1) Dato $\mu \in \mathbb{R}$, considera in $\mathbb{E}^2$ $\gamma_\mu : (\mu-1)x^2 + 4\mu xy + (\mu-1)y^2 - 6\mu + 2 = 0$. Classifica γ_μ.

1) $A \begin{bmatrix} \mu-1 & 2\mu \\ 2\mu & \mu-1 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C \begin{bmatrix} \mu-1 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-6\mu \end{bmatrix}$

$I_1 = \dots = 2\mu - 2$

$I_2 = \dots = (\mu+1)(1-3\mu)$

$I_3 = \dots = (2-6\mu)(\mu+1)(1-3\mu) = 2(\mu+1)(1-3\mu)^2$

La conica è degenere per: $\mu = -1$, $\mu = \frac{1}{3}$ $(I_3 = 0)$

Se $\mu = -1 \Rightarrow I_3 = 0$, $I_2 = 0$, $I_1 = -4$

$r(C) = r\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{rette parallele distinte}}$ $\Rightarrow \gamma_{-1} : -x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$

$-(x+y)^2 + 4 = 0$

$\boxed{\underbrace{(2+x+y)}_{r_1}\underbrace{(2-x+y)}_{r_2} = 0}$

Se $\mu = \frac{1}{3} \Rightarrow I_3 = 0$, $I_2 = 0$

$r(C) = \dots = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{retta doppia}}$ $\Rightarrow \mu_{\frac{1}{3}} : -x^2 + 2xy - y^2 = 0$

$\boxed{-\underbrace{(x-y)^2}_{r} = 0}$

Per $\mu < -1$ abbiamo: $I_3 \neq 0$, $I_2 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{IPERBOLE}}$

Per $-1 < \mu < \frac{1}{3}$ abbiamo: $I_3 > 0$, $I_2 > 0$, $I_1 < 0$, $I_1 I_3 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{ELISSE REALE}}$

Per $\mu > \frac{1}{3}$ abbiamo: $I_3 \neq 0$, $I_2 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{IPERBOLE}}$

Per trovare i punti base interseco le coniche degeneri con una conica generica. In generale esistono 4 punti base.

IN GENERALE

Nel caso che $I_1 = 0$ $(I_1 = Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2)$, avremo che $\lambda_1 = -\lambda_2 \Rightarrow$ iperbole equilatera. Visto $I_1 \in \mathbb{R}^1[\mu]$ avremo 1 sola $\mu \Rightarrow$ 1 sola iperb. equil.

Nel caso che $I_2 = 0$ $(I_2 = |A| = \lambda_1 \lambda_2)$, avremo che $\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ parabola. Visto che $I_2 \in \mathbb{R}^2[\mu]$ avremo 2 $\mu \Rightarrow$ 2 parabole

Nel caso che $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow I_1 = 2\lambda$, $I_2 = \lambda^2 \Rightarrow \frac{I_1^2}{4} = I_2 \Rightarrow$ circonferenza

Poiché $I_3 \in \mathbb{R}^3[\mu]$ avremo massimo 3 coniche degeneri

2) Studia $\gamma_K : x^2 + 2Kxy + 2x + 2Ky + 1 = 0$, calcolane gli invarianti e le coniche degeneri.

HOMEWORK

3) Fissato s.r.o.n $\mathcal{B}_0$, siano

$Q_{|\mathcal{B}_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\pi_{|\mathcal{B}_0} : x - y + 1 = 0$

Trova il luogo S dei punti P che soddisfano: $d(P,\pi) = \frac{1}{2} d(P,Q)$. Classifica S, scrivila in forma canonica e trova la rototraslazione.

1) Sia $P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, allora $d(P,\pi) = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$, $d(P,Q) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{{}^2\cancel{4}(x-y+1)^2}{\cancel{2}} = \frac{(x-1)^2 + y^2 + z^2\,\cancel{4}}{\cancel{4}} \to \dots \to x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 6x - 4y + 1 = 0$

Studiamo le matrici di S: $A \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$

$I_1 = Tr(A) = 1$

$I_2 = II_2(A) = -5$

$I_3 = |A| = -3$

$I_4 = |C| = -8$

$\boxed{\text{IPERBOLOIDE A 2 FALDE}}$

2) ROTAZIONE: diagonalizzo A: $P_A(\lambda) = \dots = (-1-\lambda)^2(3-\lambda) \Rightarrow \overset{ma=2}{\lambda_1 = -1}$, $\lambda_2 = 3$

$V_{\lambda_1} = Ker(A+I) = \dots = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$ Normalizzo $\Rightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$V_{\lambda_2} = Ker(A-3I) = \dots = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$ Normalizzo $\Rightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$Q_R \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |Q_R| = 1$

TRASLAZIONE: Essendo l'iperboloide una quadrica a centro

$AT = -B \to [A|-B] \to \dots \to \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 4/3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q_R \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + T}$

3) La forma canonica sarà: $\boxed{S : -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 + \frac{I_4}{I_3} = \underline{-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 - \frac{8}{3} = 0}}$