

8/10/20

- 1) Dire $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n, m) \in R \iff \exists h, k \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha \in \mathbb{N} : n = 2^\alpha h, m = 2^\beta k$. Provare che R è di equivalenza e descrivere $\frac{\mathbb{N}_0}{R}$
- 2) Dire $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ che associa a n la massima potenza di 2 che divide n , quindi possiamo dire che $(n, m) \in R \iff f(n) = f(m)$. Avremo, quindi, che $R = \text{Ker}(f)$ e siccome $\text{Ker}(f)$ è di equivalenza, allora R è di equivalenza $\frac{\mathbb{N}_0}{R} = \{[2^\alpha]_R \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $[2^\alpha]_R \cdot \mathbb{D}$ con $\mathbb{D} = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$

- 2) Consideriamo $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n, m) \in S \iff \exists h, k \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N} : n = 2^\alpha h, m = 2^\beta k \wedge \alpha \leq \beta$. Provare che S è di ordine.

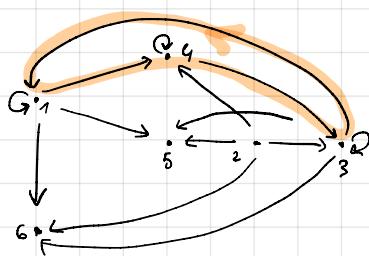
- 1) riflessiva: Sia $n \in \mathbb{N}_0$, allora $f(n) = f(n)$ ($f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ che abbiamo visto in 1) quindi $(n, n) \in S$
 transitiva: Siano $n, m, l \in \mathbb{N}_0$: $(n, m) \in S \wedge (m, l) \in S$ dunque $f(n) \leq f(m) \leq f(l) \Rightarrow f(n) \leq f(l) \Rightarrow (n, l) \in S$
 antirimutativa: Siano $n, m \in \mathbb{N}_0$: $(n, m) \in S \wedge (m, n) \in S$ dunque $f(n) \leq f(m) \wedge f(m) \leq f(n) \Rightarrow f(n) = f(m)$. Dobbiamo ora dimostrare che f è iniettiva. In 1, però, abbiamo visto che è possibile che $[n]_R = [m]_R$, quindi l'antirimutatività non è valida.
 \hookrightarrow non è una relazione d'ordine.

- 3) Considera $T \subseteq \frac{\mathbb{N}_0}{R} \times \frac{\mathbb{N}_0}{R} : ([n]_R, [m]_R) \in T \iff (n, m) \in S$, essa è d'ordine? (R ed S definiti in 1 e 2).
 Dimostra che T è d'ordine.

- 1) Bisogna prima dimostrare che T è ben definita, ovvero se $n \in [n]_R$ e $m \in [m]_R$, allora $(n, m) \in S \iff (n', m') \in S$. Sia $(n, m) \in S \iff f(n) = f(m) \iff f(n') \leq f(m') \iff (n', m') \in S$.
 Dimostrare le proprietà è facile.

- 4) Dire $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Dire:

- 1) Quali proprietà ha R
 2) Qual è la chiusura d'equivalenza di R
 3) Esiste la chiusura d'ordine di R ? Se sì, trovarne max, min. È un reticolo?
 4) R contiene funzioni? Quante? R è contenuta in una funzione? Quale?

1) antirimutativa

2) La chiusura d'equivalenza è w_A , quindi: $w_A = \{A\}$: Esiste solo 1 componente连通

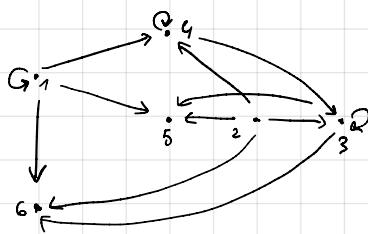
3) La chiusura d'ordine non esiste perché sul ciclo orientato si formerebbero delle frane doppie, invalidando l'antirimutatività

4) Togliendo archi non si ottiene nessuna funzione, neanche aggiungendo archi

PRO TIP! Se hai un ciclo, la chiusura trasmette conserva il ciclo in direzione opposta

4) Si dà $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con:

A	1	0	0	1	1	1
	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0



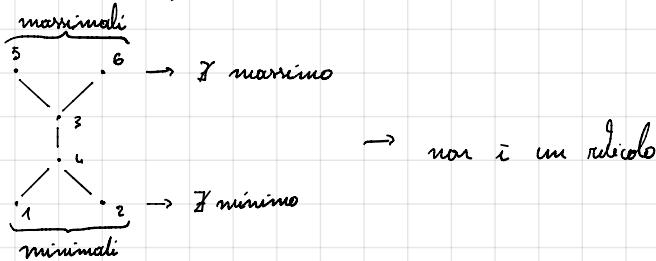
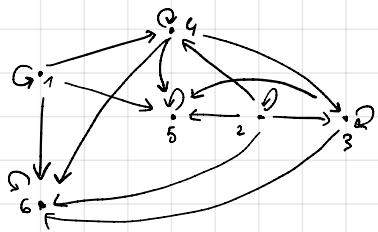
Dice:

- 1) Quali proprietà ha R
- 2) Qual è la chiusura d'equivalenza di R
- 3) Esiste la chiusura d'ordine di R ? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
- 4) Si dà T la chiusura d'ordine, T contiene funzioni? Quante? T è contenuta in una funzione? Quale?

1) N.A.

2) w_A ; $w_A = \{A\}$

3) Chiediamo riflessivamente, transitivamente e disegniamo il diagramma di Hasse

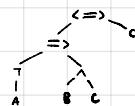


4) T non è contenuta in funzioni, ma contiene funzioni in quanto reticolato. Ci sono $5^2 \cdot 4 \cdot 3$

22/10/20

1) Dire se sono ben formate:

1) $((A \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow C)$ ✓



2) $(A \Rightarrow B)$ ✗

x

3) $(\neg A \Rightarrow B)$ ✓

v

2) Si dà $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$, stabilire se soddisfacibile:

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$A \Rightarrow \neg C$	F
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

→ soddisfacibile con 7 modelli

3) Lia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C) \wedge G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$, dici se $F \models G$ o se $G \models F$

A	B	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$\Rightarrow F \not\models G \wedge G \not\models F$

3) Lia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C) \wedge G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$, dici se $F \models F \wedge G$, $F \models F \vee G$, $F \wedge G \models F$, $F \vee G \models F$

A	B	C	F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow F \not\models F \wedge G$

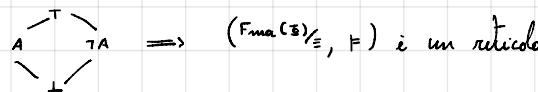
$\Rightarrow F \models F \vee G \rightarrow$ ogni formula modella una tautologia

$F \wedge G \models F$

$F \vee G \not\models F \rightarrow$ una tautologia non è conseguenza nessuna formula

4) Lia $\Xi = \{A\}$ provare che $(F \xrightarrow{\Xi}, \models)$ è un reticolo

A	\perp	A	\top	\perp	\top	\perp	\top
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1



23/10/20

1) Lia F la f.b.f avendo t.d.v

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

abilitare se $(\top A \Rightarrow C) \wedge B \models F$

Possiamo usare la t.d.v, vorremo però un metodo più efficiente: $((\top A \Rightarrow C) \wedge B)^c, (\top F)^c \vdash_R \square$ (Riduzione). Scriviamo in forma a clausole le formule:

$$(\top A \Rightarrow C) \wedge B \equiv (A \Rightarrow C) \wedge B \rightarrow \{\{A, C\}, \{B\}\}$$

$$F \xrightarrow{\text{SINTESI}} (A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg (B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \vee \neg C)$$

$$\neg F \equiv (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \equiv (A \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) \wedge (C \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee \neg C)$$

$$\hookrightarrow \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{\neg A, C\}, \{B, C\}, \{C\}\}$$

Per ottenere $\square \vdash \phi$:

$\{\neg A, C\} \quad \{B\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg A, \neg C\} \quad \{B, C\} \quad \{C\} \rightarrow$ le lettere B e C sono indiminutibili $\Rightarrow \square \vdash \phi$ irraggiungibile

↳ Operazione di pruning: eliminare le lettere che sono sempre positive/negative

Visto che $((\neg A \Rightarrow C) \wedge B)^c, (\neg F)^c \nvdash \square, (\neg A \Rightarrow C) \wedge B \not\models F$

2) Sia F la f.b.f. avere t.d.r

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	x
0	1	1	0
1	0	0	y
1	0	1	z
1	1	0	1
1	1	1	0

Trovare F non equivalente alle formule date tale che: $\left\{ \begin{array}{l} (\neg C \Rightarrow (\neg A \vee B)) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C)) \models F \\ F \models \neg B \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{array} \right.$

e provare la correttezza del risultato con la risoluzione.

A	B	C	\mathcal{G}	\mathcal{F}	\mathcal{H}
0	0	0	0 0 1		
0	0	1	1 → 1 → 1		
0	1	0	0 x * 0		
0	1	1	0 0 0		
1	0	0	0 y * 1		
1	0	1	0 z * 1		
1	1	0	1 → 1 1		
1	1	1	0 0 0		

$x=0$

$y = \{0, 1\} \rightarrow$ se $y=0, z=0 \quad F = \mathcal{G} \Rightarrow$ prendiamo $y=1$

$z = \{0, 1\}$

$\hookrightarrow F \models (\neg A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee (\neg B \wedge C))$

Con la risoluzione le nostre condizioni saranno: $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G} \models F \Leftrightarrow \mathcal{G}^c, (\neg F)^c \vdash \square \quad \text{dovremo le clausole} \\ \mathcal{F} \models \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{F}^c, (\neg \mathcal{H})^c \vdash \square \end{array} \right.$

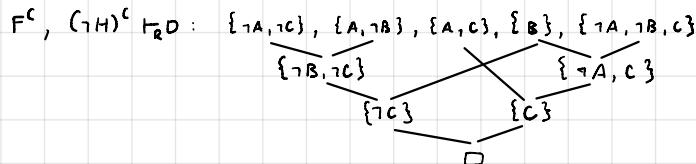
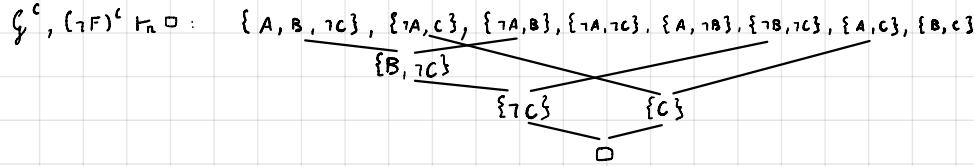
$$\neg \mathcal{H} \equiv \neg(\neg B \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)) \equiv B \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \rightarrow \{\neg B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$$

$$F \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow \{\neg A, \neg C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, C\}$$

$$\neg F \equiv (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \equiv (A \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))) \wedge (C \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B)$$

$$\hookrightarrow \{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\equiv \neg(\neg C \vee A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \equiv (\neg A \vee (A \vee B \vee \neg C)) \wedge (\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \wedge (C \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \equiv \\ &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee B) \rightarrow \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{B, C\} \end{aligned}$$



3) Formalizzare e provare la correttezza di questo ragionamento:

"Sappiamo che: 1) Le Carla non è nata a Catania, allora Anna non è ad Alessandria e Barbara non è nata a Bologna
2) Se Anna è nata ad Alessandria, allora Carla non è nata a Catania. Ne segue che Carla è nata a Catania oppure Anna non è nata ad Alessandria."

Uteniamo le seguenti formule: $\{\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B), A \Rightarrow \neg C\} \models C \vee \neg A$. Traduciamo in clausole:

$$(\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))^c, (A \Rightarrow C)^c, (\neg(C \vee \neg A))^c \vdash_C \square$$

$$\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B) = C \vee (\neg A \wedge \neg B) = (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B) \rightarrow \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}$$

$$A \Rightarrow \neg C = \neg A \vee \neg C \rightarrow \{\neg A, \neg C\}$$

$$\neg(C \vee \neg A) = \neg C \wedge A \rightarrow \{A\}, \{\neg C\}$$

$$\{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A\}, \{\neg C\}$$

$$\overline{\{\neg A, \neg B\}}$$

□

5/11/20

1) Individuare occurrenze libere e vincolate, scrivere l'albero di svolgimento, portare in forma normale prenesta e stabilire se le seguenti formule:

Utenza funz.

$$1) \forall_x^{\text{var.}} A(x, f(x)) \Rightarrow \neg \exists_y A(x, y)$$

(per il pred.)
y vincolata
x libera

$$\begin{array}{c} \forall_x \xrightarrow{\quad} \\ | \quad | \\ A(x, f(x)) \quad \exists_y \\ | \\ A(x, y) \end{array}$$

$$\text{F.N.P.: } \forall_x A(x, f(x)) \Rightarrow \neg \exists_y A(x, y) = \exists_z (A(z, f(z)) \Rightarrow \neg \exists_y A(x, y)) = \exists_z (A(z, f(z)) \Rightarrow \forall_y \neg A(x, y)) = \exists_z \forall_y (A(z, f(z)) \Rightarrow A(x, y))$$

$$\text{F.SK: } \forall_y (A(a, f(a)) \Rightarrow \neg A(x, y))$$

$$2) \forall_x \exists_y A(y, x, f(x, y)) \vee \neg \forall_y B(x, g(y))$$

x, y vincolate
y vincolata
x libera

$$\begin{aligned} \text{F.N.P.: } & \forall_x \exists_y A(y, x, f(x, y)) \vee \neg \forall_y B(x, g(y)) = \forall_x \exists_y A(y, x, f(x, y)) \vee \exists_y \neg B(x, g(y)) = \\ & = \exists_z \forall_w \exists_y (A(y, w, f(w, y)) \vee \neg B(x, g(y))) \end{aligned}$$

$$\text{F.SK: } \forall_w (A(h(w), w, f(w, h(w))) \vee \neg B(x, g(w)))$$

2) Sia φ la f.b.f: $A(x, y) \Rightarrow \exists_z (A(z, z) \wedge A(z, y))$ con x, y variabili. Diciutere la soddisfattibilità e la validità di φ e delle sue clausole universali ed esistenziali nell'interpretazione con dominio \mathbb{N} e in cui $A = \infty$. Cosa cambia se il dominio è \mathbb{R} ? E se $A = \mathbb{E}$? φ è valida? È contraddittoria?

φ non è un enunciato. Traduciamo in linguaggio naturale: "se $x \sim y$ sono numeri dati tali che $x \sim y$ allora esiste un numero z tale che $x \sim z \wedge z \sim y$ ". La veridicità di φ dipende dall'assegnamento.

Considero $s_1: x \mapsto 1, y \mapsto 3$, allora φ è soddisfatta, ma per $s_2: x \mapsto 1, y \mapsto 2$ φ non è soddisfatta. N.B. $s_3: x \mapsto 1, y \mapsto 1$ soddisfa φ in quanto l'antecedente è falso. Quindi in (\mathbb{N}, \leq) φ è soddisfatto ma non è vera né falso e quindi né valida.

Clausola universale di φ è falsa in (\mathbb{N}, \leq) , quella esistenziale è vera in (\mathbb{N}, \leq) .

Se considero l'interpretazione (\mathbb{R}, \leq) φ risulta vera, infatti se s è un assegnamento ci sono 2 casi:

$$1) s(x) < s(y):$$
 antecedente vero, conseguente vero = v

$$2) s(x) \geq s(y):$$
 antecedente falso = v

Lo stesso vale per $(\mathbb{Q}, \leq) \subset (\mathbb{N}, \leq)$.

3) Sia φ la f.b.f: $\forall x \forall y ((A(x, y) \vee A(y, x)) \Rightarrow \exists z (A(z, z) \wedge A(z, y)))$, diciutere la validità di φ in $(\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{N}, \leq)$

1) (\mathbb{Z}, \leq) , φ diventa: "per ogni coppia di interi $x \sim y$ si ha che $x \sim y$ oppure $y \sim x$ allora esiste un intero z tale che $x \sim z \wedge z \sim y$ ". φ è falsa: basta considerare un numero e il suo successore.

2) (\mathbb{Q}, \leq) , φ è ancora falsa in quanto l'antecedente è sempre vero, ma il conseguente no se $x \sim y$

3) (\mathbb{N}, \leq) , φ è: "per ogni coppia di numeri $x \sim y$ si ha che $x \sim y$ o $y \sim x$ allora esiste z tale che $x \sim z \wedge z \sim y$ ". φ è ancora falsa se $x = y \wedge y = z \Rightarrow \exists z: 4/2 \sim 2/12$? Ciò non è possibile.

4/12/20

- 1) Dici $\mathbb{Y} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ e $*$ l'operazione su \mathbb{Y} così definita: $a * b = a + b - ab$
- 1) provare che $(\mathbb{Y}, *)$ è un gruppo abeliano
 - 2) sia φ la ffl: $\varphi := (\forall x \forall y \exists z A(f(x, z), y)) \Rightarrow (\exists z \forall y A(f(x, z), y))$ dico se φ è vera/falsa/ soddisfa ma non vera nell'interpretazione con dominio \mathbb{Y} in cui A è il predicato '=' e f è l'operazione '*'. Essa è valida o no? È una contraddizione?
 - 3) Verifichiamo che '*' è interna. Vediamo se esistono $a, b \in \mathbb{Y}$: $a * b = 1$:
 $a + b - ab = 1$, $a(1-b) + b - 1 = 0$, $(1-b)(a-1) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \vee a = 1$
dunque '*' è interna.

Osserviamo subito che '*' è commutativa. Verifichiamo l'assorbiatività di '*' :

$$\text{siamo } a, b, c \in \mathbb{Y}: \quad a * (b * c) = \dots \xrightarrow{\text{coincidono}} \\ (a * b) * c = \dots$$

Cerchiamo l'elemento neutro:

$$\text{cerco } v \in \mathbb{Y}: \forall x \in \mathbb{Y} \quad x + v = x \rightarrow x + v - vx = x, \quad v(1-x) = 0 \Rightarrow v = 0$$

dove valore $\forall x \in \mathbb{Y}$

Per commutatività non dobbiamo cercare elementi neutri dx/sx.

Cerchiamo l'inverso:

$$\forall x \in \mathbb{Y} \quad \exists y \in \mathbb{Y}: \quad x * y = 0 \rightarrow x + y - xy = 0, \dots, y = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{Y}$$

Dunque $(\mathbb{Y}, *)$ è un gruppo commutativo

$$2) \varphi := (\forall x \forall y \exists z A(f(x, z), y)) \Rightarrow (\exists z \forall y A(f(x, z), y))$$

Traduciamo nell'interpretazione:

"se per ogni x, y esiste z tale che $x * z = y$, allora esiste z tale che per ogni x si ha $x * z = z$ "
la prima parte equivale a dire "ogni equazione lineare è risolvibile". Ciò è sempre vero per un gruppo. La seconda equivale ad affermare l'esistenza dell'elemento nulla. Questo è falso poiché negherebbe l'ipotesi di invertibilità (per gruppi con più di un'elemento). Quindi in questa interpretazione φ è falsa.

Di sicuro φ non è valida. Per dimostrare che non è una contraddizione bisogna trovare una interpretazione in cui è valida oppure che $\varphi^c \vdash \square$.