LEZIONE DI ANALISI DEL 10 ottobre

SUCCESSIONI

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE (SUCCESSIONI MONOTONE): Sia a_n una successione crescente/decrescente, allora a_n ammette sempre limite $l = \sup(a_n)$.
Se a_n è superiormente limitata, allora l è finito. Se a_n non è superiormente limitata, allora $\sup(a_n) = +\infty$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo a_n crescente limitata superiormente, allora a_n converge ad $l \in \mathbb{R} = \sup(a_n)$.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$. $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < M$. Consideriamo $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ ammette estremo superiore (ass. compl.) pari a $\sup(a_n)$
Voglio dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \sup(a_n)| < \varepsilon$ Per definizione $\sup(a_n)$ è maggiorante di $\{a_n\}$ quindi $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \sup(a_n) \Rightarrow$
$|a_n - \sup(a_n)| = \sup(a_n) - a_n \Rightarrow \sup(a_n) - \varepsilon < a_n$. Poiché $\sup(a_n)$ è il più grande dei maggioranti, $\sup(a_n) - \varepsilon$ non è un maggiorante.
Esiste quindi $\bar{n}$ tale che $\sup(a_n) - \varepsilon < a_{\bar{n}} < \sup(a_n)$. Poiché è crescente, allora $a_{\bar{n}+1} > a_{\bar{n}} > \sup(a_n) - \varepsilon$. Quindi $\forall n > \bar{n}, \ a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Ciò, verifica la tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} \quad |\sup(a_n) - a_n| < \varepsilon$, che risulta sarà: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > \sup(a_n) - \varepsilon$.
Se prendiamo a_n divergente crescente, allora $\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > M$. Per definizione, $\forall n > n_0 \quad a_n > a_{n_0}$
$\forall M > 0 \ \exists \bar{n}_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \quad a_n > a_{n_0} > M$

NOTA BENE: il teorema non vale per successioni del tipo: inferiormente limitata crescente

TEOREMA: Se una successione converge allora è limitata

DIMOSTRAZIONE: Per Hp: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$. La Th sarà: $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad a_n < M$. Possiamo scrivere $|a_n|$ come:
$\overset{\forall n > n_0}{|a_n|} = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq \overset{\text{PER Hp}}{\varepsilon + |l|}$. Costruisco M tale che: $M = \operatorname{Max}(\varepsilon + |l|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0 - 1}|)$, allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$ quindi a_n è limitata.
Il viceversa non vale.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO: Sia a_n una successione non negativa, convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$.
" " " " non positiva, " " " $l \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE: per Hp: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$. Unendo le due condizioni, possiamo scrivere che
$0 \leq a_n < l + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow l \geq 0$. Se per assurdo $l < 0$, allora la condizione prima descritta non sarebbe valida $\forall \varepsilon > 0$.

COROLLARIO PERM. SEGNO: Siano a_n e b_n due successioni convergenti. Se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} \quad a_n \leq b_n \Rightarrow l_a \leq l_b$

DIMOSTRAZIONE: Costruiamo $c_n = b_n - a_n$, allora $c_n \geq 0 \ \forall n > \bar{n}$. Possiamo scrivere che $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n \overset{\text{PER PERM. SEGNO}}{=} K \geq 0$. Usando l'algebra dei limiti, avremo che: $\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = m - l \geq 0 \Rightarrow m \geq l$

TEOREMA DEL CONFRONTO (SUCCESS.): Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$. Se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ \ a_n \leq b_n \leq c_n$, allora b_n converge ad l

DIMOSTRAZIONE: Hp: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1\ |c_n - l| < \varepsilon$. $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon$

Posso allora costruire la seguente disequazione: $l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon\ \forall n \geq \max(n_0, n_1, \bar{n})$, ma ciò equivale a dire che $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

ALGEBRA DEI LIMITI: Siano a_n e b_n due successioni convergenti tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$; $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$. Allora avremo:

- $\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = l \cdot m$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ con $m \neq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = l^m$ con $l > 0$

DIMOSTRAZIONE (SOMMA): Le Hp sono sempre le stesse. La Th sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n > \bar{n}\ |a_n + b_n - (l + m)| < \varepsilon$.

Possiamo scrivere che: $|a_n + b_n - (l+m)| = |(a_n - l) + (b_n - l)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| \overset{\forall n \geq \max(n_0, n_1)}{\leq} 2\varepsilon$ per Hp