GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 03/05/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. *Siano date le rette*

$$r : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = -3 + t \\ z(t) = -1 + 3t \end{cases} \qquad e \qquad s_h : \begin{cases} x - hy + (-1+h)z = 0 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases} .$$

(1) *Studiare la posizione reciproca di r e s_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.*
(2) *Posto $h = 0$, trovare il piano π contenente s_0 e parallelo ad r.*
(3) *Posto $h = 0$, dire se il piano contenente r e parallelo ad s_0 interseca un punto dell'asse x.*

Soluzione. Punto 1.
Soluzione A: Se $h \neq 2$ la retta r interseca il piano $x - hy + (-1+h)z = 0$ nel punto le cui coordinate si ottengono dalle equazioni parametriche di r ponendo $t = \frac{h+1}{h-2}$ e interseca il piano $(1+h)y + (1-h)z = 2h$ nel punto le cui coordinate si ottengono dalle equazioni parametriche di r ponendo $t = \frac{2h+2}{-h+2}$, pertanto r interseca s_h se e solo se tali punti coincidono e quindi se e solo se $h + 1 = -(2h+2)$ ovvero se e solo se $h = -1$. Se $h = 2$ la retta r risulta parallela ad entrambi i piani che individuano la retta s_2 senza giacere su alcuno di essi. Se $h \neq -1, 2$ allora r ed s_h sono rette sghembe.
Soluzione B: La retta r ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

quindi per decidere la mutua posizione delle due rette r e s_h dobbiamo considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x + z = 2 \\ x - hy + (-1+h)z = 0 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases} .$$

Facendo le mosse $R2 \to R2 - 3R1$ e $R3 \to R3 - R1$ si ottiene

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3y + z = 8 \\ -(h+1)y + (-1+h)z = 2 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases} ,$$

da cui facendo $R4 \to R4 - R3$ e $R3 \to 3(R3 - \frac{h+1}{3}R2)$ si ottiene

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3y + z = 8 \\ (2h-4)z = 5 - h \\ 0 = 2h + 2 \end{cases} .$$

Ne segue che se $h \neq -1, 2$ il rango della matrice completa del sistema è 4 mentre il rango della matrice dei coefficienti è 3, il sistema è impossibile e le due rette sono sghembe. Se $h = -1$ il rango della matrice dei coefficienti e di quella completa sono entrambi 3, il

sistema ha una e una sola soluzione e le due rette sono incidenti. Se $h = 2$ il rango della matrice completa è 3 quello della mtrice dei coefficienti è 2, il sistema è impossibile e le due rette sono parallele.
Punto 2: Il fascio di piani che ha per sostegno la retta s_0 ha equazione $\lambda(x-z)+\mu(y+z-2) = 0$. La retta r non ha intersezioni col generico piano del fascio solo se $-4\lambda + 4\mu = 0$ dunque solo se $\lambda = \mu$ da cui si ottiene l'equazione del piano richiesto: $x + y - 2 = 0$.
Punto 3: Dalle equazioni cartesiane della retta r si ottiene che il fascio di piani di sostegno r ha equazione $\lambda(x+y+2)+\mu(3x+z-2) = 0$. La retta s_0 non ha intersezioni col generico piano del fascio solo se $\mu = 0$ dunque il piano contenente r e parallelo ad s_0 ha equazione $x + y + 2 = 0$ ed incontra l'asse x nel punto di coordinate $(-2, 0, 0)$.

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale reale* $V = \mathbb{R}_3[x]$*, siano*

$$U = \{P(x) \in V \mid P(1) = 0\} \qquad e \qquad W = \{P(x) \in V \mid P(0) = 0, P''(0) = 0\}.$$

(1) *Calcolare una base di* U*, ed una di* W *e la dimensione dei sottospazi* U *e* W*.*
(2) *Calcolare una base e la dimensione di* $U + W$ *e di* $U \cap W$*.*
(3) *Estendere la base trovata per* $U \cap W$ *ad una base di* V*.*

Soluzione. Punto 1. Si ha $U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d|\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a + b + c + d = 0\}$, $W = \{ax^3 + cx|\ a, c \in \mathbb{R}\}$. Se riferiamo V alla base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ i vettori di U sono rappresentati come $\{[a, b, c, -a - b - c]^T|\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e quelli di W come $\{[a, 0, c, 0]^T|\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Quindi i vettori $\{[1, 0, 0, -1]^T, [0, 1, 0, -1]^T, [0, 0, 1, -1]^T\}$ sono un sistema di generatori per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che rappresenta U ed è immediato verificare che sono linearmente indipendenti, pertanto $\dim(U) = 3$ e una base di U formata dai polinomi $\{x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$, analogamente si ottiene che i vettori $\{[1, 0, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 0]^T\}$ sono una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che rappresenta W e dunque $\dim(W) = 2$ e una base di W formata dai polinomi $\{x^3, x\}$.
Punto 2. Si verifica facilmente che i vettori $\{[1, 0, 0, -1]^T, [0, 1, 0, -1]^T, [0, 0, 1, -1]^T, [1, 0, 0, 0]^T\}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(U + W) = 4$, e $U + W = \mathbb{R}_3[x]$ per cui una base di $U + W$ è $\{x^3, x^2, x, 1\}$. Per la formula di Grassmann, si ricava $\dim(U \cap W) = 1$, il vettore $x^3 - x$ appartiene sia ad U sia a W e quindi è una base di $U \cap W$.
Punto 3. Applicando il procedimento delle eliminazioni successive a $\{x^3 - x, x^3, x^2, x, 1\}$ si ottiene subito che $\{x^3 - x, x^3, x^2, 1\}$ è una base di V.

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base di partenza $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}\}$ *e alla base di arrivo* $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}\}$*.*

(1) *Determinare una base e la dimensione di* $\mathrm{Im}(f)$*, di* $\ker(A)$ *e di* $\ker(f)$*.*
(2) *Calcolare le coordinate di* $\mathbf{v} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ *rispetto alla base di* $\mathrm{Im}(f)$ *e trovare le controimmagini di* $\mathbf{v}$*.*
(3) *Sia* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*. Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare* $f + g$ *e stabilire i valori di* h *per cui l'applicazione risulta invertibile.*

Soluzione. Punto 1. Si ha $rk(A) = 2$ e dunque $\dim(\ker(A)) = 1$. Per trovare $\ker(A)$ dobbiamo determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che sono date dai vettori $\{[4t, -3t, t]^T | \ t \in \mathbb{R}\}$, quindi una base di $\ker(A)$ è $[4, -3, 1]^T$. Questo ci dice anche che $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(A)) = 1$ e che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Dobbiamo ora trovare la matrice A' che rappresenta l'applicazione lineare f rispetto alle basi canoniche. Quindi o si utilizzano le formule per i cambiamenti di base o si ricorda che le colonne della matrice che rappresenta una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale W quando V riferito ad una base $\mathcal{B}$ e W ad una base $\mathcal{C}$ sono le coordinate delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. Quindi abbiamo $f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = f(\mathbf{e_1})+f(\mathbf{e_2}) = 1\mathbf{e_2}+2(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})+1(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1}+4\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$, $f(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = f(\mathbf{e_2})+f(\mathbf{e_2}) = 1\mathbf{e_2}+3(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = 3\mathbf{e_1}+4\mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_3}) = -1\mathbf{e_2}+1(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})-4(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = 1\mathbf{e_1}-4\mathbf{e_1}-4\mathbf{e_3}$, da cui ricaviamo $f(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1}+8\mathbf{e_2}+4\mathbf{e_3}$ e $f(\mathbf{e_1}) = -4\mathbf{e_2}-3\mathbf{e_3}$. Pertanto si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Da qui, essendo le prime due colonne di A' linearmente indipendenti e $rk(A') = 2$ si ottiene che una bese per $\mathrm{Im}(f)$ è formata dalle prime due colonne di A'. Una base per $\ker(f)$ si trova cercando una autosoluzione del sistema lineare omogeneo $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e risulta essere $[4, 1, -2]^T$.

Punto 2. Le coordinate di $\mathbf{v} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ rispetto alla base di $\mathrm{Im}(f)$ sono le soluzioni del sistema corrispondente all'equazione matriciale $x[0, -4, -3]^T + y[2, 8, 4]^T = [-1, 0, 1]^T$ ovvero $x = -1$, $y = \frac{-1}{2}$. Poiché $[0, -4, -3]^T = f(\mathbf{e_1})$ e $[2, 8, 4]^T = f(\mathbf{e_1})$, si ottiene $\mathbf{v} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3} = -f(\mathbf{e_1}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{e_2})$ quindi una sua contrimmagine è $-\mathbf{e_1} - \frac{1}{2}\mathbf{e_2}$. Tutte le controimmagini si ottengono aggiungendo a questa soluzione particolare tutti i vettori di $\ker(f)$.

Punto 3. La matrice che rappresenta l'applicazione lineare $f + g$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & h & -4 \end{pmatrix}.$$

Con la solita procedura del cambiamento di base è possibile scrivere anche la matrice che rappresenta $f + g$ rispetto alle basi canoniche. L'applicazione $f + g$ è invertibile se e solo se è rappresemtata (rispetto a una base qualsiasi da una matrice invertibile e dundue se e solo se $\det(A + B) \neq 0$, da cui si ha $h \neq 15$.