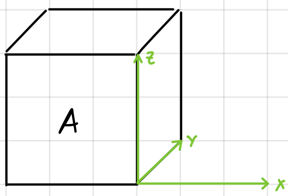
13 STATICA DEI FLUIDI

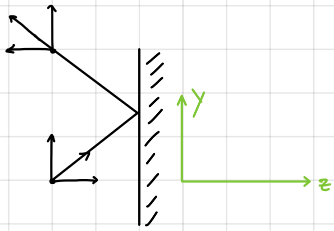
13.1 PRESSIONE SULLE PARETI ESERCITATA DAI GAS

Facciamo le seguenti ipotesi:

1) le molecole sono tutte uguali con moto continuo e disordinato $\Rightarrow \vec{v}_m = 0$
2) il gas ha densità costante
3) tutti gli urti sono elastici
4) non ci sono forze intermolecolari
5) il volume occupato dalle singole molecole è trascurabile rispetto al volume del recipiente

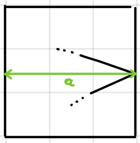
Prendiamo un contenitore cubico A e definiamo il nostro sistema di riferimento. A causa del caos molecolare, tutti i ragionamenti che faccio per un'urto contro una parete vale per tutti gli altri.





$$\left.\begin{array}{l}\Delta P_x^{mol} = P_x^f - P_x^i = -mv_x - mv_x = -2mv_x \\ \Delta P_y = 0\end{array}\right\} \; I = 2mv_x$$

cambiato segno perché ci interessa la forza esercitata da molecola su parete, non viceversa



$$t = \frac{2a}{v_x} \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a} \Rightarrow F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x \, v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

il tempo che intercorre tra due urti

gli urti sono uguali in tutte le dimensioni per ipotesi

Per calcolare la risultante delle forze applicate su x facciamo: $R_x = \sum F_{x_i} = \frac{m}{a}\sum v_{x_i}^2$. La pressione sarà, quindi:

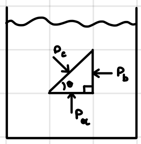
$$P = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3}\sum v_{x_i}^2 = \frac{m}{V}\sum v_{x_i}^2$$

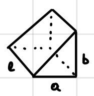
Definiamo la velocità quadratica media come: $\bar{v}^2 = \frac{1}{N}\sum v_i^2 = \frac{1}{N}\sum(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$. Per ipotesi: $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$

Usandola nella formula di prima otteniamo:

$$P = \frac{mN}{V}\bar{v}_x^2 = \frac{mN}{3V}\bar{v}^2$$

13.2 STATICA DEI FLUIDI



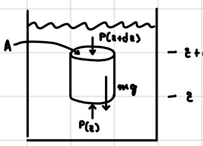


$S_a = La$, $S_b = Lb$, $S_c = Lc$

$$\begin{cases} x: P_c S_c \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - P_b S_b = 0 \\ y: P_a S_a - P_c S_c \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_c S_c \sin\theta = P_b S_b \\ P_c S_c \cos\theta = P_a S_a \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{P_b}{P_c} = \frac{S_c}{S_b}\sin\theta = \frac{Lc}{Lb}\sin\theta = \frac{b}{b} = 1 \\ \frac{P_a}{P_c} = \frac{S_c}{S_a}\cos\theta = \frac{Lc}{La}\cos\theta = \frac{a}{a} = 1 \end{array} \Rightarrow P_a = P_b = P_c$$

L'esercizio sopra dimostra che in un fluido in condizioni statiche in assenza di forze esterne la pressione è uguale su tutte le superfici.

Come cambia la pressione quando consideriamo la forza peso?



$$-mg + P(z)A - P(z+dz)A = 0 \rightarrow -\rho A dz\, g + P(z)A - P(z+dz)A = 0 \rightarrow -\rho \cancel{A} g \cancel{dz} + \cancel{P(z)A} - \cancel{P(z)A} - \left(\frac{dP}{dz}\right)(z)\cancel{dz}\cancel{A} = 0$$

$P(z+dz) = P(z) + \left(\frac{dP}{dz}\right)(z)\,dz$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)(z) = -\rho g$$

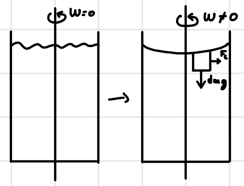
L'equazione appena scritta è l'equazione statica dei fluidi. Generalizzando al caso tridimensionale bisogna usare il gradiente:

$\nabla P = \rho \vec{g}$ e per una qualsiasi forza: $\nabla P = \rho \vec{h}$ con $\vec{h} = \frac{\vec{F}}{m}$

Se $\vec{h}$ è conservativa, allora essa è il gradiente dell'energia pot. $\rightarrow$ $\nabla P = \rho \nabla \phi$

Se una superficie ha P cost, avrà anche ϕ cost.
Ciò comporta che una superficie di un fluido cercherà sempre di mantenersi alla stessa altezza
(e.g. inclinare un bicchiere d'acqua)

ESERCIZIO



Curva della superficie?

$F_c = \omega^2 r \, dm$

$E_p = g z \, dm - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \text{cost}$

$\hookrightarrow z = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2 + \frac{\text{cost}}{g}$ $\Rightarrow$ paraboloide di rotazione

Nel caso in cui non considerassimo un incremento infinitesimo dz otteniamo:

ρ cost: $\quad dP = \rho g \, dz \quad \int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{P_1}^{P_2} \rho g \, dz \quad$ $\Delta P = -\rho g (z_2 - z_1)$ (Legge di Stevino)

$\hookrightarrow$ se $z_2 = z_1$ la pressione è uguale (Principio di Pascal)

la legge di Stevino solitamente ha forma: $P = P_0 + \rho g h$

($\rho g h$: pressione idrostatica)

Un'applicazione della legge di Stevino è il principio dei vasi comunicanti