1) $F(x)=\int_0^x t\arctan(t-1)\,dt$

D: $\mathbb{R}$ , $F'(x)=t\arctan(t-1) \Rightarrow F'(x)\geq 0$

| | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| + | | - | | + |

$\Rightarrow$ per $x\leq 0 \wedge x\geq 1$ $F(x)$ è crescente e per $0\leq x\leq 1$ è decrescente.

0,1 sono punti stazionari e $F(0)=0$, quindi ~~per $x<0$ è $F(x)$ è positiva~~ e per $x>0$ $F(x)$ è negativa

$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^{+\infty} t\arctan(t-1)\,dt=+\infty \Rightarrow$ in $(1;+\infty)$ $F(x)$ si annulla almeno una volta (1 sola volta a causa della monotonia)

$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\int_0^{-\infty} t\arctan(t-1)\,dt=-\infty \Rightarrow$ in $(-\infty;0)$ $F(x)$ si annulla almeno una volta (1 sola volta a causa della monotonia)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\underset{\text{de l'Hopital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{t\arctan(t-1)}{1}=+\infty \Rightarrow$ niente asintoti obliqui

2) $\int_0^{-\infty}\sqrt[3]{t-1}\,e^t\,dt\underset{s=-t}{=}-\int_0^{+\infty}\sqrt[3]{-s-1}\,e^{-s}\,ds=+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{+s+1}}{e^s}\,ds \Rightarrow$ confronto con $o\left(\frac{1}{s^2}\right)\to\frac{\sqrt[3]{+s+1}}{e^s}\underset{s\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{s^2}\right)\Rightarrow\lim_{s\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{s+1}}{e^s}\cdot\frac{1}{1/s^2}=\lim_{s\to+\infty}\frac{s^2\sqrt[3]{s+1}}{e^s}=0 \Rightarrow$ l'integrale esiste finito

3) $F(x)=\int_1^x\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}$

Dominio: $x\to0^+$ $\underbrace{\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\to e^s\sqrt{\frac{1}{s}+1}\sqrt{s}\sim e^s\sqrt{s}}_{}$ $\to$ non integrabile $\Rightarrow$ D: $(0;+\infty)$

Ci dice anche che $F(x)$ ha as. h. in $x=0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}F(x)=\int_1^0\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt=-\int_0^1\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt=+\infty$

↳ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}=1 \Rightarrow$ una funzione ad andamento costante ha integrale divergente.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}F'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=1$ ; $\lim_{x\to+\infty}[F(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt-x=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_1^x\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt-\int_1^x dt-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_1^x\left(\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}-1\right)dt-1\right]$

↓

Studiamo l'integranda

$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to+\infty}e^{1/t}\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1\underset{\text{MC LAURIN}}{=}\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)+1\right]=$

$\lim_{t\to+\infty}\frac{3}{2t}\to$ la funzione non è integrabile $\Rightarrow\nexists$ as. obl.

$F'(x)=\frac{e^{1/x}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}>0$ $\forall x\in D \Rightarrow$ sempre crescente

Homework: Studia:

$\int_1^x\frac{e^t-1}{\sqrt{t^2(t-1)}}\,dt$ , $\int_1^x\frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$

(cuspide in x=2) (pari)