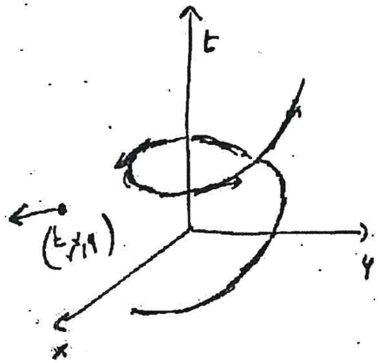
Soluz. per $\underline{\dot y} = f(t, \underline{y})$ caso bidimensiol.

$$\begin{cases}\dot x = f_1(t,x,y)\\ \dot y = f_2(t,x,y)\end{cases}$$

soluz su I $\quad f: \Omega \subset R\times R^2 \to R^2$

$\varphi(t) = (x(t), y(t))$

Graf. $\varphi = \{(t, x(t), y(t)) : t\in I\}$



$(1, \dot x(t), \dot y(t)) = (1, f_1(t,x,y), f_2(t,x,y))$

fornisce un campo di direzioni in R^3

Es. $\begin{cases}\dot x = x\\ \dot y = 2y\end{cases}$ $\quad \varphi(t) = (c_1e^{t}, c_2e^{2t})$

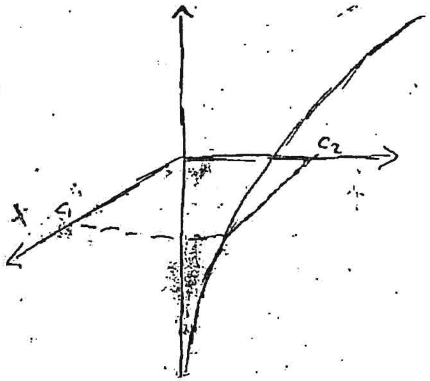


grafico della soluzione particolare ottenuta con costanti c_1, c_2 -

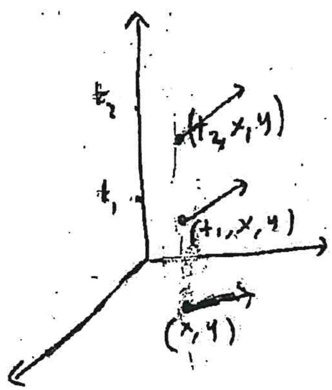
SISTEMI AUTONOMI

$\underline{\dot y} = \underline{f}(\underline{y}) \qquad \underline{f}: \Omega \subseteq R^n \to R^n$

In ipotesi tali che valga teor. esist e unicità locale.

- -

CASO BIDIMENSIONALE



campo di direzioni non dip da t

$(1,\dot x(t),\dot y(t)) = (1, f_1(x,y), f_2(x,y))$

È completamente individuato dalla sua proiezione sul piano x,y -

Mi aspetto di ottenere informazioni sulle soluzioni, considerando le proiezioni sul piano x,y del campo di direzioni e, quindi dei grafici delle soluzioni.

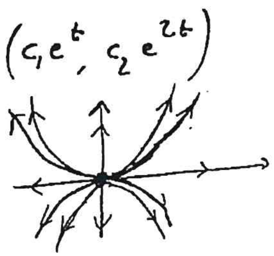
PIANO $(n=2)$ o SPAZIO delle fasi -

(1) $\dot{\underline{y}} = f(\underline{y})$ $\quad \underline{\varphi} : I \to R^n$ soluzione di (1):

Def. chiamiamo "ORBITA" o "TRAIETTORIA" l'immagine di φ cioè

$$\omega = \{ \underline{y} \in \Omega : \underline{y} = \underline{\varphi}(t),\ t \in I \} \subseteq R^n$$

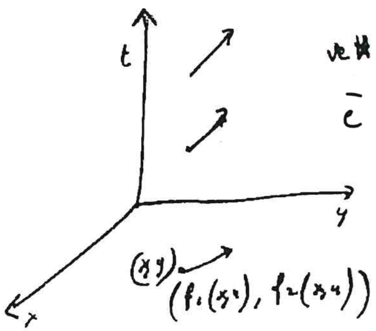
Es. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \qquad \underline{\varphi}(t) = (c_1 e^t, c_2 e^{2t})$



$\omega = \{ (c_1 \alpha, c_2 \alpha^2) \ \alpha \in \mathbb{R} \}$

$(\omega \subseteq \{(x,y) : y = kx^2\})$

CASO BIDIMENSIONALE



vett. tangente alla soluz. in (t,x,y) è $(1, f_1(x,y), f_2(x,y))$

← PIANO DELLE FASI

campo di direzioni - dà vettore tangente alla traiettoria -.

IMPORTANTE

- Ogni orbita individua una famiglia di soluzioni, traslate rispetto al tempo di una di esse -

Infatti:

sia φ soluz. su (a,b) : $\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t+\tau)$ è soluzione su $(a-\tau, b-\tau)$

dim. $\underline{\psi}'(t) = \underline{\varphi}'(t+\tau) = f(\underline{\varphi}(t+\tau)) = f(\underline{\psi}(t))$

- Inoltre, siano $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$ soluz. tali che $\underline{\varphi}(\tau_1) = \underline{\psi}(\tau_2)$

allora $\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t + \tau_1 - \tau_2)$

dim. $\tilde{\underline{\varphi}}(t) = \underline{\varphi}(t + \tau_1 - \tau_2)$ è soluz. e $\tilde{\underline{\varphi}}(\tau_2) = \underline{\varphi}(\tau_1)$

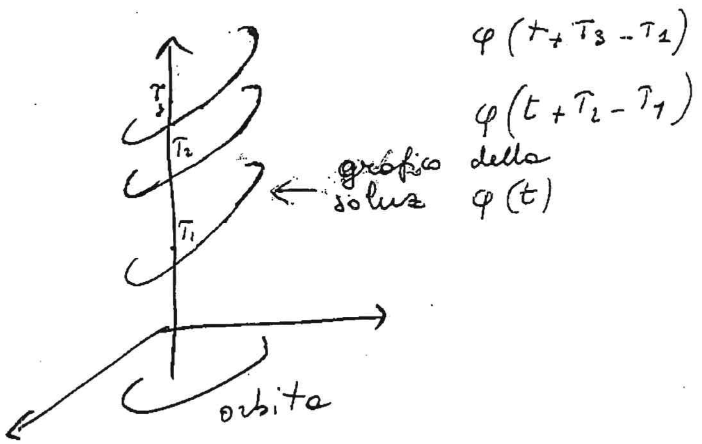
$= \underline{\psi}(\tau_2)$ per l'unicità $\tilde{\underline{\varphi}} = \underline{\psi}$ cioè

$\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t + \tau_1 - \tau_2)$

— — —

- Per ogni punto del piano delle fasi passa una e una sola orbita, corrispondente alla famiglia di soluzioni $\underline{\varphi}(t+\tau)$ $\tau \in R$

(in ip $\dot{\underline{y}} = f(\underline{y})$ con f loc. lipschitziana su Ω)



PUNTI DI EQUILIBRIO (SINGOLARI, CRITICI)

<u>Def</u>. Data $\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y})$, i punti $\underline{y}_0 \in \Omega$ per cui $\underline{f}(\underline{y}_0) = \underline{0}$ vengono detti punti di equilibrio -

Ad essi corrispondono le soluzioni $\underline{\varphi}(t) = \underline{y}_0$ costanti -

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Ogni punto di equilibrio costituisce quindi un'orbita -

<u>Es.</u> $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ ha come unico punto di equilibrio $\underline{0}$

lo stesso vale per $\dot{\underline{y}} = A\underline{y}$ con $\det A \neq 0$

se invece $\det A = 0$ e $r(A) = 1$, avrò una retta ($\ker A$) di punti di equilibrio, ciascuno dei quali costituisce un'orbita.

Proprietà delle orbite (in ipotesi di unicità)

~~Sia φ soluz $[a, t_0) \to R^n$ soluz~~

Se $\lim_{t \to t_0^-} \varphi(t) = \underline{y}_0$, $\underline{y}_0$ punto di equilibrio,

allora $T_0 = +\infty$

dim p.a. se $t_0 \in R$, prolunghiamo $\underline{\varphi}$ ponendo $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$ (per la continuità di $\underline{f}$, $\underline{\varphi}$ è soluzione su $[a, t_0]$)

Ma allora per $\underline{y}_0$ passano due orbite diverse.

assurdo.

Viceversa se $\lim_{t \to +\infty} \underline{\varphi}(t) = \underline{\alpha}_0$ $\quad \alpha_0 \in \Omega$,

$\underline{\alpha}_0$ è punto di equilibrio.

dim. dal teor. di Lagrange, $\forall i = 1, \dots n$

$$\varphi_i(t+1) - \varphi_i(t) = \varphi'_i(t+\xi_i) = f_i(\underline{\varphi}(t+\xi_i)) \qquad 0 < \xi_i < 1$$

quindi

$$0 = \lim_{t \to +\infty} (\varphi_i(t+1) - \varphi_i(t)) = \lim_{t \to +\infty} f_i(\underline{\varphi}(t+\xi_i)) = f_i(\underline{\alpha}_0) \text{ e}$$

$$\underline{0} = \underline{f}(\underline{\alpha}_0) \qquad \text{c.v.d.}$$

Quindi le orbite possono avvicinarsi indefinitamente a un punto di equilibrio solo se $t \to \pm\infty$; inoltre quando $t \to \pm\infty$ un'orbita può avvicinarsi indefinitamente a un punto di equilibrio, allontanarsi indefinitamente da $\underline{0}$ ($\|\underline{\varphi}(t)\| \to +\infty$) o essere tale che le corrispondenti $\underline{\varphi}(t)$ non abbiano limite.

Per quest'ultimo caso è importante la

Proposizione: sia $\underline{\varphi}$ una soluz. non costante di (1). Se $\underline{\varphi}(T_1) = \underline{\varphi}(T_2)$ per $T_1 \neq T_2$, allora $\underline{\varphi}: R \to \Omega$ e φ è periodica ($\Rightarrow$ la relativa orbita è una curva chiusa).

dim: sia $\psi(t) = \varphi(t + T_2 - T_1)$. Poiché...

$\psi(T_1) = \varphi(T_2) = \varphi(T_1)$ quindi φ e ψ coincidono.

ψ è definita su $I - (T_2 - T_1)$ quindi è un prolungamento di φ a tale intervallo e φ è definita su $I \cup I - (T_2 - T_1)$. Iterando otteniamo che φ è definita su $\mathbb{R}$.

Poiché $\varphi(t) = \psi(t) = \varphi(t + T_2 - T_1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

φ è periodica, di periodo non maggiore di $(T_2 - T_1)$.

Sia ora $T = \inf\{\delta > 0 : \varphi(t) = \varphi(t+\delta) \ \forall t \in \mathbb{R}\} = \inf P$

p. a. $T = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ $0 < \delta < \varepsilon$ e $\varphi(t) = \varphi(t+\delta)$

sia $c \in \mathbb{R}$ qualunque: $\exists m : (m-1)\delta < c < m\delta$ quindi

$0 < m\delta - c < \delta < \varepsilon$.

Poiché $m\delta \in P$, $\forall \varepsilon \ \exists p \in P : |p - c| < \varepsilon$, cioè

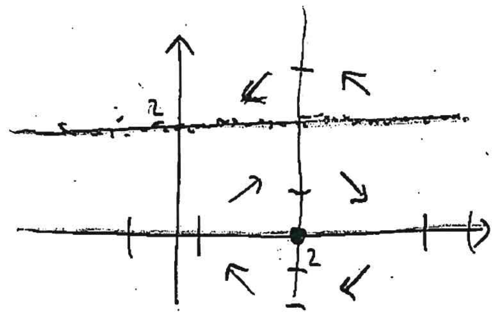
c è di accumulazione per P.

f continua $\Rightarrow$ P chiuso

quindi $c \in P$ $\forall c \in \mathbb{R}$ e φ è costante, assurdo.

STUDIO QUALITATIVO DELLE ORBITE NEL PIANO DELLE FASI.

ES. $\begin{cases} \dot{x} = -y(y-2) \\ \dot{y} = (x-2)(y-2) \end{cases}$



$y=0 \wedge y=2$ cambia segno $\dot{x}$

$y=2 \wedge x=2$ cambia segno $\dot{y}$

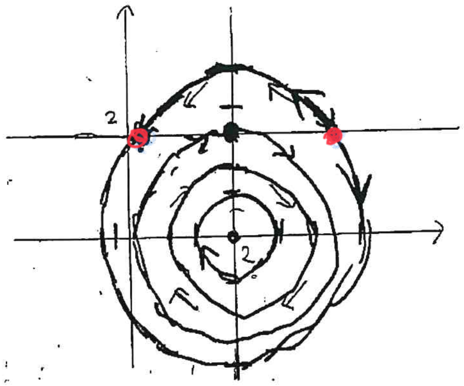
punti singolari $(\alpha, 2)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$(2, 0)$

$y = 2$ tutti punti singolari

$x = 2$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 0$ $\quad y(x)$ ha tangente orizz

$y = 0$ $\quad \dfrac{dx}{dy} = 0$ $\quad y(x)$ ha tangente verticale mi aspetto



Oss. $\begin{cases} \dot{x} = -y(y-2) \\ \dot{y} = (x-2)(y-2) \end{cases}$ per $y \neq 2$

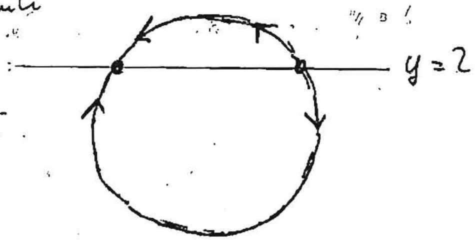
si può riscrivere

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{-y}$ eq a variab separabili

da cui $(x-2)^2 + y^2 = c$ da $y(x)$

in forma implicita. Per $c = 0$ ho il punto singolare $(2,0)$, per $0 < c < 4$ circonferenze contenute nel semipiano $y < 2$

Per $c > 4$, la circonferenza interseca la retta $y = 2$ in 2 punti (di equilibrio) la circonferenza sarà quindi costituita da 4 orbite: i 2 punti di equilibrio e due archi di cerchio, orientati in direzioni opposte.



- - -

Integrale primo di un sistema lineare autonomo.

Data (1) $\dot{y} = f(y)$ $\quad f : \Omega \to R^n$ loc. lipsch.

esiste $E : \Omega \to R$ $\quad E \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

tale che E sia costante su ogni soluzione di (1) $(E(\varphi(t)) = c \ \forall t \in I)$ cioè ogni orbita di (1) sia contenuta in un insieme di livello di E): E viene detto integrale primo o costante del moto per il sistema (1).

--

Es. $\begin{cases} \dot{x} = -y\,(y-2) \\ \dot{y} = (x-2)(y-2) \end{cases}$ $\qquad E(x,y) = (x-2)^2 + y^2$

--

Dalla definizione segue che

$$\frac{d}{dt} E(\varphi(t)) = 0 \qquad \forall t \in I$$

ma

$$\frac{d}{dt}\left(E(\varphi(t))\right) = \langle \nabla E(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle \nabla E(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle = 0$$

poiché $\forall y \in \Omega \quad \exists \varphi, t : y = \varphi(t)$ possiamo in maniera equivalente, definire

E integrale primo se, $\forall y \in \Omega$,

$$\langle \nabla E(y), f(y) \rangle = 0$$

$\langle \nabla E(y), f(y) \rangle$ viene anche indicato con $\dot{E}(y)$ e chiamato DERIVATA DI E LUNGO LE TRAIETTORIE DEL SISTEMA (1).

--

Oss. data l'eq. di moto $\ddot{y} = -\frac{dU}{dy}$, e il sistema equivalente $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{dU}{dy_1} \end{cases}$

un integrale primo del sistema è

$$E(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + U(y_1) \qquad (\text{Energia})$$

cinetica + potenziale.