Politecnico di Milano
Esercizi di calcolo delle probabilità[1]

Ilenia Epifani

14 aprile 2020

Questo materiale è stato elaborato durante gli Anni Accademici 2000-2007 per le esercitazioni ai corsi di Calcolo delle Probabilità per allievi di Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni, tenuti dai docenti A. Guglielmi, L. Ladelli, G. Posta e I. Epifani. Alcuni degli esercizi sono inoltre tratti dai temi d'esame di Calcolo delle Probabilità degli anni 2000-2008. Gli esercizi sono organizzati seguendo gli "Appunti per il corso di Calcolo delle Probabilità" di I. Epifani, L. Ladelli e G. Posta.
Per gli esercizi tratti da un libro sono forniti pagina, titolo, autore, casa editrice.
Per gli esercizi tratti da prove d'esame sono forniti data, corso di studi e Anno Accademico, utili nel caso la soluzione non sia presente nell'Eserciziario.

Milano, marzo 2009 Ilenia Epifani

Indice

Capitolo 1

Probabilità

1.1 Spazi di probabilità

1.1.1 Operazioni su eventi

Esercizio 1.1.1 (tratto da [4] pag. 25) Stabilite quali delle seguenti relazioni sono vere e quali sono false

1. $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$
2. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$
3. $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$
4. $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$
5. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \supset A \cap B \cap C$
6. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subset (A \cup B \cup C)$
7. $(A \cup B) \setminus A = B$
8. $A \cap B^c \cap C \subset A \cup B$
9. $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
10. $(A \cup B)^c \cap C = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C)$
11. $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C$
12. $(A \cup B)^c \cap C = C \setminus [C \cap (A \cup B)]$

Esercizio 1.1.2 Siano A, B e C tre eventi. Esprimete i seguenti eventi mediante operazioni logiche su A, B e C:
(1) almeno un evento si verifica
(2) nessun evento si verifica
(3) si verifica soltanto un evento
(4) al più un evento si verifica
(5) tutti gli eventi si verificano
(6) due eventi su tre si verificano
(7) si verifica soltanto A
(8) si verifica A
(9) si verificano almeno due eventi

Esercizio 1.1.3 Una moneta regolare viene lanciata due volte. Antonio vince se esce testa al primo lancio; Benedetto vince se la moneta esibisce croce al secondo.

a) Descrivete lo spazio campionario.

b) Descrivete in termini di sottoinsiemi dello spazio campionario i seguenti eventi:
(1) Antonio vince
(2) Benedetto vince
(3) Antonio non vince
(4) Benedetto non vince
(5) Antonio e Benedetto vincono entrambi
(6) Vince Antonio ma non Benedetto
(7) Vince Benedetto ma non Antonio
(8) Almeno uno dei due vince
(9) Nessuno dei due vince
(10) Vince soltanto uno dei due
(11) Esce cuori
(12) In ogni lancio esce testa o croce.

1.2 Proprietà della probabilità

Esercizio 1.2.1 Una ditta riceve richieste di forniture, che possono essere urgenti oppure no, e richiedere la consegna in città oppure fuori città. Per una data richiesta è noto che:
i) la probabilità che una consegna sia fuori città è 0.4.
ii) la probabilità che una consegna sia urgente è 0.3.
iii) la probabilità che una consegna sia non urgente e in città è 0.4.
Calcolate
a) la probabilità che una consegna sia urgente e in città;
b) la probabilità che una consegna sia o fuori città o non urgente
c) la probabilità che una consegna sia urgente ma fuori città.

Esercizio 1.2.2 Relativamente alla prima sessione d'esame del primo anno del corso di laurea XXX è noto che la probabilità che uno studente superi:

- l'esame A è 0.4,
- l'esame B è 0.5,
- l'esame C è 0.3,
- l'esame A e l'esame B è 0.35,
- l'esame A e l'esame C è 0.2,
- l'esame B e l'esame C è 0.25,
- tutti e tre gli esami è 0.15,

Determinare la probabilità che nella prima sessione uno studente scelto a caso

1. non superi l'esame A;
2. superi A ma non superi B;
3. superi almeno un esame;
4. non superi alcun esame.

Esercizio 1.2.3 Si risponda alle seguenti domande giustificandole in modo opportuno:

1. Se $P(A) = 1/3$ e $P(B^c) = 1/4$, A e B possono essere eventi incompatibili?
2. Se $P(A) = 1/4$ e $P(A \cup B) = 3/4$, quanto vale $P(B)$ nel caso che A e B siano incompatibili?
3. Se $P(A) = P(B) = 3/8$, può verificarsi che $P(A \cup B) = 1/4$? E $P(A \cup B) = 7/8$?
4. Siano $P(A) = 3/4$ e $P(B) = 3/8$. Si verifichi che $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$.

5. Si dimostri in generale la diseguaglianza di Bonferroni:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

Esercizio 1.2.4 N squadre di 2 persone sono formate scegliendo a caso un uomo e una donna fra N coppie sposate.

1. Calcolate la probabilità che nessuna moglie sia in squadra con il proprio marito.
2. Calcolate la probabilità che esattamente k squadre siano formate da coppie sposate.

1.3 Spazi finiti

Esercizio 1.3.1 Un canale trasmette le cifre 1,2,3. Sia T_i l'evento $T_i =$ "Il canale trasmette i". Se la probabilità di trasmettere la cifra 3 è tre volte la probabilità di trasmettere la cifra 1 e la probabilità di trasmettere la cifra 2 è due volte la probabilità di trasmettere la cifra 1, quanto valgono $P(T_1), P(T_2), P(T_3)$? [Risp. $1/6, 1/3, 1/2$]

Esercizio 1.3.2 Se una moneta è truccata in modo tale che la probabilità che esca croce risulti quattro volte la probabilità che esca testa, quanto vale la probabilità che esca testa?

Esercizio 1.3.3 Si vuole assegnare la probabilità che una persona scelta a caso (in una certa popolazione) possegga k appartamenti a partire dai pesi

$$q_k = \begin{cases} c/4 & \text{se } k = 0 \\ c/2^k & \text{se } k = 1, \ldots, 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(1) Per quali valori di c i pesi assegnati definiscono una funzione di probabilità?
(2) Quanto vale la probabilità che una persona scelta a caso possegga almeno due appartamenti?

Esercizio 1.3.4 Cinque corde di lunghezze diverse, $1, 2, 3, 4$ e 5 metri, vengono sottoposte a un test per vedere quale si romperà prima. Si supponga che la probabilità che una corda di rompa per prima sia proporzionale alla sua lunghezza. Si determini la probabilità che la corda che si rompe per prima abbia lunghezza minore o uguale a 3 metri.

1.3.1 Spazi di probabilità uniforme

Esercizio 1.3.5 Si lanciano due dadi regolari contemporaneamente. Antonio vince se la somma dei due dadi è pari, mentre Biagio vince se almeno uno dei due dadi esibisce faccia superiore numerata 6. Siano A, B gli eventi A:"Antonio vince", B:"Biagio vince".

(1) Descrivete in termini di A, B gli eventi:
(a) Antonio e Biagio vincono
(b) Almeno uno dei due vince
(c) Soltanto Antonio vince

(2) Calcolate $P(A)$, $P(B)$ e la probabilità degli eventi descritti al punto precedente.
[risp: $P(A) = 1/2; P(B) = 11/36$; $(a)5/36$; $(b)2/3(= 1/2+11/36-5/36)$; $(c)13/36(= 1/2-5/36)$]

Esercizio 1.3.6 (tratto da [4], pag. 55) A lancia un dado 6 volte e vince se totalizza almeno un uno, B lancia un dado 12 volte e vince se totalizza almeno 2 volte un uno. Chi ha maggiore probabilità di vincere? [Risp. A]

Esercizio 1.3.7 (Esempio 1.4.7 pag. 14 in [5]) Un'associazione è formata da 25 iscritti. Tra questi devono essere scelti un presidente ed un segretario.
(1) Quanti sono i modi possibili per ricoprire le due cariche?
(2) Se gli individui vengono scelti a caso per ricoprire le cariche, qual è la probabilità che un assegnato membro dell'associazione ne ricopra una?

Esercizio 1.3.8 Ordinando a caso i primi 7 numeri naturali, quanto vale la probabilità che i numeri 1 e 2 siano adiacenti (con 2 successivo ad 1)?

Esercizio 1.3.9 1. Estraendo a caso senza reimmissione sette lettere dall'alfabeto italiano (composto da 21), quante parole diverse (anche di senso non compiuto) si possono comporre? Qual è la probabilità di comporre una parola che inizia e finisce per vocale?

2. Come cambiano le risposte alle domande precedenti se le lettere sono estratte con reimmissione?

3. Se le lettere vengono estratte con reimmissione, quanto vale la probabilità di comporre una parola di sette lettere non ripetute?

Esercizio 1.3.10 Scegliendo a caso 5 lettere dall'alfabeto italiano (costituito da 21),

(a) Qual è la probabilità di comporre una parola che contiene una sola lettera "a"?

(b) Qual è la probabilità di comporre una parola di 5 vocali?

(c) Qual è la probabilità di comporre la parola "*esame*"?

Si risponda alle precedenti domande nelle diverse due ipotesi:

(i) le lettere possono essere ripetute,

(ii) ogni lettera può essere usata una sola volta.

N.B. Vengono contate anche le parole di senso non compiuto!
[Risp. nel caso (i): $(a)\,\dfrac{5\times 20^4}{21^5}$; $(b)\,(5/21)^5$; $(c)\,21^{-5}$]
[Risp. nel caso (ii): $(a)\,\dfrac{5\times 20!/(20-4)!}{(21)_5} = 5/21$; $(b)\,\binom{21}{5})^{-1}$; $(c)\,0$]

Esercizio 1.3.11 La password del conto corrente online *** è formata da 8 caratteri che possono essere o cifre $(0, 1, \ldots, 9)$ o lettere minuscole dell'alfabeto italiano composto da 5 vocali e 16 consonanti. Inoltre, cifre e lettere possono essere ripetute.

1. Quante sono le diverse password che possono essere generate?

2. Generando a caso una password, qual è la probabilità di ottenerne una composta esattamente da 2 cifre e 6 lettere?

3. Generando a caso una password, qual è la probabilità di comporne una che comincia con una cifra e finisce con una vocale?

4. Generando a caso una password, qual è la probabilità di comporne una che ha 2 cifre nelle prime due posizioni, 2 vocali nelle successive due posizioni e 4 consonanti nelle ultime quattro posizioni, SENZA caratteri ripetuti?

Esercizio 1.3.12 Quanti sono i possibili anagrammi (anche di senso non compiuto) della parola "PROVENZALI"? Se una scimmia ordina a caso le lettere della parola PROVENZALI, quanto vale la probabilità che la quinta lettera della parola composta sia una vocale e l'ultima una consonante?
[Risp. 10!; 4/15]

Esercizio 1.3.13 Consideriamo una ruota della roulette con 37 possibili diversi risultati: 0,1, ...,36. Il croupier lancia 10 volte la pallina.

1. Qual è la probabilità di ottenere su 10 lanci della pallina la seguente sequenza (ordinata) di risultati $(0, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 14, 28, 14)$? [Risp. 37^{-10}]

2. Qual è la probabilità di ottenere sui 10 lanci della pallina i seguenti risultati: sui primi due lanci 0, sui successivi cinque lanci un multiplo di 3 diverso da 0, e sugli ultimi tre lanci un multiplo di 14 diverso da 0? [Risp. $12^5 \cdot 2^3/37^{10}$]

3. Qual è la probabilità di ottenere sui 10 lanci della pallina due volte zero, cinque volte un multiplo di 3 diverso da 0 e tre volte un multiplo di 14, sempre diverso da 0? [Risp. $\binom{10}{5}\binom{5}{3}12^5 \times 2^3/37^{10}$]

Esercizio 1.3.14 (Esempio (*b*) pag. 35 in [4]) Ciascuno dei 50 fra gli Stati Uniti d'America hanno due senatori. In una commissione di 50 senatori scelti a caso, qual è la probabilità che
(1) un assegnato stato sia rappresentato [Risp. 149/198]
(2) tutti gli stati siano rappresentati [Risp. $\dfrac{2^{50}}{\binom{100}{50}}$]

Esercizio 1.3.15 (Esempio 1.4.8 in [5]) (1) Se una persona gioca a poker con un mazzo di 32 carte, in quanti modi può essere servito?
(2) Qual è la probabilità che il giocatore abbia un tris "servito" (e non un gioco migliore)?

Esercizio 1.3.16 Nell'Università *xxx*, il docente del corso *yyy* ha distribuito 16 domande fra cui ne pescherà 4 per la prova d'esame. Se uno studente prepara soltanto 4 domande,
(1) qual è la probabilità che proprio queste 4 domande costituiscano la prova d'esame? [Risp. 1/1820]
(2) Qual è la probabilità che almeno una delle domande preparate dallo studente sia estratta alla prova d'esame? [Risp. 265/364]

Esercizio 1.3.17 (Esempio 1.4.9 pag. 15 in [5]) Estraendo con reimmissione n palline da un'urna che ne contiene M numerate da 1 a M e tenendo conto dell'ordine, quanto vale la probabilità che ciascuna delle n palline estratte sia diversa dalle altre?

Esercizio 1.3.18 Due carte vengono estratte "a caso" da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità che
(*a*) siano entrambe di picche; [Risp. $\binom{13}{2}/\binom{52}{2}$]
(*b*) siano dello stesso seme; [Risp. $\binom{4}{1}\binom{13}{2}/\binom{52}{2}$]
(*c*) abbiano lo stesso numero; [Risp. $\binom{13}{1}\binom{4}{2}/\binom{52}{2}$]
(*d*) una sia di picche e l'altra di cuori; [Risp. $\binom{13}{1}\binom{13}{1}/\binom{52}{2}$]
(*e*) la prima sia di picche e la seconda di cuori. [Risp. $(13 \times 13)/(52 \times 51)$]

Esercizio 1.3.19 In un gioco del poker con un mazzo di 32 carte ("variante Teresina"),
(1) qual è la probabilità che un giocatore riceva poker d'assi servito?
(2) qual è la probabilità che un giocatore riceva un poker servito?

Esercizio 1.3.20 Un mazzo di 52 carte contenente esattamente 26 carte rosse e 26 nere viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Esercizio 1.3.21 Bianchi scommette con Rossi che estrarrà 4 carte di 4 semi diversi da un mazzo di carte napoletane (che ne contiene 10 per ognuno dei quattro semi). Qual è la probabilità che Bianchi vinca?

Esercizio 1.3.22 Un'urna contiene 25 palline di cui 5 palline rosse, 5 gialle, 5 blu, 5 nere e 5 bianche. Vengono estratte in blocco 3 palline.

1. Calcolare la probabilità che le tre palline estratte siano tutte rosse.
2. Calcolare la probabilità che le tre palline estratte siano tutte dello stesso colore.
3. Calcolate la probabilità che le tre palline estratte siano tutte di colori diversi.

Esercizio 1.3.23 (a) Si determini la probabilità che i 160 allievi di una classe festeggino il compleanno in 160 giorni diversi.
(b) In un gruppo di cinque amici quanto vale la probabilità che
(b.1) almeno 2 persone scelte a caso siano nate nello stesso giorno della settimana?
(b.2) Esattamente 2 siano nate di domenica?

Esercizio 1.3.24 Un mazzo di 52 carte francesi è distribuito fra 4 giocatori in modo tale che ciascun giocatore ne riceva 13.

1. Calcolate la probabilità che 3 dei 4 giocatori non ricevano assi.
2. Calcolate la probabilità che ciascun giocatore riceva un asso.
3. Calcolate la probabilità che almeno 2 dei 4 giocatori non ricevano assi.

1.4 Probabilità condizionata e indipendenza

1.4.1 Alcune formule importanti

Esercizio 1.4.1 Un'inchiesta sulla popolazione della città xxx ha fornito i seguenti dati: il 10% della popolazione è ricco (R), il 5% è famoso (F) e il 3% è ricco e famoso. Per un cittadino di xxx scelto a caso,
(a) Qual è la probabilità che sia ricco ma non famoso?
(b) Per un cittadino NON famoso, qual è la probabilità di essere ricco?
(c) Per un cittadino famoso, qual è la probabilità di essere ricco?

Esercizio 1.4.2 Cinque biglietti di una lotteria sono rimasti invenduti. Fra questi c'è il biglietto vincente. Due amici A e B decidono di comprarne uno a testa. A sceglie per primo il biglietto.
(a) Qual è la probabilità che A acquisti il biglietto vincente?
(b) Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente?
(c) Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente, se non è stato acquistato da A?
(d) Qual è la probabilità che uno dei due vinca?

Esercizio 1.4.3 (Esempio 1.13 in [10]) Un canale di comunicazione trasporta segnali di due tipi denominati 0 e 1. A causa del rumore alcune volte viene trasmesso 0, ma è ricevuto 1; altre volte è trasmesso 1 e ricevuto 0. Assumiamo che sia 0.94 la probabilità che un segnale trasmesso come 0 sia ricevuto correttamente e che sia 0.91 la probabilità che un segnale trasmesso come 1 sia ricevuto correttamente. Assumiamo che la probabilità di trasmettere 0 sia 0.45. Viene spedito un segnale. Trovare:
1) la probabilità di ricevere 1,
2) la probabilità di ricevere 0,
3) la probabilità che sia trasmesso 1, dato che è ricevuto 1,
4) la probabilità che sia trasmesso 0, dato che è ricevuto 0,
5) la probabilità di un errore.

Esercizio 1.4.4 (Urne di Polya) Un'urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera, la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre tre palline nere. Se, invece, la pallina estratta è bianca, nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede quindi a successive due estrazioni seguendo lo schema appena descritto.
(a) Qual è la probabilità di estrarre tre palline nere?
(b) Qual è la probabilità di estrarre tre palline dello stesso colore?

Esercizio 1.4.5 In un gioco televisivo viene messo in palio un 1 milione di euro. Per vincerlo il concorrente dovrà indovinare fra tre buste qual è quella che contiene la promessa di pagamento. Il concorrente sceglie a caso una busta; a questo punto il conduttore mostra una busta vuota offrendo al concorrente la possibilità di cambiare la propria busta con quella rimanente.
Qual è la probabilità di vincere il premio conservando la prima busta scelta?
Qual è la probabilità di vincere cambiando la busta?
Qual è la strategia migliore fra le due?

Esercizio 1.4.6 È noto che i gemelli possono essere dei veri gemelli, e in questo caso sono dello stesso sesso, o degli pseudo-gemelli, e in tal caso è $1/2$ la probabilità che siano dello stesso sesso. Sia p la probabilità che due gemelli siano veri gemelli.
(1) Determinare la probabilità che due gemelli siano veri gemelli sapendo che sono dello stesso sesso.
(2) Qual è la probabilità che due gemelli siano di sesso diverso?

Esercizio 1.4.7 Abbiamo due urne U_1, U_2. U_1 contiene 2 palline bianche e 3 palline nere. U_2 contiene 6 palline bianche e 4 nere. Si estrae a caso una pallina da un'urna. L'urna è scelta seguendo un procedimento di casualizzazione che attribuisce probabilità p a U_1 ed $(1-p)$ a U_2. Per quale valore di p la probabilità di estrarre pallina nera risulta uguale alla probabilità di estrarre a caso una pallina nera da un'urna con 7 palline nere ed 8 bianche?

Esercizio 1.4.8 Una prima urna contiene 4 palline bianche e 3 palline nere e una seconda urna contiene 3 palline bianche e 5 palline nere. Estraggo una pallina dalla prima urna e senza guardarla la ripongo nella seconda; quindi estraggo una pallina dalla seconda urna.
(1) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia nera.
(2) Se la pallina estratta dalla seconda urna è nera, è più probabile che la pallina estratta dalla prima urna fosse bianca o nera?

Esercizio 1.4.9 (Esercizio 46 pag. 59 in [7]) Il 5% degli abitanti di un paese ha la pressione alta. Se il 75% delle persone con pressione alta beve alcolici mentre il 50% delle persone con pressione non alta non beve alcolici, qual è la percentuale dei bevitori con pressione alta?

Esercizio 1.4.10 Ho programmato di partire dopodomani per le vacanze. Ma, è annunciato uno sciopero dei treni e io non ho nessuna intenzione di partire nel bel mezzo di uno sciopero. Comunque, so che è in corso una trattativa sindacale e che se la trattativa avrà successo lo sciopero verrà revocato con probabilità dell'80%, mentre se la trattativa fallisce lo sciopero sarà messo in atto con probabilità del 99%. Ho stimato inoltre la probabilità che la trattativa fallisca pari a 40%.
(a) Calcolate la probabilità che io fra due giorni non riesca a partire a causa dello sciopero.
(b) Se arrivata in stazione scopro che i treni viaggiano, quanto vale la probabilità che la trattativa abbia avuto successo?

Esercizio 1.4.11 Partendo dalla piazzetta del paese, Camillo può raggiungere il porto, scegliendo fra sei diversi percorsi numerati da 1 a 6. Camillo sceglie il percorso lanciando un dado regolare. Per $i = 1, \dots, 6$, sia $1/(i+1)$ la probabilità di raggiungere il porto in meno di 10 minuti, attraverso il percorso i.

(1) Calcolate la probabilità che Camillo impieghi meno di 10 minuti per raggiungere il porto dalla piazzetta.
(2) Calcolate la probabilità che Camillo *non* abbia scelto il percorso 1, sapendo che ha impiegato almeno 10 minuti per andare dalla piazzetta al porto.

Esercizio 1.4.12 Siano date due urne, urna A ed urna B. Nell'urna A ci sono 2 biglie bianche ed 1 biglia nera, nell'urna B c'è 1 biglia bianca e 2 nere. Si lancia un dado; se esce un numero minore od uguale a 4 si pesca una biglia dall'urna A, altrimenti si pesca una biglia dall'urna B.

1. Calcolare la probabilità che la biglia estratta sia nera.
2. Calcolare la probabilità che sul dado sia uscito un numero minore od uguale a 4 sapendo che si è estratta una biglia nera.
3. Calcolare la probabilità che sul dado sia uscito il numero 1 sapendo che si è estratta una biglia nera.

Esercizio 1.4.13 Un'urna contiene 6 palline di cui 3 bianche, 2 rosse ed 1 nera. Si estraggono senza reimmissione tre palline e si vince se una delle tre è nera.

1. Si calcoli la probabilità di vincere.
2. Si calcoli la probabilità di vincere sapendo che la pallina nera non è uscita nelle prime due estrazioni.
3. Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?

Esercizio 1.4.14 La ditta XYZ produce transistor per la realizzazione di circuiti elettronici. I transistor prodotti dalla ditta sono di due classi: classe A e classe B. Per testarne la durata, i transistor vengono sottoposti ad un "test di vita accelerata". La probabilità che un transistor di classe A bruci dopo 5 minuti di test di vita accelerata è pari a 0.2, mentre la probabilità che un transistor di classe B bruci dopo 5 minuti di test di vita accelerata è pari a 0.6.

La ditta UVW utilizza i transistor prodotti da XYZ per assemblare circuiti elettronici dei quali garantisce la durata. A tal fine acquista solo transistor di classe A. Un giorno l'ufficio consegne della XYZ telefona alla UVW avvertendo che c'è una piccola probabilità, pari al 10%, che l'ultimo lotto di transistor acquistato dalla UVW, a causa di un errore di consegne, sia costituito da transistor di classe B. La UVW sottopone un transistor proveniente dall'ultimo lotto acquistato ad un test di vita accelerato.

1 Calcolare la probabilità che il transistor bruci dopo 5 minuti di test.

2 Sapendo che il transistor è bruciato, calcolare la probabilità che sia di classe A.

Esercizio 1.4.15 Un venditore di un certo strumento di controllo sostiene che il suo strumento ha un'alta affidabilità, essendo $P(A|B) = P(A^c|B^c) = 0.95$, dove A="*lo strumento rileva che il componente è difettoso*" e B="*il componente è difettoso*". Vogliamo usare questo strumento per rilevare i componenti difettosi di una partita molto numerosa, sapendo che essi costituiscono il 5% della partita stessa.

1. Quanto vale $P(B|A)$?
2. Supponiamo ora di volere $P(B|A) = 0.9$. Quanto deve valere $p = P(A|B) = P(A^c|B^c)$?

Esercizio 1.4.16 Consideriamo un mazzo di 40 carte suddivise in 4 classi (detti "semi") ciascuna contenente 10 carte numerate da 1 a 10. Ogni mano servita è formata da cinque carte estratte (senza reimmissione) dal mazzo.

1. Calcolate la probabilità di ricevere una mano che contiene cinque numeri distinti. [Risp. $\binom{10}{5} \times 1024/\binom{40}{5} \simeq 0.3922$]

2. Calcolate la probabilità di ricevere una mano che contiene cinque numeri distinti ma tutti dello stesso seme. [Risp. $4\binom{10}{5}/\binom{40}{5} \simeq 0.0015$]

3. Se viene servita una mano di numeri tutti distinti, qual è la probabilità che siano tutti dello stesso seme? [Risp. 1/256]

4. Calcolate la probabilità di ricevere una mano che contiene cinque numeri tutti dello stesso seme e consecutivi. [Risp. $24/\binom{40}{5}$]

Esercizio 1.4.17 Due sacchi di mele sono apparentemente identici ma il primo contiene 2 mele marce e 8 mele buone mentre il secondo ne contiene 6 marce e 4 buone. Viene scelto a cso un sacco e se ne estrae una mela, la si esamina e, senza inserirla, dallo stesso sacco se ne estrae una seconda.

1. Calcolare la probabilità che la prima mela estratta sia marcia. [Risp. 0.4]

2. Sapendo che la prima mela estratta è marcia calcolare la probabilità che provenga dal secondo sacco. [Risp. 0.75]

3. Sapendo che la prima mela estratta è marcia calcolare la probabilità che anche la seconda lo sia. [Risp. $4/9 \simeq 0.44$]

1.4.2 Indipendenza

Esercizio 1.4.18 (Esercizio 173 pag. 44 in [3]) Si effettuano due estrazioni con reimmissione da un'urna che contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Siano A_1= "*la prima pallina estratta è pari*", A_2 = "*la seconda pallina estratta è pari*" e B = "*una sola pallina estratta è pari*".
Gli eventi A_1, A_2 sono indipendenti? E A_2, B? E A_1, B?
I tre eventi A_1, A_2, B sono indipendenti?

Esercizio 1.4.19 (Esempio 1.9 pag. 28 in [10]) Si lanciano due dadi regolari. Siano A="*Il primo dado esibisce la faccia 1,2 o 3*", B="*Il primo dado esibisce la faccia 3,4 o 5*", C="*La somma dei due dadi è 9*". Verificare che $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Gli eventi A, B, C sono indipendenti? Perché?

Esercizio 1.4.20 La distribuzione dei dipendenti di una nuova compagnia telefonica è la seguente: il 70% sono uomini e il 30% sono donne. Fra gli uomini, il 25% è laureato, il 60% ha un diploma di scuola media superiore e il restante 15% ha la licenza media inferiore. Per le donne le tre percentuali sono rispettivamente, 35%, 60% e 5%.
(1) Scelto un dipendente a caso, qual è la probabilità che non sia laureato?
(2) Scelto un dipendente a caso, qual è la probabilità che sia donna e non laureata?
(3) Scelto a caso un dipendente che è laureato, qual è la probabilità che sia uomo?
(4) Sesso e livello di istruzione sono indipendenti?
(5) La risposta al punto precedente cambia se la ripartizione delle dipendenti per livello di istruzione coincide con la ripartizione dei dipendenti per livello di istruzione?

Esercizio 1.4.21 Siano A ="il libro di probabilità XYZ della biblioteca del dipartimento in questo momento è in prestito" e B ="il libro di probabilità ZWT della biblioteca del dipartimento in questo momento è in prestito".
(1) Se $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ e $P(A\cup B) = 0.65$, calcolare la probabilità che entrambi i libri siano in prestito e la probabilità che esattamente uno dei due libri sia in prestito.
(2) Se invece $P(A\cup B) = 0.7$ e ciascuno dei due libri viene preso in prestito indipendentemente dall'altro ma con uguale probabilità, calcolare $P(A)$.
(3) Se invece so che $P(A\cup B) = 0.7$ e la probabilità che esattamente un libro sia in prestito è 0.5, posso determinare $P(A)$ e $P(B)$? (Giustificare adeguatamente la risposta).

Esercizio 1.4.22 Filiberto possiede 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Filiberto sceglie a caso una delle 5 monete e la lancia 3 volte.
(1) Calcolare la probabilità di ottenere 3 teste.
(2) Supponiamo che dopo aver lanciato 3 volte la moneta Filiberto abbia ottenuto 3 teste. Ora Filiberto è (erroneamente!) convinto che lanciando la stessa moneta una quarta volta otterrà croce con grande probabilità. Calcolare la probabilità di ottenere croce al quarto lancio *sapendo che* nei primi tre si è ottenuto testa.
(3) *Supponendo che* al quarto lancio Filiberto abbia ottenuto ancora testa, calcolare la probabilità che la moneta che Filiberto ha lanciato quattro volte sia una di quelle truccate.

Esercizio 1.4.23 Tacito è appassionato di pesca, in particolare ama pescare trote. Per questo si reca nella “Valle della Trota”. La valle è famosa per i suoi due laghi, il “Lago d’Oro” ed il “Lago d’Argento”, entrambi pescosissimi, ma mentre il primo è popolato interamente da trote per il secondo si stima che solo il 60% dei pesci in esso presenti siano trote (le uniche prede di interesse per Tacito). Tacito arriva al bivio tra i due laghi ma non ricorda quale dei due sia quello con più trote, così rimette la scelta del lago al caso lanciando una moneta (equilibrata). Tacito è un ottimo pescatore e sicuramente pescherà almeno un pesce, inoltre essendo uno sportivo quando pesca un pesce smette di pescare per l’intera giornata. Prima di sera ha catturato un pesce.
(1) Calcolare la probabilità che il pesce pescato da Tacito sia una trota.
(2) Sapendo che Tacito ha pescato una trota, calcolare la probabilità che l’abbia pescata dal “Lago d’Oro”.
(3) Il giorno seguente, rincuorato dal risultato della giornata precedente torna al lago del giorno precedente. Calcolare la probabilità che peschi una trota (sapendo che il giorno prima ne ha pescata una e che i risultati della pesca in uno stesso lago in giorni differenti possono essere considerati indipendenti).

Esercizio 1.4.24 (Esempio 1.5.34 pag. 23 in [5]) Un tribunale sta investigando sulla possibilità che sia accaduto un evento E molto raro e a tal fine interroga due testimoni, Arturo e Bianca. L’affidabilità dei due testimoni è nota alla corte: Arturo dice la verità con probabilità α e Bianca con probabilità β, e i loro comportamenti sono indipendenti. Siano A e B gli eventi Arturo e Bianca rispettivamente affermano che E è accaduto, e sia $p = P(E)$. Qual è la probabilità che E sia accaduto sapendo che Arturo e Bianca hanno dichiarato che E è accaduto? Assumendo $\alpha = \beta = 0.9$ e $p = 10^{-3}$, quale conclusione ne traete?

Esercizio 1.4.25 (tratto da Ross, Calcolo delle probabilità e Statistica, 2004) In un modello semplificato per le variazioni del prezzo delle azioni, in un giorno, il prezzo o sale di un’unità con probabilità p o scende di un’unità con probabilità $1-p$. Assumiamo che le variazioni di prezzo in giorni differenti siano indipendenti.

1. Qual è la probabilità che il prezzo delle azioni torni a quello di partenza dopo 2 giorni?
2. Qual è la probabilità che il prezzo delle azioni salga di un’unità dopo 3 giorni?
3. Sapendo che dopo 3 giorni il prezzo delle azioni è salito di una unità, qual è la probabilità che fosse salito il primo giorno?

1.4.3 Affidabilità di un sistema

Definizione 1 Dato un sistema S costituito dai componenti $A_1, \dots, A_n$, si chiama *affidabilità del componente* A_j la probabilità che il componente funzioni (nel senso che fornisca certe prestazioni in limiti di tempo e condizioni prefissate) ed *affidabilità di* S la probabilità che S funzioni.
Se i componenti sono supposti tra loro indipendenti e sono connessi in serie (cioè il sistema funziona se e solo se tutti i componenti funzionano) allora l’affidabilità del sistema è:

(Sistema in serie) $$P(S) = P(A_1) \cdots P(A_n)$$

Se i componenti sono supposti tra loro indipendenti e sono connessi in parallelo (cioè il sistema funziona se e solo se almeno un componente funziona) allora l'affidabilità del sistema è:

(Sistema in parallelo) $$P(S) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n))$$

Esercizio 1.4.26 Si determini l'affidabilità del sistema in Figura 1.1, posto che i componenti funzionino in modo indipendente e con la stessa affidabilità $p = 0.8$.

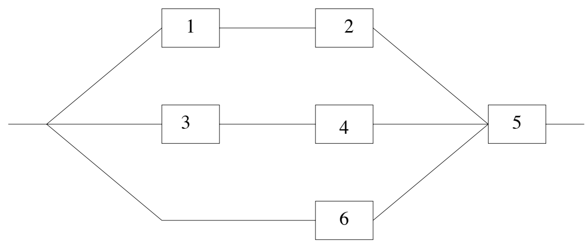


Figura 1.1: Sistema Esercizio 1.4.26

Esercizio 1.4.27 Qual è l'affidabilità di un sistema formato da tre componenti in serie A_1, A_2, A_3 che funzionano in modo indipendente e le cui affidabilità sono rispettivamente 0.8, 0.7, 0.6? Per aumentare l'affidabilità del sistema, un tecnico propone due soluzioni alternative:

(a) Aggiungere un sistema identico in parallelo come nella Figura 1.2 (cioè, B_1, B_2, B_3 sono

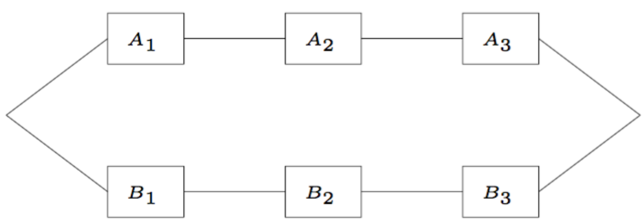


Figura 1.2: Sistema S_2

indipendenti tra di loro e indipendenti da A_1, A_2, A_3 e hanno affidabilità 0.8, 0.7, 0.6, rispetttivamente)

(b) triplicare il sottosistema 2–3 costituito dai componenti più fragili secondo lo schema della Figura 1.3 (B_2 e C_2 hanno la stessa affidabilità di A_2 e B_3, C_3 di A_3. Inoltre, i 7 componenti del nuovo sistema S_2 funzionano tutti in modo indipendente)
Quale fra le soluzioni (a) e (b) è la più efficiente?

Esercizio 1.4.28 (Esempio 1.11 in [10]) Calcolate l'affidabilità del sistema S_4 in figura 1.4, costituito da una copia del componente R_1, una del componente R_2, tre del componete R_3, 2 del componente R_4 e una del componente R_5, sapendo che i componenti R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sono indipendenti e hanno affidabilità 0.95, 0.99, 0.7, 0.75, 0.9 rispettivamente.

1.5 Soluzioni di alcuni esercizi del Capitolo 1

Esercizio 1.1.2
(1) $A \cup B \cup C$
(2) $A^c \cap B^c \cap C^c$

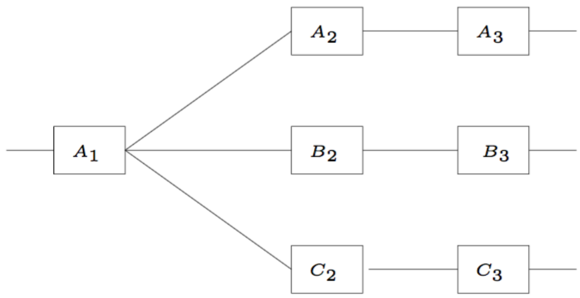


Figura 1.3: Sistema S_3

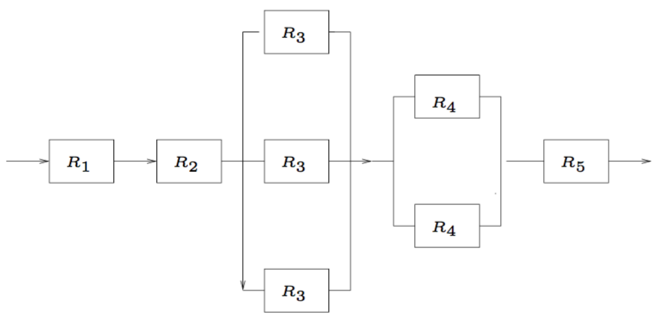


Figura 1.4: Sistema S_4

(5) $A \cap B \cap C$

(3) $\Big(A \cap (B^c \cap C^c)\Big) \cup \Big(B \cap (A^c \cap C^c)\Big) \cup \Big(C \cap (B^c \cap A^c)\Big) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$

(4) $\Big(A \cap (B^c \cap C^c)\Big) \cup \Big(B \cap (C^c \cap A^c)\Big) \cup \Big(C \cap (B^c \cap A^c)\Big) \cup \Big(A \cup B \cup C\Big)^c$

(6) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) = (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \cup (B \cap C \setminus A)$

Esercizio 1.1.3 *a*) $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$;

1. A="Antonio vince" $= \{TT, TC\}$
2. B="Benedetto vince" $= \{TC, CC\}$
3. $A^c = \{CT, CC\}$
4. $B^c = \{TT, CT\}$
5. $A \cap B = \{TC\}$
6. $A \setminus B = \{TT\}$
7. $B \setminus A = \{CC\}$
8. $A \cup B = \{TT, TC, CC\}$
9. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{CT\}$
10. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{TT, CC\}$
11. $\emptyset$
12. Ω

Esercizio 1.2.1 Introdotti gli eventi $U =$"La consegna è urgente" e $C =$"La consegna è in città", dobbiamo calcolare:

a) $P(C \cap U)$

b) $P(C^c \cup U^c)$

c) $P(U \setminus C) = P(U \cap C^c)$
conoscendo le probabilità dei seguenti eventi:
$i) P(C^c) = 0.4$
$ii)$ $P(U) = 0.3$.
$iii)$ $P(C \setminus U) = P(U^c \cap C) = 0.4$.
Osservando che $C \cap U = C \setminus (C \setminus U)$ e che $(C \setminus U) \subset C$, deduciamo che:
a) $P(C \cap U) = P(C \setminus (C \setminus U)) = P(C) - P(C \setminus U) = (1 - P(C^c)) - P(C \setminus U) = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2$;
b) $P(C^c \cup U^c) = 1 - P((C^c \cup U^c)^c) = 1 - P((C^c)^c \cap (U^c)^c) = 1 - P(C \cap U) = 1 - 0.2 = 0.8$.
Infine, poiché $U \setminus C = U \setminus (C \cap U)$ e $(C \cap U) \subset U$, allora
c) $P(U \setminus C) = P(U) - P(C \cap U) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

Esercizio 1.2.2 Indichiamo con A l'evento "lo studente supera l'esame A", con B l'evento "lo studente supera l'esame B" e con C l'evento "lo studente supera l'esame C". Allora le probabilità richieste sono:

1. $P(A^c) = 1 - P(A) = 0.6$;
2. $P(A \cap B^c) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.35 = 0.05$;
3. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C) = 0.4 + 0.5 + 0.3 - 0.35 - 0.2 - 0.25 + 0.15 = 0.55$;
4. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - 0.55 = 0.45$.

Esercizio 1.2.3
1. No. Ragioniamo per assurdo: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c \Rightarrow P(A) \le P(B^c)$. Ossia, $1/3 \le 1/4$: assurdo!
2. Se A e B sono incompatibili, allora $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 3/4 - 1/4 = 1/2$.
3. Nessuna delle due affermazioni è vera. Infatti,
$A \subset A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B)$ e $B \subset A \cup B \Rightarrow P(B) \le P(A \cup B)$, da cui otteniamo $P(A \cup B) \ge P(A) \vee P(B) = 3/8 > 1/4$. Inoltre, $P(A \cup B) \le P(A) + P(B) = 6/8 < 7/8$.
4. $A \cap B \subset A \Rightarrow P(A) \ge P(A \cap B)$ e $A \cap B \subset B \Rightarrow P(B) \ge P(A \cap B)$, da cui otteniamo: $P(A \cap B) \le P(A) \wedge P(B) = 3/8$.
5. $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$ e $P(A^c \cup B^c) \le P(A^c) + P(B^c) = 2 - P(A) - P(B)$. Quindi, $P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1$.
In generale valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\max\{P(A), P(B)\} \le P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$
$$P(A) + P(B) - 1 \le P(A \cap B) \le \min\{P(A), P(B)\}.$$

Esercizio 1.3.2 Lo spazio campionario relativo all'esperimento aleatorio del lancio della moneta è $\Omega = \{T, C\}$. Poniamo $P(T) = x$: allora deve essere $P(C) = 4x$. I due eventi sono incompatibili ed esauriscono Ω, quindi $P(T) + P(C) = x + 4x = 1 = P(\Omega)$ da cui $5x = 1$ e $P(T) = 0.2$.

Esercizio 1.3.3 I pesi assegnati suggeriscono che, scelta una persona a caso in una certa popolazione, i possibili risultati elementari sono riassunti nello spazio campionario $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$. Essendo lo spazio finito, la funzione di probabilità (dipendente dai pesi dati) sarà una funzione definita sull'insieme potenza $\mathscr{P}(\Omega)$ –costituito da 2^n elementi– nel seguente modo:

$$P(\{k\}) = \begin{cases} cp(1-p) & \text{se } k = 0 \\ cp^k & \text{se } k = 1, \dots, n \end{cases} \qquad (p \in (0,1)). \tag{1.1}$$

P in (1.1) è una probabilità su $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ se

$i)$ $cp(1-p) \ge 0$

ii) $cp^k \geq 0 \; \forall k = 1, \dots, n$

iii) $cp(1-p) + \sum_{k=1}^n cp^k = 1$.

Segue da *i)* e da *ii)* che necessariamente $c > 0$: se fosse $c = 0$ allora $P(\{k\}) = 0 \; \forall k$ e $\sum_{k=0}^n P(\{k\}) = 0$: assurdo! Inoltre

$$\sum_{k=1}^n p^k = \sum_{k=0}^n p^k - 1 = \frac{1-p^{n+1}}{1-p} - 1 = \frac{1-p^{n+1}-1+p}{1-p} = p\frac{1-p^n}{1-p}$$

da cui, in virtù della condizione *iii)*:

$$c = \frac{1}{p[(1-p) + \frac{1-p^n}{1-p}]} = \frac{1-p}{p}\frac{1}{(1-p)^2+1-p^n}.$$

Se $n = 5$ e $p = 1/2$, allora $c = 32/39$, $A=$ "una persona scelta a caso possiede almeno due appartamenti" $=\{2,3,4,5\}$ e $P(A) = 1 - P(\{0,1\}) = 1 - 32/39 * 1/4 - 32/39 * 1/2 = \frac{15}{39}$.

Esercizio 1.3.4 Lo spazio campionario relativo a questo esperimento aleatorio può essere rappresentato come $\Omega = \{1, \dots, 5\}$, dove l'evento elementare $\{i\}$ è dato da "*si rompe per prima la corda lunga i metri*". Una probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ viene assegnata mediante 5 pesi p_i positivi e a somma 1 che vanno interpretati come probabilità dei 5 eventi elementari. Nel nostro caso, dobbiamo avere $p_i = c \times i$ con c tale che $1 = \sum_{i=1}^5 p_i = c(1 + \cdots + 5) = c \times 15$. Deduciamo che $c = 1/15$ e che la probabilità che si rompa per prima una corda lunga al più 3 metri è data da $(1+2+3)/15 = 2/5$.

Esercizio 1.3.8 I casi possibili sono tutte le possibili permutazioni dei primi 7 numeri naturali cioè 7!. Invece, per i casi favorevoli ho 6 modi diversi di scegliere la posizione dell'1 (perché deve essere sempre seguito immediatamente dal 2; per le altre 5 posizioni permuto i numeri naturali da 3 a 7, quindi i casi favorevoli sono $6 \cdot 5! = 6!$; la probabilità cercata vale $6!/7! = 1/7 \simeq 0.14285$

Esercizio 1.3.9 Se estraiamo a caso senza reimmissione 7 lettere da un insieme di 21, ogni possibile parola componibile è una stringa (ordinata) di 7 elementi tutti diversi tra di loro, e quindi il numero dei casi elementari corrispondenti a questo eserimento coincide con il numero di disposizioni semplici di 21 elementi in 7 classi, cioè $21 \cdot 20 \cdots 15 = 586051200$.
Sia A l'evento:"Compongo una parola che inizia e finisce per vocale". Il numero di parole di sette lettere che cominciano e finiscono per vocale, quando le lettere non si possono ripetere, può essere calcolato nel seguente modo: il primo posto posso riempirlo usando una delle 5 vocali dell'alfabeto e il settimo usando una delle 4 rimanenti. A questo punto, le lettere dell'alfabeto rimaste sono 19 e quindi la stringa interna di 5 posti posso riempirla in $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ modi diversi. Segue che $4 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ rappresenta il numero di casi favorevoli all'evento A. In definitiva, la probabilità cercata vale:

$$P(A) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{21 \cdot 20 \cdots 15} = \frac{20}{21 \cdot 20} = \frac{1}{21} \simeq 0.0477$$

2. Se le estrazioni avvengono con reimmissione allora lo spazio campionario connesso all'esperimento è l'insieme delle disposizioni con ripetizione di 21 oggetti di classe 7. Esse sono in tutto 21^7. In questo caso A ha cardinalità $5^2 \cdot 21^5$, poiché primo e settimo posto possono essere riempiti usando una delle 5 vocali dell'alfabeto e la stringa interna di 5 posti usando una qualunque delle 21 lettere. Segue ora che

$$P(A) = \frac{5^2 \cdot 21^5}{21^5} = \frac{25}{441} \simeq 0.057$$

3. Se le estrazioni avvengono con reimmissione, allora $P($"le lettere nella parola estratta sono tutte diverse"$)= \frac{21 \cdots 15}{21^7} \simeq 0.3254$

Esercizio 1.3.11

1. $(10 + 21)^8 = 31^8$
2. $\dfrac{\binom{8}{2} \times 10^2 \times 21^6}{31^8}$
3. $\dfrac{10 \times 31^6 \times 5}{31^8} = \dfrac{50}{31^2}$
4. $\dfrac{(10 \times 9) \times (5 \times 4) \times (16 \times 15 \times 14 \times 13)}{31^8}$.

Esercizio 1.3.19 Le 32 carte del mazzo sono così ripartite: quattro semi, per ognuno dei quali si hanno le 8 carte distinte: $A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7$. Ogni mano è un insieme di 5 carte scelte dal mazzo. Allora: il numero di mani possibile è $\binom{32}{5} = 201376$: Ciascuna mano ha probabilità $1/\binom{32}{5}$ di essere servita.

1. Sia A l'evento: "il giocatore riceve un poker d'assi servito". Allora $|A| = \binom{4}{4}\binom{32-4}{1} = 28$ e
$$P(A) = \frac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 0.00014$$
2. Sia B l'evento: "il giocatore riceve un poker servito". In un mazzo di 32 carte il poker servito può essere di 8 valori diversi e la probabilità di ottenere un poker servito d'assi è uguale alla probabilità di ricevere un poker servito di un altro valore. Inoltre, gli eventi "il giocatore riceve poker servito d'assi", di K, ...sono incompatibili tra di loro. Quindi $P(B) = 8 \cdot P(A) = 0.001112347$.

Esercizio 1.3.20 Ci sono $\binom{52}{26}$ (= # di *combinazioni semplici* di 52 oggetti di classe 26) modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte; se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una prima metà in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. Dunque

$$P(\text{"ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero"}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.2181.$$

Esercizio 1.3.21 L'esperimento è del tipo estrazione senza reimmissione di un campione non ordinato di ampiezza 4 da un insieme di 40 elementi di cui 10 del tipo bastoni, 10 del tipo coppe, 10 del tipo denari e 10 del tipo spade. Lo spazio campionario ha cardinalità $\binom{40}{4}$, mentre i casi favorevoli all'evento $E =$"estrarre 4 carte di 4 semi diversi da un mazzo di carte napoletane" sono $\binom{10}{1}^4$, da cui $P(E) = \binom{10}{1}^4 / \binom{40}{4} \simeq 0.11$.

Esercizio 1.3.22 Consideriamo come casi possibili le combinazioni senza ripetizione di classe 3 da un insieme di 25 elementi. Il numero di queste è $\binom{25}{3}$.

1. Il numero di casi favorevoli all'evento E="le tre palline estratte sono tutte rosse" si ottiene considerando che ci sono $\binom{5}{3}$ modi di scegliere le palline rosse tra le 5 presenti nell'urna. Quindi:
$$P(E) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{1}{230} \simeq 0.0044$$

2. Sia F="le tre palline estratte sono tutte dello stesso colore". Il numero di casi favorevoli all'evento F si ottiene mediante il seguente conteggio: il colore comune alle tre palline si può scegliere fra 5 diversi e per ognuna di queste scelte ci sono $\binom{5}{3}$ modi di scegliere le palline tutte dello stesso colore. In totale i casi favorevoli sono allora $5\binom{5}{3}$, quindi

$$P(F) = \frac{5\binom{5}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{5}{230} = \frac{1}{46} \simeq 0.0218$$

3. Sia G="le tre palline estratte sono tutte di colori diversi". Il numero di casi favorevoli all'evento G si ottiene mediante il seguente conteggio: i tre diversi colori delle tre palline, si possono scegliere in $\binom{5}{3}$ modi diversi, e per ognuna di queste scelte ci sono $\binom{5}{1}^3$ possibilità di scegliere le palline. Quindi

$$P(G) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{1}^3}{\binom{25}{3}} = \frac{25}{46} \simeq 0.5435$$

Esercizio 1.3.23 (a) Sia A l'evento "i 160 allievi festeggiano il compleanno in giorni diversi" e pensiamo l'anno formato (sempre) da 365 giorni. Immaginando di avere etichettato i 160 allievi con un numero da 1 a 160, lo spazio campionario Ω è costituito dalle 160-uple (ordinate) dei giorni di compleanno dei 160 allievi:

$$\Omega = \{(s_1, \dots, s_{160}) : s_j = 1, \dots, 365;\ j = 1, \dots, 160\}$$

[dove $s_j = 1$ significa che il j-esimo allievo è nato il primo gennaio, ..., $s_j = 365$ significa che il j-esimo allievo è nato il 31 dicembre] e

$$A = \{(s_1, \dots, s_{160}) \in \Omega : s_i \neq s_j\ \forall i \neq j\}.$$

Se supponiamo ogni caso elementare di Ω egualmente probabile allora $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. I casi possibili sono 365^{160} (= numero di *disposizioni con ripetizione* di 365 oggetti di ordine 160) mentre i casi favorevoli sono $365 \cdot 364 \cdots (365 - 159) = 365!/(365 - 160)!$ (= numero di *disposizioni senza ripetizione* di 365 elementi di ordine 160). Dunque

$$P(A) = \frac{(365)_{160}}{365^{160}} \simeq 10^{-19}$$

Nota 1 Sostituiamo ora a 160, un generico $n \leq 365$. Allora $P(A^c) = 1 - P(A)$ è la probabilità che 2 o più allievi fra i 160 festeggino il compleanno lo stesso giorno. Si può calcolare che per $n = 22$ $P(A^c) > 50\%$, per $n = 50$ $P(A^c) \simeq 97\%$ e per $n = 100$ $P(A) \simeq 1$.

Nota 2 Assegnare ad ogni evento elementare $(a_1, \dots, a_{160}) \in \Omega$ probabilità

$$P(\{(a_1, \dots, a_{160})\}) = \frac{1}{365^{160}}$$

corrisponde ad assumere per il modello delle nascite degli allievi le seguenti ipotesi:

i) la probabilità che un allievo scelto a caso nasca nel giorno j è la stessa per ogni $j = 1, \dots, 365$;

ii) i giorni in cui sono nati i 160 studenti sono indipendenti tra di loro nel seguente senso: fissata la stringa $(a_1, \dots, a_{160})$, consideriamo gli eventi E_1="*lo studente con etichetta 1 è nato nel giorno* a_1", ..., E_{160}="*lo studente con etichetta 160 è nato nel giorno* a_{160}". Allora $E_1, \dots, E_{160}$ sono indipendenti.

(b) In questo caso, lo spazio campionario è $\Omega_2 = \{(s_1, \dots, s_5) : s_j = 1, \dots, 7 \; j = 1, \dots, 5\}$ che ha cardinalità $|\Omega_2| = 7^5$.
(b.1) Consideriamo l'evento B="I cinque amici sono nati in giorni diversi della settimana". I casi favorevoli sono costituiti dalle 5-uple $(s_1, \dots, s_5)$ tali che $s_i \neq s_j$ per $i \neq j$, che sono un esempio di disposizioni senza ripetizione di ordine 5 tra 7 elementi. B ha probabilità: $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)/7^5$. Pertanto la probabilità cercata vale $1 - \frac{360}{7^4} \simeq 0.85$.
(b.2) Scegliamo le 2 persone nate la domenica tra le 5 in $\binom{5}{2}$ modi; rimangono 3 persone, per le quali scegliamo i giorni della settimana in cui sono nate in 6^3 modi. Quindi, la probabilità cercata è: $\dfrac{\binom{5}{2}6^3}{7^5} = 0.027648$.

Esercizio 1.3.24 Il caso elementare ω è dato da 4 sottoinsiemi di 13 carte ciascuno estratti dalle 52 carte e distribuiti a 4 giocatori distinti, chiamiamoli per nome: l'Antonio, la Miriam, la Iole e il Glauco, per cui lo spazio campionario Ω contiene

$$|\Omega| = \binom{52}{13} \times \binom{52-13}{13} \times \binom{52-13-13}{13} \times \binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

dove il primo fattore rappresenta quante diverse mani di 13 carte può ottenere l'Antonio, il secondo quelle fra cui sceglie la Miriam e così via.

1. Sia A: "3 su 4 giocatori non ricevono assi". Per trovare $|A|$, si considera che 3 su 4 giocatori non ricevono assi sse un solo giocatore li riceve tutti e 4; ci sono 4 possibili scelte del giocatore con i 4 assi. Da qui un primo fattore 4, le altre $(13-4)$ carte di questo giocatore saranno estratte dalle $(52-4)$ rimanenti in $\binom{52-4}{13-4}$; i tre sottoinsiemi dei rimanenti 3 giocatori saranno scelti in
$$\binom{52-4-9}{13} \times \binom{52-4-9-13}{13} \times \binom{13}{13}$$
Segue che
$$|A| = 4 \times \binom{52-4}{13-4} \times \binom{52-4-9}{13} \times \binom{52-4-9-13}{13} \times \binom{13}{13} = 4 \times \frac{48!}{9!(13)^3}$$
da cui
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \dots = \frac{44}{4165} \simeq 0.011$$

2. Sia B: "Ciascun giocatore riceve un asso". Innanzitutto contiamo in quanti modi le rimanenti 48 carte sono distribuite a caso fra i 4 giocatori in modo tale che ciascuno di loro ne riceva 12. È lo stesso conto fatto per calcolare $|\Omega|$ ma con 12 al posto di 13 e 48 al posto di 52, quindi $\dfrac{48!}{(12!)^4}$. Ma il seme dell'asso che ciascuno riceve fa la differenza nel gioco, per cui, se come prima (ma solo per comodità) partiamo dall'Antonio, allora ad Antonio ne arriva casualmente uno dei quattro assi, alla Miriam uno dei tre rimanenti dopo quello arrivato all'Antonio e così via, quindi la ripartizione dei 4 assi fra i 4 avviene in 4! modi diversi. Mettendo insieme i due fattori abbiamo
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4!\frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} \simeq 0.105$$

3. Sia C: "Almeno 2 giocatori NON ricevono assi" ed E_i: "Esattamente i giocatori NON ricevono assi", allora
$$P(C) = P(E_2) + P(E_3) = 1 - P(E_0) - P(E_1)$$

dove $E_3 = A$ del punto 1. ed $E_0 = B$ del punto 2. Calcoliamo ora $|E_1|$, considerando che "esattamente 1 giocatore NON riceve Assi" sse "un giocatore ha 0 assi, un giocatore ne ha 2 e due giocatori hanno un asso a testa". Scegliamo ora i giocatori, gli assi e le carte diverse dagli assi:

- abbiamo 4 possibilità di scelta del giocatore con 0 assi e 3 del giocatore con due assi;
- i due assi del giocatore che ne ha 2 sono scelti in $\binom{4}{2} = 6$ modi;
- 2 possibili scelte dell'asso di uno dei due giocatori che ne ha uno;
- $\binom{48}{13}$ scelte delle 13 carte del giocatore con 0 assi
- $\binom{48-13}{11}$ scelte delle altre 11 carte del giocatore con 2 assi
- $\binom{48-13-11}{12}$ scelte delle altre 12 carte del giocatore con 1 asso
- $\binom{12}{12} = 1$ solo scelta per le 12 carte (non asso) dell'ultimo giocatore

Allora

$$|E_1| = 4\times 3\times 6\times 2\times \binom{48}{13}\times\binom{48-13}{11}\times\binom{48-13-11}{12} = 144\times\frac{48!}{13!11!(12!)^2} = \frac{1728\times 48!}{13(12!)^4}$$

In definitiva

$$P(C) = 1 - \frac{4!\frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} - \frac{\frac{1728\times 48!}{13(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = 1 - \frac{13!\cdot 2040}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = \frac{76}{245} \simeq 0.310$$

Esercizio 1.4.1 Poiché $P(R) = 0.1$, $P(F) = 0.05$ e $P(R\cap F) = 0.03$, allora
(a) $P(R\cap F^c) = P(R) - P(R\cap F) = 0.1 - 0.03 = 0.07 = 7\%$;
(b) $P(R|F^c) = \frac{P(R\cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{0.07}{1-0.05} = \frac{7}{95} \approx 0.07368$;
(c) $P(R|F) = \frac{P(R\cap F)}{P(F)} = \frac{0.03}{0.05} = 60\%$.

Esercizio 1.4.2 Siano A e B gli eventi A=*"Il signor A compra il biglietto vincente"* e B=*"Il signor B compra il biglietto vincente"*. Se A compra per primo il biglietto e B per secondo, allora l'insieme dei possibili risultati associati a tale acquisto è

$$\Omega = \{A\cap B^c, A^c\cap B, A^c\cap B^c\}$$

con

$$P(A\cap B^c) = \frac{1\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{1}{5}\ ;\quad P(A^c\cap B) = \frac{4\cdot 1}{5\cdot 4} = \frac{1}{5}\ ;\quad P(A^c\cap B^c) = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{3}{5}\ .$$

Pertanto:
(a) $P(A) = P(A\cap B^c) = \frac{1}{5}$
(b) $P(B) = P(B\cap A^c) = \frac{1}{5}$.
(c) $P(B|A^c) = \frac{P(B\cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$=(Probabilità di estrarre un biglietto vincente dall'insieme dei quattro biglietti rimasti di cui uno è vincente)
(d) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5}$.

Nota 3 Si osservi che A e B hanno la stessa probabilità di vincere; ma la probabilità che B vinca cambia se abbiamo l'ulteriore informazione che A non ha acquistato il biglietto vincente!!!

Esercizio 1.4.3 Siano T_i, R_i gli eventi T_i= "*È trasmesso i*" ed R_i= "*È ricevuto i*", per $i = 0, 1$. Dobbiamo calcolare

1)$P(R_1)$, 2) $P(R_0)$, 3) $P(T_1|R_1)$, 4) $P(T_0|R_0)$ e 5) $P([R_0 \cap T_1] \cup [R_1 \cap T_0])$, a partire dalle seguenti probabilità assegnate:

$0.94 = P(R_0|T_0)$
$0.91 = P(R_1|T_1)$
$0.45 = P(T_0)$.

Applicando la formula delle probabilità totali otteniamo:

$$(1) \qquad P(R_1) = P(R_1|T_1)P(T_1) + P(R_1|T_0)P(T_0) = 0.91(1 - 0.45) + (1 - 0.94)0.45 = 0.5275$$
$$(2) \qquad P(R_0) = 1 - P(R_1) = 1 - 0.5275 = 0.4725.$$

Per la formula di Bayes:

$$(3) \quad P(T_1|R_1) = \frac{P(R_1|T_1)P(T_1)}{P(R_1)} = \frac{0.91(1 - 0.45)}{0.5275} = \frac{1001}{1055} \simeq 0.9488$$
$$(4) \quad P(T_0|R_0) = \frac{P(R_0|T_0)P(T_0)}{P(R_0)} = \frac{0.94 \cdot 0.45}{0.4725} = \frac{94}{105} \simeq 0.8952.$$

$$\begin{aligned}(5) \quad P(R_0 \cap T_1 \cup R_1 \cap T_0) &= P(R_0 \cap T_1) + P(R_1 \cap T_0)\\ &= P(R_0|T_1)P(T_1) + P(R_1|T_0)P(T_0) = [1 - P(R_1|T_1)]P(T_1) + [1 - P(R_0|T_0)]P(T_0)\\ &= 0.09 \cdot 0.55 + 0.06 \cdot 0.45 = 0.0765\end{aligned}$$

Esercizio 1.4.4 Siano N_i ="*La i-esima pallina estratta è nera*" e B_i ="*La i-esima pallina estratta è bianca*" per $i = 1, 2, 3$.
(a) Per la formula di moltiplicazione:

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P(N_2|N_1)P(N_3|N_1 \cap N_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{11}{14} = \frac{5}{14} \approx 0.3571,$$

poiché

$$P(N_1) = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$$
$$P(N_2|N_1) = P(\text{“estrarre una pallina nera da un'urna con 3 bianche e (5+3) nere”}) = \frac{5+3}{8+3} = \frac{8}{11}$$
$$P(N_3|N_1 \cap N_2) = P(\text{“estrarre una pallina nera da un'urna con 3 bianche e (8+3) nere”}) = \frac{11}{14}$$

(b) La probabilità cercata è $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap N_2 + N_3) = 1/56 + 5/14 = 21/56 = 3/8 = 0.375$, poiché

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}.$$

Esercizio 1.4.5 Poichè la probabilità di scegliere la busta contenente la promessa di pagamento è 1/3, se il concorrente decide di conservare la prima busta scelta, la probabilità di vincere è 1/3. Con la seconda strategia –consistente nel cambiare la busta che si ha in mano con la busta rimanente dopo che il conduttore ne ha mostrata una vuota– il concorrente vince se e solo se inizialmente ha scelto una delle due buste vuote. Pertanto, con la strategia del cambio della busta, la probabilità di vincere è pari a 2/3. Conviene la strategia di cambiare busta.

Esercizio 1.4.6 Sia

V := "*i due gemelli sono veri gemelli*", $\qquad S$:= "*i due gemelli sono dello stesso sesso*".

1. La probabilità richiesta è

$$P(V|S) = \frac{P(S|V)P(V)}{P(S|V)P(V) + P(S|V^c)P(V^c)} = \frac{p}{p + \frac{1}{2}(1-p)} = \frac{2p}{p+1}.$$

2. $P(S^c) = 1 - p - \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(1-p)$.

Esercizio 1.4.7 Calcoliamo prima la probabilità di estrarre una pallina nera (N) scegliendo l'urna fra U_1 e U_2 in modo tale che $P(U_1) = p$. Allora, per la formula delle probabilità totali:

$$P(N) = P(N|U_1)p + P(N|U_2)(1-p) = \frac{3}{2+3}p + \frac{4}{6+4}(1-p) = \frac{2}{5} + p\frac{1}{5}$$

Se invece, ora calcolo la probabilità di estrarre pallina nera dall'urna $U = U_1 \cup U_2$, ottengo $\frac{3+4}{7+8} = \frac{7}{15}$. Quindi, le due probabilità sono uguali se $\frac{2}{5} + p\frac{1}{5} = \frac{7}{15}$, da cui ottengo $\hat{p} = \frac{1}{3}$.

Nota 4 Si osservi che se $p = 0.5$ (praticamente lancio una moneta equa per decidere l'urna da cui estrarre), allora la probabilità di estrarre nera da una delle due urne distinte è $\frac{1}{2} > \frac{7}{15}$. In generale, per valori di $p \neq \hat{p}$, i due procedimenti di estrazione sono diversi.

Esercizio 1.4.8

1. $P(N_2) = P(N_2|N_1)P(N_1) + P(N_2|B_1)P(B_1) = \frac{6}{3+5+1}\frac{3}{4+3} + \frac{5}{3+5+1}\frac{4}{4+3} = \frac{38}{63}$
2. $P(N_1|N_2) = \frac{P(N_2|N_1)P(N_1)}{P(N_2)} = \frac{18/63}{38/63} = \frac{9}{19} < 0.5$. Osservando che $P(N_1|N_2) + P(B_1|N_2) = 1$, segue che $P(B_1|N_2) > P(N_1|N_2)$, cioè, se la pallina estratta dalla seconda urna è nera, è più probabile che la pallina estratta dalla prima urna fosse bianca.

Esercizio 1.4.9 Siano A="*Pressione alta*" e B="*Bevitore di alcolici*". L'esercizio fornisce i seguenti dati: $P(A) = 5\%$, $P(B|A) = 75\%$ e $P(B^c|A^c) = 50\%$. Quindi, calcoliamo la percentuale dei bevitori con pressione alta come $P(A|B)$. Applicando il teorema di Bayes otteniamo $P(A|B) = \frac{375}{5125} \simeq 7.32\%$.

Esercizio 1.4.10 Siano S ="lo sciopero è messo in atto" e T ="la trattativa ha successo". Allora, $P(S^c|T) = 0.8$, $P(S|T^c) = 0.99$ e $P(T^c) = 0.4$ e
(a) $P(S) = P(S \mid T)P(T) + P(S|T^c)P(T^c) = (1-0.8)\cdot(1-0.4) + 0.99\cdot 0.4 = 0.516$.
(b) Si cerca $P(T|S^c)$. Si ricava $P(S^c) = 1 - P(S) = 1 - 0.516 = 0.484$ e quindi, per il teorema di Bayes,

$$P(T|S^c) = \frac{P(S^c|T)P(T)}{P(S^c)} = \frac{0.8\cdot 0.6}{0.484} = 0.9917.$$

Esercizio 1.4.11 Definiamo i seguenti eventi: C_i =*"Camillo sceglie il percorso i-esimo"* e T =*"Camillo impiega meno di 10 minuti per andare dalla piazzetta al porto"*.

1. Utilizzando la formula delle probabilità totali abbiamo

$$P(T) = \sum_{i=1}^{6} P(T|C_i)P(C_i) = (1/6)\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{669}{420} = \frac{223}{840} \simeq 0.2654762$$

2. Dobbiamo calcolare $P(C_1^c|T^c) = 1 - P(C_1|T^c)$. Per il Teorema di Bayes,

$$P(C_1|T^c) = \frac{P(T^c|C_1)P(C_1)}{P(T^c)} = \frac{(1-P(T|C_1))P(C_1)}{1-P(T)} = \frac{(1-1/2)\cdot(1/6)}{1-223/840} = \frac{70}{617},$$

quindi, la probabilià cercata vale $P(C_1^c|T^c) = 1 - P(C_1|T^c) = 1 - 70/617 = 547/617 \simeq 0.8865$

Esercizio 1.4.12 Sia X il risultato del lancio del dado e N ="*si estrae una biglia nera*".

1. Per la formula delle probabilità totali

$$P(N) = P(N|X \leq 4)P(X \leq 4) + P(N|X > 4)P(X > 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \simeq 0.44$$

2. Per la formula di Bayes

$$P(X \leq 4|N) = \frac{P(N|X \leq 4)P(X \leq 4)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

3. Di nuovo per la formula di Bayes

$$P(X = 1|N) = \frac{P(N|X = 1)P(X = 1)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Esercizio 1.4.13

1. Introdotto l'evento V="vincita", la probabilità richiesta si calcola utilizzando uno schema densità ipergeometrico per cui:
$$P(V) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. Detto B="la pallina nera non è tra le prime due, la probabilità richiesta è $P(V|B)$ e si ha:
$$P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$$
dove $P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{3}$ e $P(V \cap B) = \frac{5*4*1}{6*5*4} = \frac{1}{6}$

3. Si ha:
$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1.4.15 Da $P(A|B) = P(A^c|B^c) = 0.95$ e $P(B) = 0.05$ ricaviamo: $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.95$ e $P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = 0.05$.

1. Applicando la formula di Bayes otteniamo:
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} = \frac{0.95 \times 0.05}{0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95} = \frac{1}{2}$$

2. Dobbiamo determinare p tale che
$$0.9 = \frac{p \times 0.05}{p \times 0.05 + (1-p) \times 0.95}$$

La soluzione della precedente equazione è $p = 855/860 \simeq 0.994$.

Esercizio 1.4.18 Le possibili coppie di risultati delle due estrazioni dall'urna sono

$$\Omega = \{(p1, p2), (p1, d2), (d1, p2), (d1, d2)\}$$

Poichè le estrazioni sono effettuate con reimmissione e nell'urna vi è un egual numero di pari e dispari (50), allora tutte le coppie hanno eguale probabilità pari a 1/4. Inoltre,
$P(A_1) = P\{(p1, p2), (p1, d2)\} = 1/2$;
$P(A_2) = P\{(p1, p2), (d1, p2)\} = 1/2$;

$P(B) = P\{(p1, d2), (d1, p2)\} = 1/2$;
$P(A_1 \cap A_2) = P\{(p1, p2)\} = 1/4 = P(A_1)P(A_2)$;
$P(A_1 \cap B) = P\{(p1, d2)\} = 1/4 = P(A_1)P(B)$;
$P(A_2 \cap B) = P\{(d1, p2)\} = 1/4 = P(A_2)P(B)$;
ma,
$P(A_1 \cap A_2 \cap B) = 0 < P(A_1)P(A_2)P(B)$. Pertanto gli eventi A_1, A_2 e B sono indipendenti a coppie ma non indipendenti

Nota 5 Dati tre eventi, l'indipendenza a coppie non implica l'indipendenza dei tre eventi.

Esercizio 1.4.20 Siano D : "*il dipendente è donna*", U : "*il dipendente è uomo*" , M : "*il dipendente ha la licenza media inferiore*", S : "*il dipendente ha un diploma di scuola media superiore*" e L : "*il dipendente è laureato*". Allora

$P(D) = 0.30$ e $P(U) = 0.70$;
$P(M \mid D) = 0.05$, $P(S \mid D) = 0.60$ e $P(L \mid D) = 0.35$;
$P(M \mid U) = 0.15$, $P(S \mid U) = 0.60$ e $P(L \mid U) = 0.25$.

1 Per la regola delle probabilità totali, $P(L) = P(L \mid D)P(D) + P(L \mid U)P(U) = 0.35 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.70 = 0.28$. Quindi, $P(L^c) = 1 - P(L) = 0.72$;

2 $P(D \cap L^c) = P(L^c \mid D)P(D) = (1 - 0.35)0.30 = 0.195$;

3 Per il Teorema di Bayes: $P(U \mid L) = P(L \mid U)P(U)/P(L) = 0.25 \cdot 0.70/0.28 = 0.625$;

4 Poichè $P(L \mid D) = 0.35 > 0.28 = P(L)$, sesso e livello di istruzione non sono indipendenti. Possiamo dire che c'è una concordanza positiva fra essere donna e laureato: sapendo che un dipendente è donna è più probabile che sia laureato.

5 Diversamente da prima, se $P(M \mid D) = 0.15$, $P(S \mid D) = 0.60$ e $P(L \mid D) = 0.25$, allora

$$P(L) = P(L \mid D)P(D) + P(L \mid U)P(U) = 0.25 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.70 = 0.25 = P(L \mid D)$$
$$P(S) = P(S \mid D)P(D) + P(S \mid U)P(U) = 0.6 \cdot 0.30 + 0.6 \cdot 0.70 = 0.6 = P(S \mid D)$$

Possiamo concludere che con la nuova assegnazione di probabilità sesso e livello di istruzione sono indipendenti.

Nota 6 Notate quindi che l'indipendenza è una proprietà della probabilità: se gli eventi sono indipendenti rispetto a una funzione di probabilità P, non è detto che cambiando P gli eventi restino indipendenti.
Per quanto riguarda invece la relazione fra indipendenza e incompatibilità, notate che ovviamente gli eventi D e U di questo esercizio sono incompatibili, ma non indipendenti. Infatti: $P(D)P(U) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21 \neq 0 = P(D \cap U)$.
Infine: l'evento impossibile $\emptyset$ è incompatibile e indipendente da qualunque altro evento. Verificatelo...

Esercizio 1.4.21

(1a) $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.65 = 0.25$$

(1b) $$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.65 - 0.25 = 0.40$$

(2) $$0.7 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 2P(A) - P(A)^2$$

sse $P(A)^2 - 2P(A) + 0.7 = 0$, e l'unica soluzione ammissibile per la precedente è $P(A) = 1 - \sqrt{0.3}$.

3. NO! Infatti, dai dati del problema deriviamo soltanto che $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \Delta B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$, da cui $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = 0.9$. Allora, ogni coppia di valori per $(P(A), P(B))$ tali che

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 0.9 \\ 0.2 \leq P(A) \leq 0.7 \\ 0.2 \leq P(B) \leq 0.7 \end{cases}$$

soddisfa le richieste “$P(A \cup B) = 0.7$ e la probabilità che esattamente un libro sia in prestito è 0.5”.

Esercizio 1.4.22

1. Siano $A = \{$Filiberto ottiene 3 teste nei primi 3 lanci$\}$ e $B = \{$Filiberto sceglie una moneta equa$\}$, allora $P(B) = 3/5$, $P(B^c) = 2/5$, $P(A|B) = 1/8$ e $P(A|B^c) = 1$. Dalla formula delle probabilità totali otteniamo

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{19}{40} = 0.475.$$

2. Sia $C = \{$Filiberto ottiene testa nel quarto lancio$\}$, allora

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C \cap A|B)P(B) + P(C \cap A|B^c)P(B^c)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(C|B)P(A|B)P(B) + P(C|B^c)P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} + 0}{\frac{19}{40}} = \frac{3}{38} \simeq 0.088,$$

dove abbiamo utilizzato la formula delle probabilità totali ed il fatto che A e C sono indipendenti condizionatamente a B (Filiberto è deluso).

3. Sia $Q = \{$Filiberto ottiene 4 teste in 4 lanci$\}$, allora la formula di Bayes afferma che

$$P(B^c|Q) = \frac{P(Q|B^c)P(B^c)}{P(Q)} = \frac{1 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{32}{35} \simeq 0.914.$$

Esercizio 1.4.23 Definiamo gli eventi T_1: “Tacito il primo giorno pesca una trota”, T_2: “Tacito il secondo giorno pesca una trota”, O: “Tacito sceglie il Lago d’Oro” e A: “Tacito sceglie il Lago d’Argento”. Dal testo si ha che $P(O) = P(A) = 1/2$, $P(T_1|O) = 1$, $P(T_1|A) = 0.6 = 3/5$.

1. Per la formula delle probabilità totali

$$P(T_1) = P(T_1|O)P(O) + P(T_1|A)P(A) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

2. Bisogna calcolare $P(O|T_1)$. Per la formula di Bayes

$$P(O|T_1) = \frac{P(T_1|O)P(O)}{P(T_1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

3. Bisogna calcolare $P(T_2|T_1)$. Utilizzando la definizione di probabilità condizionata e la formula delle probabilità totali otteniamo

$$P(T_2|T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \frac{P(T_1 \cap T_2|O)P(O) + P(T_1 \cap T_2|A)P(A)}{P(T_1)} =$$
$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{17}{20} = 0.85.$$

Esercizio 1.4.24 Dobbiamo calcolare $P(E|A \cap B)$. Per la formula di Bayes si ha che:

$$P(E|A \cap B) = \frac{P(A \cap B|E)P(E)}{P(A \cap B)}$$

Notiamo che $P(A \cap B|E)$ corrisponde alla probabilità che Arturo e Bianca dicano la verità. Dal momento che i comportamenti di Arturo e Bianca sono indipendenti, essi dicono la verità indipendentemente l’uno dall’altra, perciò si ha che: $P(A \cap B|E) = P(A|E)P(B|E) = \alpha\beta$. Quindi:

$$P(E|A \cap B) = \frac{P(A \cap B|E)P(E)}{P(A \cap B)} = \frac{\alpha\beta p}{P(A \cap B)}$$

Calcoliamo ora $P(A \cap B)$ applicando la formula delle probabilità totali:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|E)P(E) + P(A \cap B|E^c)P(E^c) = \alpha\beta p + P(A \cap B|E^c)P(E^c)$$

Per calcolare $P(A \cap B|E^c)$ ragioniamo nel seguente modo.
Sappiamo che $P(A^c|E^c) = \alpha$ e $P(B^c|E^c) = \beta$ e dal momento che essi dicono la verità in modo indipendente: $P(A^c \cap B^c|E^c) = P(A^c|E^c)P(B^c|E^c)$. Quindi otteniamo:

$$P(A \cap B|E^c) = 1 - P((A \cap B)^c|E^c) = 1 - P(A^c \cup B^c|E^c) = 1 - P(A^c|E^c) - P(B^c|E^c) + P(A^c \cap B^c|E^c)$$
$$= 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta = (1-\alpha)(1-\beta)$$

Questo ci permette di concludere che:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|E)P(E) + P(A \cap B|E^c)P(E^c) = \alpha\beta p + (1-\alpha)(1-\beta)(1-p)$$

Infine:

$$P(E|A \cap B) = \frac{\alpha\beta p}{\alpha\beta p + (1-\alpha)(1-\beta)(1-p)}.$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$P(E|A \cap B) = \frac{(0.9)^2 * 10^{-3}}{(0.9)^2 * 10^{-3} + (0.1)^2 * (1 - 10^{-3})} = 0.075 :$$

Nonostante Arturo e Bianca siano molto affidabili e affermino che E sia accaduto, la corte resta scettica riguardo al fatto che E sia veramente accaduto: infatti $0.075 > 0.001$ ma è ancora un valore molto lontano da 1.

Esercizio 1.4.25 Sia $A_i =$“*Il giorno i il prezzo sale di una unità*”. Gli eventi A_1, A_2, A_3 sono indipendenti e di probabilità p.

1. La probabilità richiesta è $P((A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2)) = P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1^c \cap A_2) = 2p(1-p)$.

2. Dopo tre giorni il prezzo sale di una unità se per due giorni cresce e un giorno descresce. Quindi dobbiamo calcolare la probabilit‘à dell'evento: $B := (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$ Abbiamo

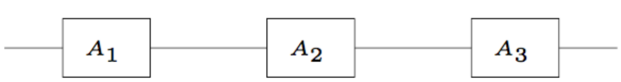
$$P(B) = P\left((A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)\right) = 3p^2(1-p)$$

3. $P(A_1|B) = \dfrac{P\left((A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)\right)}{3p^2(1-p)} = \dfrac{2p^2(1-p)}{3p^2(1-p)} = \dfrac{2}{3}$.

Esercizio 1.4.26 Sia S l'evento “*Il sistema funziona*”. Allora,

$$\begin{aligned} S &= (1 \cap 2 \cap 5) \cup (3 \cap 4 \cap 5) \cup (6 \cap 5) = [(1 \cap 2) \cup (3 \cap 4) \cup 6] \cap 5 \\ P(S) &= P((1 \cap 2) \cup (3 \cap 4) \cup 6)p \\ &= p(p \cdot p + p \cdot p + p - p \cdot p \cdot p - p \cdot p \cdot p - p \cdot p \cdot p \cdot p + p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p) \\ &= p^2(1 + 2p - 2p^2 - p^3 + p^4) = 0.779264. \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.27 1. La probabilità che il sistema S_1



funzioni è

$$P(\text{“}S_1 \text{ funzioni”}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.336$$

2. Calcoliamo la probabilità di funzionamento di S_2 e S_3: S_2 è formato da due sottosistemi in parallelo, S_1',S_1'' copie di S_1. Quindi

$$P(S_2) = P(S1' \cup S_1'') = 1 - P(S1'^c \cap S_1''^c) = 1 - P(S1'^c)P(S_1''^c) = 1 - (1 - 0.336)^2 = 0.559104$$

Per il sistema S_3 vale quanto segue: sia D_1 il sottosistema formato dai componenti in serie A_2, A_3 e siano D_2, D_3 due copie indipendenti di D_1. Allora, la probabilità di funzionamento di D_1, D_2, D_3 è $0.7 \cdot 0.6 = 0.42$. Pertanto il sottosistema ottenuto mettendo in parallelo D_1, D_2, D_3 funziona con probabilità pari a

$$P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 1 - P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c) = 1 - P(D_1^c)P(D_2^c)P(D_3^c) = 1 - 0.58^3 = 0.804888$$

Segue che $P(S_3) = P(A_1 \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)) = P(A_1)P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 0.8 \times 0.804888 \simeq 0.6439$: la soluzione S_3 è preferibile alla S_2.

Capitolo 2

Variabili aleatorie

2.1 Variabili aleatorie

2.2 Variabili aleatorie discrete

Esercizio 2.2.1 La funzione di ripartizione della variabile aleatoria X è definita come segue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

1. Quanto vale $P(X > 1/2)$?
2. Quanto vale $P(2 < X \leq 4)$?
3. Quanto vale $P(2 \leq X \leq 4)$?
4. Quanto vale $P(X < 3)$?
5. Determinare la densità di X.

Esercizio 2.2.2 Una sorgente di informazioni genera casualmente i simboli $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$ con probabilità: $P(\heartsuit) = 1/2$, $P(\diamondsuit) = 1/4$, $P(\clubsuit) = P(\spadesuit) = 1/8$. Uno schema di codifica trasforma i simboli in codici binari nel modo seguente:

$$\heartsuit \longmapsto 0 \qquad \diamondsuit \longmapsto 10 \qquad \clubsuit \longmapsto 110 \qquad \spadesuit \longmapsto 111.$$

Sia X = "bit del codice". Calcolare:
1) la densità di X; 2) la funzione di ripartizione $F_X(x)$; 3) $P(X \leq 1)$; 4) $P(1 < X \leq 2)$;
5) $P(X > 1)$; 6) $P(1 \leq X \leq 2)$

Esercizio 2.2.3 Lanciamo contemporaneamente due dadi regolari. Sia X il punteggio minimo che si ottiene fra i due.

1. Qual è la densità di X?
2. Qual è la f.d.r. di X?

2.3 Esempi di densità discrete notevoli

2.3.1 Densità bernoulliana, binomiale, geometrica

Esercizio 2.3.1 Si consideri un sistema elettronico composto da $n = 10$ componenti che funziona se e solo se almeno $k = 2$ componenti su 10 funzionano. Si supponga inoltre che tutti i componenti abbiano la stessa affidabilità $p = 0.05$ e che funzionino indipendentemente uno dall'altro.

1. Qual è l'affidabilità del sistema testé descritto?

In generale un sistema ingegneristico di n componenti è detto sistema k-*su*-n ($k \leq n$) se il sistema funziona se e solo se almeno k degli n componenti funzionano.

2. Se i componenti funzionano in modo indipendente con la stessa probabilità p, qual è l'affidabilità di un sistema $k - su - n$?

Esercizio 2.3.2 Un canale di comunicazione trasmette le cifre 0 e 1. Se la cifra trasmessa è 0, la cifra viene correttamente ricevuta con probabilità 0.99; invece, se è stato trasmesso 1, con probabilità 0.05 viene erroneamente ricevuto 0.

1. Se l'80% di cifre trasmesse è 1, qual è la probabilità di un'errata ricezione?
2. Si calcoli la probabilità che su 30 cifre trasmesse si verifichino più di 3 errori.

Esercizio 2.3.3 Un test a risposta multipla è costituito da 10 domande, a ognuna delle quali sono abbinate 4 possibili risposte di cui soltanto 1 corretta. Uno studente impreparato sceglie a caso una risposta per domanda.

1. Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria indicante il numero di risposte corrette.
2. Per superare il test uno studente deve rispondere correttamente ad almeno 5 domande su 10. Qual è la probabilità che uno studente impreparato superi il test?

Esercizio 2.3.4 Armando vuole giocare alla roulette puntando sul rosso 1€ a puntata. Sapendo che la probabilità di vincere puntando sul rosso in una roulette non truccata è pari a 18/37,

1. calcolare la probabilità che Armando vinca per la prima volta alla quinta partita.
2. Se Armando gioca 10 partite, calcolare la probabilità che ne abbia vinte almeno due.
3. Osservando che ogni volta che vince, vince 1€ ed ogni volta che perde, perde 1€ , qual è la probabilità che alla fine delle 10 partite il capitale di Armando sia aumentato di 2 €?

Esercizio 2.3.5 Due urne A e B sono inizialmente vuote. Esse vengono poi riempite con 12 palline che vengono messe, una dopo l'altra, in una delle urne, scelta a caso ogni volta.

1. Qual è la probabilità che l'urna B sia vuota?
2. Qual è la probabilità che le due urne posseggano lo stesso numero di palline?
3. Qual è la probabilità che nessuna delle due urne sia vuota?

Esercizio 2.3.6 La probabilità di vincere giocando a una slot machine è $p = 0.1$.

1. Se si effettuano 10 giocate, qual è la probabilità di vincere 6 volte?
2. Se si continua a giocare finché non si vince, qual è la probabilità di ottenere la prima vittoria alla decima giocata?
3. Se sulle prime cinque giocate non si è riportata nessuna vittoria, qual è la probabilità che si vinca alla sesta giocata?
4. Se si riportano 6 vittorie su 10, qual è la probabilità di vincere nelle prime 6 giocate?

Esercizio 2.3.7 Una moneta irregolare con probabilità di testa $p = 1/6$ viene lanciata tante volte finché non compare testa. Dato che testa non appare al primo lancio, qual è la probabilità che siano necessari più di 4 lanci?

Esercizio 2.3.8 Un'indagine statistica ha rivelato che il 15% degli abitanti di una certa città fa l'elemosina ai mendicanti che vede sul marciapiede. Passano 20 persone davanti ad un mendicante.

1 Qual è la probabilità che il mendicante riceva elemosina da almeno 3 di esse? [Risp. 0.595]

2 Quante persone almeno devono passare davanti al mendicante perchè con probabilità superiore a 0.5 gli venga fatta almeno un'elemosina? [Risp. almeno 5]

3 Supposto che ogni persona che fa l'elemosina dia 50 centesimi di euro, quante persone devono passare perché il mendicante ottenga, in media, 3 euro di elemosina prima di andarsene? [Risp. 40]

Esercizio 2.3.9 Il centralino di un numero verde è occupato con probabilità 0.9. Pietro continua a telefonare finché lo trova libero.

1. Quante telefonate deve fare in media per ottenere la linea?
2. Qual è la probabilità che debba telefonare più di 5 volte per ottenere la linea?
3. Sapendo che le prime 10 volte ha trovato occupato, qual è la probabilità che debba telefonare altre 5 volte per ottenere la linea.

Esercizio 2.3.10 In una sala da gioco ci sono due slot machine A e B. Se gioco alla slot machine A, ad ogni giocata la probabilità di vincere è 0.45.

1. Se gioco alla slot machine A finchè non vinco, quanto vale la probabilità di non vincere nelle prime 9 giocate? [Risp. 0.55^9]

2. Se gioco alla slot machine A finchè non vinco, quanto vale la probabilità di dover giocare almeno 12 volte per registrare la prima vittoria, sapendo che nelle prime due giocate non ho vinto? [Risp. 0.55^9]

Se invece gioco alla slot machine B, ad ogni giocata la probabilità di vincere è 0.55. Inoltre, all'inizio del gioco, scelgo a caso fra A e B e poi gioco sempre con la stessa slot machine.

3. Quanto vale la probabilità di non vincere nelle prime 9 giocate? [$(0.55^9 + 0.45^9)/2 \simeq 0.0027$]

4. Quanto vale la probabilità di dover giocare almeno 12 volte per registrare la prima vittoria, sapendo che nelle prime due giocate non ho vinto? [$(0.55^{11} + 0.45^{11})/(0.55^2 + 0.45^2) \neq (0.55^9 + 0.45^9)/2$ (RIFLETTETE!!!)]

2.3.2 Densità di Poisson come limite di densità binomiale

Esercizio 2.3.11 Il numero di errori di battitura per cartella commessi da una segretaria si può supporre essere una variabile aleatoria con densità di Poisson di parametro $\lambda = 2.3$.

1. Calcolare la probabilità che ci siano almeno due errori in una data cartella.

2. Quanto dovrebbe valere il parametro λ affinché la probabilità che in una cartella non ci siano errori sia superiore a 0.5?

Esercizio 2.3.12 Se partecipo a 180 concorsi diversi (e indipendenti), in ciascuno dei quali si vince un solo premio e per ciascuno dei quali la probabilità di vincere il premio è 0.008, quanto vale (approssimativamente) la probabilità

1. di vincere il premio di un solo concorso,
2. di vincere almeno un premio,
3. di vincere 30 premi?

Esercizio 2.3.13 Il numero di automobili che un concessionario vende giornalmente si può modellare mediante una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 1$.

1. Quanto vale la probabilità che il concessionario venda al giorno almeno una macchina?

2. Se il numero di automobili vendute in giorni diversi sono indipendenti, quanto vale la probabilità che trascorrano 7 giorni consecutivi senza che il venditore venda automobili e che poi all'ottavo giorno venda almeno una macchina?

Esercizio 2.3.14 Nel gioco del lotto, ad ogni estrazione, per ogni ruota, si estraggono senza reimmissione 5 palline da un pallottoliere che ne contiene 90 numerate da 1 a 90.

1. Dimostrate che ad ogni estrazione la probabilità di fare ambo giocando i numeri 80,90 sulla ruota di Bari è pari a 2/801.

2. Quanto vale la probabilità che sia necessario giocare esattamente 600 giornate per fare ambo (per la prima volta) puntando sui numeri 80,90 sulla ruota di Bari?

3. Dall'inizio dell'anno Marco sta puntando sull'ambo 80,90 sulla ruota di Bari, ogni mercoledì e sabato, per un totale ad oggi di 72 giornate. Sapendo che dall'inizio dell'anno l'ambo non è ancora uscito, quanto vale la probabilità che esca per la prima volta alla 672-esima giornata?

4. Diversamente, Matteo ha deciso di giocare per 1000 giornate puntando sempre sullo stesso ambo 80,90 sulla ruota di Bari. Quanto vale approssimativamente la probabilità che Matteo faccia ambo almeno 2 volte?

2.3.3 Densità ipergeometrica

Esercizio 2.3.15 Il 5% di un lotto di 100 fusibili è soggetto a controllo casuale prima di essere immesso sul mercato. Se un fusibile non brucia ad un determinato amperaggio l'intero lotto viene mandato indietro. In realtà, il lotto contiene 10 fusibili difettosi.

1. Qual è la probabilità che il lotto sia rispedito indietro?
2. Un compratore temendo che la percentuale di difettosi sia elevata decide di controllare il lotto finché non trova i difettosi. Qual è la probabilità che sia necessario controllare più di un pezzo per scoprire il pezzo difettoso?
3. Se il primo fusibile è funzionante, qual è la probabilità che sia necessario controllare più di 2 fusibili per scoprire un fusibile difettoso?

Esercizio 2.3.16 Al buio cerco la chiave del mio ufficio in un mazzo di 10 chiavi tutte della stessa fattura. Ovviamente metto da parte le chiavi provate. Sia X il numero di chiavi che devo provare per trovare la chiave giusta.

1. Quanto vale la probabilità di controllare almeno 8 chiavi?
2. Qual è la f.d.r. di X?
3. Qual è la densità di probabilità di X?
4. Se anche il secondo tentativo è fallito, quanto vale la probabilità di trovare la chiave giusta al quarto tentativo? [Risp.1/8]
5. Come cambiano le risposte ai punti precedenti se, stupidamente non metto da parte le chiavi già provate prima di procedere a provarne una nuova?

Esercizio 2.3.17 In una città ci sono 8 stazioni di rifornimento, di cui 3 sono self-service. Un automobilista ne sceglie a caso una per 5 giorni consecutivi, ogni giorno in modo indipendente dagli altri giorni.

1. Calcolare la probabilità che faccia rifornimento in un self-service il secondo giorno.
2. Calcolare la probabilità che capiti in un self-service esattamente 2 volte.
3. Calcolare la probabilità degli eventi ai punti 1. e 2. supponendo però che l'automobilista non faccia mai rifornimento due volte nella stessa stazione.

2.4 Variabili aleatorie assolutamente continue

Esercizio 2.4.1 La variabile aleatoria X ha f.d.r.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

X è assolutamente continua? Perché? Se sì, qual è la sua densità f_X?

Esercizio 2.4.2 Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} & 0 < x < 5 \\ -\frac{x}{25} + \frac{2}{5} & 5 < x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Determinate la funzione di ripartizione F_X di X.
2. Calcolate $P(2 \le X \le 9)$ usando F_X.
3. Calcolare $\mathrm{E}(X)$.

Esercizio 2.4.3 Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \begin{cases} 4x^3 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1) \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione F_X di X.
2. Calcolare $P(-0.5 < X \le 0.5)$.

Esercizio 2.4.4 Verificate se le seguenti funzioni f sono funzioni di densità di probabilità. In caso positivo

1. determinate la corrispondente funzione di ripartizione F;
2. media e varianza (se esistono).

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1-\theta}{2} & 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{altrove, } \theta \in [0,1]. \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad (d) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad (f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$(g) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \ge 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad (h) \quad f(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2.4.5 (Esercizio 3 pag. 92 in [7])

1. Trovate la costante k tale che la funzione che segue sia una funzione di densità:

$$f(x) = kx^2 \mathbf{1}_{(-k,k)}(x)$$

2. Calcolate $P(X \le 1)$ e $P(X < 1)$.
3. Determinate $\mathrm{E}(X)$.

Esercizio 2.4.6 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} kx\mathrm{e}^{-x^2} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare la costante k per cui f è la densità di una variabile aleatoria X.
2. Calcolare $P(X \le 1)$ e $P(X < 1)$.

Esercizio 2.4.7 Sia Y una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f_Y(y) = 2y\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$. Qual è la probabilità che l'equazione (in x) $x^2 + 40Yx + 360Y - 32 = 0$ non ammetta soluzioni reali?

Esercizio 2.4.8 Il tempo (in ore) impiegato dal tecnico A del centro di assistenza xxx per riparare una certa apparecchiatura ha densità esponenziale di parametro $\lambda = 0.5$.

1. Qual è la probabilità che siano necessarie ad A più di 2 ore per riparare l'apparecchiatura?
2. Qual è la probabilità che A abbia bisogno di almeno 11 ore per effettuare la riparazione, dato che ci lavora già da almeno 9?

In realtà al centro di assistenza xxx c'è anche un secondo tecnico B e il tempo (in ore) che B impiega per la riparazione ha densità esponenziale di parametro $\lambda = 0.6$. Inoltre, quando arriva un'apparecchiatura da riparare, si sceglie a caso fra A e B.

3. Qual è la probabilità che in quel centro di assistenza siano necessarie più di 2 ore per riparare l'apparecchiatura?
4. Qual è la probabilità che nel centro di assistenza xxx si impieghino almeno 11 ore per la riparazione, dato che la durata della riparazione supera le 9 ore?

Esercizio 2.4.9 (Esercizio 5 pag. 222 in [9]) Un benzinaio è rifornito di gasolio una volta la settimana. Se la sua vendita settimanale in migliaia di litri è una variabile aleatoria con densità

$$f(x) = 5(1-x)^4\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

quale deve essere la capacità del serbatoio affinché la probabilità che il gasolio sia esaurito in una settimana sia pari a 0.01?

Esercizio 2.4.10 Una cisterna d'acqua viene riempita una volta alla settimana con k ettolitri d'acqua. La quantita d'acqua prelevata dalla cisterna (sempre misurata in ettolitri) in una settimana può essere modellata mediante una variabile aleatoria X assolutamente continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1000^a}(1000-x)^{a-1} & \text{se } 0 < x < 1000 \\ 0 & \text{altrimenti}, \quad a > 0 \end{cases}$$

1. Determinare a in modo tale che la richiesta media in una settimana sia di 750 ettolitri.
2. Determinare la funzione di ripartizione di X.
3. Determinare la capacità k della cisterna affinché la probabilità che la cisterna esaurisca l'acqua durante la settimana sia 0.1.

Esercizio 2.4.11 (Esempio pag. in [9]) Il tempo di vita di un dato tipo di pile per radio è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f_X(x) = \dfrac{100}{x^2}\mathbf{1}_{(100,+\infty)}(x)$.

1. Calcolate la probabilità che una pila della radio debba essere sostituita entro le 150 ore di attività. [Risp. 1/3]

2. Determinate F_X

3. Una radio per funzionare ha bisogno di cinque pile. Se le pile funzionano in modo indipendente, qual è la probabilità che esattamente due pile su cinque debbano essere sostituite entro le 150 ore di attività? [Risp. 80/243]

Esercizio 2.4.12 Determinate per quali valori di c la seguente funzione

$$f_c(x) = \left(\frac{3(1+c)}{2}x^2 + 2(1-c)x^3\right)\mathbf{1}_{(0,1)}(x) + (1-|c|)x$$

è funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X tale che $P(0 < X < 1/2) = 1/8$.

2.4.1 Funzione di intensità di rottura

Esercizio 2.4.13 Il tempo di vita X di una pila aaa, espresso in ore, ha intensità di rottura $\lambda(t) = t^2,\ t > 0$.

1. Calcolate la funzione di ripartizione di X.
2. Qual è la probabilità che una pila aaa funzioni per più di un'ora e mezza?
3. Qual è la probabilità che una pila aaa sia ancora funzionante dopo un'ora e mezza, ma non dopo due ore?
4. Se una pila aaa è funzionante dopo un'ora e mezza, qual è la probabilità che smetta di funzionare nella successiva mezz'ora?
5.[1] Una radio per funzionare ha bisogno di cinque pile. Se le pile funzionano in modo indipendente, qual è la probabilità che esattamente due pile su cinque debbano essere sostituite entro 1 ora e mezza di attività? [Risp. $10\mathrm{e}^{-3.375}(1-\mathrm{e}^{-1.125})^2 \simeq 0.016$]

Esercizio 2.4.14 Il tempo di vita, espresso in anni, di un certo tipo di batterie è una variabile aleatoria T con intensità di guasto pari a $\lambda(t) = \frac{1}{3}t^3$ per $t > 0$.

1 Fornire l'espressione della funzione di ripartizione e della densità di T.

2 Calcolare la probabilità che una batteria funzioni piú di 1 anno.

Se una batteria dura meno di 1 anno viene ritenuta difettosa. Supponiamo di avere un lotto di 100 batterie del tipo precedente e sia X il numero delle batterie difettose nel lotto.

3 Calcolare un valore approssimato della probabilità che X sia più grande di 10.

2.5 Funzioni di variabili aleatorie

2.5.1 Funzioni di variabili aleatorie discrete

Esercizio 2.5.1 Sia X una variabile aleatoria geometrica di parametro $p = 1/3$.

1. Qual è la densità di $Z = \max(3, X)$?
2. Qual è la densità di $Y = \min(3, X)$?

Esercizio 2.5.2

1. Lanciando $n = 10$ volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità che la differenza in valore assoluto tra numero di teste e numero di croci ottenute sia 4?

Sia X la variabile aleatoria che indica la differenza in valore assoluto tra numero di teste e numero di croci (sempre ottenute lanciando $n = 10$ volte la moneta equilibrata).

2. determinate la densità di X.

2.5.2 Funzioni di variabili aleatorie assolutamente continue

Esercizio 2.5.3 Se X è una variabile aleatoria tale che

$$P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ x^{-\lambda} & \text{se } x \geq 1 \qquad \lambda > 0 \end{cases}$$

qual è la funzione di ripartizione di $Y = \ln X$? Qual è la sua densità?

Esercizio 2.5.4 Se X è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità uniforme su $(-\pi/2, \pi/2)$, qual è la funzione di ripartizione di $Y = \tan X$. Qual è la sua densità? La variabile aleatoria Y ammette media?

[1] fuori tema d'esame

Esercizio 2.5.5 (densità di Weibull) Sia $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ e $Y = X^{1/\alpha}$ con $\alpha > 0$.

1. Qual è la densità di probabilità di Y?
2. Calcolate $P(Y > t + s \mid Y > s)$ e stabilite per quali valori di α e λ questa funzione è crescente in s. Per quali è decrescente?
3. Quali valori di α e λ scegliereste per modellare con Y il tempo di rottura di un'apparecchiatura soggetta ad usura?

Esercizio 2.5.6 Sia U una v.a. assolutamente continua con densità

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le u \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(cioè $U \sim \mathcal{U}(0,1)$). Determinate le funzioni di densità delle seguenti variabili aleatorie:

1. $Y_1 = U - 1/2$
2. $Y_2 = |U - 1/2|$
3. $Y_3 = (U - 1/2)^2$
4. $Y_4 = 1/(U + 1/2)$
5. $Y_5 = -\dfrac{\ln U}{\lambda}$ per $\lambda > 0$

Esercizio 2.5.7 Siano $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ e $Y = [X] + 1$, dove $g(x) = [x]$ rappresenta la parte intera di x. Determinate la densità di Y. [Risp. Y è v.a. discreta geometrica di parametro $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$]

Esercizio 2.5.8 Siano U una v.a. assolutamente continua con densità

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le u \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e $Y = [nU] + 1$, dove $g(x) = [x]$ rappresenta la parte intera di x. Determinate la densità di Y.

Esercizio 2.5.9 Il tempo di vita (espresso in ore) di un motore elettrico, ancora in rodaggio, può essere rappresentato dalla variabile aleatoria $T = X^4$, con X variabile aleatoria esponenziale di parametro 0.25.

1 Determinare la densità e l'intensità di guasto di T.

2 Sapendo che il motore è ancora funzionante dopo 192 ore, calcolare la probabilità che funzioni nelle successive 50 ore.

2.6 Soluzioni di alcuni esercizi del Capitolo 2

Esercizio 2.2.1

(1) $P(X > 1/2) = 1 - P(X \le 1/2) = 1 - F(1/2) = 1/2$.

(2) $P(2 < X \le 4) = F(4) - F(2) = 1 - 11/12 = 1/12$.

(3) $P(2 \le X \le 4) = P(1 < X \le 4) = F(4) - F(1) = 1/3$

(4) $P(X < 3) = F(2) = 11/12$.

(5) Indicata con p la densità di X, vale $p(0) = 1/2$, $p(1) = 1/6$, $p(2) = 1/4$, $p(3) = 1/12$ e $p(x) = 0$ per ogni altro x.

Esercizio 2.2.2

1. X assume solo tre valori: $\{1,2,3\}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&P(X=1)=P(\heartsuit)=\frac{1}{2}\\
&P(X=2)=P(\diamondsuit)=\frac{1}{4}\\
&P(X=3)=P(\clubsuit \text{ oppure } \spadesuit)=P(\clubsuit)+P(\spadesuit)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\\
&P(X=k)=0 \qquad \text{se } x\notin\{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

2.
$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<1\\ P(X=1)=\frac{1}{2} & 1\le x<2\\ P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{4} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3.\end{cases}$$

3. $P(X\le 1)=F_X(1)=1/2$.
4. $P(1<X\le 2)=F_X(2)-F_X(1)=3/4-1/2=1/4$.
5. $P(X>1)=1-F_X(1)=1-1/2=1/2$
6. $P(1\le X\le 2)=F_X(2)-F_X(1)+P(X=1)=3/4-1/2+1/2=3/4$.

Esercizio 2.2.3 X è definita sullo spazio campionario $\Omega=\{\omega=(i,j):\ i,j=1\dots 6\}$ con $|\Omega|=36$ e $P(\{\omega\})=1/36\ \forall\omega$. Le modalità di X sono $1,\dots,6$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
&\{X=6\}=\{(i,j):i\wedge j=6\}=\{(6,6)\}\\
&\{X=5\}=\{(i,j):i\wedge j=5\}=\{(5,5),(5,6),(6,5)\}\\
&\{X=4\}=\{(i,j):i\wedge j=4\}=\{(4,4),(4,5),(4,6),(6,4),(5,4)\}\\
&\{X=3\}=\{(i,j):i\wedge j=3\}=\{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,3),(5,3),(4,3)\}\\
&\{X=2\}=\{(i,j):i\wedge j=2\}=\{(2,2)(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(6,2),(5,2),(4,2),(3,2)\}
\end{aligned}$$

Segue che

$$p_X(k)=\begin{cases}P(X=6)=\frac{1}{36} & k=6\\ P(X=5)=\frac{3}{36} & k=5\\ P(X=4)=\frac{5}{36} & k=4\\ P(X=3)=\frac{7}{36} & k=3\\ P(X=2)=\frac{9}{36} & k=2\\ 1-\sum_{j=1}^5 p_X(j)=\frac{11}{36} & k=1\end{cases} \quad \text{e } F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{11}{36} & 1\le x<2\\ \frac{20}{36} & 2\le x<3\\ \frac{27}{36} & 3\le x<4\\ \frac{32}{36} & 4\le x<5\\ \frac{35}{36} & 5\le x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}$$

Esercizio 2.3.1

1. Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero di componenti funzionanti su 10, allora X ha densità binomiale di parametri $p=0.05$ e $n=10$. Pertanto,

$$\begin{aligned}
&=P\{\text{“il sistema funziona”}\}=P\{\text{“almeno 2 componenti su 10 funzionano”}\}\\
&=1-P\{\text{“al più 1 componente su 10 funziona”}\}=1-P(X\le 1)\\
&\simeq 1-(1-0.05)^{10}-10\cdot 0.05\cdot 0.95^9\simeq 0.0861
\end{aligned}$$

2. $\sum_{i=k}^n\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$.

Esercizio 2.3.2 Siano $T_i=$ “la cifra trasmessa è i” $i=0,1$ e $R_i=$ “la cifra ricevuta è i”. Allora,

$$\begin{aligned}
P(R_0\mid T_0)=0.99 \quad &\Leftrightarrow \quad P(R_1\mid T_0)=0.01\\
P(R_0\mid T_1)=0.05 \quad &\Leftrightarrow \quad P(R_1\mid T_1)=0.95
\end{aligned}$$

e $P(T_1) = 0.8$.

$$(1) \qquad P(\text{“errata ricezione”}) = P(R_0 \cap T_1) + P(R_1 \cap T_0) = P(R_0|T_1)P(T_1) + P(R_1|T_0)P(T_0)$$
$$= 0.05 \cdot 0.8 + 0.01 \cdot 0.2 = 42/1000 = 0.042 (:= p).$$

Introduciamo ora la variabile aleatoria X che descrive il numero di errori su 30 cifre trasmesse con la probabilità di errore ad ogni trasmissione pari a 0.042. Allora $X \sim \mathbf{Bi}(30, 0.042)$ e

$$P(\text{“Su 30 cifre trasmesse si verificano più di 3 errori”}) = P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$$
$$= 1 - \binom{30}{0} 0.958^{30} - \binom{30}{1} 0.042 \cdot 0.958^{29} - \binom{30}{2} 0.042^2 \cdot 0.958^{28} - \binom{30}{3} 0.042^3 \cdot 0.958^{27} = 0.03568$$

Esercizio 2.3.3 Posto $\Omega = \{0,1\}^{10}$, (cioè caso elementare$=\omega = (a_1, \ldots, a_{10})$), allora $X = \#$ risposte corrette su 10 è la seguente funzione: $X(\omega) = a_1 + \ldots + a_{10}$; $\forall \omega \in \{0,1\}^{10}$, $X(\omega) \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ e $p(k) := P(X = k) = P\{(a_1, \ldots, a_{10}) : a_1 + \ldots + a_{10} = k\}$. Poiché lo studente sceglie a caso, abbiamo $P(\{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k\ volte}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{10-k\ volte})\} = \frac{3^{10-k}}{4^{10}} = P\{(a_1, \ldots, a_{10})\}\ \forall (a_1, \ldots, a_{10})$ avente k componenti $= 1$ e le rimanenti $=0$. Quindi, $p(k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$, cioè X è una variabile aleatoria binomiale ($X \sim \mathbf{Bi}(10, 1/4)$).
$P(\text{“uno studente impreparato supera il test”}) = P(X \ge 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \simeq 0.07813 \simeq 7.8\%$.

Esercizio 2.3.4

(1) Sia X il numero di partite, inclusa l'ultima, necessarie per osservare una vittoria. Allora X è una variabile geometrica di parametro $18/37$ e si ha

$$P(X = 5) = \frac{18}{37} \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{5-1} = \frac{2345778}{69343957} \simeq 0.034.$$

(2) Sia Y il numero di partite vinte da Armando in una sequenza di 10 partite. Allora $Y \sim \mathbf{Bi}(10, 18/37)$, quindi

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \left(\frac{18}{37}\right)^k \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{10-k} =$$
$$= 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{18}{37} \left(\frac{19}{37}\right)^9 = \frac{4744369520559828}{4808584372417849} \simeq 0.9866.$$

(3) Il capitale viene incrementato di 2 € se il numero di vincite è 6, cioè supera di 2 il numero delle perdite. Quindi la probabilità richiesta è

$$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{18}{37}\right)^6 \left(1 - \frac{18}{37}\right)^4 = 0.1936$$

Esercizio 2.3.5 Detta X la variabile aleatoria che conta il numero di palline poste in B, poichè per ogni pallina scelgo a caso l'urna dove riporla, allora $X \sim \mathbf{Bi}(12, 1/2)$ e

1. $P(B \text{ vuota}) = P(X = 0) = 0.5^{12}$;
2. $P(\text{“due urne posseggano lo stesso numero di palline”}) = P(X = 6) = \binom{12}{6} 0.5^{12}$;
3. $P(\text{“nessuna delle due urne sia vuota”}) = P(1 \le X \le 11) = 1 - P(X \in \{0, 12\}) = 1 - 0.5^{12} - 0.5^{12} = 1 - 0.5^{11}$.

Esercizio 2.3.6 Se la slot machine non è truccata, possiamo assumere che le 10 prove –consistenti in 10 giocate distinte– si svolgano indipendentemente le une dalle altre; ciascuna prova è dicotomica (si vince o si perde) e la probabilità di successo è la stessa in entrambe le prove e pari a $p = 0.1$.

1. Quindi, la variabile aleatoria X che conta il numero di vittorie su 10 giocate ha densità binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 0.1$. La risposta al punto 1. è $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.1^6 \times 0.9^4 \simeq 0.00014$.

2. La variabile aleatoria T che rappresenta il numero di giocate necessarie per riportare la prima vittoria ha densità geometrica di parametro $p = 0.1$: $P(T = 10) = 0.1 \times 0.9^9 = 0.03874$.

3. La probabilità da calcolare è $P(T = 6|T > 5) = P($"alla sesta giocata vinco"$) = 0.1$.

(4) $$P(\{(\underbrace{1,\ldots,1}_{6\ volte},0,\ldots,0)\} \mid A_6) = \frac{P(\{(\underbrace{1,\ldots,1}_{6\ volte},0,\ldots,0)\} \cap A_6)}{P(A_6)} = \frac{p^6(1-p)^{10-6}}{\binom{10}{6}p^6(1-p)^{10-6}} = \frac{1}{\binom{10}{6}},$$

dove $A_6 :=$ "Un giocatore vince 6 volte su 10" $= \{(x_1, \ldots, x_{10}) \in \Omega : x_1 + \ldots + x_{10} = 6\}$. Il risultato non sarebbe cambiato se la domanda fosse stata: "Se si riportano 6 vittorie su 10, qual è la probabilità di vincere alle giocate s_1-esima, ..., s_6-esima?".

Esercizio 2.3.7 Se lanciamo la moneta irregolare finchè non compare testa per la prima volta, stiamo eseguendo una successione di prove bernoulliane, con probabilità di successo nella singola prova pari a $p = 1/6$. Quindi la variabile aleatoria X che conta il numero di prove necessarie per ottenere per la prima volta testa ha densità geometrica di parametro $1/6$, ovvero:

$$p_X(k) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} & k = 1, \ldots. \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

quindi

$$F_X(k) = P(X \le k) = \sum_{x=1}^{k} p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^k \quad \forall k = 1, \ldots$$

da cui

$$P(X > k) = (1-p)^k \quad \forall k = 1, \ldots$$

Dalla proprietà di assenza di memoria della densità geometrica (cioè $P(X > k + r|X > k) = P(X > r)$, $\forall k = 1, 2 \ldots$, $\forall r = 1, 2, \ldots$ otteniamo $P($"Sono necessari più di 4 lanci" posto che "il 6 non appare al primo lancio"$) = P(X > 4 \mid X > 1) = P(X > 1 + 3 \mid X > 1) = P(X > 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0.5787$

Esercizio 2.3.8 Si può descrivere il fatto che una persona faccia o meno l'elemosina con una v.a. X_i che assume i valori 1 (= fa elemosina) e 0 con probabilità, rispettivamente, 0.15 e 0.85. Supposto che ogni persona si comporti, rispetto a ciò, in modo indipendente dalle altre, siamo di fronte ad uno schema di Bernoulli di parametro $p = 0.15$. Quindi:

1. La probabilità cercata è la probabilità che ci siano almeno 3 successi in 20 prove; il numero di successi in n prove bernoulliane ha legge Binomiale quindi

$$\sum_{i=3}^{20} \binom{20}{i} 0.15^i 0.85^{20-i} = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} 0.15^i 0.85^{50-i} = 0.595$$

2. La probabilità cercata è la probabilità che di n persone almeno una faccia elemosina, cioè

$$1 - 0.85^n \ge 0.5 \Longleftrightarrow n \ge \log_{0.85} 0.5 \Longleftrightarrow n \ge \frac{\ln 0.5}{\ln 0.85} = 4.265$$

quindi almeno 5 persone.

3. Sia G_i la variabile aleatoria che vale 0,50 se la persona $i-$esima fa l'elemosina, 0 se non la fa. Dopo n persone il mendicante ottiene, in media, $\mathrm{E}(G_1 + \cdots + G_n)$. Ma $\mathrm{E}(G_i) = 0.50 \times 0.15 + 0 \times 0.85 = 0.075$ per ogni i, quindi $\mathrm{E}(G_1 + \cdots + G_n) = n \times 0.075$, da cui $n = 3/0.075 = 40$.

Esercizio 2.3.9 Sia T la variabile aleatoria che rappresenta il numero di telefonate che Pietro deve fare finchè trova libero. Allora T può essere visto come il tempo di attesa del primo successo in una successione di prove di Bernoulli, con probabilità di successo in ogni singola prova pari a $p = 0.1$. Quindi la densità di T è geometrica con parametro $p = 0.1$

1 $\mathrm{E}(T) = 1/p = 1/0.1 = 10$.

2 La probabilità richiesta è

$$P(T > 5) = (1 - p)^5 = 0.9^5 = 0.59049$$

3 Per la proprietà di assenza di memoria della densità geometrica vale:

$$P(T = 10 + 5 | T > 10) = P(T = 5) = 0.1 \times 0.9^4 = 0.06561 \ .$$

Esercizio 2.3.11

1. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = 0.6691$.
2. Ora, il parametro λ è incognito e devo determinarlo in modo tale che risulti:

$$P(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} > \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\lambda > \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda < \ln 2 = 0.6931.$$

Esercizio 2.3.12 Posso ipotizzare i concorsi indipendenti, così che, detta X la variabile aleatoria che conta il numero di premi vinti su 180 concorsi, allora $X \sim \mathbf{Bi}(180, 0.008)$. Essendo la probabilità di successo piccola e il numero dei concorsi a cui partecipo grande, allora, nei calcoli posso approssimare la densità $\mathbf{Bi}(180, 0.008)$ con la densità di Poisson $\mathcal{P}(180 \cdot 0.008) = \mathcal{P}(1.44)$. Quindi

1. P(di vincere il premio di un solo concorso) $= P(X = 1) = 180 \cdot 0.008 \cdot 0.992^{179} = 0.3419415 \simeq 0.341176 = \mathrm{e}^{-1.44} \cdot 1.44$.
2. P(di vincere almeno un premio) $= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.008^{180} = 0.7644403$
3. P(di vincere 30 premi) $= P(X = 30) = \binom{180}{30} 0.008^{30} \cdot 0.992^{150} \simeq \frac{\mathrm{e}^{-1.44} 1.44^{30}}{30!}$

Esercizio 2.3.13

1. Sia $X \sim \mathcal{P}(1)$ la v.a. che fornisce il numero di automobili che un concessionario vende giornalmente. Allora la probabilità che il concessionario venda al giorno almeno una macchina vale $P(X \geq 1) = 1 - f_X(0) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$
2. Sia Y la v.a. fonisce il primo giorno di vendita a partire da un giorno di inizio 1, allora $Y \sim \mathbf{Geo}(1 - \mathrm{e}^{-1})$ e la probabilità che trascorrano 7 giorni consecutivi senza che il venditore venda automobili e che poi all'ottavo giorno venda almeno una macchina è data da $f_Y(8) = \mathrm{e}^{-7}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \simeq 0.00058$

Esercizio 2.3.14 Siamo interessati all'evento A="Esce l'ambo 80, 90 sulla ruota di Bari".

(1) Ad ogni estrazione abbiamo

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801} \simeq 0.002497$$

poichè ad ogni estrazione e per ogni ruota si procede ad estrarre 5 palline senza reimmmissione.

Poichè ad ogni estrazione si usa la stezza urna con 90 palline numerate da 1 a 90 e per ogni ruota si procede ad estrarre 5 palline senza reimmmissione, allora la successione delle estrazioni del lotto sulla ruota di Bari costituiscono una successione di prove bernoulliane, con probabilità di successo nella singola prova data da $P(A) = 2/801$.

(2) Sia ora X la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni necessarie per ottenere l'ambo 80,90 per la prima volta sulla ruota di Bari. X ha densità geometrica di parametro 2/801 e quindi

P("esattamente 600 giornate per fare ambo (per la prima volta) puntando sui numeri 80,90 sulla ruota di Bari")$=P(X = 600) = (2/801)\,(1 - 2/801)^{599} \simeq 0.00056$.

(3) Per la proprietà di assenza di memoria della densità geometrica

$$P(X = 672|X > 72) = P(X = 672 - 72) = P(X = 600) \simeq 0.00056$$

(4) Sia ora Y la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui esce l'ambo 80,90 sulla ruota di Bari, su 1000 estrazioni. Allora $Y \sim Bin(1000, 2/801)$ e

$$P(\text{“Matteo fa ambo almeno 2 volte su 1000”}) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \simeq$$
$$\simeq 1 - \frac{\mathrm{e}^{-2000/801}(2000/801)^0}{0!} - \frac{\mathrm{e}^{-2000/801}(2000/801)^1}{1!} \simeq 0.71206,$$

dove è stato usato il fatto che essendo il numero delle estrazioni "grande" e la probabilità di successo "piccola", la densità binomiale $Bin(1000, 2/801)$ può essere approssimata con la densità di Poisson di parametro 2000/801.

Esercizio 2.3.15 Il lotto è rispedito indietro se almeno un fusibile sui 5 (= 5% dei 100) scelti a caso per il controllo non brucia ad un determinato amperaggio. I 5 fusibili da controllare sono estratti senza reimmissione dal lotto di 100 pezzi costituito da 90 fusibili funzionanti e 10 difettosi. Pertanto, la variabile aleatoria X che conta il numero di fusibili difettosi su 5 ha densità ipergeometrica di parametri $(10, 100, 5)$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}} \qquad k = 0, \ldots, 5$$

e $P(\text{“il lotto è rispedito indietro”}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dfrac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = 0.4162.$

Sia Y il numero di pezzi difettosi da controllare per scoprire un primo pezzo difettoso. Allora $Y > k$ se e solo se i primi k pezzi controllati sono tutti funzionanti, da cui:

$$P(Y > k) = P(\text{“si estrae una successione di } k \text{ fusibili senza reimmissione tutti funzionanti”})$$
$$= \begin{cases} \frac{\binom{90}{k}}{\binom{100}{k}} & k = 1, \ldots, 90 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

Segue che

2. $P(Y > 1) = \frac{90}{100} = 0.9$.
3. Dobbiamo calcolare $P(Y > 2 \mid Y > 1)$:

$$P(Y > 2 \mid Y > 1) = \frac{P(Y > 2 \cap Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{P(Y > 2)}{P(Y > 1)} = \frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} \Big/ \frac{\binom{90}{1}}{\binom{100}{1}} = \frac{89}{99}$$

Nota 7 In questo esercizio, non vale la proprietà di assenza di memoria. Infatti: $P(Y > 1) > P(Y > 1 + 1 \mid Y > 1)$. D'altro canto, lo schema di estrazione dei fusibili è senza reimmissione.

Esercizio 2.3.16 Le modalità che X può assumere sono $1, \ldots, 10$ e

$$P(X > k) = P(\text{“su } k \text{ chiavi controllate non vi è quella giusta”}) = \frac{\binom{9}{k}\binom{1}{0}}{\binom{9}{k}} = \frac{10 - k}{10} = 1 - \frac{k}{n}$$

Quindi

1. $P(\text{controllare almeno 8 chiavi}) = P(X \geq 8) = P(X > 7) = 1 - \frac{7}{10} = 0.3$.
2. Per quanto riguarda la funzione di ripartizione di X vale che $\forall k = 1, \dots, 10$:

$$F_X(k) = P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = \frac{k}{10}$$

da cui:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{k}{10} & k \leq x < k+1 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

3. Infine, $\forall k = 1, \dots, 10$:

$$p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{k}{10} - \frac{k-1}{10} = \frac{1}{10}$$

Nota 8 X è la variabile aleatoria uniforme discreta sui primi 10 numeri naturali. Se il mazzo fosse stato formato da n chiavi avremmo ottenuto per X la densità *discreta uniforme* sui primi n numeri naturali, cioè X assume i valori in $S := \{1, \dots, n\}$ con probabilità data da $p_X(k) = 1/n, \forall k \in S$.

4. Se prima di provare una nuova chiave, rimetto la chiave nel mazzo allora lo schema di riferimento è di estrazioni con reimmissione e la variabile aleatoria, diciamo Z, che indica il numero di chiavi da provare per trovare quella dell'ufficio ha densità geometrica di parametro $1/10$. Quindi:
1. $P(Z \geq 8) = P(Z > 7) = (9/10)^7$.

Esercizio 2.3.17 Per la prima parte dell'esercizio, possiamo modellare le scelte dell'automobilista tramite uno schema di Bernoulli di cinque prove indipendenti. Il successo corrisponde alla scelta del self-service e quindi ogni prova avrà probabilità di successo $p = 3/8 = 0.375$. In particolare, se definiamo $E_2 =$ "L'automobilista sceglie il self-service il secondo giorno" allora $P(E_2) = \frac{3}{8}$.

Sia ora $X =$ numero di successi. Allora $X \sim B(n, p) = B(5, 3/8)$ e

(2) $$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3 = 0.3433.$$

Se l'automobilista non fa mai rifornimento due volte nella stessa stazione, allora l'automobilista sceglie senza ripetizione $n = 5$ stazioni da un insieme di $N = 8$ stazioni di cui $K = 3$ self-service: è come se estraesse senza reimmissione $n = 5$ palline da un'urna di $N = 8$ palline di cui $K = 3$ rosse e le rimanenti bianche.

Se $E_i =$ "Il giorno i l'automobilista sceglie il self-service" per $i = 1, 2$, allora:

$$P(E_2) = P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) + P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{3}{7}\frac{5}{8} + \frac{2}{7}\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Sia $X =$ numero di self-service. In questo caso X ha legge ipergeometrica di parametri $(8, 3, 5)$ e si trova

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56} = 0.5357.$$

Esercizio 2.4.2 Indicata con F_X la funzione di ripartizione di X, vale che

(1) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{50} & 0 \leq x < 5 \\ -\frac{x^2}{50} + \frac{2}{5}x - 1 & 5 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

(2) $$P(2 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(2-) = F_X(9) - F_X(2) = -\frac{9^2}{50} + \frac{2}{5}9 - 1 - \frac{2^2}{50} = 0.9$$

Esercizio ??

1. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s)\ ds = \int_{-\infty}^x 4s^3 \mathbf{1}_{(0,1)}(s)\ ds$. Quindi $F_X(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_X(x) = \int_0^x 4s^3\ ds = s^4\Big|_0^x = x^4$ se $0 \le x < 1$, e $F_X(x) = 1$ se $x \ge 1$. In definitiva:

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

2. $P(-0.5 < X \le 0.5) = F_X(0.5) - F_X(-0.5) = (0.5)^4 - 0 = 0.0625 = 1/16$.

Esercizio 2.4.4 Le funzioni in (c), (f), (h) non sono funzioni di densità in quanto la funzione in (c) è negativa, la funzione in (f) non è integrabile e la funzione in (h) integra a 16. Per le rimanenti funzioni le corrispondenti funzioni di ripartizione sono

(a) $F(x) = x^3 \mathbf{1}_{(0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$

(b) $F(x) = \dfrac{\theta x}{2} \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\theta - 1}{2}\right) \mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \left(\dfrac{(1-\theta)(x-1-\theta)}{2}\right) \mathbf{1}_{[2,3)}(x) + \mathbf{1}_{[3,\infty)}(x)$

(d) $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b)}(x) + \mathbf{1}_{[b,+\infty)}(x)$

(e) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) + \dfrac{1}{2} \mathbf{1}_{[1,2)}(x) + \left(1 - \dfrac{(3-x)^2}{2}\right) \mathbf{1}_{[2,3)}(x) + \mathbf{1}_{[3,\infty)}(x)$

(g) $F(x) = (1 - x^{-1}) \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$

Esercizio 2.4.5 Poiché $f(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, allora, necessariamente, $k \ge 0$. Inoltre

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-k}^{k} kx^2 dx = 2k \int_0^k x^2 dx = \frac{2}{3} k^4$$

se e solo se $k^4 = 3/2$, e quindi $k = (3/2)^{1/4}$

Esercizio 2.4.6

1. $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = k \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\ dx = -\frac{k}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \mathrm{e}^{-x^2}\ dx = -\frac{k}{2}\ \mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{k}{2} \implies k = 2$.

2. $P(X \le 1) = P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(x)\ dx = 2\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\ dx = -\int_0^1 \frac{d}{dx} \mathrm{e}^{-x^2}\ dx = -\ \mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$

Esercizio 2.4.7 Il discriminante dell'equazione $x^2 + 40Yx + 360Y - 32 = 0$ è $\Delta(Y) = 1600Y^2 - 1440Y + 128$ e $\Delta(Y) < 0$ se e solo se $0.1 < Y < 0.8$. Segue che la probabilità cercata vale $P(0.1 < Y < 0.8) = \int_{0.1}^{0.8} 2y\ dy = 0.8^2 - 0.1^2 = 0.63$.

Esercizio 2.4.8 Sia T_A la v.a. che rappresenta il tempo di riparazione del tecnico A. Allora:

(1) $P(T_A > 2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}2} = \mathrm{e}^{-1}$

(2) $P(T_A \ge 11 | T_A > 9) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}11}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}9}} = \mathrm{e}^{-1} = P(T_A > 2)$.

Sia ora T_B la v.a. che rappresenta il tempo di riparazione del tecnico B e T la variabile aleatoria che rappresenta il tempo di riparazione del centro di assistenza xxx. Siano inoltre, A="La riparazione è effettuata dal tecnico A" e B="La riparazione è effettuata dal tecnico B". Allora

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= P(T \le t|A)P(A) + P(T \le t|B)P(B) = P(T_A \le t)P(A) + P(T_B \le t)P(B) \\ &= \begin{cases} 0 & se\ t \le 0 \\ 1 - (\mathrm{e}^{-0.5t} + \mathrm{e}^{-0.6t})/2 & se\ t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

In particolare T non è esponenziale. Segue che

(3) $P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = \dfrac{e^{-1} + e^{-1.2}}{2}$

(4) $P(T \geq 11 | T > 9) = \dfrac{P(T \geq 11)}{P(T > 9)} = \dfrac{e^{-5.5} + e^{-6.6}}{e^{-4.5} + e^{-5.4}}$ $[\neq \frac{e^{-1}+e^{-1.2}}{2}]$

Esercizio 2.4.10

1. $E(X) = \dfrac{1000}{1+a} = 750$ se e solo se $a = \dfrac{1}{3}$

2. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{a}{1000^a}(1000-t)^{a-1}\, dt = 1 - \left(1 - \frac{x}{1000}\right)^a & \text{se } 0 < x < 1000 \\ 1 & \text{se } x \geq 1000 \end{cases}$

3. Determiniamo k tale che $0.1 = P(X \geq k)$. Ma,

$$0.1 = P(X \geq k) = P(X > k) = 1 - F(k) = 1 - 1 + \left(1 - \frac{k}{1000}\right)^a$$

se e solo se

$$\frac{k}{1000} = 1 - 0.1^{1/a}$$

se e solo se

$$k = 1000 - 1000 \times 0.1^{1/a} = 1000 - \frac{1000}{1000} = 999.$$

Esercizio 2.4.9 Sia X la v.a. che fornisce la vendita settimanale di gasolio in migliaia di litri. Allora la capacità del serbatoio necessaria affinché la probabilità che il gasolio sia esaurito in una settimana sia pari a 0.01 è il quantile di coda destra di X di ordine 0.1, cioè il k t.c.

$$P(X > k) = \int_k^1 5(1-x)^4\, dx = -(1-x)^5|_k^1 = (1-k)^5 = 0.01$$

quindi $k = 1 - 0.01^{1/5} = 0.6018928$: cioè c'è bisogno di una capacità di serbatoio pari a circa 602 litri.

Esercizio 2.4.12 Innanzitutto notiamo che se $c \neq -1$ o $c \neq 1$, allora $\int_{\mathbb{R}}(1-|c|)x\, dx = \infty$, quindi f_c non è integrabile. Se invece $c = 1$ allora $f_1(x) = 3x^2 \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ che è funzione non negativa che integra a uno. Quindi, per $c = 1$ f_c è una densità e $P(0 < X < 1/2) = \int_0^{1/2} 3x^2\, dx = 1/8$. Se invece $c = -1$ allora $f_{-1}(x) = 4x^3 \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ che è anche essa una funzione di densità. Ma $P(0 < X < 1/2) = \int_0^{1/2} 4x^3\, dx \neq 1/8$. Concludiamo che $c = 1$.

Esercizio 2.4.13

1 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left\{\int_0^x -t^2\, dt\right\} = 1 - \exp\left\{\frac{-x^3}{3}\right\} & \textit{se } x > 0 \end{cases}$

2 $P(X > 1.5) = 1 - F_X(1.5) = \exp\left\{\dfrac{-1.5^3}{3}\right\} = e^{-1.125} \simeq 0.325$

3 $P(1.5 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1.5) = 1 - e^{-\frac{2^3}{3}} - (1 - e^{-1.125}) = e^{-1.125} - e^{-8/3} \simeq 0.255$

4 $P(X \leq 1.5 + 0.5 | X \leq 3) = P(X \leq 2 | X > 1.5) = \dfrac{P(1.5 < X \leq 2)}{P(X > 1.5)} = \dfrac{e^{-1.125} - e^{-8/3}}{e^{-1.125}} = 1 - e^{-4.625/3} \simeq 0.786$

Esercizio 2.4.14

1 La funzione di ripartizione di T è data, per $t > 0$, da

$$F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(u)du} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{12}t^4},$$

mentre $F_T(t) = 0$ per $t \le 0$. Quindi la densità di T si ottiene derivando:

$$f_T(t) = \frac{1}{3}t^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}t^4}I_{(0,+\infty)}(t).$$

2 La probabilità richiesta è $P(T > 1) = 1 - F_T(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{12}} \simeq 0.92$

3 Dal punto precedente si ricava che la probabilità che una batteria sia difettosa è $p = 1 - 0.92 = 0.08$. Dunque $X \sim Bin(100, 0.08)$ e $\mathrm{E}(X) = 8$ e $\mathrm{Var}(X) = 7.36$. Quindi per il Teorema di De Moivre-Laplace:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - P(X \le 10.5) = 1 - P(\frac{X-8}{\sqrt{7.36}} \le \frac{10.5-8}{\sqrt{7.36}})$$
$$\simeq 1 - \Phi(0.92) = 1 - 0.8212 = 0.1788.$$

Esercizio 2.5.1

(1) $$p_Z(k) = P(\max(X,3) = k) =$$
$$= \begin{cases} 0 & k = 1,2 \\ P(X \le 3) & k = 3 \\ P(X = k) & k = 4,5,\dots \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2\right] \simeq 0.8025 & k = 3 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & k = 4,5,\dots \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

(2) $$p_Y(y) = P(Y = k) = \begin{cases} P(X = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & k = 1,2 \\ P(X \ge 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} & k = 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2.5.2 Sia T la variabile aleatoria che indica il numero di teste su 10 lanci indipendenti di una moneta equilibrata. Allora $T \sim \mathbf{Bi}(10, 1/2)$. Ovviamente il numero di croci è dato da $10 - T$ e la variabile aleatoria $X = |T - (10 - T)| = |2T - 10|$ è la differenza in valore assoluto tra numero di teste e numero di croci. Per rispondere alle varie domande dobbiamo calcolare la densità di X:

1. $X = 4$ se e solo se $|T - (10 - T)| = |2T - 10| = 4$. Quindi

$$p_X(4) = P(\{2T - 10 = 4\} \cup \{-2T + 10 = 4\}) = P(\{2T - 10 = 4\}) + P(\{-2T + 10 = 4\}) =$$
$$= p_T(7) + p_T(3) = 2\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

2.-3. $X = 0$ se e solo se $T = 5$ e quindi la densità di X in 0 è strettamente positiva; esattamente abbiamo $p_X(0) = p_T(5) = \binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}}$. Passando agli altri valori: $X = k$ se e solo se $|2T - 10| = k$ se e solo se "$2T - 10 = k$ oppure $-2T + 10 = k$", cioè "$T = k/2 + 5$ oppure $T = 5 - k/2$". Quindi, gli unici valori ammissibili per k sono in $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}} & k = 0 \\ P(T = k/2 + 5) + P(T = 5 - k/2) = 2\binom{10}{k/2+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{k/2+5}\left(\frac{1}{2}\right)^9 & k \in S \setminus \{0\} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2.5.3

$$F_Y(y) = P(\ln X \le y) = P(X \le \mathrm{e}^y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{e}^y < 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{se } \mathrm{e}^y \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{se } y \ge 0 \end{cases}$$

Quindi Y è una variabile aleatoria continua con funzione di densità $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)$, $\lambda > 0$, cioè $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Esercizio 2.5.4

$$F_Y(y) = P(\tan X \leq y) = P(X \leq \arctan y) = \frac{\arctan y + \pi/2}{\pi} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Pertanto

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\arctan y + \pi/2}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

La densità in (2.1) prende il nome di *densità di Cauchy.* È un esempio di densità continua che non ammette media. Infatti: $\mathrm{E}|Y| = 2\int_0^\infty \frac{y}{\pi(1+y^2)}dy = \infty$, sebbene

$$\int_{-\infty}^0 x\frac{1}{\pi(1+y^2)}\,dx + \int_0^\infty x\frac{1}{\pi(1+y^2)}\,dx = 0!!!$$

Esercizio 2.5.5

1. Poichè X è una variabile aleatoria continua e $g(x) = x^{1/\alpha}$ è funzione derivabile e strettamente crescente su $(0,+\infty)$ con inversa $g^{-1}(x) = x^\alpha$ derivabile, allora $Y = X^{1/\alpha}$ è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)](g^{-1})'(y)\mathbf{1}_{g((0,+\infty))}(y) = f_X(y^\alpha)\alpha y^{\alpha-1}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y) = \lambda\alpha y^{\alpha-1}e^{-\lambda y^\alpha}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

2. Y ha funzione di ripartizione

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^y \lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^\alpha}dt & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^{y^\alpha} \lambda e^{-\lambda z}dz & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^\alpha} & y > 0 \end{cases}$$

$$(z = t^\alpha,\ dt = \frac{1}{\alpha}z^{1/\alpha-1}dz)$$

Quindi,

$$P(Y > t+s \mid Y > s) = \frac{P(Y > t+s)}{P(Y > s)} = \frac{1 - F_Y(t+s)}{1 - F_Y(s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)^\alpha}}{e^{-\lambda s^\alpha}} = e^{-\lambda(t+s)^\alpha + \lambda s^\alpha};$$

Poiché

$$\frac{d}{ds}P(Y > t+s \mid Y > s) = P(Y > t+s \mid Y > s)\lambda\alpha(-(t+s)^{\alpha-1} + s^{\alpha-1}) \geq 0$$

se e solo se $s^{\alpha-1} \geq (s+t)^{\alpha-1}$ e, $\forall s \geq 0$, vale che $s^{\alpha-1} \geq (s+t)^{\alpha-1}$ se e solo se $\alpha \leq 1$, allora concludiamo che
- se $\alpha = 1$ allora $P(Y > t+s \mid Y > s)$ è funzione costante in s;
- se $\alpha < 1$ allora $P(Y > t+s \mid Y > s)$ è funzione crescente in s;
- se $\alpha > 1$ allora $P(Y > t+s \mid Y > s)$ è funzione decrescente in s.

3. Sulla base dei risultati illustrati al punto precedente, visto che l'andamento in s di $P(Y > t+s \mid Y > s)$ non dipende da λ, per modellare tempi di vita di apparecchiature potremmo procedere nella scelta si α secondo le seguenti regole:
- sceglieremo $\alpha = 1$, cioè useremo la densità esponenziale, per modellare tempi di vita di apparecchiature non soggette ad usura;
- sceglieremo $\alpha < 1$ per modellare il tempo di vita di apparecchiature in rodaggio: sapendo che l'apparecchiatura funziona da un tempo superiore ad s, è più probabile che sia in vita per un ulteriore periodo di lunghezza almeno pari a t.
- sceglieremo $\alpha > 1$ per modellare il tempo di vita di apparecchiature soggette ad usura.

Nota 9 La densità di probabilità trovata per Y è detta *densità di Weibull.*
In generale, se X è una variabile aleatoria con densità f_X e funzione di ripartizione F_X, allora $r_X(t) = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$ è detto *tasso istantaneo di propensione al guasto*. Il nome è giutificato dalla seguente eguaglianza:

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t r_X(u)du} = \mathrm{e}^{-\int_0^t \frac{f_X(u)}{1-F_X(u)}du} = \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{d}{du}\ln(1-F_X(u))du} = 1 - F_X(t)$$

dalla quale deriva anche che

$$P(X > t + s \mid X > s) = \mathrm{e}^{-\int_s^{t+s} r_X(u)du}$$

per cui, fissato t, $P(X > t+s \mid X > s)$ è funzione crescente in s se e solo se $\int_s^{t+s} r_X(u)du$ è funzione decrescente in s. L'ultima condizione è equivalente a $r_X(s+t) < r_X(s)$ $\forall s$, cioè $r_X(u)$ è funzione decrescente. Infine, X si dice *IFR* (incresing failure rate) se $u \mapsto r_X(u)$ è crescente, mentre si dice *DFR* (decresing failure rate) se $u \mapsto r_X(u)$ è decrescente. Quindi per una variabile aleatoria X con densità di Weibull di parametri (α, λ) abbiamo che X è IFR se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 2.5.6 1. $Y_1 = U - 1/2 \sim \mathcal{U}(-1/2, 1/2)$. Cfr. Dispense, Esempio 2.6.6 pagina 54-55.
2. Poichè $Y_1 = U - 1/2 \sim \mathcal{U}(-1/2, 1/2)$ allora, la funzione di ripartizione di $Y_2 = |Y_1|$ è

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ P(-y \leq Y_1 \leq y) = 2y & 0 < y < 1/2 \\ 1 & y \geq 1/2 \end{cases}$$

e quindi, $Y_2 \sim \mathcal{U}(0, 1/2)$;
3. Poiché $Y_3 = Y_2^2$ e su $(0, 1/2)$ la funzione $g(x) = x^2$ è invertibile, allora

$$f_{Y_3}(y) = f_{Y_2}(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{2\sqrt{y}}\mathbf{1}_{(0,1/2)}(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}}\mathbf{1}_{(0,1/4)}(y).$$

4. Poiché $g(x) = 1/(x + 1/2)$ è invertibile su $(0, 1)$ e $g^{-1}(y) = 1/y - 1/2$ è derivabile su $(0, +\infty)$ con $(g^{-1}(y))' = -1/y^2$, allora

$$f_{Y_4}(y) = f_U\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{(0,1)}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{(2/3,2)}(y).$$

5. Poichè $g(x) = -\ln x/\lambda$ è invertibile su $(0, 1)$ e $g^{-1}(y) = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ è derivabile su $(0, +\infty)$ con $(g^{-1}(y))' = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}$, allora

$$f_{Y_5}(y) = f_U\left(\mathrm{e}^{-\lambda y}\right)\mathbf{1}_{(0,1)}\left(\mathrm{e}^{-\lambda y}\right)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)$$

Esercizio 2.5.9

1. $f_T(t) = f_X(t^{1/4})\frac{1}{4}t^{-3/4}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(t) = \dfrac{0.25}{4}t^{-3/4}\mathrm{e}^{-0.25t^{(1/4)}}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(t) = \dfrac{t^{-3/4}}{16}\mathrm{e}^{-0.25t^{(1/4)}}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(t).$

2. Si tratta di calcolare

$$P(T > 50 + 192|T > 192) = \frac{P(T > 242)}{P(T > 192)} = \frac{P(X > (242)^{0.25})}{P(X > (192)^{0.25})} = \mathrm{e}^{-0.2217\times 0.25} = 0.9461.$$

Capitolo 3

Media varianza e momenti

3.1 Media e varianza

Esercizio 3.1.1 In una classe maschile di 30 studenti, due studenti sono alti 167cm, cinque 170cm, tre 175cm, cinque 176cm, sei 180cm, sette 185cm e due 190cm. Se scelgo uno studente a caso quanto mi aspetto sia alto? Con quale varianza?

Esercizio 3.1.2 Se una moneta regolare viene lanciata quattro volte, mediamente, quante volte succede che croce segua immediatamente testa?

Esercizio 3.1.3 Sia $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Determinate media e varianza delle seguenti variabili aleatorie:

1 $Y = U - 1/2$

2 $Y = (U - 1/2)^2$

3 $Y = 1/(U + 1/2)$

4 $Y = -\ln U$

Esercizio 3.1.4 Il diametro X di un tipo di particelle di polline, espresso in micron, è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x^{-6} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

1 Determinare il valore di c.

2 Calcolare media e varianza di X.

3 Qual è la probabilità che una particella selezionata a caso abbia diametro compreso tra 1.3 e 2 micron?

4 Calcolare la funzione di ripartizione di X.

Esercizio 3.1.5 Il numero di vestiti confezionati settimanalmente da una sartoria è una variabile aleatoria con momento primo 5 e momento secondo 30.

1. Fornite una stima della probabilità che la prossima settimana il numero di vestiti confezionati sia compreso fra 2 e 8 (inclusi).

2. Nei periodi di maggiore richiesta nella sartoria vengono assunti alcuni operai stagionali per aumentare la produzione settimanale. Si sa che con i nuovi operai, comunque la produzione media settimanale rimane invariata, mentre la varianza diminuisce all'aumentare dei operai secondo la seguente regola: $\mathrm{Var}(X) = 5/(n+1)$, dove n rappresenta il numero di operai stagionali assunti

($n = 0, 1, \ldots$). Avendo le uniche informazioni di media e varianza, qual è il numero minimo di operai stagionali che la sartoria deve assumere affinché sia almeno pari a 0.8 la probabilità che il numero di vestiti confezionati settimanalmente sia compreso fra 2 e 8?

Esercizio 3.1.6 Sia $a > 1$ e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x} I_{(1,a)}(x).$$

1. Determinare a in modo tale che f_a sia la densità di una v.a. reale.

Sia X una v.a. con densità f_a (a determinata al punto precedente).

2. Determinare la funzione di ripartizione di X.
3. Determinare la densità della v.a. $Y = \ln X$ e riconoscerla.
4. Calcolare $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$ e $\mathrm{E}(Y)$.

Esercizio 3.1.7 Sia F definita nel modo seguente:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\lambda} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

1. Determinare per quali valori di λ F è una funzione di ripartizione.
2. Sia ora λ il valore trovato al punto 1. e sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione F. Determinare per quali valori di λ X ammette media e varianza

3.2 Densità gaussiana

Esercizio 3.2.1 Sia X una variabile aleatoria gaussiana standard ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$). Facendo uso delle tavole, determinate:

1. $P(X \leq 0.2)$, $P(X > 0.2)$, $P(X < -0.2)$, $P(-0.2 < X < 0.2)$,
2. il quantile (di coda destra) di ordine 0.05 di X, cioè l'unico numero $z_{0.05}$ tale che $P(X > z_{0.05}) = 0.05$,
3. il valore di k tale che $P(-k < X < k) = 0.95$;
4. il quantile $z_{0.95}$ (di coda destra) di ordine 0.95 di X.

Esercizio 3.2.2 Le bilance da cucina prodotte dalla casa *xxx* sono tarate in modo tale da non aver errori sistematici. In realtà, l'errore effettivo di misurazione, espresso in grammi, non è sempre nullo, ma si può modellare come una variabile aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$. Prima di esse immesse sul mercato, le bilance sono controllate una a una e passano il controllo quelle per cui l'errore di misurazione (sia per eccesso sia per difetto) non supera i 2 grammi.

1. Si determini la percentuale di bilance che superano il controllo.
2. Di quanto è necessario aumentare il tetto dei 2 grammi, affinché la percentuale delle bilance che non superano il controllo si riduca all'1%?

Esercizio 3.2.3 Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità gaussiana di parametri $\mu = 4$ e $\sigma^2 = 25$.

1. Qual è il valore di $P(X \leq 5)$, $P(X > 3)$, $P(3 < X < 5)$?
2. Determinate il *quantile* (di coda destra) di ordine 0.05 di X, cioè, indicata con F_X la f.d.r. di X, determinate l'unico valore $q_{0.05}$ tale che $P(X > q_{0.05}) = 1 - F_X(q_{0.05}) = 0.05$.
3. Determinate il quantile (di coda destra) di ordine 0.95 di X.
4. Per quale valore di k, $P(2 - k < X < 6 + k) = 0.95$?

Esercizio 3.2.4 Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, 36)$ con μ incognito. Determinate μ sapendo che $P(X \leq 5) = 0.40$.

Esercizio 3.2.5 Le sferette di acciaio prodotte da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 5 mm; sono accettabili sferette aventi lunghezza entro i limiti di tolleranza $[4, 6]$. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono in realtà variabili aleatorie con densità gaussiana di media 5mm e varianza $(0.5)^2\text{mm}^2$.

1. Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza dati?
2. Potendo ricalibrare la linea di produzione, per quale valori della varianza la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza si riduce al 1%?

Esercizio 3.2.6 In un esame universitario il voto medio è 24 con una deviazione standard di 4 punti. Supponendo che i voti si distribuiscano secondo una gaussiana:

1. quanto vale la probabilità che un allievo riporti un voto superiore a 27?
2. Quanto vale la probabilità che un allievo riporti un voto inferiore a 22?
3. Qual è il voto superato dal 70% degli allievi, ma non dal restante 30%?
4. Qual è il voto non superato dal 90% degli allievi e superato dal restante 10%?

Esercizio 3.2.7 Il peso (in kg) degli uomini di 48 anni di una certa città può essere modellato come una variabile aleatoria gaussiana X. Si sa inoltre che il 12.3% degli uomini pesano più di 70 kg e il 6.3% pesa meno di 58 kg. Determinate media e varianza di X.

Esercizio 3.2.8 L'altezza degli uomini di una determinata città si può modellare come una variabille aleatoria gaussiana di parametri $\mu = 178$cm e deviazione standard $\sigma = 10$cm. Mentre, quella delle donne è una variabile aleatoria gaussiana di parametri $\mu = 168$cm e deviazione standard $\sigma = 15$cm. Inoltre, le donne costituiscono il 58% della popolazione della città oggetto di indagine.

1. Qual è la probabilità che l'altezza di un abitante della città mascherato fermato a caso ad un angolo di una strada (un giorno di carnevale) sia compresa fra 164 e 180 cm?

2. Se l'altezza della persona mascherata fermata è compresa fra 165 e 180 cm, qual è la probabilità che la persona scelta a caso sia un uomo?

Esercizio 3.2.9 Il tempo giornaliero, che uno studente scelto a caso della Sezione $[D-HZ]$ dedica allo studio di Calcolo delle Probabilità (CP) durante la preparazione dell'esame, è una variabile aleatoria gaussiana con media 5 ore e varianza 4 (ore^2).

1 Determinate la percentuale di studenti della Sezione $[D - HZ]$ che dedica giornalmente a CP meno di 6 ore.

Da un'indagine sulla Sezione $[I - QZ]$, risulta che il 60% degli studenti della Sezione $[I - QZ]$ dedica allo studio di CP durante la preparazione dell'esame più di 3 ore al giorno.

2 Ipotizzando che il tempo giornaliero dedicato da uno studente della Sezione $[I - QZ]$ a CP durante la preparazione dell'esame sia sempre una variabile aleatoria gaussiana di varianza 4 (ore^2), quanto vale la media di questa densità?

2 Calcolate ora anche per la Sezione $[I - QZ]$ la percentuale di studenti che dedica giornalmente a CP meno di 6 ore.

Supponiamo che la Sezione $[D - HZ]$ sia formata da 162 studenti e quella $[I - QZ]$ da 138.

4 Se uno studente viene estratto a caso dall'elenco di tutti gli studenti appartenenti alle due Sezioni, quanto vale la probabilità che dedichi allo studio di CP un tempo inferiore a 6?

Esercizio 3.2.10 Il 60% delle sferette d'acciaio dell'azienda *** sono prodotte dal macchinario A e il rimanente 40% dal macchinario B. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti da A sono variabili aleatorie con densità gaussiana di media 5mm e varianza 0.5^2mm^2; invece, le lunghezze reali di quelli prodotti da B hanno densità gaussiana di media 5mm e varianza 0.6^2mm^2. Se la lunghezza di una sferetta è nei limiti di tolleranza $[4, 6]$, la sferetta è ritenuta non difettosa.

1. Quale percentuale dei pezzi prodotti dal macchinario A non è difettosa, cioè è nei limiti di tolleranza $[4, 6]$?
2. Quale percentuale dei pezzi prodotti dal macchinario B non è difettosa?
3. Quale percentuale del totale dei pezzi prodotti dall'azienda *** non è difettosa?
4. Se una sferetta estratta a caso non è difettosa, qual è la probabilità che essa sia stata prodotta dal macchinario A?

Esercizio 3.2.11 Per trasmettere un messaggio binario ("0" o "1") da una sorgente A a una ricevente B tramite un canale (per esempio un filo elettrico), si decide di mandare un segnale elettrico di $+2$ Volt se il messaggio è "1" e di -2 Volt se il messaggio è "0". A causa di disturbi nel canale, se A invia il segnale $\mu = \pm 2$, B riceve un segnale $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore del canale. Alla ricezione di un qualunque segnale X si decodifica il messaggio con la seguente regola:

$$\text{se } X \geq 0.5 \text{ si decodifica "1"}$$
$$\text{se } X < 0.5 \text{ si decodifica "0".}$$

Si supponga inoltre che Z sia una variabile aleatoria assolutamente continua con densità gaussiana standard e che la probabilità di trasmettere "0" sia uguale alla probabilità di trasmettere "1".

1 Qual è la probabilità di decodificare "1", avendo inviato "0"?

2 Qual è la probabilità di decodificare "0", avendo inviato "1"?

3 Qual è la probabilità di decodificare "1"?

4 Avendo decodificato "1", qual è la probabilità che la decodifica sia esatta?

Esercizio 3.2.12 La potenza W dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale V applicata ai suoi capi, cioè

$$W = rV^2$$

dove r è una costante. Sia ora $r = 3$ e sia $V \sim \mathcal{N}(6, 1)$.
1. Calcolare $\mathrm{E}(W)$ e $P(W > 120)$.
2. Determinare funzione di ripartizione e densità di W.

3.3 Approssimazione gaussiana della funzione di ripartizione binomiale

Esercizio 3.3.1 Dall'esperienza passata ci si aspetta che l'esame xyz venga superato dal 75% degli allievi elettronici. Una classe costituita da 10 allievi elettronici sosterrà l'esame xyz. Se i risultati dei singoli studenti si ipotizzano indipendenti, quanto vale la probabilità che lo superi almeno il 70% di essi?

2. Come cambia la risposta se la classe è costituita da 140 studenti (sempre nell'ipotesi che i risultati dei singoli studenti siano indipendenti)?

Esercizio 3.3.2 Il 35% di tutto l'elettorato è a favore del candidato Tizio. In una sezione elettorale votano 200 persone ("scelte a caso") e sia X il numero di quelle che sono a favore di Tizio.

1 Quante schede ci sono a favore di Tizio in media in quella sezione?

2 Determinare la probabilità che X sia maggiore di 75 (scrivere la formula esplicita che assegna questa probabilità senza eseguire il calcolo numerico).

3 Determinare un valore approssimato della probabilità richiesta al punto precedente.

4 A votazione terminata, lo scrutatore compie lo spoglio delle schede: Tizio ha ricevuto 60 voti. Se si scelgono ora 10 schede (distinte) tra le 200, qual è la probabilità che tra esse ce ne siano esattamente 3 per Tizio? (Scrivere l'espressione esatta di tale probabilità).

Esercizio 3.3.3 Il tempo di esecuzione del programma xxx sul calcolatore yyy è compreso fra 60 e 120 minuti primi. Idealmente, esso può essere modellato come una variabile aleatoria X assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-60}{1800} & 60 \leq x \leq 120 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolate la probabilità che il calcolatore impieghi più di 90 minuti per eseguire il programma.

Su ciascuno di 50 calcolatori, tutti del tipo yyy, i cui tempi di esecuzione sono variabili aleatorie indipendenti lanciamo il programma xxx e, allo scadere dei 90 minuti, controlliamo se il programma è stato eseguito oppure no. Indichiamo con S il numero di programmi (su 50) eseguiti nei primi 90 minuti.

3. Determinate media, varianza e densità di probabilità di S.

4. Calcolate approssimativamente la probabilità che almeno il 40% dei programmi siano stati eseguiti nei primi 90 minuti.

Esercizio 3.3.4 Ogni chip prodotto in una certa fabbrica può essere difettoso, indipendentemente dal resto della produzione, con probabilità 0.2.

1 In un campione di 1000 chip, in media, quanti saranno difettosi?

2 Determinare un valore approssimato della probabilità che, tra i 1000 chips, il numero di quelli difettosi sia almeno 180 e non superi 225.

3 Determinare, approssimativamente, il più piccolo valore di k per il quale la probabilità di avere più di k chip difettosi su 1000 non superi 0.1.

Esercizio 3.3.5 In un esame la prova scritta consiste in un test composto da 5 domande su 5 argomenti diversi (una per argomento); per ciascuna di esse il test richiede allo studente di scegliere una fra le 5 risposte suggerite, delle quali una sola è corretta. Supponiamo che uno studente risponda a caso e che la valutazione del test venga fatta attribuendo il punteggio $+1$ a ogni risposta corretta e $-1/4$ a ogni risposta errata. Sia X il numero di risposte corrette del test.
1. Scrivere la densità di X
2. Calcolare la probabilità che lo studente totalizzi 2.5 punti
3. Quale punteggio lo studente otterrà in media?
4. Dare una valutazione (approssimata) della probabilità che, per 100 esaminandi che rispondono a caso, il totale delle risposte corrette sia compreso fra 96 e 104 (inclusi).

3.4 Soluzioni di alcuni esercizi del Capitolo 3

Esercizio 3.1.1 Sia X la variabile aleatoria che modella l'altezza dello studente scelto a caso. Per rispondere alla domanda, dobbiamo calcolare $\mathrm{E}(X)$. X è variabile aleatoria discreta con densità di probabilità data da

$$p_X(167) = \frac{2}{30},\ p_X(170) = \frac{5}{30},\ p_X(175) = \frac{3}{30},\ p_X(176) = \frac{5}{30}$$
$$p_X(180) = \frac{6}{30},\ p_X(185) = \frac{7}{30},\ p_X(190) = \frac{2}{30}.$$

Quindi
$$\mathrm{E}(X) = \sum_k x_k p_X(x_k) = 167\frac{2}{30} + 170\frac{5}{30} + 175\frac{3}{30} + 176\frac{5}{30} + 180\frac{6}{30} + 185\frac{7}{30} + 190\frac{2}{30} \simeq 178.13.$$

Esercizio 3.1.2 Sia X il numero di volte che in quattro lanci testa è seguita immediatamente da croce. Allora:
$$P(X=2) = P(TCTC) = 1/2^4,$$
$$P(X=0) = P(\{TTTT, CCCC, CCCT, CCTT, CTTT\} = \frac{5}{2^4},$$
$$P(X=1) = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{5}{2^4}\,\frac{10}{2^4}$$
e
$$\mathrm{E}(X) = \frac{10}{2^4} + 2\cdot\frac{1}{2^4} = 0.75$$

Esercizio 3.1.3

1 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(U - 1/2) = \mathrm{E}(U) - 1/2 = 1/2 - 1/2 = 90$
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(U) = 1/12$

2 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[(U-1/2)^2] = \mathrm{Var}(U) = 1/12$
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}((U-1/2)^4) - 1/144 = \int_0^1 (u-1/2)^4\,du - 1/144 = (1/5)(u-1/2)^5|_0^1 - 1/144 = 1/180$

3 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(1/(U+1/2)) = \int_0^1 (u+1/2)^{-1}\,du = \ln(u+1/2)|_0^1 = \ln 3$
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(1/(U+1/2)^2) - (\ln 3)^2 = \int_0^1 (u+1/2)^{-2}\,du - (\ln 3)^2 = -(u+1/2)^{-1}|_0^1 - (\ln 3)^2 = 4/3 - (\ln 3)^2 \simeq 0.1264$

4 Sappiamo dall'Esercizio 2.5.6 che $Y \sim \mathcal{E}(1)$, quindi $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) = 1$.

Esercizio 3.1.4

1 Deve essere $1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} cx^{-6}\,dx = \frac{c}{5}$, quindi $c = 5$.

2 Si trova
$$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} 5x^{-5}\,dx = \frac{5}{4} = 1.25,$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_1^{+\infty} 5x^{-4}\,dx = \frac{5}{3} \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{48} \simeq 0.1042.$$

3 $P(1.3 < X < 2) = \int_{1.3}^2 5x^{-6}\,dx = (1.3)^{-5} - 2^{-5} \simeq 0.2381.$

4 La funzione di ripartizione F_X è:
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - t^{-5} & t \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.1.5

1. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di vestiti confenzionati settimanalmente. Allora X ha media $\mathrm{E}(X) = 5$ e momento secondo $\mathrm{E}(X^2) = 30$. Per rispondere alla domanda, dobbiamo stimare $P(2 \leq X \leq 8)$. Avendo informazioni su media e varianza, usiamo la diseguaglianza di Chebychev:

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(2 - \mathrm{E}(X) \leq X - \mathrm{E}(X) \leq 8 - \mathrm{E}(X)) = P(2-5 \leq X - \mathrm{E}(X) \leq 8-5)$$
$$= P(-3 \leq X - \mathrm{E}(X) \leq 3) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{3^2} = 1 - \frac{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)}{9} = 1 - \frac{5}{9} \simeq 0.4445:$$

Quindi 0.4445 rappresenta un estremo inferiore per $P(2 \leq X \leq 8)$.

2. Con ragionamento analogo a quello del punto precedente otteniamo che

$$P(2 \leq X \leq 8) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{3^2} = 1 - \frac{5}{9(n+1)}$$

Risolvendo la seguente disequazione in n:

$$1 - \frac{5}{9(n+1)} \geq 0.8 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{16}{9} \simeq 1.777778,$$

concludiamo che la sartoria deve assumere almeno due altri operai.

Esercizio 3.1.6

1. f_a è una densità se e solo se $f_a \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f_a(x)dx = 1$. La prima condizione è soddisfatta per ogni $a > 1$. Inoltre

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx = ln(a)$$

implica $a = e$.

2. Sia X una v.a. con densità $f_X(x) = \frac{1}{x} I_{(1,\mathrm{e})}(x)$, come calcolato al punto precedente. La sua funzione di ripartizione è data, per ogni x, da $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$. Quindi $F_X(x) = 0$ per $x < 1$, $F_X(x) = ln(x)$ per $1 \leq x < e$ e $F_X(x) = 1$ per $x > e$.

3. $Y = g(X)$ con $g(x) = ln(x)$. La funzione $g(x)$ è derivabile con continuità con derivata diversa da zero su $(1, e)$ e $P(X \in (1, e)) = 1$. Quindi Y è assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| = \frac{1}{\mathrm{e}^y} I_{(1,\mathrm{e})}(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-y} I_{(0,1)}(y)\mathrm{e}^y = I_{(0,1)}(y).$$

Quindi Y ha densità uniforme su $(0, 1)$.

4. $\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_1^e \frac{x}{x}dx = e - 1.$

$\mathrm{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_1^e \frac{x^2}{x}dx = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1).$

Infine $\mathrm{E}(Y) = 1/2$ in quanto Y ha densità uniforme su $(0, 1)$.

Esercizio 3.1.7

1. Poiché $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}(1 - x^{-\lambda})$, allora necessariamente $\lambda > 0$. D'altro canto, per ogni $\lambda > 0$ $F(x)$ è funzione crescente e continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, F è una fdr per ogni $\lambda > 0$.

2. X ammette media varianza se $\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)\,dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx < \infty$. Nel nostro caso

$$f(x) = F'(x)\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$$

cosicché

$$\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)\,dx = \int_1^\infty x\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}\,dx = \int_1^\infty \frac{\lambda}{x^\lambda}\,dx < \infty$$

se e solo se $\lambda > 1$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_1^\infty x^2\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}\,dx = \int_1^\infty \frac{\lambda}{x^{\lambda-1}}\,dx < \infty$$

se e solo se $\lambda > 2$.

Esercizio 3.2.1

1. $P(X \leq 0.2) = \Phi(0.2) = 0.5793$, $P(X > 0.2) = 1 - \Phi(0.2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$; $P(X < -0.2) = P(X > 0.2) = 0.4207$; $P(-0.2 < X < 0.2) = 2\Phi(0.2) - 1 = 0.1586$;

2. Il *quantile (di coda destra) di ordine* α della funzione di ripartizione Φ è quel valore z_α tale che $P(X > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$. Essendo Φ strettamente crescente su $\mathbb{R}$, segue che $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$. Quindi dalle tavole della f.d.r. $N(0,1)$, otteniamo: $z_{0.05} = 1.644$.

3. Dalla simmetria della gaussiana standard (intorno allo zero) ricaviamo che $P(-k < X < k) = 2\Phi(k) - 1$. Imponendo $2\Phi(k) - 1 = 0.95$, ossia $\Phi(k) = (1 + 0.95)/2 = 0.975$, otteniamo che k è il quantile di coda destra di ordine 0.025: $k = 1.96$.

4. Osserviamo che se $\alpha > 0.5$, allora dalla monotonia di Φ e dal fatto che $\Phi(0) = 0.5$ segue che $z_\alpha < 0$. Inoltre, sempre dalla simmetria della densità $\mathcal{N}(0,1)$ discende che $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$, per ogni $\alpha \in (0,1)$. Quindi, $z_{0.95} = -z_{1-0.95} = -1.644$.

Esercizio 3.2.2

1. Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ la v.a. che indica l'errore di misurazione della bilancia. Allora, la percentuale di bilance che superano il controllo è dato da

$$P(|X| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 \times 0.9772499 - 1 = 0.9544997$$

2. Dobbiamo determinare k tale che $1 - P(|X| \leq 2 + k) = 0.01$:

$$1 - P(|X| \leq 2+k) = 1 - (2\Phi(2+k) - 1) = 2(1 - \Phi(2+k)) = 0.01 \text{ se e solo se } \Phi(2+k) = 1 - \frac{0.01}{2} = 0.995$$

cioè $2 + k$ è il quantile di coda destra di ordine 0.005 di Φ. Dalle tavole deriva che: $2 + k = 2.576$ e quindi, è necessario aumentare il tetto da 2 grammi a 2.576 grammi.

Esercizio 3.2.3 Dobbiamo innanzitutto ricondurci alla densità gaussiana standard: se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ allora

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

1. $P(X \leq 5) = \Phi\left(\frac{5-4}{5}\right) = \Phi(0.2) = 0.5793$;

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-4}{5}\right) = 1 - \Phi(-0.2) = \Phi(0.2) = 0.5793$;

$P(3 < X < 5) = P(X < 5) - P(X < 3) = \Phi\left(\frac{5-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{3-4}{5}\right) = 2\Phi(0.2) - 1 = 0.1586.$

2. Poiché $F_X(k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$, allora dobbiamo determinare $q_{0.05}$ tale che $\Phi\left(\frac{q_{0.05}-\mu}{\sigma}\right) = 0.95$, cioè $\frac{q_{0.05}-\mu}{\sigma} = z_{0.05}$, dove $z_{0.05}$ è il quantile di ordine 0.05 di Φ. Quindi

$$q_{0.05} = 5z_{0.05} + 4 = 5 \times 1.644 + 4 = 12.22$$

3. In questo caso,

$$q_{0.95} = 5z_{0.95} + 4 = 5(-z_{0.05}) + 4 = 5 \times (-1.644) + 4 = -4.22$$

4. $P(2 - k < X < 6 + k) = P\left(-\frac{2k}{5} < \frac{X-4}{5} < \frac{2+k}{5}\right) = 2\Phi\left(\frac{2+k}{5}\right) - 1 = 0.95$ se e solo se $(2+k)/5$ è il quantile di ordine $1 - (1 + 0.95)/2 = 0.025$ di Φ. Quindi $(2+k)/5 = 1.96$, da cui $k = 7.8$.

Esercizio 3.2.4 $0.4 = P(X \leq 5) = \Phi\left(\frac{5-\mu}{6}\right)$ implica $(5-\mu)/6 = z_{0.6}$ = quantile (di coda destra) della normale standard di ordine 0.6. Per la simmetria della normale standard: $z_{0.6} = -z_{1-0.6} = -z_{0.4} = -0.2533$ da cui $\mu = 6.52$.

Esercizio 3.2.5 Lunghezza dei pezzi (misurata in mm): $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, $\mu = 5$, $\sigma = 0.5$. Poniamo $Z = (X - \mu)/\sigma$.

1. Si chiede

$$\begin{aligned} P(\{X<4\}\cup\{X>6\}) &= P(X<4)+P(X>6]) = \\ &= P\left(Z<\frac{4-5}{0.5}\right)+P\left(Z>\frac{6-5}{0.5}\right) = P(Z<-2)+P(Z>2) \\ &= 2\Big(1-\Phi(2)\Big) \simeq 2\times 0.02275 = 0.04550 = 4.55\% \end{aligned}$$

2. Imponendo

$$0.99 = P(4\le X\le 6) = P\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z\le\frac{1}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)-1\,;$$

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.995 \qquad \frac{1}{\sigma} = z_{0.005}\simeq 2.5758\,, \qquad \sigma\simeq\frac{1}{2.5758}\simeq 0.3882;$$

otteniamo che la varianza richiesta è $\sigma^2 = 0.1507\text{mm}^2$.

Esercizio 3.2.6 Sia $X\sim\mathcal{N}(24,4^2)$ la v.a. che modella un voto universitario. Allora

1. la probabilità che un allievo riporti un voto superiore a 27 vale $P(X>27)\simeq 0.22663$
2. la probabilità che un allievo riporti un voto inferiore a 22 vale $P(X<22)=P(X\le 22)\simeq 0.30854$
3. Stiamo cercando il quantile di coda destra $q_{0.7}$ della f.d.r. $\mathcal{N}(24,4^2)$ di ordine 0.7 che è dato da $q_{0.7}=4z_{0.7}+24\simeq -4\times 0.5244+24\simeq 21.9$
4. Stiamo cercando il quantile di coda destra $q_{0.1}$ della f.d.r. $\mathcal{N}(24,4^2)$ di ordine 0.1 che è dato da $q_{0.1}=4z_{0.1}+24\simeq 4\times 1.28+24\simeq 29.13$

Esercizio 3.2.7 I dati a nostra disposizione si possono così sintetizzare:

$$\begin{cases} P(X>70) = 1-\Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right) = 12.3\% \\ P(X<58) = \Phi\left(\frac{58-\mu}{\sigma}\right) = 6.3\% \end{cases} = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{70-\mu}{\sigma}\right) = 87.3\% \\ \Phi\left(\dfrac{58-\mu}{\sigma}\right) = 6.3\% \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{70-\mu}{\sigma} = z_{0.123} =\simeq 1.1601 \\ \dfrac{58-\mu}{\sigma} = z_{(100-6.3)\%} = z_{0.937} = -z_{0.063}\simeq -1.5301 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 64.83 \\ \sigma^2 = (4.46)^2\simeq 19.897 \end{cases}$$

Esercizio 3.2.8 Sia $X\sim\mathcal{N}(178,100)$ l'altezza degli uomini e $Y\sim\mathcal{N}(168,225)$ l'altezza delle donne, E l'evento="*l'altezza di una persona fermata a caso ad un angolo di una strada il giorno di carnevale con una maschera sul viso è compresa fra 165 e 180* cm" e U l'evento="*Una persona scelta a caso nella città è uomo*" .

1 Per il teorema delle probabilità totali,

$$P(E) = P(E\mid U)P(U)+P(E\mid U^c)P(U^c).$$

Dai dati del problema abbiamo $P(U)=0.42$. Inoltre,

$$\begin{aligned} P(E\mid U) = P(X\in[165,180]) &= \Phi\left(\frac{180-178}{10}\right)-\Phi\left(\frac{165-178}{10}\right) = \\ &= \Phi(0.2)-\Phi(-1.3) = 0.5793-0.0968 = 0.4825 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(E\mid U^c) = P(Y\in[165,180]) &= \Phi\left(\frac{180-168}{15}\right)-\Phi\left(\frac{165-168}{15}\right) = \\ &= \Phi(0.8)-\Phi(-0.2) = 0.7881-0.4207 = 0.3674. \end{aligned}$$

Quindi, $P(E) = 0.4825\times 0.42+0.3674\times 0.58 = 0.4157$.

2 Per il teorema di Bayes,

$$P(U \mid E) = \frac{P(E \mid U)P(U)}{P(E)} = 0.4825 \times \frac{0.42}{0.4157} = 0.4875.$$

Esercizio 3.2.9

1. Sia X_D la variabile aleatoria che indica il tempo che uno studente della Sezione $[D - HZ]$, TEL dedica allo studio di CP. Allora $X_D \sim \mathcal{N}(5, 4)$ e la percentuale di studenti della Sezione $[D - HZ]$ che dedica giornalmente a CP meno di 6 ore è data da:

$$P(X_D < 6) = P(X_D \leq 6) = \Phi\left(\frac{6-5}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(0.5) \simeq 0.6915$$

2. Sia X_I la variabile aleatoria che indica il tempo che uno studente della Sezione $[I - QZ]$, TEL dedica allo studio di CP. Allora $X_D \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$ e μ è tale che

$$P(X_I > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sqrt{4}}\right) = 0.6 \ \text{ sse } \ \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sqrt{4}}\right) = 0.4 \ \text{ sse } \ \frac{3-\mu}{\sqrt{4}} = q_{0.4}$$

dove $q_{0.4}$ è il quantile di ordine 0.4 di Φ. Dalla simmetria di Φ, deduciamo che $q_{0.4} = -q_{0.6}$ e dalle tavole di Φ: $q_{0.6} \simeq 0.25$. Pertanto:

$$\mu = 3 + 0.25 \cdot 2 = 3.5.$$

3. $P(X_I < 6) = P(X_I \leq 6) = \Phi\left(\frac{6-3.5}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(1.25) \simeq 0.8944$

4. Siano A= *"Lo studente scelto a caso dedica a CP meno di 6 ore al giorno"*, D =*"lo studente scelto a caso è della Sezione* $[D - HZ]$" e I =*"lo studente scelto a caso è della Sezione* $[I - QZ]$*"*. Allora $P(D) = \frac{162}{162+138} = 0.54$, $P(I) = \frac{138}{162+138} = 0.46$, $P(A|D) = 0.6915$ e $P(A|I) = 0.8944$. Per la formula delle probabilità totali:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|I)P(I) = 0.6915 \cdot 0.54 + 0.8944 \cdot 0.46 = 0.784834 \ \blacksquare$$

Esercizio 3.2.10 Sia X_A la lunghezza di una sferetta prodotta da A e X_B la lunghezza di una sferetta prodotta da B. Allora $X_A \sim \mathcal{N}(5, 0.5^2)$ e $X_B \sim \mathcal{N}(5, 0.6^2)$.

1 Si chiede: $P(4 \leq X_A \leq 6) = \Phi\left(\frac{6-5}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0.5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$

2 Si chiede: $P(4 \leq X_B \leq 6) = \Phi\left(\frac{6-5}{0.6}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0.6}\right) = \Phi(5/3) - \Phi(-5/3) = 2\Phi(5/3) - 1 \simeq 2 \times \Phi(1.67) - 1 \simeq 2 \times 0.9525 - 1 = 0.905$

3 Siano A, B, C gli eventi dati da A= *"la sferetta è prodotta dal macchinario A"*, B =*"la sferetta è prodotta dal macchinario B"* e C =*"la lunghezza di una sferetta prodotta dall'azienda *** è nei limiti di tolleranza* $[4, 6]$". Si chiede di calcolare $P(C)$; usando la formula delle probabilità totali si ottiene

$$\begin{aligned} P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = P(4 \leq X_A \leq 6) \times 0.60 + P(4 \leq X_B \leq 6) \times 0.40 = \\ = 0.9544 \times 0.60 + 0.905 \times 0.40 = 0.93464 \end{aligned}$$

4 Si chiede $P(A|C)$; usando la formula di Bayes abbiamo:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{P(4 \leq X_A \leq 6) \times 0.60}{P(C)} = \frac{0.9544 \times 0.60}{0.93464} \simeq 0.6127.$$

Esercizio 3.2.11 Poniamo T_1, D_1 gli eventi rispettivamente, "Viene trasmesso "1" " e "Viene decodificato "1" ".

1. $P(D_1|T_1^c) = P(-2 + Z \geq 0.5) = 1 - \Phi(2.5) \simeq 0.0062$.
2. $P(D_1^c|T_1) = P(2 + Z < 0.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668$.
3. Applicando la formula delle probabilità totali si ha:
$$P(D_1) = P(D_1|T_1)P(T_1) + P(D_1|T_1^c)P(T_1^c) \simeq \frac{1 - 0.0668}{2} + \frac{0.0062}{2} = 0.4697$$
4. Applicando la formula Di Bayes:
$$P(T_1|D_1) = \frac{P(D_1|T_1)P(T_1)}{P(D_1)} = \frac{1 - 0.0668}{0.4697 \cdot 2} = 0.9934$$

Esercizio 3.2.12
1. $\mathrm{E}(W) = 3\mathrm{E}(V^2) = 3(\mathrm{Var}(V) + [\mathrm{E}(V)]^2) = 3(1 + 36) = 111$.
$P(W > 120) = P(3V^2 > 120) = P(V^2 > 40) = P(|V| > \sqrt{40}) = P(V > \sqrt{40}) + P(V < -\sqrt{40}) = 1 - \Phi\left(\sqrt{40} - 6\right) + \Phi\left(-\sqrt{40} - 6\right) \simeq 1 - \Phi(0.32) + \Phi(-12.32) \simeq 1 - 0.62552 = 0.37448$.
2. $F_W(w) = 0$ se $w \leq 0$. Invece, per $w > 0$ abbiamo:
$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(V \leq \sqrt{w/3}) - P(V \leq -\sqrt{w/3}) \\ &= \Phi(\sqrt{w/3} - 6) - 1 + \Phi(\sqrt{w/3} + 6) \end{aligned}$$

derivando $F_W(w)$, quando $w \neq 0$, otteniamo la densità:
$$f_W(w) = \frac{\phi(\sqrt{w/3} - 6) + \phi(\sqrt{w/3} + 6)}{2sqrt3w} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(w).$$

Esplicitamente:
$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi w}} [\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{w/3}-6)^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{w/3}+6)^2}{2}}] \mathbf{1}_{(0,\infty)}(w).$$

Esercizio 3.3.1
1. Per ogni allievo della classe posso pensare pari a 0.75 la probabilità che superi l'esame. Allora X che indica il numero di studenti che superano la prova su 10, tenuto conto anche dell'indipendenza dei risultati dei singoli studenti, ha densità binomiale di parametri (10,0.75). Essendo 70% di 10 uguale a 7, allora per rispondere a 1. calcoliamo $P(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} 0.75^k 0.25^{10-k} \simeq 0.7759$.
2. Valgono ancora le ipotesi del punto 1., ma ora gli allievi in classe sono 140. Quindi Y=numero di studenti che superano la prova su 140 ha densità binomiale di parametri (140,0.75). Essendo 70% di 14=98, allora per rispondere a 2. calcoliamo approssimativamente $P(Y \geq 98)$, usando il teorema centale del limite. Con la correzione di continuità abbiamo:
$$\begin{aligned} P(Y \geq 98) &= P(Y > 97) = 1 - P(Y \leq 97) = 1 - P(Y \leq 97 + 0.5) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{97 + 0.5 - 105}{\sqrt{26.25}}\right) = 1 - \Phi(-1.46385) = \Phi(1.46385) \simeq 0.9284. \end{aligned}$$

Esercizio 3.3.2

1 $\mathrm{E}(X) = 200 \times 0.35 = 70$.

2 $X \sim Bin(200, 0.35)$. Quindi $P(X > 75) = \sum_{k=76}^{200} \binom{200}{k} 0.35^k 0.65^{200-k}$

3 Usando un'approssimazione gaussiana, basata sul Teorema di De Moivre-Laplace si ottiene

$$P(X > 75) = P\left(\frac{X-70}{\sqrt{200 \times 0.35 \times 0.65}} > \frac{75-70}{\sqrt{200 \times 0.35 \times 0.65}}\right) \simeq$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{75.5-70}{\sqrt{200 \times 0.35 \times 0.65}}\right) \simeq 1 - \Phi(0.815) \simeq 1 - \Phi(0.82) \simeq 1 - 0.7938 = 0.2162$$

(Abbiamo applicato la correzione di continuità)

4 Sia Y il numero delle schede a favore di Tizio tra le 10 estratte. Allora Y ha densità ipergeometrica e

$$P(Y = 3) = \frac{\binom{60}{3}\binom{140}{7}}{\binom{200}{10}}$$

Esercizio 3.3.3

1. $P(X > 90) = \int_{90}^{120} f_X(x)\, dx = \int_{90}^{120} \frac{x-60}{1800}\, dx = \frac{3}{4} = 0.75$

2. Sia X_i la variabile aleatoria che modella il tempo di esecuzione del programma xxx lanciato sull'i-esimo calcolatore del tipo yyy e Y_i la variabile aleatoria che vale 1 se questo programma è eseguito nei 90 minuti e vale 0 se non lo è, per $i = 1, \dots, 50$. Allora $Y_1, \dots, Y_{50}$ sono i.i.d.$\sim Be(p)$, con

$$\begin{aligned} p &= P(Y_1 = 1) \\ &= P\{\text{“Il programma lanciato sul calcolatore 1 è eseguito in 90 minuti”}\} \\ &= P(X_1 \leq 90) = 1 - 0.75 = 0.25 \end{aligned}$$

Possiamo rappresentare S in termini di $Y_1, \dots, Y_{50}$ come $S = \sum_{j=1}^{50} Y_j$, quindi $S \sim \mathcal{B}\rangle\backslash(50, 0.25)$. Segue che

$$\mathrm{E}(S) = 50 \cdot 0.25 = 12.5, \qquad \mathrm{Var}(S) = 50 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 9.375$$

3. Il 40% di 50 è 20; dobbiamo calcolare $P(S \geq 20) = 1 - P(S \leq 19)$. Applichiamo il Teorema Centrale del Limite per approssimare questa quantità e usiamo la correzione di continuità:

$$P(S \leq 19) = P(S \leq 19.5) = P\left(\frac{S-12.5}{\sqrt{9.375}} \leq \frac{19.5-12.5}{\sqrt{9.375}}\right) \simeq$$
$$\simeq P\left(\frac{S-12.5}{\sqrt{9.375}} \leq 2.2861\right) \simeq \Phi(2.29) \simeq 0.9889$$

quindi la probabilità cercata vale approssimativamente: $P(S \geq 20) \simeq 1 - 0.9889 = 0.0111$.

Esercizio 3.3.4 Sia X_i la v.a. che vale 1 se lo $i-$esimo chip esaminato funziona, 0 altrimenti. Allora $S = X_1 + \cdots + X_{1000}$ è il numero di pezzi funzionanti su 1000 considerati. Per l'ipotesi di indipendenza dei difetti, S ha densità $Binom(1000, 0.2)$.

1 $E(S) = 1000 \times 0.2 = 200$. Il numero medio di chip difettosi è 200.

2 Si tratta di calcolare $P(180 \leq S \leq 225)$. Possiamo usare l'approssimazione fornita dal TCL adottando la correzione di continuità perchè S è discreta. Si ha $Var(S) = 1000 \times 0.2 \times 0.8 = 160$ e

$$\begin{aligned} &P(180 \leq S \leq 225) = P(179 < S \leq 225) \\ &= P(S \leq 225.5) - P(S \leq 179.5) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{225.5-200}{\sqrt{160}}\right) - \Phi(\frac{179.5-200}{\sqrt{160}}) \\ &\simeq \Phi(2.02) - \Phi(-1.62) \simeq 0.9783 - (1 - 0.9474) = 0.9257. \end{aligned}$$

3 $P(S > k) \leq 0.1 \Leftrightarrow P(S \leq k) \geq 0.9$. Usando, come nel punto precedente, l'approssimazione fornita dal TCL con correzione di continuità:

$$P(S \leq k) \simeq \Phi\left(\frac{k+0.5-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \Phi\left(\frac{k+0.5-200}{\sqrt{160}}\right) \geq 0.9 \Leftrightarrow \frac{k-199.5}{\sqrt{160}} \geq 1.2815$$

e quindi

$$k \geq 215.7088 \quad \text{cioè} \quad k_{min} = 216.$$

Esercizio 3.3.5

1. Poiché lo studente risponde a caso, allora si tratta di una sequenza di 5 prove Bernoulliane con probabilità di successo $1/4 = 0.$ e quindi $X \sim \mathbf{Bin}(5, 0.2)$

2. Sia Y il punteggio totalizzato dallo studente, allora $Y = (5/4)(X-1)$ e $P(Y = 2.5) = P(X = 3) = 0.0512$

3. Il punteggio che lo studente otterrà in media è dato da $\mathrm{E}(Y) = (5/4)(\mathrm{E}(X) - 1) = (5/4)(5 \cdot 0.2 - 1) = 0$

4. Applicando il TCL alla f.d.r. di $W \sim \mathbf{Bin}(500, 0.2)$, che modella il numero totale di risposte corrette di tutti i 100 esaminandi abbiamo $P(96 \leq W \leq 104) \simeq 2\Phi(4.5/\sqrt{80}) - 1 \simeq 0.3851$.

Capitolo 4

Vettori aleatori

4.1 Vettori aleatori discreti

Esercizio 4.1.1 Si consideri il vettore aleatorio (X,Y) discreto che ha la seguente densità:

	Y=-1	Y=0	Y=1	
X=-15	0	2/36	0	
X=-1	4/36	2/36	0	
X=0	1/36	26/36	1/36	

(0) Si determinino $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$.
(1) Si calcoli la $\mathrm{cov}(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$: X, Y sono correlate?
(2) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?
(3) Si calcoli $P((X,Y) \in \{(x,y) : x - |y| = -1\})$.
(4) Se $U = \dfrac{X+Y}{2}$ e $V = Y - X$, qual è la densità congiunta di U e V? Quanto vale $\mathrm{cov}(U,V)$?

Esercizio 4.1.2 Un'urna contiene 3 biglie rosse, due biglie bianche ed una verde. Si estraggono due biglie senza reinserimento. Siano R il numero di biglie rosse estratte e B il numero di biglie bianche estratte.
(1) Qual è la densità del vettore (R,B)?
(2) Qual è la densità marginale di B? Quale quella di R?
(3) Calcolate media e varianza di B.
(4) Calcolare la covarianza di R e B e il coefficiente di correlazione lineare. B e R sono variabili aleatorie non correlate?
(5) Calcolare $\mathrm{Var}(R-B)$.

Esercizio 4.1.3 Sia (X,Y) un vettore aleatorio discreto con densità data da:

$X \setminus Y$	-1	0	2	6	
-2	1/9	1/27	1/27	1/9	
1	2/9	0	1/9	1/9	
3	0	0	1/9	4/27	

Calcolare:
1. la probabilità che Y sia pari. (si consideri 0 un numero pari);
2. la probabilità che XY sia dispari;
3. $P(X \geq Y), P(X > 0, Y \geq 0)$ e $P(|XY| \geq 2)$;
4. $\mathrm{cov}(X,Y)$.

5. Determinare le densità marginali di X, Y.
6. Determinare un vettore aleatorio $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ che abbia le stesse densità marginali di (X, Y), ma le cui componenti siano indipendenti.

Esercizio 4.1.4 Si lanciano in successione tre monete equilibrate. Sia X il numero di esiti "testa" per le prime due monete e Y il numero di esiti "croce" per le ultime due.
1. Si determini la densità del vettore (X, Y).
2. Si determinino $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ e $\rho(X, Y)$.
3. X e Y sono indipendenti? Perché?
4. Quanto vale $P(X < Y)$?

5.[1] Le tre monete equilibrate sono ora lanciate in successione 100 volte. Quanto vale la probabilità che sia almeno pari a 35 il numero di lanci in cui si ottiene un numero di teste per le prime due *minore* del numero di croci per le ultime due?

Esercizio 4.1.5 Le variabili aleatorie discrete X, Y hanno la seguente densità congiunta:

$X \setminus Y$	0	1	
0	1/3	1/3	
1	1/12	1/12	
2	1/12	1/12	

X, Y sono indipendenti?

Esercizio 4.1.6 Da un'urna contenente tre palline numerate da 1 a 3 vengono effettuate due estrazioni in successione e senza rimpiazzo. Sia X il numero della prima pallina estratta ed Y il più grande dei due numeri estratti.
1. Trovare la densità del vettore (X, Y).
2. Trovare la densità di $(X, Y - X)$.
3. Trovare la densità di $Y - X$.
4. Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Esercizio 4.1.7 Il vettore aleatorio discreto (X, Y) ha densità

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	1/3	0	1/3	
1	0	1/3	0	

1. Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$. X, Y sono scorrelate? Sono indipendenti?
2. Se $U = \frac{1}{2}(X + Y)$ e $Z = \frac{1}{2}(Y - X)$, qual è la densità di (U, Z)?
3. Calcolare $\mathrm{cov}(U, Z)$.

Esercizio 4.1.8 Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate (ma funzionanti) tra quelle scelte.

1. Determinare la densità di (X, Y) e le densità marginali di X e di Y.

2. Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$. X ed Y sono indipendenti?

3. Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

[1]Svolgere nell'esercitazione dopo i teoremi limite

Esercizio 4.1.9 Siano X, Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p e indipendenti. Posto

$$Z = X(1-Y) \quad \text{e} \quad W = 1 - XY$$

1. qual è la densità del vettore (Z, W)?
2. Quali sono le densità marginali di Z e W?
3. Per quali valori di p Z e W hanno la stessa densità?

Esercizio 4.1.10 Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1. Costruite la tabella della densità congiunta di R e V.
2. Determinate la densità di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolate $\mathrm{E}(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$.

Esercizio 4.1.11 Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti entrambe geometriche di parametro $p = 0.2$. Siano poi $U = 0.5X + 0.1Y$ e $V = bX + Y + c$. Usando le proprietà di varianza e covarianza:

1. determinate $\mathrm{Var}(U)$ e $\mathrm{Var}(V)$;
2. determinate $\mathrm{cov}(U, V)$;
3. stabilite per quali valori dei parametri b, c le variabili aleatorie U, V non sono correlate, quindi calcolate $\mathrm{Var}(U - V)$ in questo caso.

Esercizio 4.1.12 Sia X il voto finale conseguito all'esame di `CP` e Y quello conseguito all'esame di `ST`, entrambi espressi in decimi. Sulla base di dati passati, riteniamo che la densità congiunta dei voti X e Y sia quella di seguito riportata:

$X \setminus Y$	6	7	8	9	10	
6	0.057	0.080	0.063	0.017	0.002	
7	0.032	0.070	0.141	0.087	0.035	
8	0	0.029	0.088	0.114	0.086	
9	0	0	0.008	0.028	0.048	
10	0	0	0	0	0.015	

1. Calcolate la probabilità che un allievo consegua un voto finale in `ST` al più pari a quello in `CP`.
2. Considerate ora una classe di 90 allievi. Calcolate in modo approssimato, avendo cura di specificare le ipotesi assunte, la probabilità che al più 30 allievi della classe conseguano in `ST` un voto al più pari a quello in `CP`.
3. Calcolate $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione lineare $\rho(X, Y)$.
4. Nicola ha già sostenuto l'esame `CP` "prendendo" 8 ma deve ancora "dare" `ST`. Proponete a Nicola una previsione dell'esito in `ST`.

4.2 Vettori aleatori assolutamente continui

Esercizio 4.2.1 Un sistema in parallelo è costituito da due componenti, i cui tempi di guasto espressi in minuti sono rappresentati dal vettore assolutamente continuo (S,T) che ha densità:

$$f_{(S,T)}(s,t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & 0 < s < t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Qual è la probabilità che il sistema funzioni ancora dopo 10 minuti dall'attivazione?
2. Come cambia la risposta al punto 1. se i componenti sono collegati in serie?

Esercizio 4.2.2 Sia (X,Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ e } y \in \mathbb{R} \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

1. Determinate le densità marginali f_X e f_Y e stabilite se X, Y sono indipendenti.
2. Sia $V = X + Y^2$. Calcolate $\mathrm{E}(V)$.

Esercizio 4.2.3 Sia (X,Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con funzione di ripartizione $F_{X,Y}$ data da

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \text{ o } y \le 0 \\ 1 - \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{se } 0 < x < y \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} - \lambda y \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{se } 0 < y < x \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$. Si determinino le funzioni di ripartizione marginali F_X, F_Y e le corrispondenti funzioni di densità.

Esercizio 4.2.4 Il vettore aleatorio assolutamente continuo (X,Y) ha densità:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Quali sono le densità marginali di X e Y?
2. Calcolare $\mathrm{E}(X+Y)$.
3. Determinare la densità di $X+Y$.
4. Calcolare $P(X \le 3, Y \le 2)$.
5. X ed Y sono indipendenti?
6. Trovare una funzione di densità congiunta diversa da $f_{X,Y}$ che abbia le stesse marginali.

Esercizio 4.2.5 Se le variabili aleatorie X, Y hanno funzione di densità congiunta

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-2y} \mathbf{1}_{(-1,1)}(x) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)$$

X, Y sono indipendenti?

Esercizio 4.2.6 Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità uniforme sul triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (2,0)$.

1. Calcolate la densità marginale di X.
2. Quanto vale $\mathrm{E}(X)$?
3. Quanto vale $P(X > 2Y)$?
4. Quanto vale $P(X > 1, Y \le 1/2)$?

Esercizio 4.2.7 Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità data da

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Determinare la densità di $X + Y$.
2. Calcolare le densità marginali di X e di Y. X e Y sono variabili aleatorie indipendenti?
3. Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$.
4. Calcolare media e varianza di $X + Y$ e di $X - Y$.
5. Calcolare la media di $\dfrac{1}{X+Y}$.

Esercizio 4.2.8 Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+y) & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

0. Calcolare $P(2X < Y)$. [Risp. 17/80]
1. determinare $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.5)$;
2. determinare $\mathrm{cov}(X, Y)$;
3. X, Y sono indipendenti?
4. Determinare le funzioni di densità marginali di X e Y.
5. Trovare una diversa funzione di densità di probabilità congiunta avente le stesse marginali.
6. determinare $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$.
7. Quanto vale $\mathrm{Var}(X + Y)$?

Esercizio 4.2.9 Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità data da

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (x+y) & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare le densità marginali di X e Y.
2. Calcolare media e varianza di X e di Y.
3. Calcolare la covarianza di X e Y.
4. Calcolare media e varianza di $X - Y$ e $X + Y$.
5. Calcolare $\mathrm{E}\left(\dfrac{10X}{X+Y}\right)$

Esercizio 4.2.10 Sia (X, Y) un vettore aleatorio bidimensionale assolutamente continuo con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) I_{(0,2)}(x) I_{(2,4)}(y).$$

1. Determinare le densità marginali di X e di Y.
2. Determinare $\mathrm{E}(X + Y)$.
3. Determinare $\mathrm{E}(XY)$.
4. Le variabili aleatorie sono indipendenti?

Esercizio 4.2.11 Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Determinate le densità marginali f_X e f_Y.

2. Stabilite se X, Y sono indipendenti, giustificando opportunamente la risposta.

3. Sia $V = \dfrac{1}{XY}$. Calcolate $\mathrm{E}(V)$.

Esercizio 4.2.12 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy + cx & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è un numero.

1. Verificare che f è una densità di probabilità per $c = 1/2$.

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità f con $c = 1/2$. Calcolare le densità marginali di X, Y. X, Y sono indipendenti?

3. Calcolare $E\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

4.3 Minimo e Massimo di variabili aleatorie i.i.d.

Esercizio 4.3.1 Siano $X_1, \ldots, X_n$ n variabili aleatorie indipendenti con la stessa funzione di ripartizione F. Siano $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $W = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Qual è la funzione di ripartizione di Z?
2. Qual è la funzione di ripartizione di W?
3. Se F è assolutamente continua con densità f, qual è la densità di Z?
4. Se F è assolutamente continua con densità f, qual è la densità di W?

Esercizio 4.3.2 Un sistema in parallelo è costituito da due componenti indipendenti i cui tempi di guasto espressi in minuti, chiamiamoli S e T, sono entrambi variabili aleatorie assolutamente continue con densità esponenziale di parametro $\lambda = 0.2$.

1. Qual è la probabilità che il sistema funzioni ancora dopo 10 minuti dall'attivazione?
2. Come cambia la risposta al punto 1. se i componenti sono collegati in serie?

Esercizio 4.3.3 Due giocatori A e B lanciano ciascuno un dado equilibrato finchè non ottengono 6. Se i giocatori impiegano lo stesso numero di lanci, il gioco finisce in parità, altrimenti vince chi ha effettuato meno lanci.

1. Qual è la probabilità che il gioco finisca con k lanci?
2. Qual è la probabilità che il gioco finisca in parità?
3. Qual è la probabilità che vinca il giocatore A?

Esercizio 4.3.4 Si lanciano due dadi equi e si osservano i numeri che escono. Sia U il valore minimo fra i due numeri usciti e W il massimo. Si determini la densità del vettore aleatorio (U, W).

4.4 Vettori gaussiani

Esercizio 4.4.0 Sia $(X_1, \ldots, X_3)^T$ un vettore gaussiano con vettore delle medie $\boldsymbol{\mu} = (-1, 0, 2)^T$ e matrice di covarianza $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Qual è la densità del vettore $(X_1, X_2)^T$?
2. X_1, X_3 sono indipendenti?
3. Qual è la densità di $aX_1 + bX_2 + cX_3 + d$?

Esercizio 4.4.1 Siano $Z_1, Z_2 \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ e $X_1 = 2Z_1 + Z_2$ e $X_2 = 3Z_1 - 6Z_2 + 5$.

1. Calcolate $\mathrm{Var}(X_1), \mathrm{Var}(X_2)$ e $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.
2. Calcolate $\mathrm{E}(X_2(1 - X_1))$.
3. Calcolate $\mathrm{E}(5X_1 - 2X_2)$ e $\mathrm{Var}(5X_1 - 2X_2)$.
4. Qualè la densità della variabile aleatoria $Y = 5X_1 - 2X_2$? [Risp. $\mathcal{N}(-10, 305)$]
5. Qual è la densità del vettore aleatorio (X_1, X_2)?

Esercizio 4.4.2 Sia $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vettore gaussiano con vettore delle medie $\boldsymbol{b}$ e matrice di covarianza C. Qual è la densità della variabile aleatoria $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$, se $a_j \neq 0$ per qualche j? [Risp. $Y \sim \mathcal{N}(\sum_{j=1}^n a_j b_j, \sum_{j=1}^n a_j^2 c_{jj} + \sum_{i \neq j} a_i a_j c_{ij}$]

Esercizio 4.4.3 Siano $X_1, X_2, X_3 \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. Consideriamo le variabili aleatorie Y_1, Y_2, Y_3 ottenute mediante le seguenti trasformazioni lineari:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\
Y_2 &= 2X_1 + 3X_2 + X_3 \\
Y_3 &= 3X_1 + 1X_2 + 2X_3
\end{aligned}
$$

1. Calcolate le medie di Y_1, Y_2, Y_3.
2. Calcolate la matrice di covarianza del vettore (Y_1, Y_2, Y_3)
3. Qual è la densità del vettore (Y_1, Y_2, Y_3)?
4. Sia $Z = (Y_1 + Y_2 + 1)^3$. Calcolate $P(Z > 5)$.

Esercizio 4.4.4 Sia $(X, Y)^T$ un vettore aleatorio gaussiano con vettore delle medie $(0,0)^T$ e matrice di covarianza $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$. $X + 2Y$ e $X - 2Y$ sono indipendenti? Qual è la densità di $X - 2Y$? E quella di $X + 2Y$?

Esercizio 4.4.5 Il peso e l'altezza delle donne americane in età giovanile (misurato rispettivamente in chilogrammi e centimetri) si può modellizzare con un vettore aleatorio gaussiano (che in seguito supporremo per semplicità adimensionale) $\begin{pmatrix} X_p \\ X_a \end{pmatrix}$ di media $m = \begin{pmatrix} 57 \\ 165 \end{pmatrix}$ e matrice di covarianza $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

La regola più semplice per calcolare il peso forma, che in questo modello è rappresentato dalla variabile aleatoria X_i, è la seguente:

$$X_i = X_a - 110$$

1. Si calcoli il coefficiente di correlazione fra X_p e X_i.
2. Si determini la densità di $X_i - X_p$.
3. Si determini la percentuale di donne americane in età giovanile che supera il peso forma.

Esercizio 4.4.6 Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti e gaussiane tali che $X \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$ $(\lambda > 0)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Definiamo $U = X + \sqrt{\lambda} Y$ e $V = X - \sqrt{\lambda} Y$.

1. Determinate le densità marginali di U e V.
2. Determinate $\mathrm{cov}(U, V)$. U e V sono indipendenti?
3. Determinate per quali valori di λ la seguente disuguaglianza è vera: $P(U \leq 0, V \leq 1) \leq \dfrac{3}{8}$.

Esercizio 4.4.7 Sia X una variabile aleatoria normale di media 1 e varianza 2; sia Y una variabile aleatoria indipendente da X, normale di media 4 e varianza 4. Si introduca la variabile aleatoria $W = X - \frac{Y}{2}$. Si calcoli $P\left(-2.5 \leq W \leq 0.5\right)$.

4.5 Teorema centrale del limite

Esercizio 4.5.1 Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.

1. Calcolare $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.
2. Calcolare in modo approssimato la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.
3. Quante volte bisogna approssimativamente lanciare i due dadi affinché la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte sia maggiore di 0.5?

Si consideri l'esperimento di lanciare tre dadi contemporaneamente 300 volte e si definisca la variabile aleatoria Y che conta il numero di volte in cui si è ottenuto un triplo 1.

4. Calcolare in maniera approssimata la probabilià che si verifichino al più 2 tripli 1.

Esercizio 4.5.2 Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con densità di Poisson di parametro 2 e sia $\bar{X}_n$ la media campionaria delle prime n, cioè $\overline{X}_1 = X_1, \overline{X}_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}, \ \dots, \ \overline{X}_n = \dfrac{\sum_{j=1}^n X_j}{n}$. Calcolate:

1. il valore esatto di $P(\overline{X}_1 \leq 1.9)$;
2. il valore esatto di $P(\overline{X}_2 \leq 1.9)$;
3. un valore approssimato di $P(\overline{X}_{100} \leq 1.9)$;
4. un valore approssimato del più piccolo n tale che $P\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j \leq 220\Big) \leq 0.5$. Assumete $n \geq 100$.

Esercizio 4.5.3 Il primo di settembre di ogni anno un cartolaio prepara un ordine di biro gialle con cui far fronte alle vendite dell'intero anno (=365 giorni). Si sa che il cartolaio vende X biro gialle al giorno, dove X è una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 2.5$ e che il numero di biro gialle vendute in giorni diversi sono indipendenti.

1. Se Y indica il numero totale di biro gialle vendute in un anno, qual è la densità di Y?
2. Quanto vale approssimativamente la probabilità che in un anno si vendano al più 960 biro?
3. Quante biro gialle dovrà approssimativamente ordinare il cartolaio affinché la probabilità di rimanerne sprovvisto durante l'anno sia inferiore al 5%?

Esercizio 4.5.4 La variabile aleatoria X che conta il numero giornaliero di *outlink* dalla pagina web `xxx` alla pagina web `bbb` si può modellare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\theta > 0$, cioè

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!} & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Invece, la variabile aleatoria Y che conta il numero giornaliero di *outlink* dalla pagina web `yyy` alla pagina web `bbb` ha densità binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 0.2$. Assumiamo che X e Y siano indipendenti.

1. Determinare il valore di θ tale che la probabilità che in un giorno non ci sia nessun *outlink* da `xxx` a `bbb` sia pari a 0.1
2. Determinare media e varianza di $X + Y$ (si usi il valore di θ trovato al punto 1.)
3. Supponendo che gli *outlink* alla pagina `bbb` in giorni diversi siano tutti indipendenti, calcolare un valore approssimato per la probabilità che in 49 giorni ci siano almeno 200 *outlink* alla pagina `bbb` provenienti da `xxx` o `yyy` (si usi il valore di θ trovato al punto 1.)

Esercizio 4.5.5 (Esempio 3b pag. 400 da Ross (2004)) Il numero di studenti che si iscrivono a un corso di laurea è rappresentato da una variabile aleatoria di Poisson di media 100. Se si iscrivono più di 120 unità i corsi saranno sdoppiati. Se invece si iscrivono al più 120 unità, si farà un unico canale.

Qual è la probabilità che i corsi di base vengano sdoppiati?

Esercizio 4.5.6 Ho un vecchio walkman che funziona con una sola pila. Uso sempre pile *aaa* non ricaricabili e con una pila del tipo *aaa*, il mio walkman suona per un tempo modellabile come una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f(x) = \frac{2}{25}x\mathbf{1}_{(0,5)}(x)$.

1. Calcolate media e varianza della durata del mio walkman con la pila *aaa*.

Siano X_1 la durata della prima pila *aaa*, X_2 la durata della seconda pila *aaa*, …, X_n la durata dell' n-esima pila *aaa* sostituita, ….

2. Scrivete in termini di $X_1, \dots, X_n$ la probabilità che all'ora t io avrà sostituito almeno n batterie.

3. Calcolate il valore approssimato della probabilità che dopo 250 ore io avrà sostituito almeno 72 batterie. Quale ipotesi state facendo sulla successione $X_1, \dots, X_n, \dots$?

Esercizio 4.5.7 Sia X una variabile aleatoria uniforme su $(0, 2)$.

1. Si determini media e varianza di X.
2. Siano $X_1, \dots, X_{147}$ 147 variabili aleatorie $\overset{i.i.d.}{\sim}$ $\mathcal{U}(0, 2)$ e $S = X_1 + \dots + X_{147}$. Calcolate approssimativamente $P(S < 161)$.

Esercizio 4.5.8 Assegnata la funzione

$$f(x; k) := \begin{cases} 2x^{k-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. Per quale valore di k, $f(x; k)$ è una funzione di densità di probabilità?

Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f(x; k)$, dove k assume il valore determinato al punto 1..

3. Calcolate $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Siano ora $X_1, \dots, X_{200}$ 200 variabili aleatorie i.i.d. con comune funzione di densità di probabilità $f(x; k)$ dove k assume il valore determinato al punto 1. Sia inoltre $S_{200} = X_1 + \dots + X_{200}$.

4. Calcolate il valore esatto di $P(X_1 + X_2 \leq 0.8)$ [Risp. $0.0682\bar{6}$]

5. Facendo riferimento al teorema opportuno, quanto vale approssimativamente $P(S_{200} > 138.816)$?

Esercizio 4.5.9 Sia X una variabile aleatoria uniforme su un intervallo (a, b) di media $\mathrm{E}(X) = 20$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = 12$, cioè $X \sim f(x)$ con $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$. (Ovviamente $a < b$).

1. Determinate i parametri a, b della densità $f(x)$.

2. Calcolate $P(19 < X \leq 21)$.

Siano ora $X_1, X_2, \dots, X_{108}$ 108 variabili aleatorie i.i.d. con densità uniforme di media 20 e varianza 12 e sia $\overline{X}_{108}$ la media campionaria.

3. Calcolate media e varianza di $\overline{X}_{108}$.

4. Calcolate un valore approssimato di $P(19 < \overline{X}_{108} \leq 21)$.

4.6 Soluzioni di alcuni esercizi del Capitolo 4

Esercizio 4.1.1

1. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, dove: $\mathrm{E}(X) = -\frac{6}{36} - \frac{30}{36} = -1$, $\mathrm{E}(Y) = -\frac{5}{36} + \frac{1}{36} = -\frac{4}{36}$ e $\mathrm{E}(XY) = \frac{4}{36}$. Quindi $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{4}{36} - \frac{4}{36} = 0$. Le due v.a. non sono correlate.

2. $P(X = -1, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{216} = P(X = -1)P(Y = 1)$: X ed Y non sono indipendenti.

3. $P((X,Y) \in \{(x,y) : x + |y| = -1\}) = p_{X,Y}(-1,0) + p_{X,Y}(0,-1) + p_{X,Y}(0,1) = 2/36 + 1/36 + 1/36 = 1/9$.

Esercizio 4.1.2

1. $p_{RB}(0,1) = \frac{2}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$; $p_{RB}(0,2) = \frac{1}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$; $p_{RB}(1,0) = \frac{3}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$; $p_{RB}(1,1) = \frac{3 \times 2}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$; $p_{RB}(2,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$ e $p_{R\,B}(r,b) = 0$ altrove. Usando una tabella a doppia entrata, descriviamo p_{RB} nel seguente modo:

$R \setminus B$	0	1	2	
0	0	2/15	1/15	
1	1/5	2/5	0	
2	1/5	0	0	

2.

$R \setminus B$	0	1	2	p_R
0	0	2/15	1/15	$2/15 + 1/15 = 1/5$
1	1/5	2/5	0	$2/15 + 1/5 = 3/5$
2	1/5	0	0	1/5
p_B	$1/5 + 1/5 = 2/5$	$2/15 + 2/5 = 8/15$	1/15	

3. Quindi $\mathrm{E}(B) = 8/15 + 2 \times 1/15 = 2/3$. Inoltre, $\mathrm{E}(B^2) = 8/15 + 4 \times 1/15 = 4/5$. Ne segue che $\mathrm{Var}(B) = 4/5 - (2/3)^2 = 16/45$.
4. $\mathrm{E}(R) = 1$ e $\mathrm{E}(RB) = 1 \times 1 \times 2/5 = 2/5$ quindi $\mathrm{cov}(R,B) = \mathrm{E}(RB) - 2/3 = 2/5 - 2/3 = -4/15$. Inoltre $\mathrm{E}(R^2) = 3/5 + 4/5 = 7/5$, da cui $\mathrm{Var}(R) = 2/5$. Infine $\rho(R,B) = \frac{-4/15}{\sqrt{16/45 \times 2/5}} = -1/\sqrt{2}$, da cui evinciamo che R e B non sono scorrelate.
5. $\mathrm{Var}(R - B) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{Var}(B) - 2\mathrm{cov}(R,B) = 2/5 + 16/45 + 8/15 = 58/45$

Esercizio 4.1.3

$X \setminus Y$	-1	0	2	6	p_X
-2	1/9	1/27	1/27	1/9	$8/27 = p_X(-2)$
1	2/9	0	1/9	1/9	4/9
3	0	0	1/9	4/27	7/27
p_Y	1/3	1/27	7/27	10/27	1

1. $P(\text{“}Y \text{ è pari}'') = P(Y = 0) + P(Y = 2) + P(Y = 6) = 1/27 + 7/27 + 10/27 = 18/27 = 2/3$
2. $P(\text{“}XY \text{ è dispari}'') = P((X,Y) = (1,-1)) = 2/9$
3. $P(X > 0, Y \geq 0) = 1 - P(Y = -1) - P(X = -2) + 1/9 = 1 - 8/27 - 1/3 + 1/9 = 13/27$; $P(X > Y) = P((X,Y) \in \{(1,-1),(3,2)\}) = p_{X,Y}(1,-1) + p_{X,Y}(3,2) = 2/9 + 1/9 = 1/3$; $P(|XY| \geq 2) = p_{X,Y}(-2,-1) + p_{X,Y}(1,2) = 1/9 + 1/9 = 2/9$.
4. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 74/27 - (17/27) \cdot (65/27) \simeq 1.225$, poiché $\mathrm{E}(XY) = -2\left[-1 \times 1/9 + 2\frac{1}{27} + 6 \times 1/9\right] + 1\left[-1 \times 2/9 + 2 \times 1/9 + 6 \times 1/9\right] + 3\left[2 \times 1/9 + 6 \times 4/27\right] = 74/27$ e $\mathrm{E}(X) = -2 \times 8/27 + 4/9 + 3 \times 7/27 = 17/27$, $\mathrm{E}(Y) = -1/3 + 2 \times 7/27 + 6 \times 10/27 = 65/27 \simeq 0.1139$. Osserviamo che X e Y non sono indipendenti in quanto $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$.

5. Si vedano l'ultima colonna e l'ultima riga della tabella.

6. Si consideri il vettore $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ la cui densità è il prodotto delle marginali individuate al punto 6.:

$\widetilde{X} \setminus \widetilde{Y}$	-1	0	2	6	p_X
-2	8/81	$8/(27)^2$	$56/(27)^2$	$80/(27)^2$	8/27
1	4/27	4/243	28/243	40/243	4/9
3	7/81	$7/(27)^2$	$49/(27)^2$	$70/(27)^2$	7/27
p_Y	1/3	1/27	7/27	10/27	1

Esercizio 4.1.4 L'insieme dei possibili risultati dei lanci delle tre monete è

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$$

Essendo le monete equilibrate ogni terna in Ω ha probabilità uniforme =1/8.

1. La densità del vettorio aleatorio (X, Y) può essere descritta utilizzando una tabella a doppia entrata:

X Y	0	1	2	$p_X(x)$
0	$p_{X,Y}(0,0) = 0$	$p_{X,Y}(0,1) = 1/8$	$p_{X,Y}(0,2) = 1/8$	$p_{X,Y}(0,0)+$ $p_{X,Y}(0,1)+$ $p_{X,Y}(0,2) = 2/8$
1	1/8	2/8	1/8	4/8
2	1/8	1/8	0	2/8
$p_Y(y)$	$p_{X,Y}(0,0)+$ $p_{X,Y}(1,0)+$ $p_{X,Y}(2,0) = 2/8$	4/8	2/8	1

2. Poiché $p_X = p_Y$, allora $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$; $\mathrm{E}(X) = \frac{4}{8} \times 1 + \frac{2}{8} \times 2 = 1$;
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \frac{4}{8} \times 1 + \frac{2}{8} \cdot 4 - 1 = \frac{1}{2}$;
$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1 \times 1 \times \frac{2}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 1 \times \frac{1}{8} - 1 = -1/4 \Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)}} = -(1/4)/(1/2) = -0.5$
3. Essendo $\rho(X,Y) \neq 0$ allora X, Y non sono indipendenti.
4. $P(X < Y) = P((X,Y) \in \{(0,1),(0,2),(1,2)\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
5. Sia S la variabile aleatoria che conta su 100 lanci quante volte il numero di teste per le prime due monete è *minore* del numero di croci per le ultime due. Poiché i 100 lanci di tre monete in successione costituiscono una successione di prove indipendenti e per ogni prova la probabilità dell'evento "*numero di teste per le prime due monete minore del numero di croci per le ultime due*" vale $P(X < Y) = 3/8$, allora $S \sim \mathbf{Bi}(100, \frac{3}{8})$ e la probabilità cercata è $P(S \geq 35) = P(S > 34) = 1 - F_S(34)$. Per il teorema centrale del limite, applicando la correzione di continuità, e avendo in mente che $\mathrm{E}(S) = 100 \times \frac{3}{8} = 37.5$ e $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = 23.4375$ abbiamo:

$$1 - F_S(34) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{34 + 0.5 - 37.5}{\sqrt{23.4375}}\right) = \Phi\left(\frac{37.5 - 34 - 0.5}{\sqrt{23.4375}}\right) \simeq \Phi(0.62) \simeq 0.7324$$

Esercizio 4.1.5 Le densità marginali di X e Y sono date rispettivamente da prima e ultima colonna e prima e ultima riga della seguente tabella

$X \setminus Y$	0	1	p_X
0	1/3	1/3	2/3
1	1/12	1/12	1/6
2	1/12	1/12	1/6
p_Y	1/2	1/2	1

Poiché per ogni coppia $(x, y) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$, la densità congiunta fattorizza nel prodotto delle marginali $[p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)]$, allora X, Y sono indipendenti.

Esercizio 4.1.6

1. I possibili risultati dell'esperimento in questione sono rappresentabili dalle coppie $\{(a,b) : a \neq b,\ a,b : 1,2,3\}$, pertanto scegliamo come spazio campionario $\Omega = \{(a,b) : a \neq b,\ a,b : 1,2,3\}$, *i.e.* le disposizioni senza ripetizione di ordine 2 di 3 elementi. Allora $|\Omega| = 3 \cdot 2 = 6$ e assegnamo allo spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ la probabilità uniforme. Abbiamo che $X((a,b)) = a$ ed $Y((a,b)) = \max(a,b)$ per ogni $(a,b) \in \Omega$. Pertanto: $S_Y = \{2,3\}$, $S_X = \{1,2,3\}$ e

X/Y	2	3
1	$(1,2)$	$(1,3)$
2	$(2,1)$	$(2,3)$
3	$\emptyset$	$(3,1),(3,2)$

Deduciamo la seguente tabella della densità congiunta di X,Y

X/Y	2	3	p_X
1	1/6	1/6	1/3
2	1/6	1/6	1/3
3	0	2/6	1/3
p_Y	1/3	2/3	1

2. $\begin{pmatrix} X \\ Y-X \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Dal momento che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che $p_{(X,Y-X)}(x,z) = p_{(X,Y)}(x, x+z)$, perciò:

$X/Y-X$	0	1	2	p_X
1	0	1/6	1/6	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
3	1/3	0	0	1/3
p_{Y-X}	1/2	1/3	1/6	

3. È descritta dalla prima e ultima riga della tabella al punto precedente.

4. Poiché: $\mathrm{E}(X) = 1 \times 1/3 + 2 \times 1/3 + 3 \times 1/3 = 2$
$\mathrm{E}(Y) = 2 \times 1/3 + 3 \times 2/3 = 8/3$ e
$\mathrm{E}(XY) = 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 6 \times 1/6 + 9 \times 2/6 = 33/6$,
allora $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1/6$

Esercizio 4.1.7

1. $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 1$, $\mathrm{E}(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ e quindi $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0$: allora X, Y sono scorrelate. Ma, $p_{XY}(0,0) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3}\frac{1}{3} = p_X(0)p_Y(0)$: concludiamo che X, Y non sono indipendenti.

2. Poiché

$$\begin{pmatrix} U \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

allora

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } A^{-1} \begin{pmatrix} U \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U - Z \\ U + Z \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$p_{(U,Z)}(u,z) = p_{(X,Y)}(A^{-1}((U,Z)')) = p_{(X,Y)}(U-Z, U+Z) =$$

$U \setminus Z$	0	1	p_U
0	$p_{X,Y}(0,0) = 1/3$	0	$1/3$
1	$p_{X,Y}(1,1) = 1/3$	$p_{X,Y}(0,2) = 1/3$	$2/3$
p_Z	$2/3$	$1/3$	1

3. $\mathrm{cov}(U,Z) = \mathrm{cov}((X+Y)/2, (Y-X)/2) = \mathrm{cov}(X+Y, Y-X)/4 = 1/4[\mathrm{cov}(X,Y) - \mathrm{cov}(X,X) + \mathrm{cov}(Y,Y) - \mathrm{cov}(Y,X)] = [0 - Var(X) + Var(Y) - 0]/4 = (-2/9 + 2/3)/4 = 1/9$

Esercizio 4.1.8

1. La densità congiunta del vettore (X,Y) e le densità marginali di X ed Y sono riportate nelle seguente tabella:

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	0	$2/35$	$2/35$	$4/35$
1	$3/35$	$12/35$	$3/35$	$18/35$
2	$6/35$	$6/35$	0	$12/35$
3	$1/35$	0	0	$1/35$
p_Y	$10/35$	$20/35$	$5/35$	1

2. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{6}{7} - \frac{9}{7}\frac{6}{7} = -\frac{12}{49}$
   Poiché $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$, allora X ed Y non sono indipendenti.

3. $P(X+Y=3) = p_{(X,Y)}(3,0) + p_{(X,Y)}(1,2) + p_{(X,Y)}(2,1) = \frac{1+3+6}{35} = \frac{2}{7}$

Esercizio 4.1.9

1. Poiché:

$$(Z,W) = \begin{cases} (0,1) & \text{se } (X,Y) = (0,0) \text{ oppure } (X,Y) = (0,1) \\ (1,1) & \text{se } (X,Y) = (1,0) \\ (0,0) & \text{se } (X,Y) = (1,1) \end{cases}$$

   allora

$$\begin{aligned} &P(Z=0, W=0) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = p^2 \\ &P(Z=1, W=1) = P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0) = p(1-p) \\ &P(Z=0, W=1) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = P(X=0)P(Y=0) + \\ &\qquad\qquad + P(X=0)P(Y=1) = (1-p)^2 + p(1-p) = 1-p \end{aligned}$$

   cioè la densità congiunta di (Z,W) e le densità marginali sono:

$Z \setminus W$	0	1	$p_Z(z)$
0	p^2	$1-p$	p^2+1-p
1	0	$p(1-p)$	$p-p^2$
$p_W(w)$	p^2	$(1-p)(1+p)$	1

2. $Z \sim \mathbf{Be}(p-p^2)$, $W \sim \mathbf{Be}(1-p^2)$.

3. Z e W hanno stessa distribuzione se, e solo se, $p - p^2 = 1 - p^2 \Leftrightarrow p = 1$.

Esercizio 4.1.10

1.

$R \setminus V$	0	1	2
0	1/36	1/6	1/4
1	1/9	1/3	0
2	1/9	0	0

2. Sia $Z = \max\{R, V\}$. Allora $S_Z = \{0, 1, 2\}$ e

$$p_Z(0) = P(\max\{R, V\} = 0) = P(R = V = 0) = \frac{1}{36}$$
$$p_Z(1) = P(\max\{R, V\} = 1) = P(R = 0, V = 1) + P(R = 1, V = 0) + P(R = 1, V = 1)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$
$$p_Z(2) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{11}{18} = \frac{13}{36}$$

Segue che
$$\mathrm{E}(Z) = 1 \cdot \frac{11}{18} + 2 \cdot \frac{13}{36} = \frac{4}{3}$$
Inoltre
$$\mathrm{E}(Z^2) = 1 \cdot \frac{11}{18} + 2^2 \cdot \frac{13}{36} = \frac{37}{18}$$
da cui
$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = \frac{5}{18} \simeq 0.28$$

Esercizio 4.1.11

1. Essendo X e Y variabili aleatorie geometriche con lo stesso parametro p, abbiamo che $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.8}{0.04} = 20$. Per l'indipendenza della variabili X e Y abbiamo che

   $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(0.5X) + \mathrm{Var}(0.1Y) = 0.25\mathrm{Var}(X) + 0.01\mathrm{Var}(Y) = 0.25 \times 20 + 0.01 \times 20 = 5.2.$

   Analogamente
   $$\mathrm{Var}(V) = 20b^2 + 20 = 20(b^2 + 1).$$

2. $\mathrm{cov}(U, V) = \mathrm{cov}(0.5X + 0.1Y, bX + Y + c) = \mathrm{cov}(0.5X, bX) + \mathrm{cov}(0.1Y, Y) = 0.5 \times b \times 20 + 0.1 \times 20 = 10b + 2$.

3. $\mathrm{cov}(U, V) = 10b + 2 = 0$ se $b = -0.2$ e qualunque sia il valore di c. In tal caso $\mathrm{Var}(V) = 20(0.04+1) = 20.8$ e $\mathrm{Var}(U-V) = \mathrm{Var}(U)+\mathrm{Var}(-V) = \mathrm{Var}(U)+\mathrm{Var}(V) = 5.2+20.8 = 26$.

Esercizio 4.1.12

1. $P(Y \leq X) = p_{X,Y}(6, 6) + p_{X,Y}(7, 6) + p_{X,Y}(7, 7) + \cdots + p_{X,Y}(10, 10) = 0.057 + 0.032 + 0.070 + 0.029 + 0.088 + 0.008 + 0.028 + 0.015 = 0.327$

2. Sia S la variabile aleatoria che indica il numero di allievi su 90 che superano l'esame con un voto in `ST` al più pari a quello in `CP`. Dobbiamo calcolare $P(S \leq 30)$. Se il rendimento degli allievi nei due corsi è omogeneo, cioè regolato dalla stessa distribuzione congiunta e i rendimenti dei diversi allievi sono indipendenti, allora possiamo modellare S come una va **Bin**$(90, 0.327)$. 90 è grande e $90 \times 0.327 \times (1-0.327) = 19.80639 > 10$; Per il Teorema di De Moivre Laplace, un valore approssimato per la probabilità cercata ̀fornito da

$$P(S \leq 30) = P(S \leq 30.5) \simeq \Phi\left(\frac{30.5 - 90 \times 0.327}{\sqrt{90 \times 0.327 \times (1 - 0.327)}}\right) \simeq \Phi(0.24) \simeq 0.594835.$$

Senza la correzione di continuità avremmo ottenuto 0.551 mentre il valore esatto è 0.5996573.

3. Completiamo la tabella con la determinazione delle densità marginali di X e Y:

$X \setminus Y$	6	7	8	9	10	p_X
6	0.057	0.080	0.063	0.017	0.002	0.219
7	0.032	0.070	0.141	0.087	0.035	0.365
8	0	0.029	0.088	0.114	0.086	0.317
9	0	0	0.008	0.028	0.048	0.084
10	0	0	0	0	0.015	0.015
p_Y	0.089	0.179	0.300	0.246	0.186	$\boxed{1}$

Quindi:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=6}^{10} k p_X(k) = 7.311; \quad \mathrm{E}(Y) = \sum_{k=6}^{10} k p_Y(k) = 8.261$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=6}^{10} k^2 p_X(k) = 54.361 \Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) \simeq 0.91028;$$

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sum_{k=6}^{10} k^2 p_Y(k) = 69.701 \Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = 69701 - 6824412 \simeq 1.4569;$$

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{i=6}^{10}\sum_{j=6}^{10} ij p_{X,Y}(i,j) = 61.083 \Longrightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \simeq 0.6868$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \simeq 0.5964$$

4. Il coefficiente di correlazione lineare ha un valore “non prossimo a 0”. Costruiamo una previsione del voto in `ST` lineare in `CP`:

$$\widehat{TS} = \mathrm{E}(Y) + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \times (8 - \mathrm{E}(X)) = 8.261 + \frac{0.6868}{0.91028} \times (8 - 7.311) \simeq 8.78$$

quindi avendo Nicola conseguito 8 in `CP`, prevediamo che consegua 9 in `ST`.

Esercizio 4.2.1

1. Poiché il sistema è in parallelo, allora il sistema funziona ancora dopo 10 minuti dall'attivazione se e solo se a quel tempo o è ancora funzionante S o T. Pertanto la probabilità cercata vale
$$P(\{S > 10\} \cup \{T > 10\}) = 1 - F_{S,T}(10,10) = 11\mathrm{e}^{-10}$$

2. Se i componenti ,T sono collegati in serie, allora il sistema funziona ancora dopo 10 minuti dall'attivazione se e solo se a quel tempo sono ancora funzionanti sia S sia T. Pertanto la probabilità cercata vale
$$P(S > 10, T > 10) = \mathrm{e}^{-10}$$

Esercizio 4.2.1

1. $f_X(x) = 0$ se $x \notin (0, 1/\sqrt{2\pi})$. Se invece $x \in (0, 1/\sqrt{2\pi})$ abbiamo
$$f_X = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy = \sqrt{2\pi}$$
(ϕ è la densità normale standard $\mathcal{N}(0,1)$)
$$f_Y(y) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, dx = \phi(y)$$
In conclusione: $X \sim \mathcal{U}(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. X, Y sono indipendenti. Infatti sul rettangolo $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) \times \mathbb{R}$ la densità congiunta fattorizza nel prodotto delle marginali.

2. $\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(X + Y^2) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} + (\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} + 1.$

Esercizio 4.2.3 Se $y > 0$ allora: $F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} - \lambda y \mathrm{e}^{-\lambda y}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} - \lambda y \mathrm{e}^{-\lambda y}$ altrimenti $F_Y(y) = 0$. Se $x > 0$ allora: $F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \lim_{y\to+\infty} 1 - \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-\lambda x} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, altrimenti $F_X(x) = 0$. Quindi:

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \text{ e } f_Y(y) = \lambda^2 y \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

cioè $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, mentre $Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Esercizio 4.2.4

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \text{ e } f_Y(y) = \lambda^2 y \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y),$$

cioè $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, mentre $Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Facilmente si ottiene $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} = \frac{3}{\lambda}$.

$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(z-y,y)\,dy = \begin{cases} \int_{z/2}^{z} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda y}\,dy = \lambda[\mathrm{e}^{-\lambda\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\lambda z}] & z > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$P(X \le 3, Y \le 2) = P((X,Y) \in (-\infty,3] \times (-\infty,2]) = \lambda^2 \int_0^2 \int_0^y \mathrm{e}^{-\lambda y}\,dx\,dy = -2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda} + 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}$.

Il fatto che $f_{(X,Y)}(x,y) = 0 \ne f_X(x)f_Y(y)$, $\forall (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}$ è sufficiente per concludere che X ed Y non sono indipendenti.

$g(x,y) = f_{(\widetilde{X},\widetilde{Y})}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è una densità congiunta con marginali f_X, f_Y. g è diversa da $f_{X,Y}$ come si evince dal punto 5..

Esercizio 4.2.5 Poiché f è della forma $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ dove $f_1(x) = \mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$ e $f_2(y) = \mathrm{e}^{-2y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)$, allora X e Y sono indipendenti. Inoltre X ha densità uniforme sull'intervallo $(-1,1)$ e Y ha densità esponenziale di parametro 2.

Esercizio 4.2.6

1. $f_X(x) = \displaystyle\int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{1-x/2} 1\,dy & x \in (0,2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} 1 - x/2 & x \in (0,2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$
2. $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^2 x(-\frac{x}{2} + 1)\,dx = \frac{2}{3}.$
3. Poiché (X,Y) è uniforme sul triangolo R di vertici $(0,0), (0,1), (2,0)$, allora
$$P(X > 2Y) = \frac{\text{area}\{(x,y) \in R : x > 2y\}}{\text{area R}} = \frac{1}{2}.$$
4. $P(X > 1, Y \le 1/2) =$ Area del triangolo di vertici $(1,0), (2,0), (1,1/2)/\text{area}(R) = 1/4$.

Esercizio 4.2.7

1. $f_{X+Y}(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-y,y)\,dy = \int_0^z \frac{1}{2} z\mathrm{e}^{-z} du \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z) = \frac{z}{2}\mathrm{e}^{-z}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z)\int_0^z du = \frac{z^2}{2}\mathrm{e}^{-z}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z)$, cioè $Z \sim \Gamma(3,1)$.
2. $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(xy)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dy = \frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$

Analogamente
$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(y+1)\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y):$$

X e Y non sono indipendenti, perché la densità congiunta non fattorizza nel prodotto delle marginali.

3. $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{-x}dx = \left\{\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}dx + \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx\right\}/2 = (2+1)/2 = 3/2$;
$\mathrm{E}(XY) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy\frac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dxdy = \int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\left\{\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}/2\,dx + \frac{y}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx\right\}\,dy = 2$
$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 2 - (\frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{4}$.

4. Siano $X_1, X_2, X_3 \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{E}(1)$. Poiché $X+Y$ è $\Gamma(3,1)$, allora la densità di $X+Y$ coincide con la densità di $X_1+X_2+X_3$. Pertanto $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X_1+X_2+X_3) = 3\mathrm{E}X_1 = 3$.
Alternativamente, procediamo nel seguente modo:

$$\mathrm{E}(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)^2\mathrm{e}^{x+y}dxdy = \ldots = 3$$

Oppure: Sia $Z = X+Y$. Allora

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\frac{z^2}{2}\mathrm{e}^{-z}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z)dz = \int_0^{+\infty}\frac{z^3}{2}\mathrm{e}^{-z}dz = 3$$

Oppure: $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

5. Sia $Z = X+Y$. Allora $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{Z}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}\cdot z^2\mathrm{e}^{-z}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-z}\,dz = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.2.8

$$(1)\quad P(X \le 1/2, Y \le 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2}\int_{-\infty}^{1/2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \frac{6}{5}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}(x^2+y)\,dxdy =$$
$$= \frac{6}{5}\int_0^{1/2}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} + \frac{y}{2}\right]\,dy = \frac{6}{5}\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{y}{2}\right]\,dy = \frac{1}{10}.$$

2. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\frac{1}{100}$; Infatti,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)\,dx = \frac{3}{5}\int_0^1 x(2x^2+1)\,dx = \frac{6}{5}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{3}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}\\
\mathrm{E}(Y) &= \int_{\mathbb{R}} yf_y(y)\,dy = \int_0^1 y\frac{2}{5}(3y+1)\,dy = \frac{3}{5}\\
\mathrm{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{5}\int_{[0,1]^2} xy(x^2+y)\,dxdy = \frac{6}{5}\int_{[0,1]^2}(x^3y+xy^2)\,dxdy\\
&= \frac{6}{5}\int_{[0,1]^2} x^3y\,dxdy + \frac{6}{5}\int_{[0,1]^2} xy^2\,dxdy\\
&= \frac{6}{5}\int_{[0,1]} y(\int_{[0,1]} x^3\,dx)dy + \frac{6}{5}\int_{[0,1]} y^2(\int_{[0,1]} x\,dx)\,dy\\
&= \frac{6}{5}\int_{[0,1]} y\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)dy + \frac{6}{5}\int_{[0,1]} y^2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)\,dy\\
&= \frac{3}{20}y^2\Big|_0^1 + \frac{2}{10}y^3\Big|_0^1 = \frac{7}{20}
\end{aligned}$$

3. X e Y non sono indipendenti, perché $\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{1}{100} \neq 0$:se sono correlate allora non sono indipendenti.

4. $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)dy = \left(\int_0^1\frac{6}{5}(x^2+y)dy\right)\mathbf{1}_{(0,1)}(x) = \frac{3}{5}(2x^2+1)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$;
$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)dx = \left(\int_0^1\frac{6}{5}(x^2+y)dx\right)\mathbf{1}_{(0,1)}(y) = \frac{2}{5}(3y+1)\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$;

5. $\widetilde{f}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{6}{25}(2x^2+1)(3y+1)\mathbf{1}_{(0,1)}(y)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$

6. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \int_0^1\frac{3}{5}x^2(2x^2+1)dx - \frac{9}{25} = \frac{11}{25} - \frac{9}{25} = \frac{2}{25}$.
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y) = \int_0^1\frac{2}{5}y^2(3y+1)dy - \frac{9}{25} = \frac{13}{30} - \frac{9}{25} = \frac{3}{50}$.

7. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{2}{25} + \frac{3}{50} - \frac{1}{50} = \frac{3}{25}$

Esercizio 4.2.9

1. Per ragioni di simmetria della densità congiunta, $f_X = f_Y$. Inoltre

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Per la varianza si ha

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

3. $\mathrm{E}(XY) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\;dxdy = \frac{1}{3}$ da cui

$$\mathrm{cov}(XY) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$$

4. $\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0$, $\mathrm{E}(X+Y) = 2\mathrm{E}(X) = \dfrac{7}{6}$, $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{22}{144} + \dfrac{2}{144} = \dfrac{1}{6}$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{22}{144} - \dfrac{2}{144} = \dfrac{5}{36}$

5. $\mathrm{E}\left(\dfrac{10X}{X+Y}\right) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{10x}{x+y}(x+y)\;dxdy = \int_0^1 \int_0^1 10x\;dxdy = 5$

Esercizio 4.2.10

1. Indichiamo con f_X e f_Y le densità marginali di X e Y rispettivamente. Se $x \notin (0,2)$ allora $f_X(x) = 0$. Se $x \in (0,2)$, allora $f_X(x) = (1/8)\int_2^4 (6-x-y)dy = (3-x)/4$. Quindi $f_X(x) = ((3-x)/4)\mathbf{1}_{(0,2)}(x)$. Se $y \notin (2,4)$ allora $f_Y(y) = 0$. Se $y \in (0,2)$ allora $f_Y(y) = (1/8)\int_0^2 (6-x-y)dx = (5-y)/4$. Quindi $f_Y(y) = ((5-y)/4)\mathbf{1}_{(2,4)}(y)$.

2. $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \int_0^2 x\frac{(3-x)}{4}dx + \int_2^4 y\frac{(5-y)}{4}dy = \frac{5}{6} + \frac{17}{6} = \frac{11}{3}$

3. $\mathrm{E}(XY) = \dfrac{1}{8} \cdot \displaystyle\int_0^2 \int_2^4 xy(6-x-y)dxdy = \frac{7}{3}$

4. Le variabili aleatorie non sono indipendenti perchè

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{7}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{6} = -\frac{1}{36} \neq 0$$

Esercizio 4.2.11

1.–2. $f_{X,Y}$ fattorizza nel prodotto delle seguenti due funzioni: $g(x) = x\mathbf{1}_{(0,2)}(x)$ e $h(y) = y\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$. Quindi X, Y sono indipendenti e

$$f(x) = \frac{x}{2}\mathbf{1}_{(0,2)}(x)$$

e

$$f_Y(y) = 2y\mathbf{1}_{(0,1)}(y).$$

3. $\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{xy}{xy}\, dxdy = 2.$

Esercizio 4.2.12

1. Per $c = 1/2$ risulta $f(x, y) \geq 0$ $\forall x, y$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (3xy + x/2)\, dxdy = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

2. Se $x \notin (0, 1)$ allora $f_X(x) = 0$; invece, per $x \in (0, 1)$, abbiamo

$$f_X(x) = \int_0^1 (3xy + x/2)\, dy = \frac{3x}{2} + \frac{x}{2} = 2x.$$

Se $y \notin (0, 1)$ allora $f_Y(y) = 0$; invece, per $y \in (0, 1)$, abbiamo

$$f_Y(y) = \int_0^1 (3y + 1/2)x\, dx = \frac{3y}{2} + \frac{1}{4}.$$

3. $\mathrm{E}(\frac{Y}{X}) = \int_0^1 \int_0^1 y(3xy + x/2)/x\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (3y^2 + y/2)\, dxdy = \frac{5}{4}$

Esercizio 4.3.1

$$F_W(x) = P(W \leq x) = 1 - P(W > x) = 1 - (1 - F(x))^n \tag{1}$$

dal momento che

$$P(W > x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j > x\}\Big) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} P(X_j > x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - P(X_j \leq x)) = \prod_{j=1}^{n} (1 - F(x)) = (1 - F(x))^n$$

2. $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x\}\Big) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leq x) = F^n(x)$
3. $f_Z(x) = \frac{d}{dx} F^n(x) = nF^{n-1}(x)f(x)$;
4. $f_W(x) = \frac{d}{dx} 1 - (1 - F(x))^n = n(1 - F(x)^{n-1}f(x)$.

Esercizio 4.3.2

1. Sia F la comune f.d.r. di S e T. La durata di vita di un sistema in parallelo costituito da due componenti con tempi di vita S e T è data da $Z = \max\{S, T\}$. Quindi, il sistema dopo 10 minuti dall'attivazione funziona se e solo se $\{Z > 10\}$ e

$$P(Z > 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - (F(10))^2 = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0.2*10})^2 = 0.2524$$

2. La durata di vita di un sistema in serie costituito da due componenti con tempi di vita S e T è data da $W = \min\{S, T\}$. Quindi, il sistema dopo 10 minuti dall'attivazione funziona se e solo se $\{W > 10\}$. Chiamiamo F la comune f.d.r. di S e T. Poiché

$$P(W > x) = (1 - F(x))^2 = (\mathrm{e}^{-\lambda x})^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda x} \qquad \forall x > 0$$

Quindi $W \sim \mathcal{E}(2\lambda)$ e la probabilità cercata è $P(W > 10) = \mathrm{e}^{-4} \simeq 0.01832$.

Esercizio 4.3.3 Siano X e Y due variabili aleatorie che indicano rispettivamente il numero dei lanci necessari ad A e quelli necessari a B per ottenere 6. Poiché i risultati dei lanci dei due dadi dei concorrenti si configurano come esperimenti indipendenti, X e Y sono variabili aleatorie indipendenti. Entrambe hanno densità geometrica di parametro $p = 1/6$. Esprimiamo ora gli eventi di cui dobbiamo calcolare la probabilità in termini di X e Y.

1. Il gioco finisce con k lanci se e solo se "$W \equiv \min\{X, Y\} = k$". Quindi, applicando i risultati sulla funzione di ripartizione del minimo, otteniamo:

$$P(W = k) = F_W(k) - F_W(k-1) = (1 - F(k-1))^2 - (1 - F(k))^2$$

[dove $F(x)$ indica la f.d.r. della geometrica di parametro 1/6, data da $F(k) = 1 - (5/6)^k$]

$$= (1-p)^{2(k-1)} - [(1-p)^2]^k = [(1-p)^2]^{k-1}(1 - (1-p)^2) = (1 - \frac{11}{36})^{k-1} \cdot \frac{11}{36}$$

Osservazione 1 Se X e Y sono indipendenti e geometriche di parametro p, q, rispettivamente, allora $W = \min\{X, Y\}$ ha densità geometrica di parametro $1 - (1-p)(1-q) = p + q - pq$.

2. $$P(\text{“Il gioco finisce in parità”}) = P(X = Y) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X = k, Y = k\}\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty}[p(1-p)^{k-1}]^2$$
$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} = \frac{p}{2-p} = \frac{1}{11} \simeq 0.091.$$

3. $$P(\text{“vince } A\text{”}) = P(X < Y) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X = k, Y > k\}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y > k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)P(Y > k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^k = p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} = \frac{1-p}{2-p} = \frac{5}{11}$$

Esercizio 4.3.4 Introduciamo due v.a. aleatorie D_1 e D_2 che rappresentano rispettivamente i risultati del primo e del secondo lancio. Esse sono indipendenti ed entrambe sono uniformi su $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Allora $U = \min\{D_1, D_2\}$ e $W = \max\{D_1, D_2\}$.
Notiamo innanzitutto che $U, W \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ e $P(U \leq W) = 1$. Quindi otteniamo per $i, j = 1, \ldots, 6$:

$$p_{(U,W)}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ P(D_1 = i, D_2 = i) = P(D_1 = i)P(D_2 = i) = \frac{1}{36} & \text{se } i = j \\ P(D_1 = i, D_2 = j) + P(D_1 = j, D_2 = i) = \frac{2}{36} & \text{se } i < j \end{cases}$$

Esercizio 4.4.0

1. $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ è sottovettore di un vettore gaussiano, quindi è anche esso gaussiano con vettore delle medie $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e matrice di covarianza $\begin{bmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. X_2, X_3 sono indipendenti, poiché il sottovettore $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ è gaussiano con covarianza nulla.

3. $aX_1 + bX_2 + cX_3 + d$ è una combinazione linare di va congiuntamente gaussiane. Quindi è gaussiana di media $-a + 2c + d$ e varianza

$$a^2\mathrm{Var}(X_1) + b^2\mathrm{Var}(X_2) + c^2\mathrm{Var}(X_3) + 2ab\mathrm{cov}(X_1, X_2) +$$
$$+ 2ac\mathrm{cov}(X_1, X_3) + 2bc\mathrm{cov}(X - 1X_3) = 4a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 1.5ac$$

Esercizio 4.4.1

1. $\mathrm{Var}(X_1) = 5, \mathrm{Var}(X_2) = 45$ e $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0$.
2. $\mathrm{E}(X_2(1 - X_1)) = 5$
3. $\mathrm{E}(5X_1 - 2X_2) = -10$ e $\mathrm{Var}(5X_1 - 2X_2) = 305$.
4. $Y = 5X_1 - 2X_2 \sim \mathcal{N}(-10, 305)$
5. $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ con $\boldsymbol{\mu} = [0, 5]^T$ e $\Sigma = diagonal\{5, 45\}$

Esercizio 4.4.3

1. Essendo ciascun Y_j somma di variabili a medie nulle allora $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2) = \mathrm{E}(Y_3) = 0$.
2. Poiché

$$\boldsymbol{Y} := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} := \boldsymbol{X},$$

e $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è matrice simmetrica e invertibile (infatti $\det(A) = -18$) allora $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ ha matrice di covarianza:

$$\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 11 \\ 11 & 14 & 11 \\ 11 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

3. Infine, sempre considerando che $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$, con A matrice invertibile, deriva che $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{C})$.

Esercizio 4.4.4

1. $\begin{bmatrix} X + 2Y \\ X - 2Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ con $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ che ha $\det(A) = -2 - 2 = -4$.

Allora A ha rango pieno e $(X + 2Y, X - 2Y)^T \sim \mathcal{N}$ con vettore delle medie: $A(0, 0)^T = (0, 0)^T$ e matrice di covarianza

$$A\boldsymbol{C}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice di covarianza è diagonale e il vettore $(X + 2Y, X - 2Y)^T$ è gaussiano, segue che

(a) $X + 2Y$ e $X - 2Y$ sono indipendenti e

(b) $X + 2Y \sim \mathcal{N}(0, 14)$ e $X - 2Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

Esercizio 4.4.5

1. $\rho(X_i, X_p) = \rho(X_a - 110, X_p) = \rho(X_a, X_p) = \dfrac{\mathrm{cov}(X_a, X_p)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_a)}\sqrt{\mathrm{var}(X_p)}} = \dfrac{7}{\sqrt{6 * 12}} = 0.8249$
2. $X_i - X_p = X_a - 110 - X_p \sim \mathcal{N}(-2, 4)$.
3. Dobbiamo calcolare

$$P(X_p > X_i) = P(X_i - X_p < 0) = P\left(\frac{X_i - X_p - (-2)}{2} < \frac{0 - (-2)}{2}\right) = \Phi(1) = 0.8413 :$$

l'84.13% delle donne americane in età giovanile è in sovrappeso.

Esercizio 4.4.6

1. Poiché U e V sono entrambe combinazioni lineari di variabili aleatorie gaussiane indipendenti, allora il vettore (U, V) è gaussiano bidimensionale. Segue che sia U che V sono gaussiane. In particolare esse sono identicamente distribuite con densità $\mathcal{N}(0 + \sqrt{\lambda}0 = 0, \lambda + \lambda = 2\lambda)$.

2. $\mathrm{cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}[(X + \sqrt{\lambda}Y)(X - \sqrt{\lambda}Y)] = \mathrm{E}(X^2 - \lambda Y^2) = \mathrm{Var}(X) - \lambda\mathrm{Var}(Y) = \lambda - \lambda = 0$. Poiché, come osservato al punto 1., il vettore (U, V) è un gaussiano, si può concludere che U e V sono indipendenti.

3. $P(U \leq 0, V \leq 1) = P(U \leq 0) \cdot P(V \leq 1) = \frac{1}{2}P(V \leq 1) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) \leq \frac{3}{8}$
se e solo se
$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) \leq 0.75 \simeq \Phi(0.6745)$$
se solo se
$$\sqrt{2\lambda} \geq \frac{1}{0.6745}$$
se e solo se
$$\lambda \geq \frac{1}{2 \cdot 0.6745^2} \simeq 1.099.$$

Esercizio 4.4.7 Per la linearità del valore atteso $\mathrm{E}[W] = 1 - \frac{4}{2} = -1$. Per l'indipendenza e le proprietà della varianza
$$\mathrm{Var}[W] = 2 + \frac{4}{2^2} = 3.$$
Dato che combinazioni lineari di normali danno normali, W è normale. Poi abbiamo
$$\begin{aligned} P[-2.5 \leq W \leq 0.5] &= P\left[-\frac{1.5}{\sqrt{3}} \leq \frac{W - (-1)}{\sqrt{3}} \leq \frac{1.5}{\sqrt{3}}\right] = \Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-\frac{1.5}{\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{3}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(0.87) - 1 \simeq 0.6134 \simeq 61\% \end{aligned}$$

Esercizio 4.5.1

1. Poiché X rappresenta il numero di successo su 300 prove bernoulliane con probabilità di successo pari alla probabilità di ottenere la coppia $(1, 1)$, lanciando due dadi regolari simultaneamente, allora, tale probabilità è $p = 1/36$ e $X \sim\mathbf{Bi}(300, 1/36)$. In conseguenza di ciò $\mathrm{E}(X) = 300/36 = 25/3$ e $\mathrm{Var}(X) = 300/36 \times 35/36 = 875/108$.

2. $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - P(X \leq 10.5) = 1 - P\left(\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \leq 0.76\right) \simeq 1 - \Phi(0.76) \simeq 0.22363$.

3. $1 - \Phi\left(\frac{10.5 - n/36}{\sqrt{35n/36^2}}\right) > 0.5 \Leftrightarrow \Phi(\frac{378 - n}{\sqrt{35n}}) < 0.5 \Leftrightarrow \frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < 0 \Leftrightarrow n > 378.$

4. la probabilità che si verifichi un triplo 1 è $p = 1/6^3 = 0.0046$, quindi $Y \sim \mathbf{Bin}(300, 0.0046)$. Dal momento che $300 \times 0.0046 = 1.39 < 5$ approssiamo la densità binomiale tramite la densità di Poisson di parametro $0.0046 \times 300 = 1.39$, si ha quindi
$$P(Y \leq 2) \sim \mathrm{e}^{-1.39} + \frac{\mathrm{e}^{-1.39} \times (1.39)}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-1.39} \times (1.39)^2}{2!} \sim 0.8359.$$

Esercizio 4.5.2

1. $P(\overline{X}_1 \leq 1.9) = P(X_1 \leq 1) = p_{X_1}(0) + p_{X_1}(1) = \mathrm{e}^{-2}(1 + 2) = 3\mathrm{e}^{-2} \simeq 0.406$;

2. In quanto somma di due variabili aleatorie $\overset{i.i.d.}{\sim}$ $Poisson(2)$, $X_1 + X_2$ ha densità di Poisson di parametro 4, quindi: $P(\overline{X}_2 \leq 1.9) = P(X_1 + X_2 \leq 2 \times 1.9) = P(X_1 + X_2 \leq 3.8) = P(X_1 + X_2 \leq 3) = \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!}\right) = \frac{71}{3} \times \mathrm{e}^{-4} \simeq 0.4335$;

3. In quanto somma di 100 variabili aleatorie $\overset{i.i.d.}{\sim}$ $Poisson(2)$, $\sum_{j=1}^{100} X_j$ ha densità di Poisson di parametro 200. Inoltre, per il teorema centrale del limite, posso approssimare la f.d.r. di $\sum_{j=1}^{100} X_j$ con la f.d.r. $\mathcal{N}(200, 200)$ e l'errore di approssimazione è minore con la correzione di continuità. Da tutto ciò deriva quanto segue:

$$P(\overline{X}_{100} \leq 1.9) = P\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \leq 190\right) = P\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \leq 190.5\right) \simeq \Phi\left(\frac{190.5 - 200}{\sqrt{200}}\right) \simeq$$
$$\simeq \Phi(-0.67) = 1 - \Phi(0.67) \simeq 1 - 0.7486 = 0.2514;$$

4. Assumendo $n \geq 100$, risolviamo il quesito usando l'approssimazione gaussiana $\mathcal{N}(n, n)$ della fdr della somma $\sum_{j=1}^{n} X_j$ cha ha fdr esatta $Poisson(2n)$, approssimazione discussa nel punto precedente per $n = 100$. Abbiamo così: $P(\sum_{j=1}^{n} X_j \leq 220) = P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \leq 220 + 0.5\right) \simeq \Phi\left(\frac{220 + 0.5 - 2n}{\sqrt{2n}}\right) \leq 0.5$ se e solo se $\frac{220.5 - 2n}{\sqrt{2n}} \leq 0$ se e solo se $n \geq 110.25$, da cui $\hat{n} = 111$.

Esercizio 4.5.3

1. In quanto somma di v.a. di Poisson i.i.d., Y è ancora di Poisson con parametro la somma dei parametri, cioè $Y \sim \mathcal{P}(365 \cdot 2.5 = 912.5)$.

2. Dobbiamo calcolare un valore approssimato di $P(Y \leq 960)$ usando il teorema centrale del limite:
$$P(Y \leq 960) = F_Y(960.5) \simeq \Phi\left(\frac{960.5 - 912.5}{\sqrt{912.5}}\right) = \Phi(1.59) \simeq 0.9440.$$

3. Sia k il numero di biro che deve ordinare il cartolaio per far fronte alle vendite di un anno. Dobbiamo determinare k tale che $P(Y > k) < 0.05$. Utilizzando l'approssimazione gaussiana della f.d.r. di Poisson, dobbiamo determinare k tale che: $1 - \Phi\left(\frac{k+0.5-912.5}{\sqrt{912.5}}\right) < 0.05$, equivalente a k tale che $\Phi\left(\frac{k+0.5-912.5}{\sqrt{912.5}}\right) > 0.95$ sse $\frac{k+0.5-912.5}{\sqrt{912.5}} > q_{0.05}$, dove $q_{0.05}$ è il quantile (di coda destra) di ordine 0.05 di Φ. Dalle tavole: $q_{0.05} = 1.645$ e $k > 1.645\sqrt{912.5} - 0.5 + 912.5 \simeq 961.6915$: il cartolaio deve ordinare almeno 962 penne gialle.

Esercizio 4.5.4

1. Deve essere $P(X=0) = \mathrm{e}^{-\theta} = 0.1$, quindi $\theta = \ln 10 \simeq 2.3026$.

2. $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) = \ln 10 + 2 \simeq 4.3026$. Inoltre dal momento che si tratta di variabili aleatorie indipendenti, si ha

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \ln 10 + 10 \times 0.2 \times 0.8 = \ln 10 + 1.6 \simeq 3.9026$$

3. Siano X_i, Y_i le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di *outlink* da `xxx` alla pagina `bbb` e il numero di *outlink* da `yyy` alla pagina `bbb` nel giorno i-esimo. Poniamo $V_i = X_i + Y_i$; allora il numero di *outlink* alla pagina `bbb` provenienti da `xxx` o `yyy` in 49 giorni è dato da $S_{49} = V_1 + \cdots + V_{49}$, dove $V_1, \ldots, V_{49}$ sono i.i.d.. Pertanto si ha $\mathrm{E}(S_{49}) = 49(\ln 10 + 2) \simeq 210.8267$ e $\mathrm{Var}(S_{49}) = 49(\ln 10 + 1.6) \simeq 191.2267$. Dobbiamo calcolare: $P(S_{49} \geq 200)$. Dal Teorema Centrale del Limite si ha

$$\begin{aligned} P(S_{49} \geq 200) = 1 - P(S_{49} \leq 199) &= 1 - P\left(\frac{S_{49} - 210.8267}{\sqrt{191.2267}} \leq \frac{199 - 210.8267}{\sqrt{191.2267}}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(-0.8552\right) \simeq \Phi(0.86) \simeq 0.8051 \end{aligned}$$

Se si applica la correzione di continuità:

$$\begin{aligned} P(S_{49} \geq 200) = 1 - P(S_{49} \leq 199.5) &= 1 - P\left(\frac{S_{49} - 210.8267}{\sqrt{191.2267}} \leq \frac{199.5 - 210.8267}{\sqrt{191.2267}}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(-0.8191\right) \simeq \Phi(0.82) \simeq 0.7939 \end{aligned}$$

Esercizio 4.5.5 I corsi verranno sdoppiati se per il numero di studenti che si iscrivono a un corso di laurea $X \sim \mathbf{Pois}(100)$ è maggiore di 120, quindi dobbiamo calcolare $P(X > 120)$ il cui valore esatto è dato da

$$P(X > 120) = \sum_{k \geq 121} \frac{\mathrm{e}^{-100} 100^k}{k!}$$

D'altro canto X ha la stessa distribuzione della somma di 100 v.a. i.i.d. con comune densità di Poisson di parametro 1, per cui, per il teorema centrale del limite e con la correzione di continuità un valore approssimato di $P(X > 120)$ è dato da:

$$P(X > 120) = 1 - P(X \leq 119) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{119 + 0.5 - 100}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(1.95) \simeq 1 - 0.9744 = 0.0256$$

(senza la correzione di continuità $P(X > 120) \simeq 1 - \Phi(1.9) \simeq 1 - 0.9713 = 0.0287$; infine il valore esatto (arrotondato alla quarta cifra decimale) è 0.0282.

Esercizio 4.5.6

1. $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^5 x \cdot \frac{2}{25}\, dx = \frac{10}{3}$

$$\mathrm{E}(X^2) \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2}{25}\, dx = \frac{225}{18}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}^2(X) - (\frac{10}{3})^2 = \frac{25}{18}$$

2. La durata totale garantita da n pile sostituite una dopo l'altra è data dalla somma $X_1 + \cdots + X_n$, quindi al tempo t io avrò sostituito almeno n batterie se e solo se $X_1 + \cdots + X_n \leq t$ e quindi, la risposta alla domanda è $P(X_1 + \cdots + X_n \leq t)$

3. $n = 72$ è un "grande" numero di lampadine; se le $n = 72$ lampadine funzionano in modo indipendente una dall'altra e sono tutte dello stesso tipo allora $X_1, \dots, X_n, \dots$ possono essere considerate v.a. i.i.d.con comune media $\mu = 10/3$ e comune varianza $\sigma^2 = 25/18$ e un valore approssimato della probabilità $P(X_1 + \cdots + X_{72} \leq 250)$ è determinato usando il teorema centrale del limite per cucina

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leq 250) \simeq \Phi\left(\frac{250 - 72 \times (10/3)}{72 \times (25/18)}\right) = \Phi(1) \simeq 0.8413$$

Esercizio 4.5.7

1. $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(2U) = 2\mathrm{E}(U) = 2/2 = 1$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(2U) = 4\mathrm{Var}(U) = 4/12 = 1/3$ dove $U \sim U(0,1)$;

2. Sia $S = X_1 + \cdots + X_{147}$. In quanto somma di variabili aleatorie i.i.d. assolutamente continue, anche S è assolutamente continua da cui $P(S < 161) = P(S \leq 161)$. Inoltre $\mathrm{E}(S) = 147$ e $\mathrm{Var}(S) = 147 \cdot \frac{1}{3} = 49$. Per il teorema centrale del limite, la f.d.r. di $\frac{S-\mathrm{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var} S}}$ converge alla f.d.r. $\mathcal{N}(0,1)$. Quindi, $P(S < 161) = F_S(161) \simeq \Phi\left(\frac{161-147}{\sqrt{49}}\right) = \Phi(2) \simeq 0.9772$.

Esercizio 4.5.8

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x;k)\, dx = 1$ se e solo se $\int_0^1 2x^{k-1}\, dx = (2/k)\, x^k|_0^1 = 2/k = 1$ da cui $k = 2$.

2. $\displaystyle\mathrm{E}(X) = \int x f(x;2)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \int_0^1 x^2 f(x;2)\, dx - \frac{4}{9} = \int_0^1 2x^3\, dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

3. $P(S_{200} > 138.816) = P\left(\frac{S_{200} - 200\mathrm{E}(X_1)}{\sqrt{200\mathrm{Var}(X_1)}} > \frac{138.816 - 2002/3}{\sqrt{\frac{200}{18}}}\right) \simeq P(Z > 1.645) = 1 - P(Z \leq 1.645) \simeq 1 - 0.95 = 0.05$

dove $Z \sim N(0,1)$ e, nell'ultimo passaggio, è stato applicato il teorema del limite centrale.

Esercizio 4.5.9

1. Media e varianza della $\mathcal{U}(a,b)$ sono date da $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ e $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema $\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2} = 20 \\ \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 12 \end{cases}$ nelle incognite a, b. Dato il vincolo $a < b$, l'unica soluzione del sistema è data da $a = 14$, $b = 26$ e $f(x)$ risulta $f(x) = \dfrac{1}{12}\mathbf{1}_{(14,26)}(x)$.

2. Poiché $f(x) = \dfrac{1}{12}\mathbf{1}_{(14,26)}(x)$ allora $P(19 < X \leq 21) = \dfrac{21-19}{12} = \dfrac{1}{6}$.

3. $\mathrm{E}(\overline{X}_{108}) = \dfrac{\sum_{j=1}^{108} \mathrm{E}(X_j)}{108} = \dfrac{108 \times 20}{108} = 20$;
La varianza di una somma di variabili aleatorie indipendenti è la somma delle varianze; quindi: $\mathrm{Var}(\overline{X}_{108}) = \mathrm{Var}\left(\dfrac{\sum_{j=1}^{108} X_j}{108}\right) = \dfrac{\sum_{j=1}^{108} \mathrm{Var}(X_j)}{108^2} = \dfrac{108 \times 12}{108^2} = \dfrac{12}{108} = \dfrac{1}{9}$.

4. Per il teorema centrale del limite, possiamo approssimare la f.d.r. di $\overline{X}_{108}$ con la fdr $\mathcal{N}(20, 1/9)$. Deriva quanto segue:

   $P(19 < \overline{X}_{108} \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21-20}{\sqrt{1/9}}\right) - \Phi\left(\frac{19-20}{\sqrt{1/9}}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \simeq 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9973.$

Capitolo 5

Miscellanea

5.1 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 5.1.1 Al casinò ogni sabato sera gioco alla roulette e punto 10 volte sul rosso. Sia X la variabile aleatoria che indica quante volte vinco.

1. Qual è la densità di X? Quanto valgono $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$?

2. Per puntare 10 volte sul rosso, pago una posta iniziale di 50 euro e ad ogni giocata o totalizzo 0 o vinco 20 euro. Qual è la probabilità di vincere 50 euro (al netto della posta)?

3. Se torno al casinò per 100 sabati consecutivi e punto ogni sabato 10 volte sul rosso, quanto vale approssimativamente la probabilità di totalizzare un numero di vittorie complessivo compreso fra 480 e 520 (inclusi)?

Esercizio 5.1.2 Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f_X(x) = |x|\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$ ed Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 indipendente da X.

(1) Determinate $\mathrm{E}(X^2)$ e $\mathrm{E}(X^3)$.

(2) Calcolate $P(X < 0.3)$.

(3) Posto $Z = X^2$ determinate la densità di Z.

(4) Calcolate media e varianza di $W = Z + Y$.

(5) Siano ora $W_1, \dots, W_{161}$ 161 variabili aleatorie i.i.d.con media $\mathrm{E}(W)$ e varianza $\mathrm{Var}(W)$ individuate al punto (4). Calcolate approssimativamente la probabilità che $W_1 + \cdots + W_{161} \in [230, 250]$.

(6) Quante variabili aleatorie i.i.d. aventi la stessa densità di W è necessario sommare affinchè $P(W_1 + \cdots + W_n \leq 250) < 0.5$?

Esercizio 5.1.3 In una rete di telecomunicazioni il numero di interruzioni in un giorno è una variabile aleatoria con densità di Poisson di media 1.

1 Calcolare la probabilità che in un giorno ci sia almeno una interruzione.

Supponiamo ora che il numero di interruzioni in giorni distinti siano indipendenti.

2 Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di giorni, tra 100 , in cui NON ci sono interruzioni della rete. Calcolare un valore approssimato di $P(X \leq 30)$.

2 Sia T la variabile aleatoria che conta il numero di giorni che intercorrono da quando comincio ad osservare la rete fino al primo giorno in cui NON ci sono interruzioni.
Dire qual è la densità di T, giustificando adeguatamente la risposta.

2 Sapendo che nei primi 3 giorni ci sono state interruzioni, calcolare la probabilità che passino ancora almeno altri 2 giorni con interruzioni della rete.

Esercizio 5.1.4 Due urne contengono 50 dadi ciascuna. In una i dadi sono regolari, nell'altra i dadi sono truccati in modo che la probabilità di ottenere 1 sia $\frac{1}{2}$ e la probabilità di ottenere ogni altro risultato è $\frac{1}{10}$.

1 Un dado viene estratto a caso (probabilità uniforme) da una delle due urne e lanciato, sia X la v.a. che indica il risultato del lancio. Si calcoli la probabilità di ottenere un 3 e la media di X.

2 Calcolare la probabilità di aver lanciato un dado truccato, sapendo che si è ottenuto un tre.

3 Consideriamo il seguente esperimento: un dado viene estratto a caso e viene lanciato due volte. Siano A l'evento "al primo lancio ottengo 2" e $B =$ "al secondo lancio ottengo 3". A e B sono indipendenti?

Esercizio 5.1.5 Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $\mathcal{U}(0, 1)$ ed Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 indipendente da X.

1. Posto $Z = -\frac{1}{3} \ln X$, si determini la densità di Z.
2. Posto $W = \frac{1}{3} Y$, si determini la densità di W.
3. Si calcoli la media e la varianza di $Z + W$.

Esercizio 5.1.6 La prova d'esame di CP è composta da una parte teorica (domande di teoria) e una parte applicata (esercizi). L'80% degli allievi che partecipano a una prova risultano sufficienti nella teoria, ma il 40% di quelli sufficienti nella teoria è INsufficiente negli esercizi. Inoltre, il 65% degli allievi che partecipano a una prova sono sufficienti negli esercizi.

1 Per un allievo INsufficiente negli esercizi, qual è la probabilità che risulti sufficiente nella teoria?

2 Per un allievo che partecipa a una prova, qual è la probabilità che risulti sufficiente nella teoria e negli esercizi e quindi che sia promosso?

3 Quanti appelli mediamente "tenta" un allievo di CP per essere promosso?

Esercizio 5.1.7 Sia T una variabile aleatoria assolutamente continua con funzione di ripartizione

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-3t^2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

1 Determinare la densità e la funzione di intensità di guasto di T.

2 Determinare $P(T = 2.5|T > 2)$ e $P(T > 2.5|T > 2)$.

3 Calcolare la densità e la media di $Y = T^2$.

Esercizio 5.1.8 Giulio, Carlo e Federico giocano al tiro con l'arco. Si sa che la probabilità che Giulio colpisca il bersaglio è pari a 3/4, quella che Carlo colpisca il bersaglio è pari ad 1/2 e quella di Federico è pari ad 1/4. Si sa inoltre che i risultati dei lanci dei tre arcieri sono indipendenti.

1 Calcolare la probabilità che nessuno di loro colpisca il bersaglio.

2 Calcolare la probabilità che esattamente due di loro colpiscano il bersaglio.

3 Calcolare la probabilità che Giulio colpisca il bersaglio sapendo che esattamente due di loro hanno colpito il bersaglio.

4 Tutti e tre hanno una forte resistenza e decidono di fare 100 tiri di allenamento. Calcolare in modo approssimato la probabilità che al più 15 volte nessuno di loro colpisca il bersaglio.

5.2 Soluzioni di alcuni esercizi del Capitolo 5

Esercizio 5.1.1

1. Le 10 puntate sul rosso sono 10 prove di Bernoulli di parametro $p = 18/37$ dal momento che ci sono 18 numeri rossi su 37. Qundi, per X che conta il numero di partite vinte si ha $X \sim Bin(10, 18/37)$ e di conseguenza $\mathrm{E}(X) = 180/37 \simeq 48.64865$, $\mathrm{Var}(X) = 180/37 \times 19/37 \simeq 2.498174$.

2. Se per puntare 10 volte sul rosso, pago una posta iniziale di 50 euro e ad ogni giocata o totalizzo 0 o vinco 20 euro, allora alla fine delle 10 partite in tasca avrò “vinto” $Y = 20X - 50$ che è uguale a 50 euro se e solo se $X = 5$, da cui si ottiene che la probabilità di vincere 50 euro (al netto della posta) è pari a
$$f_X(5) = \binom{10}{5}(\frac{18}{37})^5(\frac{19}{37})^5 \approx 0.2452$$

3. Se torno al casinò per 100 sabati consecutivi e punto ogni sabato 10 volte sul rosso, allora $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} X_i$ con $X_1, \dots, X_{100} i.i.d.$ $\mathbf{Bin}(100, 18/37)$ è il numero di vittorie complessivo e, per il teorema centrale del limite un valore approssimato della probabilità di totalizzare un numero di vittorie complessivo compreso fra 480 e 520 (inclusi) è dato da
$$P(480 \leq S_{100} \leq 520) \simeq \Phi(\frac{520 - 486.4865}{\sqrt{249.8174}}) - \Phi(\frac{479 - 486.4865}{\sqrt{249.8174}}) \simeq 0.7551$$

Esercizio 5.1.2

1. $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2|x|\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 1/2$. Mentre $\mathrm{E}(X^3) = \int_{-1}^{1} x^3|x|\,dx = 0$, essendo l'integranda una funzione dispari.

2. Si ha:
$$P(X < 0.3) = -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^{0.3} x\,dx = 1/2 + 0.09/2$$

3. $f_Z(x) = \dfrac{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1) \end{cases} \implies Z \sim U(0,1).$

4. $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(Z) + \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X^2) + 1 = 1/2 + 1 = 3/2$. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(X^4) - (\mathrm{E}(X^2))^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$,
quindi per l'indipendenza di Z e Y: $\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) = 1/12 + 1 = 13/12$.

5. $W_1, \dots W_{161}$ son v.a. i.i.d. con $\mathrm{E}(W_1 + \cdots + W_{161}) = 241.5$ e $\mathrm{Var}(W_1 + \cdots + W_{161}) = 161 \times 13/12 \simeq 174.4167$. Per il teorema centrale del limite:
$$P(230 \leq W_1 + \cdots + W_{161} \leq 250) = P\left(\frac{230 - 241.5}{\sqrt{161 \times 13/12}} \leq \frac{W_1 + \cdots + W_{161} - 241.5}{\sqrt{161 \times 13/12}} \leq \frac{250 - 241.5}{\sqrt{161 \times 13/12}}\right)$$
$$\simeq \Phi(0.64) - \Phi(-0.87) = 0.7401 - 0.1919 = 0.5482$$

6. $W_1, \dots W_n$ v.a. i.i.d. con $\mathrm{E}(W_1 + \cdots + W_n) = n(3/2)$ e $\mathrm{Var}(W_1 + \cdots + W_{161}) = n(13/12)$. Per il teorema centrale del limite:
$$0.5 > P(W_1 + \cdots + W_n \leq 250) = P\left(\frac{W_1 + \cdots + W_n - 3n/2}{\sqrt{13n/12}} \leq \frac{250 - 3n/2}{\sqrt{13n/12}}\right)$$

Quindi:
$$\frac{250 - 3n/2}{\sqrt{13n/12}} < 0,$$
da cui $n > 250 \times 2/3 = 166.6667$, ovvero $n \geq 167$.

Esercizio 5.1.3

1. Sia Y la variabile aleatoria che rappresenta il numero di interruzioni in un giorno. $Y \sim Poiss(1)$ e la probabilità richiesta è:
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \simeq 1 - 0.368 = 0.632.$$

2. X conta il numero di successi (giorni senza interruzioni) in 100 prove di Bernoulli di parametro $p = P(Y = 0) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0.368$, quindi $X \sim Bin(100, \mathrm{e}^{-1})$. Inoltre $\mathrm{E}(X) = 100 \times \mathrm{e}^{-1} \simeq 36.8$ e $\mathrm{Var}(X) = 100 \times \mathrm{e}^{-1} \times (1 - \mathrm{e}^{-1}) \simeq 23.26$ Applicando il teorema centrale del limite con correzione di continuità otteniamo:
$$\begin{aligned} P(X \leq 30) = P(X \leq 30.5) &= P\left(\frac{X - 36.8}{\sqrt{23.26}} \leq \frac{30.5 - 36.8}{\sqrt{23.26}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{30.5 - 36.8}{\sqrt{23.26}}\right) \simeq \Phi(-1.31) = 1 - \Phi(1.31) \simeq 1 - 0.9049 = 0.0951. \end{aligned}$$

3. T rappresenta il tempo di attesa del primo successo (giorno in cui non ci sono interruzioni) in una successione di prove di Bernoulli con probabilità di successo in ogni prova uguale a $p = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0.368$. Quindi T ha densità geometrica di parametro $p = 0.368$.

4. Per la proprietà di assenza di memoria della densità geometrica
$$P(T > 3 + 2 | T > 3) = P(T > 2) = (1 - \mathrm{e}^{-1})^2 \simeq (1 - 0.368)^2 \simeq 0.399$$

Esercizio 5.1.4

1 Sia T = "il dado scelto è truccato". Allora:
$$P(X = 3) = P(X = 3|T)P(T) + P(X = 3|T^c)P(T^c) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15}.$$

È facile verificare che $p_X(k) = P(X = k) = 2/15$, per ogni $k = 2, 3, 4, 5, 6$ e quindi $p_X(1) = 1 - 5 \times (2/15) = 5/15 = 1/3$. Segue che
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k P_X(k) = \frac{1}{3} \times 20 \times \frac{2}{15} = 3$$

2 Applichiamo il teorema di Bayes:
$$P(T|X = 3) = \frac{1/10 \times 1/2}{2/15} = \frac{3}{8}.$$

3 Verifichiamo se vale la relazione $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Essendo
$$P(A \cap B) = P(A \cap B|T)P(T) + P(A \cap B|T^c)P(T^c) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{2} \neq \left(\frac{2}{15}\right)^2 = P(A)P(B)$$
allora A e B non sono indipendenti.

Esercizio 5.1.5

1. Si ha $P(Z \leq t) = P(-\log(X) \leq 3t) = P(X \geq \mathrm{e}^{-3t})) = 1 - \mathrm{e}^{-3t}$ se $t > 0$ e $P(Z \leq t) = 0$ altrimenti, quindi Z è una variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.

2. Analogamente $P(W \leq t) = P(Y \leq 3t) = 1 - \mathrm{e}^{-3t}$, se $t > 0$ e $P(W \leq t) = 0$ altrimenti, da cui $W \sim \mathcal{E}(3)$.

3. W e Z sono due v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{E}(3)$, la loro somma è variabile aleatoria $\sim \Gamma(2,3)$. La media di $W+Z$ è quindi $dfrac23$ e la varianza è $\frac{2}{9}$.

Esercizio 5.1.6 Siano D, E gli eventi dati da $D =$"*Un allievo scelto a caso è sufficiente nella teoria*" ed $E =$"*Un allievo scelto a caso è sufficiente negli esercizi*". I dati a nostra disposizione sono: $P(D) = 0.8, P(E^c|D) = 0.4$ e $P(E) = 0.65$. Procediamo a rispondere:

1 Applicando la formula di Bayes abbiamo:

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D)P(D)}{P(E^c)} = \frac{0.4 \times 0.8}{1-0.65} = \frac{32}{35} \simeq 0.914.$$

2 $P(D \cap E) = P(E|D)P(D) = (1 - P(E^c|D))P(D) = (1-0.4) \times 0.8 = 0.48$

3 Modelliamo una sequenza di appelli come una sequenza di prove di Bernoulli di parametro $p = P(D \cap E) = 0.48 =$ probabilità di essere promosso. Allora, la variabile aleatoria $X =$ "# di appelli da "tentare" per superare l'esame" è una variabile aleatoria geometrica di parametro 0.48 e quindi di media $\mathrm{E}(X) = 1/0.48 \simeq 2.1$. Deduciamo che in media un allievo impiega più o meno 2 appelli per superare CP.

Esercizio 5.1.7

1 Se $t \neq 0$ allora, indicata con $f_T(t)$ la densità di T, si ha

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 6t\mathrm{e}^{-3t^2} I_{(0,+\infty)}(t).$$

Indicata con $\lambda(t)$ l'intensità di guasto di T, vale per $t > 0$

$$\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{6t\mathrm{e}^{-3t^2}}{\mathrm{e}^{-3t^2}} = 6t$$

2

$$P(T = 2.5|T > 2) = \frac{P(T = 2.5)}{P(T > 2)} = 0$$

poiché T è assolutamente continua e quindi $P(T = 2.5) = 0$.

$$P(T > 2.5|T > 2) = \frac{P(T > 2.5)}{P(T > 2)} = \frac{\mathrm{e}^{-3\times(2.5)^2}}{\mathrm{e}^{-3\times 2^2}} = \mathrm{e}^{-3\times(2.5^2-2^2)} = \mathrm{e}^{-3\times 2.25} \simeq 0.0012.$$

3 Ovviamente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$. Se $y \geq 0$ invece

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(T^2 \leq y) = P(T \leq \sqrt{y}) = 1 - \mathrm{e}^{-3y}.$$

Quindi, derivando $F_Y(y)$ per $y \neq 0$, si ottiene che la densità di Y è

$$f_Y(y) = 3\mathrm{e}^{-3t} I_{(0,+\infty)}.$$

Oppure:

poiché $P(T > 0) = 1$ e $y = g(x) = x^2$ è una funzione differenziabile con continuità con derivata diversa da 0 su $(0, +\infty)$, posso applicare la formula

$$f_{T^2}(y) = f_T(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| I_{g(0,+\infty)}(y)$$

dove g^{-1} è la funzione inversa di g su $(0, +\infty)$. Quindi

$$f_{T^2}(y) = f_T(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(y) = 6\sqrt{y}\mathrm{e}^{-3y} \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(y) = 3\mathrm{e}^{-3y} I_{(0,+\infty)}(y).$$

Segue che $T^2 \sim exp(3)$ e $\mathrm{E}(T^2) = 1/3$.

Esercizio 5.1.8

1 Introduciamo gli eventi $E_1 =$ " Giulio colpisce il bersaglio", $E_2 =$ " Carlo colpisce il bersaglio", $E_3 =$ "Federico colpisce il bersaglio" ed $A =$ " Nessuno dei tre colpisce il bersaglio."

Si ha $P(A) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = \frac{3}{32}$.

2 Sia $D =$ " Esattamente due di loro colpiscono il bersaglio". Allora $D = (E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap E_3)$. Grazie al fatto che gli eventi che compongono D sono a due a due disgiunti, si ha:

$$P(D) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{13}{32}$$

3 Dobbiamo calcolare $P(E_1|D)$. Per definizione di probabilità condizionata si ha:

$$\begin{aligned} P(E_1|D) = \frac{P(E_1 \cap D)}{P(D)} &= \frac{P((E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3))}{P(D)} \\ &= \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3)}{P(D)} = \frac{12 \cdot 32}{13 \cdot 32} = \frac{12}{13} \simeq 0.9231. \end{aligned}$$

4 Introduciamo le v.a. X_i che valgono 1 se all'i-esimo tiro nessuno ha colpito il bersaglio e 0 altrimenti. Possiamo pensare che gli esiti dei 100 lanci siano indipendenti, quindi la v.a. S che conta il numero di volte in cui nessuno dei tre tiratori colpisce il bersaglio ha densità binomiale di parametri $n = 100$ e $p = P(A) = \frac{3}{32}$. Dobbiamo calcolare $P(S \leq 15)$.

Dal momento che $n \cdot p = 100 \cdot \frac{3}{32} > 5$ e $n \cdot (1 - p) = 100 \cdot \frac{29}{32} > 5$, possiamo applicare il teorema centrale del limite:

$$P(S \leq 15) \simeq \Phi(\frac{15.5 - 300/32}{\sqrt{3/32 \cdot 29/32 \cdot 100}}) \simeq 0.9822$$

[senza correzione di continuità viene $\Phi(\frac{15-300/32}{\sqrt{3/32 \cdot 29/32 \cdot 100}}) \simeq 0.9732$]

Bibliografia

[1] Baldi, P. Giuliano R., Ladelli, L. (1995) *Laboratorio di Statistica e Probabilità, problemi svolti*, Mc Graw Hill Italia.

[2] Bramanti, M. (1998) *Calcolo delle probabilità e statistica*, Progetto Leonardo Bologna.

[3] Cacoullos, T. (1989) *Exercises in probability* Springer New York.

[4] Feller, W. (1950) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley & Sons.

[5] Epifani, I., Ladelli, L.M. e Posta, G. (2006) *Appunti per il corso di Calcolo delle Probabilità*, AA 2005/2006

[6] Hsu, H. (1998) *Probabilità, variabili casuali e processi stocastici*, Schaum's n. 93. Mc Graw Hill Italia.

[7] Mood, A. M., Graybill, F. A., Boes, D.C. (1988) *Introduzione alla statistica*, Mc Graw Hill Italia.

[8] Ross, S.M. (2015) *Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze, Terza Ed.* Editore Apogeo Education.

[9] Ross, S.M. (2007) *Calcolo delle probabilità*, Apogeo.

[10] Trivedi, K S. (2002) *Probability and statistics with reliability, queuing, and computer science applications*, 2. ed. Wiley New York.