Angoli, Orientazione, Duale di Hodge

Prof.
Marco
Compagnoni

- Disuguaglianze di Schwarz e triangolare — SEZIONE 8.5
- Angolo tra vettori
- Esempi

- Spazi orientati — SEZIONE 8.6

- Duale di Hodge e prodotto vettoriale — SEZIONE 8.7
- Caratterizzazione
- Proprietà

Angoli tra Vettori (8.5)

Disuguaglianze di Schwarz e Triangolare (Proposizione 8.34)

i) $|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|$, l'uguaglianza vale sse $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$ con $t \in \mathbb{R}$, o $\underline{u} = \underline{0}$;

ii) $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$, l'uguaglianza vale sse $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$ con $t \in [0, +\infty)$, o $\underline{u} = \underline{0}$.

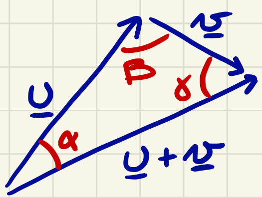
Dim: i) . $\underline{u} = \underline{0}$: è banale verificare l'uguaglianza.

. $\underline{u} \neq 0$: chiamiamo $U = \mathcal{L}(\underline{u}) \Rightarrow$

$$\|\underline{v}\|^2 = \|\underbrace{P_U(\underline{v})}_{\in U} + \underbrace{(\underline{v} - P_U(\underline{v}))}_{\in U^\perp}\|^2 = \|P_U(\underline{v})\|^2 + \underbrace{\|\underline{v} - P_U(\underline{v})\|^2}_{\geq 0} \geq \|P_U(\underline{v})\|^2 \Rightarrow$$

$$\|\underline{v}\|^2 \geq \left\| \frac{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle}{\|\underline{u}\|^2} \cdot \underline{u} \right\|^2 = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle^2}{\|\underline{u}\|^4} \cdot \|\underline{u}\|^2 = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle^2}{\|\underline{u}\|^2} \Rightarrow \|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2 \geq \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle^2.$$

Vale l'uguaglianza sse $\underline{v} - P_U(\underline{v}) = \underline{0}$ sse $\underline{v} \in U$ sse $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$. ☒



$\|\underline{u} + \underline{v}\| \geq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

$\alpha, \beta, \gamma = ?$

Vogliamo ricavare gli angoli a partire dalle lunghezze

OSS: se $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \frac{|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \leq 1$

ANGOLO TRA DUE VETTORI (DEFINIZIONE 8.35)

$\underline{u}, \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\} \Rightarrow \widehat{\underline{u}\,\underline{v}} = \arccos\left(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}\right).$

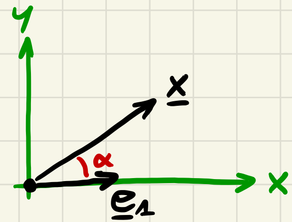
OSSERVAZIONI

- $\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}$ è ben definito e appartiene a $[0, \pi]$;
- $\widehat{\underline{u}\,\underline{v}} = 0$ sse $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|$ sse $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$ con $t > 0$;
- $\widehat{\underline{u}\,\underline{v}} = \pi$ sse $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = -\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|$ sse $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$ con $t < 0$;
- $\widehat{\underline{u}\,\underline{v}} = \pi/2$ sse $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$ sse $\underline{u} \perp \underline{v}$.

ESEMPI

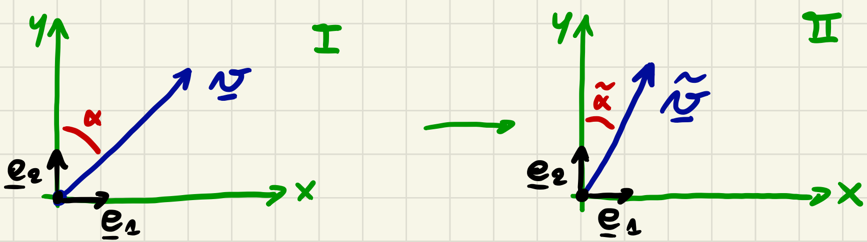
- $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{e}_1 = (1,0) \quad \underline{x} = (x,y)$

$$\alpha = \widehat{\underline{e}_1 \underline{x}}_E = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$



OSS: l'angolo dipende dalla struttura euclidea

Supponiamo di riscalare un'immagine di un fattore 1/2 lungo la direzione x.



Nella seconda immagine, se si usa $\langle , \rangle_E$ si ottiene un risultato errato

$$\underline{v} = (3,3) \longrightarrow \underline{\tilde{v}} = (3/2, 3) \qquad G_{II} = \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle_{II} & \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle_{II} \\ \langle \underline{e}_2, \underline{e}_1 \rangle_{II} & \langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

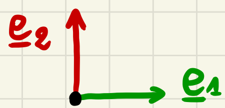
$$\Rightarrow \tilde{\alpha} = \arccos\left(\frac{\langle \underline{\tilde{v}}, \underline{e}_2 \rangle_{II}}{\|\underline{\tilde{v}}\|_{II} \, \|\underline{e}_2\|_{II}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{9} \cdot 1}\right) = \frac{\pi}{4} = \alpha$$

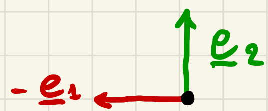
Spazi Vettoriali Orientati (8.6)

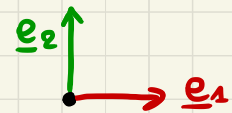
Definizione 8.37

V s.v. su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ è orientata come $\mathcal{B}'$ se $|M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}|>0$.

$V=\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B}_2=\{\underline{e}_1,\underline{e}_2\}$ $\quad \mathcal{B}'=\{\underline{e}_2,-\underline{e}_1\}$ $\quad \mathcal{B}''=\{\underline{e}_2,\underline{e}_1\}$







$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'} = \left[\,\underline{e}_1|_{\mathcal{B}'} \quad \underline{e}_2|_{\mathcal{B}'}\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'}| = 1 > 0$$

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}''} = \left[\,\underline{e}_1|_{\mathcal{B}''} \quad \underline{e}_2|_{\mathcal{B}''}\,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}''}| = -1 < 0$$

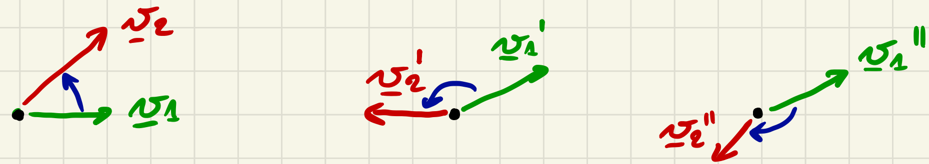
$\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}'$ sono legate da una riflessione.

$\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}''$ sono legate da una rotazione.

PROPOSIZIONE 8.39

- L'orientazione è una relazione di equivalenza in $\{ \tilde{B}$ basi di $V \}$.
- Esistono solo due classi di orientazione.

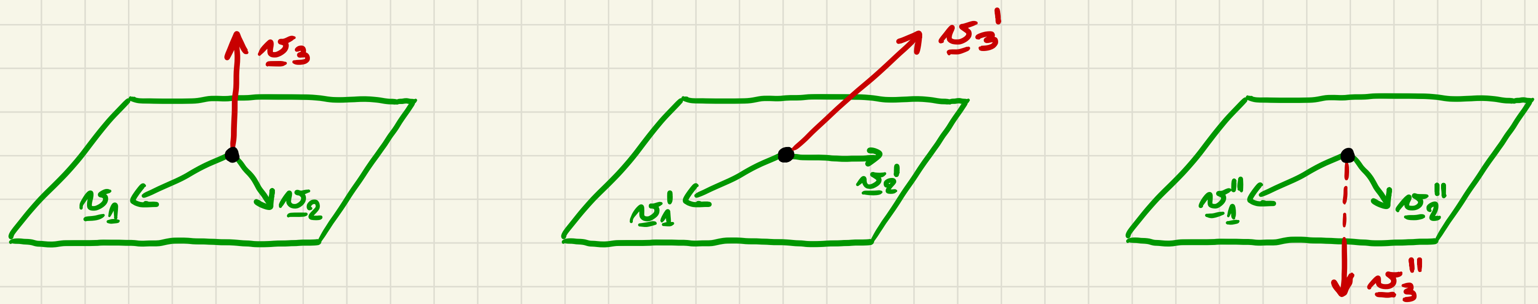
$\mathbb{R}^2$



- $[B] = [B']$
- $[B] \neq [B'']$

$$[B] = \{ \tilde{B} \text{ basi di } V \mid |M_{B\tilde{B}}| > 0 \}$$

$\mathbb{R}^3$



$$[B] = [B'] \neq [B'']$$

DEFINIZIONE 8.40 $\mathbb{B} = \{$classi di orientazione di $V\} = \{[\mathcal{B}], [\mathcal{B}']\}$.

i) Un'orientazione su V è una funzione biunivoca $\xi : \mathbb{B} \to \{-1, 1\}$;

ii) $\mathcal{B}$ si dice orientata positivamente se $\xi([\mathcal{B}]) = 1$;

iii) $\mathcal{B}$ si dice orientata negativamente se $\xi([\mathcal{B}]) = -1$;

iv) (V, ξ) si dice spazio vettoriale orientato.

ORIENTAZIONI CANONICHE

- $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B}_2 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{\underline{e}_2, -\underline{e}_1\}$ $\quad \mathcal{B}'' = \{\underline{e}_2, \underline{e}_1\}$

  $\xi([\mathcal{B}_2]) = 1 = \xi([\mathcal{B}'])$ $\qquad \xi([\mathcal{B}'']) = -1$

  $\xi^{-1}(1) =$ basi antiorarie $\qquad \xi^{-1}(-1) =$ basi orarie

- $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{B}_3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{\underline{e}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$

  $\xi([\mathcal{B}_3]) = 1$ $\qquad \xi([\mathcal{B}']) = -1$

  $\xi^{-1}(1) =$ terne destrorse $\qquad \xi^{-1}(-1) =$ terne sinistrorse

DUALE DI HODGE E PRODOTTO VETTORIALE

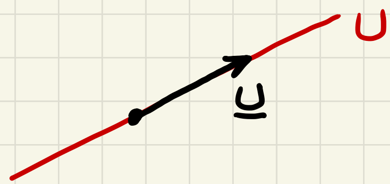
CARATTERIZZAZIONE DEI VETTORI IN SPAZI EUCLIDEI (PROPOSIZIONE 8.43)

V s.v.e., $\underline{u} \in V$ è determinato da:

i) il modulo $\|\underline{u}\|$;

ii) se $\underline{u} \neq \underline{0}$, la sua direzione $U = \mathcal{L}(\underline{u})$;

iii) se $\underline{u} \neq \underline{0}$, la sua orientazione in U (verso di $\underline{u}$).



LEMMA 8.44

V s.v.e. , $U = \{\underline{u}_1, .., \underline{u}_m\}$ l.i. $\Rightarrow$ $|G_U| = G(U) > 0$.

DUALE DI HODGE (DEFINIZIONE 8.45)

V s.v.e.o , $\dim(V) = n$ $2 \leq n < +\infty$, $U = \{\underline{u}_1, .., \underline{u}_{n-1}\} \subset V$

$$* : \begin{array}{ccc} V^{n-1} & \longrightarrow & V \\ (\underline{u}_1, .., \underline{u}_{n-1}) & & \underline{u} = *(\underline{u}_1, .., \underline{u}_{n-1}) \end{array}$$ dove:

i) $\|\underline{u}\| = \sqrt{G(U)}$;

ii) se $\|\underline{u}\| \neq 0$, la direzione di $\underline{u}$ è $U^\perp$;

iii) se $\|\underline{u}\| \neq 0$, il verso di $\underline{u}$ è tale che $\{\underline{u}_1, .., \underline{u}_{n-1}, \underline{u}\}$ è una base positivamente orientata di V.

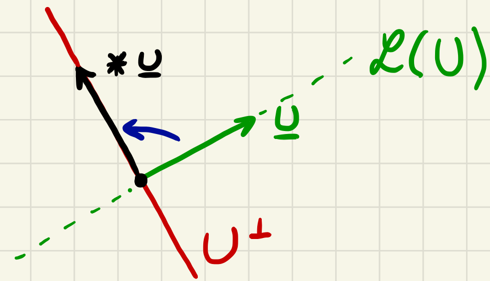
OSS: i) $G(U) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\|\underline{u}\|$ è ben definita

ii) se $\|\underline{u}\| \neq 0$ $\Rightarrow$ U è l.i. $\Rightarrow$ $\dim(U^\perp) = 1$

iii) se $\|\underline{u}\| \neq 0$ $\Rightarrow$ $\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_{n-1}, \underline{u}\}$ è una base di V.

ESEMPIO 8.46

- $n=2$: $U=\{\underline{u}\} \Rightarrow$

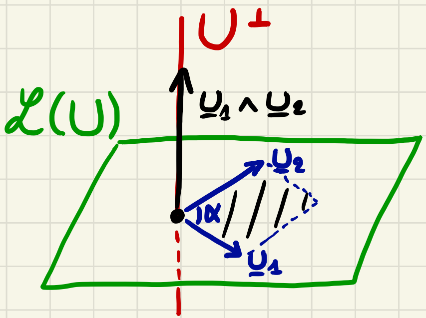


i) $\|*\underline{u}\| = \sqrt{\|\underline{u}\|^2} = \|\underline{u}\|$

ii) $*\underline{u} \perp \underline{u}$

iii) $\{\underline{u}, *\underline{u}\}$ è orientata positivamente

- $n=3$: $U=\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} \Rightarrow *(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2$ prodotto vettoriale



$$\|\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2\|^2 = \begin{vmatrix} \|\underline{u}_1\|^2 & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle \\ \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle & \|\underline{u}_2\|^2 \end{vmatrix} = \|\underline{u}_1\|^2 \|\underline{u}_2\|^2 - \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle^2 =$$

$$= \|\underline{u}_1\|^2 \|\underline{u}_2\|^2 - \|\underline{u}_1\|^2 \|\underline{u}_2\|^2 \cos^2\alpha = \|\underline{u}_1\|^2 \|\underline{u}_2\|^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\Rightarrow \|\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2\| = \|\underline{u}_1\| \, \|\underline{u}_2\| \operatorname{sen}\alpha$$

$$(\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha > 0)$$

PROBLEMA: come calcolare efficientemente $*(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1})$?

Matrice e determinante formale: $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$

Caratterizzazione di $*$ (Proposizione 8.47)

V s.v.e.o., $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base o.n. orientata positivamente $\Rightarrow$

$*(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1})$ è uguale a $\underline{u} = \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1\,n-1} & \underline{v}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{n\,n-1} & \underline{v}_n \end{vmatrix}$, con $\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} = \underline{u}_i|_{\mathcal{B}}$.

Esempi

- $\underline{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathcal{B}_3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ o.n.

$$*(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \underline{e}_1 \\ 0 & 1 & \underline{e}_2 \\ 1 & 1 & \underline{e}_3 \end{vmatrix} = \underline{e}_1(-1) + \underline{e}_2(-1) + \underline{e}_3(1) = (-1, -1, 1) \perp \underline{u}_1, \underline{u}_2$$

- $U = \mathcal{L}(\underline{u}_1 = (1,0,-1,0), \underline{u}_2 = (0,1,0,-1), \underline{u}_3 = (0,0,1,0)) \Rightarrow$

$$\underline{u} = *(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \underline{e}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \underline{e}_2 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \boxed{1} & \cancel{\underline{e}_3} \\ 0 & -1 & 0 & \underline{e}_4 \end{vmatrix} = \underline{e}_1 \cdot 0 + \underline{e}_2 \cdot 1 + \underline{e}_4 \cdot 1 = (0,1,0,1)$$

$\dim(U) = 3 \quad \dim(U^\perp) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow U^\perp = \mathcal{L}((0,1,0,1))$.

PROPRIETÀ (OSSERVAZIONE 8.49 - PROPOSIZIONE 8.51 - 8.52)

- $|\langle \underline{v}, *(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}) \rangle| = \sqrt{G(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}, \underline{v})}$ prodotto misto
- $(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = t_1 (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_3) + t_2 (\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3)$
  $\underline{v}_1 \wedge (t_2 \underline{v}_2 + t_3 \underline{v}_3) = t_2 (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) + t_3 (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_3)$ bilinearità
- $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = - \underline{v}_2 \wedge \underline{v}_1$ antisimmetria
- $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \wedge \underline{v}_1 \rangle = \langle \underline{v}_3, \underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 \rangle$ ciclicità
- $\underline{v}_1 \wedge (\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle \cdot \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \cdot \underline{v}_3$ prodotto triplo
- $\underline{v}_1 \wedge (\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3) + \underline{v}_2 \wedge (\underline{v}_3 \wedge \underline{v}_1) + \underline{v}_3 \wedge (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) = \underline{0}$ identità Jacobi

OSS: $\underline{v}_1 \wedge (\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3) - (\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = - \underline{v}_2 \wedge (\underline{v}_3 \wedge \underline{v}_1) \neq \underline{0}$ in generale

$\Rightarrow$ $\wedge$ non è associativo!