1.0

Binomio di Newton: Dimostrazione

$$P(n) = \left\{ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right\}$$

1) $$P(0) = \left\{ (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 + b^0 = 1 \right\} \checkmark$$

$$P(1) = \left\{ (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a+b \right\} \checkmark$$

2) $$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k = (a+b)^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{P(n)} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h =$$

$h = k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + \binom{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{n+\cancel{1}-\cancel{1}} a^{\cancel{n+1-n-1}} b^{n+1} =$$

$n : \{1, 2, \dots\}$
$k : 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n$
$h : 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n+1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n} a^{n+1-h} b^h + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right] + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k$$

DIMOSTRATO!

1.1

$(2,3) \sim (1,2) \Leftrightarrow 2+2 = 3+1 = 4$

!! $2-3 = -1 = 1-2$!!

$(5,8) \sim (3,6) \Leftrightarrow 5+6 = 8+3$

!! $5-8 = -3 = 3-6$!!

1.2

Dimostrazione $- \times - = +$

$2 \cdot (-3) = -3 - 3 = -6$

$(-2)(-3) = ?$ Dim: $0 = b \cdot 0 = b(a-a) = ba + b(-a) = ba - ba = ab - (-a)(-b) = 0$

$\hookrightarrow \underline{ab = (-a)(-b)}$

$\Downarrow$

$\underline{2 \cdot 3 = (-2)\cdot(-3) = 6}$

1.3

Dimostrazione $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (per assurdo)

Supponiamo $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \mid x = \frac{m}{n} \Rightarrow m, n$ non hanno fattori comuni.

allora $\exists\, x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow \exists\, K \mid m^2 = 4K^2 \Rightarrow \underline{m^2 = 4K^2 = 2n^2} \rightarrow$ fattore comune $= 2$

$\hookrightarrow$ ASSURDO: per Hp m ed n non hanno fattori comuni

1.1

1. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Rightarrow \nexists \, Sup(E), Inf(E)$

2. $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x-2} \leq 0\right\} = [1;2) \Rightarrow Sup(E) = 2, \underline{Inf(E) = 1 = min(E)}$

   LIMITATO INF.

3. $E = \left\{x = n - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \Rightarrow \underline{Inf(E) = min(E) = 0}$, non è superiormente limitato

   LIMITATO INFERIORMENTE

   $\hookrightarrow \forall M > 0, \exists \bar{x} \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \bar{x} > M$

$$\frac{\bar{n}^2 - 1}{n} > M \qquad \frac{n^2 - M\bar{n} - 1}{n} > 0$$

$$\bar{n} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

$$\hookrightarrow \bar{n} > \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

ESTREMI DI UN'INSIEME

(1) $E = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \mid t \in \mathbb{R} \quad t>2 \right\}$

sempre possibile

$x > 0 \quad \forall t \in E \Rightarrow$ 0 è un minorante, ma non il più piccolo.

1 è un minorante

↳ è il più grande?

$\forall \varepsilon > 0$ $1+\varepsilon$ non è un minorante $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \exists \bar{x} \in E \mid \bar{x} \leq 1+\varepsilon \\ \exists \bar{t} \in \mathbb{R} \mid \frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} < 1+\varepsilon \end{array}}$ equivale a: $\Rightarrow$ si dice che $\bar{x}$ è l'estremo inferiore

piccolo

$$\frac{\bar{t}+1-(1+\varepsilon)(\bar{t}-2)}{\bar{t}-2} < 0 \Rightarrow \bar{t}+1-(\bar{t}-2+\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon) < 0$$

$$\cancel{\bar{t}}+1-\cancel{\bar{t}}+2-\bar{t}\varepsilon-2\varepsilon < 0 \Rightarrow -\bar{t}\varepsilon < 2\varepsilon-3$$

$$\bar{t} > 2+\frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow \exists \bar{t} \in \mathbb{R}$$

$\nexists$ l'estremo superiore $\Rightarrow$ $\forall \underset{M>0}{M \in \mathbb{R}} \; \exists \underset{t_1>2}{t_1 \in \mathbb{R}} \mid \frac{t_1+1}{t_1-2} > M \Rightarrow$

grande

$$t_1+1-Mt_1-2M > 0$$

$$t_1(1-M)+2M-1 > 0$$

$$t_1(1-M) > -2M+1$$

$$t_1(1-M) < 2M+1 \Rightarrow t_1 < \frac{2M+1}{1-M} \Rightarrow 2 < t_1 < \frac{2M+1}{1-M}$$

$\exists t_1$

② $E = \left\{ x = \frac{n^2 - 1}{3n^2} + \frac{2}{3} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

se voglio calcolare E, posso farlo: $\left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{4} + \frac{2}{3}; \frac{8}{27} + \frac{2}{3}; \dots \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}$ è sicuramente un minorante, appartiene all'insieme $\Rightarrow$ è minimo e estremo inferiore

qual è un possibile maggiorante? $\frac{n^2 - 1}{3n^2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{n^2} - 1 \cancel{- n^2}}{3n^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3n^2} > 0 \Rightarrow 3n^2 > 0$

$\bar{x} = \frac{n^2 - 1}{3n^2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow 1$ è un maggiorante, ma è il più piccolo?

$\exists\, \bar{x} \in E \mid \bar{x} > 1 - \varepsilon \Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \frac{\bar{n}^2 - 1}{3\bar{n}^2} + \frac{2}{3} > 1 - \varepsilon$

$\bar{n}^2 - 1 + 2\bar{n}^2 - (1 - \varepsilon) 3\bar{n}^2 > 0 \quad \cancel{\bar{n}^2} - 1 + \cancel{2\bar{n}^2} - \cancel{3\bar{n}^2} + 3\varepsilon\bar{n}^2 > 0$

$3\varepsilon\bar{n}^2 - 1 > 0 \quad \bar{n}^2 > \frac{1}{3\varepsilon} \Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\downarrow$

È il più piccolo perché riesco a costruire un numero più piccolo

③ $E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subseteq \mathbb{R}$ (soluzione $\mathrm{Inf}(E) = -\sqrt{2}$; $\mathrm{Sup}(E) = \sqrt{2}$)