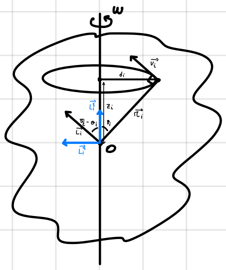
11.1 ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO

...

Calcoliamo il momento angolare di un corpo rigido in rotazione rispetto ad un'asse con polo sull'asse:



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \to L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i d_i \omega$

Momento angolare assiale: $L_i^z = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right) = m_i \underbrace{r_i d_i \omega \sin\theta_i}_{d_i = r_i \sin\theta_i} = m_i d_i^2 \omega$

Momento angolare radiale: $L_i^r = L_i \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right) = m_i r_i d_i \omega \cos\theta_i = m_i d_i z_i \omega$

↓

$L_z = \sum L_i^z = \sum m_i d_i^2 \omega = \omega I_z$

$L_r = \sum L_i^r = \sum m_i d_i z_i \omega = \omega \sum m_i d_i z_i$

Ci sono casi in cui il momento angolare è solo assiale, ad esempio quando è piano. Inoltre, esiste sempre una terna di assi per i quali se il corpo ruota intorno a uno di essi il momento angolare è assiale. Questi assi sono gli assi principali d'inerzia.

Studiamo la seconda equazione cardinale nel caso in cui il corpo ruoti intorno agli assi principali:

$$\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d I_z \omega}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

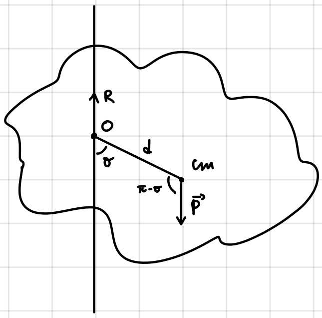
11.2 TRASLAZIONE DI UN CORPO RIGIDO

Studiamo come agiscono le forze su un corpo rigido.

$$\vec{P} = \int \vec{g}\, dm = \vec{g}\int dm = M\vec{g} \Rightarrow \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm = \int \vec{r}\, dm \times \vec{g} = M \underbrace{r_{cm}}_{r_{cm} = \frac{\int r\, dm}{M}} \times \vec{g} = r_{cm} \times \vec{P}$$

Quindi le forze vanno applicate nel centro di massa. Di conseguenza studiare la traslazione di un corpo rigido equivale a studiare la traslazione del suo centro di massa.

ESERCIZI



Corpo piano → momento angolare assiale

$M_z = -mg\, d \sin(\pi-\theta) = -Mg\, d \sin\alpha = I\alpha \to \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0 \to \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$

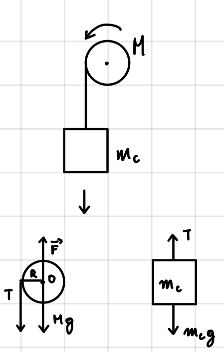
↳ ci dobbiamo limitare alle piccole oscillazioni

⇓

$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}}\,t + \varphi\right)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^*}{g}}$

$L^* = \frac{I}{md}$ (Lunghezza ridotta)



$a_c = ?$

$T = ?$

La carrucola è piana e ruota lungo un asse principale → momento ang assiale.

$\vec{F}^E = 0 \to \begin{cases} T + Mg = F \\ m_c g - T = m_c a \end{cases}$

$\vec{M}^E \to TR = I\alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} m_c g - T = m_c a \\ TR = I\frac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m_c}{\left(m_c + \frac{I}{R^2}\right)} g \\ T = \frac{Ia}{R^2} \end{cases} \to T = \frac{I}{R^2}\frac{m_c}{(m_c + I/R^2)} g = \dots = \frac{m_c M g}{M + 2m_c}$

ottenuto da $a = R\alpha$

a sua ottenuto studiando la corr. ($\Delta x = R\theta$)