

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

PROF. _____
MARCO
COMPAGNONI
_____ 

SPAZI VETTORIALI

EUCLIDEI:

- [•] Definizioni
- [•] Esempi
- [•] Proprietà elementari
- [•] Matrice di Gram
- [•] Ortogonalità
- [•] Complemento ortogonale
- [•] Proiezione ortogonale

SEZIONE 8.1

SEZIONE 8.2

SEZIONE 8.3

PRODOTTI SCALARI (DEFINIZIONE 8.1)

\forall spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare è un'operazione

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

$$(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \mapsto \langle \underline{x}_1, \underline{x}_2 \rangle$$

- i) $\langle t_1 \underline{x}_1 + t_2 \underline{x}_2, \underline{x} \rangle = t_1 \langle \underline{x}_1, \underline{x} \rangle + t_2 \langle \underline{x}_2, \underline{x} \rangle$; lineare
- ii) $\langle \underline{x}_1, \underline{x}_2 \rangle = \langle \underline{x}_2, \underline{x}_1 \rangle$; simmetrica
- iii) $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ ed è esattamente 0 se $\underline{x} = \underline{0}$. definito positivo

SPAZI VETTORIALI EUCLIDI (DEFINIZIONE 8.2)

(V, \langle , \rangle) si dice spazio vettoriale euclideo.

NORMA DI UN VETTORE (DEFINIZIONE 8.3)

La norma indotta dal prodotto scalare è la funzione

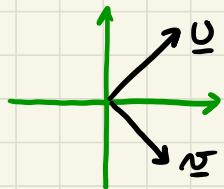
$$\| \| : V \rightarrow \mathbb{R} \quad . \quad \leftarrow \text{ben definita per iii}$$

$$\underline{x} \mapsto \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

PRODOTTI SCALARI CANONICI (ESEMPIO 8.4)

$\underline{U} = (U_1, \dots, U_m), \underline{\Sigma} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$ il prodotto e la norma euclidea sono

$$\langle \underline{U}, \underline{\Sigma} \rangle_E = U_1 \Sigma_1 + \dots + U_m \Sigma_m, \quad \|\underline{\Sigma}\|_E = \sqrt{\Sigma_1^2 + \dots + \Sigma_m^2}.$$



$$\underline{U} = (1, 1), \quad \underline{\Sigma} = (1, -1) \Rightarrow$$

$$\langle \underline{U}, \underline{\Sigma} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0, \quad \|\underline{U}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \|\underline{\Sigma}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$i) \langle \alpha \underline{U} + \beta \underline{\Sigma}, \underline{W} \rangle_E = \sum_{i=1}^m (\alpha U_i + \beta \Sigma_i) W_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^m U_i W_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^m \Sigma_i W_i = \\ = \alpha \langle \underline{U}, \underline{W} \rangle_E + \beta \langle \underline{\Sigma}, \underline{W} \rangle_E$$

$$ii) \langle \underline{U}, \underline{\Sigma} \rangle_E = \sum_{i=1}^m U_i \Sigma_i = \sum_{i=1}^m \Sigma_i U_i = \langle \underline{\Sigma}, \underline{U} \rangle_E$$

$$iii) \langle \underline{\Sigma}, \underline{\Sigma} \rangle_E = \sum_{i=1}^m \Sigma_i^2 \geq 0 \quad \text{ed} \quad 0 \quad \text{se} \quad \underline{\Sigma} = \underline{0} \quad (\Sigma_i \in \mathbb{R})$$

$A, B \in \text{Mat}(m, m; \mathbb{R}) \Rightarrow$ il prodotto e la norma di Frobenius sono

$$\langle A, B \rangle_F = \text{Tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^m (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A^\top)_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ji} b_{ji}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{bmatrix} \right\rangle_F = a \cdot 0 + b \cdot e + b \cdot (-e) + c \cdot 0 = be - be = 0$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

$I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow L_2(I, \mathbb{R}) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_I f(x)^2 dx \text{ esiste finito} \}$

$$\langle f, g \rangle_I = \int_I f(x) g(x) dx, \quad \|f\|_I = \sqrt{\int_I f(x)^2 dx}.$$

$$P(x) = 1+x \quad Q(x) = x \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Rightarrow$$

$$\langle P, Q \rangle_{[0,1]} = \int_0^1 (1+x) x dx = \int_0^1 x + x^2 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\|Q\|_{[0,1]}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \|Q\|_{[0,1]} = 1/\sqrt{3}$$

ESEMPIO 8.5 (esercizio)

$$X, Y \in V = \text{Mat}(m, n; \mathbb{R}), \quad G \in \mathbb{S}(m; \mathbb{R}) \Rightarrow \langle X, Y \rangle_G = X^T G Y$$

Se gli autovalori di G sono strettamente positivi $\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_G$ è un prodotto scalare

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_G = \sqrt{\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_G} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{5} \neq \sqrt{2}$$

PROPRIETÀ ELEMENTARI PRODOTTO SCALARE (PROPOSIZIONE 8.6)

- i) $\left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{v}_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{u}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle \underline{v}_i, \underline{u}_j \rangle;$ bilinearità
- ii) $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0$ per ogni \underline{v} se $\underline{v} = \underline{0};$ non degenero
- iii) $\|\underline{v}\| = 0$ se $\underline{v} = \underline{0};$ legge di annullamento
- iv) $\|t \cdot \underline{v}\| = |t| \cdot \|\underline{v}\|.$ omogeneità

POLARIZZAZIONE E CARNOT (PROPOSIZIONE 8.7)

i) $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle;$

ii) $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \frac{\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2}{2}.$

Dm: $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \quad \square$

OSS: dalla formula di polarizzazione si può ricavare il prodotto scalare delle norme.

MATRICE DI GRAM (DEFINIZIONE 8.10)

V.d.s.r.e., $U = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subseteq V$. La matrice di Gram di U è

$$G|_U = [\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle] = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle & \dots & \langle \underline{v}_1, \underline{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \underline{v}_m, \underline{v}_1 \rangle & \dots & \langle \underline{v}_m, \underline{v}_m \rangle \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, m; \mathbb{R}).$$

Il gramiano di U è $\det(G|_U) = G(U) = G(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$.

ESEMPIO 8.11

\mathbb{R}^n , $B_m = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$, prodotto euclideo \Rightarrow

$$G|_{B_m} = \begin{bmatrix} \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle & \dots & \langle \underline{e}_1, \underline{e}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \underline{e}_m, \underline{e}_1 \rangle & \dots & \langle \underline{e}_m, \underline{e}_m \rangle \end{bmatrix} = I_m \quad G(B_m) = 1$$

$\mathbb{R}[x]_m$, $B_m = \{1, \dots, x^m\}$, prodotto L₂ su $I = [0, 1]$ \Rightarrow

$$G|_{B_m} = [\langle x^i, x^j \rangle_I] = \left[\int_0^1 x^{i+j} dx \right] = \left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 \right] = \left[\frac{1}{i+j+1} \right]$$

$$G|_{B_3} = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_I & \langle 1, x \rangle_I & \langle 1, x^2 \rangle_I \\ \langle x, 1 \rangle_I & \langle x, x \rangle_I & \langle x, x^2 \rangle_I \\ \langle 1, x \rangle_I & \langle x^2, x \rangle_I & \langle x^2, x^2 \rangle_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

- Il prodotto scalare è determinato da G_{IB} con B base
- $G(U)$ fornisce importanti informazioni sull'indipendenza di U

RAPPRESENTAZIONE DEI PRODOTTI SCALARI (PROPOSIZIONE 8.12)

\forall s.v.e. f.g. $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$

- i) l'unica matrice A t.c. $\langle U, W \rangle = \underline{v}_{IB}^T A \underline{w}_{IB}$ è $A = G_{IB}$;
- ii) $G_{IB'} = M_{B'B}^T G_{IB} M_{B'B}$.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) dx = P^T_{IB_2} G_{IB_2} Q_{IB_2} =$$

$$= [a_0 \ a_1 \ a_2] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [a_0 \ a_1 \ a_2] \begin{bmatrix} b_0 + b_1/2 + b_2/3 \\ b_0/2 + b_1/3 + b_2/4 \\ b_0/3 + b_1/4 + b_2/5 \end{bmatrix} =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1}{2} + \frac{a_0 b_2}{3} + \frac{a_1 b_0}{2} + \frac{a_1 b_1}{3} + \frac{a_1 b_2}{4} + \frac{a_2 b_0}{3} + \frac{a_2 b_1}{4} + \frac{a_2 b_2}{5}$$

VERIFICA DI INDEPENDENZA LINEARE (PROPOSIZIONE 8.14)

$\forall \text{ s.n.c. } , \underline{U} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \subseteq V . \quad G(\underline{U}) \neq 0 \text{ ne } \underline{U} \text{ è l.i.}$

$$\underline{U} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, -1, 0)\} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\} \Rightarrow$$

$$G(\underline{U}) = \begin{vmatrix} \langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_1, \underline{u}_3 \rangle_E \\ \langle \underline{u}_2, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_2, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle_E \\ \langle \underline{u}_3, \underline{u}_1 \rangle_E & \langle \underline{u}_3, \underline{u}_2 \rangle_E & \langle \underline{u}_3, \underline{u}_3 \rangle_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 8 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{U} \text{ è l.d.}$$

Infatti $\underline{u}_3 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$.

OSS: la verifica non dipende dal prodotto scalare scelto.

ORTOGONALITÀ (7.3)

DEFINIZIONI 8.8 - 8.16

V spazio vettoriale euclideo.

- \underline{v} è un vettore se $\|\underline{v}\|=1$;
- $\tilde{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ è detta normalizzazione di \underline{v} ; $\|\tilde{\underline{v}}\|=1$
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ si dicono ortogonali ($\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$) se $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0$;

$U \subseteq V$ si dice:

- normalizzato se è composto da vettori;
- ortogonale se è composto da vettori ortogonali;
- ortonormale se è composto da vettori ortogonali.

$$V = \mathbb{R}^4 \quad \underline{v} = (1, 0, 1, 0) \quad \underline{w}_0 = (a, a, a, 1)$$

$$\|\underline{v}\|_E = \sqrt{2}, \quad \|\underline{w}_0\|_E = \sqrt{3a^2 + 1}, \quad \langle \underline{v}, \underline{w}_0 \rangle_E = 2a \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w}_0 \text{ se } a=0$$

$\{\underline{v}, \underline{w}_0\}$ è ortogonale. $\tilde{\underline{v}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \Rightarrow \{\tilde{\underline{v}}, \underline{w}_0\}$ è ortonormale

OSS. : . \underline{U} normalizzato se $(G_{1\underline{U}})_{ii} = 1$;

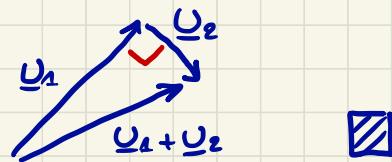
. \underline{U} ortogonale se $G_{1\underline{U}} \in \mathbb{D}(n; \mathbb{K})$;

. \underline{U} ortonormale se $G_{1\underline{U}} = I_m$.

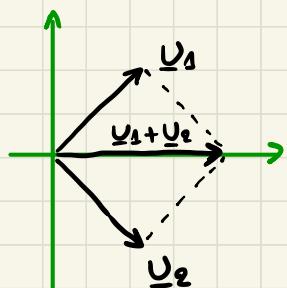
TEOREMA DI PITAGORA (PROPOSIZIONE 8.18)

$$\underline{U} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\} \text{ ortogonale} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^m \underline{u}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\underline{u}_i\|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{DIM: } m=2 \Rightarrow \|\underline{u}_1 + \underline{u}_2\|^2 &= \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2 + 2 \cancel{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle} \\ &= \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2 \end{aligned}$$



$$V = \mathbb{R}^2$$



$$\underline{u}_1 = (1, 1), \underline{u}_2 = (1, -1) \Rightarrow \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = 0 \text{ cioè } \underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$$

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (2, 0) \Rightarrow$$

$$\|\underline{u}_1 + \underline{u}_2\|_E^2 = 4 = \|\underline{u}_1\|^2 + \|\underline{u}_2\|^2 = 2 + 2$$

COMPLEMENTO ORTOGONALE (DEFINIZIONE 8.19)

V s.v.e., $U \subseteq V$ sottovolume. $U^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle = 0 \text{ per ogni } \underline{v} \in U\}$.

$$V = \mathbb{R}[x]_2 \quad I = [0,1] \quad B_2 = \{1, x, x^2\} \quad G_I = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$U = \{P(x) = 1\} \Rightarrow U^\perp = \{Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \mid \int_0^1 Q(x) \cdot 1 \, dx = 0\}$$

$$\int_0^1 Q(x) \cdot 1 \, dx = \int_0^1 b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \, dx = b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \frac{b_2}{3} x^3 \Big|_0^1 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow U^\perp = \{Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \mid b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} = 0\} = \{Q(x) = b_1(x - \frac{1}{2}) + b_2(x^2 - \frac{1}{3})\}$$

$$\langle Q, 1 \rangle_I = Q |_{B_2}^T G_I 1 |_{B_2} = [b_0 \ b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [b_0 \ b_1 \ b_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix} = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} = 0$$

OSS: se V s.v.e. e B base ortonormale $\Rightarrow G_B = I_n$.

$$U = \{\underline{v}\} \Rightarrow U^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} |_B^T * \underline{v} |_B = 0\}$$

$$V = \mathbb{R}^3 \quad U = \mathcal{L}(\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \underline{v}_2 = (1, 1, 0)) \quad B_3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono indipendenti e generano il piano

$$\begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = t_2 \\ z = t_1 \end{cases} \Rightarrow x - y - z = 0$$

$$U^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \langle \underline{w}, t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 \rangle_E = 0\} \quad B_3 \text{ è ortonomale}$$

$$\langle \underline{w}, t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 \rangle_E = t_1 \langle \underline{w}, \underline{v}_1 \rangle_E + t_2 \langle \underline{w}, \underline{v}_2 \rangle_E = 0 \quad \text{per ogni } t_1, t_2$$

$$\text{se } \langle \underline{w}, \underline{v}_1 \rangle_E = \langle \underline{w}, \underline{v}_2 \rangle_E = 0$$

$$\text{Definiamo } A = [\underline{v}_1|B_3 \quad \underline{v}_2|B_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{w} \in U^\perp \text{ se } \underline{w}|_{B_3}^T * A = 0_{12} \text{ se } A^T * \underline{w}|_B = 0_{21}$$

$$\text{se } \underline{w}|_{B_3} \in \text{Ker}(A^T) = \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow U^\perp : \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{retta } \perp \text{ a } U \quad \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 8.21

\forall s.v.e., $U \subseteq V$ sottospazio e $\overline{U} = \mathcal{L}(U)$.

i) U^\perp è sottospazio di V ;

ii) $U^\perp = \overline{U}^\perp$;

iii) se V è f.g. allora $V = \overline{U} \oplus U^\perp$.

REMIND: sia $V = U \oplus W$

\Rightarrow per ogni v esiste unica $v = u + w$

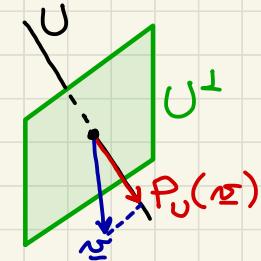
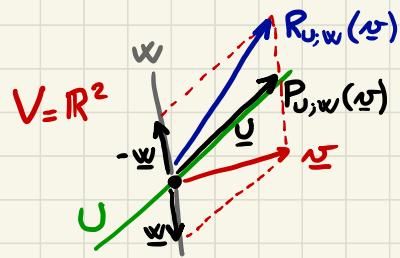
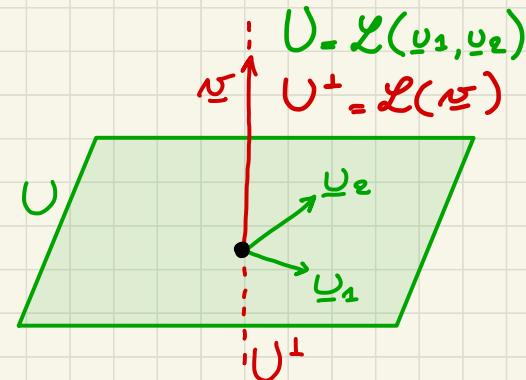
$\Rightarrow P_{U;W}(v) = u$, $R_{U;W}(v) = u - w$

PROIEZIONE E RIFLESSIONE ORTOGONALE (DEFINIZIONE 8.23)

\forall s.v.e. f.g. $U \subseteq V$ sottospazio.

i) la proiezione ortogonale su U è $P_U = P_{U;U^\perp}$;

ii) la riflessione ortogonale rispetto ad U è $R_U = R_{U;U^\perp}$.



$V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $\underline{\alpha} = (h, 1, 1)$ $h \in \mathbb{R}$

$$U: x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = t_1 \underbrace{(-1, 1, 0)}_{\underline{\alpha}_1} + t_2 \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\underline{\alpha}_2}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_U = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2\}$ è base di U

$$U^\perp \sim \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \mathcal{B}_{U^\perp} = \{ \overbrace{(1, 1, 1)}^{\underline{\alpha}_3} \}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{U^\perp} = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ è base di V

$$\underline{\alpha} = \alpha \underline{\alpha}_1 + \beta \underline{\alpha}_2 + \gamma \underline{\alpha}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

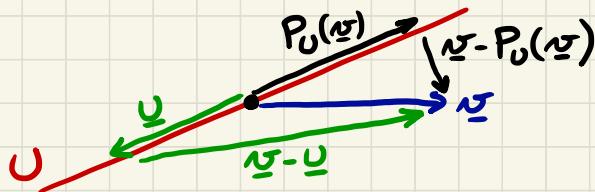
$$\underline{\alpha} = \frac{1-h}{3} \underline{\alpha}_1 + \frac{1-h}{3} \underline{\alpha}_2 + \frac{h+2}{3} \underline{\alpha}_3 \Rightarrow P_U(\underline{\alpha}) = \frac{1-h}{3} (-2, 1, 1)$$

- $h=1$: $P_U(\underline{\alpha}) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha} \in U^\perp$

- $h=-2$: $P_U(\underline{\alpha}) = \underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha} \in U$

CARATTERIZZAZIONE METRICA DELLA PROIEZIONE (PROPOSIZIONE 8.24)

\forall s.v.e. f.g., $U \subseteq V$ sottospazio $\Rightarrow P_U(\underline{x}) = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \| \underline{x} - u \|$.



Dim: dimostriamo che $\| \underline{x} - u \| > \| \underline{x} - P_U(\underline{x}) \|$ per ogni $u \notin P_U(\underline{x})$.

$$\| \underline{x} - u \|^2 = \| \underbrace{(\underline{x} - P_U(\underline{x}))}_{\in U^\perp} + \underbrace{(P_U(\underline{x}) - u)}_{\in U} \|^2 = \| \underline{x} - P_U(\underline{x}) \|^2 + \| P_U(\underline{x}) - u \|^2 >$$

> 0

$$> \| \underline{x} - P_U(\underline{x}) \|^2$$

$$\Rightarrow \| \underline{x} - u \| > \| \underline{x} - P_U(\underline{x}) \|.$$

□