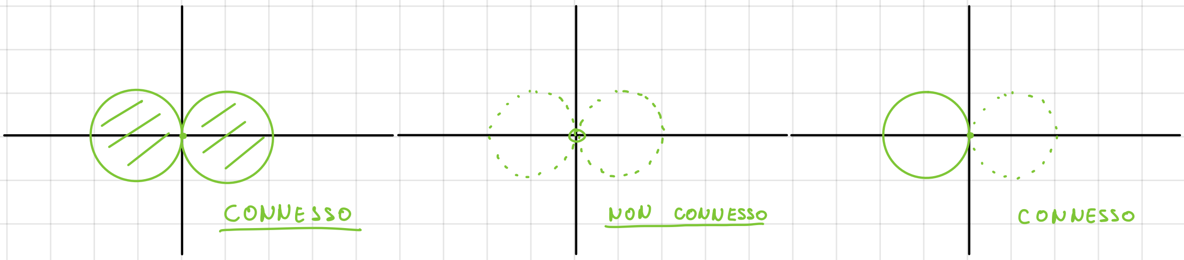
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \le 1 \ \vee \ (x-1)^2 + y \le 1 \}$$
$$B = \{ \quad " \quad\quad " \ < \quad\quad " \ < \}$$
$$C = \{ \quad " \quad\quad " \ \le \quad\quad " \ < \}$$



Nota bene: nessuno degli insiemi è convesso.

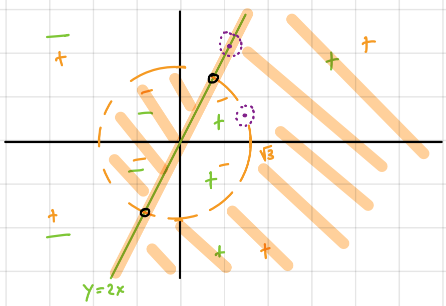
2) Dato $C_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le (2 - \frac{1}{n})^2 \}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

Ogni C_n è una circonferenza con raggio crescente $R \to 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ viene uguale a $C_\infty = \{ \ " : x^2 + y^2 < 2 \}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'essa chiusa.

Proprietà è scrivibile come:
1) Unione infiniti aperte è aperta
2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

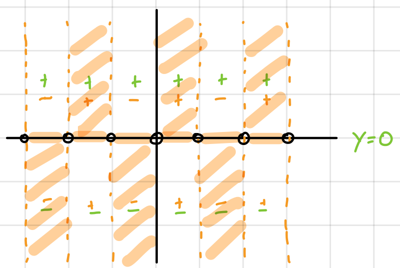
3) Consideriamo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x,y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso ($\partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi
- $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y - 4}} \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 4 \to$ fuori dall'ellisse di semiasse $a = 2$, $b = \sqrt{2} \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso, illimitato, connesso per archi.
- $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{2x - y}{x^2 + y^2 - 3}} \Rightarrow \begin{array}{l} N \ 2x - y \ge 0 \\ D \ x^2 + y^2 - 3 > 0 \end{array} \to \begin{array}{l} N \ y \le 2x \\ D \ x^2 + y^2 > 3 \end{array}$



L'insieme non è aperto ($\exists \partial D \subset D$), non è chiuso ($\exists \partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi

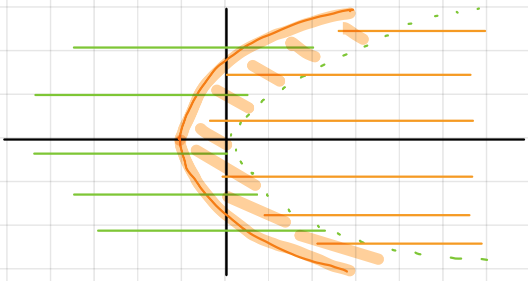
- $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{array}{l} N \ y \ge 0 \\ D \ \sin x > 0 \to 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{array}$



Né aperto né chiuso, illimitato, sconnesso per archi

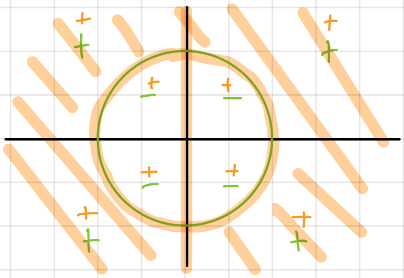
01/19

- $f(x,y) = \sqrt{-\ln(y^2-x)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} -\ln(y^2-x) \geq 0 \to \ln(y^2-x) \leq \ln 1 \to y^2-x \leq 1 \to \begin{cases} x \geq y^2-1 \\ x < y^2 \end{cases} \\ x < y^2 \end{cases}$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

- $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\Rightarrow$ $F_1 \quad |x| \geq 0$
$F_2 \quad x^2+y^2-4 \geq 0$



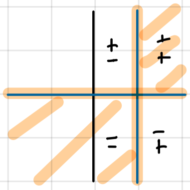
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1. Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

- $f(x,y) = \sqrt{xy-y}+1$

D $\quad xy-y \geq 0 \to y(x-1) \geq 0 \to \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

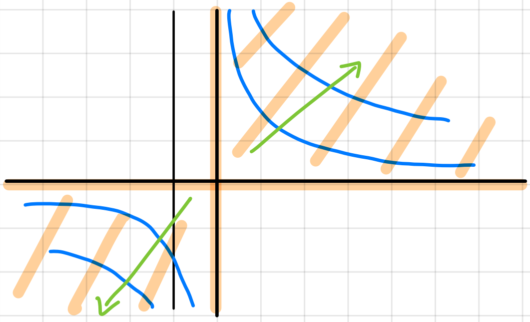
0 ± sempre positiva senza zeri in D

LIVELLI $\sqrt{xy-y}+1 = c$ se $c \leq 0$ $E_c = \emptyset$

se $c < 1$ $E_c = \emptyset$

se $c \geq 1$ $\longrightarrow xy-y = (c-1)^2 \Rightarrow y = \frac{(c-1)^2}{x-1}$ per $x \neq 1$

$x = 1 \iff c = 1 \to y(x-1) = 0$



- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D $\quad x^2+y^2 > 0 \qquad (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

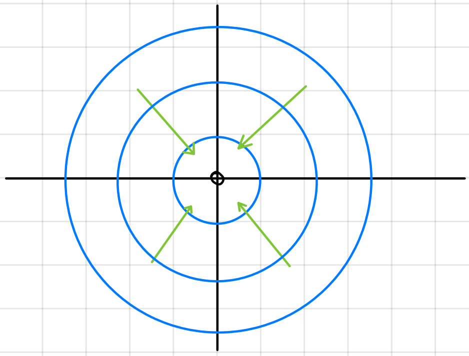
Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

± funzione sempre positiva

0 non ci sono zeri

LIVELLI $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$ $\qquad c \leq 0 \quad E_c = \emptyset$

$c > 0 \quad \frac{1}{x^2+y^2} = c^2 \to x^2+y^2 = \frac{1}{c^2}$



• $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$

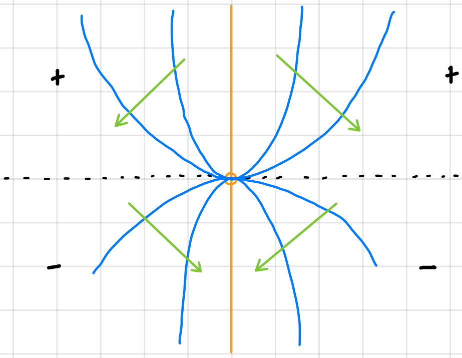
D $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{y=0\}$ $\quad$ Dominio aperto, non chiuso, illimitato, non connesso per archi

0 $\quad e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \to \frac{x^2}{y} = 0 \quad x = 0$

± $\quad e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \to \frac{x^2}{y} > 0 \quad y > 0$

LIVELLI $\quad e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \to e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \qquad c \le -1 \quad E_c = \emptyset$

$c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \to \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \to \begin{cases} x = 0 & \text{se } c = 0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



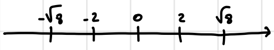
2) Trova gli zeri di $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4$ $\quad (D = \mathbb{R})$

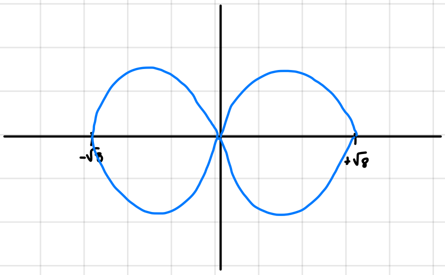
$y^2 = 8x^2 - x^4 \to y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$; Studio $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$; l'altra è simmetrica

$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ $\quad$ PARI, $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y = 0$ se $x = 0$, $x = \pm\sqrt{8}$

$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \ge 0 \iff 4x(4 - x^2) \ge 0$





28/03/20

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^3 y + x^3}{x^4 + y^2}$$

restringo $y = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$ $\nexists \lim \to$ Il limite non esiste

2) Calcola il dominio e verifica la continuità di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

f è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$. In $(x,y) = (0,0)$ abbiamo:

$\lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) =$

restringo $y = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^6} = 0$

restringo $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2}=0$
restringo $y=mx$: $\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6+m^2x^2} = \dots = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^4+m^2} = 0$
restringo $y=x^3$: $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^6}}{2\cancel{x^6}} = \frac{1}{2}$
$\hookrightarrow$ poiché $\frac{1}{2} \neq 0$, il limite non esiste $\Rightarrow$ la funzione non è continua in $(0,0)$

3) Calcola se esiste:

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^3}{x^2+y^4} = \dots = 0$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to 0} x = 0$
restringo $x=0$: $\lim_{y\to 0} 0 = 0$
restringo $x=y^2$: $\lim_{y\to 0} \frac{y^{6}}{2y^4} = 0$

Ipotizzo che il limite esista, allora $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ $(\forall\varepsilon \dots)$
Ma: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| \le \frac{|x|\cancel{(x^2+y^4)}}{\cancel{x^2+y^4}}$. Siccome $\lim_{x\to 0}|x|=0$, il limite esiste e vale 0.

4) ...

$$\lim_{x,y\to 0,0} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$$

restrizione $x=0$: $\lim_{y\to 0} e^{-\frac{0}{y^2}} = 1$
$y=x$: $\lim_{x\to 0} e^{-1} = e^{-1}$

$\Rightarrow \nexists$ limite

5) ...

$$\lim_{x,y\to 0,0} \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{0} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}_{\nexists}$$

siccome $0 < e^{-\frac{x^2}{y^2}} \le 1$, il limite esisterà e sarà 0.

6) Dato $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$, per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ esiste e quanto vale

polari: $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^3\sin\theta}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^{5-2\alpha}\cos\theta\sin\theta$

$$\rho^{5-2\alpha} \text{ per } \rho\to 0^+ \begin{cases} \to 0 & \text{se } 5-2\alpha>0 \\ =1 & \text{se } \alpha=\frac{5}{2} \\ \to+\infty & \text{se } 5-2\alpha<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{se } \alpha<\frac{5}{2} & l=0 \\ \text{se } \alpha\ge\frac{5}{2} & \nexists l \end{cases}$$

7) Calcola il limite se esiste:

$$\lim_{\|x,y\|\to+\infty} e^{-x^2-y^2}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=0$
polari: $\lim_{\rho\to+\infty} e^{-\rho^2}=0 \quad \forall\theta \Longrightarrow$ il limite esiste e vale 0

8) ...

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} e^{-x^3-y^3}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^3} = \begin{cases} 0^+ & x\to-\infty \\ +\infty & x\to+\infty \end{cases} \Longrightarrow \nexists$ limite

9) ...

$$\lim_{x,y\to 2,-1} \frac{(y^2-x^2+3)^2}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

restringo $x=2$: $\lim_{y\to -1} \frac{(y^2-4+3)^2}{(y+1)^2} = \dots = 4$

polari: $\begin{cases} x=2+\rho\cos\theta \\ y=-1+\rho\sin\theta \end{cases} \to \lim_{\rho\to 0} \frac{[(-1+\sin\theta)^2-(2+\rho\cos\theta)^2+3]^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{[-2\rho\sin\theta-4\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos\theta^2]^2}{\rho^2}$

$= \lim_{\rho\to 0} [-2\sin\theta-4\sin\theta+\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta]^2 = [-2\sin\theta-4\sin\theta]^2 \to$ dipende da θ
quindi $\nexists l$

10) Data $f(x,y) = e^{3x+y^2}$, calcolare $\nabla f(0,0)$ e calcolare $D_{\bar{v}} f(3,-2)$ dato $\bar{v} = [2,1]^T$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3h}-1}{h} = 3 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = 0\end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [3,0]$$

Normalizziamo $\bar{v}$: $\hat{v} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Avremo che $D_{\hat{v}} f(3,-2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(3+t\,2/\sqrt{5}, -2+t\,1/\sqrt{5}) - f(3,-2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{3(3+\frac{2t}{\sqrt{5}}) + (-2+\frac{t}{\sqrt{5}})^2} - e^{13}}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{13+\frac{2t}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}t^2} - e^{13}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{13}(e^{\frac{2t}{\sqrt{5}}+\frac{t^2}{\sqrt{5}}}-1)}{t} = e^{13} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\cancel{t} + \frac{1}{5}t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{13}$$

11) Calcolare, se esiste, $\nabla f(0,0)$ con $f(x,y) = y - |x| y^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(0-|h|0)-\overset{\text{costante}}{0}}{h} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(h-0\cdot h^2)-0}{h} = 1\end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [0,1]$$

12) Calcola $\nabla f(x,y)$ data $y \sin^2(x^2-y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y\, 2 \sin(x^2-y)\cos(x^2-y)(2x+0) = 4xy \sin(x^2-y)\cos(x^2-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1 \cdot \sin(x^2-y) + y\, 2\sin(x^2-y)\cos(x^2-y)(-1) = \sin(x^2-y)[1-2y\cos(x^2-y)]$$

13) Calcola $\nabla f(x,y)$ data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{3x^2y(x^6+y^2) - x^3y\,6x^5}{(x^8+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x^3(x^6+y^2) - x^3y\,2y}{(x^6+y^2)^2}\end{aligned}\right\}$$

Entrambe le derivate non esistono in $(0,0)$. Per calcolare $\nabla f(0,0)$ bisogna usare la definizione ($\nabla f(0,0)$ esiste perché $f \in \mathcal{C}$)

↳ Le regole di derivazione non sono sempre valide per le funzioni definite a tratti (in questo caso non valgono per $(x,y) = (0,0)$)

14) Calcola $\nabla f(x,y)$ con $f(x,y) = y^x$ (definita per $y>0$)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y^x \ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x\,y^{x-1}$$