Lezione di Analisi 1 del 17 ottobre

SERIE

SERIE: Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, si dice $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serie definita dalla somma di infiniti termini di a_n

S. SOMME PARZ.: Costruisco $s_0 = \sum_{n=0}^{0} a_n$, $s_1 = \sum_{n=0}^{1} a_n$, ..., $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$. $\{S_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ è detta successione delle somme parziali: $S_K \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $K \to \sum a_n$.

Per definizione S_K è una successione. Studiamone il comportamento.

1) Studiamone il limite:
$$\begin{cases} \exists \lim_{K\to+\infty} S_K = l \text{ finito} & \Rightarrow \text{serie CONVERGENTE} \\ \exists \lim_{K\to+\infty} S_K = \infty & \Rightarrow \text{serie DIVERGENTE} \\ \nexists \lim_{K\to+\infty} S_K & \Rightarrow \text{serie IRREGOLARE/OSCILLANTE} \end{cases}$$

EX.:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad a_n = n \Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 1+2, \dots, S_K = \frac{K(K+1)}{2} \Rightarrow S_K : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \; K \mapsto \frac{K(K+1)}{2}$

$\lim_{K\to+\infty} \frac{K(K+1)}{2} = \lim_{K\to+\infty} \frac{K^2+K}{2} = +\infty \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad a_n = q^n \Rightarrow S_K = \frac{1-q^{K+1}}{1-q}$, con $q=1$ $S_K = K+1$

$$\lim_{K\to+\infty} S_K = \begin{cases} |q|<1 & \frac{1}{1-q} \\ |q|>1 & +\infty \\ |q|\le -1 & \nexists l \end{cases}$$
, con. $q=1$ $\lim_{K\to+\infty} S_K = +\infty$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = (1-\cancel{\tfrac{1}{2}}) - (\cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}), S_3 = 1 - \frac{1}{4}, \dots, S_K = 1 - \frac{1}{K+1}$

$\lim_{K\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{K+1}\right) = 1$

SERIE TELESCOPICA: Una serie si dice telescopica se a_n si può scrivere come $a_n = b_n + b_{n+1}$. La successione delle somme parziali scrivere come $S_K = b_0 - b_{n+1}$

C.N. CONVERGENZA: Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, affinché essa sia convergente, è necessario che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE: per ipotesi la serie converge, quindi $\lim_{K\to+\infty} S_K = l$. $S_n = a_0 + \dots + a_n$, $S_{n+1} = a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere, allora, che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1})$. Poiché per ipotesi S_n converge: $\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = s - s = 0$.

OSS.: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE.

SERIE A TERMINI POSITIVI

SERIE A TERMINI POSITIVI: Una serie si dice a termini positivi se $a_n \ge 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esiste anche una serie definitivamente positiva: $a_n \ge 0 \; \forall n > n_0 \; n, n_0 \in \mathbb{N}$

OSS. Una serie a termini positivi non può essere irregolare. Se costruiamo $S_n = S_n + a_{n+1} \ge S_{n-1} \Rightarrow$ La successione delle somme parziali è quindi una successione monotona crescente, quindi esiste sicuramente il limite.

CRITERIO DEL CONFRONTO: Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che $a_n \le b_n \; \forall n \ge \bar{n}$. Allora:

1) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

DIM.: Siano $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$, $T_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ le successioni delle somme parziali di a_n e b_n. Dato che $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow S_k \leq T_k$ $\forall k \geq \bar{n}$.

1) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} T_k = t$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora S_k converge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

2) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$ ma $\lim_{k \to +\infty} S_k \leq \lim_{k \to +\infty} T_k$ per il teorema del confronto per successioni. Allora T_k diverge e, di conseguenza, anche la relativa serie.

EX.: $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Per applicare il criterio bisogna maggiorare o minorare la successione: $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ $\forall n > 3$. Costruiamo $b_n = \frac{1}{n}$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è divergente. Per il criterio del confronto, allora, anch'essa diverge.