DEFINIZIONE 10.1

può essere solo su campo reale

Uno spazio euclideo $\mathbb{E} = (A, V, <,>, \varphi)$ è uno spazio affine dove $(V, <,>)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

ESEMPIO FONDAMENTALE: $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot), <,>_E, \varphi)$, dove $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \overrightarrow{\underline{x}\,\underline{y}} = \underline{y} - \underline{x}$, è lo spazio euclideo canonico.

DEFINIZIONE 10.2

Siano P_1, Q_1, P_2, Q_2 punti di $\mathbb{E}$. Allora:

i) $d: \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P_1, Q_1) & \longmapsto & \|\overrightarrow{P_1Q_1}\| \end{array}$ è la distanza tra P_1 e Q_1, detta anche lunghezza del segmento orientato (P_1, Q_1);

ii) l'angolo tra i segmenti $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ è

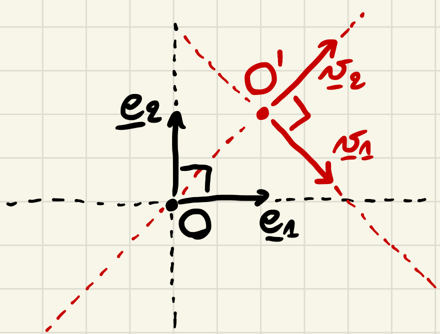
$$\widehat{(P_1,Q_1),(P_2,Q_2)} = \widehat{\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}} = \arccos\left(\frac{<\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}>}{\|v\| \cdot \|v\|}\right)$$

DEFINIZIONE 10.4

Un sistema di riferimento cartesiano di $\mathbb{E}$ è un sistema di riferimento $\mathcal{B}_O = \{O, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ in cui $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortonormale di V. Le coordinate associate si dicono cartesiane.

$\mathbb{E}^2$
- $\mathcal{B}_O = \{O = (0,0), \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ sistema di riferimento canonico
- $\mathcal{B}'_{O'} = \{O' = (1,1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$

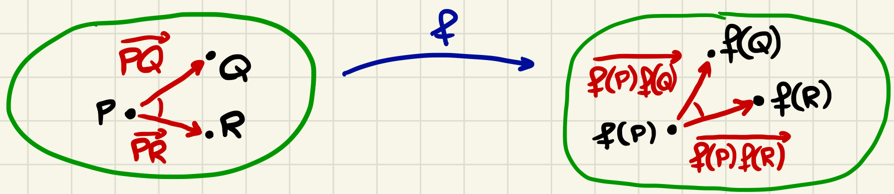
Sono sistemi di riferimento cartesiano



$\mathcal{B}_O, \mathcal{B}'_{O'}$ hanno la stessa orientazione

DEFINIZIONI 10.6 - 10.8

- $f: \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ è un isometria se $\bar{f}: V \to V$ è un'isometria, dove $\bar{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.



f è un'isometria se non altera angoli e distanze, ad esempio l'identità, le rotazioni e le traslazioni.

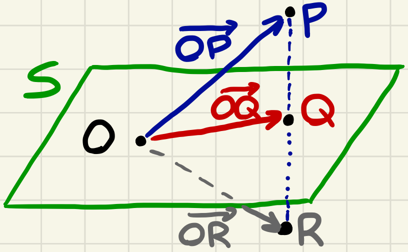
- $S \subseteq \mathbb{E}_1$ e $T \subseteq \mathbb{E}_2$ sono congruenti se esiste un isometria t.c. $f(S) = T$.

COROLLARIO (IV postulato di Euclide)

Due angoli retti sono sempre congruenti.

IDEA DIM: è sempre possibile trovare una rototraslazione che manda una coppia di rette perpendicolare in una qualsiasi altra coppia di rette perpendicolari ☒

ESEMPIO 10.17 (proiezione e riflessione ortogonale)



S di giacitura U $\Rightarrow$

- $Q = P_U(P)$ è il punto tale che $\overrightarrow{OQ} = P_U(\overrightarrow{OP})$
- $R = R_U(P)$ è il punto tale che $\overrightarrow{OR} = R_U(\overrightarrow{OP})$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \mid x+y+z=1\}$ $\qquad P = (1,1,1) \notin S$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_U = \{\underbrace{(-1,1,0)}_{\underline{u}_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{\underline{u}_2}\} \quad \text{non è o.n.}$$

$$\underline{\tilde{u}}_1 = \underline{u}_1 \,, \qquad \underline{\tilde{u}}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{\tilde{u}}_1 \rangle}{\|\underline{\tilde{u}}_1\|^2} \cdot \underline{u}_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = (-1/2, -1/2, 1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}'_U = \left\{ \underline{u}'_1 = \frac{\underline{\tilde{u}}_1}{\|\underline{\tilde{u}}_1\|} \,, \ \underline{u}'_2 = \frac{\underline{\tilde{u}}_2}{\|\underline{\tilde{u}}_2\|} \right\} = \{(-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$$

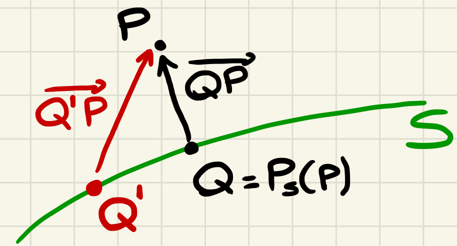
$$O = (1,0,0) \in S \Rightarrow \overrightarrow{OP} = P - O = (0,1,1) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OQ} = \langle \overrightarrow{OP}, \underline{u}'_1 \rangle \cdot \underline{u}'_1 + \langle \overrightarrow{OP}, \underline{u}'_2 \rangle \cdot \underline{u}'_2 = (-1/2, 1/2, 0) + (-1/6, -1/6, -2/6) = (-2/3, 1/3, 1/3) \Rightarrow Q = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-4/3, -1/3, -1/3) \Rightarrow R = (-1/3, -1/3, -1/3).$$

Distanza Punto - Sottospazio

Definizione 10.9



$S \neq \emptyset$ sottoinsieme di $\mathbb{E}$, P punto

$$\Rightarrow \quad d(S,P) = \inf_{Q \in S} d(Q,P).$$

Proposizione 10.10

S sottospazio di dimensione finita con giacitura U.

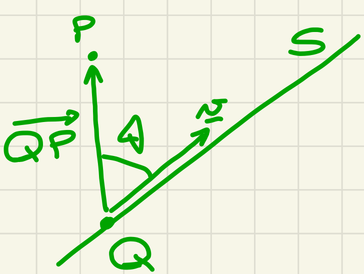
i) $d(S,P) = \| \overrightarrow{P_S(P)\,P} \|$;

ii) siano $Q \in S$ e $B_U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ base $\Rightarrow d(S,P) = \sqrt{\dfrac{G(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n,\overrightarrow{QP})}{G(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n)}}$.

$\dim(S) = 1$:

$$\cdot\ G(\underline{u},\overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}\|^2 & \langle \underline{u},\overrightarrow{QP}\rangle \\ \langle \underline{u},\overrightarrow{QP}\rangle & \|\overrightarrow{QP}\|^2 \end{vmatrix} = \|\underline{u}\|^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 - \langle \underline{u}, QP\rangle^2$$

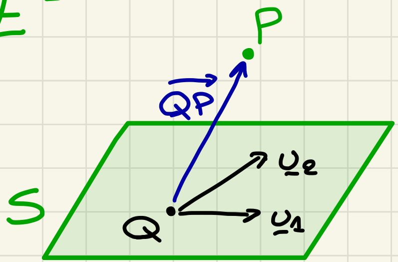
$$= \|\underline{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{QP}\|^2 \cdot (1 - \cos^2\vartheta) = \|\underline{u}\|^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 \operatorname{sen}^2\vartheta$$



$$\cdot\ G(\underline{u}) = \|\underline{u}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad d(S,P) = \|\overrightarrow{QP}\| \cdot \operatorname{sen}\vartheta$$

$\mathbb{E}^3$



$Q = (1,0,0)$, $\quad \underline{u}_1 = (1,0,0)$, $\underline{u}_2 = (0,1,1)$

$P = (x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = (x-1, y, z)$

$$d(P,S) = \sqrt{\frac{G(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \overrightarrow{QP})}{G(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}}$$

$$G(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \langle \underline{u}_1, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \|\underline{u}_2\|^2 & \langle \underline{u}_2, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \overrightarrow{QP} \rangle & \langle \underline{u}_2, \overrightarrow{QP} \rangle & \|\overrightarrow{QP}\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & y+z \\ x-1 & y+z & (x-1)^2+y^2+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{2(x-1)^2} + 2y^2 + 2z^2 - \cancel{2(x-1)^2} - y^2 - z^2 - 2yz = (y-z)^2$$

$$G(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \begin{vmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \|\underline{u}_2\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \quad d(P,S) = \sqrt{\frac{(y-z)^2}{2}} = \frac{|y-z|}{\sqrt{2}}$$ $\leftarrow$ QUADRATO PERFETTO

$P \in S$ sse $d(P,S) = 0$ sse $y - z = 0$ $\leftarrow$ EQ. S

COROLLARIO 10.12 $\quad (\dim(\mathbb{E}) = n, \quad \dim(S) = n-1)$

Sia $\mathcal{B}_Q$ un sistema di riferimento cartesiano con $Q \in S$. Allora:

i) se $S_{|\mathcal{B}_Q} : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c = 0$ e $P_{|\mathcal{B}_Q} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Rightarrow d(S,P) = \dfrac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i + c\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$;

ii) se $U = \mathcal{L}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1})$ e $P \in \mathbb{E} \Rightarrow \cancel{S_{|\mathcal{B}_Q} : \left| \underline{u}_{1|\mathcal{B}} \cdots \underline{u}_{n|\mathcal{B}} \; P_{|\mathcal{B}_Q} \right| = 0.}$

$Q \in S$

$S : \left| \underline{u}_{1|\mathcal{B}} \cdots \underline{u}_{|\mathcal{B}} \; \overrightarrow{QP}_{|\mathcal{B}} \right| = 0$

$Q = (1,0,0), \quad \underline{u}_1 = (1,0,0), \quad \underline{u}_2 = (0,1,1), \quad P = (x,y,z).$

$\mathcal{B}_Q = \{Q, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$\Rightarrow S_{|\mathcal{B}_0} : \left| \underline{u}_{1|\mathcal{B}} \quad \underline{u}_{2|\mathcal{B}} \quad \overrightarrow{QP}_{|\mathcal{B}} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = z - y = 0$

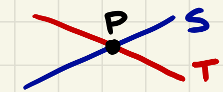
$\Rightarrow d(S,P) = \dfrac{|-y+z|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|-y+z|}{\sqrt{2}}$

PROPOSIZIONE 10.16

DIST.: $d(S_1,S_2) = \inf_{\substack{P_1 \in S_1 \\ P_2 \in S_2}} d(P_1,P_2) \quad (S_1, S_2 \in \mathbb{E})$

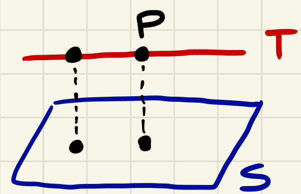
S, T sottospazi con giacitura U, W. Se i due spazi sono:

i) incidenti $\Rightarrow d(S,T) = 0$;



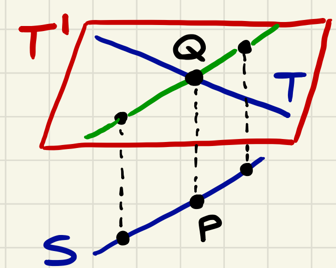
ii) paralleli con $W \subseteq U \Rightarrow d(S,T) = d(S,P)$

dove P è un generico punto di T;



iii) sghembi $\Rightarrow d(S,T) = d(S,T')$ dove

T' è il più piccolo sottospazio affine contenente T e parallelo ad S.



OSS: $d(S,T) = d(P,T')$ dove P è un generico punto di S.

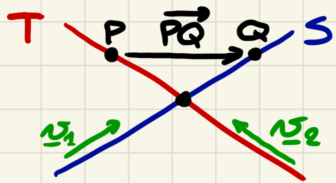
Teorema 10.17

S, T con giacitura U, W. Siano $(P,Q) \in S \times T$ e

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ base di $U+W \Rightarrow d(S,T) = \sqrt{\dfrac{G(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \overrightarrow{PQ})}{G(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)}}$.

Idea Dim:

i) S, T incidenti

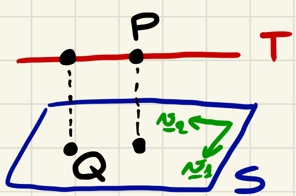


$U+W = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, $\overrightarrow{PQ} \in U+W$

$\Rightarrow G(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \overrightarrow{PQ}) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \overrightarrow{PQ})}{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}} = 0 = d(S,T)$

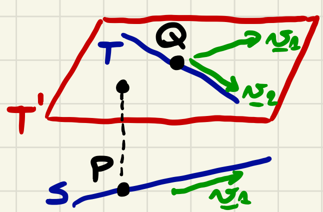
ii) S, T paralleli



$W \subseteq U \Rightarrow U + W = U = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \Rightarrow$

$d(S,T) = d(P,S) = \sqrt{\dfrac{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \overrightarrow{QP})}{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}}$

iii) S, T sghembi



$U + W =$ giacitura di $T' = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$d(S,T) = d(P, T') = \sqrt{\dfrac{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \overrightarrow{QP})}{G(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}}$

$\square$

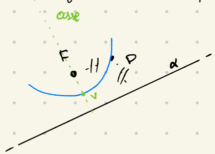
TUTORATO ALGEBRA: CONICHE

Osservazioni: in generale, dati r e F, si può affermare che la distanza di un generico P è $d(P,F)=\varepsilon\, dist(P,r)$. Se:
1) $0<\varepsilon<1 \Rightarrow$ ellisse 2) $\varepsilon=1 \Rightarrow$ parabola 3) $\varepsilon>1 \Rightarrow$ iperbole. ε è detta ECCENTRICITÀ

Sezioni coniche (equazioni canoniche):

1) PARABOLA

Luogo geometrico dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto detto fuoco e una retta detta direttrice



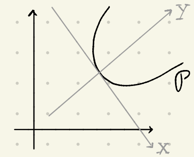
Equazione canonica: $y=\frac{1}{4p}x^2$ (parabola con vertice $(0,0)$)

direttrice: $y=-p$

Formule: $F(0;p) \Rightarrow F(0;\frac{1}{4a})$

$d: y=-p \Rightarrow d: y=-\frac{1}{4a}$

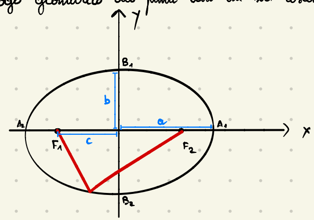
$a: x=0$



Scrivere P in forma canonica significa trovare il sistema di riferimento $\{O';X;Y\}$ tale che $P: Y=aX$

2) ELLISSE

Luogo geometrico dei punti tali che sia costante la somma delle distanze da due punti detti fuochi



Equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Formule: $A_{1,2}(\pm a;0)$, $B_{1,2}(0;\pm b)$

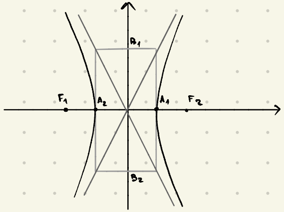
$F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2-b^2},0) \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

1) se $a=b \Rightarrow$ CIRCONFERENZA

$\rightarrow$ 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow$ ellisse senza punti reali

3) IPERBOLE

Luogo geometrico dei punti tali che la differenza tra le distanze da due punti detti fuochi sia costante



Equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Formule: $A_{1,2}(\pm a;0)$ $B_{1,2}(0;\pm b)$

$F_{1,2}(\pm\sqrt{b^2-a^2};0)$

$as_1: y=\frac{b}{a}x$ $as_2: y=-\frac{b}{a}x$

4) CONICHE DEGENERI

1) $\frac{x^2}{a^2}-y^2=0 \Rightarrow$ coppia di rette incidenti con infiniti punti reali

2) $\frac{x^2}{a^2}+y^2=0 \Rightarrow$ coppia di rette incidenti con un punto reale $(0;0)$

3) $x^2=0 \Rightarrow$ retta doppia

4) $\frac{x^2}{a^2}-1=0 \Rightarrow$ coppia di rette parallele

5) $\frac{x^2}{a^2}+1=0 \Rightarrow$ coppia di rette parallele prive di punti reali