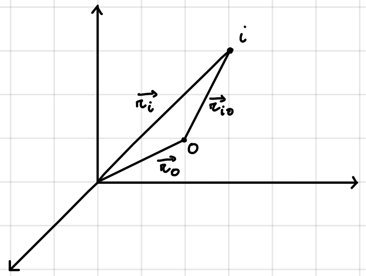
...

9.3 SECONDA EQ. CARDINALE

Consideriamo un sistema di N punti materiali ed un polo O:



$$\vec{L}_{io} = \vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=0}^{N} \vec{L}_{io} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i \implies \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_{io} \times m_i \vec{v}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d\vec{r}_{io}}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{io} \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_o) \times m_i v_i \right] + \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_{io} \times \frac{d\vec{P}_i}{dt} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\cancel{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i} - \vec{v}_o \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_{io} \times \vec{F}_i \right]$$

$$= - v_o \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times (\vec{F}_i^{i} + \vec{F}_i^{E})$$

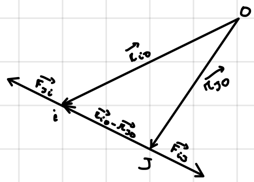
$$= - v_o \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^{i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^{E}$$

$$= - v_o \times \vec{P} + \vec{M}^{(i)} + \vec{M}^{(E)}$$

Dimostriamo che $\vec{M}^i$ è nullo:

$\vec{M}^i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times \vec{F}_i^i$ → poiché parliamo di forze interne, prendiamo le forze a due a due (uguali e opposte per 3° p.d)

$\vec{M}^i_{ij} = \vec{r}_{io} \times \vec{F}^i_{ji} + \vec{r}_{jo} \times \vec{F}^i_{ij} = (\vec{r}_{io} - \vec{r}_{jo}) \times \vec{F}_{ij}$ → $r_{io} - r_{jo} \parallel \vec{F}_{ij}$ → $\vec{M}^i = 0$

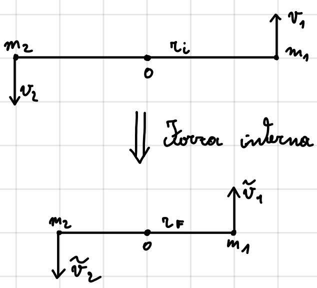


L'espressione $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = - v_o \times \vec{P} + \vec{M}^E$ è detta 2ª eq cardinale. Spesso il primo termine è nullo, quindi rimane solo il momento delle forze esterne. Noi supporremo di essere in uno di questi casi, riducendo la seconda legge cardinale a:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

È ovvio che se $\vec{M}^E = 0$, allora il momento angolare risulterà costante.

ESERCIZIO



$m_1 = m_2 = m$

$v_1 = v_2 = v$

$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}$

$r_i > r_F$

$L = |m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2| = 2 m r v$

$r \perp v$, $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$

$L_i = L_F \to \cancel{2m} r_i v_i = \cancel{2m} r_F v_F \to v_F = \frac{r_i}{r_F} v_i \implies v_F > v_i$

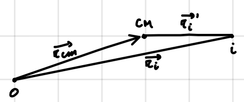
9.4 TEOREMI DI KÖNIG

Definiamo il sistema del centro di massa come un sistema di riferimento che ha origine nel centro di massa e gli assi sono paralleli al sistema inerziale. Come varia il momento angolare tra i due sistemi?

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i{}') \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}') =$$

$$= \sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm} + \cancel{\sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i{}'} + \cancel{\sum \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_{cm}} + \sum \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' =$$

$$= \vec{r}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}' = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$$



Studiamo l'energia cinetica:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec v_{cm} + \vec v_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m \vec v_{cm} \cdot \vec v_i' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M v_{cm}^2}_{E_c^{cm}} + \underbrace{E_c'}_{\text{energia cin. calcolata da un oss. inerziale}}$$

10 URTI

10.1 FORZA IMPULSIVA, URTO E IMPULSO

Si definisce forza impulsiva una forza che agisce per un periodo molto breve e con intensità più grande di tutte le altre forze. Si definisce, quindi, urto (evento impulsivo) quando due corpi interagiscono mediante una forza impulsiva. Il contatto tra i due corpi non è necessario!

Data una forza $\vec F$, si definisce impulso di $\vec F$:

$$\vec I = \int_{t_1}^{t_2} \vec F \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec P}{\cancel{dt}}^{!!} \cancel{dt} = \int_{\vec P(t_1)}^{\vec P(t_2)} d\vec P = \vec P(t_2) - \vec P(t_1)$$

$$[I] = [F][T] = [m][L][T]^{\cancel{-2}} \cancel{[T]} = [m][v] \rightarrow \text{quantità di moto.}$$

La relazione $\vec I = \Delta \vec P$ è detta teorema dell'impulso.