① $S = \{ A \in Mat(2,2;\mathbb{R}) \mid Tr(A) = \}$. Verifica che S è un sottospazio vettoriale di $Mat(2,2;\mathbb{R})$. Determinarne una base e una sua dimensione.

S è sottospazio se è chiuso rispetto a somma/prodotto e deve contenere $\underline{0}$:

1) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B) = 0$ $(A,B \in S)$.

2) $Tr(\lambda B) = \lambda \cdot Tr(B) = 0$ $(A \in S)$

Scriviamo il generico $A \in S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Possiamo esprimerlo come combinazione lineare di $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Affinché i vettori generatori siano una base, essi devono essere linearmente indipendenti. $\Rightarrow a = b = c = 0$. La condizione, in questo caso è verificabile anche senza calcoli. Quindi la base di S sarà: $B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. La dimensione di S è $\#B = 3$.

② Dato il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ $W = \{ (x,y,z) : x \geq 0 \}$. È un sottospazio vettoriale?

Preso $w = (x,y,z)$, abbiamo che $\lambda w = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. λw non è sempre contenuto in W $(\lambda < 0)$. W, quindi, non è un sottospazio vettoriale

③ Stabilire se $S = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \}$. È un sottospazio vettoriale?

Preso $s \in S$, se prendiamo $\lambda = 0$ allora $\lambda s \notin S$, quindi non è un sottospazio vettoriale.

④ Considera $\mathbb{R}_2[x]$. Dimostra che:

1) l'insieme di polinomi che interpolano il punto $(1,2)$ non è un sottospazio vettoriale.

2) l'insieme di polinomi con radice in $x = 1$ è un sottospazio vettoriale. Calcolane una base

Chiamiamo $S = \{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = 2 \}$. Il generico polinomio sarà $P(x) = ax^2 + bx + c$. Avremo che: $P(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$. Sostituiamo nel generico $P(x)$ e otteniamo il generico elemento di S: $P(x) = ax^2 + bx + 2 - a - b$.

Per dimostrare che S non è sottospazio dimostriamo che $\underline{0} \notin S$: $\{ a = 0, b = 0, 2 - a - b = 0$ IMP. $\Rightarrow S$ non è sottospazio.

Chiamiamo $T = \{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0 \}$. Ripetendo lo stesso procedimento di sopra troviamo che il generico elemento di T sarà: $ax^2 + bx - a - b$.

Controlliamo che: $P_1 + P_2 \in T \Rightarrow a_1x^2 + b_1x - a_1 - b_1 + a_2x^2 + b_2 - a_2 - b_2 = (a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x - (a_1+a_2) - (b_1+b_2) \Rightarrow$ ha la stessa forma del generico elemento.

$\lambda P_1 \in T \Rightarrow \lambda a_1 x^2 + \lambda b_1 - \lambda a - \lambda b \Rightarrow$ ha la la stessa forma del generico elemento.

Poiché $\underline{0} \in T$, T è un sottospazio vettoriale.

Una base di T potrebbe essere: $a(x^2-1) + b(x-1)$. I due vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow B = \{(x^2-1), (x-1)\}$

(5) In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme V definito come $V = \{(a, b, a+b, a-b) : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Verifica che V è un sottospazio vettoriale.

2) Determina una base

3) Partendo dalla base di (2), costruisci una base di $\mathbb{R}^4$.

4) Trovare $w \in \mathbb{R}^4$ tale che le sue componenti rispetto alla base trovata siano $(1,0,2,1)$

Verifichiamo che: $v_1 + v_2 \in V \Rightarrow (a_1+a_2, b_1+b_2, (a_1+a_2)+(b_1+b_2), (a_1+a_2)-(b_1+b_2)) \in V \Rightarrow$ è chiuso

$\lambda v \in V \Rightarrow (\lambda a, \lambda b, \lambda(a+b), \lambda(a-b)) \in V \Rightarrow$ è chiuso

$\Rightarrow V$ è un sottospazio vettoriale

Una base di V potrebbe essere $B = \{(1,0,1,1), (0,1,1,-1)\}$. I due vettori sono sicuramente generatori e sono anche linearmente indipendenti $\Rightarrow B$ è base.

Usiamo l'algoritmo di completamento per completare B. Usiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^4$

1) $a(1,0,1,1) + b(0,1,1,-1) + c(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$ $\quad \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow v_1, v_2, e_1$ sono linearmente indipendenti.

2) $a(1,0,1,1) + b(0,1,1,-1) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) = 0$ $\quad \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=0 \Rightarrow v_1, v_2, e_1, e_2$ sono linearmente indipendenti.

Ho, così, completato B e l'ho resa base di $\mathbb{R}^4$.

Troviamo w con componenti $1, 0, 2, 1$: $(1,0,1,1) + (2,0,0,0) + (0,1,0,0) = (3,1,1,1)$

⑥ Si considerino i seguenti polinomi di 2° grado con coefficienti reali $P_1(x) = 2x^2+2$, $P_2(x) = 2x+2$, $P_3(x) = x^2$, $P_4(x) = x^2+1$, $P_5(x) = 5x^2+2x+2$

1) Trovare una base di $\mathbb{R}_2[x]$ partendo dai polinomi sopra.

2) Esprimere $P_6(x) = x^2+4x$ secondo la base canonica e la base trovata in 1)

La dimensione di $\mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow \#B = 3$. Possiamo già escludere P_5 in quanto $P_5 = 2P_4 + 2P_1 + P_3$. Vediamo se P_2 è combinazione lineare:

$$aP_1 + bP_3 + cP_4 = P_2 \Rightarrow a(2x^2+2) + b(x^2) + c(x^2+1) = 2x+2 \quad \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ a=2 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \text{possiamo rimuovere } P_2$$

Verifichiamo allora che P_1, P_3, P_4 sono linearmente indipendenti (HOMEWORK). La base sarà allora $B = \{P_1, P_3, P_4\}$

Scriviamo P_6 in base canonica e in base B: can. $\Rightarrow (0,4,1)$

$$B \Rightarrow aP_1 + bP_3 + cP_4 = P_6 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b+c=1 \\ a=4 \\ b=0 \end{cases} = \begin{cases} a=5 \\ b=0 \\ c=-7 \end{cases}$$

⑥ In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $\underline{u} = (1,2,0,0)$ $\underline{v} = (0,-1,-1,0)$ $\underline{w} = (0,0,2,1)$. Sia $U = \mathrm{Span}(\underline{u})$ e $V = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$. Trova le dimensioni di $U \cap V$ e stabilire se $U+V$ è somma diretta.

$$\dim(U \cap V) = \underbrace{\dim(U)}_{1} + \underbrace{\dim(V)}_{2} - \underbrace{\dim(U+V)}_{U+V = \mathrm{Span}(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) \Rightarrow 3} = 0 \Rightarrow U+V \text{ è somma diretta}$$