14/09 |

Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0,\varepsilon) = \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \varepsilon\}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall\,\varepsilon>0 \quad B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon)\cap\bar{A}\neq\emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset\bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A\subseteq\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) è limitato se $\exists\, x_0\in\mathbb{R}^2,\ \rho>0 : A\subseteq B(x_0,\rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$. Bisogna ora definire quando un insieme è connesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\underline{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$r(t) \longmapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix}, \quad t\in I$$

Possiamo ora dire un insieme connesso come:

Preso $A\subseteq\mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r} : [a;b]\to\mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = x$ e $\bar{r}(b) = y$, $r(t)\subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

15/03

Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{cases}$$

Abbiamo già visto delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

Limiti di funzioni in più variabili

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

$$\| \bar{x} - \bar{x}_0 \| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x^i - x_0^i| \to 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ε / δ. Ciò ci permetterà di definire il limite di funzione in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_J(\underline{x}) = l_J \quad \forall J = 1, 2, \dots, m$$

con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $l \in \mathbb{R}^m$

La convergenza in $\mathbb{R}^n$ avviene, quindi, per coordinate. Se so studiare $f^J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ posso studiare anche $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Continuità e derivabilità di funzioni $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Consideriamo $\underline{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, allora $f_J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $\underline{f} \in \mathcal{C}(I) \Longleftrightarrow f_J \in \mathcal{C}(I) \quad \forall J = 1, \dots, n$
- $\underline{f}$ è derivabile su I se e solo se sono derivabili tutte le f_J su I

FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Poiché disegnare il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello K di f come $I = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K \}$.

Per disegnare il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (isolare le singole coordinate ponendo le altre pari a zero/costante).

Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazione. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo ruotare. Funzioni di questo tipo sono dette funzioni radiali.

Limite (in)finito per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A insieme aperto, definiamo $l \in \mathbb{R}^*$ limite di f per $\underline{x} \to \underline{x}_0 \in A$ se

$$\forall V(l) \; \exists U(\underline{x}_0) : \quad \forall x \in U \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) \in V$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \to \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \quad \to \quad \forall K > 0 \; \exists \delta = \delta(K) > 0 : \; \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) > K$

Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di f esiste, esso è unico
2. Algebra dei limiti:
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f+g = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f + \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g$ $\quad [+\infty - \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \cdot g = \lim_{x \to x_0} f \cdot \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g$ $\quad [0 \cdot \infty]$
   - $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ $\quad [\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}]$
   - data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(f(\underline{x})) = \lim_{t \to t_0} g(t)$

     / $g : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{w} \to \underline{w}_0} f(g(\underline{w})) = \lim_{x \to x_0} f(\underline{x})$
3. Teorema del confronto: Siano f, g e h definite da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tali che almeno definitivamente per $\underline{x} \to x_0$ $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \leq h(\underline{x})$.
   Allora se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ e $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = l$

Continuità di funzioni reali a più variabili reali

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Chiamiamo f continua in $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$.

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma / prodotto / quoziente / composizione di funzioni continue dà una funzione continua.