SUCCESSIONI

SUCCESSIONE INFINITESIMA: Una successione si dice infinitesima se diverge a 0

" INFINITA: Una successione si dice infinita se diverge a ∞

CONFRONTO TRA INFINITI: Siano a_n, b_n due infiniti, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine SUPERIORE} \\ \infty \Rightarrow b_n \text{ è un infinito di ordine INFERIORE} \\ l \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine.} \end{cases}$$

. Se $\nexists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ allora i due infiniti non sono confrontabili.

CONFRONTO TRA INFINITESIMI: Siano a_n, b_n due infinitesimi, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine INFERIORE} \\ \infty \Rightarrow b_n \text{ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE} \\ l \Rightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ sono dello stesso ordine} \end{cases}$$

Se $\nexists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ allora i due infinitesimi non sono confrontabili.

SUCCESSIONI ASINTOTICHE: Due successioni si dicono asintotiche se $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. L'asintotismo è una relazione di equivalenza, infatti:

1) $a_n \sim a_n$ (asint. a se stessa)
2) $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ (se b_n è asintotica rispetto ad a_n, allora anche a_n è asintotica rispetto a b_n).
3) $a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{c_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{c_n} = 1\cdot 1 = 1$

OSS: Se $a_n \sim b_n$ non è detto che $a_n \pm c_n \sim b_n \pm c_n$

CRITERIO DEL RAPPORTO: Sia una successione positiva a_n. Sia $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Se:

1) $l<1$ allora a_n è un infinitesimo
2) $l>1$ allora a_n è un infinito
3) $l=1$ allora il criterio fallisce (carattere della successione non è noto)

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ Sia $b_n = \frac{a^n}{n!}>0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \lim\frac{a}{n+1} = 0 \Rightarrow$ $n!$ è di ordine maggiore

2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ Sia $c_n = \frac{n!}{n^n}>0$, per criterio del rapporto abbiamo: $\lim\frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim\frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n\cancel{!}} = \lim\frac{n^n\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}<1$

Per il criterio n^n è di ordine superiore.

3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a(n)}{n^b}=0$ Consideriamo $b>0$, $n^{b/2}\geq 1$, $0\leq\log_a(n^{b/2})\leq n^{b/2}$ quindi $\frac{\frac{b}{2}\cdot\log_a(n)}{\frac{b}{2}\,n^b} = \frac{\log_a(n^{b/2})}{\frac{b}{2}\,n^b} < \frac{n^{b/2}}{\frac{b}{2}\,n^b} = \frac{2}{bn^{b/2}}$. $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{bn^{b/2}}=0$ quindi per il teorema del confronto, chiamato $a_n=0$, $c_n=\frac{2}{bn^{b/2}}$ e $b_n=\frac{\log_a(n)}{n^b} \Rightarrow a_n\leq b_n\leq c_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a(n)}{n^b}=0$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(a^n)^c} = 0$ Tralasciamo la c in quanto non influente. $\frac{n^b}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/b}}\right)^b = \left(\frac{\log_a(a^n)}{a^{n/b}}\right)^b$ equivale a $\frac{\log_a(\infty)}{\infty^{\%}}$ e possiamo applicare la 3 scrivendo $(0)^b = 0$

FORMA DI INDETERMINAZIONE 1^∞: Causata principalmente da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si può scrivere che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

PROPOSIZIONI DA DIMOSTRARE: a_n è monotona crescente, a_n converge a $2 \leq l \leq 4$

dis. Bernoulli

1) dobbiamo dimostrare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right) \geq \left[1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\right) = 1$

2) a_n è crescente (vedi 1) $\Rightarrow a_1 < \dots < a_n \Rightarrow a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Costruiamo $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow b_n > a_n \ \forall n \geq 1$. Si può dimostrare che b_n è strettamente decrescente. Ciò vuol dire che $b_1 > \dots > b_n > a_n$. Quindi $b_1 > a_n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > a_n$

SERIE

SERIE: Sia $a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serie definita dalla somma di infiniti termini di a_n

S. SOMME PARZ.: Costruisco $s_0 = \sum_{n=0}^{0} a_n$, $s_1 = \sum_{n=0}^{1} a_n$, ..., $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è detta successione delle somme parziali: s_k $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k \to \sum a_n$.

Per definizione S_k è una successione. Studiamone il comportamento.

1) Studiamone il limite:
$$\begin{cases} \exists \lim_{k\to+\infty} s_k = l \text{ finito} & \Rightarrow \text{serie CONVERGENTE} \\ \exists \lim_{k\to+\infty} s_k = \infty & \Rightarrow \text{serie DIVERGENTE} \\ \nexists \lim_{k\to+\infty} s_k & \Rightarrow \text{serie IRREGOLARE/OSCILLANTE} \end{cases}$$

EX.: 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\quad a_n = n \Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 1+2, \dots, S_k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow S_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto \frac{k(k+1)}{2}$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+k}{2} = +\infty \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = (1-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}), S_3 = 1-\frac{1}{4}, \dots, S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

$\lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\quad a_n = q^n \Rightarrow S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$, con $q \neq 1$ $\quad S_k = k+1$

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \begin{cases} |q|<1 & \frac{1}{1-q} \\ |q|>1 & +\infty \\ |q| \leq -1 & \nexists l \end{cases}, \quad \text{con } q=1 \quad \lim_{k\to+\infty} S_k = +\infty$$

SERIE TELESCOPICA: Una serie si dice telescopica se a_n si può scrivere come $a_n = b_n + b_{n+1}$. La successione delle somme parziali scrivere come $S_k = b_0 - b_{n+1}$

C.N. CONVERGENZA: Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, affinché essa sia convergente, è necessario che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE: per ipotesi la serie converge, quindi $\lim_{k\to+\infty} s_k = l$. $S_n = a_0 + \dots + a_n$, $S_{n+1} = a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere, allora, che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1})$. Poiché per ipotesi S_n converge: $\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = s - s = 0$.

OSS.: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ <u>LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE.</u>

SERIE A TERMINI POSITIVI

SERIE A TERMINI POSITIVI: Una serie si dice a termini positivi se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esiste anche una serie definitivamente positiva: $a_n \geq 0$ $\forall n > n_0$ $n, n_0 \in \mathbb{N}$

OSS. Una serie a termini positivi <u>non</u> può essere irregolare. Se costruiamo $S_n = S_n + a_{n+1} \geq S_{n-1} \Rightarrow$ La successione delle somme parziali è quindi una successione monotona crescente, quindi esiste sicuramente il limite.

CRITERIO DEL CONFRONTO: Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq \bar{n}$. Allora:

1) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

DIM.: Siano $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$, $T_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ le successioni delle somme parziali di a_n e b_n. Dato che $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow S_k \leq T_k$ $\forall k \geq \bar{n}$.

1) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} T_k = t$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora S_k converge e, di conseguenza, anche la relativa serie

2) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora T_k diverge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

EX.: $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Per applicare il criterio bisogna maggiorare o minorare la successione: $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ $\forall n > 3$. Costruiamo $b_n = \frac{1}{n}$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente. Per il criterio del confronto, allora, anch'essa diverge.

Lezione

Limite di successioni notevoli

Si dà per sottinteso $n \to +\infty$

Sia ε_n una successione infinitesima, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \sin(\varepsilon_n) = 0$ 3) $\lim \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ 5) $\lim \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{\log_a(1+\varepsilon)}{\varepsilon_n} = \log_a e$ 7) $\lim \frac{(1-\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} = \alpha$

2) $\lim \cos(\varepsilon_n) = 1$ 4) $\lim \frac{1-\cos(\varepsilon_n)}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{1}{2}$ 6) $\lim \frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = 1$ / $\lim \frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \ln a$

il 5, 6, 7 vengono derivati dalla 1 riportata nella proprietà seguente.

Sia a_n una successione infinita, allora si hanno le seguenti situazioni:

1) $\lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ 2) $\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{1/a_n} = 1$

Successioni asintotiche

Date a_n e b_n, esse si dicono asintotiche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Si nota che se $a_n \sim b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \underset{(\pm\infty)}{l}$

Serie a termini positivi

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $a_n \sim b_n$, allora le due serie avranno lo stesso carattere.

DIM.: Per Hp $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon+1 \Rightarrow b_n(1-\varepsilon) < a_n < b_n(\varepsilon+1)$. Considerando $b_n(1-\varepsilon) < a_n$ per il criterio del rapporto, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge. La $(1-\varepsilon)$ non influisce.

Idem per l'altra parte: se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Non è necessario dimostrare l'altro verso perché le serie positive o convergono o diverge

ESERCITAZIONE

$$\lim\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n-1-3}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n-1}{n-1}-\frac{3}{n-1}\right)^n = \lim\left(1-\frac{3}{n-1}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n-1}{-3}\right)}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{1-n}{+3}}\right)^{\frac{n\left(1-\frac{n}{3}\right)}{1-\frac{n}{3}}} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-n}{3}}\right)^{\frac{1-n}{3}}\right]^{\frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\lim\frac{n}{1-\frac{n}{3}}} = e^{\frac{3}{-1}} = e^{-3}$$

$$\lim n^2 \ln\left(1-2^{-n}\right) = \lim n^2 \cdot \frac{\ln\left(1-2^{-n}\right)}{-2^{-n}} \cdot -2^{-n} = \lim n^2 \cdot \left(-2^{-n}\right) = \lim \frac{-n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2} = \lim \frac{\sin(n)\cdot\left(\sqrt{n^4+n^3}+n^2\right)}{\cancel{n^4}+n^3-\cancel{n^4}} = \lim \frac{\sin n \cdot \cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n^3} = \lim \frac{\sin n}{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \lim \frac{2\sin n}{n}$$

$$-1 \le \sin n \le 1 \to -2 \le \sin n \le 2 \to \frac{-2}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sin n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$$

$$\lim \frac{\log(n^2+n)-\log(n^2)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim \ln\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)\Big/\sin\left(\frac{2}{n}\right) = \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\cdot\frac{1/n}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)/2/n}\cdot\frac{n}{2} = \lim \log e \cdot \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{2} = \log e$$

$$\lim \frac{\log\left[3^n+\cos\left(3^n\right)\right]}{n} = \lim \frac{\log\left[3^n\right]}{n} = \lim \log\left[3^n\right]^{1/n} = \log 3$$

$$\hookrightarrow 3^n+\cos 3^n \sim 3^n \Rightarrow \lim \frac{3^n+\cos 3^n}{3^n} = \lim 1+\frac{\cos 3^n}{3^n} = 1$$ perché $-1 \le \cos 3^n \le 1 \to \frac{-1}{3^n} \le \frac{\cos 3^n}{3^n} \le \frac{1}{3^n} \Rightarrow \lim \frac{\cos 3^n}{3^n} = \lim \frac{1}{3^n} = 0$

$$\lim \frac{\log\left(1+e^n\right)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log\left[e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log e^n + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\log e^n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim \frac{\cancel{n}\log e}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \log e$$

$$\lim \frac{n-\ln\left(n+e^n\right)}{n-\ln\left(2n+e^n\right)} = \lim \frac{n-\ln\left(e^n\left(1+\frac{n}{e^n}\right)\right)}{n-\ln\left(e^n\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)\right)} = \lim \frac{\cancel{n-\ln\left(e^n\right)}+\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\cancel{n-\ln\left(e^n\right)}+\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{n/e^n}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{e^n}}\cdot\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2n}{e^n}\right)}\cdot\frac{1}{1/\frac{2n}{e^n}}\cdot\frac{\cancel{e^n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim \frac{\sin\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2} = \lim \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+1/n}-2} = \lim \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+1/4n}-2} = \lim \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2\frac{(1+1/4n)^{1/2}-1}{1/4n}-\frac{1}{1/4n}}\cdot\frac{1}{4n} = \lim \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{1/4n}}\cdot\frac{1}{1/4n} = \lim \frac{2}{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{1-1}\right) \qquad (8)$$

$$\lim \frac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4(n^n)-3(n!)} = \lim \frac{\cancel{n^n}\left(\frac{1}{n^2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)}{\cancel{n^n}\left(4-\frac{3(n!)}{n^n}\right)} = \lim \frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{-2/n}\right)^{\frac{n}{-2}\cdot(-2)} = \frac{1}{4}e^{-2} = 1/4e^2$$

Va studiato a parte: $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow \lim \frac{1}{n^2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^{-2}$ || rule of thumb: studia sempre quando nel raccoglimento non c'è la forma $\left(K - \frac{3}{n^2}+\dots\right)$

$$\lim \frac{\log\left((n+5)!\right)-\log\left(n!+5\right)}{\log\left[2n^6+\cos(n\pi)\right]}$$

$$\lim \frac{n!+(2n)!}{n^n}$$

$$\lim \frac{n^n+2^n}{2^{(n^2)}}$$

$$\lim \sqrt[3]{n^9-2n^6}-\sqrt[5]{n^{15}-3n^{12}}$$

→ Homework

Criterio del rapporto o della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ o $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se

1) $b > 1 \Rightarrow a_n$ non tende a 0, quindi la serie diverge
2) $b < 1 \Rightarrow a_n$ tende a 0, quindi la serie converge.
3) $b = 1 \Rightarrow$ NULL

DIM. RAD) Sia $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se $b > 1$, allora $\lim a_n = +\infty$. Se $b < 1$, esiste $q \in \mathbb{R}$ compreso tra b e 1 $b < q < 1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |\sqrt[n]{a_n} - b| < \varepsilon \to -\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - b < \varepsilon \to$ $\to \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q \to a_n < (\varepsilon + q)^n$. Per ε piccolo, $\varepsilon + q < 1$. Usando il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (q+\varepsilon)^n$ è una serie geometrica che converge. Poiché a_n è minorata da $(q+\varepsilon)^n$, anche a_n converge

RAP) Sia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Esiste allora $b < q < 1$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |\frac{a_{n+1}}{a_n} - b| < \varepsilon \to -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - b < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + b < \varepsilon + q$. Poiché lavoriamo con termini positivi, abbiamo che: $a_{n+1} < a_n(\varepsilon + q)\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n_0+1} < a_{n_0}(\varepsilon+q)$, $a_{n_0+2} < a_{n_0+1}(\varepsilon+q) < a_{n_0+1}(\varepsilon+q)^2$. Così possiamo dire che $a_k < (\varepsilon+q)^{k-n_0} a_{n_0}\ \forall k > n_0$. Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon+q)^{k-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{(\varepsilon+q)^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon - q)^k$. La serie è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge. Di conseguenza anche a_n converge in quanto minorata da una serie convergente.

Criterio di Condensazione (sostituzione)

Sia una serie a termini positivi con a_n non crescente. La serie converge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

Divergenza Serie Armonica

Consideriamo $b_k = (1 + \frac{1}{k})^k$. Supponiamo che definitivamente $(1+\frac{1}{k})^k \leq e$ $(\forall k > \bar{k})$. Avremo $\ln(1+\frac{1}{k})^k \leq \ln e \to k \ln(1+\frac{1}{k}) \leq 1 \to \ln(1+\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k} \to \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k} \to$

$\to \underbrace{\ln k+1 - \ln k}_{\text{Succ. telescopica}} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow$ la serie $\ln(k+1) - \ln(k)$ diverge. Anche $\frac{1}{k}$, allora divergerà $\forall k > \bar{k}$

$-(\ln k - \ln k+1) \Rightarrow -(-\ln k+1) = \ln(k+1)$

Serie Armonica Generalizzata

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per $\alpha \leq 1$ la serie diverge e per $\alpha > 1$ la serie converge

DIM: Se $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ perché $n^\alpha \leq n$. Allora per il criterio del confronto la serie diverge.

Se $\alpha > 1$, definiamo la successione delle somme parziali $S_k = 1 + (\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}) + (\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha}) + (\frac{1}{8^\alpha} + \dots \leq 1 + 2\frac{1}{2^\alpha} + 4\frac{1}{4^\alpha} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots = \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p$

$S_k = \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{n^\alpha}) \leq \sum_{p=0}^{N} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^p \Rightarrow \lim \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \lim \sum_{p=0}^{N} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^p$. Il secondo, però, è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, quindi converge. Perciò, per criterio del confronto anche S_k converge e quindi la serie converge.

Serie a Termini Negativi

Si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini negativi se $a_n \le 0\ \forall n$. Una serie a termini negativi può essere riscritta in una a termini positivi:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $b_n = -a_n \ge 0\ \forall n$.

Serie di Termini di Segno Variabile

Una serie a segno variabile è ciò che indica il nome. Una serie a segno variabile, oltre che essere divergente o convergente, può anche essere irregolare.

La condizione necessaria di convergenza continua a valere.

Convergenza Assoluta

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Per le serie positive, allora la convergenza assoluta e quella semplice (convergenza "normale") coincidono. Stessa cosa per le serie negative.

Per le serie a segno variabile le cose sono più complicate

Relazione Convergenza Semplice - Assoluta.

Sia una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ che converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

DIM. Scriviamo $(a_n + |a_n|) - |a_n|$. La nostra serie sarà $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. La seconda converge per ipotesi. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - |a_n|)$ è positiva ($(a_n - |a_n|) \ge 0\ \forall n$), in più $(a_n - |a_n|) \le 2|a_n|\ \forall n$. Avremo, quindi, che $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \le 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Dato che la seconda converge per ipotesi, anche la prima converge per criterio del confronto. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

ESEMPIO: Data $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. La serie è a segno variabile $\Rightarrow$ studio la convergenza assoluta: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \Rightarrow$ usiamo il confronto: $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente.

Serie a Segno Alterno

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty}$ si dice a segno alterno se $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n \ge 0\ \forall n$

Criterio di Leibniz

Sia data una serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n \ge 0\ \forall n$. Se valgono queste, la serie converge semplicemente:

1) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

2) b_n è monotona decrescente.

CONVERGE $\lim S_{2h} = \bar{S}$

DIM. Costruiamo a_n decrescente tale che $S_K = S_{K-1} + (-1)^K a_K \Rightarrow \begin{cases} S_{2h} = S_{2h-1} + a_{2h} = S_{2h-2} + (a_{2h} - a_{2h-1}) \leq S_{2h-2} & \Rightarrow \text{decrescente} \Rightarrow \overbrace{S_{2h} \leq S_0}^{\text{LIM. SUP.}}, \overbrace{S_{2h} \leq S_{2h-2} - a_n \leq \dots \leq S_1 + a_n}^{\text{LIM. INF.}} \\ S_{2h+1} = S_{2h} - a_{2h+1} = S_{2h-1} + (a_{2h} - a_{2h+1}) \geq S_{2h-1} & \Rightarrow \text{crescente} \Rightarrow \underbrace{S_{2h+1} \geq S_1}_{\text{LIM. INF.}}, \underbrace{S_{2h+1} \geq S_{2h} - a_{2h+1} \geq \dots \geq S_0 + a_{2h+1}}_{\text{LIM. SUP}} \end{cases}$

CONVERGE $\rightarrow \lim S_{2h+1} = \tilde{S}$

Quindi $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim a_h = 0$ ma $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim S_{2h} - \lim S_{2h+1} = \bar{S} - \tilde{S} = 0 \Rightarrow \bar{S} = \tilde{S} \Rightarrow S_n$ converge

Funzioni Reali a Variabile Reale

Sono funzioni del tipo $\underline{f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$

Composizione di Funzioni

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, si definisce $g(f(x))$ se $A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{1} f(A) \subseteq B \xrightarrow{2} \mathbb{R}$ e $f(g(x))$ se $B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{2} g(B) \subseteq A \xrightarrow{1} \mathbb{R}$.

Non vale la commutatività tra f e g.

Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall I(x_0)$ questo ha intersezione non vuota con A.

Limite di Funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che f ha limite l per x che tende a x_0 ($\lim_{x \to x_0} f(x) = l$) se:

$\to \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A \ |f(x) - l| < \varepsilon$

OSS. x_0 non deve per forza appartenere ad A $\Rightarrow$ $f(x_0)$ può anche non avere significato

Il limite è una "distanza": $|f(x) - l| < \varepsilon$ significa che la distanza tra $f(x)$ e l deve essere nulla.

Teorema ponte

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se per qualsiasi successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \neq x_0$ che tende a x_0 si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.
$\{f(x_n)\}$ è una successione delle immagini di f.

DIM: 1) Hp: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, Th: $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = l$ $\forall x_n \to x_0$. Consideriamo una successione $x_n \to x_0$. Allora $\forall \bar{\varepsilon} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n \in (x_0 - \bar{\varepsilon}; x_0 + \bar{\varepsilon})$. Scelgo $\delta = \bar{\varepsilon}$. Varrà anche $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ poiché siamo nello stesso intorno $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
e quindi $\forall \bar{\varepsilon} > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|f(x_n) - l| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \to x_0} f(x_n) = l$

2) Hp: $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$ Th: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Dimostriamo per assurdo: neghiamo Th, allora $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \delta$ $\exists x(\delta): x(\delta) \in (x - \delta; x + \delta) - \{x_0\} \cap A$ e $|f(x(\delta)) - l| > \varepsilon$. Costruisco una successione di punti che tende a x_0 per la quale $f(x_n)$ <u>non</u> tende a l: $x_n = x(1/n)$ scegliendo $\delta = 1/n$.

1) $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n})$ $\forall n \geq 1$ $\quad (|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x_0)$

2) per la scelta di $x(\delta) = x(\frac{1}{n}) = x_n$ $|f(x_n) - l| > \varepsilon_0$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{n \to \infty} f(x_n) \Rightarrow$ <u>ASSURDO</u>

Teorema di unicità del limite (trasportato delle succ.)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per f se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$

DIM.: CON PONTE: Per il teorema ponte abbiamo: $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_1$, $\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_2$. Per l'unicità del limite di successione $l_1 = l_2$

SENZA PONTE: Per assurdo $l_1 \neq l_2$. Sia $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, allora $(l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon; l_2 + \varepsilon)$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, allora $\exists \delta_1: \forall x \in (l_1 - \varepsilon; l_1 + \varepsilon) \cap A$ si ha $|f(x) - l_1| < \varepsilon$. Idem per l_2. Scelgo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Varranno, allora, $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - l_2| < \varepsilon$. Ma, essendo i due intorni disgiunti solo per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$, cadiamo in assurdo.

Teorema del confronto (trasportato delle succ.)

Siano f, g, h funzioni e x_0 un punto di accumulazione. Se $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} = l$

ES. $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$ $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 < \sin(x) < x < \tan(x)$; $\quad -\frac{\pi}{2} < x < 0$ $\quad \tan(x) < x < \sin(x) < 0$ $\quad \to -x < \sin x < x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad$ per $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\quad \sin x < x < \tan x$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ per confr.}}$

$\to$ per teorema ponte $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$

poiché $\frac{\sin x}{x}$ è pari, la dimostrazione vale per $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) - \{x_0\}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ $\quad$ per ogni successione $x_n \to 0 \Rightarrow$ costruisco $y_n = (x_n)^2 \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(y_n)}{y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$

Teorema di Cambio di variabile

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni e x_0 un punto di accumulazione per A. Se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{y \to l} g(y) = L$, allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$

$\forall x_n \to x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{f(x_n)\} \to l$. $\forall y_n \to l$ $\lim_{n \to \infty} g(y_n) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = L \Rightarrow \lim_{x \to l} g(f(x)) = L$.

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)}\right) = \frac{1}{2} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=2}^{K}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{K\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{K}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{K}\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{K\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{K-2}\frac{1}{j+1} - \sum_{n=2}^{K}\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{K\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{j=2}^{K-2}\frac{1}{j+1}} - \cancel{\sum_{n=2}^{K-2}\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{K\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

↳ converge: confr. as. $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2-1} \Rightarrow \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \frac{1}{n^2-1}$ conv.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = [\,\dots\,]$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\,\dots\,] = +\infty$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(-1)^K}{\sqrt{2K}} \Rightarrow$ per criterio di Leibniz converge

$\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{(-1)^K}{\sqrt{2K}} & n = 2K \end{cases}$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\tan\frac{1}{n}}{10^n \ln n} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{\tan\frac{1}{n}}{10^n \ln n}\right| \sim \left|\frac{1}{n10^n \ln n}\right| \Rightarrow$ converge abs

$0 \le \left|\frac{1}{n10^n \ln n}\right| \le \frac{1}{10^n} \Rightarrow$ per confronto converge abs

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge abs

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \Rightarrow \left|(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right| \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ non converge abs.

$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \Rightarrow$ restrizione di $f(x) \Rightarrow f'(x) = \dots = \frac{-2x^4+x}{2(x^4+x)^{3/2}} < 0$ definitivamente $\Rightarrow$ monotona decrescente def. $\Rightarrow$ per Leibniz converge

Limiti Notevoli

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ $\Rightarrow$ vedi 29.10.19 $\to$ T. confronto

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{2\sin^2(y)}{4y^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(y)}{y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}$ per 1

$y = \frac{x}{2}$

Limite destro/sinistro

ES.: $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ $\to \operatorname{sgn}(x)$; $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ con $g: (0;+\infty) \to \mathbb{R}$; $\lim_{x\to 0} h(x) = -1$ con $h: (-\infty; 0) \to \mathbb{R}$ $\to$ posso definire il limite solo intersecando un insieme non circolare $\}$ limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per A, allora:

- f ha LIMITE DESTRO se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0; x_0+\delta) \cap A \quad |f(x) - l| < \varepsilon$ $\qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
- f ha LIMITE SINISTRO se: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0) \cap A \quad |f(x) - l| < \varepsilon$ $\qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

Relazione limite - limite destro/sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se esistono limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e sono uguali

DIM: per $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\quad I(x) = (x_0-\delta; x_0+\delta) = (x_0-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta)$ $\Rightarrow$ il limite esiste se i due limiti esistono.
L'unione delle definizioni sarà: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{\delta} = \min(\delta, \bar{\delta}): \forall x \in I(x-\bar{\delta}; x+\bar{\delta}) \quad |f(x) - l| = \varepsilon$ $\Rightarrow$ i due limiti devono essere uguali

Limite infinito

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ se:

$\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \quad |f(x)| > M$

ES.:
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ per teorema ponte $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$
  Verifichiamo con la definizione: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $f(x) < -M$ $\quad \frac{1}{x} - M < 0 \quad \frac{1-Mx}{x} < 0 \quad Mx+1 > 0 \quad x > -\frac{1}{M} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{M}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \forall M > 0\ \exists \bar{\delta} > 0: \forall x \in (x_0-\bar{\delta}; x_0+\bar{\delta})$ $f(x) > M \quad x < \frac{1}{M} \quad \bar{\delta} = \frac{1}{M}$
- $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ perché limite destro e sinistro esistono ma non coincidono

Limite finito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to +\infty\ (-\infty)} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0: \forall x > K \quad |f(x) - l| < \varepsilon$
$(\forall x < -K)$

Limite infinito per $x \to \infty$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice $\lim_{x\to +\infty\ (-\infty)} f(x) = \pm\infty$

$\forall M > 0\ \exists K > 0 \quad \forall x > K \quad |f(x)| > M$
$(\forall x < -K)$

Esercizi

1) $z^6 - z^3 + 1 = 0$ $\qquad (z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$ $\qquad z^3_{1,2} = \frac{+1 + \sqrt{3}i}{2}$ $\qquad z^3_1 = \frac{+1+\sqrt{3}i}{2}$ $\quad z^3_2 = \frac{+1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1+\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2K\pi}{n}\right) = \dots$$

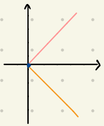
$$\left.\begin{matrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{+1-\sqrt{3}i}{2}} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\frac{5}{3}\pi+2K\pi}{n}\right) = 1\left(\cos\frac{5/3\pi+2K\pi}{n} + i\sin\frac{5/3\pi-2K\pi}{n}\right) = \dots$$

2) $z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}\, z\, |z|$ $\qquad \boxed{z=0}$ $\qquad z = 0$

$$\frac{z^2}{|z|^2} + 1 - \frac{\sqrt{2}\, z}{|z|} = 0 \qquad \frac{z}{|z|} = t \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}\, t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \Rightarrow z = |z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{z}{|z|} \Rightarrow z = |z|\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$



3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + (2n)!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n^n} + \frac{(2n)!}{n^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n} = [\text{crit. rapp.}] = +\infty$

Funzione continua

Dato $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e preso x_0, f è continua in x_0 se:

1) esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
2) $l = f(x_0)$

Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio

Punti di discontinuità

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ finito, $f(x) \neq l \Rightarrow x_0$ punto di discontinuità eliminabile (3° sp.) $\Rightarrow g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow$ prolungamento per continuità
2) $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \to \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ finiti $\Rightarrow$ discontinuità di salto (1° specie)
3) $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \,/\, \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ o l $\Rightarrow$ discontinuità di 2° specie

---

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(x+5)}{x+2}}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{\ln(x+5)}{x+2} \geq 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq -4 \vee \boxed{x > -2} \\ x > -5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ D: $\boxed{(-5;-4] \cup (-2;+\infty)}$

include $x \neq -2$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(|2-|x-2||-2x-1)}{x+2}$ $\quad \begin{cases} |2-|x-2||-2x-1 > 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \to \begin{cases} |2-x+2| & x-2 \geq 0 \\ |2+x-2| & x-2 < 0 \end{cases}$

$4-x \quad 2 \leq x \leq 4 \to \begin{cases} 4-x-2x > 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \quad \nexists x$

$\cup$

$4+x \quad x > 4 \to \begin{cases} x-4-2x+1 > 0 \\ x > 4 \\ x \neq -2 \end{cases} \quad \nexists x$

$\cup$

$x \quad 0 \leq x < 2 \to \begin{cases} x-2x+1 > 0 \\ 0 \leq x < 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \quad x < 1$

$\cup$

$-x \quad x < 0 \to \begin{cases} -x-2x+1 > 0 \\ x < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \quad (-\infty;-2) \cup (-2;0)$

$\Rightarrow \boxed{(-\infty;1)}$

3) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+2x}+7x-1)$ $\quad \sqrt{x^2+2x} > -7x+1$ $\quad \begin{cases} -7x+1 < 0 \\ x^2+2x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -7x+1 > 0 \\ x^2+2x > 0 \\ x^2+2x > 49x^2+1-14x \end{cases} \to [\ldots] \to \boxed{\left(\tfrac{1}{12};+\infty\right)}$

4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{e^{x^2-2x}-1}}$ $\quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ e^{x^2-2x} > 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > -1 \\ x^2-2x > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \vee x > 2 \end{cases} \to \boxed{(-1;0) \cup (2;+\infty)}$

5) $\lim_{x \to 0} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} x \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \\ x \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ per confronto $\lim_{x \to 0} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Usando la definizione: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}: \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \; |x \arctan(\frac{1}{x})| < \varepsilon$ $\quad |x \arctan(\frac{1}{x})| < \frac{\pi}{2}|x| \Rightarrow \frac{\pi}{2}|x| < \varepsilon \quad |x| < \frac{2\varepsilon}{\pi} \quad -\frac{2\varepsilon}{\pi} < x < \frac{2\varepsilon}{\pi} \Rightarrow \delta = \min\left(-\frac{2\varepsilon}{\pi}, \frac{2\varepsilon}{\pi}\right) \Rightarrow \checkmark$

6) $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{\dfrac{x+4}{1-e^x}}$ $\quad e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow 1-e^x \sim -x$ per $x \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \sqrt{\dfrac{x-4}{-x}} = \sqrt{\dfrac{4}{0^+}} = +\infty$

7) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}} = 1$

8) $\lim_{x \to +\infty} x\underbrace{(7+\cos(x))}_{\text{positiva limitata}} = +\infty$

9) $\lim_{x \to 2} \dfrac{|4x-3|-|1-3x|}{|2x-3|-|x-3|} = \lim_{x \to 2} \dfrac{4x-3+1-3x}{2x-3+x-3} = \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{3x-6} = \dfrac{1}{3}$

10) $\lim_{x \to 0^+} x^2 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $\quad t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^4} 3^{t^2} = +\infty$

11) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{4+x^2-4x}} = \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{|x-2|}$ $\quad \nexists$ limite: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = -1$, $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

12) $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x}$ $\quad t = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{\ln\frac{1}{t}}{t}} = \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{\ln t}{t}} = e^0 = 1$

13) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$ $\quad t = x - \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin(t+\frac{\pi}{2})-1}{t^2} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\cos t - 1}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$

14) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} = 3 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$

15) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$ HOMEWORK [32]

16) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \tan x}{1-\cos x}$ $\quad x \sim \tan x$ $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x} = 2$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x+3}\right)^{x-2}$ $\quad t = -\dfrac{x+3}{4}$ $\quad \lim_{t \to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-4t-5} = \lim_{t \to -\infty} \dfrac{[(1+\frac{1}{t})^t]^{-4}}{(1+\frac{1}{t})^5} = \lim_{t \to -\infty} \dfrac{1}{e^4} \cdot 1 = \dfrac{1}{e^4}$

$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) - \frac{R(x)}{D(x)}$

17) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{e^x - e} =$ $\quad t = x-1$ $\quad \lim_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{e(e^t-1)} \overset{e^t-1 \sim t \;\; t \to 0}{=} \lim_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{e x} \overset{\ln(t+1) \sim t \;\; t \to 0}{=} \lim_{t \to 0} \dfrac{x}{e x} = \dfrac{1}{e}$

CONTINUITÀ DI RISULTATO DI OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Siano due funzioni $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ con f, g continue in x_0. Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\lambda \cdot f$ sono tutte continue in x_0.

DIM ($\pm$): $\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f \pm g = \lim_{x\to x_0} f \pm \lim_{x\to x_0} g = f(x_0) \pm g(x_0) \Rightarrow \exists$ limite finito in x_0 ed è uguale al valore in $x_0 \Rightarrow (f\pm g)(x)$ è continua

CONTINUITÀ DI COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$. Allora $g(f(x))$ è continua in x_0.

DIM: per Hp: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x\to y_0} g(y) = g(y_0)$ $(f(x_0) = y_0)$. Sia $a_n \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$, $f(a_n)$ è ancora una successione: $f(a_n) \to x_0 \Rightarrow g(f(a_n))$ è una successione. $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} g(b_n) = g(y_0) \Rightarrow b_n \to g(y_0) = g(f(x_0)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0))$
$\forall a_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

CONTINUITÀ DI FUNZIONI INVERSE

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $I \subseteq A$, f invertibile in $I \subseteq A$. $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ continua in I.

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA (P. DEL SEGNO) Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ DIM: segue dal teorema di permanenza del segno per limiti

TEOREMA DEGLI ZERI Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$ e $[a;b] \subseteq A$ con $f(x)$ continua in $[a;b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$

DIM. per Hp, possiamo dire che $f(a) < 0 < f(b)$. Costruisco $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0 \Rightarrow$ teorema risolto. Sennò:

1. se $f(c) > 0$: restringo a $[a;c]$. Costruisco $d = \frac{a+c}{2}$. Se $f(d) = 0 \Rightarrow$ teorema risolto. Sennò:
   1. $f(d) < 0$: restringo $[d;c]$ ...
   2. $f(d) > 0$: restringo $[a;d]$ ...
2. se $f(c) < 0$: restringo a $[c;b]$. 〃 $d = \frac{c+b}{2}$. 〃 〃 〃 〃 〃 〃
   1. $f(d) < 0$: 〃 $[d;b]$ ...
   2. $f(d) > 0$: 〃 $[c;d]$ ...

Per ogni iterazione restringo l'intervallo: $[a_0; b_0] \xrightarrow{1°} [a_1; b_1] \xrightarrow{2°} [a_2; b_2] \xrightarrow{3°} \dots \xrightarrow{n°} [a_n; b_n]$. Per ogni passaggio $a_n < 0$; $b_n > 0$ e $a_0 \underset{\text{CRESC.}}{\le} a_n$; $b_n \underset{\text{DECR.}}{\le} b_0$ e entrambi lim. ma sup che inf da a o b. $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1$; $\lim_{n\to+\infty} b_n = l_2$. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 = [\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n]$
$\Rightarrow l_1 = l_2$. Per $a_n \to l$, $\underset{f(x)\text{ continua}}{,} \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l) \le 0$ (perm. segno) e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(l) \ge 0$ (per perm. segno), ma poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \Rightarrow f(l) \le 0 \wedge f(l) \ge 0 \Rightarrow f(l) = 0$

TEOREMA VALORI INTERMEDI Sia $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. $\forall y \in [f(a); f(b)]$ $\exists c \in [a;b] : f(c) = y$ (f assume tutti i valori tra $[f(a); f(b)]$

DIM:
- $f(a) = f(b) \to$ caso banale.
- $f(a) < f(b) \to$ costruisco $g(x) = f(x) - \gamma$ ($\gamma \in [f(a); f(b)]$). $g(x)$ è continua (diff. di funz. cont.); $g(a) = f(a) - \gamma \le 0$ e $g(b) = f(b) - \gamma \ge 0 \Rightarrow$ $g(x)$ ammette uno zero tra $[a;b] \Rightarrow \exists c : f(c) = \gamma \Rightarrow$ dimostrato. ($g(c) = f(c) - \gamma = 0 \Rightarrow f(c) = \gamma$)
  Se $g(a) = 0 \to f(a) = \gamma \Rightarrow$ dimostrato. Se $g(b) = 0 \to f(b) = \gamma \to$ dimostrato.

Teoremi sulle funzioni continue

Conseguenze

1) Se una funzione è crescente/decrescente in $[a;b]$, allora $\exists f^{-1}$ ed essa è continua

Per il teorema dei valori intermedi e per la definizione di cr/decr. allora possiamo affermare che f è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: [f(a); f(b)] \to [a;b] \subseteq \mathbb{R}$ $(f \text{ cr.})$ anch'essa continua e crescente.

Massimo e Minimo Assoluti

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>non necessariamente continua</u>. Preso $x_0 \in A$ esso è:

1) punto di <u>massimo assoluto</u> se $\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$
2) punto di <u>minimo assoluto</u> se $\forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$

Teorema di Weierstrass

Sia $f: \overbrace{[a;b]}^{\text{COMPATTO} \to \text{INS. CHIUSO E LIM.}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f ammette almeno un <u>massimo e un minimo assoluti</u>.

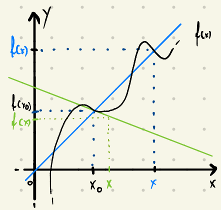
DIM: (MAX) f è superiormente limitata $\Rightarrow$ prendo $\sup(f(x)) = M \ \forall x \in [a;b]$. M è un estremo superiore, quindi $\forall x \in [a;b] \ f(x) \leq M$ e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in [a;b]: f(x) > M - \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prendo $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \ \exists a_\varepsilon = a_n \Rightarrow$ costruisco una successione $(a_n \in [a;b]) \Rightarrow M - \frac{1}{n} < f(a_n) < M \Rightarrow$ per confronto $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = M$ (!! Supponiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = c \in [a;b]$!!)

Poiché $f(x)$ è continua: $\lim_{x\to c} f(x) = M \iff \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) = M \ \forall a_n \to c$

Derivabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. La retta passante per $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x, f(x))$ avrà forma $r: y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} x + q$. Al tendere di x a x_0, la retta tende alla tangente in x_0.



Possiamo dire che f è derivabile se esiste finito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}} = f'(x) \quad (h = x - x_0)$$

Differenziabilità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. f è differenziabile se $\exists$ tg a f in $(x_0; f(x_0))$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Se $f(x)$ è derivabile, è anche differenziabile e viceversa

DIM: per hp: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow$ tg a $f(x)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

Se f è differenziabile, $\exists \ y = f(x_0) + f'(x_0) + m(x - x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0 \to \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{m\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = 0 \to \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \Rightarrow f$ è derivabile

Teorema differenziabilità – continuità

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0, allora è anche continua in x_0

DIM: Th: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$

Condizione necessaria di differenziabilità

È necessario che $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua per essere derivabile

Una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ si indica $f \in C^0(\mathbb{R})$

Derivata destra/sinistra

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che f è:

1) Derivabile a destra in x_0 se esiste finito $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\left(f'_+(x_0)\right)$

2) Derivabile a sinistra in x_0 se esiste finito $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\left(f'_-(x_0)\right)$

Una funzione è derivabile se e solo se è derivabile sia a destra che a sinistra in x_0.

Derivate di somma/prodotto/quoziente di funzioni

Siano f, g derivabili in x_0. Allora

1) $(f+g)(x)$ è derivabile in x_0 e la derivata è $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $K f(x)$ " " " " " " " $(Kf)'(x_0) = K f'(x_0)$

→ derivata è un'operazione lineare

3) $(f \cdot g)(x)$ " " " " " " " $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ " " " " " " " $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Derivata di composizione di funzioni

Siano f, g derivabili in x_0. Allora $(g \circ f)(x)$ è derivabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

Teorema della funzione inversa

Sia f una funzione derivabile in x_0 tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora $f^{-1}(x)$ è derivabile in $f(x_0)$ e $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x^2}+2\cancel{-x^2}-1} = +\infty$

asintoto per $x\to+\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{|x|}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\right)-2x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}-2\right)=0$$

$\Rightarrow$ as. $y=2x$

$$x\left(\sqrt{1+\tfrac{2}{x^2}}-1+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}-1\right)=x\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\overbrace{\frac{3}{2x}}^{\to0}+\overbrace{x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)}^{\to0}=0$$

2) $f(x)=\sqrt{x^4-x^6}$ $\quad D:[-1;1]$ $\quad f(x)=0$ per $x=-1,0,1$ $\quad$ valuta l'ordine dell'infinitesimo.

per $x\to0$ $\quad f(x)\sim\sqrt{x^4}=x^2 \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1 \Rightarrow$ ord. 2

per $x\to1$ $\quad f(x)\sim\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{2}\sqrt{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{-1}\cancel{\sqrt{1-x}}}=\sqrt{-2} \Rightarrow$ ord. $\frac{1}{2}$

$x^4-x^6=x^4(1-x)(1+x)\to 2(1-x)$

oppure: $\quad f(x)\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{(1+t)^4-(1+t)^6}=\sqrt{\cancel{1}+4t+o(t)\cancel{-1}-6t+o(t)}=\sqrt{2t+o(t)}\sim\sqrt{2t}=\sqrt{2(x-1)}=\sqrt{2}\sqrt{1-x}$
$t\to0 \quad t=x-1$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^5-x^3}}{\sqrt{x+1}}$

C.E. $x>-1$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{x^3(x^2-1)}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{(x+1)}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^5-x^3}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x}}=+\infty$$

4) $f(x)=2x+\sqrt{x^2-1}$, $\quad g(x)=\dfrac{e^x-x^2}{x-1}$. Studiarne almeno D, asintoti e traccia un gr. prob. (con gli asintoti)

$h(x)=x\left(\dfrac{2\ln x-3}{\ln x-2}\right)$

Homework

5) $f(x)\begin{cases}(x-1)\ln(x-1) & x>1\\ \alpha x+1 & x\le1\end{cases}$

Per quale α $f(x)$ è continua? $\quad \lim_{x\to1^-}\alpha x+1=\alpha+1$, $\quad \lim_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{1}{x-1}}}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}-\frac{1}{t}\ln(t)=0 \Rightarrow \underline{\alpha=-1}$

Per $\alpha=-1$, $f(x)$ è derivabile? $\quad \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x+1-0}{x-1}=-1$

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\ln(x-1)-0}{\cancel{(x-1)}}=-\infty$

$\Rightarrow$ in $x=1$ non è deriv.

6) $f(x)\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

Deriv. in $x=0$? $\quad \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^{\cancel{2}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=0$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\ //\ =0$

$\Rightarrow$ deriv. in $x=0$

$f'(x)$ è continua? $\quad f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)'=2x\cos\frac{1}{x}+\cancel{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \nexists\lim_{x\to0}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} \Rightarrow$ derivata non è continua in $x=0$

Punti di non derivabilità

1) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \Rightarrow$ punto a tangenza verticale
2) $f'^{(l)}_-(x_0) \neq f'^{(l_2/\pm\infty)}_+(x_0) \Rightarrow$ punto angoloso
3) $f'_-(x_0) = \pm\infty \neq f'_+(x_0) = \pm\infty \Rightarrow$ cuspide

Punti di max/min relativo

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ $\quad x_0$ è un punto di minimo relativo se $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $f(x) \geq f(x_0)$

" " " " " " " massimo relativo se $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $f(x) \leq f(x_0)$

Teorema di Fermat

Sia $f: [a;b] \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a;b)$ ed esiste finita la derivata di f in x_0. Se x_0 è max/min relativo, allora $f'(x_0)=0$ $\Rightarrow$ condizione necessaria MA NON SUFFICIENTE (vedi $y=x^3$)

DIM: x_0 min relativo $\Rightarrow \exists \delta > 0$ $\forall x \in [x_0-\delta; x_0+\delta]$ $f(x) \geq f(x_0)$. Valuto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$. Poiché $f(x)$ è derivabile in x_0: $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \end{cases}$ per permanenza del segno $\Rightarrow$ poiché i due limiti devono coincidere $f'(x_0)=0$

Possibili punti di max/min rel.

1) Se f è derivabile $f'(x_0)=0$ $\quad$ 2) Dove f non è derivabile

Teorema di Rolle

Sia $f: [a;b] \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$ con $f(a)=f(b)$. Allora esiste $x_0 \in (a;b)$: $f'(x_0)=0$

DIM. f continua in $[a;b] \Rightarrow$ Vale Weierstrass $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a;b]$: $f(x_1) \leq f(x)$, $f(x_2) \geq f(x)$ $\forall x \in [a;b]$.

1) Se $x_1 \in (a;b) \wedge x_2 \in (a;b)$ allora f è derivabile su $x_1/x_2 \Rightarrow$ per Fermat $f(x_1)/f(x_2) = 0$
2) Se $x_1 = a$, $x_2 = b \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ per Hp $\Rightarrow f(x)$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$

OSS. f non continua: $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ x & x \in (0;1] \end{cases} \Rightarrow$ non continua in x_0, derivabile in $(0;1)$, $f(0)=1=f(1)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x \in (0;1)$ $\Rightarrow$ cont. necessaria

f non derivabile: $f(x) = |x|$ $\Rightarrow$ continua in $[0;1]$, non derivabile in $(0;1)$, $f(0)=1=f(0)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x \in (0;1) \setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow$ deriv. necessaria

$f(a) \neq f(b)$: $f(x) = x$ $\Rightarrow$ " " ", derivabile in $(0;1)$; $f(0) \neq f(1)$ $\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x \in (0;1)$ $\Rightarrow$ uguagl. necessaria

Teorema di Lagrange (non è francese)

Sia $f: [a;b] \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$ con $x_0 \in (a;b)$. Esisterà allora $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM: La retta passante per $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$ è: $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Definiamo $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$:

1) $g(x)$ è continua (somma di funzioni continue)
2) $g(x)$ è derivabile (" " " derivabili)
3) $g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cancel{(a-a)} = 0$; $g(b) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$

Possiamo applicare Rolle a $g(x) \Rightarrow g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Relazione crescente/decrescente - derivata

Se $f(x)$ cresc.: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \to \begin{matrix} N\geq 0 \\ D>0 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$ per perm. segno

Se $f(x)$ decresc.: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \to \begin{matrix} N\leq 0 \\ D>0 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$ " " "

$\Rightarrow$ Se $f(x)$ è crescente in $I=[a;b]$ e derivabile, allora $f'(x)\geq 0$ $\forall x \in I$

Se $f(x)$ è decrescente in $I=[a;b]$ e derivabile, allora $f'(x)\leq 0$ $\forall x \in I$

"Test di monotonia"

Sia $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e derivabile in $(a;b)$. Allora f è crescente se e solo se $f'(x)\geq 0$ / f è decrescente se e solo se $f'(x)\leq 0$

DIM: $(\Rightarrow)$ Vedi sopra

$(\Leftarrow)$ Considero $x_1, x_2 \in (a;b)$ con $x_1<x_2$: Considero $f_{|[x_1;x_2]}$: è continua in $[x_1;x_2]$ e derivabile in $(x_1;x_2)$.

Applichiamo Lagrange $\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1;x_2)$: $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$ (per Hp) $\Rightarrow$ poiché $x_2>x_1$, $f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \Rightarrow f(x)$ è crescente.

Per $f(x)$ decrescente si procede allo stesso modo.

Teorema di Cauchy

Siano $f,g: [a,b] \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $(a;b)$ con $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in (a;b)$. Allora esiste $c \in (a;b)$ tale che: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

DIM: $g(a)\neq g(b)$ per Hp. Se supponiamo $g(a)=g(b)$, per Rolle $\exists c$: $g'(c)=0 \Rightarrow$ contraddizione

Costruiamo $h(x) = [g(b)-g(a)]f(x) - [f(b)-f(a)]g(x)$. Notiamo che:

1) h è continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$ perché operazioni su funzioni continue

2) $h(b) = \dots = h(a) \Rightarrow$ si può applicare Rolle

Applichiamo Rolle a $h(x)$: $h'(c)=0 \Rightarrow [g(b)-g(a)]f'(c) - [f(b)-f(a)]g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Teorema di De L'Hôpital

Siano $f,g: (a;b) \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in $(a;b)$ escluso al massimo x_0. Se:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
2) $g'(x_0)\neq 0$ $\forall x \in (a;b)\setminus\{x_0\}$
3) esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

IMP. VERIFICARE IPOTESI

allora $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

DIM: posso estendere per continuità $f(x)$ e $g(x)$ in modo che $f(x_0)=g(x_0)=0$. Quindi $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$.

Scelgo $\bar{x} \in (x_0-\delta; x_0+\delta)\setminus x_0$: $\bar{x}>x_0$. Considero $[x_0,\bar{x}]$: f e g sono continue anche in $[x_0;\bar{x}]$ e derivabili in $(x_0;\bar{x})$

Per Cauchy $\exists c \in (x_0;\bar{x})$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{g(\bar{x})-g(x_0)} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Visto che $c\in(x_0;\bar{x})$, $c\in(x_0-\delta;x_0+\delta) \Rightarrow \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| = \left|\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} - l\right| < \varepsilon$. Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\bar{x}\to x_0} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = l$

Funzione derivata e Derivate di ordini sup.

Data $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in A, $\exists f': \begin{matrix} A' \subseteq A \to \mathbb{R} \\ f(x) \mapsto f'(x) \end{matrix} \Rightarrow$ La funzione derivata

Se f' è derivabile in x_0, $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0) \Rightarrow$ La derivata seconda

Derivate di ordine superiore

Per ottenere derivata 3°, 4°... basta ripetere il passaggio 1° → 2°, adattandolo a n° → n+1

Significato di derivata 1°/2°

La derivata 1° ci dà informazioni sulla PENDENZA del grafico

La derivata 2° ci dà informazioni sulla VARIAZIONE DI PENDENZA del grafico

Grafico Convesso

Una funzione f si dice convessa in $I=[a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sopra della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice convessa se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sopra del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Grafico Concavo

Una funzione f si dice concava in $I=[a;b]$ se $\forall x \in I$ il grafico di f si trova al di sotto della retta tangente in x $\Rightarrow$ $f(x)$ derivabile

Una funzione f si dice concava se il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto del grafico di f $\Rightarrow$ $f(x)$ non per forza derivabile

Punto di flesso

Sia $f(x)$ concava per $[a;x_0]$ e convessa per $[x_0;b]$. Nel punto x_0 la retta tangente attraversa il grafico di f.
x_0 è detto punto di flesso

Legame derivata seconda - concavità

① Sia $f:(a;b)\subseteq A \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Allora f è convessa in $(a;b)$ se e solo $f''(x)\geq 0$ $\forall x\in(a;b)$. La funzione si dice concava se e solo se $f''(x)\leq 0$ $\forall x \in (a;b)$

② + Se in $(x_0, f(x_0))$ vi è un flesso, allora $f''(x_0)=0$. (CONDIZIONE NECESSARIA)

③ + Se $f'(x)$ crescente (decrescente) se e solo se $f(x)$ è convessa (concava).

DIM. Hp: f concava ; Th: $f''(x)\geq 0$

dim 1 $\Leftarrow\Rightarrow$

Poiché f è concava in $(a;b)$ $f'(x)$ è crescente in $(a;b)$. Prendiamo $x, x_0 \in (a;b)$. Possiamo scrivere che $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. Se facciamo tendere x a x_0 abbiamo $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ per permanenza del segno. Ma il limite equivale a $f''(x)$, quindi $f''(x)\geq 0$

Hp: $f''(x)\geq 0$; Th: f concava

Scegliamo due punti $x_2 > x_1 \in (a;b)$. La funzione $f'(x)$ rispetta le hp del t. di Lagrange: $\exists f''(c)$: $\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}$. Poiché $f''(x)\geq 0$ per hp e $x_2-x_1>0$ per definizione, $f'(x_2)-f'(x_1)\geq 0$ $\forall x_1,x_2\in(a;b)$. Poiché se $f'(x)$ è crescente, $f(x)$ è convesso, il teorema è dimostrato.

dim 3 $\Leftarrow$

Hp: $f(x)$ convesso ; Th: $f'(x)$ crescente

Affinché $f'(x)$ sia crescente, $f(x)$ deve essere crescente, quindi $\forall x_1,x_2\in(a;b)$, $x_2>x_1$ $f(x_2)>f(x_1)$ e $f(x) > \begin{cases} f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1) \\ f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2) \end{cases}$. Studiamo le disuguaglianze:

se $x-x_1>0$, $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > f'(x_1)$; se $x-x_1<0$ $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < f'(x_1)$

se $x-x_2>0$, $\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} > f'(x_2)$; se $x-x_2<0$ $\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} < f'(x_2)$

Per usare Lagrange, $x-x_1>0$ e $x-x_2<0$, quindi $f'(x_1)<\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ e $f'(x_2)>\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$. Imponendo il comp. crescente
$f'(x_2) < \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} < \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < f(x_1)$. Usando Lagrange (su f), possiamo dire che $\exists f'(c)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ e $\exists f'(d)=\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ $(c\in(x_1;x), d\in(x;x_2))$ ma per come abbiamo le due frazioni abbiamo che $f'(d)>f(c)$. Data l'arbitrarietà di x, segue che $f'(x)$ è crescente.

---

1) $y = xe^{-\frac{1}{x+1}}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ | $f(x)<0$ $x<0$ | $f(x)>0$ $x>0$ | NO DISP/PARI

$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ | $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ | $\lim_{x\to-1^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=-1$ $\quad x\left(e^{-\frac{1}{x+1}}-1\right) \sim x\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-1$

$\Downarrow$

ASINT. OBLIQUO BILATERO: $y=x-1$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} + \frac{xe^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} = e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}$ $\quad D'=D$

$f'(x)>0$ $\quad x^2+3x+1>0 \Rightarrow x<-\frac{3+\sqrt5}{2} \vee x>\frac{-3+\sqrt5}{2}$ $\quad \nearrow\ \searrow\ \nearrow$

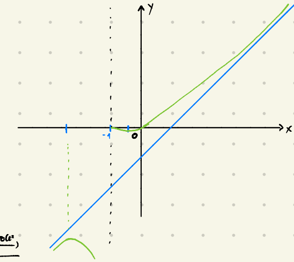
$M=\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}; f\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)\right)$, $m=\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}; f\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)\right)$

$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to-1^+ \\ t=\frac{1}{x+1}}} e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\frac{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+3\left(\frac{1-t}{t}\right)+1}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\frac{\frac{t^2-3t^2+t^2+o(t^2)}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$

$= \lim_{t\to+\infty} e^{-t}(-t^2+o(t^2)) = \lim_{t\to+\infty}\frac{-t^2+o(t^2)}{e^t}=0$

$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x-\frac{x}{x+1}+o(1) = x-1+\frac{1}{x+1}+o(1)$ = SVILUPPI NECESSARI

$e^{-\frac{1}{x+1}} = 1-\frac{1}{x+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)$



---

2) $f(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | $f(x)>0$ $x>0$, $f(x)<0$ $x<0$ | DISPARI | $f(1)=f(-1)=0$

$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ | $\underbrace{\lim_{x\to0^-} f(x) = \dots = 0 \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \dots = 0}_{\text{prolungabile per continuità}}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

$\hookrightarrow$ NO ASINT.

$f(x) \underset{x\to1}{\sim} 1\cdot\sqrt[3]{(\ln x)^2} = \sqrt[3]{(\ln(1+(x-1)))^2} \sim \sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow$ in $x=1$ ha una cuspide

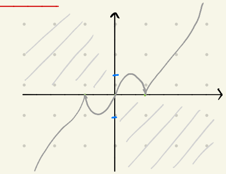
$f'(x) = \sqrt[3]{(\ln(x))^2} + \frac{2}{3}\cancel{x}((\ln(x))^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{(\ln x)^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3\ln x+2}{3\sqrt[3]{\ln x}}$

solo $x>0$

$\lim_{x\to0^+} f'(x)=+\infty$, $\lim_{x\to0^-} f'(x)=+\infty \Rightarrow$ tg v.

$f'(x)=0$ $\quad \ln x=-\frac{3}{2}$ $\quad x=e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x)=$



---

3) $f(x)=\frac{(1-|x|)^{1/5}}{x^2+1}$

D: $\mathbb{R}$ | $f(x)>0$ $-1<x<1$, $f(x)<0$ $x<-1 \vee x>1$ | PARI | $f(x)=0$ $x=\pm1$; $f(0)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\sqrt[5]{\infty}}{\infty^2}=0 \Rightarrow$ ASINT. H $y=0$

$f(x) \underset{x\to1}{\sim}\frac{(1-x)^{1/5}}{2} \Rightarrow$ flesso a tg v in ±1

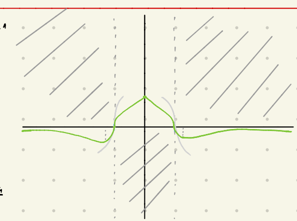
$\underset{x\geq0}{f'(x)} = \frac{((1-x)^{1/5})'(x^2+1)-(1-x)^{1/5}\cdot2x}{(x^2+1)^2} = \frac{9x^2+10x-1}{5(x^2+1)(1-x)^{4/5}}$

$\lim_{x\to+1} f'(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to-1} f'(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^+} f'(x)=-\frac{1}{5}$ $\quad \lim_{x\to0^-} f'(x)=\frac{1}{5}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 9x^2+10x-1=0$ $\quad x=\frac{5\pm\sqrt{34}}{9} \Rightarrow x<\frac{5-\sqrt{34}}{9} \vee x>\frac{5+\sqrt{34}}{9}$

$f''(x)=\dots$



4) $f(x) = x\dfrac{2\ln x - 3}{\ln x - 2}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (0; e^2) \cup (e^2; +\infty)$ $\;\vdots\;$ $f(x) > 0$ [...] $\;\vdots\;$ $f(x) = 0 \quad \ln x = -\frac{3}{2} \quad x = e^{-\frac{3}{2}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, $\underbrace{\lim_{x\to e^{2-}} f(x) = -\infty, \lim_{x\to e^{2+}} f(x) = +\infty}_{\text{ASINTOT V: } y = e^2}$, $\underbrace{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}_{\text{NO ASINT. O}}$

HOMEWORK

HOMEWORK:

$y = (2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$

$y = (1+x)\left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad y = \frac{x-3}{x+2}e^{x-|x|}$

$y = \arctan\left(\frac{2x+1}{|x|+1}\right)$ $\qquad y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$

$f(x) = (2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3}$ $\qquad$ D: $x \neq -1$ | $f(x) > 0 \quad x < 2$ | $f(x) = 0 \quad x = 2 \quad x = 0$ |

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = 3\cdot\left(\frac{-1}{0^-}\right)^{2/3} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 3\cdot\left(\frac{-1}{0^+}\right)^{2/3} = +\infty$

$(2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} \overset{x\to-\infty}{\sim} (2-x) \sim -x \Rightarrow$ asintoto ob sx $y = -x$] $\to$ as. obl. $y = -x$

$(2-x)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} \overset{x\to+\infty}{\sim} (2-x) \sim -x \Rightarrow$ " " dx $y = -x$]

as. v. $x = -1$

$$f'(x) = (2-x)'\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} + (2-x)\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3}\right)' = -\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} + (2-x)\frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1+\cancel{x}-\cancel{x}}{(1+x)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2/3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{1/3}\left(\frac{2-x}{(1+x)^2}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{x}{1+x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2-x}{(1+x)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3(1+x)(x) + 4 - 2x}{3(1+x)^2}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3x - 3x^2 + 4 - 2x}{3(1+x)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-3x^2-5x+4}{3(1+x)^2}\right) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^{1/3}\left(\frac{-3x^2-5x+4}{3(1+x)^2}\right) = \frac{-3x^2-5x+4}{3\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3}}$$

D': $x \neq -1$, $x \neq 0$

$f'(x) = 0 \qquad -3x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad x \simeq -2{,}25$

$x \simeq 0{,}59$

$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \frac{-3+5+4}{-3\cdot 0^-} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \frac{-3+5+4}{-3\cdot 0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{4}{3\cdot 0^-} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{4}{3\cdot 0^+} = +\infty$

$$f''(x) = \frac{(-6x-5)\left(3\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3}\right) - (-3x^2-5x+4)\left(\frac{5}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2/3}\right)}{\left(3\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3}\right)^2} =$$

$$\frac{3(-6x-5)\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3} + \frac{5(-3x^2-5x+4)(1+x)^{2/3}}{3x^{2/3}}}{9x^{2/3}(1+x)^{10/3}} =$$

$$\frac{9x^{2/3}(-6x-5)\sqrt[3]{x}(1+x)^{5/3} + 5(-3x^2-5x+4)(1+x)^{2/3}}{27x^{4/3}(1+x)^{10/3}} =$$

$$\frac{\cancel{(1+x)^{2/3}}\left((1+x)9x^{2/3}(-6x-5) + 5(-3x^2-5x+4)\right)}{27x^{4/3}(1+x)^{\cancel{10/3}\,8/3}} = \frac{\left((-6x-5-6x^2-5x)\,9x^{2/3} + 5(\,)\right)}{27x^{4/3}(1+x)^{8/3}} =$$

$$\frac{(-6x^2-11x-5)\,9x^{2/3} + 5(-3x^2-5x+4)}{27x^{4/3}(1+x)^{8/3}} =$$

Polinomi di Taylor

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile. Sia $T_1^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) = T_1^{x_0}(x) + o(x - x_0)$

$R_1(x) = f(x) - T_1^{x_0}(x)$ è detto resto ed è $R_1(x) = o(x - x_0)$.

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile n volte. Esiste un unico polinomio con un resto piccolo che approssima $f(x)$ detto $T_n^{x_0}(x)$ (polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n) tale che:

$$f(x) - T_n^{x_0}(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad T_n^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

OSS: Se $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor si chiama polinomio di Mc-Laurin

DIM: $\underline{n=2} \Rightarrow T_2^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2^{x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow f(x) - T_2^{x_0}(x) = o(x-x_0)^2$

$f(x) - T_2^{x_0}(x)$ è derivabile, come anche $(x-x_0)$. Il limite risulta in $\frac{0}{0} \Rightarrow$ posso applicare il teorema di De L'hopital $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{2\cancel{(x-x_0)}} = \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \Big[\underbrace{\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}}_{f''} - f''(x_0) \Big] = \frac{1}{2}(\cancel{f''} - \cancel{f''}) = 0 \Rightarrow \text{per De L'hopital}$$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_2^{x_0}(x)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow$ verifica la tesi.

ES: 1) $f(x) = \ln(x+1)$ $\quad T_3^1(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!}(x-1)^3 = \ln(2) + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} \Rightarrow \ln(x-1) = \underbrace{T_3^1(x) + o((x-1)^3)}_{\text{sviluppo di Taylor}}$

$f(x_0) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(x_0) = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(x_0) = \frac{1}{4}$

$T_3^0(x) = \ln(1) + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)^2 + \frac{2}{6}(x-0)^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Resto di Peano

$$f(x) = T_n^{x_0}(x) - \underbrace{o((x-x_0)^n)}$$

↳ RESTO DI PEANO: è una stima sulla rapidità con cui $f(x)$ tende a x_0.

Resto di Lagrange

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f derivabile $n+1$ volte. Esiste $c \in (\overset{a}{x_0}; \overset{b}{x})$ tale che $f(x) - T_n^{x_0}(x) = \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}$

Se posso stimare $f^{n+1}(c)$, allora $|f(x) - T_n^{x_0}(x)| < \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

DIM: $N+1=2$. Per ipotesi $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}(b-a)^2}_{K(b-a)^2}$. Definiamo $g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2$.

Applichiamo a $g(x)$ Lagrange: $\exists c \in (a,b)$: $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = 0$. Ma $g'(x) = -\cancel{f'(x)} - f''(x)(b-x) + \cancel{f'(x)} + 2K(b-x) = -f''(x)(b-x) + 2K(b-x)$

$f(b) - f(b) - 0 - 0 = 0$

$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - K(b-a)^2 = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f(b) + f(a) + f'(a)(b-a) = 0$

Quindi $f''(c)\cancel{(b-c)} = 2K\cancel{(b-c)}$ poiché $c \neq b \Rightarrow K = \frac{1}{2}f''(c) \Rightarrow f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$, dimostrando la tesi.

Esempi:

$f(x) = \sin(x) \quad T_5(x)_1 = 0 + 1(x-0) + 0 - \frac{1}{6}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$

$g(x) = \sin(x^2) \quad T_5(x)_2 = T_5(x^2)_1 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!}$

→ !! $f(g(x)) = T(g(x)) + o$ se $g(x)$ è polinomiale !!

$f(x) = \ln(\cos(x)) \quad \cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{t}) \to t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) - \underbrace{\frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2}}_{\text{ininfluente}}$

$\ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{t}) \to -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2}{2} + $

ESEMPI USO SV. TAYLOR

$\cos(e^x - 1) \quad x \to 0 \quad \cos(e^x-1) \to 1 \Rightarrow \cos\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right) =$

$$1 - \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \\ e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \Rightarrow e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \end{array}\right]$$

$$= 1 - \frac{\left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \cancel{\frac{x^6}{36}} + \cancel{\frac{x^8}{24}} + o(x^5)\right)}{2} + \frac{\left(x^4 + \cancel{\frac{x^6}{16}} + o(x^5)\right)}{24} + o(x^4) =$$

$$= \dots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \underset{x-1=t}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1) - t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t} - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \cancel{- t}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2/2 + o(t^2)}{t^2} = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{2}\cancel{\frac{t^2}{t^2}} = -\frac{1}{2}$$

infin. ordine di t^2 => meno rel.

$\ln(1+t) = t + o(t)$

$= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ => SVIL. TAYLOR

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x) - 2x^2}{8(\sin x - x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2x} + \cancel{\frac{4x^2}{2}} + \frac{8x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{2x} + \frac{8x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{2x^2}}{-8\frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{8}{3!}x^3 + o(x^3)}{-\frac{8}{3!}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = -2$$

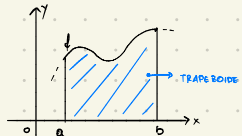
$\sin x = x + o(x)$

$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$e^t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

TRAPEZOIDE

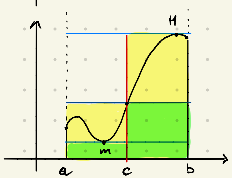
Sia $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$. Con $T_f([a;b])$ si intende il trapezoide delimitato a f in $[a;b]$



INTEGRALE DEFINITO

Data $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$. Si definisce integrale definito la misura con segno di $T_f([a;b])$. Si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

ES.: $f(x) = c \quad \int_a^b c\,dx = c(b-a)$



Sia $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$, per Weierstrass esistono $M > f(x)\ \forall x$, $m < f(x)\ \forall x$.

Divido $[a;b]$ in due parti uguali:

esistono max e min sia per $f|[a;c]$ che per $f|[c;b]$

.... per n volte

↳ Divido $[a;b]$ in n intervalli uguali. In ogni intervallo, f è continua => per Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti e le aree delimitate saranno: $M_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $m_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$

→ Somma inf → Somma sup.

Si dice somma superiore $S_n = \sum_{i=0}^{n} M_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ e somma inferiore $s_n = \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{b-a}{n}\right)$ con $s_n \le S_n\ \forall n$. Esse sono successioni.

Per $n \to +\infty \quad m(b-a) = s_1 \le s_n \le S_n \le S_1 \Rightarrow$ sono limitate. Per lo più s_n è crescente, mentre S_n è decrescente

Ciò ci indica che le due somme sono convergenti (monotone limitate) => $\lim_{n \to +\infty} s_n = \sup(s_n)$, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \inf(S_n)$

È intuibile che $\sup(s_n) = \inf(S_n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$

MISURA CON SEGNO DI UN TRAPEZOIDE LUNGO [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = \sup(s(n)) = \inf(S(n))$$

ES.: $f(x) = x^2 \quad A: [0;1] \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = ?$

$\frac{b-a}{n} \to \frac{1}{n} \Rightarrow x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = 1$

↳ $[x_i; x_{i+1}] = \left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right]$

f monotona crescente in A => ha minimo $m(x_i; f(x_i))$ e massimo $M(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$

↳ $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} \cdot f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \boxed{\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3(1+\dots)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

Somma primi n quadrati

↳ $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f(x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(i+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3(1+\dots)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

Somma di Cauchy-Reimann

Si dice somma di Cauchy-Reimann la seguente somma:

$$\sigma_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\,[x_{i+1}-x_i]$$

con $m_i \le f(z_i) \le M_i$ dove m_i e M_i sono max, min assoluti di $f|_{[x_i;x_{i+1}]}$

Siccome $m_i \le f(z_i) \le M_i$, avremo $s_n \le \sigma_n \le S_n$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$.

Def. di integrale con σ_n

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)$$

Aree

1) $f(x) > 0 \quad \forall x \qquad A = \int_a^b f(x)dx$

2) $f(x) \le 0 \quad \forall x \qquad A = -\int_a^b f(x)dx$

3) $\left.\begin{array}{ll} f(x) > 0 & \forall x \in [a;c] \\ f(x) \le 0 & \forall x \in [c;b] \end{array}\right\} \Rightarrow A = \int_a^b |f(x)|dx$

OSS: $f(x)$ è dispari su $[-a;a] \Rightarrow A = 2\int_0^a |f(x)|dx$

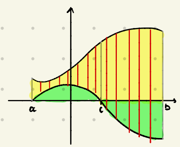
$f(x)$ è pari su $[-a;a] \Rightarrow A = 2\int_0^a |f(x)|dx$

Siano f, g continue in $[a;b]$ l'area del trapezoide $T_{f,g}(\,[a;b]\,)$ è:

1) $f, g \ge 0 \qquad A(T_{f,g}[a;c]) = \int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx$

2) $f(x) > 0,\ g(x) < 0 \qquad A(T_{f,g}[a;c]) = \int_c^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$

$\Big\}\ A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



Proprietà dell'integrale

1) LINEARITÀ: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ OSS. deriva dalla linearità della sommatoria nella somma di C.R.

$f'(x) = \sin x + x\cos x \qquad\qquad = \sin x + x\cos x$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x \qquad = 2\cos x - x\sin x$

$f'''(x) = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$

$f''''(x) = -3\cos x - \cos x + x\sin x = -4\cos x + x\sin x$

$f'''''(x) = +4\sin x + \sin x + x\cos x = 5\sin x + x\cos x$

1) $f(x) = \frac{1}{x^2-x} \qquad T_2^2(x) = ? \qquad$ grafico locale?

$T_2^2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-2) + \frac{7}{8}(x-2)^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-2) + \frac{7}{8}(x-2)^2 + o(x^2)$

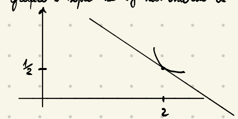
$f'(x) = -(2x-1)(x^2-x)^{-2}$

$f''(x) = -2(x^2-x)^{-2} - 2(2x-1)^2(x^2-x)^{-3}$

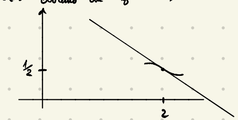
Per grafico locale si intende un grafico che rispetti tangente e concavità in un certo intorno

La tg è $T_1^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-2)$. Per calcolare la posizione della curva rispetto alla tangente studiamo $f(x) - T_1^2(x) = \frac{7}{8}(x-2)^2 + o(x^2) > 0$

$\Rightarrow \frac{7}{8}(x-2)^2 > 0 \quad \forall x \Rightarrow$ il grafico è sopra la tg nell'intorno di $x_0 = 2$.



Se avremmo modificato $T_2^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-2) + o(x^2)$ allora non avremmo potuto estrapolare informazioni. Calcolando $T_3^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-2) + \frac{7}{8}(x-2)^3 + o(x^3)$ avremo che $\frac{7}{8}(x-2)^3 \ge 0 \quad x \ge 2 \Rightarrow$ quindi avremo un flesso ascendente



3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sin x + x\cos x \qquad$ punti stazionari? Taylor centrato in essi e trova la natura dei punti

$f'(x) = x^2 \cancel{-\cos} + \cancel{\cos x} - x\sin x = x^2 - x\sin x$

$f'(x) = 0 \qquad x = 0, \quad x = \sin x \to x = 0 \Rightarrow x = 0$

$T(x) = \cancel{\frac{x^3}{3}} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6) + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{2!}} + \frac{x^5}{4!} + o(x^6) = \frac{-4!x^5 + 5!x^5}{5!4!} + o(x^6) = \frac{4}{5!}x^5 + o(x^6) \Rightarrow \frac{4}{5!}x^5 \ge 0 \quad x \ge 0 \Rightarrow$ flesso

↳ Lo sviluppo di $\frac{x^3}{3}$ di ordine 6 è la funzione stessa poiché è polinomiale di grado inf.

$T_6(x) = \frac{0^3}{3} + 0^2 \cdot x + \frac{\cancel{2} \cdot 0 \cdot x^2}{\cancel{2}} + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + 0 = \frac{1}{3}x^3$

non possiamo derivare oltre

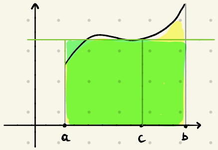
Integrale e simmetrie

Sia $f(x)$ dispari e $[-a;b]$ non simmetrico, allora: $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

" " pari " " " " " : $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx$

Teorema del valor medio integrale

Sia $f(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ continua. Esiste allora $c \in [a;b]$ tale che: $\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$



Per Weierstrass esistono i massimi assoluti $\Rightarrow f(x)$ è limitata $\Rightarrow \int_{a}^{b} m\,dx \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} M\,dx$

$\Rightarrow m \leq \frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a} \leq M \Rightarrow$ per i valori intermedi, $\exists$ almeno un $c \in [a;b]$ tale che:

$f(c) = \underbrace{\frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a}}_{\text{VALOR MEDIO INTEGRALE}}$

Integrale Indefinito

Data $f: A \subseteq I \to \mathbb{R}$, definiamo $F: I \to \mathbb{R}$ detta primitiva su I se:

1) Se F è derivabile in I
2) Se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Proprietà primitiva

Se prendo una funzione continua in intervallo, allora f ammette primitiva su I.

La primitiva di una funzione f non è unica.

Se f ammette una primitiva F su I allora:

1) ogni funzione della forma $F+c$ è primitiva
2) ogni altra primitiva G di f sarà della forma $F+c$

DIM: 1) $(F(x)+c)' = F(x)' + c' = F'(x) = f \Rightarrow F+c$ è primitiva

2) sia $H(x) = F(x) - G(x) \Rightarrow H'(x) = F'(x) - G'(x) = \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} = 0 \Rightarrow F$ e G differiscono per una costante $\Rightarrow G(x) = F(x) + c$

Integrale indefinito

Si indica $\int f(x)dx = \{F: I \to \mathbb{R}$ derivabili in $I \mid F'(x) = f(x)\} = F(x) + c$

Siano f, g continue in I, allora:

1) $\int K f(x)dx = K \int f(x)$
2) $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

F primitiva di f su I e G primitiva di $g(x)$ su I: $\int f(x)+g(x)dx = F(x) + G(x) + K$? $\quad (F(x) + G(x) + K)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

SVILUPPI NOTI

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+n) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(n^{2n+1})$$

---

1) $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) \Rightarrow$ Serie geometrica

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ $\quad f'''(0) = 6$

$f''''(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$ $\quad f''''(0) = 24$

2) $f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3) \Rightarrow$ assomiglio al binomiale $\Rightarrow \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

$\hookrightarrow f(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n \Rightarrow$ Generalizzazione dello sviluppo di Newton

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\quad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ $\quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

...

---

1) $f(x) = e^{\sin x} =$ $\quad T_4^0(x) = ?$

Sappiamo che per $t \to 0$ $\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + o(t^n) \Rightarrow f(x) = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} + o((\sin x)^4)$. Adesso mettiamo nelle parentesi lo sviluppo di $\sin x$ a un ordine almeno pari di quello di e^t:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \Rightarrow e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}_{\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3!}\} o(x^4) + \dots} + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3}_{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{x^5}{3!}\} o(x^4) + \dots} + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^4 + o\Big(\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4}_{\sin x \sim x \Rightarrow o(x^4)}\Big)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4) + \cancel{\frac{1}{3!}x^3} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) + o(x^4) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

2) $f(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ $\quad f^{(8)}(0) = ?$

$$(1-2x^2)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^9)\right) \underset{\text{MOLTIPLICO}}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^9) - 2x^2 + 2x^4 - x^6 + \frac{x^8}{3} - \frac{x^{10}}{12} - 2x^2 o(x^9) = 1 - 3x^2 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{7}{6}x^6 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$$

$\hookrightarrow \frac{3}{8} = \frac{f^{(8)}(0)}{8!} \Rightarrow f^{(8)} = \frac{3}{8} \cdot 8!$

3) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $\quad T_2^0(x), T_4^0(x), T_6^0(x)$

$T_2^0(x) = -1 - x + x^2 \rightarrow x^3 + [x^2 - x - 1]$

$T_4^0(x) = f(x) = -1 - x + x^2 + x^3 = T_6^0(x)$

4) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $\quad T_1^1(x) = ?$

$f(x) = (x-1)(x+1)^2$ $\quad f(x) \overset{x \to 1}{\sim} 4(x-1) \Rightarrow f(x) = 4x - 4 + o(x-1) = T_1^1(x)$

5) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $\quad T_2^{-1}(x) = ?$

$f(x) = (x-1)(x+1)^2$ $\quad f(x) \overset{x \to -1}{\sim} -2(x+1)^2 \Rightarrow f(x) = -2(x+1)^2 + o((x+1)^2)$

---

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x) - 3\sin(x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{3x} - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3) - \cancel{3x} - 3x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{15}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + o(x^2) = -\frac{15}{2}$$

$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9x^2}{2} + \frac{\overset{9}{\cancel{27}}x^3}{\cancel{3}} + o(x^3)$

$3\sin(x+x^2) = 3\left[x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{3!} + \underbrace{o((x+x^2)^3)}_{x + \text{SIGN}}\right] = 3\left[x + x^2 - \frac{x^3 + o(x^3)}{3!} + o(x^3)\right]$

2) $$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} x\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{K_1}{K_2 x^2} = 0$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2 + o\left(\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$t = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$; $\alpha = \frac{1}{3}$ ↗

$t = \frac{2}{x}$; $\alpha = \frac{1}{2}$ ↘

HOMEWORK $\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$

3) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - e^{x/2}}{(\ln(1+x))^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 2 \\ -\frac{1}{4} & \alpha = 2 \\ -\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$e^{x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

H:

$T_4^0(x)$ di: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^3}}$

$\lim_{x \to +\infty}\left(\pi x^2 - 2x^2\arctan(x) - 2x\right)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x + \ln(1+x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x}{x^{2\alpha}(e^{x^2} - 1)}$

Integrali immediati

Derivano dall'applicazione delle regole di derivazione al contrario:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \left[\int e^x dx = e^x + c\right]$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad !! \ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

Integrale per parti

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

DIM: $H(x)$ primitiva di $f(x)g'(x)$ su $I \Rightarrow H'(x) = f(x)g'(x)$. Consideriamo $f(x)g(x) - H(x)$ derivabile. Derivando:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x) - H(x)) = f'(x)g(x) + \cancel{f(x)g'(x)} - \cancel{f(x)g'(x)} \Rightarrow f(x)g(x) - H(x) \text{ è primitiva di } f'(x)g(x) \Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

ESEMPIO:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = e^x \quad g = e^x$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx = x \ln x - x + c$$

$D: (0; +\infty)$ $\quad f(x) = \ln(x) \quad f' = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \quad g = x$

Integrazione per sostituzione

$(f(\varphi(t)): J \to I \to \mathbb{R})$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua su I, $\varphi: J \to I$ derivabile in J tale che $\varphi(t) = x \in I$. Allora:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$$

DIM: Sia $F(x)$ la primitiva di f. $F(\varphi(t))$ è derivabile (composizione di funzioni derivabile) $\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] = F'(\varphi(t))\varphi'(t) =$

$= f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t))$ è primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$

ES.:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int U \, dU = \frac{1}{2} U^2 + c = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 + c$$

$U = \ln x \quad dU = \frac{1}{x} dx$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\varphi'(t)}{1 + [\varphi(t)]^2} dt = \int \frac{1}{1+x^2} dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \arctan(\varphi(t))$$

Integrazione di funzioni razionali

Per funzione razionale si intende $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, $N(x), D(x) \in \mathbb{R}_d[x]$

1) $\deg(N(x)) \geq \deg(D(x))$ $\quad N(x) = D(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow \int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$

2) $\deg(N(x)) < \deg(D(x))$

2a) $\deg(D(x)) = 1 \Rightarrow \deg(N(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{K}{\alpha x + \beta} \Rightarrow \int \frac{K}{\alpha x + \beta} dx = \frac{K}{\alpha} \ln(\alpha x + \beta) + c$

2b) $\deg(D(x)) = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & D(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \\ \Delta = 0 & D(x) = a(x-x_1)^2 \\ \Delta < 0 & D(x) = 1 + [c(x)]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{K}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right] dx = \ln|x-x_1| + \ln|x-x_2| + c \\ \int \frac{K}{a(x-x_1)^2} dx = \frac{K}{a} \frac{1}{x-x_1} + c \\ \int \frac{K}{1+[c(x)]^2} dx = K \arctan(c(x)) + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \int \left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right] dx \\ \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2} dx = \int \left[\frac{\alpha \cancel{(x-x_1)}}{a(x-x_1)^{\cancel{2}}} + \frac{\alpha x_1 + \beta}{a(x-x_1)^2}\right] dx \\ \int \frac{\alpha x + \beta}{1 + [c(x)]^2} dx = \int \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{K}{1+[c(x)]^2} dx = \ln|bx| + K \arctan(c(x)) + c \end{cases}$$

1) Determinare il carattere di $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{n}\to+\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{n}\to-\infty$ ↳ Serie somma: converge quando $a_n\to l$ e $b_n\to m$. Non possiamo dire nulla se $a_n\to-\infty$ $b_n\to+\infty$.

$T_3^0(\arctan t)=t-\frac{t^3}{3}+o(t^3) \Rightarrow T_3^0(\arctan\frac{1}{x})=\frac{1}{n}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \to \sum_{n=0}^{+\infty}\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3-\cancel{\frac{1}{n}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \Rightarrow$ converge.

---

2) $\int(3x-1)^7dx=\frac{1}{3}\int3(3x-1)^7dx=\frac{(3x-1)^8}{24}+c$

$\int x\sqrt{9-4x^2}\,dx=-\frac{1}{8}\int-8x\sqrt{9-4x^2}\,dx=\frac{2(9-4x^2)^{3/2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{8}_4}\right)+c=-\frac{(9-4x^2)^{3/2}}{12}+c$

$\int\frac{\ln^2x}{x}dx=\frac{\log^3x}{3}+c$

$\int\frac{1}{x\log x}dx=\ln|\ln x|+c$

$\int\tan(x)\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int-\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c$

$\int3x^3e^{4x^4}dx=\frac{3}{16}\int16x^3e^{4x^4}dx=\frac{3}{16}e^{4x^4}+c$

$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=-2\cos\sqrt{x}+c$

$\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+c$

$f\ x \quad f'\ 1$

$g'\ e^x \quad g\ e^x$

$\int2x(\ln x)^2=(\ln x)^2\cdot x^2-\int\frac{2\ln x}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x^2}dx=(x\ln x)^2-\int x\ln x\,dx=(x\ln x)^2-\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{1}{\cancel{x}}\frac{\cancel{x^2}}{2}dx\right]=(x\ln x)^2-\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]+c$

$g'\ f$

$f\ (\ln x)^2 \quad f'\ \frac{2\ln x}{x}$ $\qquad$ $f\ \ln x \quad f'\ \frac{1}{x}$

$g'=2x \quad g=x^2$ $\qquad$ $g'\ x \quad g\ \frac{x^2}{2}$

Funzione integrale

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a;b]$. Considero $[a;x]$ e f continua su $[a;x]$. Definisco:

$$F: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^x f(x)dx$$

Tale funzione è detta FUNZIONE INTEGRALE.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 1

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua. Allora detta $F: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f, si ha che:

1) F è derivabile in $\forall x \in (a;b)$ ed esistono la derivata destra/sinistra dell'estremo destro/sinistro
2) $F'(x) = f(x) \Rightarrow$ LA FUNZIONE INTEGRALE È PRIMITIVA DI f

DIM: $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_x^{x_0} f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)dt}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} f(c)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} f(c) \overset{f \text{ continua}}{=} f(x_0)$

Per media integrale: $\exists c \in [x_0; x_0+h]: f(c)(x_0+h-x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

$\Downarrow$

Siccome esiste finito, allora F è derivabile e poiché $F'(x_0) = f(x_0)$ F è primitiva di f.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 2

Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ continua. Sia G una primitiva di f su $[a;b]$. Allora:

1) $\int_a^b \underbrace{G'(t)dt}_{f(t)dt} = G(b) - G(a)$

DIM: Sia $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Sappiamo che F è continua e derivabile ed è primitiva di f. Costruiamo $H(x) = G(x) - F(x)$:

1) H è continua; 2) H è derivabile; 3) $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ Quindi H è costante $\Rightarrow H(x) = H(a) = H(b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(a) = G(a) - F(a) = G(a) \\ H(b) = G(b) - F(b) = \end{cases} \Rightarrow G(a) = G(b) - F(b) \Rightarrow F(b) = G(b) - G(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

ES: $\int_1^3 e^{-x^2} dx = F(3) - F(1)$

↳ continua su $[1;3] \Rightarrow \exists F(x) = \int_a^x e^{-t^2}dt \Rightarrow$ l'area con segno è finita } TH. FONDAMENTALE 1/2

$\int_1^2 x \ln(x+2)dx = F(2) - F(1) = 2\ln(4) \cancel{-2+2} - 2\ln(4) \cancel{+c} = \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2} - 1 + 2\ln(3) \cancel{-c} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\ln(3)$

↳ $f(t)$ continua in $[1;2] \Rightarrow$ VALE TH. FOND. CALC. $\Rightarrow \exists F(x) = \int_1^x f(t)dt = \dots = \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln(x+2) + c$

Integrare funzioni con punti di discontinuità

DISC. ELIMINABILE: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione con una discontinuità eliminabile in x_0. Per calcolare l'integrale di f prolungo per continuità f definendo $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ f(x_0) & x = x_0 \end{cases}$ e calcolo $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$.

DISC. SALTO: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione con una discontinuità di salto in x_0. Per calcolare l'integrale di f calcolo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \underbrace{\int_{x_0}^b f(x)dx}$$

$f(x)$ cont. in $(x_0;b] \Rightarrow$ prolungo f in x_0 tale che: $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x_0 < x \leq b \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) & x = x_0 \end{cases}$

...

DISC. 2ª SPECIE: Sia $f: [a;b] \subseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione che ha in x_0 una discontinuità di 2ª specie.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \underbrace{\int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx} \right]$$

Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ è finito, non serve la ε (vale anche per l'altro lato)

INTEGRALE GENERALIZZATO

1) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx} = \frac{1}{2x}\cdot\frac{-1}{x^2+1} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{-1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \int \frac{1}{2x^2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \int \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x + c$

!! attenzione a moltiplicare e dividere per x

$f\ \frac{1}{2x} \qquad f' -\frac{1}{2x^2}$

$g'\ \frac{2x}{(x^2+1)^2} \qquad g = \frac{-1}{x^2+1}$

2) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

3) $\int (2x+3)^7\,dx = \int t^7 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^7 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8} + c = \frac{(2x+3)^8}{16} + c$

$t = 2x+3$

$dt = 2\,dx$

4) $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (1+t^2)\cdot t\, 2t\,dt = \int (1+t^2)\cdot 2t^2\,dt = \int 2t^2 + 2t^3\,dt = \frac{2t^3}{3} + \frac{\cancel{2}t^4}{\cancel{4}_2} + c = \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + \frac{(\sqrt{x-1})^4}{2} + c$

$t = \sqrt{x-1} \quad x = 1+t^2$

$dx = 2t\,dt$

5) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int -\sin^2 t\,dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\int 1-\cos 2t\,dt = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{4} + c = -\frac{1}{2}t + \frac{\sin t\cos t}{4} + c = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x}{4} + c$

$x = \cos t$

$dx = -\sin t\,dt$

6) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+t^2+2t}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \underbrace{\int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt}_{\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2}\,dt = 2\arctan t + \frac{2}{1+t} + c = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c$

$t = \tan\frac{x}{2} \quad x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

---

1) $\int_1^4 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{1+2t^2}{t^2+t}\cdot 2t\,dt = \int_1^2 \frac{(1+2t^2)2\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t)}\,dt = 2\int_1^2 \frac{1+2t^2}{1+t}\,dt = 2\left[\int 2t-2+\frac{3}{1+t}\,dt\right] = 2\left[t^2-2t+3\ln|1+t|\right]+c\Big|_1^4 = 2t^2-4t+6\ln|1+t|+c\Big|_1^4 = 2x-4\sqrt{x}+6\ln|1+\sqrt{x}|+c\Big|_1^4$

divisione polinomi

$t = \sqrt{x} \quad a = \sqrt{1} = 1$

$dx = 2t\,dt \quad b = \sqrt{4} = 2$

$= \dots = 6\ln\frac{3}{2} + 2$

2) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\ln t}{\cancel{e^t}}\cancel{e^t}\,dt = \int_1^2 \ln t\,dt = t\cdot(\ln t - 1)\Big|_1^2$

$t = \ln x \quad a = \ln e = 1$

$x = e^t \quad b = \ln e^2 = 2$

$dx = e^t\,dt$

3) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \int_1^e \frac{\cancel{t}}{t+3}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t+3}\,dt = \ln|t+3|\Big|_1^e = \dots = \ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$

$t = e^x$

$x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

4) $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}\,dx = 2\int_1^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\cos^2 t\,dt = \dots$

$\frac{x}{2} = \sin t \quad a = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad b = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$t = \arcsin\frac{x}{2} \quad dx = 2\cos t\,dt$

$\lim_{x\to 0} \frac{3x+x^3-3\int_0^x e^{x^2}dx}{6\sin x - 6x + x^3}$ HOMEWORK

INTEGRALE INFINITO

Data una funzione continua f su $[a;+\infty)$, avremo che

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{K \to +\infty} \int_a^K f(t)dt = \lim_{K \to +\infty} [F(K) - F(a)]$$

Se:
1) il limite converge allora l'integrale si dice che converge
2) il limite diverge allora l'integrale si dice che diverge
3) il limite non esiste allora l'integrale non esiste.

CRITERIO DEL CONFRONTO PER INTEGRALI DEFINITI

Siano f, g funzioni positive su $[a;x_0)$ e continue in $[a;x_0]$ con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a;x_0]$: $\int_a^{x_0} f(t)dt \leq \int_a^{x_0} g(t)dt$ $\Rightarrow$ se $\int_a^{x_0} g(t)dt$ converge, allora converge $\int_a^{x_0} f(t)dt$. Se invece $\int_a^{x_0} f(t)dt$ diverge, allora anche $\int_a^{x_0} g(t)dt$ diverge. (gli estremi non devono essere per forza finiti)

DIM: per Hp $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Per $\varepsilon > 0$ se faccio $\int_a^{x_0-\varepsilon} f(t)dt \leq \int_a^{x_0-\varepsilon} g(t)dt$ per la monotonia dell'integrale. Poiché la funzione integrale è una funzione monotona crescente, ammettono limite pari all'estremo superiore $\Rightarrow$ $0 \leq \sup(F(t)) \leq \sup(G(t))$ $\Rightarrow$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(t)dt \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} g(t)dt$ $\Rightarrow$ $\int_a^{x_0} f(t)dt \leq \int_a^{x_0} g(t)dt$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER INTEGRALI

Siano f, g funzioni positive su $[a;x_0)$ e continue in $[a;x_0]$ con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Se $f(x) \sim g(x)$ allora $\int_a^{x_0} f(t)dt$ e $\int_a^{x_0} g(t)dt$ hanno lo stesso carattere (vale anche per estremi infiniti)

Limite che tende ad e

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (corrispettivo di $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

DIM: ⓥ $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $c_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$

b_n ↓ monotona decr., c_n ↓ monotona cres. $\Big] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = e$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e \overset{c_n<b_n \text{ (da dim)}}{\Rightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}=\max(n_1,n_2): \forall n\geq\bar{n}\quad e-\varepsilon<c_{\bar{n}}\leq c_n\leq e\leq b_n\leq b_{\bar{n}}<e+\varepsilon$

Sia $x_0\in\mathbb{R}$ $\lfloor x_0\rfloor>\bar{n}$ ($\lfloor x_0\rfloor\leq x_0<\lfloor x_0\rfloor+1 \Rightarrow$ ogni numero reale può esser racchiuso tra un naturale e il successivo) $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \forall n>\bar{n}\quad e-\varepsilon\leq\left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0}\leq e+\varepsilon \Rightarrow \underline{\lim_{x_0\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{x_0}=e}$

Equivalenti: $\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}$, $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=\log e$, $\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}=\ln a$, $\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^k-1}{t}=k$. Ognuna si dimostra con una sostituzione.

Infiniti e Infinitesimi (per $x\to x_0$)

Dati $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e x_0 p.a. per A. f è infinitesimo per $\boxed{x\to x_0}$ se $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$

〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 infinito 〃 〃 , $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$

Confronto di infinitesimi

Siano f, g infinitesimi per $x\to x_0$. Se:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 \to f \text{ è un infinitesimo di } \underline{\text{ordine superiore}} \text{ rispetto a } g \Rightarrow f \text{ è un } \underline{\text{o-piccolo}} \text{ di } g \quad \text{es: } x^3=o(x^2)\\ \pm\infty \to f \text{ è un infinitesimo di } \underline{\text{ordine inferiore}} \text{ rispetto a } g\\ l \to f \text{ e } g \text{ sono dello } \underline{\text{stesso ordine}}. \text{ Se } \underline{l=1}, \text{ si dicono } \underline{\text{asintotiche}}\ (f(x)\sim g(x)\ x\to x_0)\end{cases}$$

O-piccolo di f

o-piccolo di f ($g=o(f)$) è una famiglia di infinitesimi più veloci di f

Confronto di infiniti

Siano f, g infiniti per $x\to x_0$. Se:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\pm\infty \to f \text{ è un infinito di } \underline{\text{ordine superiore}} \text{ rispetto a } g\\ 0 \to f \text{ è un infinito di } \underline{\text{ordine inferiore}} \text{ rispetto a } g\\ l \to f \text{ e } g \text{ sono dello } \underline{\text{stesso ordine}}. \text{ Se } \underline{l=1}, \text{ si dicono } \underline{\text{asintotiche}}\ (f(x)\sim g(x)\ x\to x_0)\end{cases}$$

Gerarchia degli infiniti

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty \quad {\scriptstyle\alpha,\beta>0}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma}=+\infty \quad {\scriptstyle\beta>0}$

Asintoti

- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x\to x_0^{+}/x\to x_0^{-}} f(x)=\pm\infty$ si dice che la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale destro/sinistro di $f(x)$
- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ si dice che la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale
- Sia $f(x)$, x_0 p.a.. Se $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, confronto $f(x)$ con $y=mx+q$: se $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ finito $\neq0$ e $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-mx=q$ finito, allora $y=mx+q$ si dice asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$

INTEGRALI GENERALIZZATI

Sia $[a;x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Sia $g:[a;+\infty) \to \mathbb{R}$ continua con f, g non positive.
Se $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;x_0)$ e $g(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;+\infty)$ si ha: $\int_a^{x_0} f(x)dx = -\int_a^{x_0} [-f(x)]dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) = -\int_a^{+\infty} [-g(x)]dx$

Siano $f:[a;x_0) \to \mathbb{R}$, $g:[a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Studio f il segno nell'intorno di x_0. Se esiste $c \in [a;x_0]$ tale che f ha segno costante allora: $\int_a^{x_0} f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c} f(x)dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_c^{x_0} f(x)dx}$

→ o positivo o negativo (vedi prec.)

Sia $g:[a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Se esiste $c \in [a;+\infty)$ tale che g abbia segno costante per $x \in [c;+\infty)$ ha segno costante allora
$\int_a^{x_0} g(x)dx = \int_a^{c} g(x)dx + \int_c^{+\infty} g(x)dx$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $f:[a;x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Se converge $\int_a^{x_0} |f(x)|dx$ allora converge $\int_a^{x_0} f(x)dx$.
Vale inoltre la disuguaglianza $\left|\int_a^{x_0} f(x)dx\right| \geq \int_a^{x_0} |f(x)|dx$

Sia $g:[a;+\infty) \to \mathbb{R}$ a segno alterno. Se $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ converge allora $\int_a^{+\infty} g(x)$ converge.
Vale inoltre la disuguaglianza $\left|\int_a^{+\infty} g(x)dx\right| \geq \int_a^{+\infty} |g(x)|dx$

LEGAME INTEGRALE-SERIE

Sia $f:[a;+\infty) \to \mathbb{R}$ non crescente. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ e $\left\{\int_a^n f(x)dx\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>a}}$.
In caso di convergenza $\lim_{n\to+\infty} \left\{\int_0^n f(x)dx\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>a}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) < f(0) + \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)dx$

$F(x) = \int_0^x \frac{te^t}{(1-t)^2} dt \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{te^t}{(1-t)^2} dt \Rightarrow$ diverge $\Rightarrow D_F = (-\infty;1) \Rightarrow$ si ferma a 1 perché per il teorema fondamentale del calcolo la primitiva deve essere continua.

$f(t) \sim \frac{e}{(1-t)^2} \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e}{(1-t)^2} = +\infty$

1) $F(x)=\int_0^x t\arctan(t-1)\,dt$

$D: \mathbb{R}$, $F'(x)= t\arctan(t-1) \Rightarrow F'(x)\geq 0$ $\quad \overset{0\quad 1}{+\,|\,-\,|\,+}$ $\Rightarrow$ per $x\leq 0 \wedge x\geq 1$ $F(x)$ è crescente e per $0\leq x\leq 1$ è decrescente.

0, 1 sono punti stazionari e $F(0)=0$, quindi ~~per $x<0$ è $F(x)$ è positiva~~ e per $x>0$ $F(x)$ è negativa

$\lim_{x\to+\infty} F(x)= \int_0^{+\infty} t\arctan(t-1)\,dt = +\infty$ $\Rightarrow$ in $(1;+\infty)$ $F(x)$ si annulla almeno una volta (1 sola volta a causa della monotonia)

$\lim_{x\to-\infty} F(x)= \int_0^{-\infty} t\arctan(t-1)\,dt = -\infty$ $\Rightarrow$ in $(-\infty;0)$ $F(x)$ si annulla almeno una volta (1 sola volta a causa della monotonia)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \underset{\text{de l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{t\arctan(t-1)}{1} = +\infty$ $\Rightarrow$ niente asintoti obliqui

2) $\int_0^{-\infty} \sqrt[3]{t-1}\,e^t\,dt \underset{s=-t}{=} -\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{-s-1}\,e^{-s}\,ds = +\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{s+1}}{e^s}\,ds$ $\Rightarrow$ confronto con $o\left(\frac{1}{s^2}\right) \to \frac{\sqrt[3]{s+1}}{e^s} \underset{s\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{s^2}\right) \Rightarrow \lim_{s\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{s+1}}{e^s}\cdot\frac{1}{1/s^2} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^2\sqrt[3]{s+1}}{e^s} = 0$ $\Rightarrow$ l'integrale esiste finito

3) $F(x)= \int_1^x \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}$

Dominio: $x\to 0^+$ $\underbrace{\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}} \to e^s\sqrt{\frac{1}{s}+1}\,\sqrt{s} \sim e^s\sqrt{s} \to \text{non integrabile}}_{}$ $\Rightarrow D: (0;+\infty)$

Ci dice anche che $F(x)$ ha as. h. in $x=0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0^+} F(x)= \int_1^0 \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt = -\int_0^1 \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt = +\infty$

↳ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}} = 1$ $\Rightarrow$ una funzione ad andamento costante ha integrale divergente.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = 1$; $\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt - x = \lim_{x\to+\infty}\left[\int_1^x \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\,dt - \int_1^x dt - 1\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\int_1^x\left(\frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}} - 1\right)dt - 1\right]$

↓

Studiamo l'integranda

$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{1/t}\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty} e^{1/t}\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1 \underset{\text{MC LAURIN}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)+1\right] =$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{3}{2t}$ $\to$ la funzione non è integrabile $\Rightarrow \nexists$ as. obl.

$F'(x) = \frac{e^{1/x}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x\in D \Rightarrow$ sempre crescente

Homework: Studia:

$\int_1^x \frac{e^t-1}{\sqrt{t^2(t-1)}}\,dt$, $\int_1^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$

(cuspide in $x=2$) (pari)