Somma di Cauchy-Reimann

Si dice somma di Cauchy-Reimann la seguente somma:

$$\sigma_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\,[x_{i+1}-x_i]$$

con $m_i \le f(z_i) \le M_i$ dove m_i e M_i sono max, min assoluti di $f|_{[x_i;x_{i+1}]}$

Siccome $m_i \le f(z_i) \le M_i$, avremo $s_n \le \sigma_n \le S_n$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \int_a^b f(x)dx$.

Def. di integrale con σ_n

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)$$

Aree

1) $f(x)>0 \quad \forall x \qquad A=\int_a^b f(x)dx$

2) $f(x)\le 0 \quad \forall x \qquad A=-\int_a^b f(x)dx$

3) $\left.\begin{array}{ll} f(x)>0 & \forall x\in[a;c] \\ f(x)\le 0 & \forall x\in[c;b]\end{array}\right\} \Rightarrow A=\int_a^b |f(x)|dx$

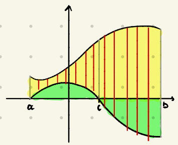
OSS: $f(x)$ è dispari su $[-a;a] \Rightarrow A = 2\int_0^a |f(x)|dx$
$f(x)$ è pari su $[-a;a] \Rightarrow A = 2\int_0^a |f(x)|dx$

Siano f, g continue in $[a;b]$ l'area del trapezoide $T_{f,g}([a;b])$ è:

1) $f, g \ge 0 \quad A(T_{f,g}[a;c]) = \int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx$

2) $f(x)>0,\ g(x)<0 \quad A(T_{f,g}[a;c]) = \int_c^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$

$\Big\}\ A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



Proprietà dell'integrale

1) LINEARITÀ: $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ OSS. deriva dalla linearità della sommatoria nella somma di C.R.

$f'(x) = \sin x + x\cos x \quad = \sin x + x\cos x$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x \quad = 2\cos x - x\sin x$

$f'''(x) = -2\sin x - \sin x - x\cos x \quad = -3\sin x - x\cos x$

$f''''(x) = -3\cos x - \cos x + x\sin x \quad = -4\cos x + x\sin x$

$f'''''(x) = +4\sin x + \sin x + x\cos x \quad = 5\sin x + x\cos x$

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-x} \qquad T_2^2(x)=?$ grafico locale?

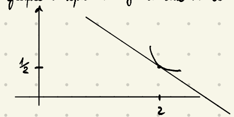
$T_2^2(x) = f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 = \frac12-\frac34(x-2)+\frac78(x-2)^2 \Rightarrow f(x)=\frac12-\frac34(x-2)+\frac78(x-2)^2+o(x^2)$

$f'(x) = -(2x-1)(x^2-x)^{-2}$

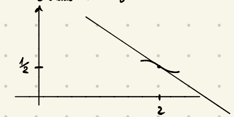
$f''(x) = -2(x^2-x)^{-2} - 2(2x-1)^2(x^2-x)^{-3}$

Per grafico locale si intende un grafico che rispetti tangente e concavità in un certo intorno

La tg è $T_1^2(x)=\frac12-\frac34(x-2)$. Per calcolare la posizione della curva rispetto alla tangente studiamo $f(x)-T_1^2(x)=\frac78(x-2)^2+o(x^2)>0$
$\Rightarrow \frac78(x-2)^2>0 \quad \forall x \Rightarrow$ il grafico è sopra la tg nell'intorno di $x_0=2$.



Se avremmo modificato $T_2^2(x)=\frac12-\frac34(x-2)+o(x^2)$ allora non avremmo potuto estrapolare informazioni. Calcolando $T_3^2(x)=\frac12-\frac34(x-2)+\frac78(x-2)^3+o(x^3)$ avremo che $\frac78(x-2)^3\ge 0 \quad x\ge 2 \Rightarrow$ quindi avremo un flesso ascendente



3) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\sin x+x\cos x$ punti stazionari? Taylor centrato in essi e trova la natura dei punti

$f'(x) = x^2 \cancel{-\cos} + \cancel{\cos x} - x\sin x = x^2 - x\sin x$

$f'(x)=0 \qquad x=0, \quad x=\sin x \to x=0 \Rightarrow x=0$

$T(x) = \cancel{\frac{x^3}{3}} \cancel{-x} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6) + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{2!}} + \frac{x^5}{4!} + o(x^6) = \frac{-4!x^5+5!x^5}{5!4!}+o(x^6) = \frac{4}{5!}x^5+o(x^6) \Rightarrow \frac{4}{5!}x^5\ge 0 \quad x\ge 0 \Rightarrow$ flesso

Lo sviluppo di $\frac{x^3}{3}$ di ordine 6 è la funzione stessa poichè è polinomiale di grado inf.

$T_6(x) = \frac{0^3}{3} + 0^2\cdot x + \frac{\cancel{2}\cdot 0\cdot x^2}{\cancel{2}} + \frac{2}{3!}\cdot x^3 + 0 = \frac13 x^3$

non possiamo derivare oltre