Formulario di probabilità e statistica per 099319–Probabilità e Statistica per l'Informatica
AA 2019/20, Docenti Epifani, Ladelli

Notazioni

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{se} \quad k \in \{0, \ldots, n\}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} dx \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \forall \alpha > 0$$

Densità discrete univariate

$X \sim$ **Be**(p)**: Benoulliana di parametro** $p \in (0, 1)$

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \mathbf{1}_{\{0,1\}}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p), \qquad m_X(t) = (1 - p + pe^t)$$

$X \sim$ **Bi**(n, p)**: Binomiale di parametri** $n \in \mathbb{N}$**,** $p \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \mathbf{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x), \quad \mathrm{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p), \quad m_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

$X \sim$ **Geom**(p)**: Geometrica di parametro** $p \in (0, 1)$

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1} \mathbf{1}_{\{1,2,\ldots\}}(x), \quad \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$m_X(t) = \frac{p\mathrm{e}^t}{1 - (1-p)\mathrm{e}^t} \quad \text{per } t < -\log(1-p)$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$**: Poisson di parametro** $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathbf{1}_{\{0,1,\ldots\}}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda, \qquad m_X(t) = \exp(\lambda(\mathrm{e}^t - 1))$$

Densità assolutamente continue univariate

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$**: Normale di parametri** $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \qquad m_X(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$X \sim$ **Lognorm**(μ, σ)**: Lognormale di parametri** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \qquad \mathrm{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu + \sigma^2/2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

$X \sim \mathcal{U}(a,b)$: **Uniforme in** $[a,b]$**,** $a<b$

$$f_X(x)=\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x),\qquad \mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2},\qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\qquad m_X(t)=\frac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$$

$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$: **Gamma di parametri** $\alpha>0$**,** $\lambda>0$

$$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),\qquad \mathrm{E}(X)=\frac{\alpha}{\lambda},\qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2},\qquad m_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha\quad \text{per } t<\lambda$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: **Esponenziale di parametro** $\lambda>0$

$$f_X(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),\qquad \mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2},\qquad m_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\quad \text{per } t<\lambda$$

$X \sim \chi^2(m)$: **Chi quadrato con** $m=1,2,\ldots$ **gradi di libertà**

$$f_X(x)=\frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{m/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),\quad \mathrm{E}(X)=m,\quad \mathrm{Var}(X)=2m,\quad m_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha\quad \text{per } t<\lambda$$

$X \sim \mathbf{Weib}(\alpha,\lambda)$: **Weibull di parametri** $\alpha>0$**,** $\lambda>0$

$$f_X(x)=\alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),\qquad \mathrm{E}(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{1/\alpha}},\qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\lambda^{2/\alpha}}$$

$X \sim t(m)$: **t di student con** $m\in\mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2},\quad \mathrm{E}(X)=0 \text{ per } m>1,\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{m}{m-2}\text{ per } m>2$$

$X \sim F(m,n)$: F **di Fisher con** $m,n\in\mathbb{N}$ **gradi di libertà**

$$f_X(x)\;=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\;x^{(m-2)/2}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{(m+n)/2}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),\qquad \mathrm{E}(X)=\frac{n}{n-2}\text{ per } n>2,$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\quad \text{per } n>4$$

Densità assolutamente continue bivariate

$(X,Y)^T\sim\mathcal{N}(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)$: **densità gaussiana bivariata**

$$f_{X\,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]},\qquad \rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$(X,Y)\sim\mathcal{U}(R)$: **densità congiunta uniforme su** $R\subset\mathbb{R}^2$ **limitato**

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{Area(R)} & (x,y)\in R\\ 0 & (x,y)\notin R\end{cases}$$

Test statistici di significatività α

Media

Con varianza nota σ_0^2, campione casuale normale o numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu \neq \mu_0$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu < \mu_0$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu > \mu_0$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(z_0)$

Con varianza incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu \neq \mu_0$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2,n-1}$; p-value$= 2P(T_{n-1} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu < \mu_0$ se $t_0 \leq -t_{\alpha,n-1} = t_{1-\alpha,n-1}$; p-value$= P(T_{n-1} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu > \mu_0$ se $t_0 \geq t_{\alpha,n-1}$; p-value$= P(T_{n-1} \geq t_0)$

Con varianza incognita, campione casuale non normale numeroso

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu \neq \mu_0$ se se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \geq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu < \mu_0$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu = \mu_0$ o $H_0\colon \mu \leq \mu_0$ a favore di $H_1\colon \mu > \mu_0$ se $t_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(t_0)$

Proporzione con campione casuale di Bernoulli numeroso

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ a favore di $H_1\colon p \neq p_0$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ o $H_0\colon p \geq p_0$ a favore di $H_1\colon p < p_0$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon p = p_0$ o $H_0\colon p \leq p_0$ a favore di $H_1\colon p > p_0$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(z_0)$

Differenza tra medie $\mu_X - \mu_Y$

Con varianze note σ_X^2, σ_Y^2, campioni casuali indipendenti normali o numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(z_0)$

Con varianze incognite ma uguali, campioni casuali indipendenti normali

$$\text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}, \qquad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2,m+n-2}$; p-value$= 2P(T_{m+n-2} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha,m+n-2} = t_{1-\alpha,m+n-2}$; p-value$= P(T_{m+n-2} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha,m+n-2}$; p-value$= P(T_{m+n-2} \geq t_0)$

Con varianze incognite, campioni casuali indipendenti numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}}, \qquad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(z_0)$

Campioni casuali bivariati normali, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i,\ i = 1,\ldots,n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{D}_n}{\sqrt{S_D^2}}\sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1\colon \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq t_{\alpha/2,n-1}$; p-value$= 2P(T_{n-1} \geq |t_0|)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -t_{\alpha,n-1} = t_{1-\alpha,n-1}$; p-value$= P(T_{n-1} \leq t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq t_{\alpha,n-1}$; p-value$= P(T_{n-1} \geq t_0)$

Campioni casuali bivariati non normali numerosi, con varianza della differenza incognita

$$D_i := X_i - Y_i,\ i = 1,\ldots,n, \quad \text{Statistica test: } T_0 := \frac{\overline{D}_n}{\sqrt{S_D^2}}\sqrt{n}, \quad t_0 = \text{valore assunto da } T_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = 0$ a favore di $H_1\colon \mu_W := \mu_X - \mu_Y \neq 0$ se $|t_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|t_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ se $t_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(t_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ o $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ a favore di $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ se $t_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(t_0)$

Differenza tra proporzioni $p_X - p_Y$ con campioni casuali di Bernoulli numerosi

$$\text{Statistica test: } Z_0 := \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \quad \text{con} \quad \hat{P} := \frac{m\overline{X}_m + n\overline{Y}_n}{m+n}, \quad z_0 = \text{valore assunto da } Z_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X \neq p_Y$ se $|z_0| \geq z_{\alpha/2}$; p-value$= 2(1-\Phi(|z_0|))$
- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ o $H_0\colon p_X \geq p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X < p_Y$ se $z_0 \leq -z_\alpha = z_{1-\alpha}$; p-value$= \Phi(z_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon p_X = p_Y$ o $H_0\colon p_X \leq p_Y$ a favore di $H_1\colon p_X > p_Y$ se $z_0 \geq z_\alpha$; p-value$= 1-\Phi(z_0)$

Varianza

Con media nota, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{nS_{0n}^2}{\sigma_0^2}, \qquad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha/2,n}$ o $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n}$;
  p-value= $2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n}$; p-value= $P(\chi_n^2 \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,n}$; p-value= $P(\chi_n^2 \geq x_0^2)$

Con media incognita, campione casuale normale

$$\text{Statistica test: } X_0^2 := \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}, \qquad x_0^2 = \text{valore assunto da } X_0^2$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ a favore di $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ o $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$;
  p-value= $2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2))\}$ e $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $x_0^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$;
  p-value= $P(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ o $H_0\colon \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ a favore di $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,n-1}$;
  p-value= $P(\chi_{n-1}^2 \geq x_0^2)$

Rapporto tra varianze σ_X^2/σ_Y^2

Con medie note, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2}, \qquad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2,m,n}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2,m,n}$;
  p-value= $2\min\{p_1, p_2\}$, con $p_1 = P(F_{m,n} \leq f_0)$, $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha,m,n}$;
  p-value= $P(F_{m,n} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha,m,n}$;
  p-value= $P(F_{m,n} \geq f_0)$

Con medie incognite, campioni casuali X, Y indipendenti normali di numerosità m, n, rispettivamente

$$\text{Statistica test: } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \qquad f_0 = \text{valore assunto da } F_0$$

- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha/2,m-1,n-1}$ o $f_0 \leq f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$;
  p-value= $2\min\{p_1, p_2\}$ con $p_1 = P(F_{m-1,n-1} \leq f_0)$ e $p_2 = 1 - p_1$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ se $f_0 \leq f_{1-\alpha,m-1,n-1}$;
  p-value= $P(F_{m-1,n-1} \leq f_0)$
- Si rifiuta $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ o $H_0\colon \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ a favore di $H_1\colon \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ se $f_0 \geq f_{\alpha,m-1,n-1}$;
  p-value= $P(F_{m-1,n-1} \geq f_0)$

Test di buon adattamento del chi quadrato

$X_1, \dots, X_n$ campione casuale numeroso da una f.d.r. F, raggruppato in classi

Ipotesi: $H_0\colon F = F_0$ contro $H_1\colon$ "H_0 è falsa"

$k =$ "numero di classi in cui sono raggruppati i dati"

$p_i^0 := P_{H_0}($"X_1 cade nella classe i"$)$

$N_i =$ "numero di $X_1, \dots, X_n$ che cadono nella classe i"

Adattamento a distribuzione completamente specificata

Ogni p_i^0 è completamente specificato (cioè ogni p_i^0 è un numero)

Statistica test: $X_0^2 := \displaystyle\sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{np_i^0}\right) - n$, $\quad x_0^2 =$ valore assunto da X_0^2

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$; $\quad p$-value $\simeq P(\chi^2_{k-1} \geq x_0^2)$

Adattamento a distribuzione con parametri incogniti

$h =$ "numero di parametri incogniti presenti nella distribuzione ipotizzata sotto H_0 e stimati con i dati"

$\hat{p}_i^0 =$ stimatore di p_i^0, $\quad i = 1, \dots, k$

Statistica test: $X_0^2 := \displaystyle\sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\hat{p}_i^0)^2}{n\hat{p}_i^0} = \sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{n\hat{p}_i^0} - n$, $\quad x_0^2 =$ valore assunto da X_0^2

- Si rifiuta H_0 a favore di H_1 se $x_0^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1-h}$; $\quad p$-value $\simeq P(\chi^2_{k-1-h} \geq x_0^2)$

Test di indipendenza del chi quadrato

Campione casuale bivariato $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ da una di densità incognita $p_{ij} := P(X = i, Y = j)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$

$N_{ij} :=$ "numero di coppie $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ che assumono valore (i, j)"

$N_{i\cdot} = \displaystyle\sum_{j=1}^s N_{ij} =$ "numero di $X_1, \dots, X_n$ che assumono valore i"

$N_{\cdot j} = \displaystyle\sum_{i=1}^r N_{ij} =$ "numero di $Y_1, \dots, Y_n$ che assumono valore j"

$\hat{p}_i := N_{i\cdot}/n$

$\hat{q}_j := N_{\cdot j}/n$

Statistica test: $X_*^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j} = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{N_{ij}^2}{N_{i\cdot}N_{\cdot j}} - n$, $\quad x_*^2 =$ valore assunto da X_*^2

- Si rifiuta $H_0\colon$ "X, Y *sono indipendenti*" a favore di $H_1\colon$ "X, Y *non sono indipendenti*" se $x_*^2 \geq \chi^2_{\alpha,(r-1)\times(s-1)}$; $\quad p$-value $\simeq P(\chi^2_{(r-1)\times(s-1)} \geq x_*^2)$