Lezione di Algebra e Geometria Lineare del 22 Ottobre

Applicazioni lineari

Teorema di rappresentazione (5.22)

Dati V, W due s.v finitamente generati su $\mathbb{K}$, B_V, B_W le rispettive basi e $f \in Hom(V,W)$, avremo che:

1) $F_{B_V B_W}$ è l'unica matrice tale che $f(\underline{v})_{B_W} = F_{B_V B_W} \cdot f(\underline{v})_{B_V}$;
2) $\varnothing_{B_V B_W}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;
3) se $g \in Hom(V,V) \Rightarrow \varnothing_{B_V B_W}(f \circ g) = \varnothing_{B_V B_W}(f) \cdot \varnothing_{B_V B_V}(g)$

$P(x) = a + bx + cx^2$ $\quad \frac{d}{dx}(P(x)) = b + 2cx \Rightarrow$ posso usare il teorema di rappresentazione:

$\hookrightarrow \left(\frac{d}{dx}(P(x))\right)_{B_W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot P(x)_{B_W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow P(x) = 0x^2 + 2cx + b$

DIM: 1) $V \xrightarrow{f} W$. $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \Rightarrow \forall \underline{v} \in V \; \exists! \; \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{v}_i \Rightarrow f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)$ poiché f è lineare per Hp.

$f(v)_{B_W} = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)\right)_{B_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)_{B_W}$ perché $\varnothing_{B_W}$ è lineare $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i f(\underline{v}_i)_{B_W} = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot F_{C(i)} = F_{B_V B_W} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$. La matrice colonna non è altro che la matrice delle componenti di $\underline{v}$.

Prendiamo A: $f(\underline{v})_{B_W} = A \cdot \underline{v}_{B_V}$. $F_{C(i)} = f(\underline{v}_i)_{B_W} = A \underline{v}_{i\,B_V} = A \cdot E_{i1} = A_{C(i)} \Rightarrow$ la tesi è dimostrata.

2) $\varnothing_{B_V B_W}(t_1 \cdot f_1 + t_2 \cdot f_2)_{C(i)} = (t_1 \cdot f_1 + t_2 f_2)(\underline{v}_i)_{B_W} = (t_1 f_1(\underline{v}_i) + t_2 f_2(\underline{v}_i))_{B_W} = (t_1 f_1(\underline{v}_i))_{B_W} + (t_2 f_2(\underline{v}_i))_{B_W} = t_1 f_1(\underline{v}_i)_{B_W} + t_2 f_2(\underline{v}_i)_{B_W} = t_1 \cdot \varnothing_{B_V B_W}(f_1)_{C(i)} + t_2 \cdot \varnothing_{B_V B_W}(f_2)_{C(i)}$

$\forall i < n$. Ciò prova che $\varnothing_{B_V B_W}$ è lineare.

Data una matrice A, essa rappresenta sempre un'unica applicazione. Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$, per il teorema di interpolazione, esiste un'unica f tale che

$$\begin{cases} f(\underline{v}_1) = a_{11} \underline{w}_1 + \dots + a_{n1} \underline{w}_m \\ \vdots \\ f(\underline{v}_n) = a_{m1} \underline{w}_1 + \dots + a_{nm} \underline{w}_n \end{cases}$$

ciò vuol dire che esiste un'unica f tale che $f(\underline{v}_i)_{B_W} = A_{C(1)} \Rightarrow \exists! f : \varnothing_{B_V B_W}(f) = A$

3) ...

Conseguenze

1) $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\dim(Hom(V,W)) = n \times m$ (5.25)
2) $f \in Hom(V,W)$ è invertibile se $F_{B_V B_W}$ è invertibile. In tal caso, $\varnothing_{B_W B}(f^{-1}) = (F_{B_V B_W})^{-1}$ (5.26)
3) Il nucleo dell'applicazione è isomorfo attraverso mappa delle componenti al nucleo della matrice rappresentativa
4) Lo spazio immagine di f è isomorfo attraverso mappa delle componenti a $C(F_{B_V B_W})$

ESEMPI

$V = \mathbb{R}[x]_1 \qquad W = S(2;\mathbb{R}) \qquad f: V \to W \qquad f(P(x)) = \begin{bmatrix} P(1) & P(0) \\ P(0) & P(-1) \end{bmatrix}$

$P(x) = a + bx \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Studia f usando il teorema di rapp.: $B_V = \{1, x\}$, $B_W = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. $F_{B_V B_W} = [f(1)_{|B_W} | f(x)_{|B_W}] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{|B_W} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{|B_W}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]$

Riduciamo a scala $F_{B_V B_W} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(C(F)) = 2 = \dim(I(f)) \Rightarrow B_{C\ell} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow B_{I_f} = \left\{1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

$\dim(Ker(F)) = 2 - r(F) = 2 - 2 = 0 = \dim(Ker(f)) \Rightarrow f$ è iniettiva, f non è suriettiva

RANGO DI UN'APPLICAZIONE

Il $r(f)$ è pari a $\dim(Im(f))$. Se V, W sono finiti, per isomorfismo $r(f) = r(C(F)) = r(F)$

NULLITÀ DI UN'APPLICAZIONE

La $K(f)$ è pari a $\dim(Ker(f))$. Se V, W sono finiti per isomorfismo $K(f) = \dim(Ker(F)) = K(F)$.

TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO (5.30)

Data $f \in Hom(V, W)$, V è finito $\Rightarrow \dim(V) = r(f) + K(f)$

DIM. Supponiamo tutti e due gli spazi finiti, allora $F_{B_V B_W} \in Mat(m, n; \mathbb{K})$ con $n = \dim(V)$, $m(\dim(W))$.

$K(f) = K(F) = \dim(Ker(f)) = n - r(F) = \dim(V) - r(F) = \dim(V) - r(f) \Rightarrow \dim(V) = r(f) + K(f)$.

OSS. Questo teorema è la riformulazione di Rouché-Capelli in "lingua" delle applicazioni

COROLLARIO (5.31)

1) f è suriettiva se e solo se $r(f) = \dim(W)$

2) f è iniettiva se e solo se $r(f) = \dim(V)$

3) f è un isomorfismo se e solo se $r = \dim(V) = \dim(W)$

MATRICE CAMBIAMENTO DI BASE (5.32)

Prese due basi dello stesso V $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i\}$, $B' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i\}$. La matrice cambiamento di base è: $M_{BB'} = [\underline{v}_{1|B'} | \dots | v_{i|B'}]$

ESEMPIO: $V = K[x]_1$, $P(x) = a_0 + a_1 x$ $\qquad B = \{1, x\}$, $B' = \{1+x, 1-x\} \Rightarrow M_{BB'} = [1_{|B'} | x_{|B'}] = [(\frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x))_{|B'} | (\frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x))_{|B'}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

OSS.: $M_{B'B} = M_{BB'}^{-1}$ (5.35)

REGOLE DEL CAMBIO BASE (5.33)

1) $\underline{v}_{|B_V'} = M_{B_V B_V'} \cdot \underline{v}_{|B_V}$

2) $F_{|B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} \cdot F_{|B_V B_W} \cdot M_{B_V' B_V}$

ESEMPIO: $V = K[x]_1$, $B_V = \{1, x\}$ $B_V' = \{1+x, 1-x\}$ $M_{BB'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $M_{B'B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$P(x) = a_0 + a_1 x \Rightarrow P(x)_{|B_V} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$, $P(x)_{|B_V'} = M_{BB_V'} \cdot P(x)_{|B_V} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0 + a_1}{2} \\ \frac{a_0 - a_1}{2} \end{bmatrix}$

$f: \frac{d}{dx}$ $f: V \to W$ $V = W = K[x]_1$. $B_W = \{1, x\}$ $B_W' = \{1+x, 1-x\}$ $F_{|B_V B_W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$F_{|B_V' B_W'} = M_{B_W B_W'} \cdot F_{|B_V B_W} \cdot M_{|B_V' B_V} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

DIM: 1) rappresentiamo Id_V con il teorema di rappresentazione rispetto a $B_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B_V' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$.

$\varnothing_{B_V B_V'} = [Id(\underline{v}_1)_{|B_V'} | \dots | Id(\underline{v}_n)_{|B_V'}] = [\underline{v}_{1|B_V'} | \dots | \underline{v}_{n|B_V'}] = M_{B_V B_V'}$. Usando il teorema: $\underline{v}_{|B_V'} = (Id(\underline{v}))_{|B_V'} = \underline{v}_{|B_V'} = (\varnothing_{B_V B_V'}(Id(\underline{v})))\, \underline{v}_{|B_V} =$

$= M_{B_V B_V'} \cdot \underline{v}_{|B_V} \Rightarrow$ dimostrato la Th.