Mutua Posizione, Fasci di Iperpiani

Prof.
Marco
Compagnoni

GEOMETRIA AFFINE:

- Mutua posizione di sottospazi — SEZIONE 7.3
- Mutua posizione e rappresentazione algebrica

- Fasci di iperpiani — SEZIONE 7.4

- V Postulato di Euclide

MUTUA POSIZIONE (DEFINIZIONE 7.21)

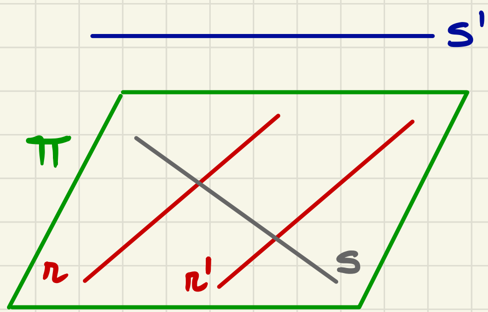
S, T sottospazi di $\mathbb{A}$ con giaciture U, W non banali, si dicono:

i) paralleli se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$;

ii) incidenti se non sono paralleli ed $S \cap T \neq \emptyset$;

iii) sghembi se non sono paralleli ed incidenti.

$\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$



π è parallelo a r, r', s, s'

r, r' sono parallele $U_r = U_{r'}$

r, s e r', s sono incidenti

r, s', r', s' ed s, s' sono sghembi

$A^2_{\mathbb{R}}$ $S: (x,y) = (1,0) + t(1,1)$ $P = (1,K)$ $K \in \mathbb{R}$

la retta T contenente P e parallela ad S è

$$T: (x,y) = (1,K) + t(1,1).$$

Se $K = 0 \Rightarrow T = S$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = K + t \end{cases}}$$ rapp. parametrica $\Rightarrow$ $\begin{cases} t = x - 1 \\ \boxed{x - y + K - 1 = 0} \end{cases}$ rapp. algebrica

le due rette differiscono solo per il termine costante.

In generale, in A di dimensione n, sia B_0 un sistema di riferimento e siano S, T sottospazi. Essi sono descritti algebricamente da:

- $S_{|B_0}$: $[A|B] \in Mat(n-p, n+1; \mathbb{K})$, dove $p = \dim(S)$;
- $T_{|B_0}$: $[A'|B'] \in Mat(n-q, n+1; \mathbb{K})$, dove $q = \dim(T)$.

$\Rightarrow [\tilde{A} | \tilde{B}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline A' & B' \end{array}\right] \in Mat(2n-p-q, n+1; \mathbb{K})$ ha soluzione $S \cap T_{|B_0}$

PROPOSIZIONE 7.26 (come prima, supponendo $p \geq q$)

i) S, T sono paralleli con $T \subseteq S$ sse $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) = n-q$;

ii) S, T sono paralleli disgiunti sse $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) = n-q$;

iii) S, T sono incidenti sse $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) > n-q$;

iv) S, T sono sghembi sse $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) > r(\tilde{A}) > n-q$.

DIM: • $\dim(S) = p$, $\dim(T) = q$ $\Rightarrow$ $r(A) = r([A|B]) = n-p$, $r(A') = r([A'|B']) = n-q$;

• $U =$ giacitura $S \overset{\phi_{\mathcal{B}}}{\cong} \operatorname{Ker}(A)$, $W =$ giacitura $T \overset{\phi_{\mathcal{B}}}{\cong} \operatorname{Ker}(A')$,

$U \cap W =$ giacitura $S \cap T \overset{\phi_{\mathcal{B}}}{\cong} \operatorname{Ker}(\tilde{A})$.

PARALLELISMO: $p \geq q \Rightarrow U \not\subset W \Rightarrow S // T$ sse $W \subseteq U$.

Questo è possibile sse $U \cap W = W$ sse $r(\tilde{A}) = r(A') = n-q$.

Ovviamente $S \not\parallel T$ sse $r(\tilde{A}) > r(A')$.

INCIDENZA: $T \cap S \neq \emptyset$ sse $[\tilde{A}|\tilde{B}]$ ha soluzione sse $r[\tilde{A}|\tilde{B}] = r[\tilde{A}]$ $\boxtimes$

$A^3_{\mathbb{R}}$ $\quad \pi : x - y + hz - h = 0$, $\quad r : hx + (h+1)y + z = x + y - z - 1 = 0$, $\quad h \in \mathbb{R}$

$S = \pi : \quad [A|B] = [\,1 \quad -1 \quad h \,|\, h\,] \qquad p = 2$

$$T = r : \quad [A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|c} h & h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad q = 1 \quad \forall h \implies n - q = 2$$

$$\implies S \cap T : \quad [\tilde{A}|\tilde{B}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline A' & B' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & h \\ h & h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & h+1 & h-1 \\ 0 & 1 & h+1 & -h \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & h+1 & -h \\ 0 & 0 & 3(h+1) & -h-1 \end{array}\right]$$

- $h \neq -1$: $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) = 3 > 2 = n - q \implies S, T$ incidenti.

$P = S \cap T$ ha coordinate $z = -1/3$, $y = \frac{1-2h}{3}$, $x = \frac{1+2h}{3}$.

- $h = -1$: $r([\tilde{A}|\tilde{B}]) = r(\tilde{A}) = 2 = n - q \implies T \subset S$ (paralleli).

<u>OSS</u>: S è un iperpiano di $A_{\mathbb{R}}^3$. In generale, T' è parallelo oppure incidente rispetto ad S (COROLLARIO 7.27).

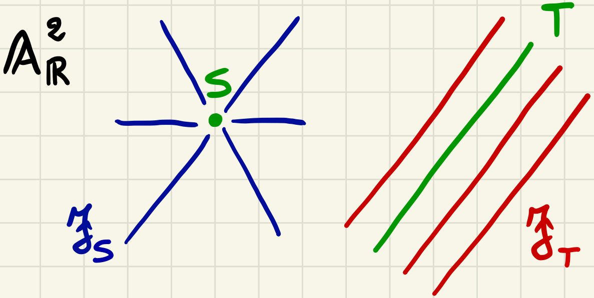
FASCI DI IPERPIANI (DEFINIZIONE 7.31)

A, S, T con $\dim(A) = n \geq 2$, $\dim(S) = n-2$, $\dim(T) = n-1$.

i) il fascio proprio di iperpiani con sostegno S è l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti S;

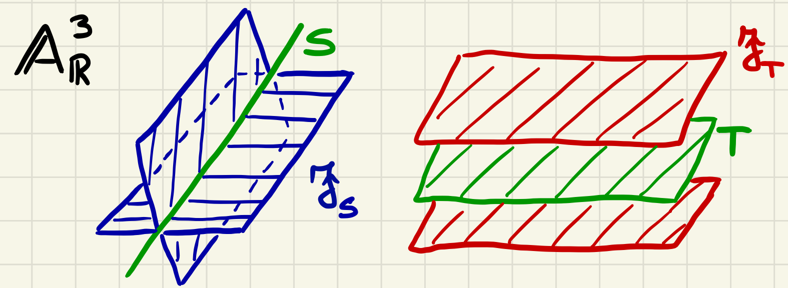
ii) il fascio improprio di iperpiani paralleli a T è l'insieme di tutti gli iperpiani paralleli a T.

FASCI DI RETTE



$\dim(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) = 2$ $\dim(S) = 0$ $\dim(T) = 1$

FASCI DI PIANI



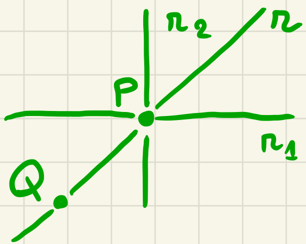
$\dim(\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}) = 3$ $\dim(S) = 1$ $\dim(T) = 2$

CARATTERIZZAZIONE ALGEBRICA DEI FASCI (PROPOSIZIONE 7.32)

Siano T_1, T_2 due iperpiani distinti del fascio, di equazioni $[A_1|B_1]$, $[A_2|B_2]$.

Allora T appartiene al fascio sse la sua equazione è $[t_1A_1+t_2A_2|t_1B_1+t_2B_2]$.

- $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$



$P=(x_P,y_P)$ punto base del fascio.

$r_1: \ y-y_P=0 \qquad r_2: \ x-x_P=0 \implies$

$\mathcal{F}_P: \ t_1\cdot(x-x_P)+t_2\cdot(y-y_P)=0$.

$r: \ t_1(x_Q-x_P)+t_2(y_Q-y_P)=0 \implies \dfrac{t_1}{t_2}=-\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P} \implies$

$(y_Q-y_P)(x-x_P)-(x_Q-x_P)(y-y_P)=0$

- $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$, $P=(1,1,1)$, $\pi: \ x+y+z=0$. Trovare $\pi' /\!/ \pi$ contenente P.

$\tilde{\pi}: \ x+y+z=1 \ /\!/ \ \pi \implies \mathcal{F}_\pi: t_1(x+y+z)+t_2(x+y+z-1)=0$.

$\implies x+y+z=\dfrac{t_2}{t_1+t_2}=K \leftarrow$ equazione del generico $\pi_K /\!/ \pi$.

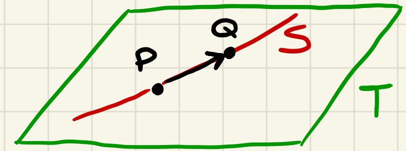
$P\in\pi' \implies 1+1+1=K \implies K=3 \implies x+y+z=3 \qquad \pi'=\pi_3$.

Proposizione 7.22

S, T sottospazi paralleli con $\dim(S) \leq \dim(T) < \infty$ ed $S \cap T \neq \emptyset$.

i) se $\dim(S) < \dim(T) \Rightarrow S \subset T$;

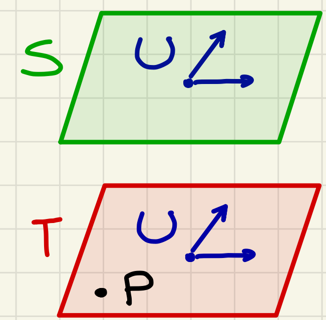
ii) se $\dim(S) = \dim(T) \Rightarrow S = T$.



Corollario 7.23 (quinto postulato di Euclide)

Sia S un sottospazio affine e P un punto. Allora esiste un unico sottospazio T parallelo ad S soddisfacente $\dim(T) = \dim(S)$ e contenente P.

- data U la giacitura di S, definiamo T il sottospazio contenente P e di giacitura $U \Rightarrow T /\!/ S$ e $\dim(T) = \dim(S)$;
- sia $T' /\!/ S$ con $\dim(T') = \dim(S) \Rightarrow T'$ ha giacitura U $\Rightarrow T' /\!/ T$ e $\dim(T') = \dim(T)$.



Se $P \in T' \Rightarrow P \in T' \cap T \neq \emptyset \Rightarrow T' = T$. $\blacksquare$