9 CIRCUITI VARIABILI

9.1 FASORI

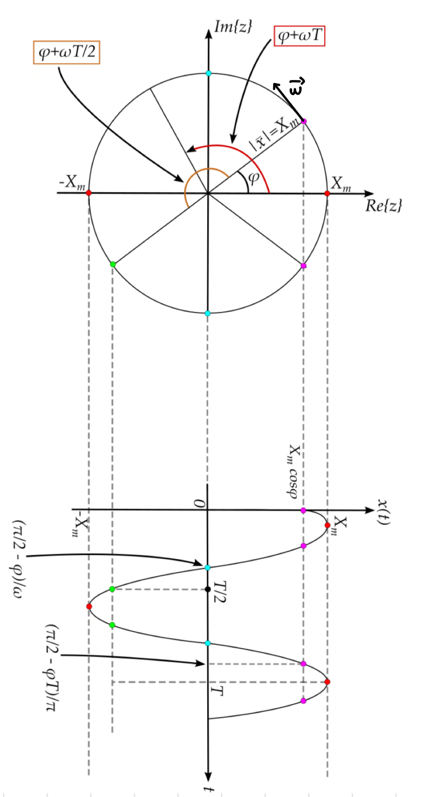
Un fasore è un numero complesso che corrisponde a una determinata $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$. Il numero complesso associato è:

$$\bar{x} = X e^{i\varphi}$$

X → modulo, φ → fase

(ω non è presente perché è fisso).

Ciò si può interpretare graficamente come:



Per tornare dal dominio dei fasori a quello del tempo facciamo:

$$x(t) = \Re\left\{\bar{x}\, e^{i\omega t}\right\} = \Re\left\{X e^{i\varphi} e^{i\omega t}\right\} = \Re\left\{X e^{i(\omega t + \varphi)}\right\} = X\,\Re\left\{\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right\} = X\cos(\omega t + \varphi)$$

9.2 PROPRIETÀ DEI FASORI

1) **UNICITÀ:** date due sinusoidi, esse sono uguali solo se i due fasori coincidono (NB: la pulsazione è costante)

2) **LINEARITÀ:** se $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ allora $\bar{x} = \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2$

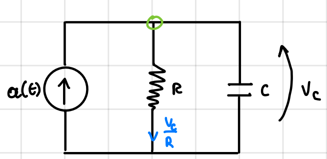
3) **DERIVAZIONE:** se $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ e $y = \frac{d}{dt}x(t)$, allora $\bar{y} = i\omega\bar{x}$

DIM: $y(t) = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \bar{y} = \omega X e^{i\varphi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega\bar{x}$

9.3 METODO DEI FASORI

Consideriamo un circuito costituito da N-terminali lineari al più dinamici e sorgenti impressive sinusoidali a pulsazione fissa. Principalmente sostituiamo le $v(t)$ e $i(t)$ con i corrispondenti fasori riducendo il circuito dinamico reale ad un circuito adinamico complesso

ESERCIZIO



$a(t) = A\cos\omega t$

$a(t) = \frac{V_c}{R} + C\frac{dV_c}{dt}$

$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{1}{RC}V_c + \frac{a(t)}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$V_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + V_{c,IP}(t)$$

Passiamo al dominio dei fasori:

$V_{c,IP}(t) \leftrightarrow \bar{V}_{c,IP} \rightarrow i\omega\bar{V}_{c,IP} = -\frac{1}{RC}\bar{V}_{c,IP} + \frac{A}{C} \rightarrow (1 + i\omega RC)\bar{V}_{c,IP} = RA \rightarrow \bar{V}_{c,IP} = \frac{RA}{1 + i\omega RC} = \frac{RA(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$

$a(t) \leftrightarrow \bar{a} = A$

Torniamo al dominio del tempo: $V_{c,IP}(t) = Re\left\{\frac{RA}{1+(\omega RC)^2}(1-i\omega RC)e^{i\omega t}\right\} = \frac{RA}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t)\right]$

Per ricavare la risposta forzata di un circuito in regime sinusoidale non bisogna necessariamente passare per l'equazione di stato. Possiamo risolvere il circuito direttamente nel dominio dei fasori. Ciò è possibile perchè le leggi di Kirchhoff valgono e le equazioni dei componenti visti fino ad oggi si tramutano così:

COMPONENTE	D. TEMPO	D. FASORI
C.C.	$V(t)=0$	$\bar{V}=0$
C.A	$i(t)=0$	$\bar{I}=0$
G. IND. V	$v(t)=E\cos(\omega t+\varphi)$	$\bar{V}=Ee^{j\varphi}$
G. IND. C	$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$	$\bar{a}=Ae^{j\varphi}$
RES.	$V(t)=Ri(t)$	$\bar{V}=R\bar{I}$
G. PIL.	$\begin{cases} V_1(t)=r\,i_2(t) \\ V_2(t)=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{V}_1=r\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2=0 \end{cases}$
TRASFERITORE IDEALE	$\begin{cases} V_1(t)=n\,V_2(t) \\ i_1(t)=-\frac{1}{n}i_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{V}_1=n\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1=-\frac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$
COND.	$i(t)=C\frac{dV_C}{dt}$	$\bar{I}=j\omega C\bar{V}$
SINUS.	$V(t)=L\frac{di_L}{dt}$	$\bar{V}=j\omega L\bar{I}$

9.4 IMPEDENZA E AMMETTENZA DI BIPOLI

L'impedenza e l'ammettenza sono l'estensione in regime sinusoidale di resistenza e conduttanza:

$V=Ri \rightarrow R=\frac{V}{i} \Rightarrow Z(j\omega)=\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ $[\Omega]$, esiste se ammette base corrente

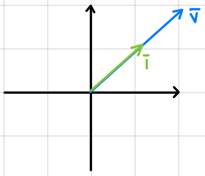
$G=R^{-1} \Rightarrow Y(j\omega)=Z(j\omega)^{-1}=\frac{\bar{I}}{\bar{V}}$ $[S]$, esiste se ammette base tensione

X e Y non sono fasori ma sono numeri complessi. Essendo numeri complessi possiamo esprimerli in forma algebrica:

$Z(j\omega)=R(\omega)+\underbrace{jX(\omega)}_{\text{reattanza}}$ $\qquad$ $Y(j\omega)=G(\omega)+\underbrace{jB(\omega)}_{\text{suscettanza}}$

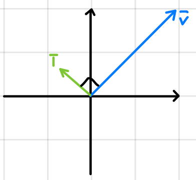
Studiando l'impedenza nel piano di Gauss possiamo notare che esse possono introdurre sfasamenti:

- RESISTORE: $R=Z$



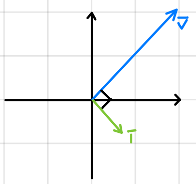
$\Rightarrow$ non introduce sfasamento

- CONDENSATORE: $Z=-\frac{j}{\omega C}=\frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$



$\Rightarrow$ sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ (corrente in anticipo)

- INDUTTORE: $Z=j\omega L=\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$



$\Rightarrow$ sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ (corrente in ritardo).

Possiamo classificare z in base alla sua reattanza:

- CAPACITIVO: $X(\omega) < 0$ (porterà la corrente in ritardo)
- RESISTIVO: $X(\omega) = 0$ (non sfasa)
- INDUTTIVO: $X(\omega) > 0$ (porterà la corrente in anticipo)