Teorema Spettrale

Prof.
Marco
Compagnoni

TEOREMA SPETTRALE:

- Omomorfismo aggiunto
- Endomorfismi autoaggiunti
- Caratterizzazione matriciale

SEZIONE 9.5

- Omomorfismi ortogonalmente diagonalizzabili
- Caratterizzazione matriciale
- Teorema spettrale

SEZIONE 9.6

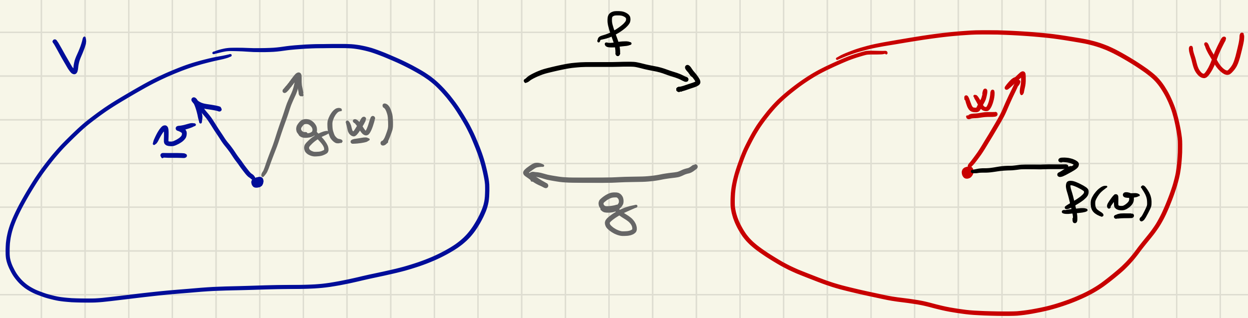
Endomorfismi Aggiunti (9.5)

Definizione 9.22

$(V, \langle , \rangle_V)$, $(W, \langle , \rangle_W)$ s.v.e., $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Allora $g \in \mathrm{Hom}(W,V)$ si dice aggiunto di f se

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle_W = \langle \underline{v}, g(\underline{w}) \rangle_V \qquad \forall\, \underline{v} \in V,\ \underline{w} \in W.$$



Proposizione 9.23

i) se g esiste allora è unico ed è denotato con $g = f^*$;

ii) se V, W sono f.g. allora f^* esiste.

PROPOSIZIONE 9.25

$\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, .., \underline{v}_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, .., \underline{w}_m\}$ basi o.n. Allora $g = f^*$ se e solo se $G_{|\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}^T$.

DIM: f^* è rappresentato da

$$F^*_{|\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = \left[f^*(\underline{w}_1)_{|\mathcal{B}_V} \ \cdots \ f^*(\underline{w}_m)_{|\mathcal{B}_V} \right] =$$

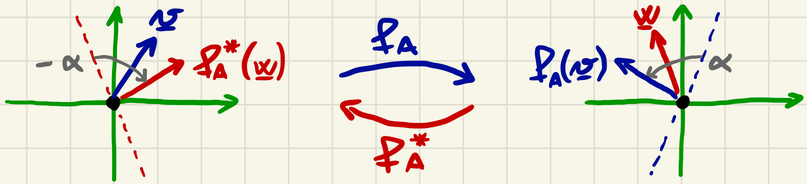
$$= \begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1, f^*(\underline{w}_1) \rangle & \cdots & \langle \underline{v}_1, f^*(\underline{w}_m) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{v}_n, f^*(\underline{w}_1) \rangle & \cdots & \langle \underline{v}_n, f^*(\underline{w}_m) \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f(\underline{v}_1), \underline{w}_1 \rangle & \cdots & \langle f(\underline{v}_1), \underline{w}_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f(\underline{v}_n), \underline{w}_1 \rangle & \cdots & \langle f(\underline{v}_n), \underline{w}_m \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\underline{v}_1)_{|\mathcal{B}_W}^T \\ \vdots \\ f(\underline{v}_n)_{|\mathcal{B}_W}^T \end{bmatrix} = F_{|\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}^T$$

Viceversa, se $G = F^T \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(g) = \phi_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f^*) \Rightarrow g = f^*$ $\blacksquare$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \operatorname{sen}(-\alpha) \\ -\operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$f_A \in SO(\mathbb{R}^2)$ rotazione di α, $f_A^* \in SO(\mathbb{R}^2)$ rotazione di $-\alpha$.



DEFINIZIONE 9.2

$f \in End(V)$ si dice autoaggiunto se $f^* = f$, cioè

$$< f(\underline{v}), \underline{w} >_V = < \underline{v}, f(\underline{w}) >_V \qquad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

L'insieme delle f autoaggiunte è $\mathcal{S}(V)$.

PROPOSIZIONE 9.28 (caratterizzazione se $\dim(V) = n < \infty$)

i) $\mathcal{S}(V)$ è un sottospazio vettoriale di $End(V)$;

ii) $\mathcal{B}$ base o.n. $\Rightarrow \phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(n; \mathbb{R})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, quindi $f = f^*$ sse $F_{|\mathcal{B}} = F_{|\mathcal{B}}^T$.

- $\alpha \cdot Id_V \in S(V)$, in particolare $Id_{\mathbb{R}^2}, -Id_{\mathbb{R}^2}$ sono le uniche rotazioni autoaggiunte.

- P_U, R_U : $\quad \mathcal{B}_U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\} \quad \mathcal{B}_{U^\perp} = \{\underline{\tilde{u}}_1, \dots, \underline{\tilde{u}}_m\}$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{U^\perp}$ è base di V

$$P_{U|\mathcal{B}} = \left[P_U(\underline{u}_1)_{|\mathcal{B}} \dots P_U(\underline{u}_n)_{|\mathcal{B}} \mid P_U(\underline{\tilde{u}}_1)_{|\mathcal{B}} \dots P_U(\underline{\tilde{u}}_m)_{|\mathcal{B}} \right] =$$

$$= \left[\underline{u}_{1|\mathcal{B}} \dots \underline{u}_{n|\mathcal{B}} \mid \underline{0}_{|\mathcal{B}} \dots \underline{0}_{|\mathcal{B}} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{nm} \\ \hline 0_{mn} & 0_{mm} \end{array}\right] \in S(n+m; \mathbb{R})$$

$$R_{U|\mathcal{B}} = \dots = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{nm} \\ \hline 0_{mn} & -I_m \end{array}\right] \in S(n+m; \mathbb{R})$$

$\Rightarrow P_U, R_U \in S(V)$.

Applicazioni Ortogonalmente Diagonalizzabili (9.6)

Definizione 9.30

V s.v.e. , $f \in End(V)$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base o.n. di V composta da autovettori di f.

Lemma 9.31 ($\dim(V) = n < \infty$)

$\mathcal{B}$ base o.n. $\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ è base o.n. sse $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \in O(n;\mathbb{R})$.

Proposizione 9.32 (caratterizzazione se $\dim(V) = n < \infty$)

$\mathcal{B}$ base o.n. $\Rightarrow$ f è o.d. sse esiste $Q \in O(n;\mathbb{R})$ t.c.

$$Q^T F_{\mathcal{B}} Q = D \quad , \quad \text{dove} \quad D \in \mathcal{D}(n;\mathbb{R}).$$

Dim: f è diagonalizzabile sse esiste $S \in GL(n;\mathbb{R})$ t.c. $S^{-1} F_{\mathcal{B}} S = D$. Ma $S = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ con $\mathcal{B}'$ base autovettori $\overset{\text{LEMMA}}{\Longrightarrow}$ f è ortogonalmente diagonalizzabile sse $S \in O(n;\mathbb{R})$. ∎

Teorema Spettrale

Teorema 9.33 ($\dim(V) < \infty$)

f è autoaggiunto sse è ortogonalmente diagonalizzabile.

P_U e R_U sono o.d., basta prendere l'unione di due basi o.n. di U e $U^\perp$.

Proposizione 9.38

$A \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ può essere decomposta come $A = QDQ^T$ con $Q \in O(n;\mathbb{R})$ sse $A \in S(n;\mathbb{R})$.

Dim: f_A è o.d. sse esiste Q t.c. $D = Q^TAQ$ sse $A = QDQ^T$. Per il teorema spettrale, ciò è possibile sse f_A è autoaggiunta, cioè sse A è simmetrica. $\boxed{/}$

OSS: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, Q ha come colonne gli autovettori di A.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in S(2;\mathbb{R}) \Rightarrow f_A$ è s.d.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A| = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$V_1 = Ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$V_{-1} = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right\}$ è o.n. , $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in O(2;\mathbb{R})$

$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \Delta$

COROLLARIO 9.37

$f \in S(V)$ con λ_1, λ_2 distinti $\Rightarrow V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.