LOTKA - VOLTERRA (modello preda - predatore)

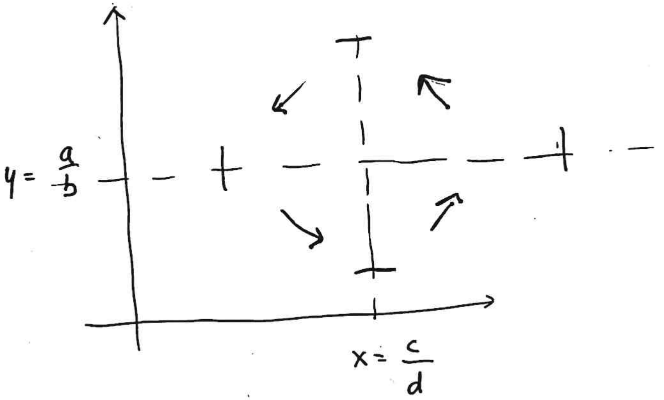
x preda y predatore

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}}{x} = a - by \\ \dfrac{\dot{y}}{y} = -c + dx \end{cases} \qquad a,b,c,d \in R^+ \qquad x,y \in R^+$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$ sistema I ordine non lineare

Punti di equilibrio

$$\begin{cases} x\,(a-by) = 0 \\ y\,(-c+dx) = 0 \end{cases} \qquad (0,0) \text{ NON ACCETTABILE} \qquad \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$



RICERCA INTEGRALE PRIMO

$$\frac{\dot{x}}{x}(-c+dx) - \frac{\dot{y}}{y}(a-by) = 0$$

$$\left(-\frac{c}{x}+d\right)\dot{x} - \left(\frac{a}{y}-b\right)\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(-c\log x + dx - a\log y + by\right)$$

$\Rightarrow$ $E(x,y) = -c\log x + dx - a\log y + by$ integrale primo.

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = 0$$

Studio di $E(x,y)$

sappiamo che $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ unico punto stazionario

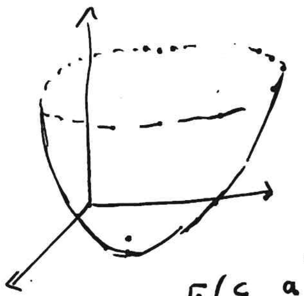
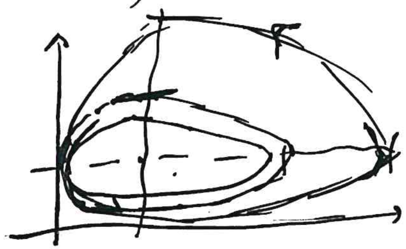
$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{c}{x} + d \;,\; \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{a}{y} + b\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2} \qquad H(x,y) > 0 \;\; \forall (x,y)$$

E strettamente convessa $\Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ minimo forte.

Oss. $E(x,y) \to +\infty$ per $x \to 0$, $y \to 0$, $\|(x,y)\| \to \infty$

3] Insiemi di livello di E sono curve chiuse che circondano $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

$E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0$ per valori opportuni di a,b,c,d
altrimenti

— —

curve chiuse $\Rightarrow$ sol. periodiche -

Periodo T

— — —

significato di $\frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b}$

$$\int_0^T \frac{\dot x}{x}\, dt = \Big[\log x(t)\Big]_0^T = 0 \qquad \int_0^T \frac{\dot y}{y}\, dt = 0$$

quindi $0 = \int_0^T (a - b\,y(t))\, dt = aT - b\int_0^T y(t)\, dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, dt = \frac{a}{b}$$ media dei predatori y

Analogamente

media delle prede x $\quad \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = \frac{c}{d}$

— —

In assenza di pesca, considerando la popola x (o y) senza interazioni con y (o x), avrem che $\frac{\dot x}{x}$ $\left(\frac{\dot y}{y}\right)$ aumentato -

quindi $\frac{\dot x}{x} = a + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$

$\frac{\dot y}{y} = -c + \eta$, con $\eta > 0$

Considerando le interazioni con l'altra sp

$$\begin{cases} \dot x = x(a + \varepsilon - b y) \\ \dot y = y(-(c - \eta) + d x) \end{cases}$$ e quindi

$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = \frac{c - \eta}{d}$ popolazione media diminuita per le prede

$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, dt = \frac{a + \varepsilon}{b}$ popolazione media aumentata per i predatori