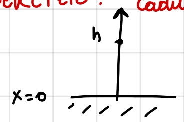
• • •

ESERCIZIO: caduta del grave



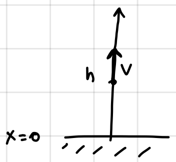
$t=0$ l'istante in cui lascio cadere

$a=-g$

CONDIZIONI INIZIALI:
$x(0)=h$, $v(0)=0$

$$v(t)=\cancel{v(0)}+\int_0^t -g\,dt=-g\int_0^t dt=-gt$$
$$x(t)=h+\int_0^t -gt\,dt=h-\frac{1}{2}gt^2$$

$$x(\tilde t)=0 \longrightarrow g\tilde t^2=2h \longrightarrow \tilde t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$



$t_0=0$ $\quad a=-g$

$x(0)=h$

$v(0)=v_0$

$$v(t)=v_0-gt$$
$$x(t)=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$
$$v(\tilde t)=0 \to \tilde t=\frac{v_0}{g} \implies x(\tilde t)=h+\frac{v_0^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}=h+\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

3.3 MOTO NON RETTILINEO

Velocità e accelerazione scalare possono essere generalizzati al caso dell'ascissa curvilinea. Da ora verrà usata la rappresent. vettoriale. È possibile scomporre il moto nelle 3 componenti e studiarle separatamente in modo unidimensionale.

3.3.1 VELOCITÀ E ACCELERAZIONE VETTORIALE

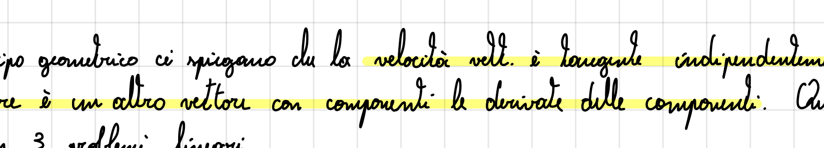
Si definisce la velocità media vettoriale:

$$\vec v_m=\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$$

e la istantanea:

$$\vec v=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec r(t_2)-\vec r(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{d\vec r(t)}{dt}$$

La velocità vettoriale, quindi, indica quanto velocemente varia $\vec r$ rispetto a t.



$$\Delta\vec r=\Delta s\,\underbrace{\hat u_T}_{\text{tan traiettoria}} \implies \vec v(t)=\frac{d\vec r(t)}{dt}=\frac{d\frac{\Delta s}{\Delta t}\hat u_T}{dt}=v\,\hat u_T$$

Queste considerazioni di tipo geometrico ci spiegano che la velocità vett. è tangente indipendentemente dal sistema di coordinate.
La derivata di vettore è un altro vettore con componenti le derivate delle componenti. Questo ci permette di risolvere un problema scomponendolo in 3 problemi lineari.
Il problema inverso sarà:

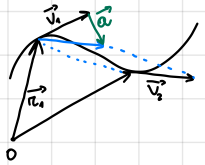
$$\vec r=\vec r_0+\int_{t_0}^t\vec v(t)\,dt \implies \begin{cases} x=x_0+\int_{t_0}^t\frac{dx}{dt}\,dt \\ y=y_0+\int_{t_0}^t\frac{dy}{dt}\,dt \\ z=z_0+\int_{t_0}^t\frac{dz}{dt}\,dt \end{cases}$$

Accelerazione media e istantanea si ricavano allo stesso modo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Che direzione ha l'accelerazione?

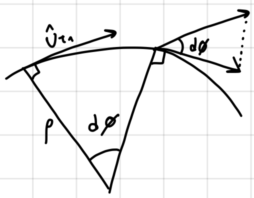


DIMOSTRAZIONE:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t)\hat{u}(t)) = v'(t)\hat{u}(t) + v(t)\hat{u}'(t) = \underbrace{a(t)\hat{u}(t)}_{\text{dir. tangente}} + \underbrace{v(t)\hat{u}'(t)}_{\text{dir. ortogonale}} = a(t)\hat{u}(t) + v(t)\frac{v(t)}{\rho}\hat{u}_n(t) = \underbrace{a(t)\hat{u}(t)}_{a_T} + \underbrace{\frac{v^2(t)}{\rho}\hat{u}_n(t)}_{a_n}$$

$\frac{d\hat{u}(t)}{dt}$: 1) direzione: $\frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$: $\hat{u}\cdot\hat{u} = 1 \Rightarrow \frac{d(\hat{u}\cdot\hat{u})}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dt}\cdot\hat{u} + \hat{u}\frac{d\hat{u}}{dt} \overset{\text{comm.}}{=} 2\frac{d\hat{u}}{dt}\cdot\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u} \perp \frac{d\hat{u}}{dt}$

2) modulo:



$|d\hat{u}_T| \hat{=} |\hat{u}_T| d\phi = d\phi$

$\left|\frac{du_T}{dt}\right| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$

$ds = \rho\, d\phi$

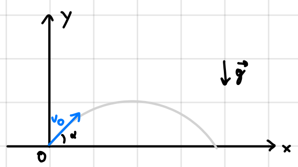
↳ raggio circ. osculatrice

Queste considerazioni sono indipendenti dal sistema di riferimento.

Le componenti dei nostri vettori saranno:

$$r(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$
$$v(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath} + z'(t)\hat{k}$$
$$a(t) = x''(t)\hat{\imath} + y''(t)\hat{\jmath} + z''(t)\hat{k}$$

ESERCIZIO: moto del proiettile



$t_0 = 0$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Leggi orarie? [1]

Traiettoria? [2]

Gittata? [3]

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + \cancel{\int_0^t a(t)\,dt} = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_{0y} + \int_0^t -g\,dt = v_{0y} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \int_0^t v_0\cos\alpha\,dt = v_0\cos\alpha\, t \\ y = \int_0^t v_0\sin\alpha - gt\,dt = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad [1]$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ y = \cancel{v_0}\sin\alpha\cdot\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha} + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0\cos^2\alpha} = \tan\alpha\cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \end{cases} \quad [2]$$

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\,\tilde{t} \\ v_0\sin\alpha\,\tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \quad [3] \\ \tilde{t}\left(v_0\sin\alpha - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2\right) = 0 \quad \begin{cases} \tilde{t}_1 = 0 \quad \times \\ \tilde{t}_2 = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \quad ✓ \end{cases} \end{cases}$$