14/09

Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0,\varepsilon) = \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \varepsilon\}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A\subseteq\mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall\,\varepsilon>0\ \ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \wedge B(x,\varepsilon)\cap\bar{A}\neq\emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists\,\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subset\bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A\subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A\subseteq\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$ è limitato se $\exists\, x_0\in\mathbb{R}^2,\ \rho>0 : A\subseteq B(x_0,\rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$. Bisogna ora definire quando un insieme è convesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\underline{r} : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$$
$$r(t)\mapsto\begin{bmatrix} r_1(t)\\ \vdots\\ r_n(t)\end{bmatrix}$$
$$t\in I$$

Possiamo ora dire un insieme convesso come:

Preso $A\subseteq\mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r} : [a;b]\to\mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = x$ e $\bar{r}(b) = y$, $r(t)\subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

15/09

Funzioni

Definiamo funzione in più variabili:

$$\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{cases}$$

Abbiamo già visto delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

LIMITI DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Norme

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

$$\| \bar{x} - \bar{x}_0 \| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad | x^i - x_0^i | \to 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ε / δ. Ciò ci permetterà di definire il limite di funzione in più variabili.