

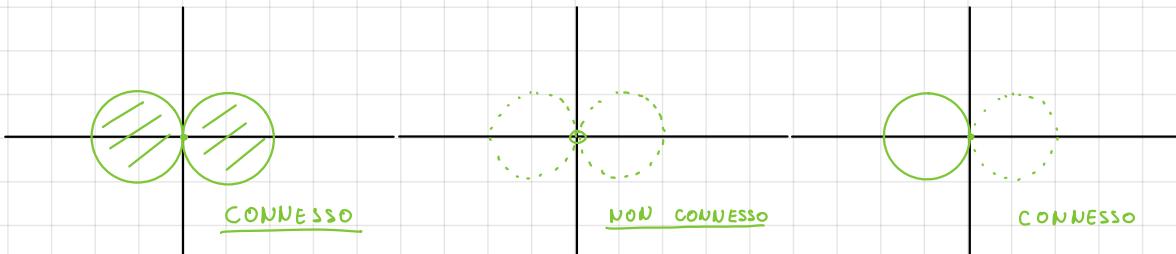
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \vee (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$B = \left\{ " " " < " " < \right\}$$

$$C = \left\{ " " " \leq " " < \right\}$$



Nota bene: nessuno degli insiemini è chiuso.

2) Dato $C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

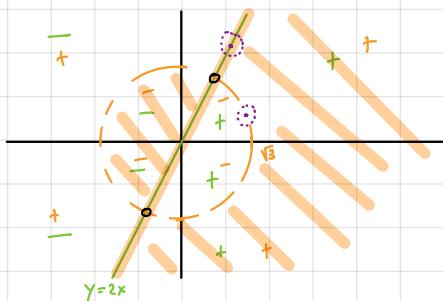
Ogni C_n è una circonferenza con raggio crescente $R \rightarrow 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ viene uguale a $C_{\infty} = \left\{ " : x^2 + y^2 \leq 2 \right\}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'esso chiuso.

Proprietà è scrivibili come:

- 1) Unione infiniti aperti è aperto
- 2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

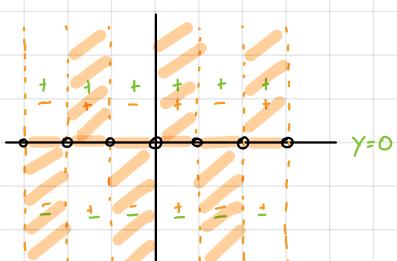
3) Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x, y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso ($\partial D \not\subseteq D$), illimitato, scorrenso per archi
- $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 - 4} \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 4 \rightarrow$ fuori dell'ellisse di semiassi $a=2, b=\sqrt{2} \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso, illimitato, scorrenso per archi.
- $f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{2x-y}{x^2 + y^2 - 3}} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 2x \\ x^2 + y^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow D$ è aperto, non chiuso, illimitato, scorrenso per archi.



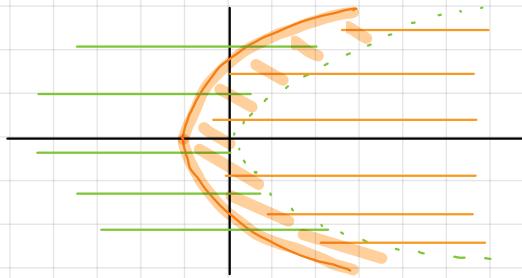
L'insieme non è aperto ($\exists D \subset D$), non è chiuso ($\exists D \not\subseteq D$), illimitato, scorrenso per archi

- $f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



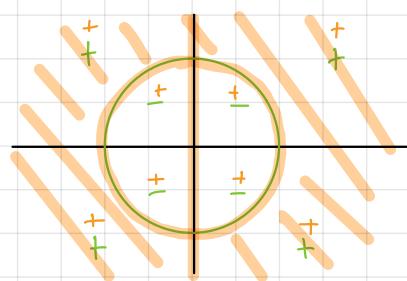
Né aperto né chiuso, illimitato, scorrenso per archi

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{-\ln(y^2 - x)} \Rightarrow \begin{cases} -\ln(y^2 - x) \geq 0 \rightarrow \ln(y^2 - x) \leq \ln 1 \rightarrow y^2 - x \leq 1 \rightarrow \\ x < y^2 \end{cases}$$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot (x^2 + y^2 - 4)} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$



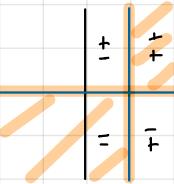
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

$$\bullet f(x, y) = \sqrt{xy - y + 1}$$

$$D: xy - y + 1 \geq 0 \rightarrow y(x-1) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

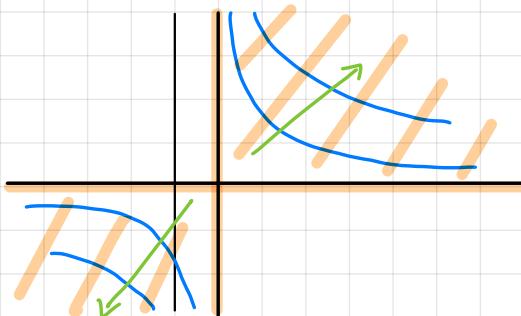
O ± sempre positiva sevea zeri in D

$$\text{LIVELLI } \sqrt{xy - y + 1} = c \quad \text{se } c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$\text{se } c < 1 \quad E_c = \emptyset$$

$$\text{se } c \geq 1 \quad \rightarrow xy - y = c(c-1)^2 \Rightarrow y = \frac{(c-1)^2}{x-1} \quad \text{per } x \neq 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow c = 1 \rightarrow y(c-1) = 0$$



$$\bullet f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$D: x^2 + y^2 > 0 \quad (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

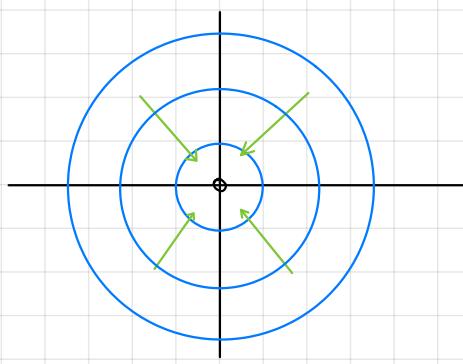
± funzione sempre positiva

O non ci sono zeri

$$\text{LIVELLI } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$$

$$c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$$

$$c > 0 \quad \frac{1}{x^2 + y^2} = c^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$



$$f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$$

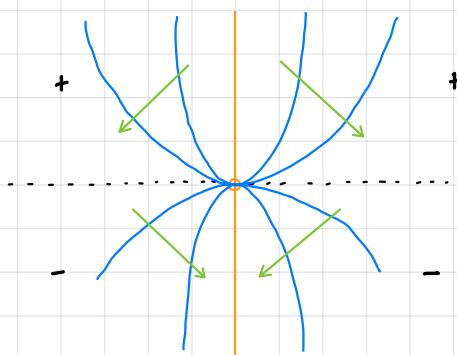
D $D = \mathbb{R}, \{y=0\}$

O $e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = 0 \quad x=0$

\pm $e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \rightarrow \frac{x^2}{y} > 0 \quad y > 0$

LIVELLI $e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \quad c \leq -1 \quad E_c = \emptyset$

$c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \rightarrow \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{se } c=0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



2) Trova gli zeri di $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4$ ($D = \mathbb{R}$)

$$y^2 = 8x^2 - x^4 \rightarrow y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}; \quad \text{fatto} \quad y = \sqrt{8x^2 - x^4}; \quad \text{l'altra è simmetrica}$$

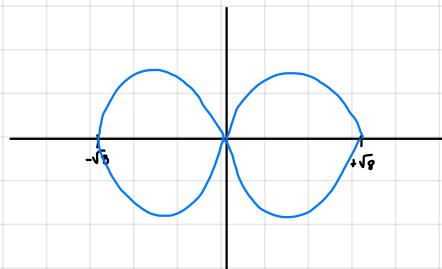
$$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

PARI, $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y=0 \text{ se } x=0, x=\pm\sqrt{8}$

$$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \geq 0 \iff 4x(4 - x^2) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} -\sqrt{8} & -2 & 0 & 2 & \sqrt{8} \\ \hline & & & & & & \end{array}$$



28/03/20

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3y + y^3}{x^4 + y^2}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} \not\rightarrow \text{Il limite non esiste}$

2) Calcola il dominio e verifica la continuità di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^2$$

f è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$. In $(x,y) = (0,0)$ abbiamo:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} f(x,y) =$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^6} = 0$

restringo $x=0$: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0$
 restringo $y=mx$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^4}{x^6 + m^2 x^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^2}{x^4 + m^2} = 0$
 restringo $y=x^3$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \frac{1}{2}$

\hookrightarrow poiché $\frac{1}{2} \neq 0$, il limite non esiste \Rightarrow la funzione non è continua in $(0,0)$

3) Calcola se esiste:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3}{x^2 + y^4} = \dots = 0$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
 restringo $x=0$: $\lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$
 restringo $x=y^2$: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{2y^4} = 0$

Sappiamo che il limite esiste, allora $|f(x,y)-0| < \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$)
 Ma: $\left| \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{|x|(|x^2| + |y^4|)}{x^2 + y^4}$. Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} |x|=0$, il limite esiste e vale 0.

4)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$$

restrizione $x=0$: $\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{0}{y^2}} = 1$
 , $y=x$: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} = e^{-1}$ } \exists limite

5)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}{x^2}$$

siccome $0 < e^{-\frac{x^2}{y^2}} \leq 1$, il limite esisterà e sarà 0.

6) Calcola $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^4}$, per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste e quanto vale

polari: $\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^\alpha \cos^2 \theta p^3 \sin \theta}{p^{2\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0^+} p^{5-2\alpha} \cos \theta \sin \theta$

$p^{5-2\alpha}$ per $p \rightarrow 0^+$ $\begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } 5-2\alpha > 0 \\ = 1 & \text{se } \alpha = \frac{5}{2} \\ \rightarrow +\infty & \text{se } 5-2\alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists & \alpha < \frac{5}{2} & l=0 \\ \exists & \alpha > \frac{5}{2} & \nexists l \end{cases}$

7) Calcola il limite se esiste:

$$\lim_{x,y \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2 - y^2}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$
 polari: $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-p^2} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$ il limite esiste e vale 0

8)

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} e^{-x^3 - y^3}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^3} = \begin{cases} 0^+ & x \rightarrow -\infty \\ +\infty & x \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists$ limite

9)

$$\lim_{x,y \rightarrow 2,-1} \frac{(y^2 - x^2 + 3)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

restringo $x=2$: $\lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y^2 - 4 + 3)^2}{(y+1)^2} = \dots = 4$
 polari: $\begin{cases} x = 2 + p \cos \theta \\ y = -1 + p \sin \theta \end{cases} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \frac{[(-1 + p \sin \theta)^2 - (2 + p \cos \theta)^2 + 3]^2}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{[-2p \sin \theta - 4p \cos \theta + p^2 \sin^2 \theta - p^2 \cos^2 \theta]^2}{p^2}$
 $= \lim_{p \rightarrow 0} [-2 \sin \theta - 4 \cos \theta + p \sin^2 \theta - p \cos^2 \theta]^2 = [-2 \sin \theta - 4 \cos \theta]^2 \rightarrow$ dipende da θ e quindi $\nexists l$

10) Dato $f(x,y) = e^{3x+y^2}$, calcolare $\nabla f(0,0)$ e calcolare $D_{\bar{v}} f(3,-2)$ dato $\bar{v} = [2, -1]^T$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3h} - 1}{h} = 3 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h} = 0 \end{array} \right\} \nabla f(0,0) = [3, 0]$$

Normalizziamo \bar{v} : $\bar{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2\sqrt{5} \\ 1\sqrt{5} \end{smallmatrix} \right]$. Ottengo che $D_{\bar{v}} f(3,-2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, -2+t\frac{1\sqrt{5}}{\sqrt{5}}) - f(3,-2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{3(3+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}) + (-2+\frac{1\sqrt{5}}{\sqrt{5}})^2} - e^3}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{13 + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}t^2} - e^{13}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{13}(e^{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}t^2} - 1)}{t} = e^{13} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}t + \frac{1}{5}t^2}{t} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{13}$$

11) Calcolare, se esiste, $\nabla f(0,0)$ con $f(x,y) = y^{-1}x^1y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0-1h+0)-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-0h^2)-0}{h} = 1 \end{array} \right\} \nabla f(0,0) = [0, 1]$$

12) Calcola $\nabla f(x,y)$ data $y \sin^2(x^2-y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= y^2 \sin(x^2-y) \cos(x^2-y)(2x+0) = 4xy \sin(x^2-y) \cos(x^2-y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= 1 \cdot \sin(x^2-y) + y^2 \sin(x^2-y) \cos(x^2-y)(-1) = \sin(x^2-y)[1-2y \cos(x^2-y)] \end{aligned}$$

13) Calcola $\nabla f(x,y)$ data

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{3x^2y(x^6+y^2) - x^3y \cdot 6x^5}{(x^6+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x^3(x^6+y^2) - x^3y^2y}{(x^6+y^2)^2} \end{array} \right\}$$

Entrambe le derivate non esistono in $(0,0)$. Per calcolare $\nabla f(0,0)$ bisogna usare la definizione ($\nabla f(0,0)$ esiste perché $f \in C$)

\hookrightarrow Le regole di derivazione non sono sempre valide per le funzioni definite a bratti (in questo caso non valgono per $(x,y) = (0,0)$)

14) Calcola $\nabla f(x,y)$ con $f(x,y) = y^x$ (definita per $y > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= y^x \ln y \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x y^{x-1} \end{aligned}$$

5/10/20

1) $f(x,y) = e^{3x+y^2}$; calcola $D_{\bar{v}} f(3,-2)$, $\bar{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= [3e^{3x+y^2}; 2ye^{3x+y^2}] \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } \mathbb{R}^2 \\ D_{\bar{v}} f(3,-2) &= \nabla f(3,-2) \cdot \bar{v} = \dots = 2e^9/\sqrt{5} \quad (\text{formula del gradiente}) \end{aligned}$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \forall (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Trovare α per continuazione; per tale α , capire se derivabile in $(0,0)$;

l'equazione del piano tangente al grafico in $(-1,0, f(-1,0))$

11) $D = \mathbb{R}^2$, f sicuramente continua in $(x,y) \neq (0,0)$

$$\text{in } (0,0) \quad \lim_{x,y \rightarrow 0,0} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\arctan(\frac{t}{n}) - \frac{\pi}{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} -\frac{\arctan(t^2)}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} -\frac{t^2}{n} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow 0, \arctan(t) + \arctan(\frac{t}{n}) \cdot \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \dots = 0 \end{aligned} \right\} \nabla f(0,0) = 0$$

$$3) f(-1,0) = \frac{\pi}{4}$$

dominio: $\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \cdot 2[-(x^2+y^2)^2 \cdot x] \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \cdot 2[-(x^2+y^2)^2 \cdot y] \end{aligned} \right\}$ in $(-1,0)$ $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R})$ quindi è differenziabile

$$\nabla f(-1,0) = \dots = [1; 0] \Rightarrow \nabla: z = \frac{\pi}{4} + 1(x+1) + 0(y-0) = \frac{\pi}{4} + (x+1)$$

$\hookrightarrow f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y-y_0)$

3) $f(x,y) = 2ye^{x^2}$; scrivere la retta tangente alla curva di livello di f per $(0,1)$ (f differenziabile in \mathbb{R}^2)

$$f(0,1) = \dots = 2 \Rightarrow c=2 \Rightarrow 2ye^{x^2} = 2 \Rightarrow y = e^{-x^2} \Rightarrow$$

uso analisi 1

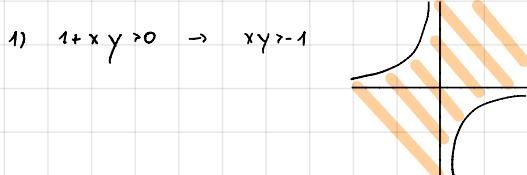
2° modo: Curva di livello $\perp \nabla f(0,1) \rightarrow \nabla f(0,1) = \dots = [0,2] \Rightarrow m=0 \rightarrow r: y=1$

4) $f(x,y) = \frac{\ln(y-2x)}{y^2+x}$ scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello per $(-2,-3)$

$$f(-2,-3) = 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left[\frac{\frac{1}{y-2x} \cdot (-2)(y^2+x) - 1 \cdot \ln(y-2x)}{(y^2+x)^2}, -\frac{1}{y-2x} \cdot 1(y^2+x) - 2y \cdot \ln(y-2x)}{(y^2+x)^2} \right] \Rightarrow \nabla f(-2,-3) = [-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}]$$

Trovò direzione $v \perp \nabla f(-2,-3) \rightarrow -\frac{2}{7}v_x + \frac{1}{7}v_y = 0 \rightarrow v_x = 2v_y \rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow m=2 \Rightarrow r: y = -3 + 2(x+2)$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Trova: dominio; continuità; per quali x esiste $D_y f(0,0)$; se f è differenziabile in $(0,0)$



1) $1+xy > 0 \rightarrow xy > -1$

restringo a $y=0: \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$
restringo a $y=x: \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow f$ non è continua in $(0,0)$

$$2) f è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$; $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$$$

restringo a $y=0: \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$
restringo a $y=x: \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$

\hookrightarrow esistono 4 derivate direzionali: $d=0, \alpha=\frac{\pi}{2}, \alpha=\pi, \alpha=\frac{3}{2}\pi$

3) f non è differenziabile in $(0,0)$ perché f non è continua

6) $f(x,y) = \sqrt[3]{y} \cdot x$ Trova se: f è derivabile in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue; f è differenziabile in $(0,0)$

$$1) f \text{ continua in } \mathbb{R}^2 \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \sqrt[3]{y} \cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow \text{uso la def in } (0,0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ derivabile}$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y} \quad \text{continua in } (0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

restringo a $y = \sqrt[3]{y^2}: \lim_{y \rightarrow 0} \dots = \frac{1}{3} \neq 0 \quad (\frac{\partial}{\partial y} f(x,y))$

3) Usiamo la definizione $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)(x-0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{\sqrt[3]{y^2} \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$$\hookrightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{p \cos \theta} \cdot p \cos \theta}{p} = 0$$

$\hookrightarrow f$ differenziabile in $(0,0)$ anche se le derivate non sono continue

7) $f(x,y) = xy \ln|x-y|$ da' i continue, derivabile, differenziabile

continua in \mathbb{R}^2

se $x < y \rightarrow f(x,y) = xy^2 - x^2y \Rightarrow \nabla f(x,y) = [y^2 - 2xy; 2xy - x^2] \Rightarrow$ differenziabile

se $x > y \rightarrow \dots$ (analogia a square) ... differenziabile

se $y = x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0+t)y_0 \ln|x_0+t-y_0|}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 \ln h}{h} \rightarrow \begin{cases} \text{se } x_0 \neq 0 \quad \exists \frac{\partial}{\partial x} \\ \text{se } x_0 = 0 \quad \exists \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \text{si verifica } \nabla f(0,0) = [0,0]$

È differenziabile in $(0,0)$? $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{xy \ln|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow = 0 \Rightarrow$ differenziabile

$$\hookrightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^2 \cos \theta \ln |p \cos \theta - p \sin \theta|}{p} = 0$$

8) $f(x,y) = xy^2 - y^3 - 2x^2$, $g(t) = (1-t^2, t)$. Della $h(t) = (f \circ g)(t)$, calcola $h'(1)$

g è differenziabile in $t=1$, f è differenziabile in $g(t_0)$

$$\hookrightarrow h'(1) = \nabla f(g(1)) \cdot g'(1) = [1, -3] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -5$$

$$g'(1) = \dots = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad g(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \nabla f(x,y) = [y^2 + 4x; 2xy - 3y^2]; \quad \nabla f(0,1) = [1; -3]$$

9) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x+y^2, e^x + 2y)$; $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $g(u,v) = [\log(u^2+1), u-v^2, \cos u \sin v]$.
Della $h = g \circ f$, trovare $J_h(0,0)$

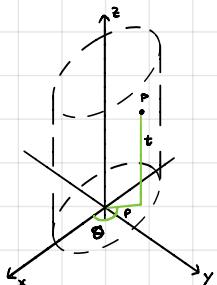
f differenziabile in $(0,0)$ e $f(0,0) = (0,1)$. g è differenziabile in $f(0,0)$.

$$\hookrightarrow J_h(0,0) = J_g(0,0) \cdot J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \\ \cos 0 \sin 0 \end{bmatrix}$$

$$J_f(x,y) : \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ e^x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v) : \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u^2+1} 2u & 0 \\ 1 & -2v \\ -\sin u \cos v & \cos u \cos v \end{bmatrix} \Rightarrow J_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

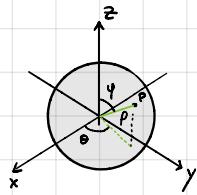
10)



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \Rightarrow [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow f(\rho, \theta, t) = (x(\rho, \theta, t), y(\rho, \theta, t), z(\rho, \theta, t)) \\ z = t \end{cases}$$

$$J_f(\rho, \theta, t) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |J_f(\rho, \theta, t)| = \dots = \rho$$

11)

 ρ : distanza da $(0,0)$ θ : sul piano xy φ : misurato rispetto a $z \geq 0$

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\Rightarrow [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi] \rightarrow f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi))$$

$$\mathcal{J}f(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix} \rightarrow |\mathcal{J}f(\rho, \theta, \varphi)| = \dots = -\rho^2 \sin \varphi$$

12/10/20

- 1) $f(x, y) = \log(x^3 - y)$, $(x_0, y_0) = (-1, -2)$. Trova: a) differenziale secondo in x_0 b) polinomio di Taylor di 2° ord in x_0 c) formula di Taylor di 2° ord in x_0

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{3x^2}{x^3 - y}; -\frac{1}{x^3 - y} \right]$$

$$\hookrightarrow \nabla f(x_0) = [1; -1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \frac{6x(x^3 - y) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 - y)^2} = \frac{-3x^4 - 6xy}{(x^3 - y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0) = -15 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f &= -[-(x^3 - y)^{-2}] 3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3 - y)^3} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0) = 3 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= -\frac{1}{(x^3 - y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0) = -1 \end{aligned}$$

$$a) d^2 f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0)(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0)(y-y_0)^2 = -15(x+1)^2 + 6(x+1)(y+2) - 1(y+2)^2$$

$$b) P_2(x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$$

$$c) f(x, y) = P_2(x_0) + O(\|x_0\|^3)$$

- 2) $f(x, y) = x e^{-x^2-y^2}$, studia differenzialità, simmetrie; determina estremi

$$D = \mathbb{R}^2, \text{ funzione differenziabile (derivate continue)}: \frac{\partial}{\partial x} f = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\hookrightarrow f \in C^1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = -2xye^{-x^2-y^2}$$

$$\text{SIMMETRIE: } f(-x, y) = -xe^{-x^2-y^2} = -f(x, y) \rightarrow \text{dispari in } x$$

$$f(x, -y) = xe^{-x^2-y^2} = f(x, y) \rightarrow \text{pari in } y \quad (\text{simmetria rispetto a } xz)$$

ESTREMI: da cercare nei punti stazionari:

$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Classifico usando la mat. Hessiana: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = -4xe^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = (1-2x^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -2xe^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

 $\Rightarrow A$ minimo \Rightarrow per la disparità B è massimo

Non ci sono altri estremi. Poiché $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, si può concludere che gli estremi sono anche globali.

- 3) $f(x, y) = x^4 + y^2$; determina gli estremi

$$D = \mathbb{R}^2, f \in C^1, f \in C^2$$

$$\nabla f(x, y) = [4x^3; 2y] \rightarrow \text{sol} [0, 0] \Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow ???$$

$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow [0, 0]$ è minimo assoluto

4) $f(x,y) = \begin{cases} y \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$; studia continuità, derivabilità e estremi

$D = \mathbb{R}^2$, continua per $x_0 \neq 0$

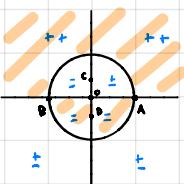
$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} y \log(x^2+y^2) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \Rightarrow \text{gli estremi sono da ricercare fra i punti di non derivabilità}$$

$\hookrightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} p \log(p^2) = 0$

$$\text{se } x \neq 0: \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \log(y^2) + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \log(x^2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

fruttiamo il segno:



$$A(1,0) \quad C(0,\sqrt{e}) \Rightarrow A,B: \text{rella}$$

$$B(-1,0) \quad D(0,-\sqrt{e}) \Rightarrow C: \text{minimo almeno relativo}$$

$$D: \text{massimo almeno relativo}$$

poiché $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$, gli estremi sono pur forza relativi

13/10/20

- 1) $f(x,y) = x^2 - y^2$; estremi in: 1) D 2) $y = 1 - 2x$ 3) segmento di estremi $(0,1) - (2,-3)$ 4) $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$
 5) $x^2 + y^2 = 4$

1) Dominio \mathbb{R}^2 ; C^∞ . Unico punto critico è $(0,0)$ ed è una sella.

2) La sella è un vincolo di uguaglianza esprimibile.

$$f|_n = f(x, 1-2x) = x^2 - (1-2x)^2 = -3x^2 + 4x - 1 \rightarrow f'|_n = -6x + 4 \rightarrow \text{Max assoluto in } (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

3) Scriviamo l'equazione della sella passante per i due punti: $n: y = 1 - 2x$. Studiamo poi cosa succede per $x \in [0,2]$
 $f|_n = -6x + 4$

\hookrightarrow abbiamo un max assoluto in $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ e due candidati a minimo.

$$f(0,1) = -1; \quad f(2,-3) = -5 \Rightarrow (2,-3) \text{ è un punto di minimo assoluto e } (0,1) \text{ è minimo relativo}$$

4) Ω è il prodotto cartesiano fra due intervalli: abbiamo definito un quadrato. All'interno del quadrato scriviamo due 1) due abbiamo una sella in $(0,0)$.

Per studiare il bordo parametrizziamo i segmenti. Poiché la funzione è pari in x e y , studiamo due lati:

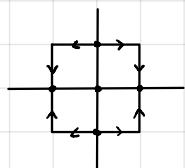
$$- \gamma_1 = \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_1} = f(1,t) = 1-t^2 \rightarrow f'|_{\gamma_1} = -2t \geq 0 \text{ per } t \leq 0$$

\hookrightarrow

$$- \gamma_2 = \begin{cases} y=1 \\ x=t \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_2} = f(t,1) = t^2 - 1 \rightarrow f'|_{\gamma_2} = 2t \geq 0 \text{ per } t \geq 0$$

\hookrightarrow

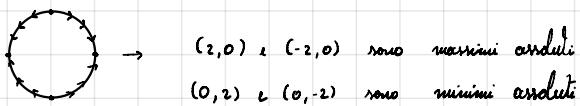
Per simmetria vale anche per i segmenti rimanenti.



$(0,1) \text{ e } (0,-1)$ candidati minimi: $f(0,1) = f(0,-1) = -1$

$(1,0) \text{ e } (-1,0)$ candidati massimi: $f(1,0) = f(-1,0) = 1$

5) $\mathcal{C} = \begin{cases} x = 2 \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = 2 \sin \theta & \end{cases}$ $f|_{\mathcal{C}} = 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta = 4 \cos(2\theta) \rightarrow f'|_{\mathcal{C}} = -4 \sin(2\theta) \cdot 2 \geq 0$ per $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \theta \leq \pi + k\pi$



2) $f(x,y) = |y|(x-y-2)$ determina gli estremi in 1) D 2) triangolo T (bordo e area) che s: $y = -x-2$ forma con gli assi.

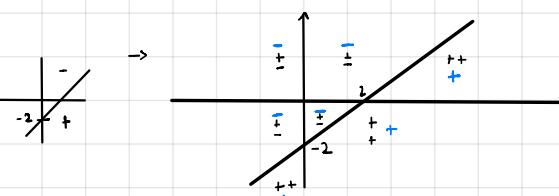
1) $D = \mathbb{R}^2$; non è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ i punti di non derivabilità ($y=0$) possono essere massimi o minimi.

$$\text{se } y > 0 \quad f(x,y) = xy - y^2 - 2y \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{se } y = 0, \text{ non calcolabile}$$

analogo per $y < 0$. Non esistono punti critici.

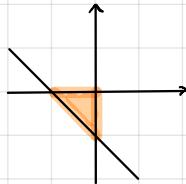
Studiamo il segno: $|y| > 0$

$$x-y-2 \geq 0 \rightarrow y \leq x-2$$



$$\begin{cases} \text{se } x < 2 \text{ max relativo} \\ \text{se } x > 2 \text{ min relativo} \end{cases}$$

2) vincolo:



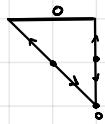
Vale Weierstrass. In 1) abbiamo capito che nell'area non ci sono estremi.

Studiamo il bordo. Per quanto già visto, $H=0$ assume lungo l'asse x in $(0, -2)$. Studiamo gli altri lati.

$$\text{se } y_1 = \begin{cases} y = 0 \\ y = t \quad -2 \leq t \leq 0 \end{cases} \rightarrow f|_{y_1} = f(t, 0) = |t|(-t-2) \stackrel{t \leq 0}{=} t^2 + 2t \rightarrow f'|_{y_1} = 2t + 2 \geq 0 \quad \text{per } t \geq -1$$

$$\text{se } y_2 = \begin{cases} y = t \quad -2 \leq t \leq 0 \\ y = -2-t \end{cases} \rightarrow f|_{y_2} = f(t, -2-t) = -1 \cdot t \cdot (-2-t-2) \stackrel{t \leq 0}{=} t^2 + 4t \rightarrow f'|_{y_2} = 4t + 4 \geq 0 \quad \text{per } t \geq -1$$

Studiando il tutto,



$(-1, -1) \in (0, -1)$ candidati a minimo: $f(-1, -1) = -2$; $f(0, -1) = -1 \Rightarrow (-1, -1)$ è min assoluto
 $(0, -1)$ è min relativo

3) $f(x,y) = xy + 4$; determinare i massimi assoluti sull'ellisse $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$

Non riusco a parametrizzare l'ellisse. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange:

1) verifichiamo l'ipotesi: $\nabla g = [2x-y, 2y-x] = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0$ ma $g(0, 0) \neq 0$, quindi le ipotesi sono soddisfatte

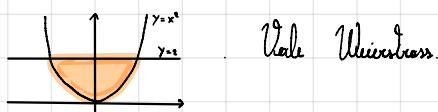
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f - \lambda \frac{\partial}{\partial y} g = 0 \\ g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - \lambda(2x-y) = 0 \\ x - \lambda(2y-x) = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow (y-x) + 2\lambda(y-x) + \lambda(y-x) = 0 \rightarrow (y-x)(1+3\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} y = x \\ x - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow (1, 1, 1); (-1, -1, 1) \rightarrow \begin{cases} f(1, 1) = 5 \rightarrow \text{massimo assoluto} \\ f(-1, -1) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = 0 \rightarrow y = -x \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \rightarrow \text{minimo assoluto} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \end{cases}$$

4) $f(x, y) = (x-1)^2 + y$; estremi assoluti in $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

d'insieme E equivale a:



Nelle vicinanze.

Studiamo l'interno: $\nabla f = [2(x-1), 1] \neq 0 \quad \forall (x, y)$

Studiamo il bordo:

$$\begin{aligned} - \gamma_1: & \begin{cases} y=2 \\ x=t \end{cases} \quad \rightarrow \quad f|_{\gamma_1} = f(t, 2) = (t-1)^2 + 2 \rightarrow f'|_{\gamma_1} = 2(t-1) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \\ - P: & \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f|_P = f(t, t^2) = (t-1)^2 \rightarrow f'|_P = 2t - 2 + 2t = 4t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$(-\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, 2) \text{ max}$
 $(1, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \text{ min}$

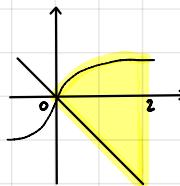
E seguendo le sostituzioni ottenute da $(-\sqrt{2}, 2)$ è max assoluto e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ è minimo assoluto.

26/10/20

1) Cambiare l'ordine di integrazione: $\int_0^2 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$

Ottieniamo $E = \{0 \leq x \leq 2, -2x \leq y \leq \sqrt{x}\}$

↳ y-semplice

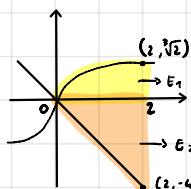


Cambiare l'ordine di integrazione prende una riparametrizzazione x-semplice:

$$E = E_1 \cup E_2$$

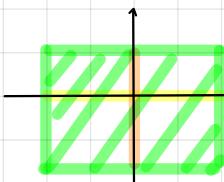
$$\hookrightarrow E_1: 0 \leq y \leq \sqrt{2} \quad y^2 \leq x \leq 2$$

$$\hookrightarrow E_2: -4 \leq y \leq 0 \quad -\frac{1}{2}y^2 \leq x \leq 2$$



$$\text{Poniamo quindi scrivere } \iint_E f(x, y) = \iint_{E_1} f(x, y) + \iint_{E_2} f(x, y) \Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{y^2}^2 f(x, y) dx \right] dy + \int_{-4}^0 \left[\int_{-\frac{1}{2}y^2}^2 f(x, y) dx \right] dy$$

2) Calcola $\iint_E \frac{\sin x}{1+y^2} dx dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \wedge -\frac{3}{2} \leq y \leq 1\}$

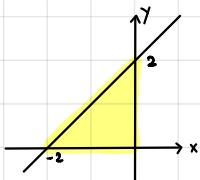


$$\rightarrow \text{da x che y semplice.} \Rightarrow \int_{-2}^2 \int \frac{\sin x}{1+y^2} dx dy = \int_{-2}^2 \sin x \left(\int_{-3/2}^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) dx = \int_{-2}^2 \sin x dx \int_{-3/2}^1 \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$\text{Calcolando ottieniamo } \int_{-2}^2 \frac{1}{1+y^2} dy [-\cos x]_{-2}^2 = 0$$

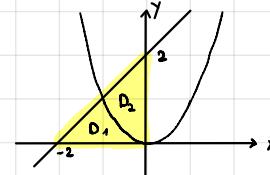
↳ Potevamo capire da disegno in x+ intervallo rimanente a (0, 0, 0)

3) Calcola $\iint_D |x^2 - y| dx dy$ con D triangolo formato a $y = x+2$ e gli assi



Distinguiamo i casi:

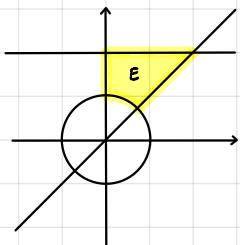
$$\begin{cases} x^2 - y & \text{se } x^2 - y \geq 0 \quad y \leq x^2 \\ -x^2 + y & \text{se } x^2 - y < 0 \quad y > x^2 \end{cases}$$



Quindi dobbiamo calcolare $\iint_{D_1} (x^2 - y) dx dy + \iint_{D_2} (-x^2 + y) dx dy$:

$$\begin{aligned} D_1: & \quad 0 \leq y \leq 1 \quad y-2 \leq x \leq -\sqrt{y} \\ D_2: & \quad -1 \leq x \leq 0 \quad x^2 \leq y \leq 2+x \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_{y-2}^{-\sqrt{y}} (x^2 - y) dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[\int_{x^2}^{2+x} (-x^2 + y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - yx \right]_{y-2}^{-\sqrt{y}} dy + \int_{-1}^0 \left[-x^2 y + \frac{y^2}{2} \right] dx = \dots \\ & = \int_0^1 \left[-\frac{x\sqrt{y}}{3} + y\sqrt{y} - \frac{(y-2)^3}{3} + y(y-2) \right] dy + \int_{-1}^0 \left[-x^2(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} + x^4 - \frac{x^6}{2} \right] dx = \dots \end{aligned}$$

4) $\iint_E \frac{2x}{1+y^2} dx dy$, E insieme di cui bordo i la retta $y=x$, la retta $y=2$, l'asse y e la circonferenza $x^2+y^2=1$



$$E = \{(x,y) : x \geq 0; x^2 + y^2 \geq 1; y \geq x; y \leq 2\}$$

In E la funzione è continua e limitata. Trovare $f(x,y) \geq 0$ in E.

Calcoliamo $f(x,y) dx dy$ in polari: $\frac{2\rho \cos \theta}{1+\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$.

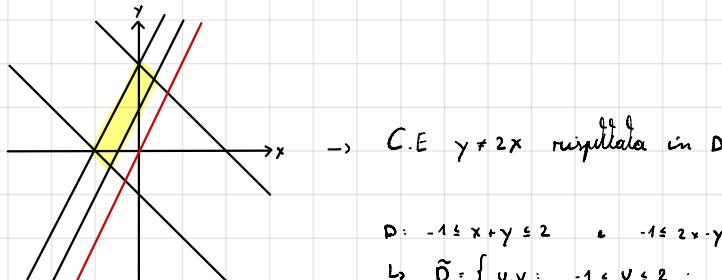
$$\text{Calcoliamo } E \text{ in polari: } E = \{\rho \cos \theta \geq 0; \rho^2 \geq 1; \rho \sin \theta \geq \rho \cos \theta; \rho \sin \theta \leq 2\}$$

$$\begin{cases} \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq \cos \theta \\ \rho \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \rho \leq \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\hookrightarrow E = \{(\rho, \theta) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin \theta}\}$$

Calcoliamo l'integrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sin \theta}} 2 \cos \theta \rho d\rho = \dots = \frac{9}{2} \sqrt{2} - 5$

5) $\iint_D \frac{x+y}{2x-y} dx dy$ $D = \{(x,y) : -1-x \leq y \leq 2-x, 2x+1 \leq y \leq 2x+2\}$



$$D: -1-x \leq y \leq 2-x \quad \& \quad -1 \leq 2x-y \leq 2 \Rightarrow \text{Cambio variabili in } u=x+y \quad v=2x-y$$

$$\hookrightarrow \tilde{D} = \{u,v : -1 \leq u \leq 2; -2 \leq v \leq 1\} \quad f(u,v) = \frac{u}{v}$$

Calcoliamo la Jacobiana in termini di $u=x+y$ e $v=2x-y$:

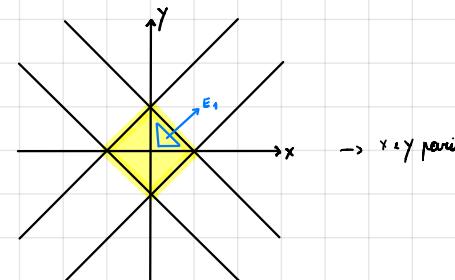
$$\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}v \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow |\det(J)| = \frac{1}{3}$$

Calcoliamo l'integrale: $\int_{-1}^2 \left[\int_{-2}^{-1} \frac{u}{v} \frac{1}{3} dv \right] du = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 u du \int_{-2}^{-1} \frac{1}{v} dv = \frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-1}^2 \left[\ln(v) \right]_{-2}^{-1} = \dots = -\frac{49}{2}$

6) $\iint_E (x^2+y^2) dx dy$ $E = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$

Studiamo i versi cari

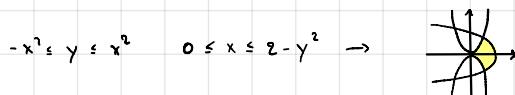
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ -x+y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$



Possiamo calcolare l'integrale facendo $4 \iint_{E_1} (x^2+y^2) dx dy$: $E_1 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \rightarrow 4 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy \right] dx = \dots = \frac{2}{3}$

2/11/20

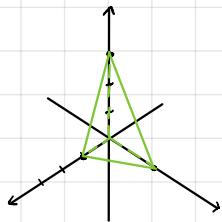
1) $E = \{(x,y) : |y| \leq x^2 \wedge 0 \leq x \leq 2-y^2\}$. Trova baricentro con dimostrazione.



$$\text{Baricentro } (\bar{x}, \bar{y}): \quad \bar{y} = 0 \Rightarrow E \text{ simm. rispetto a } y=0 \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_E x dx dy; M = \iint_E \delta dxdy = \iint_E dx dy = 2 \\ \hookrightarrow \bar{x} = \frac{2}{|E|} \iint_{E_{so}} x dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} x dy \right] dx = \dots = \frac{21}{60} \end{array} \right\} \text{ Baricentro: } \left(\frac{21}{60}, 0 \right)$$



2) Parametrizzare per fili e per strati la piramide di vertici $0, (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$



Per fili: $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \rightarrow 0 \leq z \leq \frac{6-6x-3y}{2}$
 L'integrale di $f(x,y)$ sarebbe: $\int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} \left[\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} f(x,y,z) dz \right] dy \right] dx$

Per strati: fissa $0 \leq z \leq 3$, analizzo lo strato a quel livello: $y = \frac{6-6x-2z}{3}$, $x = 1 - \frac{1}{3}z$
 Abbiamo $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{3}z$ e $0 \leq y \leq \frac{6-6x-2z}{3}$
 L'integrale di $f(x,y,z)$ sarebbe: $\int_0^3 \left\{ \int_0^{1-\frac{1}{3}z} \left[\int_0^{\frac{6-6x-2z}{3}} f(x,y,z) dy \right] dx \right\} dz$

3) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = y-x$ nella regione compresa tra $[0,1] \times [0,1]$ in xy e $z = x^2 + y^2$

Per fili: $0 \leq z \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} (y-x) dz dy = \int_0^1 \int_0^1 (y-x) [z]_0^{x^2+y^2} dy = \dots = 0$

4) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$; $E = \{x, y, z : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$
 Cosa \downarrow dimostra

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow$ Parametrizziamo per polari nel piano + fili per $z \rightarrow$ cilindrico o per sferico.

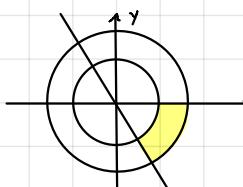
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi \rightarrow f(x, y, z) dx dy dz = \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) \rho \sin^2 \varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi} \leq \rho \cos \varphi \leq \sqrt{4 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \\ \rho \sin \varphi \leq \rho \cos \theta \\ \rho \cos \varphi \leq \sqrt{4 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \\ \rho \sin \varphi \leq \sqrt{4 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \end{array} \right. \quad \text{C.E. } \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4 \quad \text{e poiché } 0 \leq \rho \leq 2 \quad \rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad \text{Le 3 coordinate sono indipendenti}$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^2 \rho^3 \sin^3 \varphi d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \dots = \frac{64}{5} \pi \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{12} \sqrt{2} \right]$$

5) Integrare $f(x, y, z) = \frac{z^2 \sqrt{x+y^2}}{x^2(z^2+1)}$ in $D = \{x, y, z : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3; -\sqrt{3}x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Si suggerisce di rappresentare la proiezione di D in xy .

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ è una corona circolare; $-\sqrt{3}x \leq y \leq 0$ è sopra la retta $y = \sqrt{3}x$ e sotto $y = 0$:



L'area xy si sviluppa un cono.

Usiamo le coordinate cilindriche:

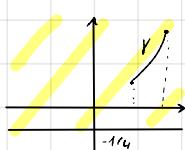
$$1 \leq \rho^2 \leq 3, \quad -\sqrt{3} \rho \cos \theta \leq \rho \sin \theta \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta \leq 0 \\ \cos \theta \geq 0 \end{cases} \rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$$

$$f(x, y, z) dx dy dz = \frac{z^2 \sqrt{\rho^2}}{\rho^2 \cos^2(\theta+1)} \rho^3 d\rho d\theta dz \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \left\{ \int_1^3 \left[\int_0^{\rho} \frac{\rho^2 d\rho}{\cos^2(\theta+1)} \right] d\rho \right\} d\theta = \int_1^{\sqrt{3}} \left[\int_0^{\rho} \frac{\rho^2}{\cos^2(\theta+1)} d\rho \right] d\theta = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\cos^2(\theta+1)} d\theta = \dots$$

16/11/20

1) Calcolare $\int_{\gamma} \frac{\log(1+x)}{xy \sqrt{1+4y^2}} ds$ con $\gamma: (y=x^2, [1,2])$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \neq 0 \\ y > -1 \\ y > -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$



F continua su γ . Inoltre $\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ regolare e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

$$\int_{\gamma} F(x, y) ds = \int_1^2 F(x(t), y(t)) \sqrt{1+4t^2} dt = \dots$$

2) Calcolare il baricentro della circonferenza $(0,0)$ $R=1$ $\{x = \cos \theta; y = \sin \theta\}$ dotata di densità $\delta = 1-x$

La densità sarà compresa fra $0 \leq \delta \leq 2$

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\sin \theta & \Rightarrow \|x'(\theta)\| = 1 \\ y'(\theta) = \cos \theta & \end{cases} \Rightarrow M = \int_{\gamma} (1-x) ds = \int_0^{2\pi} (1-\cos \theta) d\theta = \dots = 2\pi$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} x \delta ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta - \cos^2 \theta d\theta = \dots = \frac{1}{2} \quad \left\{ \bar{x}, \bar{y} = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} y \delta ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta - \sin \cos \theta d\theta = 0 \quad \left. \right\}$$

3) $\int_{\gamma} x^2 \sqrt{y} ds$ con γ arco di $y=x^2$ da $[-1,0]$ partendo dall'origine al punto $(-1,1)$.

L'integrale di linea di primo specie non varia al variare del verso della curva.

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ y'=2t \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ regolare e } F \text{ continua su } \gamma; \|v'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\int_{\gamma} x^2 \sqrt{y} ds = \int_{-1}^0 t^2 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2} dt = \int_{-1}^0 t^3 \sqrt{1+4t^2} dt = \dots = -\frac{1}{8} \left[0 - \frac{1}{15} - \frac{2}{3} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15} 5^{\frac{1}{2}} \right]$$

↳ $= |t| = -t$

23/11/20

1) Calcolare la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

In analisi 1 abbiamo dimostrato che essa converge. Ricorriremo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con $R=\infty$. Essa ha somma e^x . Quindi la nostra serie ha somma e^3

2) Determina l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+3)^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x}{n!} = +\infty \rightarrow R=0 \quad \text{quindi l'insieme di convergenza è } \{3\}$$

3) Determina l'intervallo di convergenza e la somma di $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e calcola $\int_0^1 f\left(\frac{x}{4}\right) dx$

Abbiamo una serie geometrica. $R=1$ e $x_0=0$ quindi converge in almeno $(-1,1)$. Gli estremi ottengono una serie irregolare e una divergente, quindi converge solo in $(-1,1)$.

La somma è $f(x) = \frac{1}{1-x}$ uguaglianza valida in $x \in (-1,1)$

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{4}\right) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{4^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)4^n} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} \rightarrow \text{da somma si calcola come } \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} dx$$

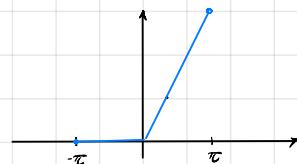
↳ $-1 < \frac{x^2}{4} < 1 \rightarrow -2 < x < 2$ ✓ integrale fattibile

4) Calcolare a mano di $\epsilon = 10^{-3}$ $\int_0^1 \cos x^2 dx$

Sappiamo che $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Questa serie ha $R=\infty$. Quindi possiamo fare $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} dx$ ottenendo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(2n+1)} (4n+1)$. Dal criterio di Leibniz sappiamo che $|s-s_n| < b_{n+1}$, nel nostro caso $b_n = \frac{1}{(2n)! (4n+1)}$. Dobbiamo trovare $b_{n+1} < 10^{-3} \rightarrow$ per $n=2$ $b_{n+1} < 10^{-3}$ e quindi $s \geq +1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{243}$

5) Dato $f(x)$ 2π -periodica tale che $f|_{[-\pi, \pi]} = |x|$ disegnare il grafico e scrivere come serie di Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 2\pi & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

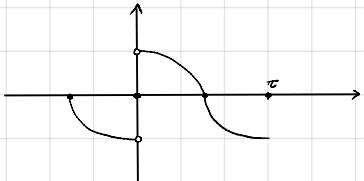


$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x dx = \dots = \pi$$

$$a_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos Kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \cos Kx dx = \dots = 0 \quad K - \text{pari}$$

$$b_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin Kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \sin Kx dx = \dots = -\frac{4}{K} (-1)^K$$

6) $f(0, \frac{\pi}{2}) = \cos x, f(Kx) = 0$



$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \stackrel{\text{dispari}}{=} 0$$

$$a_K = 0$$

$$b_K = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(Kx) dx = \dots = -2K$$

30/11/20

1) $\begin{cases} y' + t^2 y = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

Graificare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy; se ne risolvere, calcolare $\bar{y}'''(0)$; risolvere il problema

1) $y' = -t^2 y$

$\hookrightarrow a(t) = -t^2$ continua in $t_0=0$ } esiste unica la soluzione $\bar{y}: I(0) \rightarrow J(-2)$

$\hookrightarrow b(y) = y \in C^1$ per $y_0 = -2$

2) $\bar{y}' = -t^2 \cdot \bar{y} \stackrel{y(0)=-2}{\rightarrow} \bar{y}'(0) = 0 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow$ deriva rispetto a t : $\bar{y}''(t) = -t^2 \bar{y}(t) \rightarrow \bar{y}''(t) = -2t \bar{y}(t) - t^2 \bar{y}'(t) \rightarrow \bar{y}''(0) = \dots = 0$

 $\rightarrow \bar{y}'''(t) = -2\bar{y}(t) - 2t\bar{y}'(t) - 2t\bar{y}'(t) - t^2\bar{y}''(t) \rightarrow \bar{y}'''(0) = 4$

3) $y' = -t^2 y$

1) una soluzione costante ($y(t) = c \forall t$): $0 = -t^2 \cdot c \forall t \Rightarrow c = 0 \rightarrow y = 0$ soluzione costante

2) ($y \neq 0$) separo: $\frac{y'}{y} = -t^2 \rightarrow \int \frac{y'}{y} dt = \int -t^2 dt \stackrel{dy/y = -t^2 dt}{\rightarrow} \int \frac{dy}{y} = \int -t^2 dt \Rightarrow \log|y| = -\frac{t^3}{3} + C$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\frac{t^3}{3} + C} = d e^{-\frac{t^3}{3}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \pm K e^{-\frac{t^3}{3}}$$

Considerando $y(0) = -2$ abbiamo $K = -2 \Rightarrow \bar{y}(t) = -2 e^{-\frac{t^3}{3}}$ per $I = \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

\hookrightarrow non vale il teorema di unicità per $y_0 = 0$ ($\sqrt[3]{y}$ non è C^1).

Consideriamo $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

1) $\bar{y} = 0$ sol. costante e del problema

2) ($y \neq 0$) separo: $\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int dt \rightarrow \dots \rightarrow y(t) = \sqrt{\left[\frac{2}{3}(t+1)\right]^3}$

$$\text{Considerando } y(1) = 0 \rightarrow \bar{y} = \sqrt{\left[\frac{2}{3}(t-1)\right]^3}$$

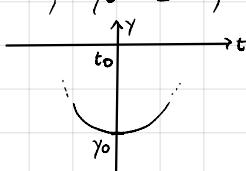
Ottengono così 2 soluzioni.

3) $\begin{cases} (t^2 - 1)y' = \frac{t}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$

Prima di risolvere, eseguire un grafico locale della soluzione e poi risolvere.

Scrivendo per $t^2 - 1$ [$t \neq \pm 1 \Rightarrow \pm 1 \notin D$]: $y' = \frac{t}{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{y} \rightarrow$ è garantita l'unicità della soluzione

1) $t_0 = 0; y_0 = -2; y'(0) = 0; y''(t) = \frac{(t^2 - 1) - 2t^2}{(t^2 - 1)^2} \frac{1}{y(t)} - \frac{t}{t^2 - 1} \frac{y'(t)}{y(t)^2} \rightarrow y''(0) = \frac{1}{2}$



$$21 \quad \int y dy = \int \frac{t}{t^2 - 1} dt \rightarrow y = \sqrt{\log(1-t^2) + c} \Rightarrow \tilde{y}(t) = -\sqrt{\log(1-t^2) + 4}$$

$t \neq \pm 1; t_0=0 \Rightarrow |t^2-1|=1-t^2$

Qual è l'intervallo massimale?

$$\begin{cases} 1-t^2 > 0 \\ \log(1-t^2) + 4 > 0 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow -\sqrt{1-\frac{1}{e^4}} < t < \sqrt{1-\frac{1}{e^4}}$$