

LEZIONE DI ANALISI I DEL 16 OTTOBRE

---

---

---

---

---



# SUCCESSIONI

**SUCCESSIONE INFINITESIMA:** Una successione si dice infinitesima se diverge a 0

**INFINITÀ:** Una successione si dice infinita se diverge a  $\infty$

**CONFRONTO TRA INFINITI:** Siano  $a_n, b_n$  due infiniti, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine SUPERIORE} \\ \infty & \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine INFERIORE} \\ l & \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine.} \end{cases}$$

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  allora i due infiniti non sono confrontabili.

**CONFRONTO TRA INFINITESIMI:** Siano  $a_n, b_n$  due infinitesimi, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine INFERIORE} \\ \infty & \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE} \\ l & \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine.} \end{cases}$$

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  allora i due infinitesimi non sono confrontabili.

**SUCCESSIONI ASINTOTICHE:**

oss: Se  $a_n \sim b_n$  non è detto

che  $a_n + c_n \sim b_n + c_n$

Due successioni si dicono asintotiche se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ . L'asintotismo è una relazione di equivalenza, infatti:

1)  $a_n \sim c_n$  (asint. a  $\infty$  verso)

2)  $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$  (se  $b_n$  è asintotica rispetto ad  $a_n$ , allora anche  $a_n$  è asintotica rispetto a  $b_n$ ).

3)  $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1$

**CRITERIO DEL RAPPORTO:**

Sia una successione positiva  $a_n$ . Sia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ . Se:

1)  $l < 1$  allora  $a_n$  è un infinitesimo

2)  $l > 1$  allora  $a_n$  è un infinito

3)  $l = 1$  allora il criterio fallisce (correttura della successione non è nota)

**GERARCHIA DEGLI INFINITI:**

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  Sia  $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$ , per calcolo del rapporto abbiamo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 \Rightarrow n!$  è di ordine maggiore

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^l}{n^n} = 0$  Sia  $c_n = \frac{n^l}{n^n} > 0$ , per calcolo del rapporto abbiamo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^l}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n^l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^l = \frac{1}{e} < 1$

Per il criterio  $n^n$  è di ordine superiore.

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0$  Consideriamo  $b > 0, n^{b-1} \geq 1, 0 < \log(n^{b-1}) \leq n^{1/b}$  quindi  $\frac{\frac{1}{2} \log(n)}{n^b} = \frac{\log(n^{1/b})}{n^b} < \frac{n^{1/b}}{n^b} = \frac{1}{n^{b-1}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{b-1}} = 0$  quindi per il criterio del confronto, chiamando  $a_n = 0$ ,

$$c_n = \frac{2}{bn^{b-1}} \quad 1 - b_n = \frac{\log(n)}{n^b} \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$$

Generalizziamo la c in quanto non influenza.  $\frac{n^b}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{1/b}}\right)^b = \left(\frac{\log_a(a^n)}{a^{1/b}}\right)^b$  equivale a  $\frac{\log_a(a^n)}{a^{1/b}}$  e possiamo applicare la ⑤ scrivendo  $(0)^b = 0$

**FORMA DI INDETERMINAZIONE 1<sup>oo</sup>:** Generalizzata principalmente da  $(1 + \frac{1}{n})^n$ . Si può scrivere che  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

**PROPOSIZIONI DA DIMOSTRARE:**  $a_n$  è monotona crescente,  $a_n$  converge a  $z \in \mathbb{R}$

1) dobbiamo dimostrare che  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^1} \stackrel{\text{dis. Bernoulli}}{\leq} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right) \stackrel{z > n}{\geq} \left[1 + n \left(-\frac{1}{n^2}\right)\right] \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

2)  $a_n$  è crescente (vedi ①)  $\Rightarrow a_1 < \dots < a_m \Rightarrow a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ . Consideriamo  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = a_n (1 + \frac{1}{n}) \Rightarrow b_n > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Si può dimostrare che  $b_n$  è strettamente decrescente. Già vediamo che  $b_1 > \dots > b_n > a_m$ . Quindi  $b_n > a_n \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^n > a_n$

LEZIONE DI ANALISI 1 DEL 17 OTTOBRE

---

---

---

---



## SERIE

**SERIE:** Sia  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  serie definita dalla somma di infiniti termini di  $a_n$ .

**S. SOMME PARZ.**: Consideriamo  $s_0 = \sum_{n=0}^0 a_n$ ,  $s_1 = \sum_{n=0}^1 a_n$ , ...,  $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ .  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è della successione delle somme parziali:  $s_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   $k \mapsto \sum_{n=0}^k a_n$ .

Poiché definizione  $s_k$  è una successione. Studieremo il comportamento.

1) Studiamos el limite:  $\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = l \text{ finito} & \Rightarrow \text{série CONVERGENTE} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty & \Rightarrow \text{série DIVERGENTE} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \text{ non esiste} & \Rightarrow \text{série IRREGOLARE/OSCILLANTE} \end{cases}$

**EX:** 1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$   $a_n = n \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 1+2, \dots, s_k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow s_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   $k \mapsto \frac{k(k+1)}{2}$   
 $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{k(k+1)}{2} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K^2 + K}{2} = +\infty \Rightarrow \text{SERIE DIVERGENTE}$

3)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow s_1 = \frac{1}{1}, s_2 = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right), s_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \dots, s_k = \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1}$   
 $\lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{K+1} \right) = 1$

2)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$   $a_n = q^n \Rightarrow s_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ , con  $q = 1$   $s_k = k+1$   
 $\lim_{K \rightarrow \infty} s_k = \begin{cases} 1/q < 1 & \frac{1}{1-q} \\ 1/q > 1 & +\infty \\ 1/q = 1 & \text{N.D.} \end{cases}$ , con  $q > 1$   $\lim_{K \rightarrow \infty} s_k = +\infty$

**SERIE TELESCOPICA:** Una serie si dice telescopiche se  $a_n$  si può scrivere come  $a_n = b_n - b_{n+1}$ . da successione delle somme parziali scrivere come  $s_n = b_0 - b_{n+1}$

**C.N. CONVERGENZA:** Dato la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ , affinché essa sia convergente, è necessario che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**DIMOSTRAZIONE:** per ipotesi la serie converge, quindi  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = l$   $s_n = a_0 + \dots + a_n$ ,  $s_{n+1} = a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} \Rightarrow s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ . Possiamo scrivere, allora, che  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n+1})$ . Poiché per ipotesi  $s_n$  converge:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = 0 - 0 = 0$ .

**OSS:**  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{n}$  diverge anche se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \text{LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE.}$

## SERIE A TERMINI POSITIVI

**SERIE A TERMINI POSITIVI:** Una serie si dice a termini positivi se  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Esiste anche una serie definitivamente positiva:  $a_{n_0} > 0 \quad \forall n > n_0 \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$

**OSS:** Una serie a termini positivi non può essere irregolare. Se consideriamo  $s_n = s_{n-1} + a_n > s_{n-1} \Rightarrow$  la successione delle somme parziali è quindi una successione monotonamente crescente, quindi esiste sicuramente il limite.

**CRITERIO DEL CONFRONTO:** Siano  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  due serie a termini positivi. Supponiamo che  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$ . Allora:

1) se  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  converge, allora anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge.

2) se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverge, allora anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  diverge

DIM.: Siamo  $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$ ,  $T_k = \sum_{n=0}^k b_n$  la successione delle somme parziali di  $a_n$  e  $b_n$ . Dato che  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow S_k \leq T_k \quad \forall k \geq \bar{n}$ .

1) Se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} T_K = c$  ma  $\lim_{K \rightarrow \infty} S_K \leq \lim_{K \rightarrow \infty} T_K$  per il teorema del confronto per successioni. Allora  $S_K$  converge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

2) Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge  $\Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} S_K = +\infty$  ma  $\lim_{K \rightarrow \infty} S_K \leq \lim_{K \rightarrow \infty} T_K$  per il teorema del confronto per successioni. Allora  $T_K$  diverge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

EX.:  $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ . Per applicare il criterio bisogna maggiorare o minorare la successione:  $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n} \quad \forall n > 3$ . Costruiamo  $b_n = \frac{1}{n}$ . La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  è divergente. Per il criterio del confronto, allora, anche essa diverge.

LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 18 OTTOBRE

---

---

---

---



# LEZIONE

## LIMITE DI SUCCESSIONI NOTEVOLI

Sia  $\epsilon_n$  una successione infinitesima, allora si hanno le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) \lim \sin(\epsilon_n) = 0 & 3) \lim \frac{\sin(\epsilon_n)}{\epsilon_n} = 1 \\ 2) \lim \cos(\epsilon_n) = 1 & 4) \lim \frac{1 - \cos(\epsilon_n)}{(\epsilon_n)^2} = \frac{1}{2} \\ 5) \lim \frac{\ln(1 + \epsilon_n)}{\epsilon_n} = 1 / \lim \frac{\log(1 + \epsilon)}{\epsilon_n} = \log e & 6) \lim \frac{e^{\epsilon_n} - 1}{\epsilon_n} = 1 / \lim \frac{a^{\epsilon_n} - 1}{\epsilon_n} = \ln a \\ 7) \lim \frac{(1 - \epsilon_n)^{1/n} - 1}{\epsilon_n} = -\frac{1}{n} & \end{array} \right\} \text{dai 5, 6, 7 vengono derivati dalla 1} \\ \text{reportata nella proprietà seguente.}$$

Sia  $a_n$  una successione infinita, allora si hanno le seguenti relazioni:

$$1) \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad 2) \lim \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)}{\frac{1}{a_n}} = 1$$

## SUCCESSIONI ASINTOTICHE

Dato  $a_n \sim b_n$ , esso si dice asintotico a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$   
di modo che se  $a_n \sim b_n$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l (\infty)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l (\infty)$

## SERIE A TERMINI POSITIVI

### CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  con  $a_n \sim b_n$ , allora le due serie avranno lo stesso carattere.

DIM.: Per Hp  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ | \frac{a_n}{b_n} - l | < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow b_n(1 - \varepsilon) < a_n < b_n(1 + \varepsilon)$ . Considerando  $b_n(1 - \varepsilon) < a_n$  per il contrario del rapporto, se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge allora anche  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge. La  $(1 - \varepsilon)$  non influenza.

Idem per l'altra parte: se  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge allora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

Non è necessaria dimostrare l'altro verso perché le serie positive convergono o divergono.

# Esercitazione

$$\lim \left( \frac{n-1}{n-2} \right)^n = \lim \left( \frac{n-1-3}{n-1-2} \right)^n = \lim \left( \frac{n-1-\frac{3}{n}}{n-1-\frac{2}{n}} \right)^n = \lim \left( 1 - \frac{\frac{3}{n}}{n-1} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{3}} \right)^{\frac{n(n-1)}{n-3}} = \lim \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{3}} \right)^{\frac{n-1}{3}} \right)^{\frac{n(n-1)}{n-3}} = e^{\lim \frac{n(n-1)}{n-3}} = e^{\frac{3}{2}} = e^3$$

$$\lim n^2 \ln(1-2^{-n}) = \lim n^2 \cdot \frac{\ln(1-2^{-n})}{-2^{-n}} \cdot -2^{-n} = \lim n^2 \cdot (-2^{-n}) = \lim \frac{-n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}} = \lim \frac{\sin(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}}{n^2-n^1} = \lim \frac{\sin(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}}{n^2-n^1} = \lim \frac{\sin(n)}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{\sin(n)}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0+0}} = \lim \frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

$$\lim \frac{\log(n^2+n) - \log(n)}{\sin(\frac{n}{n})} = \lim \frac{\ln(\frac{n^2+n}{n})}{\sin(\frac{n}{n})} = \lim \frac{\ln(\frac{n^2+n}{n})}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim \frac{\ln(\frac{n^2+n}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim \log e \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \log e$$

$$\lim \frac{\log[3^n + \cos(3^n)]}{n} = \lim \frac{\log[3^n]}{n} = \lim \log[3^n]^{\frac{1}{n}} = \log 3$$

$$\hookrightarrow 3^n + \cos 3^n \sim 3^n \Rightarrow \lim \frac{3^n + \cos 3^n}{3^n} = \lim \frac{1 + \frac{\cos 3^n}{3^n}}{1} = 1 \quad \text{perché } -1 \leq \cos 3^n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{\cos 3^n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow \lim \frac{\cos 3^n}{3^n} = \lim \frac{1}{3^n} = 0$$

$$\lim \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{n+2^n}} = \lim \frac{\log[1+e^n]}{\sqrt{n+2^n}} = \lim \frac{\log e^n + \log(1+\frac{1}{e^n})}{\sqrt{n+2^n}} = \lim \frac{\log e^n}{\sqrt{n+2^n}} = \lim \frac{n \log e}{\sqrt{n+2^n}} = \lim \frac{n \log e}{\sqrt{n} \sqrt{1+\frac{2^n}{n}}} = \log e$$

$$\lim \frac{n - \ln(1+e^n)}{n - \ln(1+e^{n-\frac{1}{2}})} = \lim \frac{n - \ln(e^n + e^{n-\frac{1}{2}})}{n - \ln(e^n + e^{n-\frac{1}{2}})} = \lim \frac{n - \ln(e^n) \cdot \ln(1+\frac{1}{e^n})}{n - \ln(e^n) + \ln(1+\frac{1}{e^n})} = \lim \frac{\ln(1+\frac{1}{e^n})}{\ln(e^n) + \frac{1}{e^n}} = \lim \frac{\ln(1+\frac{1}{e^n})}{n e^n + \frac{1}{e^n}} \cdot \frac{1}{n e^n} \cdot \frac{e^n}{e^n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{\sin(\frac{2}{n})}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}-2}} = \lim \frac{\sin(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}-2}}} = \lim \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}-2}} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n-1}-1}} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n+1)}}} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n+1)}}} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}}} = \lim \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1-1}} \quad (8)$$

$$\lim \frac{n^{n+2} \cdot (n-1)^n}{4(n^n) \cdot 3(n!)^2} = \lim \frac{n^{n+2} \cdot (\frac{1}{n} + (\frac{n-1}{n})^n)}{4(n^n) \cdot (1 - \frac{1}{n})^{2n}} = \lim \frac{1}{4} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n = \lim \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n(n-1)}{n-1}} = \frac{1}{4} e^{-2} = 1/4 e^{-2}$$

Una risoluzione a parte:  $\lim \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim \left( \frac{n-1}{n} \right)^n = e^{-1}$  // rule of L'Hopital: dividere sempre quando nel raccoglimento non c'è la forma  $(K - \frac{2}{n}e + \dots)$

$$\lim \frac{\log((n+5)!) - \log(n!+15)}{\log[2e^n + \cos(\pi n)]}$$

$$\lim \frac{n! + (2n)!}{n^n}$$

$$\lim \frac{n^n + 2^n}{2^{n+1}}$$

$$\lim \sqrt[3]{n^3 - 2n^6} + \sqrt[5]{n^{15} - 3n^{12}}$$

→ Homework