\langle \mathbf{u_1'},\mathbf{u_2}\rangle}{\|\mathbf{u_1'}\|^2}\cdot\mathbf{u_1'}=(1,0,1)-\frac{-1}{2}\cdot(-1,1,0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right).$$

Infine, normalizziamo i due vettori per ottenere la base ortonormale di $U$ :

$$\tilde{\mathcal{B}}_U=\left\{\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

Per costruzione il vettore dato dai coefficienti dell'equazione di $U$ è ortogonale ad $U$ e quindi può essere usato per costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}=\left\{\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

ii. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $U$ é

$$P_U(\mathbf{v})=\langle\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1},\mathbf{v}\rangle\cdot\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}+\langle\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2},\mathbf{v}\rangle\cdot\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)+\frac{5}{\sqrt{6}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right).$$

iii. Il coseno dell'angolo tra $\mathbf{v}$ e $P_U(\mathbf{v})$ è

$$\cos\left(\widehat{\mathbf{v},P_U(\mathbf{v})}\right)=\frac{\langle\mathbf{v},P_U(\mathbf{v})\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|P_U(\mathbf{v})\|}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

2. i. Le matrici della conica sono

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 20 \\ 6 & 20 & 18 \end{bmatrix}.$$

Gli invarianti della conica sono $I_1=12$, $I_2=11$ e $I_3=-242$, da cui ricaviamo che $\gamma$ è un ellisse reale. Gli autovalori di $A$ soddisfano $\lambda_1+\lambda_2=I_1=12$ e $\lambda_1\lambda_2=11=I_2$, pertanto $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=11$. Di conseguenza una rappresentazione canonica di $\gamma$ è

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\frac{I_3}{I_2}=\tilde{x}^2+11\tilde{y}^2-22=0.$$

ii. Le coordinate del centro di simmetria $Q$ si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$[A|-B]=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -6 \\ 3 & 10 & -20 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -22 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad Q=(0,-2).$$

Gli assi di simmetria della conica sono paralleli agli autovettori della matrice $A$ :

$$V_1=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}\left(\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$V_{11}=\ker\left(\mathbf{v_{11}}=\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

Essendo i due autospazi perpendicolari, le due equazioni cartesiane degli assi si scrivono come:

$$r_1:\langle\mathbf{v_1},\overrightarrow{QP}\rangle=\langle(-3,1),(x,y+2)\rangle=-3x+y+2=0,$$

$$r_{11}:\langle\mathbf{v_{11}},\overrightarrow{QP}\rangle=\langle(1,3),(x,y+2)\rangle=x+3y+6=0.$$

iii. Le intersezioni con gli assi coordinati sono:

$$\gamma \cap r_x : \begin{cases} 2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\gamma \cap r_y : \begin{cases} 2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y^2 + 20x + 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \pm \sqrt{\frac{11}{5}} \end{cases}.$$

Dato che $\gamma$ ha un unico punto di intersezione con $r_x$, questo significa che l'ellisse è tangente all'asse orizzontale. Inoltre, il suo centro si trova nel semipiano $y < 0$. Di conseguenza, ogni punto di $\gamma$ deve avere coordinata $y_0 \leq 0$.

3. i. L'equazione della sfera è

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{CA}\| \quad \Rightarrow \quad \|(x, y, z-1)\| = \|(1, 0, 0)\| \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Il raggio della sfera è $R = \|\overrightarrow{CA}\| = 1$.

ii. Il fascio dei piani contenenti $r$ è

$$\alpha(x - y) + \beta(x - 2z) = 0.$$

Imponendo il passaggio per $A$, otteniamo l'equazione del piano $\pi$ :

$$\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 2z = 0.$$

La distanza del centro $C$ della sfera dal piano $\pi$ è

$$d(C, \pi) = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2}{3}.$$

Utilizzando il teorema di Pitagora, possiamo calcolare il raggio $r$ della circonferenza $\gamma$ :

$$r = \sqrt{R^2 - d(C, \pi)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Il vettore normale a $\pi$ è $\mathbf{n} = (2, -1, -2)$. Il centro della circonferenza si ottiene quindi come

$$Q = C - d(C, \pi) \cdot \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = (0, 0, 1) + \frac{2}{9} \cdot (2, -1, -2) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right).$$

Osserviamo che il punto $Q$ si trova su $\pi$, in quanto le sue coordinate soddisfano l'equazione del piano.

iii. L'equazione del cono si ottiene eliminando dal seguente sistema i parametri $t, x_0, y_0, z_0$ :

$$\begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ (z - 1) = t(z_0 - 1) \\ 2x_0 - y_0 - 2z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x}{t} \\ y_0 = \frac{y}{t} \\ z_0 = 1 + \frac{z-1}{t} \\ 2x - y - 2(t + z - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = t^2 \end{cases}$$

Dalla quarta equazione ricaviamo

$$t = x - \frac{y}{2} - z + 1$$

e quindi l'equazione del cono è

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 - xy - 2xz + yz + 2x - y - 2z + 1.$$

Dopo aver semplificato otteniamo

$$\frac{3}{4}y^2 + xy + 2xz - yz - 2x + y = 0.$$

| Esame di Geometria e Algebra Lineare | | |
|---|---|---|
| **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 08/02/2018** | | |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

1. In $\mathbb{R}^4$ siano $U = \mathcal{L}((2,2,0,1),(1,2,-1,1))$ e $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z - w = x + y - z = y + w = 0\}$.

 i. Determinare dimensioni e basi di $U$ e $W$.

 ii. Determinare le dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.

 iii. Determinare una base ortogonale di $U + W$ (rispetto al prodotto scalare euclideo).

 iv. Determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1,0,1,0)$ su $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare euclideo).

2. In $\mathbb{E}^3$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 2z = 1, \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

 i. Trovare una rappresentazione parametrica per entrambe le rette e calcolare la loro reciproca distanza. Stabilire quindi se le rette siano parallele, incidenti o sghembe. Infine, dire se le loro giaciture sono ortogonali.

 ii. Determinare l'equazione cartesiana della superficie di rotazione $\mathcal{Q}$ ottenuta ruotando $s$ intorno ad $r$.

 iii. Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica allora riconoscerla.

3. In $\mathbb{R}^3$ siano $S_3 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1} = (1,1,1), \mathbf{v_2} = (0,1,1), \mathbf{v_3} = (1,1,0)\}$.

 i. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere i vettori di $S_3$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

 ii. Dato $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definita da:

$$f_k(\mathbf{v_1}) = (1,1,1), \quad f_k(\mathbf{v_2}) = (-1,3,0), \quad f_k(\mathbf{v_3}) = (0, 1-k, 3-k).$$

 Scrivere la matrice $F_k$ che rappresenta $f_k$ rispetto ad $S_3$. Verificare che $\mathbf{v_1}|_{S_3}$ è autovettore di $F_k$.

 iii. Calcolare traccia, determinante e rango di $f_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

 iv. Determinare eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $f_k$ risulti autoaggiunta (rispetto al prodotto scalare euclideo). In questi casi trovare una base ortonormale di autovettori di $f_k$.

 v. Dire se $f_4$ è diagonalizzabile.

## Soluzioni

1. i. Una base $\mathcal{B}_U$ di $U$ si ottiene riducendo a scala la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_U = \{(1,2,-1,1),(0,-2,2,-1)\}.$$

Una base $\mathcal{B}_W$ di $W$ si ricava risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x - z - w = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = -t_2 \\ z = t_1 \\ w = t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (x,y,z,w) = t_1 \cdot (1,0,1,0) + t_2 \cdot (1,-1,0,1), \qquad \mathcal{B}_W = \{(1,0,1,0),(1,-1,0,1)\}.$$

Quindi $U$ e $W$ sono spazi di dimensione 2.

ii. Una base di $U+W$ si ottiene riducendo a scala la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}_{U+W} = \{\mathbf{v_1} = (1,0,1,0), \mathbf{v_2} = (0,1,1,-1), \mathbf{v_3} = (0,0,4,-3)\}.$$

Quindi vale $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 1$.

iii. Per ottenere una base ortogonale di $U+W$ applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\mathcal{B}_{U+W}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1'} &= \mathbf{v_1} = (1,0,1,0), \\ \mathbf{v_2'} &= \mathbf{v_2} - \tfrac{\langle \mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2} \rangle}{\|\mathbf{v_1'}\|^2} \cdot \mathbf{v_1'} = (0,1,1,-1) - \tfrac{1}{2}(1,0,1,0) = \left(-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, -1\right), \\ \mathbf{v_3'} &= \mathbf{v_3} - \tfrac{\langle \mathbf{v_1'}, \mathbf{v_3} \rangle}{\|\mathbf{v_1'}\|^2} \cdot \mathbf{v_1'} - \tfrac{\langle \mathbf{v_2'}, \mathbf{v_3} \rangle}{\|\mathbf{v_2'}\|^2} \cdot \mathbf{v_2'} = (0,0,4,-3) - 2 \cdot (1,0,1,0) - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, -1\right) = (-1,-2,1,-1). \end{aligned}$$

Infine, normalizziamo i vettori per ottenere la base ortonormale di $U+W$ :

$$\tilde{\mathcal{B}}_{U+W} = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \right\}.$$

iv. Osserviamo che $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \in W$. Di conseguenza la sua proiezione su $W^\perp$ è il vettore nullo.

2. i. Per trovare le rappresentazioni parametriche di $r$ e $s$ risolviamo i corrispondenti sistemi lineari:

$$r: \begin{cases} x = t_1 \\ y = -t_1 \\ z = 1 - t_1 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2t_2 \\ y = 1 + 2t_2 \\ z = t_2 \end{cases},$$

da cui otteniamo

$$r: (x,y,z) = (0,0,1) + t_1 \cdot (1,-1,-1) \qquad \text{ed} \qquad s: (x,y,z) = (1,1,0) + t_2 \cdot (2,2,1).$$

Questo significa che $P = (0,0,1)$ e $Q = (1,1,0)$ sono rispettivamente punti di $r$ ed $s$, a cui è associato il vettore geometrico $\overrightarrow{PQ} = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$, mentre $\mathbf{u} = (1,-1,-1)$ e $\mathbf{v} = (2,2,1)$ appartengono alle rispettive giaciture. La distanza tra le due rette è:

$$\mathrm{d}(r,s) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{PQ})}{G(\mathbf{u}, \mathbf{v})}},$$

dove

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 26,$$

$$G(\mathbf{u},\mathbf{v},\overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle & \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle & \langle \mathbf{u},\overrightarrow{PQ}\rangle \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle & \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle & \langle \mathbf{v},\overrightarrow{PQ}\rangle \\ \langle \overrightarrow{PQ},\mathbf{u}\rangle & \langle \overrightarrow{PQ},\mathbf{v}\rangle & \langle \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 36\ .$$

Di conseguenza $\mathrm{d}(r,s) = \frac{6}{\sqrt{26}}$. Questo implica che le rette non sono incidenti. D'altra parte non possono essere parallele, poiché i rispettivi vettori direttori non sono proporzionali fra loro. Risulta quindi che $r$ ed $s$ sono sghembe.

Infine, le giaciture delle due rette non sono perpendicolari in quanto $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \neq 0$.

ii. Dati $S = (x,y,z)$ e $Q_0 = (x_0,y_0,z_0)$ generici punti dello spazio e della retta $s$, rispettivamente, l'equazione della superficie di rotazione si ottiene eliminando dal seguente sistema i parametri $t, x_0, y_0, z_0$ :

$$\begin{cases} \overrightarrow{QQ_0} = t\cdot \mathbf{v} \\ \langle \overrightarrow{Q_0S},\mathbf{u}\rangle = 0 \\ \|\overrightarrow{PS}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_0 = 1+2t \\ y_0 = 1+2t \\ z_0 = t \\ (x-x_0)-(y-y_0)-(z-z_0) = 0 \\ x^2+y^2+(z-1)^2 = x_0^2+y_0^2+(z_0-1)^2 \end{cases}$$

Sostituendo nella quarta equazione $x_0, y_0, z_0$ ricavati dalle prime tre, otteniamo

$$t = -x+y+z$$

e quindi l'equazione della superficie è

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 2(1-2x+2y+2z)^2+(-1-x+y+z)^2.$$

Dopo aver semplificato otteniamo

$$4x^2+4y^2+4z^2-9xy-9xz+9yz-3x+3y+4z+1=0.$$

iii. La superficie ottenuta dalla rotazione di una retta rispetto ad una seconda retta a lei sghemba è sempre un iperboloide ad una falda. Questo si può verificare esplicitamente anche dal calcolo degli invarianti della quadrica:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9/2 & -9/2 \\ -9/2 & 4 & 9/2 \\ -9/2 & 9/2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -9/2 & -9/2 & -3/2 \\ -9/2 & 4 & 9/2 & 3/2 \\ -9/2 & 9/2 & 4 & 2 \\ -3/2 & 3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$I_4 = \frac{9}{4} < 0 \quad \text{ed} \quad I_2 = -\frac{51}{4} \leq 0.$$

3. i. $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ poiché è possibile esprimere i vettori della base canonica come combinazione dei vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$. Infatti

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}, \qquad \mathbf{e_3} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}, \qquad \mathbf{e_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3} = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3},$$

ii. Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{e_1}) &= f_k(\mathbf{v_1}) - f_k(\mathbf{v_2}) = (1,1,1)-(-1,3,0) = (2,-2,1), \\ f_k(\mathbf{e_2}) &= -f_k(\mathbf{v_1}) + f_k(\mathbf{v_2}) + f_k(\mathbf{v_3}) = -(1,1,1)+(-1,3,0)+(0,1-k,3-k) = (-2,3-k,2-k), \\ f_k(\mathbf{e_3}) &= f_k(\mathbf{v_1}) - f_k(\mathbf{v_3}) = (1,1,1)-(0,1-k,3-k) = (1,k,-2+k). \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta $f_k$ rispetto alla base canonica è

$$F_k = \begin{bmatrix} f_k(\mathbf{e_1})|_{S_3} & f_k(\mathbf{e_2})|_{S_3} & f_k(\mathbf{e_3})|_{S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3-k & k \\ 1 & 2-k & -2+k \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che $\mathbf{v_1}|_{S_3}$ è autovettore di $F_k$ utilizzando la definizione:

$$F_k * \mathbf{v_1}|_{S_3} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3-k & k \\ 1 & 2-k & -2+k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che l'autovalore associato a $\mathbf{v_1}$ é $\lambda_1 = 1$.

iii. Svolgendo i conti sulla matrice $F_k$ otteniamo $\mathrm{Tr}(f_k) = 3$ e $\det(f_k) = 3k - 11$. Di conseguenza il rango di $f_k$ è 3 per ogni $k \neq \frac{11}{3}$. Nel caso particolare abbiamo che il primo minore principale è

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{16}{3} \neq 0,$$

pertanto il rango di $f_{\frac{11}{3}}$ è 2.

iv. L'applicazione $f_k$ è autoaggiunta se e solo se $F_k$ è simmetrica, quindi se e solo se vale $k = 2 - k$, ovvero $k = 1$. In tal caso sappiamo che

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (Tr)(f_1) = 3 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(f_1) = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2\lambda_3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}.$$

Tutti gli autospazi sono monodimensionali, pertanto $V_1 = \mathcal{L}(\mathbf{v_1} = (1, 1, 1))$. Inoltre:

$$V_4 \simeq \ker\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow V_4 = \mathcal{L}(\mathbf{u_1} = (1, -1, 0)),$$

$$V_{-2} \simeq \ker\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow V_{-2} = \mathcal{L}(\mathbf{u_2} = (-1, -1, 2)).$$

L'insieme $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di $f_1$. Per ottenere una base ortonormale dobbiamo dividere i vettori per le rispettive norme:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

v. Se $k = 4$ abbiamo

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (Tr)(f_4) = 3 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(f_4) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2\lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\ .$$

Ma dato che $F_4$ non è la matrice identità, segue che $f_4$ non è diagonalizzabile.

# Esame di Geometria e Algebra Lineare

**Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 20/06/2018**

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
|---|---|---|
| | | |

1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ rappresentata rispetto alla base canonica da

$$F = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile e calcolare le rappresentazioni cartesiane dei suoi autospazi. Verificare che esiste un autospazio $U$ di dimensione 2 e che $\mathbf{v} = (1,1,1)$ non appartiene ad $U$.

ii. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori e si scriva la matrice rappresentativa di $f$ rispetto a $\mathcal{B}$.

iii. In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo un generico punto $P = (x_P, y_P, z_P)$. Sia $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ un secondo punto tale che:

- $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(\mathbf{v})$;
- il punto medio $M$ del segmento $(P, Q)$ appartenga al piano $\Pi$ passante per l'origine e di giacitura $U$.

Dopo aver calcolato le coordinate di $Q$ in funzione di quelle di $P$, si dimostri che $f(x_P, y_P, z_P) = (x_Q, y_Q, z_Q)$.

2. Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{u} = (1,1,-2,0)$ e $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$.

i. Completare l'insieme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ad una base ortogonale $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ di $\mathbb{R}^4$.

ii. Dati i sottospazi $U = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2})$ e $V = \{\mathbf{v}\}^\perp$, calcolare dimensioni e basi di $U \cap V$ ed $U + V$.

iii. Scrivere la matrice $P$ che rappresenta la proiezione ortogonale $P_U \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ sul sottospazio $U$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

iv. Determinare le basi del nucleo e dell'immagine della funzione rappresentata dalla matrice $\mathbb{I}_4 - P$.

3. In $\mathbb{E}^3$ consideriamo il punto $V = (1,1,2)$ e la circonferenza $\mathcal{C}_1$ contenuta nel piano coordinato $yz$ e definita dal sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 - 2z = 0 \end{cases}.$$

i. Scrivere l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V$ e curva direttrice $\mathcal{C}_1$.

ii. Mostrare che la curva $\mathcal{C}_2$ ottenuta come intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano $z = 0$ è una parabola.

iii. Determinare vertice ed asse di $\mathcal{C}_2$.

## Soluzioni

1. i. Calcoliamo gli invarianti della matrice $F$ :

$$c_0 = \det(F) = -1, \quad c_1 = -I_2(F) = 1, \quad c_2 = \mathrm{Tr}(F) = 1, \quad c_3 = -1.$$

Quindi il polinomio caratteristico dell'applicazione è

$$P_f(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(1 - \lambda^2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. I corrispondenti autospazi sono:

$$V_1 = \ker\left(\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad V_1 : \ x + 2y + 3z = 0,$$

$$V_{-1} = \ker\left(\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad V_{-1} : \ \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Chiaramente abbiamo $U = V_1$, ed è facile verificare che le componenti di $\mathbf{v}$ non soddisfano l'equazione che definisce l'autospazio.

ii. Risolvendo i sistemi lineari individuati al punto precedente otteniamo:

$$V_1 : \begin{cases} x = -2t_1 - 3t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \mathcal{L}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)),$$

$$V_{-1} : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_{-1} = \mathcal{L}((1, 1, 1)).$$

Una base di autovettori è pertanto $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 1, 1)\}$, rispetto a cui la matrice che rappresenta $f$ è

$$F|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

iii. Per prima cosa imponiamo che $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \mathbf{v}$:

$$\begin{cases} x_Q - x_P = k \\ y_Q - y_P = k \\ z_Q - z_P = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_Q = x_P + k \\ y_Q = y_P + k \\ z_Q = z_P + k \end{cases}.$$

Il punto medio del segmento si ottiene come

$$M = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2}\right) = \left(x_P + \frac{k}{2}, y_P + \frac{k}{2}, z_P + \frac{k}{2}\right).$$

Dato che $\Pi$ contiene l'origine, l'equazione che definisce il piano è uguale a quella del sottospazio $U$ :

$$\Pi : \ x + 2y + 3z = 0.$$

Imponendo l'appartenenza di $M$ a $\Pi$ otteniamo:

$$k = -\frac{x_P + 2y_P + 3z_P}{3}.$$

Quindi

$$Q = \left(\frac{2x_P - 2y_P - 3z_P}{3}, \frac{-x_P + y_P - 3z_P}{3}, \frac{-x_P - 2y_P}{3}\right),$$

da cui è facile verificare che $f(x_P, y_P, z_P) = (x_Q, y_Q, z_Q)$.

2. i. I vettori $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ perpendicolari ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono soddisfare

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t_1 - \frac{2}{3}t_2 \\ y = t_1 \\ z = -\frac{1}{3}t_2 \\ w = t_2 \end{cases}.$$

Quindi una base di $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}^\perp$ è $\{\mathbf{w_1'} = (1, -1, 0, 0), \mathbf{w_2'} = (2, 0, 1, -3)\}$. Per ottenere una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt agli ultimi due vettori:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w_1} = \mathbf{w_1'} = (1, -1, 0, 0), \\ &\mathbf{w_2} = \mathbf{w_2'} - \tfrac{\langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2'} \rangle}{\|\mathbf{w_1}\|^2} \cdot \mathbf{w_1} = (2, 0, 1, -3) - \tfrac{2}{2} \cdot (1, -1, 0, 0) = (1, 1, 1, -3). \end{aligned}$$

ii. Per prima cosa osserviamo che $V = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2})$. Di conseguenza $U + V = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}) = \mathbb{R}^4$, da cui otteniamo $\dim(U + V) = 4$. Quindi la base canonica di $\mathbb{R}^4$ è una base di $U + V$. Dalla formula di Grassmann otteniamo

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 2.$$

Poiché $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$ appartengono all'intersezione e sono indipendenti, essi formano una base di $U \cap V$.

iii. La proiezione ortogonale di $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ su $U$ è

$$\begin{aligned} P_U(\mathbf{x}) &= \tfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} + \tfrac{\langle \mathbf{w_1}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{w_1}\|^2} \cdot \mathbf{w_1} + \tfrac{\langle \mathbf{w_2}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{w_2}\|^2} \cdot \mathbf{w_2} = \\ &= \tfrac{x+y+z+w}{4} \cdot (1, 1, 1, 1) + \tfrac{x-y}{2} \cdot (1, -1, 0, 0) + \tfrac{x+y+z-3w}{12} \cdot (1, 1, 1, -3) = \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot (5x - y + 2z, -x + 5y + 2z, 2x + 2y + 2z, 6w). \end{aligned}$$

Quindi la matrice rappresentativa di $P_U$ rispetto alla base canonica $S$ è

$$P = \left[\ P_U(\mathbf{e_1})|_S \quad P_U(\mathbf{e_2})|_S \quad P_U(\mathbf{e_3})|_S \quad P_U(\mathbf{e_4})|_S\ \right] = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 & 0 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

iv. La matrice $\mathbb{I}_4 - P$ rappresenta l'applicazione $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} - P_U$, che corrisponde alla proiezione ortogonale $P_{U^\perp}$. Di conseguenza, la sua immagine è il sottospazio $U^\perp$, una cui base è $\{\mathbf{u}\}$, mentre il suo nucleo è il sottospazio $U$, una cui base è $\{\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$.

3. i. Siano $P = (x, y, z)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ rispettivamente due generici punti dello spazio e della generatrice $\mathcal{C}_1$. L'equazione del cono si ottiene eliminando dal seguente sistema i parametri $t, x_0, y_0, z_0$ :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_0P} = t \cdot \overrightarrow{VP_0} \\ x_0 = 0 \\ y_0^2 + z_0^2 - 2z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t(x_0 - 1) \\ y - y_0 = t(y_0 - 1) \\ z - z_0 = t(z_0 - 2) \\ x_0 = 0 \\ y_0^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ t = -x \\ y_0 = \frac{y+t}{1+t} = \frac{x-y}{x-1} \\ z_0 = \frac{z+2t}{1+t} = \frac{2x-z}{x-1} \\ y_0^2 + (z_0 - 1)^2 = 1 \end{cases}.$$

Sostituendo nella quarta equazione $y_0, z_0$ ricavati dalle equazioni precedenti, otteniamo l'equazione della superficie:

$$\frac{(x-y)^2}{(x-1)^2} + \frac{(x-z+1)^2}{(x-1)^2} = 1.$$

Dopo aver semplificato otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 4x - 2z = 0.$$

ii. La curva $\mathcal{C}_2$ è definita dal seguente sistema algebrico:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 4x - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + 4x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Per classificarla consideriamo la curva conica $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ contenuta in $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2+y^2-2xy+4x=0$. Le matrici associate sono

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto gli invarianti di $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ sono

$$I_2=0 \quad \text{ed} \quad I_3=-4,$$

da cui segue che $\widetilde{\mathcal{C}}_2$, e quindi anche $\mathcal{C}_2$, è una parabola.

iii. La matrice $A$ ha polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{Tr}(A)\lambda+\det(A)=\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda-2).$$

Di conseguenza gli autovalori sono $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=2$. Gli autospazi associati sono

$$V_0=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}((1,1)).$$

$$V_2=\ker\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)=\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{L}((1,-1)).$$

L'asse della parabola $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ ha giacitura $V_0$. Il vertice di $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ si ottiene attraverso l'individuazione dell'unica retta tangente a $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ ed appartenente al fascio improprio di rette perpendicolari a $V_0$. Studiamo l'intersezione delle rette di tale fascio con la parabola:

$$\begin{cases} x+y=k \\ x^2+y^2-2xy+4x=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=k-x \\ 4x^2+4(1-k)x+k^2=0 \end{cases}.$$

Esiste un unico punto di intersezione se e solo se il discriminante dell'equazione di secondo grado è nullo:

$$\Delta=16(k^2-2k+1)-16k^2=-32k+16=0 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza il punto di intersezione, che corrisponde al vertice di $\widetilde{\mathcal{C}}_2$, ha coordinate

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Quindi il vertice di $\mathcal{C}_2$ è $(-1/4, 3/4, 0)$ ed il suo asse ha rappresentazione parametrica

$$(x,y,z)=(-1/4,3/4,0)+t\cdot(1,1,0).$$

| Esame di Geometria e Algebra Lineare | | |
|---|---|---|
| **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 12/07/2018** | | |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

1. Dato il parametro reale $k$, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky = 1 - k \\ -x + (k+2)y + kz = 1 \\ (k+1)y + kz = 1 \end{cases}.$$

i. Discutere il numero delle soluzioni del sistema in funzione di $k$.

ii. Verificare che per $k = 0$ il sistema determina una retta $r$ in $\mathbb{E}^3$, e trovarne una rappresentazione parametrica.

iii. Data $s$ la retta di equazione $x = z = 0$, scrivere una rappresentazione algebrica dell'insieme $\mathcal{Q}$ composto dai punti $P$ che soddisfano $d(P, r) = d(P, s)$.

iv. Dopo aver verificato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica, classificarla.

2. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, k, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1-k, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$, dipendenti dal parametro reale $k$, e sia $\mathcal{B}_k = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Sia inoltre $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

i. Determinare per quali valori di $k$ l'insieme $\mathcal{B}_k$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ii. Determinare se la matrice $F$ è diagonalizzabile.

iii. Determinare l'unico valore $\bar{k}$ rispetto a cui $\mathbf{u}$ è autovettore di $f$. Controllare che per tale valore l'insieme $\mathcal{B}_{\bar{k}}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

iv. Scrivere la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}_{\bar{k}}$ (nel dominio e codominio).

3. In $\mathbb{R}^4$, con prodotto scalare canonico, si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (0, 0, -1, 1)$. Siano $U = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $V$ il complemento ortogonale del sottospazio definito dall'equazione $x + y = 0$.

i. Trovare delle basi ortonormali di $U$ e $V$.

ii. Determinare $\dim(U + V)$ e $\dim(U \cap V)$.

iii. Dato $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, calcolare le proiezioni ortogonali $P_U(\mathbf{x}), P_V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$.

iv. Dimostrare che l'applicazione $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ definita da $f(\mathbf{x}) = P_U(\mathbf{x}) + P_V(\mathbf{x})$ è ortogonalmente diagonalizzabile. Dire se $0$ è un autovalore di $f$ ed in tal caso determinare l'autospazio associato.

**Soluzioni**

1. i. Studiamo il sistema lineare:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1-k \\ -1 & k+2 & k & 1 \\ 0 & k+1 & k & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1-k \\ 0 & 2k+2 & k & 2-k \\ 0 & k+1 & k & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1-k \\ 0 & k+1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k & -k \end{array}\right].$$

Se $k \neq -1$ la matrice è già ridotta a scala. Se $k = -1$, invece

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La classificazione delle soluzioni del sistema è quindi:

- $k = 0$ : vale $r([A|B]) = r(A) = 2 = 3 - 1$ e pertanto esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro;
- $k = -1$ : vale $r([A|B]) = 3 > 2 = r(A)$, quindi il sistema non ammette soluzioni;
- $a \neq 0, -1$ : vale $r([A|B]) = r(A) = 3$, di conseguenza esiste un'unica soluzione.

ii. Per $k = 0$ il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro, quindi determina una retta. Una rappresentazione parametrica della retta si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (1, 1, 0) + t \cdot (0, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii. La retta $r$ contiene il punto $Q = (1, 1, 0)$ e la sua giacitura è generata da $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$. La retta $s$ ha rappresentazione parametrica

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t \cdot (0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

quindi contiene il punto $O = (0, 0, 0)$ e la sua giacitura è generata da $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. Le distanze di un generico punto $P = (x, y, z)$ di $\mathbb{E}^3$ dalle due rette sono:

$$d(\tilde{P}, r) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{v}, \overrightarrow{QP})}{G(\mathbf{v})}} \qquad \text{e} \qquad d(\tilde{P}, s) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{u}, \overrightarrow{OP})}{G(\mathbf{u})}}.$$

Abbiamo $G(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ e $G(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$. Inoltre, dato che $\overrightarrow{QP} = (x-1, y-1, z)$ ed $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, otteniamo

$$G(\mathbf{u}, \overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \overrightarrow{QP} \rangle & \langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & z \\ z & (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \end{vmatrix} = (x-1)^2 + (y-1)^2,$$

$$G(\mathbf{v}, \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \overrightarrow{OP} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \overrightarrow{OP} \rangle & \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & x^2 + y^2 + z^2 \end{vmatrix} = x^2 + z^2.$$

Quindi, l'insieme $\mathcal{Q}$ è definito da

$$d(P, r) = d(P, s) \quad \Rightarrow \quad d(P, r)^2 = d(P, s)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + z^2 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2 = 0.$$

iv. Essendo $\mathcal{Q}$ descritto da un'equazione di secondo grado, l'insieme è una quadrica in $\mathbb{E}^3$. La sua classificazione si può studiare attraverso il calcolo degli invarianti:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0,\ I_2 = -1,\ I_3 = 0 \text{ e } I_4 = 1,$$

da cui otteniamo che $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico.

2. i. $\mathcal{B}_k$ è una base se e solo se il determinante della seguente matrice non è nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4k-2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq \frac{1}{2}.$$

ii. Il polinomio caratteristico della matrice è

$$P_F(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1 & 1/2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(1-\lambda)^3.$$

Quindi esiste un unico autovalore $\lambda = 1$ avente molteplicità algebrica 3. Ma dato che $F$ non è un multiplo dell'identità, segue che la matrice non è diagonalizzabile.

iii. Verifichiamo la definizione di autovettore:

$$f(\mathbf{u}) = (1+k, k, 1+k) = \lambda \cdot (1, k, 1) = (1, k, 1).$$

Questo è possibile se e solo se il seguente sistema ha soluzione

$$\begin{cases} 1+k = 1 \\ k = k \\ 1+k = 1 \end{cases},$$

che ovviamente può succedere se e solo se $k = 0 = \bar{k}$. Infine, dal primo punto dell'esercizio, sappiamo che $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

iv. Applichiamo il teorema di rappresentazione:

$$F|_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{u})|_{\mathcal{B}_0} & f(\mathbf{v})|_{\mathcal{B}_0} & f(\mathbf{w})|_{\mathcal{B}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0,1)|_{\mathcal{B}_0} & (2,1,2)|_{\mathcal{B}_0} & (1,1,-1)|_{\mathcal{B}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. i. Una base di $U$ si ottiene riducendo a scala la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui segue $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{u_1} = (1,0,1,0), \mathbf{u_2} = (0,0,1,-1)\}$. Per ottenere una base ortogonale applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1} &= \mathbf{u_1} = (1,0,1,0), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2} &= \mathbf{u_2} - \tfrac{\langle \mathbf{u_2}, \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}\|^2} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = (0,0,1,-1) - \tfrac{1}{2} \cdot (1,0,1,0) = \left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, -1\right). \end{aligned}$$

Infine, normalizziamo i due vettori per ottenere la base desiderata:

$$\mathcal{B}'_U = \left\{ \mathbf{u'_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{u'_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

Il sottospazio $V$ è generato dal vettore dei coefficienti dell'equazione $x+y=0$, ovvero $\mathbf{v} = (1,1,0,0)$, che una volta normalizzato forma la base ortonormale

$$\mathcal{B}'_V = \left\{ \mathbf{v}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \right\}.$$

ii. É evidente che l'insieme $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}'_V$ è linearmente indipendente, dato che

$$\alpha \cdot \mathbf{u'_1} + \beta \cdot \mathbf{u'_2} + \gamma \cdot \mathbf{v}' = \left( \frac{\sqrt{3}\,\alpha - \beta + \sqrt{3}\,\gamma}{\sqrt{6}}, \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}\,\alpha + \beta}{\sqrt{6}}, -\frac{2\,\beta}{\sqrt{6}} \right)$$

è il vettore nullo se e solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pertanto $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}'_V$ è una base di $U+V$, quindi

$$\dim(U+V) = 3 \qquad \text{e} \qquad \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 0.$$

iii. La proiezione ortogonale di $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ su $U$ è

$$\begin{aligned} P_U(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u_1'}, \mathbf{x}\rangle \cdot \mathbf{u_1'} + \langle \mathbf{u_2'}, \mathbf{x}\rangle \cdot \mathbf{u_2'} = \\ &= \tfrac{x+z}{2} \cdot (1,0,1,0) + \tfrac{-x+z-2w}{6} \cdot (-1,0,1,-2) = \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot (2x+z+w, 0, x+2z-w, x-z+2w). \end{aligned}$$

La proiezione ortogonale di $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ su $V$ è

$$P_V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}', \mathbf{x}\rangle \cdot \mathbf{v}' = \frac{x+y}{2} \cdot (1,1,0,0) = \frac{1}{2} \cdot (x+y, x+y, 0, 0).$$

iv. La matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica $S$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$F|_S = P_U|_S + P_V|S = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 & 1/2 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Essendo una matrice simmetrica, ed essendo $S$ ortonormale, segue che l'applicazione $f$ è autoaggiunta. Quindi, per il Teorema Spettrale, $f$ è ortogonalmente diagonalizzabile.
Lo scalare 0 è un autovalore di $f$ se e solo se il nucleo di questa applicazione non è banale. In tal caso, l'autospazio $V_0$ coincide con $\ker(f)$. Dato che $S$ è la base canonica, abbiamo

$$\begin{aligned} \ker(f) = \ker(F|_S) &= \ker\left(\begin{bmatrix} 7/6 & 1/2 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}\right) \\ &= \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Il sistema lineare associato alla matrice ridotta è

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z-2w=0 \\ z-w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t \\ w=t \end{cases},$$

quindi una base di $\ker(f)$ è $\{(-1,1,1,1)\}$.

Proponiamo una seconda possibile risoluzione del punto (iv), basata su alcune osservazioni teoriche. In primo luogo, sappiamo che ogni proiezione ortogonale è ortogonalmente diagonalizzabile. Inoltre, per il Teorema spettrale, l'insieme delle applicazioni ortogonalmente diagonalizzabili di uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato coincide con l'insieme delle applicazioni autoaggiunte $\mathbb{S}(V)$, che è un sottospazio di $\operatorname{End}(V)$. Quindi, date $f_1, f_2 \in \mathbb{S}(V)$, anche $t_1 \cdot f_1 + t_2 \cdot f_2$ appartiene ad $\mathbb{S}(V)$, ovvero è un'applicazione ortogonalmente diagonalizzabile per ogni $t_1, t_2$. Come caso particolare, segue che $f = P_U + P_V$ è ortogonalmente diagonalizzabile.
Come sopra, dobbiamo studiare $\ker(f)$. Poiché $f$ è autoaggiunta, vale $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)^\perp = (U+V)^\perp$. Dato che $U+V$ ha dimensione 3 ed una sua base è $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{v}\}$, segue che $\ker(f)$ ha dimensione 1 ed una sua base è costituita dal vettore

$$*(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e_1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e_2} \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{e_3} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{e_4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e_1} \\ 0 & 1 & \mathbf{e_2} \\ 1 & 0 & \mathbf{e_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e_4} = (1,-1,-1,-1).$$

| Esame di Geometria e Algebra Lineare | | |
|---|---|---|
| **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 12/07/2018** | | |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

1. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definita come $f(x, y, z) = (-x - y, x + y, -x + z)$.

   i. Si scriva la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Si determinino autovalori ed autovettori di $f$ e dire se l'applicazione è diagonalizzabile.

   iii. Trovare un vettore $\mathbf{v_1} \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Si dimostri quindi che $\mathbf{v_1}$ appartiene anche all'immagine di $f$. Determinare di conseguenza un vettore $\mathbf{v_2}$ tale che $f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1}$.

   iv. Trovare un autovettore $\mathbf{v_3}$ di $f$ che non appartenga al nucleo dell'applicazione. Verificare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si rappresenti $f$ rispetto a $\mathcal{B}$.

2. Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con struttura euclidea canonica. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'applicazione rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

   i. Si verifichi che $\mathbf{v} = (1, -1, -1, 1)$ è un autovettore di $f$ e si determini l'autovalore associato.

   ii. Si scriva una base ortonormale del nucleo di $f$.

   iii. Si determini un versore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\ker(f)$ ed al vettore $\mathbf{v}$. Si verifichi che anche $\mathbf{w}$ è un autovettore di $f$ e si determini il relativo autovalore.

   iv. Si scriva una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $f$, riportando anche gli autovalori associati con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche. Si calcolino infine la traccia ed il determinante di $f$, verificandone la compatibilità con gli autovalori.

3. In $\mathbb{E}^3$, per ogni $s \in \mathbb{R}$ fissato consideriamo la coppia di punti $P(s) = (s, 1, 0)$ e $Q(s) = (s, s, -1)$.

   i. Scrivere il vettore geometrico $\overrightarrow{P(s)Q(s)}$ e la rappresentazione parametrica della retta $r_s$ contenente $P(s)$ e $Q(s)$.

   ii. Studiare la mutua posizione di $r_a$ ed $r_b$ per ogni coppia fissata $(a, b)$ di numeri reali distinti.

   iii. L'insieme di tutte le rette $r_s$ formano una superficie $\mathcal{Q}$ in $\mathbb{E}^3$. Eliminando i parametri, si determini una rappresentazione cartesiana di $\mathcal{Q}$ e si dimostri che è una quadrica.

   iv. Si classifichi $\mathcal{Q}$ e si scriva una sua forma canonica.

## Soluzioni

1. i. Data $\mathcal{S} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, applichiamo il teorema di rappresentazione:

$$F|_{\mathcal{S}} = \left[\begin{array}{ccc} f(\mathbf{e_1})|_{\mathcal{S}} & f(\mathbf{e_2})|_{\mathcal{S}} & f(\mathbf{e_3})|_{\mathcal{S}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} (-1,1,-1)|_{\mathcal{S}} & (-1,1,0)|_{\mathcal{S}} & (0,0,1)|_{\mathcal{S}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ii. Il polinomio caratteristico dell'applicazione è

$$P_f(\lambda) = \det(F|_{\mathcal{S}} - \lambda \cdot \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^2(1-\lambda),$$

da cui ricaviamo gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi associati sono:

$$V_0 = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((1,-1,1)),$$

$$V_1 = \ker\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((0,0,1)).$$

L'applicazione non è diagonalizzabile in quanto $\mathbb{R}^3 \neq V_0 \oplus V_1$.

iii. Dai calcoli precedenti, sappiamo che $\mathbf{v_1} = (1,-1,1)$. Abbiamo calcolato nel punto (i) che $f(\mathbf{e_1}) = (-1,1,-1) = -\mathbf{v_1}$. Per linearità abbiamo quindi che $\mathbf{v_1}$ è un vettore dell'immagine di $f$ e $\mathbf{v_2} = -\mathbf{e_1}$.

iv. Dal punto (ii) sappiamo che $\mathbf{v_3} = (0,0,1)$. Dal calcolo del seguente determinante

$$\det\left[\mathbf{v_1}|_{\mathcal{S}} \quad \mathbf{v_2}|_{\mathcal{S}} \quad \mathbf{v_3}|_{\mathcal{S}}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

deduciamo che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice rappresentativa di $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$F|_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc} f(\mathbf{v_1})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{v_2})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{v_3})|_{\mathcal{B}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0}|_{\mathcal{B}} & \mathbf{v_1}|_{\mathcal{B}} & \mathbf{v_3}|_{\mathcal{B}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. i. Utilizziamo il teorema di rappresentazione:

$$f(\mathbf{v})|_{\mathcal{S}} = F * \mathbf{v}|_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} = -8 \cdot \mathbf{v}|_{\mathcal{S}}.$$

Quindi $\mathbf{v}$ è un autovettore di $f$ con autovalore semplice associato $\lambda_1 = -8$.

ii. Studiamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $F$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z - w = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2s - t \\ y = -3s \\ z = s \\ w = t \end{cases},$$

Quindi una base del nucleo di $f$ è $\{\mathbf{u_1} = (-1,0,0,1), \mathbf{u_2} = (-2,-3,1,0)\}$. Per ottenere una base ortonormale applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = \mathbf{u_1} = (-1,0,0,1) \qquad \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2} = \mathbf{u_2} - \frac{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}\rangle}{\|\mathbf{u_1}\|^2} \cdot \mathbf{u_1} = (-2,-3,1,0) - \frac{2}{2} \cdot (-1,0,0,1) = (-1,-3,1,-1).$$

Dopo aver normalizzato, otteniamo la base ortonormale di $\ker(f)$ :

$$\left\{ \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}}{\|\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1),\ \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{2} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2}}{\|\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,-3,1,-1) \right\}.$$

Osserviamo che $\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{1}$ ed $\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{2}$ sono autovettori ortonormali di $f$ associati all'autovalore $\lambda_2 = 0$, che ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2.

iii. Siano $\mathbf{w_1} = (-1,2,4,-1)$ e $\mathbf{w_2} = (0,1,3,0)$ i vettori dei coefficienti delle equazioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta algebricamente $\ker(f)$. Essi costituiscono una base di $\ker(f)^\perp$. Dobbiamo ora cercare nel complemento ortogonale del nucleo di $f$ un vettore $\mathbf{w} = t_1 \cdot \mathbf{w_1} + t_2 \cdot \mathbf{w_2}$ ortogonale a $\mathbf{v}$. Questo è equivalente a risolvere l'equazione

$$0 = \langle t_1 \cdot \mathbf{w_1} + t_2 \cdot \mathbf{w_2}, \mathbf{v}\rangle = \langle (-t_1, 2t_1 + t_2, 4t_1 + 3t_2, -t_1), (1,-1,-1,1)\rangle = -8t_1 - 4t_2.$$

Una soluzione è $(t_1, t_2) = (1,-2)$, da cui ricaviamo $\mathbf{w} = (-1,0,-2,-1)$. Utilizziamo infine il teorema di rappresentazione:

$$f(\mathbf{w})|_\mathcal{S} = F * \mathbf{w}|_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \\ -6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \mathbf{w}|_\mathcal{S}.$$

Quindi $\mathbf{w}$ è un autovettore di $f$ con autovalore semplice associato $\lambda_3 = 6$.

iv. La matrice $F$ è simmetrica, pertanto l'applicazione $f$ è ortogonalmente diagonalizzabile. Sappiamo che autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro, mentre $\{\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\}$ costituiscono per costruzione una base ortonormale di $V_0$. Per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ composta da autovettori di $f$ dobbiamo normalizzare $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, in modo da arrivare a

$$\left\{ \bar{\mathbf{v}} = \tfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \tfrac{1}{2}(1,-1,-1,1),\ \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1), \right.$$
$$\left. \bar{\mathbf{u}}_\mathbf{2} = \tfrac{1}{\sqrt{12}}(-1,-3,1,-1),\ \bar{\mathbf{w}} = \tfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,-2,-1) \right\}.$$

Eseguiamo le ultime verifiche su traccia e determinante di $f$:

- $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(F) = -2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$;
- dato che la prima e l'ultima riga di $F$ sono uguali, vale $\det(f) = \det(F) = 0 = \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3$.

3. i. $\overrightarrow{P(s)Q(s)} = Q(s) - P(s) = (0, s-1, -1)$, quindi un punto $(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$ appartiene ad $r_s$ se e solo se

$$(x,y,z) = P(s) + t \cdot \overrightarrow{P(s)Q(s)} = (s,1,0) + t \cdot (0, s-1, -1),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto, una rappresentazione parametrica della retta è

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 + t(s-1) \\ z = -t \end{cases}.$$

ii. I vettori direttori di $r_a$ ed $r_b$ sono rispettivamente $\overrightarrow{P(a)Q(a)} = (0, a-1, -1)$ e $\overrightarrow{P(b)Q(b)} = (0, b-1, -1)$.

- $\overrightarrow{P(a)Q(a)} \wedge \overrightarrow{P(b)Q(b)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{e_1} \\ a-1 & b-1 & \mathbf{e_2} \\ -1 & -1 & \mathbf{e_3} \end{vmatrix} = (-a+b) \cdot \mathbf{e_1} = (-a+b, 0, 0).$

  Se $a \neq b$ segue che i due vettori direttori non sono paralleli e quindi non lo sono nemmeno le rette.

- $\overrightarrow{P(a)P(b)} = P(b) - P(a) = (-a+b,0,0)$ è un vettore geometrico che va da un punto di $r_a$ ad uno di $r_b$. Allora $\left\langle \overrightarrow{P(a)Q(a)} \wedge \overrightarrow{P(b)Q(b)}, \overrightarrow{P(a)P(b)} \right\rangle = \langle(-a+b,0,0),(-a+b,0,0)\rangle = (-a+b)^2 \neq 0$ se $a \neq b$, quindi le due rette non sono incidenti.

Di conseguenza, per ogni coppia di numeri reali distinti $(a,b)$ le due rette $r_a$ ed $r_b$ sono sghembe.

iii. I punti di $\mathcal{Q}$ sono tutti ed i soli $(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$ che soddisfano

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 + t(s-1) \\ z = -t \end{cases}$$

per una qualche coppia $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Per trovare una rappresentazione algebrica di $\mathcal{Q}$ dobbiamo eliminare i parametri $s$ e $t$ :

$$\begin{cases} s = x \\ t = -z \\ xz + y - z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Quindi $\mathcal{Q}$ è la quadrica di equazione $xz + y - z - 1 = 0$.

iv. Le matrici associate a $\mathcal{Q}$ sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 0$, $I_2 = -1/4 < 0$, $I_3 = 0$ ed $I_4 = 1/16 > 0$, da cui segue che $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico. Sappiamo quindi che esiste un sistema di riferimento in cui l'equazione di $\mathcal{Q}$ è $\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + 2p\tilde{z} = 0$. I coefficienti $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono gli autovalori non nulli di $A$. Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda = \lambda\left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right),$$

da cui ricaviamo $\lambda_1 = -1/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Il coefficiente $p$ si ricava invece come

$$p = \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'equazione di $\mathcal{Q}$ è $-\frac{1}{2}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{y}^2 + \tilde{z} = 0$. Possiamo ora arrivare alla forma canonica semplicemente riscrivendo tale equazione come

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{z} = 0.$$