Continuità di risultato di operazioni tra funzioni

Siano due funzioni $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ con f, g continue in x_0. Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\lambda \cdot f$ sono tutte continue in x_0.

DIM ($\pm$): $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f \pm g = \lim_{x \to x_0} f \pm \lim_{x \to x_0} g = f(x_0) \pm g(x_0) \Rightarrow \exists$ limite finito in x_0 ed è uguale al valore in $x_0 \Rightarrow (f \pm g)(x)$ è continua

Continuità di composizione di funzioni

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$. Allora $g(f(x))$ è continua in x_0.

DIM: per Hp: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ $(f(x_0) = y_0)$. Sia $a_n \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$, $f(a_n)$ è ancora una successione: $f(a_n) \to x_0 \Rightarrow g(f(a_n))$ è una successione. $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} g(b_n) = g(y_0) \Rightarrow b_n \to g(y_0) = g(f(x_0)) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0))$
$\forall a_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

Continuità di funzioni inverse

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $I \subseteq A$, f invertibile in $I \subseteq A$. $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ continua in I.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema (~p. del segno) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$

DIM: segue dal teorema di permanenza del segno per limiti

Teorema degli zeri Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$ e $[a;b] \subseteq A$ con $f(x)$ continua in $[a;b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$

DIM. per Hp, possiamo dire che $f(a) < 0 < f(b)$. Costruisco $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0 \Rightarrow$ teorema risolto. Sennò:

1. se $f(c) > 0$: restringo a $[a;c]$. Costruisco $d = \frac{a+c}{2}$. Se $f(d) = 0 \Rightarrow$ teorema risolto. Sennò:
   1. $f(d) < 0$: restringo $[d;c]$ ...
   2. $f(d) > 0$: restringo $[a;d]$ ...
2. se $f(c) < 0$: restringo a $[c;b]$. 〃 $d = \frac{c+b}{2}$. 〃 〃 〃 〃 〃 〃
   1. $f(d) < 0$: 〃 $[d;b]$ ...
   2. $f(d) > 0$: 〃 $[c;d]$ ...

Per ogni iterazione restringo l'intervallo: $[a_0;b_0] \xrightarrow{1°} [a_1;b_1] \xrightarrow{2°} [a_2;b_2] \xrightarrow{3°} \dots \xrightarrow{n°} [a_n;b_n]$. Per ogni passaggio $a_n < 0$; $b_n > 0$ e $\underset{\text{cresc.}}{a_0 \leq a_n}$; $\underset{\text{decr.}}{b_n \leq b_0}$ e (entrambe lim. ma sup che inf da a o b.) $\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1$; $\lim_{n \to +\infty} b_n = l_2$. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 = \left[\lim_{n \to +\infty} b_n - \lim_{n \to +\infty} a_n\right]$
$\Rightarrow l_1 = l_2$. Per $a_n \to l$, ($f(x)$ continua) $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(l) \leq 0$ (perm. segno) e $\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(l) \geq 0$ (per perm. segno), ma poiché $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = l$, $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \Rightarrow f(l) \leq 0 \wedge f(l) \geq 0 \Rightarrow f(l) = 0$

Teorema valori intermedi Sia $f : [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. $\forall y \in [f(a); f(b)]$ $\exists c \in [a;b] : f(c) = y$ (f assume tutti i valori tra $[f(a); f(b)]$)

DIM:
- $f(a) = f(b) \to$ caso banale.
- $f(a) < f(b) \to$ costruisco $g(x) = f(x) - \gamma$ $(\gamma \in [f(a); f(b)])$. $g(x)$ è continua (diff. di funz. cont.); $g(a) = f(a) - \gamma \leq 0$ e $g(b) = f(b) - \gamma \geq 0 \Rightarrow g(x)$ ammette uno zero tra $[a;b] \Rightarrow \exists c : f(c) = \gamma \Rightarrow$ dimostrato. $(g(c) = f(c) - \gamma = 0 \Rightarrow f(c) = \gamma)$
  Se $g(a) = 0 \to f(a) = \gamma \Rightarrow$ dimostrato. Se $g(b) = 0 \to f(b) = \gamma \Rightarrow$ dimostrato.