

FEDERICO BIZZARRI - ANGELO BRAMBILLA -
DANIELE LINARO

ELETTROTECNICA

INGEGNERIA INFORMATICA E BIOMEDICA – POLITECNICO
DI MILANO

TWO THINGS ARE INFINITE, THE UNIVERSE AND HUMAN STUPIDITY, AND I
AM NOT YET COMPLETELY SURE ABOUT THE UNIVERSE.

ALBERT EINSTEIN



Copyright © 2020 Federico Bizzarri - Angelo Brambilla - Daniele Linaro

Last printing, March 2020

Contents

1 Capitolo 1	11
1.1 La carica elettrica e il principio di conservazione della carica	11
1.2 Il campo elettrico	15
1.3 La legge di Coulomb	16
1.4 Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto	17
1.5 Tensione elettrica	19
1.6 Legge di Kirchhoff per le tensioni	21
1.7 Flusso di un campo vettoriale	22
1.8 Legge di Gauss	22
1.9 Dielettrici (o isolanti) e il vettore $\bar{\mathcal{P}}$	23
1.10 La corrente elettrica	23
1.11 La formalizzazione del principio di conservazione della carica	25
1.12 Conduttori	25
1.13 La legge di Ohm	27
1.14 La legge di Kirchhoff per le correnti	28
1.15 Il primo circuito elettrico	28
2 Capitolo 2	31
2.1 La tensione e la corrente: definizione e proprietà	31
2.1.1 Gli strumenti di misura	33
2.1.2 Proprietà della tensione e della corrente	34
2.1.3 Leggi di Kirchhoff delle Tensioni e delle Correnti	35
2.2 Introduzione alla teoria dei circuiti	37
2.3 Componenti e variabili descrittive	38
2.4 Cenni di teoria dei grafi	42
2.5 Grafo di un componente e grafo di un circuito	43
2.6 Esercizio: circuito e grafo	45
2.7 Nota sulle equazioni algebriche	46
2.8 Le leggi di Kirchhoff	47
2.9 La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta	52
2.10 Equazioni di Tableau	54

3 Capitolo 3	57
3.1 Potenza ed energia elettrica	57
3.1.1 Potenza assorbita da un n -terminali	58
3.1.2 n -terminali attivi e passivi	58
3.2 Il teorema di Tellegen	59
3.2.1 Esempio	60
3.3 Classificazione di un componente	60
3.3.1 Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici	61
3.4 Le basi di definizione	62
3.5 Bipoli notevoli	63
3.5.1 Il resistore lineare	63
3.5.2 Il corto circuito	64
3.5.3 Il circuito aperto	64
3.5.4 Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente	65
3.6 Esercizio: il primo circuito elementare	66
3.7 Il principio di equivalenza	67
3.7.1 Connessione in serie di bipoli	67
3.7.2 Il partitore di tensione	69
3.7.3 Connessione in parallelo di bipoli	69
3.7.4 Il partitore di corrente	71
3.8 Esercizio	72
3.9 Circuiti equivalenti di Thevènin e Norton	72
3.10 Esercizio	74
3.11 Esercizio	75
4 Capitolo 4	77
4.1 Il tripolo lineare affine	77
4.2 I generatori (sorgenti) pilotati	79
4.3 Esempi	81
4.3.1 Un resistore di resistenza negativa	81
4.3.2 Esercizio: risoluzione di una rete	81
4.3.3 Modello equivalente di Thevènin	81
4.3.4 Modello equivalente di Norton 1	82
4.3.5 Modello equivalente di Norton 2	83
4.4 L'analisi nodale	83
4.5 Un esempio guida	84
4.6 Un altro esempio	85
4.7 Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione	87
4.7.1 Il caso "a": connessione $k = 0$	88
4.7.2 Il caso "b": connessione $k = h$	89
4.7.3 Un caso più complesso	91
4.7.4 Sempre peggio	92

5 Capitolo 5	95
5.1 Teorema di esistenza e unicità	95
5.2 Il principio di sovrapposizione degli effetti	97
5.2.1 Esempio	100
5.3 Il teorema di Thevènin e Norton	101
5.3.1 Esempi di applicazione dei teoremi di Thevènin e Norton	103
5.4 Reciprocità	105
5.4.1 Teorema di reciprocità	107
6 Capitolo 6	109
6.1 I doppi-bipoli	109
6.2 Le rappresentazioni cardinali	113
6.2.1 Forma esplicita con parametri R	113
6.2.2 Forma esplicita con parametri G	114
6.2.3 Forma esplicita con parametri H	115
6.2.4 Forma esplicita con parametri H'	115
6.3 Matrice T di trasmissione diretta	116
6.4 Esempi	117
6.4.1 Esempio 1	117
6.4.2 Esempio 2	117
6.4.3 Esempio 3	118
6.5 Simmetria	118
6.6 Reciprocità dei doppi bipoli lineari, adinamici e tempo-invarianti	120
6.6.1 Matrici \mathcal{R} e \mathcal{G}	120
6.6.2 Matrici \mathcal{H} e \mathcal{H}'	120
6.6.3 Matrice \mathcal{T}	121
6.6.4 Esempio	121
6.7 Riepilogo	121
6.8 Doppi bipoli lineari affini	122
6.9 Connessione di doppi bipoli	124
6.9.1 Collegamento in serie	124
6.9.2 Collegamento in parallelo	125
6.9.3 Connessione in cascata	125
6.10 Doppi bipoli notevoli	126
6.10.1 Il trasferitore ideale di potenza	126
6.10.2 L'amplificatore operazionale ideale	127
6.10.3 Un esercizio sul nullore	129
7 Capitolo 7	131
7.1 L'interazione magnetica	131
7.2 Forze magnetiche su cariche in moto - La forza di Lorenz	132
7.3 Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)	132
7.4 Forza magnetica su di una corrente elettrica	134

7.5 Legge di Ampère-Laplace	135
7.6 Campo magnetico di una spira di corrente circolare	137
7.7 La legge di Ampère	138
7.8 Flusso magnetico	140
7.9 Equazioni del campo elettromagnetostatico	141
8 Capitolo 8	143
8.1 Il campo elettromagnetico dipendente dal tempo	143
8.2 La legge di Faraday-Henry	143
8.3 Applicazione della legge di Farady-Henry ai circuiti elettrici	146
8.4 La legge di Ampere-Maxwell	147
8.5 Equazioni di Maxwell (in forma integrale) del campo elettromagnetico	150
8.6 Approfondimento sull'induzione elettromagnetica	151
9 Capitolo 9	155
9.1 La capacità elettrica - il condensatore	155
9.2 Il condensatore in regime stazionario	156
9.3 Il condensatore in condizioni tempo varianti	158
9.4 L'autoinduzione - l'induttore	160
9.5 L'induttore in regime stazionario	161
9.6 L'induttore in condizioni tempo varianti	163
10 Capitolo 10	167
10.1 Circuito RC del primo ordine non degenere	167
10.1.1 Esempio	170
10.2 Circuito RL del primo ordine non degenere	172
10.2.1 Esempio	172
11 Capitolo 11	175
11.1 Richiami di trigonometria	175
11.2 Richiami sui numeri complessi	176
11.2.1 Uguaglianza di due numeri complessi	176
11.2.2 Il complesso coniugato	177
11.2.3 Somma algebrica di due numeri complessi	177
11.2.4 Prodotto e di due numeri complessi	177
11.2.5 Razionalizzazione del rapporto di due numeri complessi	177
11.3 Verso l'analisi fasoriale	178
11.4 Una considerazione importante	179
11.5 I fasori	180
11.6 Impedenza e ammettenza	185
11.7 Doppi-bipoli con matrice di rappresentazione complessa	186
11.8 Adesso siamo pronti per	187

11.8.1 Esempio: connessione in serie di impedenze e partitore di tensione	188
11.8.2 Esempio: connessione in parallelo di ammettenze e partitore di corrente	189
11.8.3 Esempio: un circuito con l'amplificatore operazionale ideale	190
11.8.4 Esempio: circuiti equivalenti di Thevènin e Norton	191
11.8.5 Esempio: sovrapposizione degli effetti (e di due regimi)	192
11.9 Il regime multi-frequenziale	193
11.10 Funzioni di rete	194
11.10.1 Un filtro passa-basso	195
11.10.2 Un filtro passa alto	196
11.11 La potenza in regime sinusoidale	197
11.11.1 Un primo esempio di calcolo della potenza complessa	200
11.11.2 Il "triangolo" delle potenze	201
11.12 Il teorema di Boucherot	202
11.12.1 Un esempio di applicazione	203
11.12.2 Un secondo esempio di applicazione	204
11.12.3 Il Teorema di Boucherot e il triangolo delle potenze	204
11.13 Il rifasamento	205
11.13.1 Un esempio di rifasamento	206
11.13.4 Condizione di massimo trasferimento di potenza attiva .	207
12 Capitolo 12	209
12.1 Circuiti del primo ordine degeneri	209
12.2 Circuiti dinamici riducibili a circuiti del primo ordine .	211
12.3 Circuiti del primo ordine con ingresso discontinuo . .	213
12.3.1 Sulla continuità delle variabili di stato	214
12.3.2 Un esempio non banale	216
12.4 Circuiti del primo ordine con tasti	217
12.4.1 Un esempio semplice	218
12.4.2 Un esempio avanzato	219
13 Capitolo 13	221
13.1 Valori efficaci	221
13.2 Tensioni trifase bilanciate	222
13.3 Carico trifase bilanciato	224
13.4 Schemi di connessione generatore - carico	225
13.4.1 Collegamento Y-Y	225
13.4.2 Collegamento Y-Δ bilanciato	225
13.4.3 Collegamento Δ-Δ bilanciato	227
13.4.4 Collegamento Δ-Y bilanciato	227
13.5 Potenza in un sistema trifase bilanciato	228

14 Capitolo 14	231
14.1 Il campo magnetico, il campo di induzione magnetica e la magnetizzazione	231
14.2 Circuiti magnetici	232
14.2.1 Esempio	233
14.3 Teoria generale dei circuiti magnetici	235
14.3.1 Esempio	236
14.3.2 Flusso e flusso concatenato	237
14.3.3 Un esempio	238
14.4 Traferro	239

Queste tracce sono il risultato della rielaborazione di appunti, dispense, libri di diversi autori. La loro stesura in formato elettronico è frutto anche del lavoro preliminare degli studenti Gloria Ficili, Enrico Fregnan, Gledian Kruja e Paola Muscato durante l'anno accademico 2012-2103. A loro va il nostro ringraziamento. Un ringraziamento anche a tutti gli studenti che nel corso del tempo hanno segnalato e segnaleranno refusi o suggeriranno miglioramenti. Le figure che hanno sostituito buona parte degli schizzi fatti a mano sono frutto del lavoro di Gabriele Lo Castro (a.a. 2013/2014), Marco Haitink, Ivan Marisca, Marco Massone e Marco Mussi (a.a. 2014/2015), Stefano Del Col, Francesco Riccardo di Gioia, Stefano Formicola, Marco Comotti e Nicola De Angeli (a.a. 2015/2016). Sono nate nel 2012, dalla mia necessità di disporre di un materiale didattico organico e strutturato, che potesse essere adatto a studenti del primo anno di Ingegneria. Da allora, sono state curate anno dopo anno, per renderle più chiare ed eliminare imprecisioni o errori di battitura. Altri autori hanno contribuito allo sviluppo di queste pagine: fin da subito il Prof. Angelo Brambilla, dal 2019 il Prof. Daniele Linaro e da quest'anno il Prof. Paolo Maffezzoni.

Federico Bizzarri, 21 febbraio 2020.

Gli studenti, ai quali raccomandiamo di essere ora e sempre lettori critici, che trovassero imprecisioni, errori, lacune nelle tracce sono invitati a segnalarceli.

1

1.1 La carica elettrica e il principio di conservazione della carica

TUTTA LA MATERIA di cui siamo formati e che ci circonda è composta da particelle elementari (elettroni, protoni, neutroni) che costituiscono atomi e molecole. Queste particelle hanno una proprietà che chiamiamo **carica elettrica**.

L'ESISTENZA DI FENOMENI ELETTRICI (**elettrificazione**) era nota già in antichità (in greco antico *ηλεκτρον* – elektron – significa ambra) tanto che Talete di Mileto (640-546 a.C.) riteneva che tali fenomeni — ad esempio l'elettrificazione ottenuta per strofinio dell'ambra che attirava così piccoli corpi — fossero dovuti ad una forza vitale (o "anima") contenuta nella materia stessa. Oggi è per noi esperienza comune che l'ambra, strofinata sulla lana, attiri piccoli pezzetti di carta e che il vetro strofinato sulla seta faccia lo stesso "attirando" inoltre l'ambra stessa. Abbiamo convenuto che l'ambra e il vetro si "carichino" per strofinio in modo opposto. Abbiamo convenuto che l'ambra inizialmente in equilibrio di carica si carica positivamente perché lo strofinio le sottrae alcune particelle cariche negativamente. Il vetro, invece, si carica negativamente perché è esso stesso a sottrarre cariche negative alla seta. Sia l'ambra sia il vetro, dopo essere stati "elettrificati", diventano due *corpi carichi*, caratterizzati cioè da un eccesso di carica positiva e negativa, rispettivamente.

IN GENERALE, un corpo carico è un oggetto che non è "neutro" rispetto alla proprietà carica elettrica. Sempre in generale, corpi caratterizzati dal medesimo eccesso di carica si respingono e corpi caratterizzati da eccessi di tipo opposto si attraggono. Si osserva una forza orientata lungo la congiungente i due corpi carichi (figura 1.1), così come avviene per l'attrazione gravitazionale tra due masse.

Lo studente interessato ad approfondire i concetti presentati in questo primo capitolo può fare riferimento al libro "Campi e onde", Marcelo Alonso, Edward J. Finn, edizione italiana a cura di Emilio Gatti, traduzione di Mario Bertolaccini, Camillo Bussolati, Francesca Demichelis, - 2. ed. - Milano: Masson; Reading: Addison-Wesley, 1991.

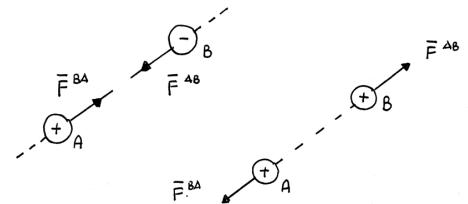


Figure 1.1: Due corpi carichi *A* e *B*, che possono essere considerati puntiformi, esercitano l'uno sull'altro una forza orientata lungo la congiungente i due corpi. Le due forze \bar{F}^{AB} (esercitata da *A* su *B*) e \bar{F}^{BA} (esercitata da *B* su *A*) hanno il verso che dipende da come sono caricati i due corpi l'uno rispetto all'altro.

"Consider a force like gravitation which varies predominantly inversely as the square of the distance, but which is about a billion-billion-billion times stronger. And with another difference. There are two kinds of "matter" which we can call positive and negative. Like kinds repel and unlike kinds attract—unlike gravity where there is only attraction. What would happen?

A bunch of positives would repel with an enormous force and spread out in all directions. A bunch of negatives would do the same. But an evenly mixed bunch of positives and negatives would do something completely different. The opposite pieces would be pulled together by the enormous attractions. The net result would be that the terrific forces would balance themselves out almost perfectly, by forming tight, fine mixtures of the positive and the negative, and between two separate bunches of such mixtures there would be practically no attraction or repulsion at all.

There is such a force: the electrical force. And all matter is a mixture of positive protons and negative electrons which are attracting and repelling with this great force. So perfect is the balance, however, that when you stand near someone else you don't feel any force at all. If there were even a little bit of unbalance you would know it. If you were standing at arm's length from someone and each of you had one percent more electrons than protons, the repelling force would be incredible. How great? Enough to lift the Empire State Building? No! To lift Mount Everest? No! The repulsion would be enough to lift a "weight" equal to that of the entire earth!

With such enormous forces so perfectly balanced in this intimate mixture, it is not hard to understand that matter, trying to keep its positive and negative charges in the finest balance, can have a great stiffness and strength. The Empire State Building, for example, swings less than one inch in the wind because the electrical forces hold every electron and proton more or less in its proper place. On the other hand, if we look at matter on a scale small enough that we see only a few atoms, any small piece will not, usually, have an equal number of positive and negative charges, and so there will be strong residual electrical forces. Even when there are equal numbers of both charges in two neighboring small pieces, there may still be large net electrical forces because the forces between individual charges vary inversely as the square of the distance. A net force can arise if a negative charge of one piece is closer to the positive than to the negative charges of the other piece. The attractive forces can then be larger than the repulsive ones and there can be a net attraction between two small pieces with no excess charges. The force that holds the atoms together, and the chemical forces that hold molecules together, are really electrical forces acting in regions where the balance of charge is not perfect, or where the distances are very small.

You know, of course, that atoms are made with positive protons in the nucleus and with electrons outside. You may ask: If this electrical force is so terrific, why don't the protons and electrons just get on top of each other? If they want to be in an intimate mixture, why isn't it still more intimate? The answer has to do with the quantum effects. If we try to confine our electrons in a region that is very close to the protons, then according to the uncertainty principle they must have some mean square momentum which is larger the more we try to confine them. It is this motion, required by the laws of quantum mechanics, that keeps the electrical attraction from bringing the charges any closer together.

There is another question: What holds the nucleus together? In a nucleus there are several protons, all of which are positive. Why don't they push themselves apart? It turns out that in nuclei there are, in addition to electrical forces, nonelectrical forces, called nuclear forces, which are greater than the electrical forces and which are able to hold the protons together in spite of the electrical repulsion. The nuclear forces, however, have a short range, their force falls off much more rapidly than $1/r^2$. And this has an important consequence. If a nucleus has too many protons in it, it gets too big, and it will not stay together. An example is uranium, with 92 protons. The nuclear forces act mainly between each proton (or neutron) and its nearest neighbor, while the electrical forces act over larger distances, giving a repulsion between each proton and all of the others in the nucleus. The more protons in a nucleus, the stronger is the electrical repulsion, until, as in the case of uranium, the balance is so delicate that the nucleus is almost ready to fly apart from the repulsive electrical force. If such a nucleus is just "tapped" lightly (as can be done by sending in a slow neutron), it breaks into two pieces, each with positive charge, and these pieces fly apart by electrical repulsion. The energy which is liberated is the energy of the atomic bomb. This energy is usually called "nuclear" energy, but it is really "electrical" energy released when electrical forces have overcome the attractive nuclear forces.

We may ask, finally, what holds a negatively charged electron together (since it has no nuclear forces). If an electron is all made of one kind of substance, each part should repel the other parts. Why, then, doesn't it fly apart? But does the electron have "parts"? Perhaps we should say that the electron is just a point and that electrical forces only act between different point charges, so that the electron does not act upon itself. Perhaps. All we can say is that the question of what holds the electron together has produced many difficulties in the attempts to form a complete theory of electromagnetism. The question has never been answered.¹

¹ Tratto da "The Feynman Lectures on Physics", The New Millennium Edition, di Feynman, Leighton e Sands.

LA CARICA ELETTRICA è **quantizzata**, cioè non esiste una carica più piccola di quella dell'elettrone, che vale $q_E = -1.602564 \cdot 10^{-19}$ C (C sta per Coulomb dall'omonimo celebre fisico francese). Fu misurata in modo definitivo dal fisico Robert Millikan (1869-1953) ed è uguale ma di segno opposto a quella q_P del protone. Ogni corpo carico presenta una carica multipla di $|q_E|$. La **carica complessiva** di un corpo è data dalla somma algebrica delle sue cariche positive $q^+ = n^+ |q_E|$ e negative $q^- = n^- q_E$.

Una **carica puntiforme**, equivalente del *punto materiale* in meccanica, è una carica ideale, concentrata in un punto singolo dello spazio e priva di dimensioni.

LA CARICA ELETTRICA gode del principio fondamentale di **conservazione**. È infatti stato constatato sperimentalmente che in tutti i fenomeni naturali osservati la carica totale di un sistema **isolato** rimane costante. In altri termini,

*la carica totale di un sistema isolato rimane invariata in qualsiasi fenomeno fisico*².

Il principio di conservazione della carica, è considerato valido dalla fisica classica dalla teoria della relatività e dalla meccanica quantistica. La carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume V , può variare in presenza di una **corrente elettrica** che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno. Approfondiremo questo argomento nel seguito (cfr. paragrafo 1.11).

PER DESCRIVERE COME LA CARICA ELETTRICA SI DISTRIBUISCE all'interno di un corpo e/o sulla superficie che lo delimita, introduciamo la **densità volumetrica** di carica ρ_V propria di un corpo di volume V e la **densità superficiale** di carica ρ_S associata ad una superficie S . In figura 1.2 la superficie S è stata suddivisa in tante areole dS_k ($k = 1, 2, \dots$) centrate nel punto (x_k, y_k) . La densità superficiale di carica $\rho_S(x, y)$ su ogni areola dS_k esprime la quantità di carica per unità di superficie che è possibile misurare muovendosi su S . Se si assume che tale densità sia costante e pari a $\rho_{S_k} = \rho_S(x_k, y_k)$ su ogni areola dS_k , allora la carica complessiva Q sulla superficie è, approssimativamente, data da

$$Q \approx \sum_k \rho_{S_k} dS_k . \quad (1.1)$$

Più precisamente, passando al limite in cui le singole areole dS_k si considerano infinitesime, possiamo scrivere,

$$Q = \iint_S \rho_S(x, y) dx dy = \int_S \rho_S dS . \quad (1.2)$$

² Un sistema isolato è un sistema che non scambia con l'ambiente circostante né massa, né calore, né lavoro. Da un punto di vista sperimentale, è un sistema che ha interazioni trascurabili con l'ambiente circostante (probabilmente il solo universo è considerabile un vero sistema isolato).

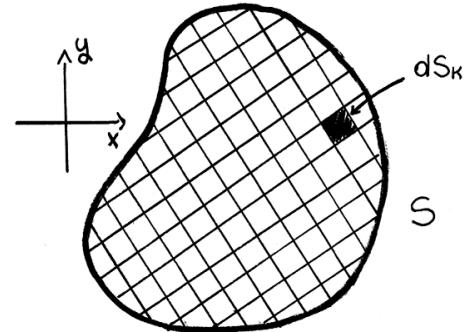


Figure 1.2: Una superficie S suddivisa in areole elementari dS_k .

Analogamente, se considerassimo un volume V , la carica Q in esso contenuta si otterrebbe, a partire dalla densità volumetrica di carica $\rho_V(x, y, z)$, come

$$Q = \iiint_V \rho_V(x, y, z) dx dy dz = \int_V \rho_V dV . \quad (1.3)$$

La densità di carica, tanto superficiale quanto volumetrica, è un grandezza dotata di segno. Qualora sia negativa sta ha rappresentare un densità di carica netta negativa. Analogamente, quando è positiva, rappresentare un densità di carica netta positiva.

1.2 Il campo elettrico

INTRODUCIAMO IN PRIMIS il concetto generale di **campo**. Possiamo darne due definizioni:

1. campo è una regione dello spazio in cui si studia un fenomeno fisico;
2. campo è una grandezza fisica, qualunque, funzione dello spazio ed eventualmente del tempo.

Un campo può essere **scalare**, se descritto da una funzione scalare $f(x, y, z, t)$ dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la temperatura dell'aria in una stanza è un campo scalare), oppure **vettoriale** se descritto da una funzione vettoriale $\vec{A}(x, y, z, t)$ dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la velocità dell'acqua di un fiume è un campo vettoriale).

In figura 1.3, \vec{A} è rappresentato da una terna cartesiana destrorsa (cfr. figura 1.4), identificata dai versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} che indicano la direzione e il verso degli assi x , y , e z , rispettivamente. Il vettore \vec{A} può essere espresso in funzione delle sue proiezioni sugli assi coordinati scrivendo $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$. Il suo *modulo*, grandezza scalare che ne esprime l'*intensità*, è $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

Una *linea di campo* di un campo vettoriale, anche detta *linea di forza* nel caso di un campo di forze, è una curva ideale che ha come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso. Per ogni punto passa una sola linea di campo che perciò si può dire univocamente definita. Le linee di figura 1.5 sono un esempio per il generico campo \vec{E} .

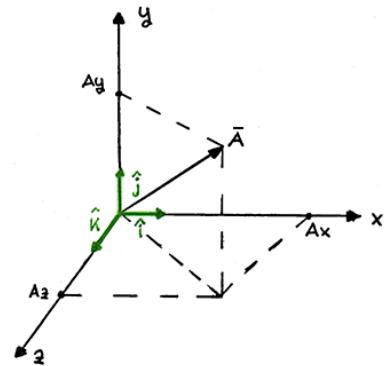


Figure 1.3: Rappresentazione di un vettore in \mathbb{R}^3 .

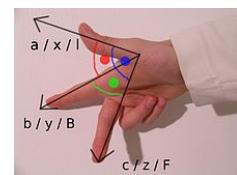


Figure 1.4: Un modo semplice per determinare l'orientazione degli assi di una terna destrorsa o normale è dato dalla *regola della mano destra* che è schematizzata in figura.

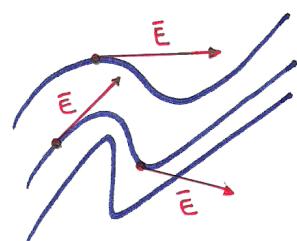


Figure 1.5: Linee di forza: in ogni punto il campo è ad esse tangente. Dove le linee di forza sono maggiormente concentrate il campo è più intenso.

PER POTER DEFINIRE OPERATIVAMENTE IL CAMPO ELETTRICO, introduciamo il concetto di **carica di prova**. Prendiamo una carica puntiforme q positiva e mettiamola in una regione dello spazio³. Se q risente di una forza \bar{F} proporzionale a se stessa, allora *affermiamo* che in quella regione dello spazio è presente un **campo elettrico** $\bar{E} = \bar{F}/q$. \bar{E} è un campo vettoriale che ha direzione e verso dati da \bar{F} , q è infatti positiva per definizione, e modulo proporzionale al modulo di \bar{F} attraverso q^{-1} . Il campo elettrico si misura in NC⁻¹. Rifacendoci alla definizione "1" di campo, ogni regione in cui una carica è soggetta ad una forza proporzionale ad essa è detta campo elettrico.

In generale, se $\bar{E} = \bar{E}(x, y, z, t)$, abbiamo a che fare con un campo elettrico tempo-variante. Si parla invece di campo stazionario (condizione statica) se $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$ e di campo quasi-stazionario se $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} \approx 0$.

Come è possibile generare un campo elettrico? Ad esempio con una carica puntiforme.

1.3 La legge di Coulomb

LA LEGGE DI COULOMB È UNA LEGGE STATICÀ. Prendiamo q_1 e q_2 cariche puntiformi, ferme rispetto ad un osservatore in un sistema inerziale nel vuoto⁴. L'interazione elettrostatica tra q_1 e q_2 (che si manifesta mediante una forza) è proporzionale alle loro cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. La direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse. Il verso dipende dal segno delle cariche.

In figura 1.6 la forza esercitata da q_1 su q_2 è esprimibile come

$$\begin{aligned} \bar{F}_{q_1 q_2} &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e vale $8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$. Se $q_1 q_2 > 0$, allora $\bar{F}_{q_1 q_2}$ è orientata come \hat{r} altrimenti ha il verso opposto. $\bar{F}_{q_2 q_1}$ è applicata in q_1 e ha verso opposto a quello di $\bar{F}_{q_1 q_2}$ perché è opposto ad \hat{r} il verso di $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$.

³ La definiamo carica di prova nel senso che con la sua presenza non è in grado di alterare i fenomeni fisici (elettrici) presenti nella regione di spazio in cui la poniamo. In altre parole, dopo aver definito il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, potremmo dire che il campo prodotto da q è trascurabile rispetto ai campi presenti nella regione di spazio che stiamo considerando. In questo senso possiamo vederla come una *sonda* che immergiamo nello spazio e che ci permette di misurare grandezze elettriche senza influenzarle.

⁴ Un sistema inerziale è un sistema di riferimento tale per cui se un punto materiale libero, cioè non sottoposto a forze o ad una risultante di forze nulle, viene posto in condizione di quiete esso rimane in tale condizione.

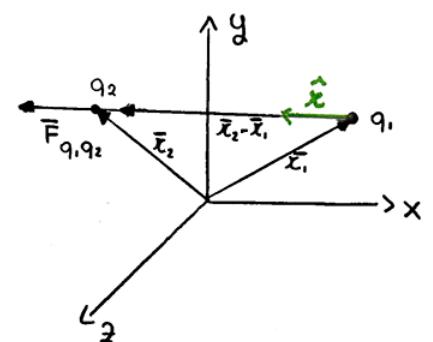


Figure 1.6: Due cariche nello spazio e la forza che esercitano l'una sull'altra.

1.4 Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto

LA CARICA PUNTIFORME CHE GENERA IL CAMPO in figura 1.7 è $Q > 0$, ferma rispetto all'osservatore, in un sistema inerziale, nel vuoto. q è invece una carica di prova che ricordiamo essere positiva per definizione. Se posizioniamo q in P , in base a quanto detto a proposito della forza di Coulomb, rileviamo $\bar{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$ (esercitata da Q su q). Dalla definizione operativa di campo elettrico si ricava quindi

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} . \quad (1.5)$$

Notiamo che se $P \rightarrow \infty$ l'intensità del campo $E(P) \rightarrow 0$. Viceversa, se $P \rightarrow 0$, l'intensità del campo $E(P) \rightarrow \infty$. Il campo elettrico generato da una carica puntiforme è un **campo radiale**, cioè in ogni punto P dello spazio è diretto come un "raggio" che congiunge P alla carica puntiforme che genera il campo. Le linee di forza del campo 1.5 sono radiali.

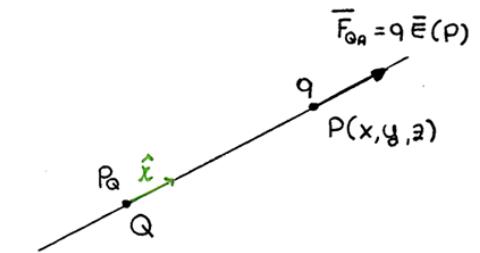
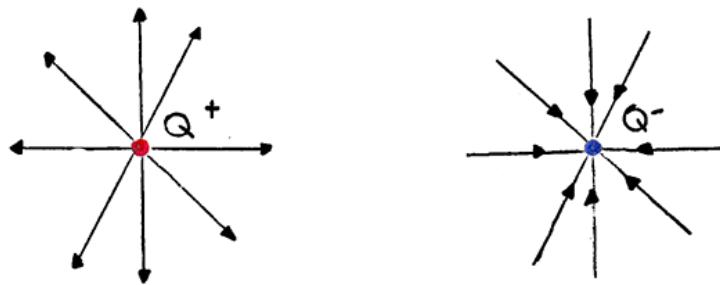


Figure 1.7: Campo elettrico generato da una carica puntiforme.

SE CI FOSERO N CARICHE ELETTRICHE Q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) posizionate in P_k (figura 1.9), potremmo definire un *campo elettrico risultante* nel punto P sovrapponendo gli effetti delle diverse cariche che distano r_k da P , cioè il campo elettrico è additivo.

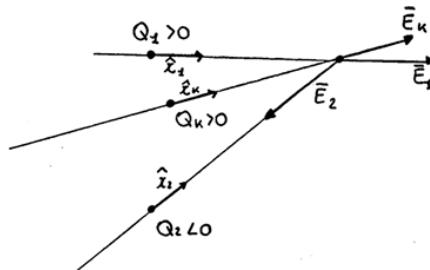


Figure 1.9: Campo elettrico risultante dalla sovrapposizione dei campi generati da più cariche puntiformi.

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^N \bar{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{r_k^2} \hat{r}_k . \quad (1.6)$$

Le linee di forza del campo risultante hanno struttura geometrica più complessa delle linee radiali del campo generato da una singola carica puntiforme. Esempi di linee di forza per campi elettrici generati da cariche puntiformi poste su un piano sono riportati nelle figure 1.10 e 1.11. Un altro esempio di linee di forza è esemplificato in figura 1.12: si riferisce al caso in cui il campo sia generato da distribuzioni piane di carica elettrica.

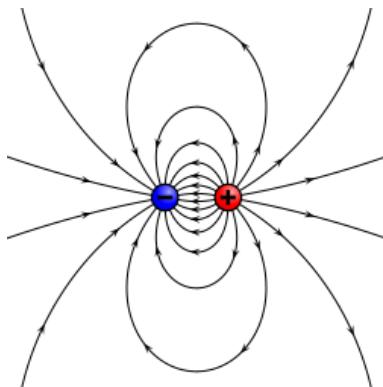


Figure 1.10: Linee di forza del campo elettrico planare generato da un *dipolo elettrico* costituito da due cariche uguali ma di segno opposto.

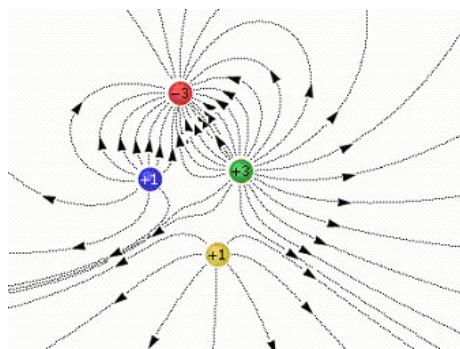


Figure 1.11: Linee di forza del campo elettrico planare generato da più cariche elettriche, di segno e valore diverse.

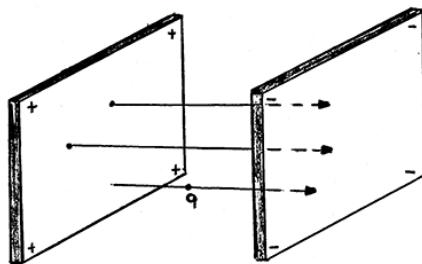


Figure 1.12: Due piastre (di area infinita) caricate di segno opposto generano un campo elettrico uniforme che ha medesima intensità direzione e verso.

1.5 Tensione elettrica

SE UNA CARICA VIENE LASCIATA LIBERA DI MUOVERSI in una regione in cui c'è campo elettrico, essa subisce una forza e quindi si mette in moto. La forza prodotta dal campo elettrico tende a farla muovere lungo le linee di forza del campo stesso⁵. Nel muovere la carica nella regione di spazio in cui è presente il campo elettrico, esso stesso compie lavoro e quindi modifica l'energia della carica. Cosa accade se voglio muovere una carica da un punto A ad un punto B , ad esempio lungo il percorso γ_1 rappresentato in figura 1.13? In questo caso non sarà il campo a compiere lavoro, ma sono io che debbo oppormi alla forza generata dal campo elettrico.

SPEZZIAMO IL PERCORSO γ_1 in tanti piccoli tratti $d\bar{l}_k$ rettilinei, cioè approssimiamo la curva con una spezzata (figura 1.14). Il lavoro che devo compiere lungo il tratto $d\bar{l}_1$ è pari a⁶ $d\mathcal{L}_1 = -q\bar{E}_1 \cdot d\bar{l}_1 = -qE_1 d\bar{l}_1 \cos \alpha_1$ e quindi, sommando i contributi lungo tutto il percorso, ricavo l'approssimazione

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} \approx -q \sum_{k=1}^N E_k d\bar{l}_k \cos \alpha_k . \quad (1.7)$$

Al limite in cui considero infinitesimi i singoli tratti $d\bar{l}_k$, la 1.7 può essere scritta in forma integrale

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = -q \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} . \quad (1.8)$$

La **tensione** è il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) necessario per spostare una carica lungo un determinato percorso in una regione in cui vi sia un campo elettrico. La tensione è quindi una grandezza di linea e la si misura in Volt [V] (JC^{-1}). Una tensione ha "senso" solo dopo aver definito la linea lungo cui la si misura. Ciò non deve stupire, ci sono diverse grandezza di linea; forse la più comune è la distanza. Non si può misurare una distanza se prima non si definisce la linea su cui operare la misura.

SE PRENDI UN ALTRO PERCORSO per andare da A a B e lo chiamo γ_2 , in generale si avrà $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} \neq \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1}$. Siamo interessati a quelle situazioni in cui il lavoro per portare una carica elettrica da A a B non dipende dal percorso. In quel caso il campo elettrico si dice **conservativo** e, come accade ad esempio per il campo gravitazionale, possiamo definire un'**energia potenziale** $W(P)$ [J] che dipende dal generico punto P della regione di spazio in cui viene definita e in cui è presente il campo. Tale funzione consente di esprimere il lavoro

⁵ Da notare che siamo sempre nel vuoto.

⁶ Si noti il segno "−" che compare in $d\mathcal{L}_1$ e quindi nella 1.7 che tiene conto del fatto che per muovere la carica devo compiere un lavoro opponendomi alla forza $q\bar{E}$ esercitata dal campo sulla carica q .

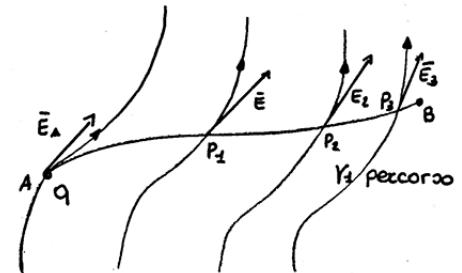


Figure 1.13: Il percorso γ_1 lungo il quale voglio muovere la carica q dal punto A al punto B .

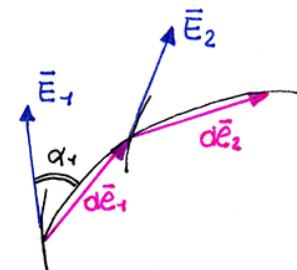


Figure 1.14: Suddivisione del percorso γ_1 in piccoli spostamenti rettilinei lungo i quali il campo elettrico è assunto costante.

che si deve compiere per muovere una carica dal A a B lungo un qualunque percorso come $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} = W(B) - W(A)$.

NORMALIZZANDO LA FUNZIONE W RISPETTO ALLA CARICA q si definisce la funzione $V(P) = W(P)/q$ che chiamiamo **potenziale elettrico** [V]. Definiamo V_{BA} la differenza di potenziale $V_B - V_A$, cioè il lavoro (normalizzato rispetto alla carica e indipendente dalla linea) che dobbiamo compiere per muovere una carica da A a B .

VERIFICHIAMO ADESSO CHE il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q (figura 1.15) ammette un potenziale ovvero è conservativo. Suddividendo il percorso γ in figura 1.15 in tratti rettilinei $d\bar{l}$ rappresentati in figura 1.16, il lavoro necessario per muovere una carica q lungo ciascun tratto $d\bar{l}$ può essere scritto come

$$d\mathcal{L} = -q\bar{E} \cdot d\bar{l} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l} . \quad (1.9)$$

Facendo riferimento alla figura 1.16 notiamo come sia possibile scomporre il vettore $d\bar{l}$ nella somma di due contributi, uno ($d\bar{l}_{\parallel}$) diretto come il versore \hat{r} e uno ($d\bar{l}_{\perp}$) normale ad esso. Possiamo allora riscrivere la 1.9 come

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot (d\bar{l}_{\perp} + d\bar{l}_{\parallel}) = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l}_{\parallel} = \\ &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} dr}_{d\bar{l}_{\parallel}} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \end{aligned} \quad (1.10)$$

e quindi ottenere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{AB}^{\gamma} &= - \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} q \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = -q \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right) , \quad (1.11) \\ &= q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right) = q(V_B - V_A) = qV_{BA} \end{aligned}$$

che non dipende dal percorso ma solo dagli estremi A e B . Il campo elettrico generato da una carica puntiforme ammette quindi un potenziale radiale $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

È IMPORTANTE SOTTOLINEARE come qualunque energia potenziale, e di conseguenza il potenziale elettrico, sia una grandezza definita a meno di una costante additiva. In altre parole, se scrivessimo a partire da $V(P)$ una nuova funzione potenziale $\tilde{V}(P) = V(P) + V_0$

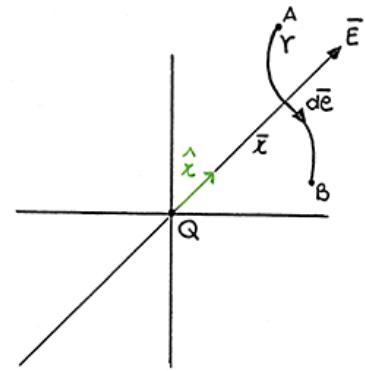


Figure 1.15: Un percorso γ immerso nel campo radiale generato da una carica puntiforme.

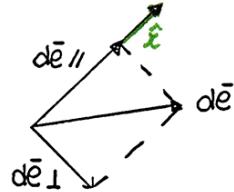


Figure 1.16: Scomposizione del passo infinitesimo $d\bar{l}$.

con V_0 costante, il lavoro necessario per spostare un carica q da A a B (normalizzato rispetto alla carica) resterebbe invariato essendo $\frac{\tilde{L}_{AB}}{q} = \tilde{V}(B) - \tilde{V}(A) = V(B) + V_0 - (V(A) + V_0) = \frac{L_{AB}}{q}$. Per convenzione, si definisce $V(\infty) = 0$ e quindi si ottiene che

$$\frac{L_{\infty,A}}{q} = - \int_{\infty}^A \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_A - V(\infty) = V_A \quad (1.12)$$

e quindi qV_A è il lavoro necessario per portare una carica q dall'infinito al punto A nell'ipotesi che in tutto lo spazio ci sia il medesimo campo elettrico conservativo.

È IMPORTANTE NOTARE CHE se il campo elettrico è conservativo allora il lavoro fatto per spostare una carica lungo un percorso chiuso (figura 1.17) è identicamente nullo:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{L_{AB}^{\gamma_1}}{q} = V_{BA} \\ - \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{L_{BA}^{\gamma_2}}{q} = - \frac{L_{AB}^{\gamma_2}}{q} = -V_{BA} \\ \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{L_{AB}^{\gamma_1} + L_{BA}^{\gamma_2}}{q} = V_{BA} - V_{BA} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

VEDREMO IN SEGUITO introducendo le equazioni di Maxwell che *in condizioni statiche (stazionarietà) il campo elettrico è conservativo*. Ai fini della nostra trattazione, se non esplicitamente specificato, assumeremo la conservatività del campo elettrico nell'ipotesi più debole di quasi-stazionarietà.

1.6 Legge di Kirchhoff per le tensioni

Possiamo quindi enunciare la legge di Kirchhoff per la tensione che, in regime quasi-stazionario, afferma che

lungo una qualunque linea chiusa, la somma algebrica delle tensioni, prese con il segno opportuno in base al verso di percorrenza della linea, è nulla.

A titolo di esempio, in figura 1.18 è rappresentata una linea chiusa γ , che immaginiamo di percorre dal punto A in senso antiorario, in una regione dello spazio in cui è presente un campo elettrico \bar{E} .

Dato che ipotizziamo di essere in regime quasi-stazionario, il campo \bar{E} ammette un potenziale ed è conservativo. Spostandomi dal punto A con l'idea di tornarci, posso immaginare di spezzare il

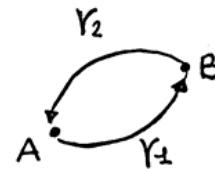


Figure 1.17: Percorso chiuso γ da A ad A passando per B : $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

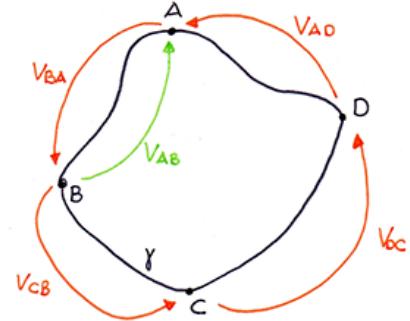


Figure 1.18: Legge di Kirchhoff per le tensioni: un esempio.

percorso in “tappe”: da A a B , da B a C , da C a D e da D in A , caratterizzate dalla tensione V_{BA} , V_{CB} , V_{DC} e V_{AD} , rispettivamente. Posso dunque scrivere

$$-\oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_{BA} + V_{CB} + V_{DC} + V_{AD} = 0 , \quad (1.14)$$

dove le tensioni hanno tutte il segno “+” perché orientate come il percorso. Se avessi deciso di scegliere la tensione V_{AB} invece della tensione V_{BA} , avrei dovuto scrivere $-V_{AB} + V_{CB} + V_{DC} + V_{AD} = 0$, essendo V_{AB} orientata nel senso opposto rispetto al percorso.

1.7 Flusso di un campo vettoriale

DATA UNA SUPERFICIE APERTA S (figura 1.19), identifichiamo il suo bordo γ e decidiamo arbitrariamente di percorrerlo in senso antiorario. Il verso di percorrenza di γ fissa il verso del versore \hat{u}_N normale alla superficie S in ogni suo punto in base alla regola del cavatappi⁷.

Presala generica areola piana dS come in figura 1.19, ϑ è l’angolo fra \hat{u}_N (versore perpendicolare a dS) e \bar{A} (il campo vettoriale di cui voglio definire il flusso $\Phi_S(\bar{A})$ attraverso S) sul piano individuato dai 2 vettori. In modo approssimato, considerando \bar{A} costante e pari a \bar{A}_k su tutte le areole piane dS_k ($k = 1, 2, \dots$) che possono essere individuate su S (ho quindi approssimato S con una superficie “piana a tratti”), si può scrivere $\Phi_S(\bar{A}) \approx \sum_k A_k \cos \theta_k dS_k$. Passando quindi al limite in cui le areole vengono assunte infinitesime possiamo scrivere

$$\Phi_S(\bar{A}) = \int_S \bar{A} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.15)$$

1.8 Legge di Gauss

PRENDIAMO UNA CARICA Q e posizioniamola nel vuoto al centro di una sfera S di raggio R . Il campo elettrico generato da Q è $\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ diretto radialmente rispetto al centro della sfera. Si ottiene

$$\Phi_S(\bar{E}) = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\oint_S dS}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (1.16)$$

essendo $\hat{r} \cdot \hat{u}_N = 1$, poiché il raggio della sfera è orientato come la normale alla sfera in ogni suo punto. In generale, la legge di Gauss per il campo elettrico afferma che, data una superficie chiusa S , il

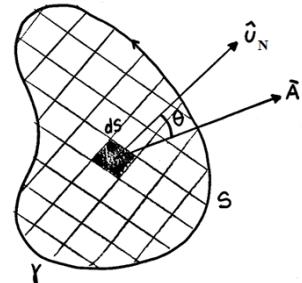


Figure 1.19: Flusso di un campo vettoriale.

⁷ La regola del cavatappi è esemplificata in figura 1.20 in cui la mano che con le dita segue il verso di percorrenza della linea è la mano destra.

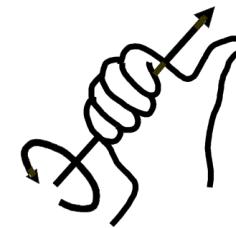


Figure 1.20: La regola del cavatappi.

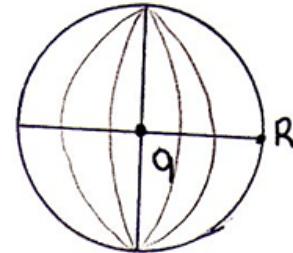


Figure 1.21: Legge di Gauss: un caso particolare.

flusso del campo elettrico \bar{E} attraverso di essa è proporzionale alla carica elettrica netta contenuta al suo interno (figura 1.22):

$$\Phi_S(\bar{E}) = \frac{\sum_k q_k}{\epsilon_0} . \quad (1.17)$$

Si noti che nella 1.17 la carica netta $\sum_k q_k$ all'interno di S potrebbe essere nulla qualora fosse nullo il bilancio tra le cariche positive e quelle negative.

1.9 Dielettrici (o isolanti) e il vettore \bar{P}

IN UN DIELETTRICO NON CI SONO CARICHE LIBERE DI MUOVERSI ma in presenza di un campo elettrico gli atomi e le molecole che lo compongono si **polarizzano** cioè divengono dipoli elettrici orientati in base al campo elettrico locale (figura 1.23). La polarizzazione fa nascere una distribuzione netta di carica positiva e negativa sulle diverse facce del materiale. È il motivo per cui la carta si muove se la mettiamo vicino all'ambra "elettrificata": si polarizza a causa del campo elettrico generato dall'ambra elettrificata e, siccome è leggera, la forza esercitata sulle cariche la sposta vincendo gli attriti e la forza di gravità. Se spacchiamo un dielettrico polarizzato (figura 1.24) si ottengono due pezzi di materia con carica superficiale tanto positiva quanto negativa e potremmo andare avanti fino al livello atomico. Complessivamente, quindi, otterremmo per scissione sempre corpi a carica netta nulla.

La **polarizzazione** \bar{P} di un dielettrico è definita come il momento di dipolo del mezzo per unità di volume. In generale \bar{P} , misurato in Cm^{-2} , è proporzionale al campo elettrico applicato nella forma

$$\bar{P} = \chi_e \epsilon_0 \bar{E} , \quad (1.18)$$

dove χ_e è la **suscettibilità elettrica** del materiale e tipicamente è una quantità positiva. La suscettibilità elettrica descrive la risposta di un materiale ad un campo elettrico esterno.

La carica per unità di superficie di un pezzo di materiale polarizzato, è uguale alla componente di polarizzazione \bar{P} nella direzione normale alla superficie di un corpo.

1.10 La corrente elettrica

LA CORRENTE ELETTRICA I , misurata in Ampere ($A = Cs^{-1}$), è definita, in termini operativi, come la carica elettrica che fluisce, nell'unità di tempo, attraverso una superficie di controllo posta in

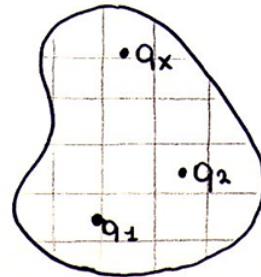


Figure 1.22: Legge di Gauss: un caso più generale.

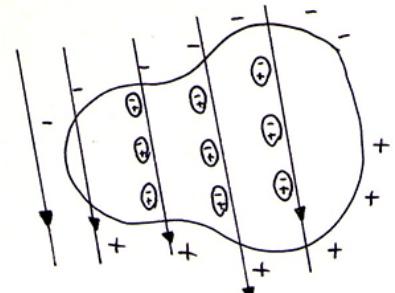


Figure 1.23: Un dielettrico immerso nelle linee di forza di un campo elettrico \bar{E} . \bar{P}_N è la componente di polarizzazione \bar{P} nella direzione normale alla superficie del dielettrico.

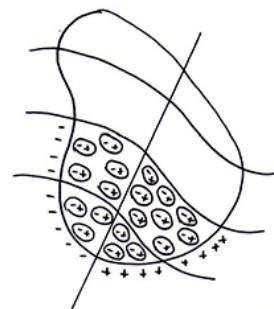


Figure 1.24: La linea di "taglio" separa il dielettrico in due porzioni a carica netta nulla.

una regione dello spazio. La possiamo introdurre facendo riferimento alla situazione semplice e semplificata riportata in figura 1.25. Immaginiamo un piccolo cilindretto di lunghezza $v\Delta t$ che contiene n cariche q che si muovono a velocità costante \bar{v} parallelamente all'asse del cilindretto stesso. Nell'intervallo di tempo Δt , tutte le n cariche attraversano la superficie di base dS del cilindretto.

Si rileva dunque una (intensità media di) corrente I attraverso dS pari a $nq/\Delta t = \Delta Q/\Delta t$. Se si assume $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$, cioè la carica che attraversa dS in Δt viene espressa come l'incremento della carica che aveva attraversato la superficie fino a t_0 , passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene

$$I = \frac{dQ}{dt} . \quad (1.19)$$

È evidente che, in base alla sua definizione, la corrente I è una grandezza scalare. Tuttavia, nei circuiti elettrici che studieremo, indicheremo abitualmente la corrente con una freccia dotata di verso. In questa rappresentazione assumeremo, per convenzione, che una corrente I abbia il verso e la direzione delle cariche positive. In altre parole, quando indicheremo con una freccia il verso in cui fluisce una corrente I , indicheremo che in quel verso si stanno muovendo cariche positive o che cariche negative si stanno muovendo nel verso opposto.

PER INTRODURRE IL CONCETTO DI CORRENTE abbiamo fatto riferimento finora ad una situazione particolare, quella in cui particelle cariche con carica q si muovono con velocità costante \bar{v} , nella medesima direzione e con lo stesso verso. Più in generale, consideriamo una superficie infinitesima dS con versore normale \hat{u}_N , attraverso la quale sono in moto con velocità \bar{v} particelle cariche la cui densità per unità di volume sia ρ_V . La carica netta passante attraverso l'unità di area nell'unità di tempo è dunque

$$\rho_V \bar{v} \cdot \hat{u}_N dS = \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (1.20)$$

essendo $\bar{j} = \rho_V \bar{v}$ (misurato in Am^{-2}) il campo vettoriale che indica la **densità di corrente**. Se indichiamo adesso con S una superficie orientata (mediante il versore \hat{u}_N) che si trovi in una regione dello spazio in cui è presente il campo \bar{j} , la corrente elettrica I attraverso S è espressa come

$$I = \Phi_S(\bar{j}) = \int_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.21)$$

Se S è in ogni suo punto perpendicolare a \bar{j} , la corrente è lo scalare $I = \rho_V v S$.

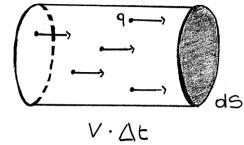


Figure 1.25: Cariche elettriche in moto.

1.11 La formalizzazione del principio di conservazione della carica

NEL PARAGRAFO 1.1 È STATO PRESENTATO il principio di conservazione della carica elettrica e si è concluso che *l'unico modo in cui la carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume V, può variare è in presenza di una corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno*. Avendo introdotto il concetto di corrente elettrica, possiamo adesso formalizzare il principio di conservazione della carica.

CONSIDERIAMO IL VOLUME in figura 1.26 delimitato dalla superficie S e sia q la carica netta che è presente all'interno di esso in un dato istante di tempo t . Possiamo immaginare che ci sia un flusso di cariche, attraverso S , che entrano nel volume e/o che ne fuoriescono. Queste cariche in moto definiscono un campo densità di corrente \bar{j} e la corrente I attraverso S sarà pari a

$$I = \oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.22)$$

La corrente I , in base alla 1.19, esprime la variazione della carica q rispetto al tempo ovvero $\oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS = I = -\frac{dq}{dt}$. Per giustificare la presenza del segno “-” possiamo ragionare nel modo seguente. Ipotizziamo che la carica netta q nel volume V sia positiva. Qualora si rilevi una corrente $I > 0$ (presa con il verso uscente dal volume V) allora o delle carica positiva sta uscendo attraverso S oppure della carica negativa sta entrando. In entrambi i casi, la carica netta interna al volume V sta diminuendo, cioè $\frac{dq}{dt} < 0$. Si procederebbe con un ragionamento analogo qualora la corrente I fosse negativa.

UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO, $q = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS$ e quindi il principio di conservazione della carica può essere formalizzato come

$$\oint_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = 0 , \quad (1.23)$$

dove il campo elettrico \bar{E} è quello sulla superficie S .

1.12 Conduttori

I CONDUTTORI SONO MATERIALI IN CUI CI SONO DEI PORTATORI DI CARICA (elettroni o ioni) in grado di muoversi liberamente attraverso il mezzo. In presenza di un campo elettrico esterno ad essi,

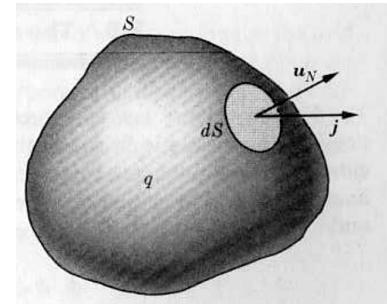


Figure 1.26: La superficie S chiusa racchiude la carica q .

i conduttori manifestano un comportamento detto **induzione elettrostatica**. Le cariche elettriche mobili si accumulano in superficie, disponendosi in modo tale da indurre all'interno del conduttore un campo elettrico che annulla gli effetti di quello esterno.

LE LINEE DI FORZA DI \bar{E} ALL'ESTERNO DEL CONDUTTORE sono perpendicolari alla sua superficie, altrimenti metterebbero in moto la carica superficiale rompendo l'equilibrio dovuto all'induzione elettrostatica. Se \bar{E} all'interno di un conduttore è nullo, $\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l}$ su qualunque percorso γ aperto all'interno del conduttore è nullo. Se ne deduce quindi che *un conduttore è equipotenziale*.

Inoltre, preso un volume V qualunque all'interno del conduttore delimitato da una superficie S , applicando il teorema di Gauss possiamo scrivere⁸

$$\Phi_S(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N ds = 0 = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (1.24)$$

dove Q è la carica netta all'interno del volume V . Se ne deduce quindi che $Q = 0$ ma ciò non vuol dire che in V non ci sia carica elettrica, ma che è nullo il bilancio tra cariche positive e cariche negative. Il ragionamento può essere esteso a superfici chiuse che giacciono all'interno del conduttore e che si estendano fino allo spessore di alcuni strati atomici dalla sua superficie. Nell'intorno della superficie del conduttore, infatti, le cariche sono sbilanciate per generare il campo elettrico necessario a rendere nullo all'interno del volume il campo elettrico complessivo.

COME SI PUÒ generare e quali caratteristiche ha la corrente elettrica in un conduttore?

IN UN MATERIALE CONDUTTORE che abbia come portatori gli elettroni, esiste una struttura reticolare periodica nello spazio, costituita dagli atomi del conduttore privati degli elettroni mobili che sono in grado di spostarsi a causa del legame metallico che li lega debolmente al nucleo. Esso genera un campo elettrico interno, a livello microscopico, che mette in moto disordinato gli elettroni. Questo movimento non genera però un flusso netto di corrente. Presa infatti una superficie di controllo S (figura 1.28), in media nel tempo tanti elettroni la passano in un verso e altrettanti nel verso opposto e quindi si rileva, mediamente, un flusso netto nullo di carica attraverso S . Per avere corrente elettrica I mediamente non nulla, bisogna applicare un campo elettrico al conduttore che generi un moto medio di deriva (*drift*) lungo la direzione del campo stesso. Gli elettroni dovranno subire un moto uniformemente accelerato visto che sono soggetti alla forza $\bar{F} = q\bar{E}$.

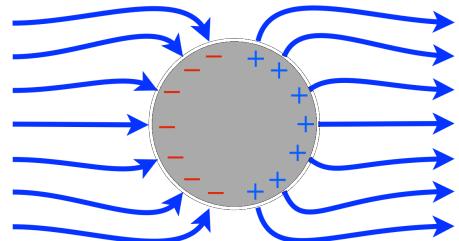


Figure 1.27: Un conduttore inserito in un campo elettrico ne deforma le linee di forza. *"This figure shows a metal sphere placed into an initially uniform electric field. The sphere polarizes, and the counterfield added to the original field causes it to bend so that the field lines enter and leave the sphere in a radial direction. Notice how the field lines terminate at the negative charges on the sphere, and start up again from the positive charges, just as one would expect."*

⁸ Nella 1.24 la costante ϵ_r è la *permittività relativa*, chiamata anche *costante dielettrica*, che caratterizza il mezzo (materiale) che stiamo considerando. È un numero puro e per la maggior parte dei materiali è maggior di 1.

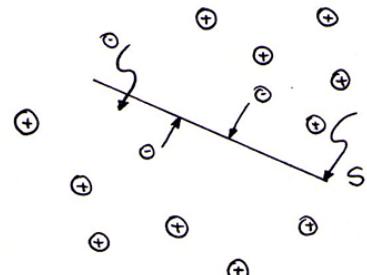


Figure 1.28: Flusso netto di cariche.

MUOVENDOSI, PERÒ, GLI ELETTRONI URTANO contro il reticolo e cedono energia, quindi l'effetto del campo \bar{E} non sarà quello di produrre un moto uniformemente accelerato, come accadrebbe nel vuoto, ma di fare loro assumere una velocità di deriva costante che si sperimenta essere uguale a $\bar{v}_{drift} = -\mu \bar{E}$ con $\mu > 0$ *mobilità* delle cariche libere ($[\mu] = \text{mCs}^{-1}\text{N}^{-1}$). Questa relazione è valida per valori di \bar{E} relativamente bassi, tipici dei componenti elettrici ed elettronici. Per valori elevati di \bar{E} intervengono altri effetti che rendono non più valido quanto detto.

1.13 La legge di Ohm

CONSIDERIAMO UN CILINDRETTO dV di materiale conduttore (figura 1.29) caratterizzato da una densità volumetrica di carica mobile $\rho_V < 0$. La carica negativa degli elettroni mobili in dV sarà pari a $\rho_V dV$. Assumiamo la presenza di un campo elettrico uniforme \bar{E} , all'interno del conduttore, diretto da A verso B . Le sezioni dS in A e B saranno dunque caratterizzate da un potenziale V_A e V_B , rispettivamente, con $\Delta V = V_A - V_B > 0$. Data la lunghezza $dl = \underbrace{\mu E}_{|\bar{v}_{drift}|} \Delta t$ del cilindretto, la quantità di carica libera contenuta nella regione delimitata da A e B , che in Δt , ad opera dell'azione del campo \bar{E} , è in grado di oltrepassare la sezione dS in A , è pari a $\Delta Q = \rho_V \underbrace{\mu E \Delta t dS}_{dV}$. Il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) compiuto dal campo \bar{E} per portare le cariche libere da B e A è pari a

$$\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_B - V_A = -\Delta V . \quad (1.25)$$

Dall'equazione precedente, essendo E costante in dV , si ottiene $V_B - V_A = -Edl$ da cui si ricava banalmente $E = \frac{\Delta V}{dl}$. Possiamo dunque scrivere la relazione

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mu \rho_V dS \frac{\Delta V}{dl} = -\mu |\rho_V| dS \frac{\Delta V}{dl} = -\gamma \frac{dS}{dl} \Delta V , \quad (1.26)$$

dove γ è la *conducibilità* del materiale. La 1.25 ci fornisce la quantità di carica negativa che fluisce attraverso la sezione dS in A e che proviene da B . In base alla convenzione sul verso della corrente, essa ci indica quindi la presenza di una corrente positiva da A verso B tale che $\Delta V = RI$ con $R = \rho \frac{dl}{dS}$ che chiamiamo **resistenza** ($\rho = \gamma^{-1}$ è la *resistività* del materiale).

Si noti il segno “-” nell'espressione della \bar{v}_{drift} dovuto al fatto che l'orientamento di \bar{E} , per definizione (cfr. paragrafo 1.2) riferito ad una carica di prova positiva mentre l'elettrone ha carica negativa.

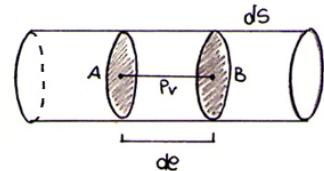


Figure 1.29: Un cilindretto di materiale conduttore.

1.14 La legge di Kirchhoff per le correnti

RECUPERIAMO IL PRINCIPIO di conservazione della carica per enunciare la legge di Kirchhoff per le correnti. In condizioni (quasi-) stazionarie, ovvero in presenza di campi (pressoché) costanti, l'equazione 1.23 diventa

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n}_N dS = 0 , \quad (1.27)$$

ovvero possiamo affermare che

in regime (quasi-)stazionario il bilancio delle correnti entranti e delle correnti uscenti da una superficie chiusa è nullo.

A TITOLO DI ESEMPIO, in figura 1.30, sono riportati alcuni corpi conduttori tagliati da una superficie di controllo S e sono indicate le correnti che fluiscono in essi. Alcune di queste correnti (I_1 e I_5) sono entranti nella superficie di controllo e altre uscenti (I_2, I_3, I_4). La somma di queste correnti costituisce la corrente I complessiva che attraversa S , cioè

$$\sum_{k=1}^5 a_k I_k = I = 0 , \quad (1.28)$$

con $a_k = 1$ se la corrente I_k è uscente da S e $a_k = -1$ altrimenti (è evidente che questa scelta è assolutamente arbitraria, la scelta duale lascerebbe inalterato il risultato).

1.15 Il primo circuito elettrico

CONSIDERIAMO UN FILO MOLTO SOTTILE di materiale conduttore (spira conduttrice), di lunghezza l e sezione S (uniforme), che identifica un percorso chiuso γ (figura 1.31). Esso sarà caratterizzato da una resistenza R che dipende da l, S e dal tipo di materiale.

SUPPONIAMO DI POTER generare un campo elettrico \bar{E} , stazionario, all'interno del conduttore. Tale campo è conservativo e quindi $\oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$. Se ne deduce che il campo \bar{E} non è in grado di generare una corrente costante I all'interno della spira conduttrice dal momento che, in base alla legge di Ohm, è necessaria una differenza di potenziale $V = RI$ per permettere alle cariche libere di percorrere un tragitto γ che, da un punto di partenza all'interno della spira, si snoda all'interno di essa per richiudersi nel punto di partenza stesso. In altre parole, il campo nel compiere il suo lavoro lungo il tragitto γ

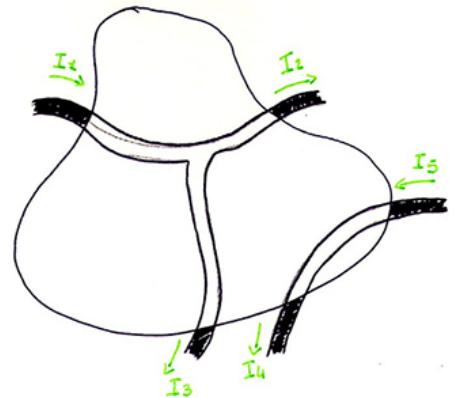


Figure 1.30: La legge di Kirchhoff per le correnti.

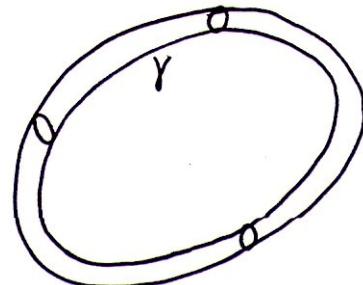


Figure 1.31: Una spira conduttrice.

cede energia alle cariche ma queste la perdono urtando tra loro e contro il reticolo fisso. Quindi, se non viene fornita una quantità netta di energia agli elettroni, essi non possono muoversi continuamente lungo un percorso chiuso.

È STATO POSSIBILE L'UTILIZZO di correnti elettriche solo dopo che Alessandro Volta nel 1799 inventò **la pila**, un convertitore di energia chimica in energia elettrica. All'interno della pila si genera un campo elettrico non conservativo che è in grado di produrre una differenza di potenziale costante V tra i poli + e - della pila stessa. L'effetto che questo produce, quando un filamento di materiale conduttore con resistenza R viene collegato tra i due morsetti, è di mettere in movimento le cariche, generando una corrente I , che nel tragitto lungo il filamento vedono la loro energia diminuire di una quantità $V = RI$ che viene "ripristinata" quando attraversano la pila.

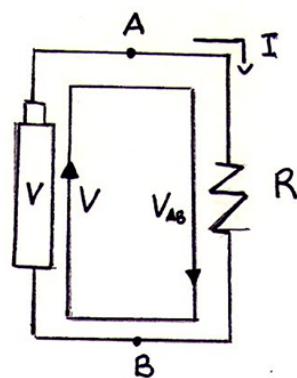


Figure 1.32: Un circuito elementare

2

2.1 La tensione e la corrente: definizione e proprietà

GLI UOMINI HANNO IMPARATO A DESCRIVERE E DOMINARE I FENOMENI ELETTRICI ammettendo che essi siano dovuti ad una proprietà della materia chiamata *carica elettrica*. Esistono due tipi distinti di carica elettrica, indicati convenzionalmente come cariche di tipo positivo e di tipo negativo. Tra le cariche elettriche nascono delle interazione cioè delle forze. È noto che tra due masse di dimensioni trascurabili, cioè puntiformi, cariche dello stesso tipo esiste una forza che tende a respingerle mentre la forza tende ad attrarre l'un l'altra se le cariche sono di tipo opposto (cfr figura 1.1).

GLI ATOMI CHE FORMANO LA MATERIA sono composti a loro volta da particelle che possiedono sia carica positiva che negativa in egual numero e che tendono quindi a neutralizzare vicendevolmente gli effetti. Questo fa sì che *a livello macroscopico i corpi materiali non manifestano particolari effetti elettrici*. Per “scatenare” tali fenomeni è necessario che, attraverso una qualche azione, alcune cariche dello stesso tipo siano in eccesso nel corpo in modo da prevalere su quelle di tipo opposto. È allora evidente che per sottrarre/apportare alcune cariche al corpo è necessario applicare una forza che vinca la forza di tipo attrattivo/repulsivo, rispettivamente, che le lega alle altre cariche del corpo, cioè è necessario compiere un lavoro. Un primo aspetto comune a tutti i fenomeni elettrici è che affinchè essi si manifestino deve esistere una azione attraverso cui si separano cariche elettriche di tipo opposto eseguendo un lavoro. Il primo esperimento in cui l'elettrizzazione della materia avveniva in modo controllato, fu quello eseguito da Alessandro Volta quando riuscì a costruire il primo esempio di pila elettrica. Egli diede l'annuncio alla comunità scientifica della sua invenzione il 20 marzo 1800 con una lettera a Sir Banks, presidente della Royal Society di Londra.

Il contenuto di questo paragrafo è rivolto a coloro che iniziano il percorso attraverso queste dispense a partire da questo capitolo. I concetti introdotti sono di ripasso per tutti coloro che hanno già incontrato la tensione e la corrente nei corsi di fisica di base o che hanno studiato il capitolo 1. Il contenuto di questo paragrafo è quasi integralmente tratto dalla lezione introduttiva al modello circuitale del Prof. Paolo Maffezzoni (<http://home.deib.polimi.it/pmaffezz/Cap1.pdf>).

"Ho il piacere di comunicarvi, Signore, e, per vostro mezzo, alla Società Reale, alcuni risultati sorprendenti ai quali sono arrivato, proseguendo le mie esperienze sull'elettricità eccitata dal semplice contatto mutuo di metalli di specie differente, e pure da quello di altri conduttori, altrettanto differenti fra loro, sia liquidi, sia contenenti qualche umore, al quale essi debbono propriamente il loro potere conduttore. Il principale di questi risultati, e che comprende a un dipresso tutti gli altri, è la costruzione di un apparecchio che per gli effetti, cioè per le commozioni che è capace di far provare nelle braccia, ecc., assomiglia alle bottiglie di Leida, e meglio ancora alle batterie elettriche debolmente caricate. Quest'apparecchio, simile nella sostanza, come farò vedere, e proprio come l'ho costruito, pure nella forma, all'organo elettrico naturale della torpedine, dell'anguilla tremante, ecc. assai più che alla bottiglia di Leida e alle batterie elettriche conosciute, questo apparecchio, dico, vorrei chiamarlo organo elettrico artificiale." [Alessandro Volta]

LA PILA DI VOLTA È COMPOSTA DA DISCHI DI RAME E ZINCO disposti in modo alternato uno sull'altro interponendo tra loro una spugna imbevuta di acqua salata. Per effetto della reazione chimica che si sprigiona tra i due metalli, alcuni atomi con un eccesso di carica positiva, detti ioni positivi, vengono spostati verso l'alto mentre contemporaneamente ioni negativi si spostano all'altro capo. In questo caso, il lavoro proveniente dalla reazione chimica si trasforma nel lavoro elettrico necessario per attuare la separazione delle cariche. Volta si accorse che quando due fili metallici collegati agli estremi della pila venivano impugnati si avvertiva la sensazione di essere attraversati da un fluido, una sensazione che oggi potremmo definire elettrizzante. Alla luce delle nostre conoscenze oggi sappiamo che ciò accade perché le cariche negative (elettroni) separati dal lavoro chimico della pila si ricongiungono con gli ioni positivi muovendosi lungo il cammino che si viene a formare lungo i due conduttori metallici e l'uomo che li impugna. Si viene così a formare un circuito chiuso lungo cui le cariche si mettono in movimento dando vita ad un flusso di carica.

L'ESPERIMENTO METTE IN LUCE due aspetti della manifestazione elettrica:

- esiste un dispositivo, la pila, che funziona come generatore del fenomeno elettrico in quanto è in grado di separare le cariche svolgendo un lavoro;
- si instaura un movimento di cariche lungo un percorso chiuso.

L'esperimento della pila di Volta rappresenta un caso elementare di circuito elettrico e ad ognuno dei due aspetti fondamentali dell'esperimento,

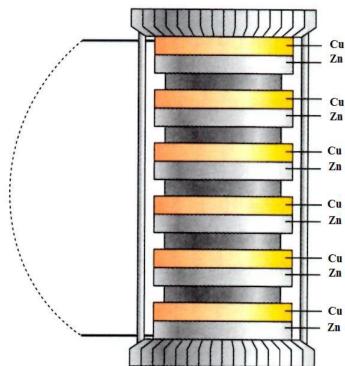


Figure 2.1: Schematizzazione della pila a colonna.

lavoro elettrico e movimento di cariche, siamo in grado di associare una grandezza elettrica descrittiva del fenomeno.

LA TENSIONE ELETTRICA È UNA GRANDEZZA FISICA che noi associamo ad una linea γ orientata nello spazio, cioè su cui fissiamo un verso di percorrenza, che congiunge due punti A e B .

Chiamiamo tensione elettrica lungo la linea γ e la indichiamo come V_{BA}^γ il lavoro elettrico che noi dobbiamo compiere in antagonismo alle forze elettriche per muovere lungo tale linea una carica di prova positiva e unitaria. L'unità di misura della tensione è il volt [V], a memoria ed in onore di Alessandro Volta. Chiaramente il lavoro da noi svolto sarà positivo se il movimento della carica di prova avviene effettivamente in opposizione alle forze elettriche che agiscono su di essa oppure sarà negativo (cioè non svolto da noi ma assorbito) se il movimento avviene concordemente alle forze elettriche. Pertanto *la tensione elettrica è una grandezza dotata di segno*.

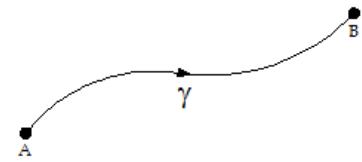


Figure 2.2: La tensione elettrica lungo la linea γ è indicata come V_{BA}^γ .

SI SUPPONGA ORA DI MISURARE IL FLUSSO DI CARICA all'interno di un filo metallico, contando le cariche che passano attraverso una sezione σ del filo. A tal fine fissiamo un verso di attraversamento come positivo cioè orientiamo la superficie σ e contiamo *la quantità netta di carica positiva* che attraversa la superficie. La corrente elettrica in un mezzo conduttore è una grandezza descrittiva associata alla superficie σ orientata, indicata come I^σ , e definita come la quantità di carica elettrica positiva che attraversa la sezione nell'unità di tempo. L'unità di misura della corrente è chiamata ampère [A]. *Anche il valore della corrente è dotato di segno*, ad indicare se il flusso delle cariche positive è concorde o discorde rispetto al senso di attraversamento fissato sulla superficie.

2.1.1 Gli strumenti di misura

PER POTERE RILEVARE OPERATIVAMENTE le grandezze tensione e corrente sono stati costruiti appositi strumenti di misura che chiamiamo *voltmetro* ed *amperometro*. I due strumenti sono composti da un organo di lettura che fornisce il valore della grandezza in modo digitale o analogico, due morsetti contraddistinti dal segno “più” e “meno” e una coppia di cordoni terminanti in due puntali metallici. I cordoni costituiscono la sonda dello strumento *e cioè l'ente geometrico lungo cui o attraverso cui si esegue la misura*. Per la misura di tensione i cordoni del voltmetro costituiscono la linea γ come mostrato in figura 2.4. Si noti che il verso di misura indotto sulla linea è quello che entra dal morsetto “meno” ed esce dal “più”.

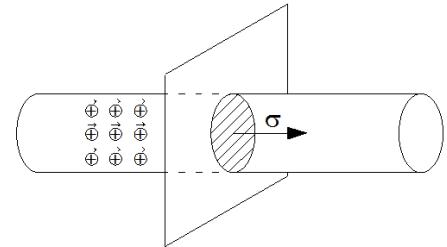


Figure 2.3: Il conduttore viene sezionato identificando così la sezione σ di cui si deve scegliere un verso di attraversamento.

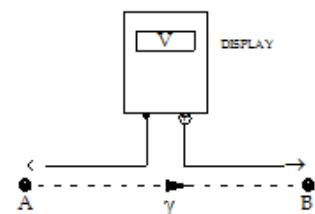


Figure 2.4: La misura ideale richiederebbe che i cordoni si estendano a tutta la linea. Capiremo presto perché questo per i nostri studi non è quasi mai necessario.

La misura di corrente richiede che il filo metallico in cui scorre il flusso di cariche venga sezionato lungo σ come mostrato in figura e che i puntali dell'amperometro si appoggino sulle due facce che si vengono a formare (cfr figura 2.5). In questo caso, l'orientamento indotto sulla superficie σ è il verso di attraversamento che va dal morsetto "più" al morsetto "meno" dell'amperometro.

Osserviamo che da un punto di vista matematico, le misure di tensione o di corrente istituiscono una relazione che ad un ente geometrico astratto fa corrispondere uno ed un solo numero reale (dotato di segno). Si dirà allora, ad esempio, che lungo una certa linea orientata vi è una tensione di $-2.1V$ o di $5.0V$ o che la corrente che attraversa una certa superficie orientata vale $0.5A$ o $-3mA$.

2.1.2 Proprietà della tensione e della corrente

L'uso del voltmetro e dell'amperometro mostra che la misura di tensione e quella di corrente godono della proprietà di essere *dispari* e della proprietà *additiva*. Per la tensione indichiamo con γ una linea orientata diretta dal punto A al punto B e con $-\gamma$ la stessa linea ma orientata nel verso opposto, cioè che va da B ad A . Operativamente la misura di tensione lungo $-\gamma$ si ottiene invertendo l'inserimento dei morsetti del voltmetro. Vale la proprietà di disparità, ovvero

$$V_{AB}^{-\gamma} = -V_{BA}^{\gamma}.$$

La disparità ha l'ovvio significato che il lavoro svolto per spostare la carica di prova da A a B è lo stesso in modulo ma opposto in segno a quello che si svolge per spostarla da B ad A .

ORA CONSIDERIAMO LE LINEE ORIENTATE γ_1 che va da A a B e γ_2 che va da B a C (cfr. figura 2.6). La loro unione dà origine alla linea complessiva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ che va da A a C . Sia $v_1 = V_{BA}^{\gamma_1}$ la tensione misurata lungo γ_1 e $v_2 = V_{CB}^{\gamma_2}$ la tensione misurata lungo γ_2 . Indichiamo poi con $v = V_{CA}^{\gamma}$ la misura lungo la linea complessiva. Vale allora la proprietà additiva della tensione:

$$v = V_{CA}^{\gamma} = V_{CA}^{\gamma_1 \cup \gamma_2} = V_{BA}^{\gamma_1} + V_{CB}^{\gamma_2} = v_1 + v_2.$$

COMBINIAMO ORA LE DUE PROPRIETÀ e consideriamo le tre linee γ_1 , γ_2 e γ_3 orientate come mostrato in figura 2.7 (cioè con γ_2 orientata in modo discorda alle altre) e la linea unione $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3$. Abbiamo eseguito le relative misure di tensione $v_1 = V_{BA}^{\gamma_1}$, $v_2 = V_{BC}^{\gamma_2}$ e $v_3 = V_{DC}^{\gamma_3}$. Dalla proprietà di disparità si ha che $V_{CB}^{-\gamma_2} = -v_2$ e dunque applicando la proprietà di additività concludiamo che

$$v = V_{DA}^{\gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3} = v_1 - v_2 + v_3.$$

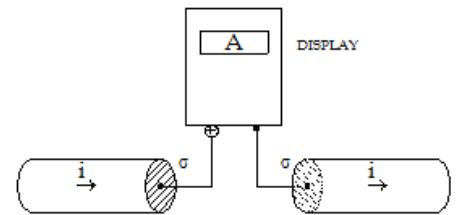


Figure 2.5: Il morsetto "più" e il morsetto "meno" dell'amperometro vengono posizionati in base all'orientamento della superficie σ .

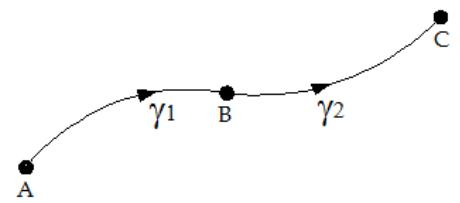


Figure 2.6: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

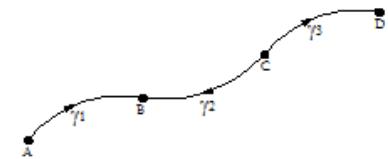


Figure 2.7: $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3$.

La misura di tensione lungo un cammino orientato è dato dalla somma algebrica (cioè con segno) delle misure eseguite lungo i tratti parziali, prendendo con segno positivo le misure eseguite con orientamento concorde al cammino e con segno negativo le discordi.

PASSIAMO A CONSIDERARE LA CORRENTE e indichiamo con σ una superficie orientata come in figura 2.5 e con $-\sigma$ la stessa superficie ma orientata nel verso opposto (cfr. figura 2.8).

Operativamente, la misura di corrente lungo $-\sigma$ si ottiene invertendo l'inserimento dei morsetti dell'amperometro. Vale la proprietà di disparità :

$$I^{-\sigma} = -I^{\sigma}.$$

Ora consideriamo le superfici σ_1 e σ_2 , orientate in modo concorde e che condividono parte della loro frontiera. La loro unione dà origine alla superficie complessiva $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Se $i_1 = I^{\sigma_1}$ e $i_2 = I^{\sigma_2}$ sono i valori delle misure delle correnti attraverso le superfici parziali mentre $i = I^{\sigma}$ è la misura attraverso la superficie complessiva, la proprietà additiva delle correnti dice che:

$$i = I^{\sigma} = I^{\sigma_1 \cup \sigma_2} = I^{\sigma_1} + I^{\sigma_2} = i_1 + i_2.$$

Infine siano σ_1 , σ_2 e σ_3 tre superfici orientate come in figura e cioè con σ_2 orientata in modo discordo alle prime due e sia $\sigma = \sigma_1 \cup (-\sigma_2) \cup \sigma_3$. Si sono eseguite le relative misure di corrente i_1 , i_2 e i_3 . Dalla proprietà di disparità si ha che $i(-\sigma_2) = -i_2$ e dall'additività che:

$$i = I^{\sigma_1 \cup (-\sigma_2) \cup \sigma_3} = i_1 - i_2 + i_3.$$

La misura di corrente attraverso una superficie orientata è dato dalla somma algebrica (cioè con segno) delle misure eseguite attraverso le sottosuperficie parziali che la formano prendendo con segno positivo le misure eseguite con orientamento concorde e con segno negativo le discordi.

2.1.3 Leggi di Kirchhoff delle Tensioni e delle Correnti

LE PROPRIETÀ CHE ABBIAMO INTRODOTTO FINORA per tensione e corrente, possono essere ampliate nell'ipotesi che tali grandezze siano quasi-stazionarie. L'ipotesi di quasi-stazionarietà significa qualitativamente che il flusso del campo elettromagnetico non presenta "significative" variazioni temporali e che lo possiamo assumere costante. In questa ipotesi è possibile derivare a partire dalle equazioni di Maxwell in forma integrale, le leggi di Kirchhoff che andremo adesso ad enunciare e che saranno alla base dell'analisi dei circuiti elettrici. Tali leggi valgono rigorosamente in regime stazionario e con ottima approssimazione nell'ipotesi di quasi-stazionarietà .

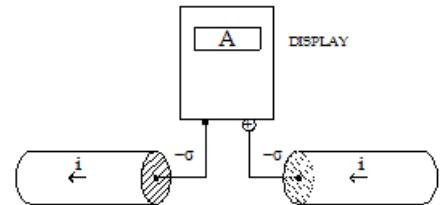


Figure 2.8: La superficie $-\sigma$ è orientata nel verso opposto rispetto alla σ in figura 2.5. Notate che orientare una superficie significa specificare il verso con cui la si attraversa.

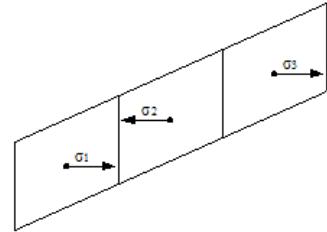


Figure 2.9: $\sigma = \sigma_1 \cup (-\sigma_2) \cup \sigma_3$.

PER QUANTO RIGUARDA LA TENSIONE, affermiamo che *lungo una linea γ chiusa* (cfr. figura 2.10) la tensione elettrica vale zero, $V_{AA}^{\gamma} = 0$.

Supponiamo di dividere la linea chiusa in due percorsi parziali γ_1 e γ_2 come in figura 2.11 e di eseguire le misure parziali di tensione $v_1 = V_{BA}^{\gamma_1}$ e $v_2 = V_{AB}^{\gamma_2}$. Per la proprietà additiva, la legge delle tensioni diventa: $v_1 + v_2 = 0$. Generalizzando, possiamo dedurre la seguente legge fondamentale.

Legge di Kirchoff delle tensioni: la somma algebrica (cioè tenendo conto dei segni) delle tensioni misurate lungo una linea γ chiusa è uguale a zero.

Dalla legge delle tensioni nasce anche un'altra importante conseguenza. Con riferimento alla figura 2.12 si considerino le due linee γ_1 e γ_3 che dal punto $A \equiv B$ portano lungo percorsi alternativi al punto C . Per la legge delle tensioni, con attenzione ai segni, si ottiene che $v_1 - v_3 = 0$ o alternativamente che $v_1 = v_3$, essendo $v_1 = V_{CA}^{\gamma_1}$ e $v_3 = V_{CA}^{\gamma_3}$.

Questo indica che tensioni misurate lungo cammini diversi ma che collegano gli stessi punti estremi A e C danno lo stesso valore. In regime quasi-stazionario dunque, la tensione dipende solo dagli estremi del cammino lungo cui è misurata e viene indicata in modo sintetico come v_{CA} intendendola come la tensione del punto C rispetto al punto A .

Se la tensione v_{CA} dipende solo dagli estremi del percorso, allora possiamo introdurre il concetto di *potenziale elettrico* che indicheremo tipicamente con la lettera con u specificando a quale punto esso si riferisce. Ovvvero, u_A e u_C sono i potenziali nei punti A e C , rispettivamente, e $v_{CA} = u_C - u_A$. Il potenziale elettrico sta al campo elettrico come il potenziale gravitazionale sta al campo gravitazionale: entrambe queste grandezze possono essere introdotte nell'ipotesi di . Tale ipotesi è verificata per il campo elettrico in condizioni di quasi-stazionarietà .

PER CIÒ CHE RIGUARDA LA CORRENTE, in regime quasi-stazionario, vale la seguente proprietà : *la corrente elettrica totale che attraversa una superficie chiusa σ orientata è sempre zero: $I^{\sigma} = 0$* .

Ora si supponga che σ sia formata da due superfici parziali σ_1 e σ_2 orientate positive nel verso uscente come mostrato in figura 2.14 e di avere eseguito le misure parziali di corrente $i_1 = I^{\sigma_1}$ e $i_2 = I^{\sigma_2}$. Dalla suddetta proprietà e dalla additività delle correnti si ha che $i_1 + i_2 = 0$.

Generalizzando possiamo dedurre la seguente fondamentale legge.

Legge di Kirchoff delle correnti: la somma algebrica (cioè tenendo conto dei segni) delle correnti misurate attraverso una superficie σ

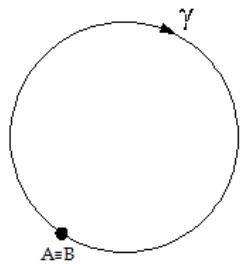


Figure 2.10: In una linea chiusa cioè il punto di partenza e di arrivo coincidono.

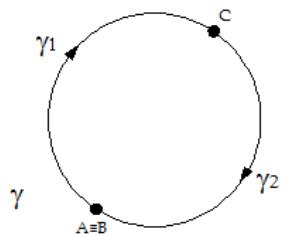


Figure 2.11: La linea chiusa γ è suddivisa in due contributi parziali con il medesimo orientamento.

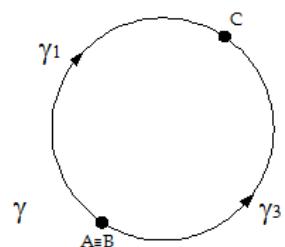


Figure 2.12: Le due linee γ_1 e γ_3 dal punto $A \equiv B$ portano lungo percorsi alternativi al punto C .

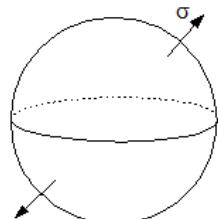


Figure 2.13: La superficie σ , orientata dall'interno verso l'esterno, è adesso chiusa.

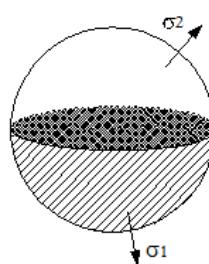


Figure 2.14: Le superfici parziali σ_1 e σ_2 hanno orientamenti opposti.

chiusa è uguale a zero.

Un modo alternativo di enunciare la legge delle correnti può essere dedotto pensando la superficie σ composta dall'unione della superficie σ_1 orientata uscente e dalla superficie σ_3 con orientamento positivo entrante e le relative misure i_1 e i_3 (cfr. figura 2.15). In questo caso si ha che $i_1 - i_3 = 0$ oppure anche che $i_1 = i_3$. Ciò si sintetizza dicendo che la corrente totale che entra in una superficie chiusa è pari alla corrente totale che ne fuoriesce.

2.2 Introduzione alla teoria dei circuiti

LA TEORIA DEI CIRCUITI è una disciplina fondamentale, che pervade tutta l'ingegneria elettrica, e trova applicazione in modo significativo nell'ambito dell'ingegneria elettronica che a sua volta pervade gran parte dello "habitus vivendi" odierno.

IN QUESTO CORSO considereremo solo circuiti elettrici a **parametri concentrati** (lumped circuit), cioè circuiti con dimensioni tali da fare sì che la propagazione elettromagnetica tra due punti qualunque del circuito possa essere e sia considerata istantanea. I circuiti non a parametri concentrati si dicono a parametri distribuiti. Ne sono un esempio le antenne e le linee di trasmissione. In un circuito a parametri concentrati, data l'ipotesi di propagazione istantanea, la posizione reciproca dei componenti e la loro posizione nello spazio non altera il comportamento del circuito. In queste ipotesi, quindi, come avremo modo di sperimentare nel seguito, la geometria del circuito non è discriminante per il suo funzionamento mentre fondamentale è il modo in cui i componenti sono interconnessi. In altre parole, avendo cura di preservare le connessioni tra i componenti, saremo liberi, quando occorre, di "ridisegnare" il circuito senza per questo alterarne il comportamento.

PER UN CIRCUITO A PARAMETRI CONCENTRATI vale di fatto l'approssimazione di quasi-stazionarietà che ci permetterà di eseguire agevolmente bilanci di tensioni e correnti lungo percorsi chiusi e attraverso superfici chiuse, rispettivamente, come descritto nel paragrafo precedente.

LA TEORIA DEI CIRCUITI si occupa dello studio di **circuiti ideali**, che sono *modelli* di circuiti fisici. Un circuito fisico è il risultato dell'interconnessione di componenti fisici (dispositivi). La teoria dei circuiti, invece, studia l'interconnessione di **componenti ideali** che modellano, in modo più o meno dettagliato in base alle esigenze

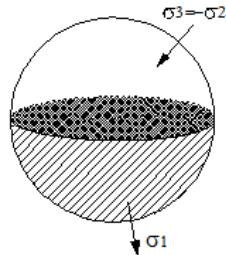
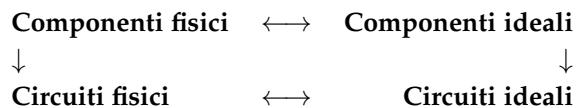
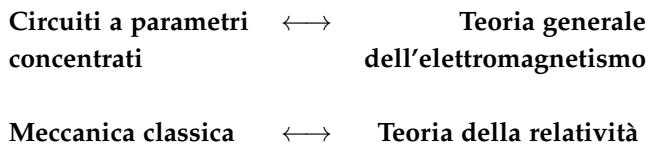


Figure 2.15: La superficie σ_3 è orientata dall'esterno verso l'interno. Con riferimento alla figura 2.14, quindi $\sigma_3 = -\sigma_2$ e per la disparità $I^{\sigma_3} = -I^{\sigma_2}$.

specifiche, i componenti fisici. Il suo scopo è quello di predire il comportamento di un corrispondente circuito fisico (con diversi gradi di approssimazione) in termini di correnti e tensioni (ai terminali) e non si occupa dei fenomeni elettromagnetici, meccanici, termici o chimici che si manifestano nei componenti fisici e che sono, eventualmente, alla base del loro funzionamento.



NELLO SCHEMA SEGUENTE è evidenziato come, in termini qualitativi, la teoria dei circuiti, che si occupa di circuiti a parametri concentrati, sta alla teoria generale dell'elettromagnetismo come la meccanica classica sta alla teoria della relatività . Questo accostamento vuole solo evidenziare come la teoria dei circuiti, che utilizza modelli semplificati dei componenti fisici (che costituiscono i componenti o elementi circuituali), sia in grado di descrivere con ottima approssimazione il comportamento dei circuiti reali che potrebbero, in modo assai più complesso, essere studiati mediante le leggi generali dell'elettromagnetismo. Allo stesso modo, la meccanica classica è in grado di descrivere fenomeni fisici di interesse applicativo in modo più semplice di quanto non si dovrebbe fare ricorrendo alla più completa teoria della relatività . È comunque opportuno avere ben presente che, tanto la teoria dei circuiti quanto la meccanica classica, si basano su modelli (più) semplificati della realtà e che, al cadere delle ipotesi sulla quale si basano, non sono in grado di descrivere e/o predire in modo corretto i fenomeni fisici di nostro interesse.



2.3 Componenti e variabili descrittive

IL **componente** è un oggetto limitato da una superficie chiusa, detta **superficie limite del componente** da cui “escono” uno o più **terminali** alle estremità dei quali si trovano i **morsetti** (figura 2.16). Saranno di interesse solo i componenti con 2 o più terminali, poiché, come si farà vedere, i componenti ad un solo terminale hanno obbligatoriamente caratteristiche elettriche non rilevanti ai fini di questo corso.

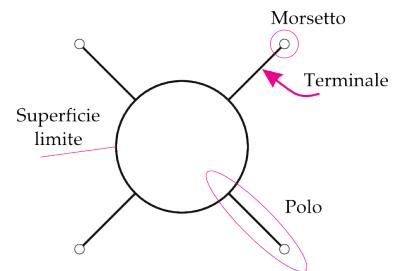


Figure 2.16: Il componente, i suoi terminali e i suoi morsetti.

Attraverso i terminali possiamo raggiungere altri componenti ai quali collegarci con i morsetti (figura 2.17) per formare così circuiti elettrici o meglio reti elettriche. Per essere rigorosi, si definisce circuito la semplice interconnessione di componenti (anche più di due) che formino una sola maglia (il concetto sarà chiarito in seguito) come in figura 2.17. Interconnessioni più complesse, che formino cioè più maglie, si definiscono reti elettriche. Per semplicità, utilizzeremo indifferentemente le parole circuito e rete.

In base al numero di terminali un componente si chiamerà

- 2-terminali → bipolo
- 3-terminali → tripolo
- 4-terminali → quadripolo
- :
- n -terminali → n -polo

In generale non viene considerato ciò che “accade” all’interno della superficie limite del componente (cioè i fenomeni elettromagnetici, ma anche meccanici, chimici o termici, che sono responsabili del suo funzionamento specifico), ma si è interessati alle grandezze elettriche misurabili ai morsetti (cioè dall’esterno) che sono in grado di caratterizzare il comportamento del componente ed è fondamentale che ciò avvenga dove il campo è conservativo. Tali grandezze possono essere corrente o tensione ma andrebbero bene anche la carica elettrica o il flusso magnetico. Tuttavia, queste ultime sono più difficili da misurare e quindi ci limiteremo all’uso della corrente e della tensione in qualità di **variabili descrittive**.

L’**ipotesi fondamentale**, che si compie nel confinare all’interno della superficie limite i fenomeni fisici che descrivono il comportamento di un dato componente, riguarda il fatto che tali fenomeni non influenzano il “mondo esterno” se non attraverso i poli con i quali il componente può collegarsi ad altri componenti. I fenomeni che non soddisfano la quasi-stazionarietà dei campi vengono confinati, se presenti, all’interno della superficie limite. Per questo motivo, i percorsi chiusi che tracceremo e che ci serviranno per bilanciare le tensioni, così come le superfici chiuse attraverso le quali bilanceremo le correnti, saranno sempre adeguate a soddisfare le leggi di Kirchhoff purché non giacciono o non taglino la superficie limite dei componenti. Al di fuori delle superficie limite dei componenti il campo elettromagnetico si assumerà quindi quasi-stazionario in linea con il modello a parametri concentrati.

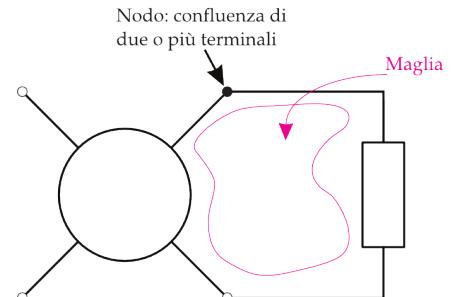


Figura 2.17: Una connessione elementare tra componenti

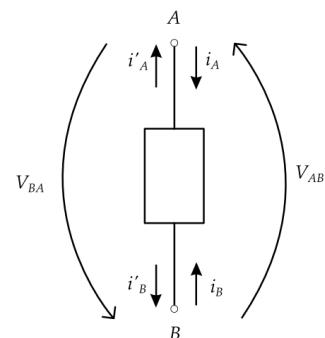


Figura 2.18: Le possibili correnti e tensioni descrittive per un bipolo.

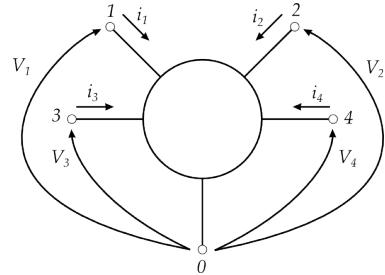


Figura 2.19: Tensioni e correnti descrittive per un n -polo scelte sulla base di un arbitrario morsetto (e terminale) di riferimento.

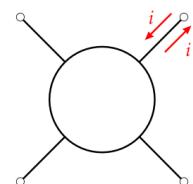


Figura 2.20: La corrente i e la corrente i' non sono indipendenti: $i = -i'$.

CIASCUN COMPONENTE è caratterizzato da **un'equazione descrittiva o costitutiva** che è costituita da una o più relazioni che legano tra loro le variabili descrittive del componente. Quante correnti e quante tensioni servono, dato un n -terminali, per descrivere in modo esaustivo il suo comportamento? In altre parole, quante correnti e quante tensioni descrittive servono per costituire un insieme completo di tali variabili? È facile infatti convincersi, facendo ad esempio riferimento a figura 2.20, che per ciascun terminale è possibile misurare due "diverse" correnti, una entrante e una uscente dalla superficie limite del componente. Tuttavia è altrettanto facile convincersi che queste due "diverse" correnti non portano informazioni diverse sul comportamento del componente essendo, di fatto, l'una l'opposta dell'altra (la verifica a partire dalla legge di Kirchhoff per le correnti è semplice e lasciata allo studente).

CONCENTRIAMOCI SUL BIPOLO rappresentato in figura 2.18. Utilizzando le leggi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni possiamo scrivere

$$\text{KCL} \rightarrow \begin{cases} i_A = -i'_A \\ i_B = -i'_B \\ i_A = -i_B \end{cases} . \quad (2.1)$$

$$\text{KVL} \rightarrow V_{AB} = -V_{BA}$$

Sono sufficienti quindi solo due variabili descrittive, ad esempio la corrente i_A e la tensione V_{AB} .

QUESTO RISULTATO può essere esteso ad un n -terminali per il quale sono necessarie e sufficienti $n - 1$ correnti e $n - 1$ tensioni descrittive. Un modo possibile per selezionare un insieme completo di tali variabili nel caso di un n -terminali è esemplificato in figura 2.19. In particolare, si sceglie un morsetto di riferimento rispetto al quale misurare le tensioni dei restanti $n - 1$ morsetti, ai quali si misura anche la corrente di terminale. È evidente che la corrente al terminale corrispondente al morsetto di riferimento è banalmente deducibile dalle altre $n - 1$ correnti misurate. Questo modo di procedere per determinare le $(n - 1)$ tensioni e correnti indipendenti è il più semplice e porta ad introdurre $(n - 1)$ lati (conetto che sarà più chiaro tra pochissimo). A ciascun lato si è associata una tensione (lungo esso) e una corrente (che scorre in esso). Definiamo **pore** i lati che sono stati ricavati e su cui misuriamo una tensione e una corrente omologhe (tensione tra il nodo corrispondente all'estremo dell'arco e il nodo di riferimento e la corrente che scorre dal nodo estremo).

Nel caso di un tripolo, in figura 2.21 è evidenziata una possibile scelta alternativa a quella finora illustrata. In particolare, nella parte

sinistra della figura, si vede come l'insieme alternativo di variabili descrittive scelte (V_{BA}, V_{CB}) e (\hat{i}_B, \hat{i}_C) , può essere ricavato a partire da quello canonico riportato a destra. È facile infatti convincersi che $\hat{i}_C = -i_C$ e che $V_{CB} = V_{CA} - V_{BA}$.

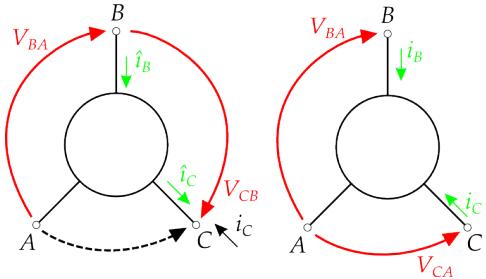


Figure 2.21: Le variabili descrittive per un tripolo: alcune scelte possibili.

2.4 Cenni di teoria dei grafi

MOLTI RISULTATI legati alla topologia delle reti elettriche (cioè, su come i componenti sono interconnessi tra loro e non su come si comportano) si basano sulla **teoria dei grafi**. La introduciamo in modo molto limitato nonostante sia uno strumento concettuale importante, ampiamente utilizzato in molti settori, con ricadute anche nel campo informatico.

UN **grafo** è COSTITUITO DA un insieme di n **nodi** e un insieme di l **lati**. Se i lati hanno un'orientamento, allora si parla di **grafo orientato**. Usiamo l'esempio riportato in figura 2.22 per introdurre alcuni concetti base.

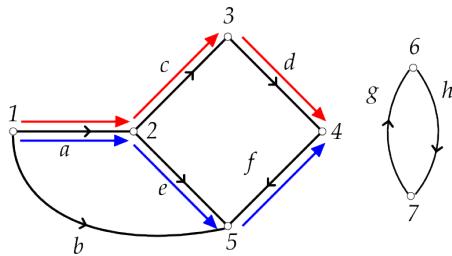


Figure 2.22: $n = 7$ nodi e $l = 8$ lati. I lati orientati del grafo sono rappresentati in nero e sono etichettati con una lettera. I nodi sono etichettati invece con un numero. La scelta delle etichette è assolutamente arbitraria. In rosso e in blu sono evidenziati due diversi percorsi che si possono identificare sul grafo.

Percorso Catena di lati che congiunge due nodi, gli estremi del percorso. Nel percorso ogni nodo e ogni lato si incontrano una sola volta. In figura 2.22 sono riportati due esempi di percorso in rosso ed in blu. Nella definizione di un percorso, l'orientamento relativo dei lati che lo costituiscono rispetto al senso di percorrenza del percorso non è discriminante. Ad esempio il lato f in figura 2.22 è orientato in modo discorde al percorso.

Maglia Percorso chiuso in cui ciascun nodo ha uno e un solo lato che "entra" ed uno ed un solo lato solo che "esce" (nodi di ordine due). In figura 2.22 il percorso "dal nodo 6 al nodo 6" ($6 \rightarrow 7 \rightarrow 6$), che comprende il lati g ed h e i nodi 6 e 7, è una maglia così come, ad esempio, il percorso "da 2 a 2" ($2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$) che comprende i lati c, d, f ed e e i nodi 2, 3, 4 e 5.

Sottografo Un sottoinsieme di nodi e lati di un grafo. Ad esempio, in figura 2.23 è mostrato un sottografo del grafo in figura 2.22 che si riduce all'insieme di nodi $\{1, 6, 7\}$ e all'insieme di lati $\{g, h\}$.

Grafo connesso Un grafo si dice connesso se esiste sempre un percorso che unisce due suoi nodi qualsiasi.

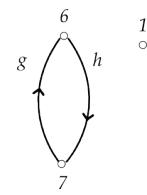


Figure 2.23: Un sottografo del grafo in figura 2.22. Da notare il nodo 1 che, non raggiunto da nessun lato del sottografo, rimane *appeso*

Albero È un grafo aciclico (non ha percorsi chiusi) e connesso. Dato un grafo connesso è possibile definire un albero ad esso associato prendendo un suo sottografo che contenga tutti ed n i suoi nodi e gli $n - 1$ lati che li connettono formando un percorso che rispetti la definizione di albero (aciclicità e proprietà di connessione). Due esempi di albero sono mostrati in figura 2.24.

Grafo incernierato È un grafo che contiene nodi *cerniera*. Un nodo si dice cerniera se, eliminando tutti i lati incidenti in esso, il sottografo risultante è composto da un nodo appeso (il nodo cerniera) e due sottografi tra loro non connessi (figura 2.25).

2.5 Grafo di un componente e grafo di un circuito

SE PER OGNI COMPONENTE definiamo un grafo e poi interconnettiamo i grafi tra loro otteniamo il grafo di un circuito. Il grafo di un circuito dipende solo dalla topologia della rete (cioè da come i componenti sono tra loro interconnessi) e non dalla natura (equazioni caratteristiche) dei componenti.

PER DEFINIRE IL GRAFO DI UN COMPONENTE a n terminali possiamo prendere un nodo di riferimento e costruire un grafo che ha come nodi gli n morsetti e come $n - 1$ lati le tensioni descrittive del componente prese tra $n - 1$ morsetti e il morsetto di riferimento. Un esempio è mostrato in figura 2.26. Per come sono state scelte le tensioni e le correnti descrittive del tripolo in 2.26, è evidente che il grafo del componente potrà essere *orientato come le tensioni o come le correnti descrittive*. Nell'orientamento secondo le tensioni, ciascun lato ha una freccia orientata come la tensione descrittiva identificata tra i due morsetti nei quali incide il lato stesso. Nel grafo orientato come le correnti, i lati sono orientati con una freccia nella direzione fissata dalla corrente presa sul terminale che non identifica il morsetto di riferimento. Il grafo delle correnti e il grafo delle tensioni del componente coincidono (a meno dell'orientamento dei lati) e ciascun lato identifica una coppia di corrente e tensione descrittiva. In questo caso, ciascun lato prende il nome di **porta**, e la tipologia di grafo viene detto **a stella**.

ESISTONO PERO ALTRÉ SCELTE possibili per definire il grafo di un componente che non siano quella a stella. Un esempio è mostrato in figura 2.27. In questo caso le tensioni e le correnti descrittive del tripolo sono state scelte diversamente. Si arriverà quindi ad un grafo

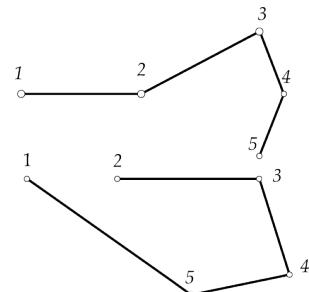


Figure 2.24: Del grafo in figura 2.22 non è possibile ottenere l'albero associato perché si tratta di un grafo non connesso. Se ci limitiamo però a considerare il sottografo composto dai nodi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e dai lati $\{a, b, c, d, e, f\}$ è possibile identificare i due alberi evidenziati in questa figura che hanno 5 nodi e 4 lati.

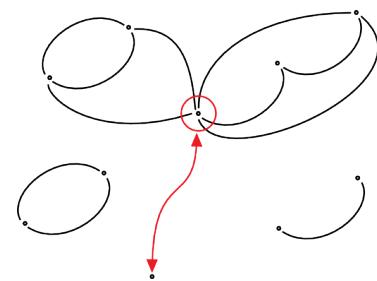


Figure 2.25: Un esempio di grafo incernierato e di nodo cerniera che rimane appeso dopo aver eliminato i lati che in esso confluiscono.

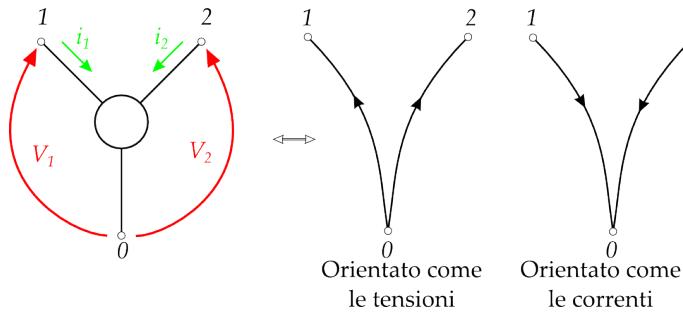


Figure 2.26: Tripolo: grafo a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

delle tensioni descrittive e ad un grafo delle correnti descrittive come riportato in 2.27.

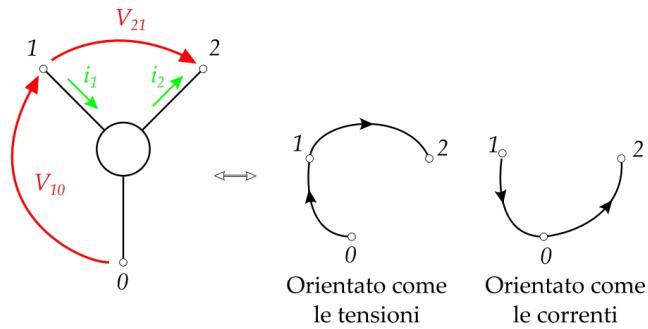


Figure 2.27: Tripolo: grafo non a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

NEL CASO IN CUI si adotti la rappresentazione a stella per tutti i componenti, è possibile definire un legame tra l'orientamento delle tensioni e delle correnti: così facendo, un solo grafo sarà sufficiente per definire in modo univoco la topologia del circuito. Per definire un legame tra tensioni e correnti descrittive, si possono adottare due diverse convenzioni: la **convenzione normale o degli utilizzatori** e la **convenzione dei generatori**. Sceglieremo tipicamente la prima per la quale, dato un lato del grafo di un componente orientato come le tensioni, si fissa il verso della corrente in quel lato in modo che scorra nel verso opposto a quello indicato dalla tensione (figura 2.28). Analogamente se il grafo fosse orientato come le correnti. La convenzione dei generatori orienta invece tensioni e correnti in modo concorde.

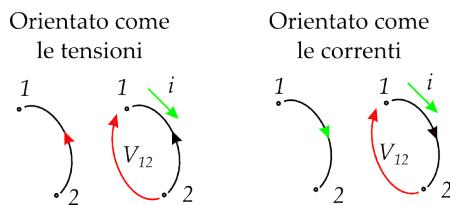


Figure 2.28: Lato di un grafo orientato come la tensione o come la corrente nell'ipotesi di convenzione normale o degli utilizzatori.

2.6 Esercizio: circuito e grafo

PER ESERCIZIO si provi a disegnare il grafo del circuito, orientato come le tensioni con convenzione normale del circuito in figura 2.29. Quanti nodi n e quanti lati l ha il grafo del circuito?

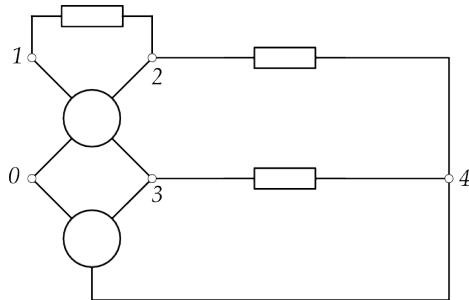


Figure 2.29: Schema di un circuito di cui si vuole disegnare il grafo corrispondente

Il grafo ha $n = 5$ nodi e $l = 8$ lati dato che il quadripolo contribuisce con 3 lati, il tripolo con 2, e ciascuno dei tre bipoli con un lato. Dal momento che l'esercizio richiede di utilizzare la convenzione normale, il grafo del circuito orientato come le tensioni deve coincidere, a meno del verso di orientamento dei lati, con il grafo orientato come le correnti. Affinché ciò sia vero, dobbiamo rappresentare ciascun componente mediante il suo grafo a stella: sceglieremo quindi per ciascun componente le tensioni e le correnti descrittive (rispettivamente in rosso e in verde in figura 2.30) rispetto a un morsetto di riferimento, facendo attenzione a scegliere le correnti in modo da rispettare la convenzione degli utilizzatori (figura 2.30). Il grafo del circuito è mostrato in figura 2.31.

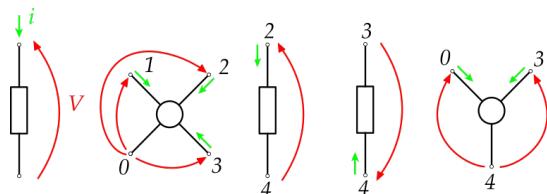


Figure 2.30: Grafo dei componenti che costituiscono il circuito in figura 2.29.

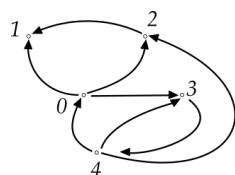


Figure 2.31: Grafo del circuito in figura 2.29.

2.7 Nota sulle equazioni algebriche

DATA UNA FUNZIONE f definita su di un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e che assume valori reali¹, l'espressione

$$f(x) = b , \quad (2.2)$$

con $b \in \mathbb{R}$ costante che non dipende da x , è un'equazione **algebrica** nella variabile x e le sue soluzioni (ammesso che esistano) sono l'insieme dei valori che possono essere assunti da x per cui la 2.2 sia identicamente soddisfatta.

L'equazione 2.2 si dice **lineare** se la funzione f è lineare in x ovvero se, presi due valori $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ appartenenti a D e due costanti reali α_1 ed α_2 non nulle,

$$f(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 f(x^{(1)}) + \alpha_2 f(x^{(2)}) . \quad (2.3)$$

Una funzione g di più variabili, cioè $g(x_1, x_2, \dots, x_N) : D_N \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definisce un'equazione algebrica in N incognite del tipo

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = b , \quad (2.4)$$

con $b \in \mathbb{R}$ costante che non dipende da (x_1, x_2, \dots, x_N) . La 2.4 si dice lineare se g è una funzione lineare in (x_1, x_2, \dots, x_N) ovvero se, prese due N -ple $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)})$ e $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)})$ appartenenti a D_N e due costanti reali α_1 ed α_2 non nulle,

$$\begin{aligned} g\left(\alpha_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right)\right) &= \\ &= \alpha_1 g\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2 g\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prese M equazioni del tipo 2.4, possiamo definire il **sistema** di M equazioni algebriche in N incognite ($M \geq 2$ e, in generale, $N \neq M$)

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_1 \\ \vdots \\ g_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_M \end{cases} , \quad (2.6)$$

di cui i sistemi lineari sono un caso particolare.

Le M equazioni del sistema 2.6 sono **linearmente dipendenti** se esiste almeno un insieme di M costanti (k_1, \dots, k_M) , di cui almeno 2 non nulle, tali che

$$\sum_{j=1}^M k_j [g_j(x_1, x_2, \dots, x_N) - b_j] = 0 \quad (2.7)$$

per qualunque N -pla $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Le M equazioni algebriche sono linearmente indipendenti se e solo se non sono linearmente dipendenti.

¹ Le definizioni che daremo in questo paragrafo sono limitate a funzioni reali di variabile reale ma possono essere estese in modo del tutto naturale al campo complesso \mathbb{C} .

2.8 Le leggi di Kirchhoff

AVENDO INTRODOTTO gli “strumenti” basilari per studiare la topologia di un circuito possiamo introdurre le leggi di Kirchhoff per le correnti (KCL) e per le tensioni (KVL) non come un prodotto delle leggi dell’elettromagnetismo ma come se fossero assiomi della teoria dei circuiti.

KVL-I: dato un circuito che opera in regime stazionario, con n nodi e il cui grafo sia connesso, prendiamo uno dei suoi nodi come riferimento u_0 per misurare il potenziale elettrico e indichiamo con u_1, \dots, u_{n-1} i rimanenti potenziali di nodo². Ad ogni istante di tempo t , la tensione V_{kj} misurata tra il nodo k e il nodo j è pari a $u_k - u_j$.

KVL-II: dato un circuito che opera in regime stazionario, con n nodi e il cui grafo sia connesso, preso un percorso chiuso che passi per m nodi del grafo (ad ogni istante di tempo t), la somma algebrica delle tensioni fra i nodi consecutivi che si incontrano lungo il percorso è nulla. La somma si intende algebrica poiché le tensioni che si incontrano lungo il percorso e che sono orientate come il verso di percorrenza del percorso stesso vengono prese con il segno “+”. Quelle orientate invece nel senso opposto vengono prese con il segno “-”.

È FACILE VERIFICARE che i due enunciati della legge di Kirchhoff per le tensioni sono equivalenti. Come esempio consideriamo il circuito in figura 2.32 del quale, dopo aver indicato le tensioni descrittive dei componenti che lo costituiscono, abbiamo ricavato il grafo orientato come le tensioni. Utilizzando le KVL-I e scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico, possiamo scrivere $V_{21} = u_2 - u_1$, $V_{32} = u_3 - u_2$, $V_{31} = u_3 - u_1$, $V_{10} = V_1 = u_1$, $V_{20} = V_2 = u_2$ e $V_{30} = u_3$. Utilizzando poi le KVL-II lungo il percorso segnato in verde e percorso in senso orario possiamo scrivere $V_{10} + V_{21} - V_{23} - V_{30} = 0$. Sostituendo le relazioni dedotte dalle KVL-I al primo membro della KVL-II, si ottiene $u_1 + u_2 - u_1 - (u_2 - u_3) - u_3$ che è identicamente nullo come richiesto da quest’ultima.

KCL: Prendiamo una superficie chiusa orientata che tagli solo terminali e che non attraversi superfici limite dei componenti. Per un circuito che opera in regime stazionario, (in ogni istante di tempo t), la somma algebrica di tutte le correnti uscenti e entranti dalla superficie orientata sopra definita è nulla. La somma si intende

² Senza perdere generalità possiamo assumere $u_0 = 0$.

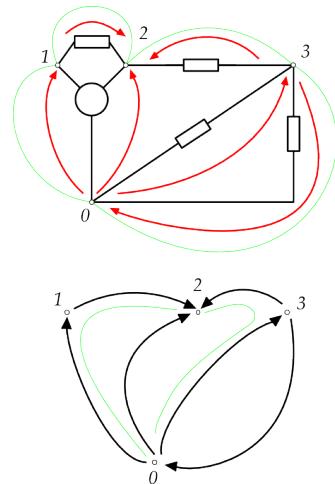


Figure 2.32: Equivalenza tra KVL-I e KVL-II.

algebrica nel senso che, avendo ad esempio scelto di orientare la superficie positivamente dall'interno verso l'esterno, le correnti uscenti da essa saranno prese con segno “+” e quelle entranti con segno “−”. Viceversa se si fosse scelto di orientare la superficie positivamente dall'esterno verso l'interno.

Per esempio si consideri il circuito in figura 2.33 del quale si è ricavato il grafo orientato come le tensioni. Entrambe le due superfici rappresentate in figura sono state orientate positivamente dall'esterno verso l'interno. In questo caso il bilancio delle correnti alla superficie più piccola tracciata intorno ad uno dei nodi del grafo è pari a $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ mentre il bilancio alla superficie più grande è $i_3 - i_4 - i_5 = 0$. Notiamo che le equazioni di Kirchhoff per le tensioni e per le correnti sono equazioni lineari algebriche.

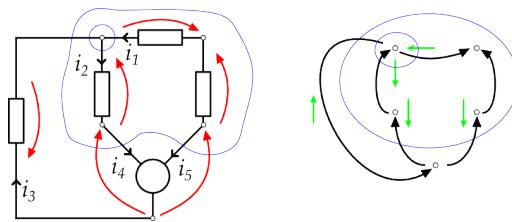


Figure 2.33: Un esempio di superfici chiuse da impiegare per scrivere i bilanci in corrente di tipo KCL.

UNA DOMANDA che è necessario porsi è la seguente: *dato un circuito a parametri concentrati il cui grafo sia connesso, quante equazioni KCL e quante KVL-II è possibile scrivere affinché siano tutte e sole quelle che servono per esprimere la topologia della rete?* In linea di principio, se il grafo del circuito avesse l lati, avremmo bisogno di conoscere $2l$ grandezze (l tensioni descrittive e l correnti descrittive) per risolvere la rete. Le equazioni descrittive dei componenti forniscono l relazioni in $2l$ incognite che legano le variabili descrittive tra loro³ e la topologia dovrebbe fornire le informazioni mancanti per riuscire a scrivere, complessivamente, $2l$ relazioni in $2l$ incognite. Utilizzando la teoria dei grafi è possibile dimostrare che dal grafo di un circuito con n nodi ed l lati, è possibile ricavare $n - 1$ **KCL linearmente indipendenti** e $l - n + 1$ **KVL-II linearmente indipendenti**, ovvero complessivamente l equazioni di tipo topologico.

³ Ogni m -polo ha un grafo composto da $m - 1$ lati che contribuiscono al grafo complessivo del circuito. Inoltre ogni m -polo ha un'equazione costitutiva composta da $m - 1$ relazioni che legano le sue $m - 1$ correnti descrittive e le sue $m - 1$ tensioni descrittive.

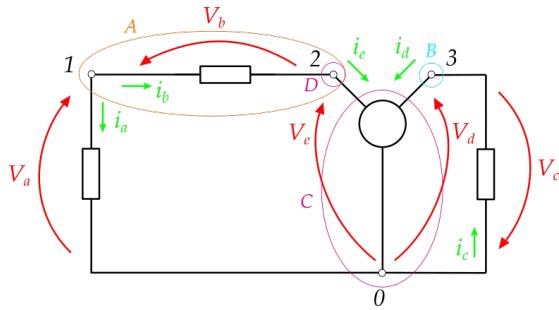


Figure 2.34: KCL: un esempio.

FACENDO RIFERIMENTO AL CIRCUITO in figura 2.34 proviamo a scrivere un insieme di equazioni KCL linearmente indipendenti. Il circuito ha $n = 4$ nodi e quindi dobbiamo aspettarci al più 3 KCL linearmente indipendenti. Possiamo prendere, orientandole tutte positivamente dall'interno verso l'esterno, la superficie A che racchiude il bipolo descritto da i_b e v_b , la superficie B che racchiude il nodo 3, e la superficie C che racchiude il tripolo e il nodo di riferimento. I bilanci delle correnti sono i seguenti

$$\begin{aligned} A : i_a + i_e &= 0 \\ B : i_d - i_c &= 0 \\ C : i_c - i_e - i_d - i_a &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (2.8)$$

TUTTAVIA, sommando membro a membro i bilanci alle superfici A e B , si ottiene il bilancio alla superficie C cambiato di segno il che vuol dire che la scelta fatta non ha prodotto 3 equazioni linearmente indipendenti (cfr. paragrafo 2.7). È quindi necessario scegliere un'altra superficie, ad esempio quella che chiameremo D e che racchiude il nodo 2, orientata anch'essa positivamente all'interno verso l'esterno, scrivendo così il bilancio

$$D : i_e - i_b = 0 . \quad (2.9)$$

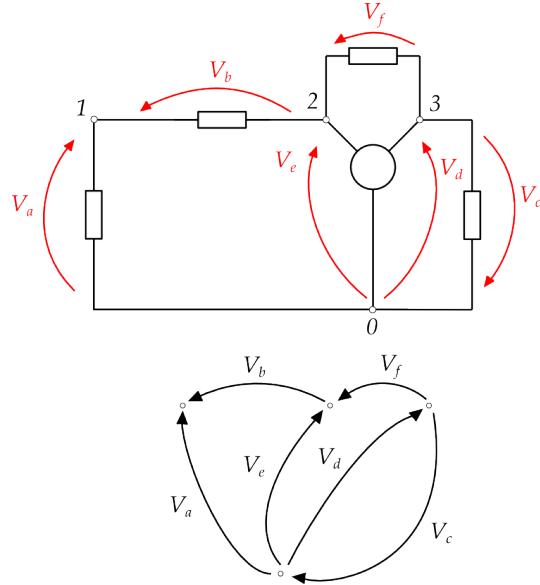
È immediato verificare che il bilanci alle superfici A , B e D sono linearmente indipendenti ad esempio osservando che la corrente i_b non è presente in A e B e la corrente i_a non è presente in B e D .

IN GENERALE, si dimostra che prendere i bilanci alle $n - 1$ superfici, che racchiudono ciascuna soltanto uno dei nodi del circuito il cui grafo ha n nodi (tipicamente non viene scelto il bilancio al nodo di riferimento), garantisce la scelta di $n - 1$ equazioni KCL linearmente indipendenti⁴. Nell'esempio considerato si scriverebbero dunque i seguenti bilanci:

$$\begin{aligned} 1 : i_a + i_b &= 0 \\ 2 : i_e - i_b &= 0 \\ 3 : i_d - i_c &= 0 \end{aligned} . \quad (2.10)$$

⁴ Non sempre è la scelta migliore dal punto di vista della complessità del sistema di equazioni lineari algebriche che ne deriva, ma è un'ottima scelta algoritmica per codificare una procedura di risoluzione automatica di un circuito con il calcolatore.

Figure 2.35: KVL-II: un esempio.



ANALOGAMENTE SI PUÒ PROCEDERE, facendo riferimento alla figura 2.35, per verificare che avendo un grafo connesso con l lati ed n nodi, è possibile trovare $l - n + 1$ maglie che producono altrettante equazioni KVL-II linearmente indipendenti. Nell'esempio in questione $l = 6$ e $n = 4$ e quindi ci aspettiamo $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ KVL-II linearmente indipendenti. Iniziamo col considerare la maglia I che interessa il percorso $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$

$$I : V_b - V_a + V_e = 0 , \quad (2.11)$$

la maglia II, che interessa il percorso $2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$$II : -V_f + V_c + V_a - V_b = 0 , \quad (2.12)$$

la maglia III, che interessa il percorso $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

$$III : V_e - V_f + V_c = 0 . \quad (2.13)$$

Facendo la somma delle KVL-II alle maglie I e II si ottiene

$$(V_b - V_a + V_e) + (-V_f + V_c + V_a - V_b) = V_e - V_f + V_c = 0 , \quad (2.14)$$

e si deduce quindi che le tre equazioni non sono linearmente indipendenti. Prendiamo invece la maglia IV che interessa il percorso $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$:

$$IV : V_d + V_c = 0 , \quad (2.15)$$

è facile verificare che I, II e IV sono linearmente indipendenti dato che V_d compare solo nella IV e V_f solo nella II.

Anche nel caso delle KVL-II esiste una procedura sistematica che permette di selezionare $l - n + 1$ maglie linearmente indipendenti. Si basa su una costruzione che richiede la scelta di un albero e di un co-albero⁵ associati al grafo del circuito e non verrà affrontata in questo corso.

LA TOPOLOGIA DEL CIRCUITO riportato in figura 2.36 può essere riassunta dal grafo di figura 2.37 (orientato come le tensioni) caratterizzato da $n = 4$ nodi e da $l = 6$ lati. Conseguentemente ci aspettiamo $n - 1 = 3$ equazioni KCL linearmente indipendenti e $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ equazioni KVL-II linearmente indipendenti.

Per quanto riguarda le KCL possiamo scrivere (orientando le superfici di controllo dall'interno verso l'esterno)

$$\begin{aligned} A : i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ B : -i_1 - i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \\ C : i_1 - i_1 - i_2 + i_5 + i_6 &= -i_2 + i_5 + i_6 = 0 \end{aligned}, \quad (2.16)$$

ma $A + B : (i_1 + i_2 + i_3) + (-i_1 - i_3 - i_5 - i_6) = i_2 - i_5 - i_6 = 0$ ovvero $A + B \rightarrow -C$. Possiamo allora scegliere il bilancio alla superficie $D : -i_1 - i_4 - i_5 = 0$ che è linearmente indipendente da A e B che non contengono i_4 .

Per quanto riguarda le KVL-II, con riferimento alla figura 2.38 possiamo scrivere il bilancio seguenti maglie:

$$\begin{aligned} I : V_{13} + V_{41} - V_{43} &= 0 \\ II : V_{12} + V_{41} + V_{24} &= 0 \\ III : V_{13} - V_{12} - V_{23} &= 0 \\ IV : V_{23} - V_{24} - V_{43} &= 0 \end{aligned}. \quad (2.17)$$

Sappiamo però che almeno uno dei quattro bilanci deve essere linearmente dipendente dagli altri ed infatti $II + III + IV : V_{12} + V_{41} + V_{24} + V_{12} - V_{12} - V_{23} + V_{23} - V_{24} - V_{43} = V_{41} + V_{13} - V_{43} = 0$ ovvero $II + III + IV \rightarrow I$. È altrettanto facile verificare che II , III e IV sono linearmente indipendenti.

COME ULTERIORE ESEMPIO possiamo considerare il circuito in figura 2.39 per il quale, noti $i_A = 2A$, $i_C = 3A$ e $i_E = 1A$, si richiede di calcolare i_F , i_D e i_B .

⁵ Un co-albero è il sottografo rimanente dopo aver eliminato da un grafo tutti i lati che costituiscono un possibile albero ad esso associato.

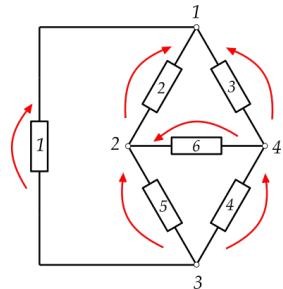


Figure 2.36: Un altro esempio

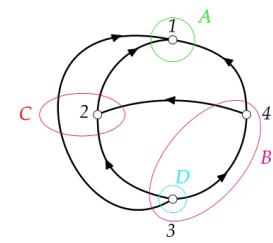


Figure 2.37: KCL. Il grafo è orientato come le tensioni.

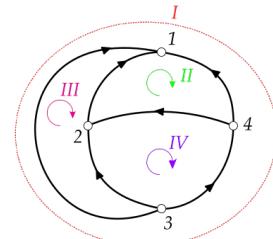


Figure 2.38: KVL-II. Il grafo è orientato come le tensioni.

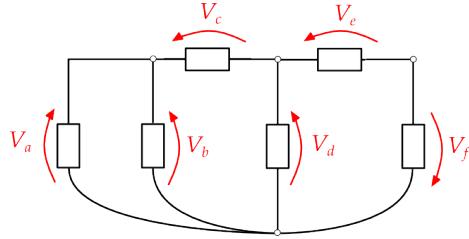


Figure 2.39: Ancora un altro esempio.

Prendendo il nodo 0 come riferimento, $n - 1$ KCL linearmente indipendenti possono essere certamente scritte prendendo il bilancio delle correnti alle tre superfici che racchiudono ciascuna uno dei restanti 3 nodi del grafo.

$$\begin{aligned} i_A + i_B + i_C &= 0 \rightarrow i_B = -i_A - i_C = -2A - 3A = -5A \\ -i_C + i_E + i_D &= 0 \rightarrow i_D = i_C - i_E = 3A - 1A = 2A \\ i_E + i_F &= 0 \rightarrow i_E = -i_F \rightarrow i_F = -1A \end{aligned} \quad . \quad (2.18)$$

2.9 La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta

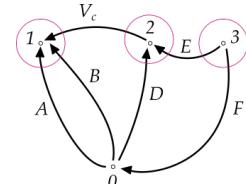
SI CONSIDERI UN GRAFO ORIENTATO costituito da n nodi ed l lati⁶.

È possibile assegnare la *relazione di incidenza* tra i lati e i nodi del grafo utilizzando una tabella ordinata e costituita da n righe e l colonne, cioè una **matrice di incidenza** rettangolare $n \times l$ denominata A_a ⁷. C'è corrispondenza biunivoca tra un grafo e la sua matrice di incidenza. Rappresentazione geometrica del grafo e matrice di incidenza sono una diversa rappresentazione della relazione di incidenza del grafo.

PER SCRIVERE LA MATRICE A_a , prendiamo gli n nodi del grafo e assegniamo un numero naturale consecutivo ad ognuno di essi e lo stesso facciamo con gli l lati. La k -esima riga di A_a rappresenta il nodo k e la j -esima colonna di A_a il lato j . Il valore del generico elemento a_{kj} della matrice A_a sarà scelto in base alla regola seguente

$$a_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è uscente} \\ -1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è entrante} \\ 0 & \text{il lato } j \text{ non incide nel nodo } k \end{cases} . \quad (2.19)$$

Notiamo come ogni colonna di A_a abbia *sempre* due soli elementi non nulli, uno $+1$ e uno -1 , dato che ciascun lato è uscente da un solo nodo ed entrante in un solo nodo. Quindi, la somma di tutte le righe R_k di A_a ($k = 1, \dots, n$) restituisce un vettore riga nullo. Da ciò si deduce che le righe di A_a non sono linearmente indipendenti. Inoltre,

Figure 2.40: Grafo orientato come le tensioni con $n = 4$, $l = 6$. KCL: $n - 1 = 3$. KVL-II: $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.

⁶ Prenderemo arbitrariamente un grafo orientato come le correnti e adotteremo la convenzione normale o degli utilizzatori.

⁷ Se il grafo è connesso $l \geq n - 1$.

dal momento che le colonne C_j di A_a ($j = 1, \dots, l$) sono dei vettori di \mathbb{R}^n possiamo aspettarci al più n colonne linearmente indipendenti della matrice A_a .

UNA PROPRIETÀ INTERESSANTE della matrice di incidenza è la seguente: $n - 1$ lati corrispondenti a $n - 1$ colonne di A_a linearmente indipendenti identificano un albero associato al grafo descritto da A_a . Questa proprietà può servire per realizzare procedure automatiche (al calcolatore) per localizzare un albero associato ad un grafo dato.

CONSIDERIAMO PER ESEMPIO il grafo in figura 2.41 e pensiamolo orientato come le correnti descrittive.

La matrice di incidenza risulta essere

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Osservando la matrice A_a di quest'esempio possiamo notare che,

come previsto, $\sum_{k=1}^4 R_k = 0$. Inoltre $C_5 = [-1, 0, 1, 0]^T = -C_3 - C_2$.

DAL FATTO CHE LE RIGHE DI A_a siano linearmente dipendenti, si intuisce che A_a contiene "troppe informazioni". Del resto, se pensiamo all'esempio considerato, ci accorgiamo facilmente come le righe di A_a altro non sono se non i bilanci (KCL), a ciascuno degli n nodi del grafo, delle correnti entranti e uscenti dai nodi stessi. Dal momento che sappiamo che un grafo ad n nodi ammette al più $n - 1$ equazioni KCL linearmente indipendenti, una delle righe di A_a è senz'altro ridondante. Possiamo allora prendere delle n righe di A_a , solo le $n - 1$ righe che corrispondono agli $n - 1$ nodi ai quali vogliamo considerare le KCL. Otteniamo così una **matrice di incidenza ridotta** A con $n - 1$ righe ed l colonne. Nell'esempio possiamo scartare arbitrariamente la riga corrispondente al nodo 4 e ottenere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Definiamo il nodo 4 (non considerato nel bilancio delle correnti) come nodo di riferimento. Organizzando in un vettore i ciascuna delle correnti i_j abbinata al lato j -esimo, possiamo scrivere le $n - 1$ KCL linearmente indipendenti in forma vettoriale come $Ai = \mathbf{0}$.

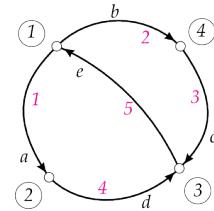


Figure 2.41: $n = 4$ e $l = 5$.

Nell'esempio:

$$A\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} . \quad (2.22)$$

2.10 Equazioni di Tableau

DATO UN CIRCUITO IL CUI GRAFO SIA CONNESSO, con n nodi ed l lati, fissiamo per ogni nodo k il potenziale di nodo u_k avendo scelto un nodo di riferimento per il potenziale elettrico. Per la legge di Kirchhoff per le tensioni di tipo I, dati due nodi j e k del grafo, $V_{jk} = u_j - u_k$. Riprendiamo l'esempio in figura 2.41 e scriviamo

$$\begin{aligned} V_{12} &= u_1 - u_2 \\ V_{14} &= u_1 - u_4 \\ V_{31} &= u_3 - u_1 \\ V_{23} &= u_2 - u_3 \\ V_{43} &= u_4 - u_3 \end{aligned} . \quad (2.23)$$

È facile verificare che, definiti i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= [u_1, u_2, u_3, u_4]^T \\ \mathbf{v} &= [V_{12}, V_{14}, V_{43}, V_{23}, V_{31}]^T \end{aligned} , \quad (2.24)$$

le equazioni in 2.23 possono essere scritte in forma matriciale come

$$A_a^T \mathbf{u}_a = \mathbf{v} . \quad (2.25)$$

SE PRENDIAMO ADESSO LO STESSO NODO di riferimento preso per introdurre la matrice di incidenza A e definiamo il vettore dei potenziali ridotto \mathbf{u} (cioè il vettore \mathbf{u}_a dal quale si elimina l'elemento corrispondente al nodo che sceglieremo come riferimento), possiamo introdurre le Equazioni di Tableau⁸

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} . \quad (2.26)$$

NOTIAMO CHE LE EQUAZIONI della 2.26 sono $n - 1$ equazioni di tipo KCL e l equazioni di tipo KVL I: in totale $l + n - 1$ equazioni in $2l + n - 1$ incognite. Se confrontiamo questi numeri con quelli in gioco utilizzando le KCL e le KVL-II, che introducono complessivamente $(n - 1) + (l - n + 1) = l$ equazioni in $2l$ incognite, le equazioni di Tableau risultano essere più onerose in termini computazionali.

⁸ Notiamo che, scegliere il nodo 4 come riferimento per il potenziale elettrico, significa di fatto scegliere $u_4 = 0V$. Ciò è assolutamente corretto essendo il potenziale elettrico definito, come tutti i potenziali, a meno di una costante additiva.

È necessario però sottolineare come questo approccio necessiti solo della matrice A e come, tipicamente, $l \gg n$. Quest'ultima considerazione implica che, in generale, per le reti di interesse pratico, $l + n - 1 \approx l$, il che non rende penalizzante l'uso delle equazioni di Tableau.

3

3.1 Potenza ed energia elettrica

CONSIDERIAMO UN GENERICO BIPOLO e supponiamo che sia attraversato dalla carica $\Delta Q > 0$ nell'intervallo di tempo Δt in base al verso della freccia indicata in figura 3.1. Se supponiamo $V_{AB} = v > 0$ (ovvero il campo elettrico all'interno del bipolo compie un lavoro positivo per muovere la carica ΔQ) la carica perde una quantità di energia pari a $\Delta w_a = v\Delta Q$ nell'attraversare il bipolo. Definiamo $p_a = \frac{\Delta w_a}{\Delta t}$ l'energia perduta per unità di tempo. Passando al limite possiamo scrivere

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w_a}{\Delta t} = \frac{dw_a}{dt} . \quad (3.1)$$

L'equazione 3.1 può essere riscritta come (cfr. equazione 1.19)

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v\Delta Q}{\Delta t} = v \frac{dQ}{dt} = vi . \quad (3.2)$$

$p_a(t)$ è la **potenza istantanea assorbita** dal bipolo e si misura in Watt [W].

PER IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA¹, l'energia perduta dalla carica che attraversa il bipolo sarà assorbita dal bipolo stesso che, in generale, è libero di trasformarla (si pensi l'energia assorbita da una lampadina che si trasforma in energia termica e luminosa). La potenza assorbita può essere positiva o negativa. Nel caso sia positiva, all'istante t , il bipolo sta effettivamente incamerando energia, altrimenti la sta *erogando*. Si può quindi definire la **potenza istantanea erogata** $p_e(t) = -p_a(t)$. Si noti che, qualora il bipolo fosse descritto con la convenzione dei generatori, si avrebbe $p_e(t) = vi$.

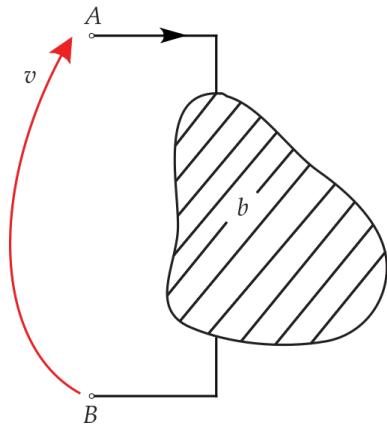


Figure 3.1: Definizione della potenza assorbita da un generico bipolo.

¹ In fisica, la legge di conservazione dell'energia è una delle più importanti leggi di conservazione osservata nella natura. Nella sua forma più intuitiva questa legge afferma che, sebbene l'energia possa essere trasformata e convertita da una forma all'altra, la quantità totale di essa in un sistema isolato non varia nel tempo.

3.1.1 Potenza assorbita da un n -terminali

COME GENERALIZZAZIONE della potenza assorbita da un bipolo è possibile ricavare l'espressione della potenza assorbita da un generico n -terminali. In particolare, se si assume di associare ad esso un grafo a stella costituito da $n - 1$ lati e di scegliere la convenzione degli utilizzatori, essendo $v_k(t)$ e $i_k(t)$ la tensione e la corrente descrittiva associate al lato k -esimo all'istante t , la potenza istantanea assorbita dall' n -terminali è pari a

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)i_k(t) . \quad (3.3)$$

Si dimostra facilmente che $p_a(t)$ non dipende dalla scelta del terminale di riferimento nella definizione del grafo a stella associato all' n -terminali. Lo studente può cimentarsi nel verificarlo nel caso semplice di un tripolo.

3.1.2 n -terminali attivi e passivi

ASSUNTA LA CONVENZIONE NORMALE O DEGLI UTILIZZATORI, gli n -terminali per i quali la potenza assorbita $p_a(t)$ è positiva sempre (cioè in qualunque condizione di funzionamento) vengono detti **passivi**. Questa definizione implica che, se $t > t_0$,

$$w_a(t) = w_a(t_0) + \int_{t_0}^t p_a(\tau)d\tau > w_a(t_0) . \quad (3.4)$$

DAL PUNTO DI VISTA DELL'ENERGIA $w_a(t)$ assorbita da un n -terminali in un dato intervallo di tempo, si definiscono passivi anche quei componenti che non sono in grado di erogare più energia di quella che abbiano incamerato precedentemente. In altre parole, nell'equazione 3.4, $w_a(t) \geq 0$. Questo aspetto sarà esemplificato chiaramente quando introdurremo il condensatore e l'induttore.

GLI UNICI n -TERMINALI NON PASSIVI, ovvero **attivi**, sono quelli in grado di erogare energia elettrica senza limitazioni e per quest'ultimi $w_a(t)$ potrà essere negativa.

3.2 Il teorema di Tellegen

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO ARBITRARIO il cui grafo connesso di n nodi sia stato orientato come le correnti degli l lati, rispettando la convenzione normale o degli utilizzatori per le tensioni. Siano $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$ due insiemi qualunque di correnti e tensioni di lato che soddisfano le equazioni di Kirchhoff per il grafo (e quindi per il circuito). \mathbf{i} e \mathbf{v} si dicono **compatibili** con il grafo. Il teorema di Tellegen afferma che

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \mathbf{i}^T \mathbf{v} = \sum_{k=1}^l v_k i_k = 0 . \quad (3.5)$$

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA utilizziamo le equazioni di Tableau introdotte nel paragrafo 2.10, cioè $A\mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{v} = A^T \mathbf{u}$ essendo \mathbf{u} il vettore dei potenziali di nodo ridotto. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (A^T \mathbf{u})^T \mathbf{i} = \mathbf{u}^T A\mathbf{i} = \mathbf{u}^T 0 = 0 . \quad (3.6)$$

SI NOTI che i vettori \mathbf{i} e \mathbf{v} sono compatibili con il grafo ma non hanno alcuna relazione particolare tra loro. Non sono infatti legate alle equazioni descrittive dei componenti che compongono il circuito e delle quali non si è detto nulla. Se prendessimo quindi due insiemi di tensioni \mathbf{v}' e \mathbf{v}'' compatibili con il grafo e due insiemi di correnti \mathbf{i}' e \mathbf{i}'' , anch'esse compatibili con il grafo, potremmo scrivere

$$\mathbf{v}'^T \mathbf{i}' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}'^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}' = 0 . \quad (3.7)$$

IL TEOREMA DI TELLEGGEN racchiude in sè il **teorema di conservazione dell'energia**. Infatti, se considerassimo un circuito e *misurassimo* ad ogni istante t la tensione e la corrente di ogni suo lato k ($k = 1, \dots, l$) secondo la convenzione degli utilizzatori osserveremmo che $\sum_{k=1}^l v_k(t) i_k(t) = 0$ dove $v_k(t) i_k(t)$ è la potenza assorbita in t dal lato k -esimo. Per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è conseguenza diretta delle leggi di Kirchhoff.

LE "POTENZE" $v_k i_k$ messe in gioco dal teorema di Tellegen si definiscono **potenze virtuali** dato che non necessariamente rappresentano un flusso reale di energia.

3.2.1 Esempio

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 3.2. Vogliamo verificare per questo circuito il teorema di Tellegen prendendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico. Scegliamo un insieme di correnti di lato e di tensioni di lato compatibili con il grafo del circuito (lo studente lo verifichi per esercizio). Si noti che il grafo del circuito è stato orientato come le correnti.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, i_2, i_3, i_4)^T = (3, 1, 3, -4)^T \\ \mathbf{v} &= (V_{10}, V_{21}, V_{20})^T = (1, 5, 4, 5)^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per verificare il teorema di Tellegen è sufficiente calcolare $\mathbf{v}^T \mathbf{i}$ ovvero $1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = 0$. Proviamo a scegliere un altro vettore di correnti $\mathbf{i} = (10, -8, 10, -2)^T$ compatibili con il grafo. Questa volta dovremo valutare $1 \cdot 10 + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) = 0$.

3.3 Classificazione di un componente

SUDDIVIDIAMO LA CLASSE dei componenti generici nel modo seguente

- Un componente si dice **adinamico** se la sua relazione costitutiva non contiene derivate e/o integrali delle variabili descrittive rispetto al tempo. Viceversa si dice **dinamico**.
- Un componente si dice **tempo-invariante** se la sua relazione costitutiva non dipende dal tempo. Le variabili descrittive dipendono (in generale) dal tempo, ma il modo in cui sono legate tra loro no. Viceversa si dice **tempo-variante**.
- Un componente si dice **lineare** se, dati due vettori ammissibili (compatibili con il grafo) di variabili descrittive, anche una loro combinazione lineare è un vettore ammissibile. Viceversa si dice **non lineare**.

Consideriamo ad esempio il bipolo la cui tensione descrittiva v sia legata alla corrente descrittiva i nel modo seguente

$$i + \alpha v + \beta \frac{di}{dt} + \delta v^2 + \epsilon t = 0 \quad , \quad (3.9)$$

con $[\alpha] = \text{AV}^{-1}$ $[\beta] = \text{s}$, $[\delta] = \text{AV}^{-2}$ e $[\epsilon] = \text{As}^{-1}$.

In base alla classificazione proposta il bipolo è dinamico, tempo-variante e non lineare. Verifichiamo quest'ultima proprietà dato che le prime due derivano banalmente dalla loro stessa definizione. Per

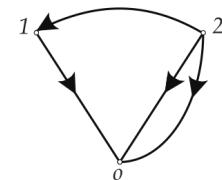
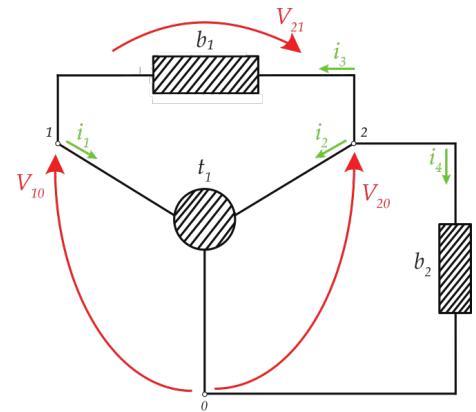


Figure 3.2: Un circuito e il suo grafo orientato come le correnti.

Si noti che un bipolo, in generale tempo-variante, avente come equazione caratteristica $v + b(t)i + c(t) = 0$, con $b(t)$ e $c(t)$ non identicamente nulli, (oppure $a(t)v + i + c(t) = 0$, con $a(t)$ e $c(t)$ non identicamente nulli) è un bipolo non lineare o, più specificamente, è un bipolo **lineare affine**. Lo studente verifichi per esercizio la non linearità .

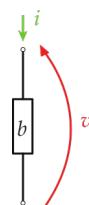


Figure 3.3: Generico bipolo b con v e i variabili descrittive.

farlo iniziamo da un caso particolare, quello in cui $\delta = 0$ e $\epsilon = 0$. Siano i_1 e v_1 compatibili con l'equazione del componente, cioè $i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1$ e analogamente i_2 e v_2 . Affinchè il componente si dica lineare è necessario che, prese due costanti a e b generiche, anche $ai_1 + bi_2$ e $av_1 + bv_2$ siano compatibili con l'equazione del componente. Proviamo dunque a valutare

$$\begin{aligned} & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) \\ &= a \left(i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 \right) + b \left(i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 \right) \quad . \quad (3.10) \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

In questo caso il bipolo è lineare. Nel caso più generale dovremmo scrivere

$$\begin{aligned} & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) + \delta(av_1 + bv_2)^2 + \epsilon t \\ &= a \left(i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 + \delta v_1^2 + \epsilon t \right) - a\epsilon t + \delta a(a-1)v_1^2 \\ &+ b \left(i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 + \delta v_2^2 + \epsilon t \right) - b\epsilon t + \delta b(b-1)v_2^2 \\ &+ 2\delta abv_1 v_2 + \epsilon t \\ &= \epsilon t(1-a-b) + \delta a(a-1)v_1^2 + \delta b(b-1)v_2^2 + 2\delta abv_1 v_2 \neq 0 \quad (3.11) \end{aligned}$$

e quindi il bipolo è non-lineare. Sarebbe tempo-invariante con $\epsilon = 0$ e adinamico con $\beta = 0$.

3.3.1 Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici

LA CLASSIFICAZIONE PER I COMPONENTI GENERICI presentata nel paragrafo precedente può essere ulteriormente dettagliata qualora ci si riferisca a **bipoli adinamici**.

Tali componenti sono rappresentati da un'equazione costitutiva che, in forma隐式, è del tipo $f(i, v) = 0$, dove i e v sono le variabili descrittive del bipolo che si assumono scelte in base alla convenzione normale o degli utilizzatori. L'equazione costitutiva del componente individua sul piano (i, v) un luogo di punti che, in generale giace in uno o più quadranti del piano stesso. Tale luogo di punti viene visitato dalla coppia $(i(t), v(t))$ al variare del tempo e ciascun punto corrisponde ad un valore di potenza $p_a(t) = i(t)v(t)$ assorbita dal componente. Si introduce quindi la seguente classificazione:

- il bipolo si dice **inerte** se $p_a(t) = i(t)v(t) \equiv 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica (ovvero la proprietà non

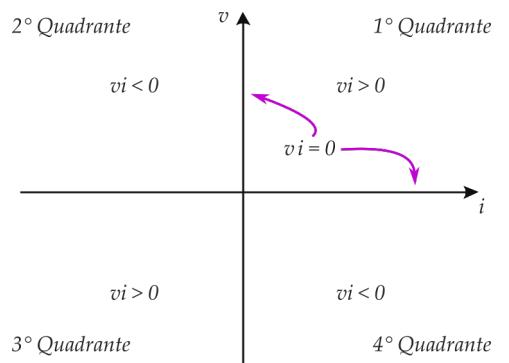


Figure 3.4: Il piano (i, v) e la suddivisione in quadranti.

dipende da *come è collegato* il componente e *a che cosa è collegato* ma solo dal componente stesso). Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ appartiene agli assi coordinati $i = 0, v = 0$ (cfr. figura 3.4).

- il bipolo si dice **passivo** se $p_a(t) = i(t)v(t) \geq 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ giace nel primo e/o nel terzo quadrante (cfr. figura 3.4). Il bipolo si dice **strettamente passivo** se la potenza elettrica assorbita è uguale a zero solo se sia l'intensità di corrente sia la tensione sono nulle.
- il bipolo si dice **strettamente attivo** se $p_a(t) = i(t)v(t) \leq 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ giace nel secondo e/o nel quarto quadrante (cfr. figura 3.4).
- il bipolo si dice **attivo** se $p_a(t) = i(t)v(t)$ può essere negativa, nulla o positiva. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ appartiene almeno ad un quadrante pari e uno dispari (cfr. figura 3.4).

3.4 Le basi di definizione

DATO UN n -terminali esso si dice **controllabile in tensione o definito su base tensione** se, assegnate $n - 1$ tensioni descrittive, è possibile ricavare in modo univoco le corrispondenti $n - 1$ correnti descrittive².

NEL CASO DUALE, cioè quello in cui dato un n -terminali è possibile assegnare $n - 1$ correnti descrittive e ricavare in modo univoco le corrispondenti $n - 1$ tensioni descrittive, il componente si dice **controllabile in corrente o definito su base corrente**.

UN n -TERMINALI si dice **definito su base mista** se assegnate $n - 1$ delle sue variabili descrittive (un insieme di tensioni e correnti) è possibile ricavare le restanti $n - 1$ (un insieme di correnti e tensioni).

PER ESEMPIO si consideri il tripolo descritto dall'equazione costitutiva

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ v_2 = \beta i_1 + \gamma i_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

Dalla sua equazione costitutiva è evidente che ammette la base corrente (i_1, i_2). Inoltre, dato che l'equazione 3.12 può essere riscritta

² Per corrente descrittiva i , corrispondente ad una data tensione descrittiva v (e viceversa), si intende la corrente individuata sul lato del grafo del componente sul quale si indica la tensione v .

Per assegnare la tensione o la corrente ad un lato del grafo di un componente si utilizzano sorgenti impressive di tensione o di corrente che verranno introdotte nel seguito (cfr. paragrafo 3.5.4). In quella sede sarà evidenziato come, con tali sorgenti, non sia possibile imporre contemporaneamente la tensione e la corrente al medesimo lato.

come

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

il tripolo ammette anche la base tensione. Dalla 3.13, infatti, si deduce banalmente che, assegnate v_1 e v_2 , è possibile ricavare univocamente i_1 e i_2 .

Analogamente si ricava che sono ammissibili la base (i_1, v_2)

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

e la base (i_2, v_1)

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ v_2 = \frac{\beta}{\alpha} v_1 + \gamma i_2 \end{cases} . \quad (3.15)$$

Nel caso in cui, ad esempio, $\alpha = 0$ e $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, il tripolo ammette solo le basi (i_1, i_2) e (i_1, v_2) .

SI PROVI PER ESERCIZIO a verificare cosa accade se $\beta = 0$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$, $\gamma = 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

3.5 Bipoli notevoli

MISUREREMO LE CORRENTI mediante l'**amperometro** e la tensione mediante il **voltmetro**. Questi due bipoli particolari si rappresentano a terminali collassati mettendo in evidenza solo i loro morsetti identificati dai simboli $+$ e $-$. Sono componenti ideali nel senso che non alterano il comportamento del circuito nel quale sono inseriti. L'amperometro (figura 3.5), attraversato dalla corrente che si vuole misurare dal morsetto $+$ al morsetto $-$, non manifesta caduta di tensione tra di essi, nel senso che non è necessario compiere lavoro per portare le cariche elettriche da un morsetto all'altro attraversando la sua superficie limite.

Il **VOLTMETRO**, invece, collegato con i morsetti $+$ e $-$ ai morsetti tra i quali si vuole misurare la tensione (figura 3.6), non "preleva" corrente dal circuito.

3.5.1 Il resistore lineare

Il **RESISTORE LINEARE** è un componente la cui tensione descrittiva v e corrente descrittiva i sono legate dalla relazioni lineari (equazione

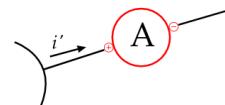


Figure 3.5: Un amperometro ideale rappresentato con i terminali collassati. La corrente che si vuole misurare lo attraversa dal morsetto $+$ al morsetto $-$.

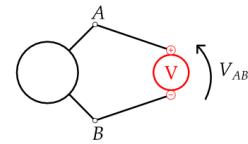


Figure 3.6: La tensione (cioè la differenza di potenziale tra due morsetti) si misura con il voltmetro (bipolo con terminali collassati), che non lascia fluire corrente al suo interno.

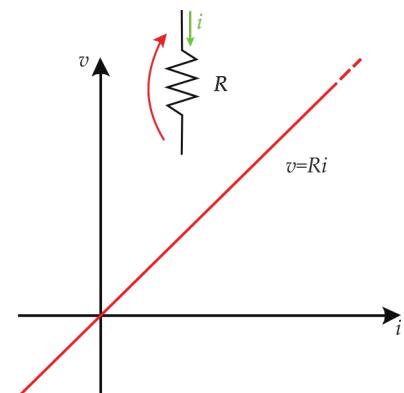


Figure 3.7: Il resistore lineare: simbolo e caratteristica sul piano (i, v) .

caratteristica - cfr. figura 3.7)

$$v = Ri \quad , \quad (3.16)$$

dove il parametro $R > 0$ si chiama **resistenza** e si misura in Ohm [Ω]. Il resistore è un componente lineare, adinamico, tempo-invariante. È definito su base corrente, come si deduce immediatamente dall'equazione 3.16, e su base tensione essendo $i = vR^{-1}$. La grandezza $R^{-1} = G$ si chiama **conduttanza** e si misura in Siemens [S]. Si noti come la caratteristica del resistore sia simmetrica rispetto all'origine degli assi coordinati, il che implica che invertire i morsetti del resistore non provoca alcuna variazione nel suo funzionamento.

DA UN PUNTO DI VISTA ENERGETICO il resistore è un bipolo strettamente passivo essendo

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R} \geq 0 \quad , \quad (3.17)$$

per qualunque valore di i e v .

3.5.2 Il corto circuito

IL CORTO CIRCUITO può essere visto come un caso limite di resistore lineare nel senso che la sua equazione caratteristica è

$$v = Ri|_{R=0} \equiv 0 \quad . \quad (3.18)$$

Il corto circuito è un componente adinamico e tempo-invariante. Dal punto di vista energetico è un componente chiaramente inerte dato che $p = vi = 0$ per qualunque i . È un bipolo definito su base corrente dato che non è possibile scegliere liberamente la tensione tra i suoi morsetti.

Per quanto riguarda l'essere lineare o non lineare applichiamo la definizione. Se si impongono i_1 o i_2 la tensione ai capi del bipolo sarà v_1 o v_2 , entrambi nulle. Prese due costanti arbitrarie α_1 e α_2 e imponendo $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$ si ottiene ai capi la tensione 0 ovvero $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Il bipolo è dunque lineare.

3.5.3 Il circuito aperto

IL CIRCUITO APERTO è il componente duale del corto circuito:

$$i = \frac{v}{R}|_{R \rightarrow +\infty} \equiv 0 \quad . \quad (3.19)$$

Vedremo nel seguito che il corto circuito e il circuito aperto possono essere visti anche come casi particolari del generatore indipendente di tensione e di corrente, rispettivamente.

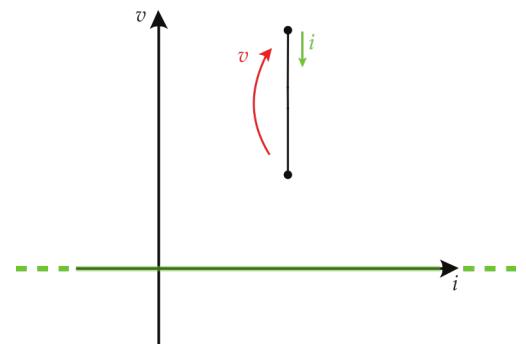


Figure 3.8: Il corto circuito.

È un bipolo adinamico, tempo-invariante, lineare e passivo. È definito solo su base tensione dato che non è consentito assegnare liberamente la corrente che lo attraversa in quanto essa, a prescindere dalla tensione ai capi del bipolo, è sempre nulla.

3.5.4 Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente

IL GENERATORE INDEPENDENTE DI TENSIONE ha come equazione caratteristica

$$v = e(t) . \quad (3.20)$$

In generale $e(t)$ è una funzione del tempo t e quindi il bipolo è tempo variante. Tipici esempi sono il generatore di tensione sinusoidale $e(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ o il generatore a gradino $e(t) = V_0 u(t - t_0)$ con $u(t - t_0) = 0$ se $t < t_0$ e $u(t - t_0) = 1$ se $t > t_0$ ($t_0 \geq 0$).

Il generatore indipendente di tensione è adinamico dato che la sua equazione caratteristica non contiene derivate o integrali rispetto al tempo delle sue variabili descrittive. Nel caso in cui $e(t) \equiv 0$ per ogni valore di t il componente degenera in un corto circuito e solo in quel caso è lineare. Più in generale è un componente non lineare. Definito solo su base corrente, infatti, se si impongono i_1 o i_2 la tensione ai capi del bipolo sarà v_1 o v_2 , entrambi pari a $e(t)$. Prese due costanti arbitrarie α_1 e α_2 e imponendo $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$ si ottiene ai capi la tensione $e(t) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) e(t)$.

Da un punto di vista energetico il bipolo è attivo dato che la sua caratteristica giace in un quadrante pari e uno dispari del piano (i, v) . Bisogna infatti pensare che in tale piano la caratteristica del generatore è una retta parallela all'asse i che, al variare del tempo, eventualmente trasla verso l'alto e/o verso il basso. Ad un dato istante di tempo giace quindi nel primo o secondo quadrante, oppure nel terzo o nel quarto.

IL GENERATORE INDEPENDENTE DI CORRENTE ha come equazione caratteristica

$$i = -a(t) . \quad (3.21)$$

Il segno “-” nell'equazione 3.21 non deve trarre in inganno. Si noti infatti come in figura 3.11 la corrente i , presa con la convenzione normale o degli utilizzatori, punta nel verso opposto alla freccia che si trova all'interno del simbolo proprio del generatore. Questo vuol dire che, scelta la forma d'onda $a(t)$ impressa dal generatore, la corrente

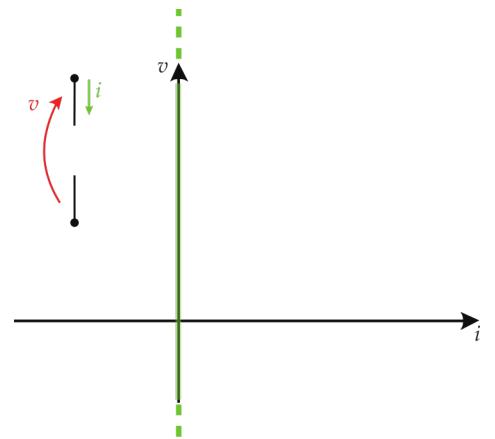


Figure 3.9: Il circuito aperto.

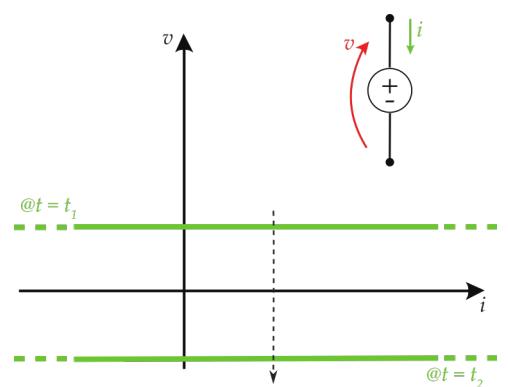


Figure 3.10: Il generatore di tensione.

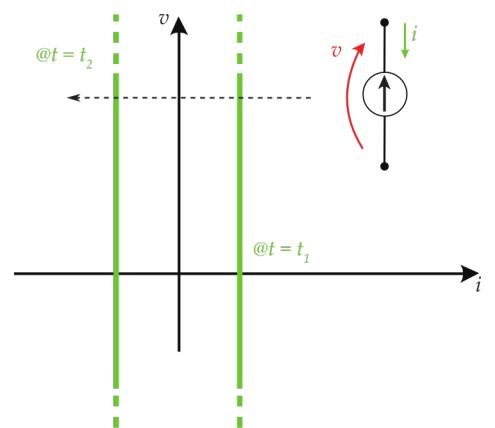


Figure 3.11: Il generatore di corrente.

i viene misurata con verso opposto ad essa. Se invece scegliessimo la convenzione dei generatori, la corrente $i' = -i$ sarebbe concorde con $a(t)$. Quello che conta, quindi, per definire in modo non ambiguo il componente sono la scelta di $a(t)$ e la convenzione con cui descrivere il componente. Ad esempio, scelta $a(t) = A_0 u(t - t_0)$, con $u(t - t_0) = 0$ se $t < t_0$ e $u(t - t_0) = 1$ se $t > t_0$ ($t_0 \geq 0$), con la convenzione degli utilizzatori usata in figura 3.11, $i = -A_0 u(t - t_0)$.

Come il generatore indipendente di tensione, il generatore indipendente di corrente è non lineare (salvo il caso $a(t) \equiv 0$ per ogni t , cioè quando degenera in un circuito aperto), adinamico, tempovariante e attivo. È un bipolo definito solo su base tensione.

3.6 Esercizio: il primo circuito elementare

SIA DATO IL CIRCUITO in figura 3.12: si determinino v_1 e i_2 .

COME PRIMA COSA ricaviamo il grafo del circuito (cfr. figura 3.13). Il circuito è costituito da 3 componenti a due terminali ovvero da $2 \cdot 3 = 6$ variabili descrittive. Si verifica banalmente che il grafo del circuito è caratterizzato da $n = 3$ nodi e $l = 3$ lati. Sappiamo quindi (cfr. paragrafo 2.8) che è possibile scrivere $n - 1 = 2$ KCL linearmente indipendenti e $l - n + 1 = 1$ equazioni KVL-II. Ogni bipolo ha un'equazione costitutiva, per un totale di 3 equazioni, e quindi possiamo scrivere

$$\underbrace{3}_{\text{eq.ni costitutive}} + \underbrace{3}_{\text{eq.ni topologiche}} = 6 \quad (3.22)$$

equazioni in 6 incognite.

Iniziamo con le KCL. Facendo riferimento alla figura 3.12 scriviamo i bilanci di corrente ai nodi 1 e 2 (assumendo arbitrariamente positive le correnti uscenti dalle linee chiuse tracciate attorno ai nodi):

$$\begin{aligned} i_e + i_1 &= 0 \\ i_2 - i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Possiamo poi scrivere l'equazione KVL-II per l'unica maglia del circuito, scegliendo come verso di percorrenza quello orario

$$v_e - v_1 - v_2 = 0 \quad (3.24)$$

Le equazioni dei componenti sono infine

$$\begin{aligned} v_e &= e(t) \\ v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

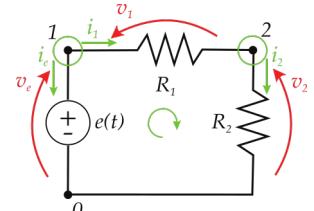


Figure 3.12: Un primo esempio di circuito da risolvere.

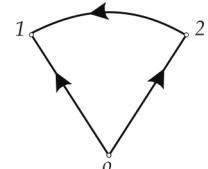


Figure 3.13: Il grafo del circuito in figura 3.12 orientato come le tensioni.

In generale quando si debbano determinare una o più grandezze incognite in un dato circuito, la scelta di scrivere tutte le equazioni possibili non è sempre la migliore. In generale impareremo a scrivere molti risultati intermedi direttamente sullo schema del circuito e a selezionare solo le equazioni indispensabili per risolvere il problema. Sapere però che, a partire dalla topologia e dalle equazioni dei componenti, è possibile scrivere sempre tutte in modo sistematico permette di concepire metodi automatici (al calcolatore) per analizzare reti anche molto complesse.

Assumendo $R_1 \neq 0$ e $R_2 \neq 0$, possiamo quindi riscrivere la 3.24 come

$$e(t) - v_1 - R_2 i_2 = e(t) - v_1 - R_2 i_1 = e(t) - v_1 - R_2 \frac{v_1}{R_1} = 0 . \quad (3.26)$$

Si ricava dunque $v_1 = \frac{R_1 e(t)}{R_1 + R_2}$ e $i_2 = i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{e(t)}{R_1 + R_2}$.

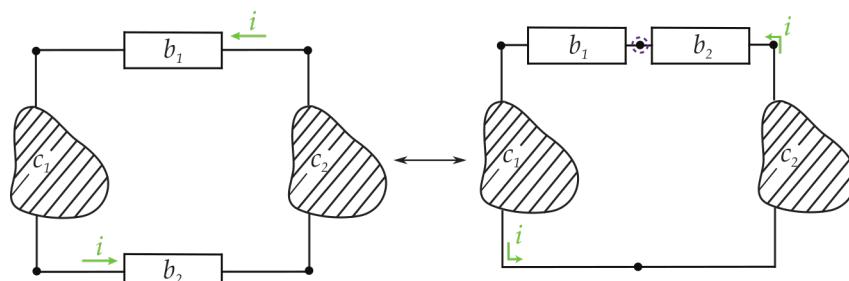
3.7 Il principio di equivalenza

Due bipoli di diversa costituzione si dicono equivalenti quando le loro relazioni caratteristiche coincidono.

DATO UN CIRCUITO GENERICO è quindi possibile sostituire un bipolo con un suo equivalente senza produrre cambiamenti nel funzionamento del circuito stesso. Il principio di equivalenza lo useremo, ad esempio, ogni qualvolta si farà riferimento alla connessione *in serie* o *in parallelo* di due o più bipoli, quando useremo gli equivalenti di Thevenin e Norton.

3.7.1 Connessione in serie di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in serie se hanno un nodo in comune (esclusivo) che connette solamente i lati (complessivamente due) dei bipoli. Questa proprietà è di carattere topologico ed è per tanto indipendente dalla caratteristica dei bipoli.



POSSENO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie che ammettono entrambi la base di definizione corrente. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono $v_1 = f_1(i_1)$ e $v_2 = f_2(i_2)$, la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in serie sarà $v = f_1(i) + f_2(i)$.

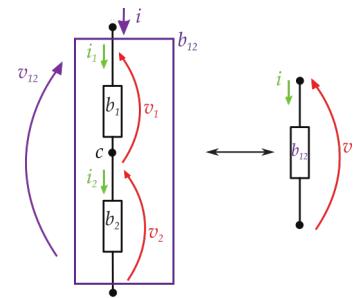


Figure 3.14: Due bipoli connessi in serie hanno un nodo (c in figura) al quale sono connessi in modo esclusivo.

Figure 3.15: Poiché la tensione è additiva e la somma gode della proprietà commutativa, è possibile "commutare" le porte che compongono una connessione in serie. Poiché i bipoli b_1 , b_2 , C_1 e C_2 sono connessi in serie, è possibile per esempio spostare b_1 e b_2 senza alterare il funzionamento del circuito e ridisegnarli in modo che abbiano ancora in comune un nodo in modo esclusivo. Ciò potrebbe permettere, per esempio, di sostituirli con il loro bipolo equivalente.

La connessione in serie b_{12} di due bipoli b_1 e b_2 si indica con il simbolo +. Ovvero si scrive che $b_{12} = b_1 + b_2$.

Ciò si ricava osservando che i due bipoli sono per definizione attraversati dalla medesima corrente (cioè $i_1 = i_2$) e la tensione v è fissata a $v_1 + v_2$ da una KVL-II. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in serie e definiti su base corrente si ottiene sul piano (i, v) sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie e solo b_1 ammetta la base di definizione corrente. In questo caso il bipolo equivalente coincide con b_2 dato che la tensione ai suoi capi non è vincolata ed è esso stesso ad impostare la corrente nella serie.

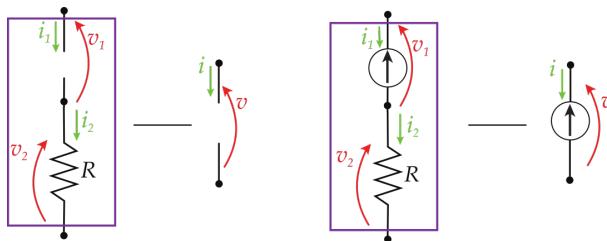


Figure 3.16: Due esempi in cui la connessione serie di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base corrente.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie e nessuno dei due ammetta la base corrente. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la tensione ai capi dei singoli bipoli che costituiscono la serie rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in serie due circuiti aperti) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le correnti (si pensi alla connessione in serie di due generatori indipendenti di corrente che imprimono correnti arbitrarie).

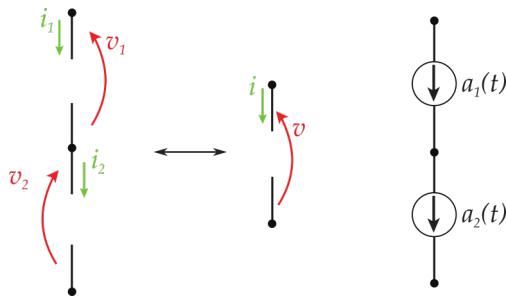


Figure 3.17: Nel caso di sinistra la connessione in serie equivale ad un circuito aperto ma le tensioni v_1 e v_2 , data la v , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KCL al nodo evidenziato.

IL RAGIONAMENTO SVILUPPATO per una coppia di bipoli connessi in serie si applica in modo ricorsivo qualora i bipoli siano più di due. Se fossero tre, ad esempio b_1 , b_2 e b_3 , ad essere collegati in serie dovrebbe essere possibile ridisegnare il circuito in modo tale che i bipoli, a due a due, siano collegati in modo esclusivo ad un nodo del circuito. A questo punto, per trovare il bipolo equivalente, si

applicano i criteri esposti trovando, ad esempio, prima l'equivalente b_{12} di b_1 e b_2 e poi l'equivalente b_{123} di b_{12} e b_3 .

SI RICAVA QUINDI FACILMENTE l'equivalente di M resistori lineari connessi in serie ciascuno con equazioni caratteristica $v_k = R_k i_k$ ($k = 1, \dots, M$). Possiamo infatti scrivere

$$v = v_1 + \dots + v_M = R_1 i_1 + \dots + R_M i_M = (R_1 + \dots + R_M) i = R_{eq} i , \quad (3.27)$$

con $R_{eq} = \sum_{k=1}^M R_k$.

3.7.2 Il partitore di tensione

IL PARTITORE DI TENSIONE è una regola che si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in serie. Si immagini di voler calcolare la tensione ai capi del generico resistore j -esimo che appartiene a M resistori connessi in serie.

Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è $v = (\sum_{k=1}^M R_k) i$, la corrente i che attraversa il generico resistore j -esimo è pari a $i = \frac{v}{\sum_{k=1}^M R_k}$ e quindi

$$v_j = \frac{v R_j}{\sum_{k=1}^M R_k} . \quad (3.28)$$

Si nota quindi come la caduta di tensione maggiore sia ai capi del resistore caratterizzato da resistenza maggiore.

3.7.3 Connessione in parallelo di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in parallelo se sono collegati alla medesima coppia di nodi. La connessione in parallelo è una proprietà topologica che porta a concludere che i due bipoli hanno ai loro capi la medesima tensione indipendentemente dalla soluzione del circuito.

POSSENO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo che ammettono entrambi la base di definizione tensione. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono $i_1 = g_1(v_1)$ e $i_2 = g_2(v_2)$, la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in parallelo sarà $i = g_1(v) + g_2(v)$. Ciò si ricava osservando che i due bipoli condividono per definizione la medesima tensione, ovvero $v = v_1 = v_2$,

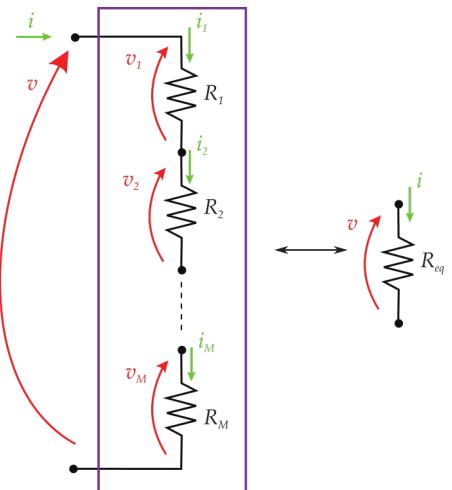


Figure 3.18: Connessione in serie di M resistori lineari.

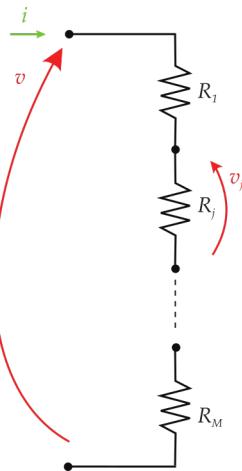


Figure 3.19: La regola del partitore di tensione permette di ricavare facilmente v_j in funzione di R_1, \dots, R_M e v .

La connessione in parallelo b_{eq} di due bipoli b_1 e b_2 si indica con il simbolo \parallel . Ovvero si scrive che $b_{eq} = b_1 \parallel b_2$.

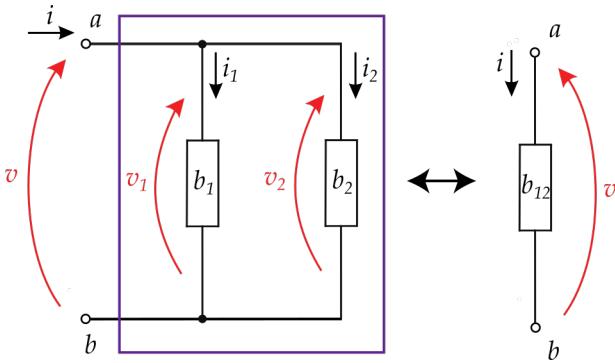


Figure 3.20: Due bipoli connessi in parallelo.

la corrente i è fissata ad $i_1 + i_2$ da una KCL. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in parallelo e definiti su base tensione si ottiene sul piano (v, i) sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo e b_1 ammetta solamente la base di definizione tensione. In questo caso il bipolo equivalente coincide con b_2 dato che la corrente che lo attraversa non è vincolata ed è esso stesso ad imporre la tensione del parallelo (cfr. figura 3.21).
- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo e nessuno dei due ammetta la base tensione. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la corrente nei singoli bipoli connessi in parallelo rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in parallelo due corti circuiti, figura 3.22) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le tensioni (si pensi alla connessione in parallelo di due generatori indipendenti di tensione che imprimono tensioni arbitrarie, figura 3.22).

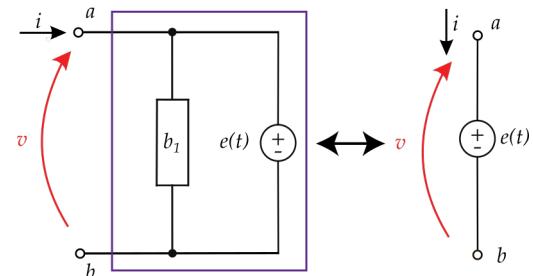
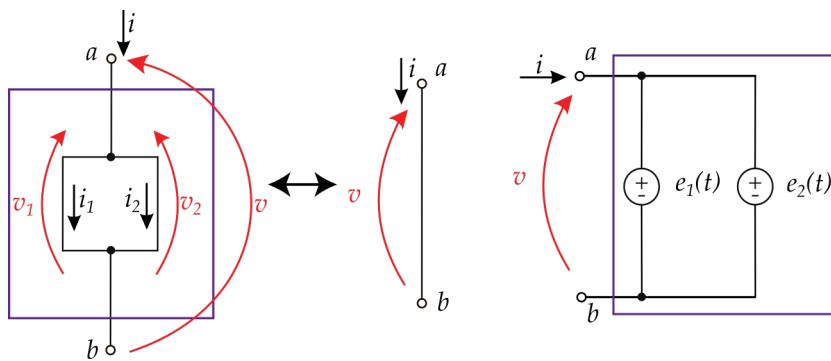


Figure 3.21: Un esempio in cui la connessione parallelo di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base tensione.

COME PER IL COLLEGAMENTO IN SERIE di più di due bipoli si è mostrato come si può procedere in modo ricorsivo per ottenere il

Figure 3.22: Nel caso di sinistra la connessione in parallelo equivale ad un corto circuito ma le correnti i_1 e i_2 , data la i , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KVL-II per la maglia evidenziata.

bipolo equivalente, analogamente si agisce per la connessione in parallelo.

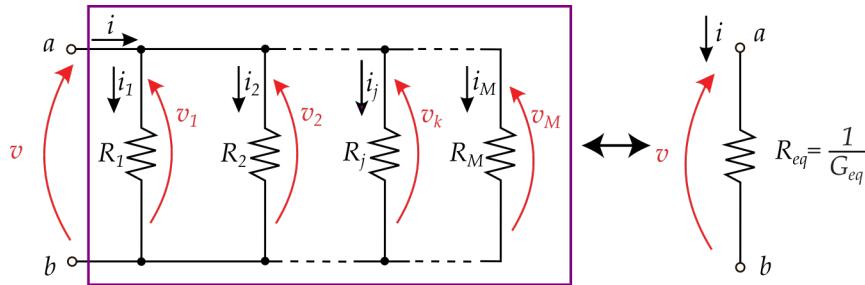


Figure 3.23: Connessione in parallelo di M resistori lineari. La regola del partitore di corrente permette di ricavare facilmente i_j in funzione di $G_1 = R_1^{-1}, \dots, G_M = R_M^{-1}$ e i .

IN PARTICOLARE l'equivalente di M resistori lineari connessi in parallelo, ciascuno con equazioni caratteristica $i_k = G_k v_k$ ($k = 1 \dots M$) è scrivibile come

$$i = i_1 + \dots + i_M = G_1 v_1 + \dots + G_M v_M = (G_1 + \dots + G_M) v = G_{eq} v , \quad (3.29)$$

con $G_{eq} = \sum_{k=1}^M G_k$ la conduttanza equivalente al parallelo.

La resistenza equivalente al parallelo è $R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^M G_k}$ con $R_k \neq 0$ per ogni k . Nel caso di due resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} , \quad (3.30)$$

e nel caso di tre resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} . \quad (3.31)$$

3.7.4 Il partitore di corrente

IL PARTITORE DI CORRENTE è il duale del partitore di tensione e si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in parallelo.

Si immagini di voler calcolare la corrente che scorre nel generico resistore j -esimo che appartiene a M resistori connessi in parallelo (cfr. figura 3.23). Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è $i = (\sum_{k=1}^M G_k) v$, la tensione v ai capi del generico resistore j -esimo è pari a $v = \frac{i}{\sum_{k=1}^M G_k}$ e quindi

$$i_j = \frac{i G_j}{\sum_{k=1}^M G_k} . \quad (3.32)$$

Si nota quindi come la corrente maggiore scorra nel resistore caratterizzato da conduttanza maggiore ovvero da resistenza minore.

NEL CASO SEMPLICE di due soli resistori R_1 ed R_2 connessi in parallelo, la formula 3.32 può essere facilmente riscritta in termini delle resistenze (lo si verifichi per esercizio)

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{iR_2}{R_1 + R_2} \\ i_2 &= \frac{iR_1}{R_1 + R_2} \end{aligned} . \quad (3.33)$$

3.8 Esercizio

CHE VALORE DEVE AVERE R_1 (cfr. figura 3.24) affinché il voltmetro connesso in parallelo ad R_2 legga la tensione $E/4$? Si assumano $R_k = r$ per $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

PER RISOLVERE IL PROBLEMA è necessario calcolare la corrente i in funzione di R_1 e poi risolvere, sempre in funzione di R_1 , l'equazione $R_2i(R_1) = E/4$. Si noti che R_2 ed R_3 , così come R_4 ed R_5 , sono collegate in serie e possiamo quindi ricavare $R_{23} = R_2 + R_3$ e $R_{45} = R_4 + R_5$. Del resto R_{23} e R_{45} sono collegate in parallelo ($(R_{23}||R_{45}) = r$) e il bipolo ad esse equivalente è in serie ad R_1 .

LA TENSIONE AI CAPI di $R_{23}||R_{45}$ è quindi pari a $\frac{Er}{R_1+r}$ e la corrente che scorre in R_{23} è pari a

$$i(R_1) = \frac{Er}{2r(R_1+r)} = \frac{E}{2(R_1+r)} . \quad (3.34)$$

Per risolvere il problema occorre dunque risolvere in funzione di R_1

$$\frac{Er}{2(R_1+r)} = \frac{E}{4} , \quad (3.35)$$

che ammette l'unica soluzione $R_1 = r$.

3.9 Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 3.25 di cui vogliamo calcolare la tensione v tra i morsetti A e B in funzione dei suoi parametri R_k ed E_k per $k \in \{1, 2, 3\}$. La corrente i_k può essere ottenuta come

$$i_k = \frac{v - E_k}{R_k} . \quad (3.36)$$

Osservando che $\sum_{k=1}^3 i_k = 0$, dato che la corrente i è nulla perché il morsetto A è appeso, la tensione v può essere ricavata risolvendo

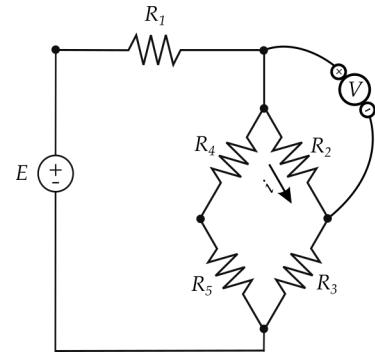


Figure 3.24: Esercizio: connessione serie, parallelo, partitore di tensione.

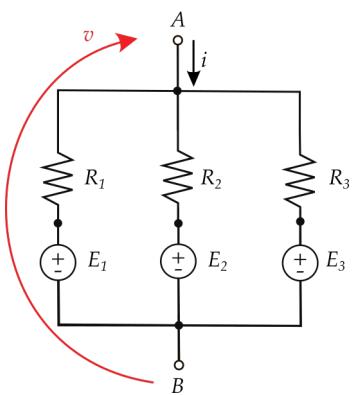


Figure 3.25: Esercizio: determinare la tensione tra i morsetti A e B .

l'equazione lineare

$$\frac{v - E_1}{R_1} + \frac{v - E_2}{R_2} + \frac{v - E_3}{R_3} = 0 , \quad (3.37)$$

ottenendo così

$$v = \frac{R_2 R_3 E_1 + R_1 R_3 E_2 + R_1 R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} . \quad (3.38)$$

SE CONOSSI una regola che permette di ridisegnare il circuito in figura 3.25 come in figura 3.26, cioè se sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore lineare in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo, potrei risolvere il problema scrivendo

$$v = -(r_1 || r_2 || r_3)(A_1 + A_2 + A_3) = -\frac{A_1 + A_2 + A_3}{g_1 + g_2 + g_3} , \quad (3.39)$$

essendo $g_k = r_k^{-1}$ per $k \in \{1, 2, 3\}$.

QUESTO ESEMPIO è solo un pretesto per introdurre un risultato molto importante della teoria dei circuiti. È comunque istruttivo, facendo riferimento alla figura 3.27, provare a vedere come sono legati E_{th} ed $R_{th} \neq 0$ (parametri del circuito di Thevènin) con A_{nr} e $G_{nr} \neq 0$ (parametri del circuito di Norton). Analizzando i due circuiti possiamo ricavare facilmente

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{th}i_1 + E_{th} \\ i_2 &= G_{nr}v_2 + A_{nr} \end{aligned} . \quad (3.40)$$

Se ricaviamo $v_2 = \frac{i_2}{G_{nr}} - \frac{A_{nr}}{G_{nr}}$ e $i_1 = \frac{v_1}{R_{th}} - \frac{E_{th}}{R_{th}}$ possiamo dunque affermare, utilizzando il principio di equivalenza (cfr. paragrafo 3.7), che i due bipoli composti sono equivalenti (funzionano cioè allo stesso modo in termini della tensione e della corrente descrittiva) rispettivamente se

$$R_{th} = \frac{1}{G_{nr}} \text{ e } E_{th} = -\frac{A_{nr}}{G_{nr}} , \quad (3.41)$$

ovvero

$$G_{nr} = \frac{1}{R_{th}} \text{ e } A_{nr} = -\frac{E_{th}}{R_{th}} . \quad (3.42)$$

PER QUANTO RIGUARDA l'esempio di partenza, allora, $A_k = -\frac{E_k}{R_k}$ e $G_k = \frac{1}{R_k}$ (ovvero $r_k = R_k$) per $k \in \{1, 2, 3\}$. Si verifichi per esercizio che il valore di v che si ottiene è lo stesso!

ENUNCIAMO ADESSO il risultato generale

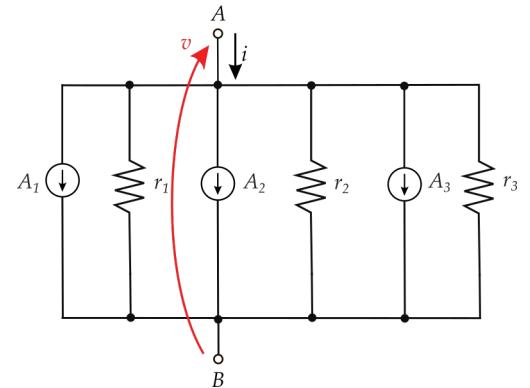


Figure 3.26: Il bipolo composito collegato ai morsetti A e B potrebbe essere equivalente a quello in figura 3.25 se e sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore (lineare e non nullo) in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo.

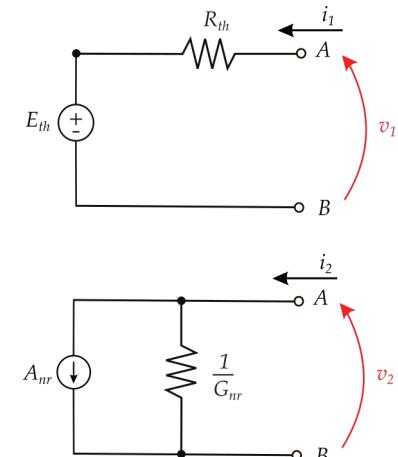


Figure 3.27: Il circuito equivalente di Thevènin, in alto, e il circuito equivalente di Norton, in basso.

Si noti che i segni nelle equazioni 3.41 e 3.42 dipendono dal come sono stati connessi i generatori E_{th} e A_{nr} . Si verifichi, ad esempio, che invertendo il verso di A_{nr} si ottiene $E_{th} = \frac{A_{nr}}{G_{nr}}$. Questo deve quindi stimolare lo studente a non imparare a memoria le formule senza aver capito lo schema da cui derivano, ma l'invito è a saper ricavare le formule una volta disegnato lo schema elettrico.

Dato un bipolo adinamico, non impressivo, lineare affine, se ammette la base di definizione tensione lo si definisce circuito di Norton (cfr. figura 3.27). Se ammette la base corrente lo si definisce circuito di Thévenin (cfr. figura 3.27)³.

È possibile passare da un modello all'altro, quando esistono entrambi, usando le formule 3.41 e 3.42 avendo cura di scegliere con coerenza il modo in cui si connettono E_{th} e A_{nr} .

IN GENERALE l'interconnessione di bipoli lineari adinamici non-impressivi e bipoli impressivi (generatori indipendenti) dà origine ad un bipolo composito lineare affine e adinamico che può essere rappresentato con un modello equivalente di Thévenin e/o di Norton in base alle caratteristiche di controllabilità del bipolo stesso.

3.10 Esercizio

PER IL CIRCUITO in figura 3.28, ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti A e B.

PER DETERMINARE I PARAMETRI R_{th} ed E_{th} , possiamo impostare tra i morsetti A e B una corrente i e ricavare $V_{AB}(i)$. Se riusciremo a ricavare $V_{AB}(i) = \alpha i + \beta$ potremo allora identificare $\alpha = R_{th}$ e $\beta = E_{th}$.

PROVIAMO PER LA PRIMA VOLTA a risolvere il circuito in figura 3.28 scrivendo sul suo schema le informazioni che si possono facilmente dedurre applicando le equazioni di Kirchhoff (cfr. figura 3.29) e sfruttando le equazioni costitutive dei componenti. Si può subito scrivere che (in base a come sono stati arbitrariamente scelti i loro versi)

- la corrente in R_2 vale $i + A_2$;
- la corrente in R_1 vale $i + A_2 - A_1$;
- la corrente in R_3 vale $i + A_2$.

³ Se ammette entrambe le basi sono definiti entrambi i circuiti, Norton e Thévenin.

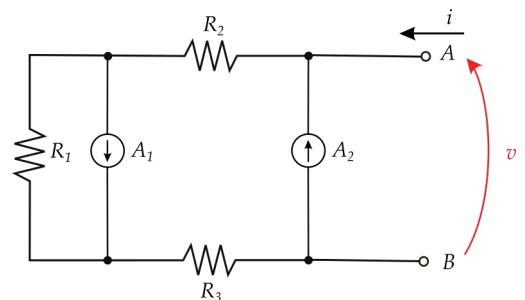


Figure 3.28: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti A e B.

Si noti che si è scelto di impostare una corrente i perché il modello equivalente di Thévenin richiede che il bipolo composito sia controllabile in corrente. Se fosse stato richiesto il modello equivalente di Norton avremmo dovuto impostare la tensione V_{AB} e ricavare la corrente i .

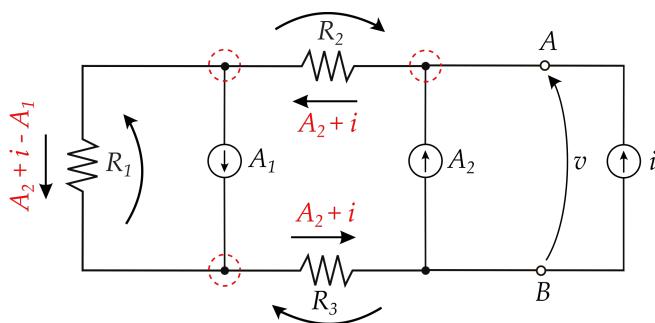


Figure 3.29: Ai morsetti A e B è stato connesso un generatore di corrente i e si vuole ricavare $v(i) = R_{th}i + E_{th}$.

Dalla maglia esterna percorsa in senso antiorario poiché i resistori sono definiti su base corrente mentre i generatori impressivi di corrente non lo sono si può scrivere

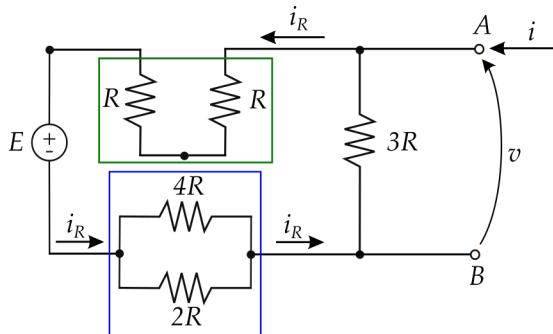
$$\begin{aligned} V_{AB} &= R_2(i + A_2) + R_1(i + A_2 - A_1) + R_3(i + A_2) \\ &= (R_1 + R_2 + R_3)i - R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

e quindi $R_{th} = R_1 + R_2 + R_3$ e $E_{th} = -R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2$.

SI LASCIA ALLO STUDENTE ricavare il valore di A_1 tale da far sì che il bipolo composito si comporti ai morsetti A e B come un resistore.

SI NOTI ANCORA, vedremo poi che è in realtà un risultato generale, che se $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$ allora $E_{th} = 0$. La rete con i generatori indipendenti spenti si dice **passivata**, i generatori di tensione diventano dei cortocircuiti e quelli di corrente dei circuiti aperti.

3.11 Esercizio



SI DETERMININO i parametri del circuito di Norton equivalente, ai morsetti A e B , al bipolo composito in figura 3.30.

POICHÈ I RESISTORI DI RESISTENZA R (cfr. figura 3.30, nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza $2R$ e $4R$, nel box blu, sono in parallelo, il circuito in esame può essere ridisegnato come in figura 3.31. La corrente i sarà dunque

$$i(v) = \frac{v}{3R} + \frac{v - E}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R_{eq}} \right) v - \frac{E}{R_{eq}} . \quad (3.44)$$

Essendo $R_{eq} = \frac{10}{3}R$, si ricava $G_{nr} = \frac{19}{30R}$ e $A_{nr} = -\frac{3E}{10R}$.

Figure 3.30: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Norton, ai morsetti A e B che deve essere definibile su base tensione. Si noti che i resistori di resistenza R , nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza $2R$ e $4R$, nel box blu, sono in parallelo.

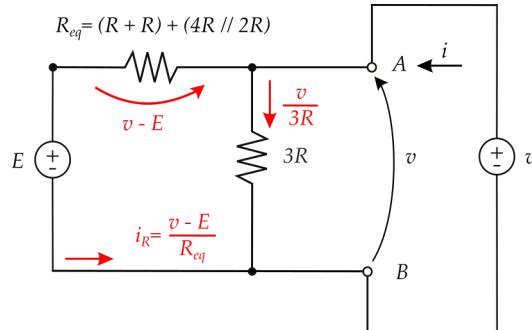


Figure 3.31: Ai morsetti A e B è stato connesso un generatore di tensione v e si vuole ricavare $i(v) = G_{nr}v + A_{nr}$.

4

4.1 Il tripolo lineare affine

Il tripolo riportato in Figura 4.1 può essere modellizzato come un due-porte.

La sua equazione costitutiva coinvolge due coppie di variabili elettriche (tensione, corrente) misurate su ciascuna porta. Siano v_1, i_1 la tensione e la corrente misurate alla porta 1 e v_2, i_2 la tensione e la corrente misurate alla porta 2. Il sistema di due equazioni lineari implicite (una per porta) che legano le variabili descrittive e che definiscono l'equazione costitutiva è

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + q_1 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + d_1 i_1 + d_2 i_2 + q_2 &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.1)$$

Possiamo, per esempio, esplicitare le tensioni v_1 e v_2 rispetto alle correnti i_1 e i_2 . Per fare ciò supponiamo, come per il bipolo, che il tripolo sia definito su base corrente. Per esplicitare la tensione v_1 moltiplichiamo la prima equazione in 4.1 per c_2 e la seconda equazione per a_2 ottenendo

$$\begin{aligned} c_2 a_1 v_1 + c_2 a_2 v_2 + c_2 b_1 i_1 + c_2 b_2 i_2 + c_2 q_1 &= 0 \\ a_2 c_1 v_1 + a_2 c_2 v_2 + a_2 d_1 i_1 + a_2 d_2 i_2 + a_2 q_2 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda, dopo aver raccolto i termini comuni, si ottiene

$$(c_2 a_1 - a_2 c_1) v_1 + (c_2 b_1 - a_2 d_1) i_1 + (c_2 b_2 - a_2 d_2) i_2 + c_2 q_1 - a_2 q_2 = 0 \quad .$$

Poichè abbiamo assunto che la definizione su base corrente esista, ciò implica che $(c_2 a_1 - a_2 c_1) \neq 0$. Dividendo tutto per $(c_2 a_1 - a_2 c_1)$ e isolando v_1 si ottiene

$$v_1 = \frac{a_2 d_1 - c_2 b_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_1 + \frac{a_2 d_2 - c_2 b_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_2 + \frac{-c_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_1 + \frac{a_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_2 \quad .$$

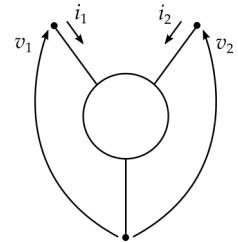


Figure 4.1: Il tripolo con evidenziate le variabili elettriche indipendenti (variabili descrittive) utilizzate per descriverne la caratteristica (equazione costitutiva).

Con un procedimento analogo si può esprimere la tensione v_2 rispetto alle correnti i_1 e i_2 , ottenendo complessivamente

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_2 d_1 - c_2 b_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_1 + \frac{a_2 d_2 - c_2 b_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_2 + \frac{-c_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_1 + \frac{a_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_2 \\ v_2 &= \frac{c_1 b_1 - a_1 d_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_1 + \frac{c_1 b_2 - a_1 d_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} i_2 + \frac{c_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_1 + \frac{-a_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Riorganizziamo i termini del sistema 4.2 nel modo seguente

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{a_2 d_1 - c_2 b_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} [\Omega] & r_{12} &= \frac{a_2 d_2 - c_2 b_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} [\Omega] \\ r_{21} &= \frac{c_1 b_1 - a_1 d_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} [\Omega] & r_{22} &= \frac{c_1 b_2 - a_1 d_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} [\Omega] \\ E_1 &= \frac{-c_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_1 + \frac{a_2}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_2 & [V] \\ E_2 &= \frac{c_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_1 + \frac{-a_1}{c_2 a_1 - a_2 c_1} q_2 & [V] \end{aligned}$$

e riscriviamolo in modo più compatto come

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 + E_1 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 + E_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Osservando l'equazione 4.3, si nota che la corrente i_1 alla porta 1 contribuisce alla tensione complessiva v_1 , misurata sulla stessa porta, attraverso il coefficiente r_{11} ; il modello che implementa questo legame è quello di un resistore lineare di resistenza r_{11} . È immediato notare che la stessa cosa vale per il coefficiente r_{22} che mette in relazione v_2 e i_2 . La corrente i_2 misurata alla porta 2 contribuisce anch'essa alla tensione complessiva v_1 attraverso il coefficiente r_{12} . Il modello che implementa questo legame non può essere però un resistore poiché le due grandezze non sono *locali*! Introduciamo, pertanto, un nuovo modello che permetta di legare due grandezze elettriche *non locali*. Nel nostro caso specifico il nuovo modello si chiama generatore di tensione pilotato in corrente (l'acronimo è ccvs da "current controlled voltage source").

In modo similare possiamo notare che il coefficiente r_{21} in 4.3 è introdotto da un ccvs che è pilotato dalla corrente i_1 alla porta 1 e che genera una tensione alla porta 2 che contribuisce alla tensione complessiva v_2 . Il modello di una porta è pertanto composto dalla connessione in serie di un resistore, di un generatore indipendente di tensione e da un ccvs. Si noti che nel caso in cui $r_{11} = r_{21} = r_{22} = E_1 = E_2 = 0$, cioè nel caso in cui i due resistori degenerino in corto circuiti e così pure i generatori indipendenti di tensione, il modello del tripolo è rappresentato esattamente da un ccvs. Ciò implica che un ccvs possa essere rappresentato esclusivamente utilizzando un due-porte.

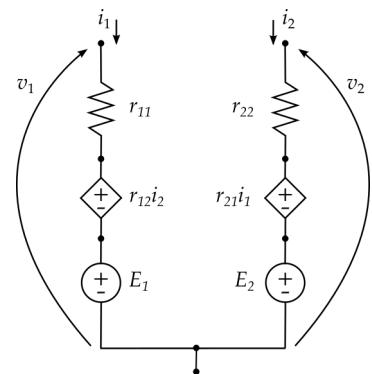


Figure 4.2: Lo schema elettrico equivalente di un tripolo lineare affine definito su base corrente.

Il tripolo modellizzato dalla equazione 4.1 può essere definito anche su base tensione; in questo caso in modo analogo a quanto già è stato fatto, possiamo introdurre la forma compatta

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}v_1 + g_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 &= g_{21}v_1 + g_{22}v_2 + A_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove g_{11} e g_{22} sono conduttanze. Per tenere conto del contributo dato alle correnti i_1 e i_2 , attraverso i coefficienti g_{12} e g_{21} , rispettivamente dalle tensioni v_2 e v_1 , dobbiamo introdurre un altro tipo di generatore pilotato e precisamente il generatore di corrente pilotato in tensione ('acronimo è vccs da "voltage controlled current source").

Poichè stiamo trattando un due-porta che coinvolge 4 grandezze elettriche indipendenti, possono esistere anche basi di definizione miste cioè quelle $(v_1, i_2), (v_2, i_1)$. Le basi (v_1, i_2) e (i_1, v_2) si dicono ibride perché coinvolgono grandezze non omogenee.

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 + E_1 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2 + A_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2 + A_1 \\ v_2 &= h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2 + E_2 \end{aligned}$$

Da un punto di vista matematico è possibile anche scrivere le rappresentazioni seguenti

$$\begin{aligned} v_1 &= t_{11}v_2 + t_{12}(-i_2) + E_1 \\ i_1 &= t_{21}v_2 + t_{22}(-i_2) + A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= t'_{11}v_1 + t'_{12}(-i_1) + E_2 \\ i_2 &= t'_{21}v_1 + t'_{22}(-i_1) + A_2 \end{aligned}$$

che si distinguono da tutte le altre perché le coppie di grandezze elettriche (v_1, i_1) e (v_2, i_2) sono misurate sulla *stessa porta*. Come abbiamo però già detto in precedenza, poichè non è possibile utilizzando sorgenti impressive imporre corrente e tensione alla stessa porta, le rappresentazioni suddette introducono delle difficoltà di carattere sperimentale se le si volesse usare per caratterizzare il tripolo in laboratorio.

4.2 I generatori (sorgenti) pilotati

LE SORGENTI PILOTATE o controllate o generatori pilotati sono dei componenti *lineari*¹ a 3 terminali e modellano il comportamento di componenti fisici (o di più componenti fisici connessi per formare un 3 terminali) in opportune condizioni di funzionamento. Ce ne sono 4 tipi possibili e sono rappresentati in figura 4.4.

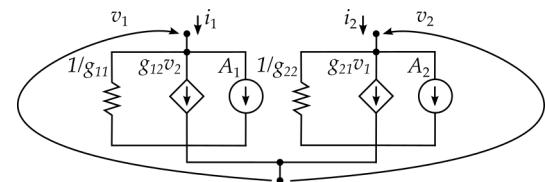


Figure 4.3: Lo schema elettrico equivalente di un tripolo lineare affine definito su base tensione.

¹ La linearità delle sorgenti pilotate sarà evidente dopo aver introdotto i doppi bipoli (cfr. paragrafo 6.1).

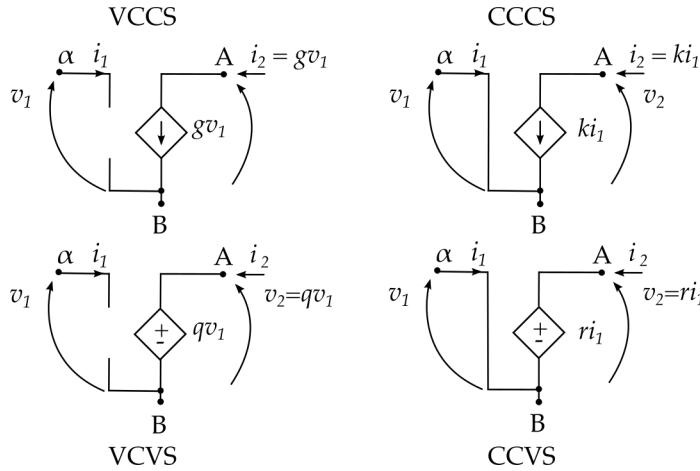


Figure 4.4: Voltage controlled current source (vccs) è il generatore di corrente controllato in tensione ($[g] = \Omega^{-1}$). Voltage controlled voltage source (vcvs) è il generatore di tensione controllato in tensione. Current controlled current source (cccs) è il generatore di corrente controllato in corrente. Current controlled voltage source (ccvs) è il generatore di tensione controllato in corrente ($[r] = \Omega$).

PER QUANDO RIGUARDA le basi di definizione, le sorgenti pilotate ammettono ciascuna una sola base, dato che impongono la tensione o la corrente alle loro due coppie di morsetti.

VCCS: base tensione (v_1, v_2)

VCVS: base mista (v_1, i_2)

CCCS: base mista (i_1, v_2)

CCVS: base corrente (i_1, i_2)

LA POTENZA ASSORBITA da un generatore pilotato, facendo riferimento alla formulazione generale della potenza assorbita da un n -terminali (cfr. paragrafo 3.1.1), risulta essere

$$\text{VCCS: } p_a = v_1 \cdot 0 + v_2 \cdot g v_1 = v_2 \cdot g v_1$$

$$\text{VCVS: } p_a = v_1 \cdot 0 + i_2 \cdot \beta v_1 = i_2 \cdot \beta v_1$$

$$\text{CCCS: } p_a = i_1 \cdot 0 + v_2 \cdot \alpha i_1 = v_2 \cdot \alpha i_1$$

$$\text{CCVS: } p_a = i_1 \cdot 0 + i_2 \cdot r i_1 = i_2 \cdot r i_1$$

SPESSO LE SORGENTI PILOTATE vengono inserite nei circuiti elettrici senza avere cura di specificare la coppia di morsetti che identifica il lato pilotante, ma si evidenzia solo la porzione del 3-terminali che corrisponde alla sorgente di tensione o corrente, cioè un bipolo. Questo tipo di approccio, che ha come unico scopo quello di semplificare graficamente, ove possibile, la struttura delle reti che interessano, verrà spesso adottato anche in questo corso. Si invita tuttavia lo studente a tenere ben presente la natura a 3 terminali di questi componenti. Infatti, dato che i generatori pilotati sono solo modelli

di circuiti che in opportune condizioni possono essere descritti come tali, la coppia di morsetti che corrisponde al lato da cui si preleva la grandezza pilotante ha un significato fisico ben preciso.

PER QUANTO RIGUARDA i modelli equivalenti di Thevènin e Norton (cfr. paragrafo 3.9), essi possono essere definiti anche per bipoli composti che comprendono anche sorgenti pilotate. La dimostrazione di questa affermazione sarà presentata in paragrafi successivi.

4.3 Esempi

4.3.1 Un resistore di resistenza negativa

ANALIZZANDO LA FIGURA 4.5 si ricava banalmente che $v = -ri_1$ e $i = i_1$ da cui si può scrivere la caratteristica ai morsetti A e B, $v = -ri$. Si ottiene così un bipolo strettamente attivo.

4.3.2 Esercizio: risoluzione di una rete

PER LA RETE IN FIGURA 4.6 si ricavino tutte le variabili elettriche di lato evidenziate in rosso.

IL GRAFO DEL CIRCUITO è composto da $n = 4$ nodi e $l = 5$ lati il che implica che si potranno scrivere al più $n - 1 = 3$ KCL e $l - n + 1 = 2$ KVL-II linearmente indipendenti. Si noti che il lato pilotante che preleva la corrente i_1 è stato omesso e la corrente viene indicata come quella che attraversa il resistore R_2 . Utilizzando le prime si può ricavare semplicemente $i_e = -i_1$, $i_2 = -\alpha i_1$ e $i_0 = (1 + \alpha)i_1$. Le equazioni di Kirchhoff per le tensioni alle maglie evidenziate in figura e percorse in senso orario permettono di scrivere $E - v_1 - v_0 = 0$ e $v_g - v_2 + v_0 = 0$ che, utilizzando le equazioni costitutive dei bipoli della rete e il risultato delle 2 KCL, diventano

$$\begin{aligned} E - R_2 i_1 - R_1 (1 + \alpha) i_1 &= 0 \\ v_g - R_1 (-\alpha i_1) + R_1 (1 + \alpha) i_1 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.5)$$

$$\text{da cui } i_1 = \frac{E}{R_2 + R_1(1 + \alpha)} \text{ e } v_g = -\frac{R_1(1 + 2\alpha)}{R_2 + R_1(1 + \alpha)} E.$$

Il calcolo delle rimanenti grandezze di lato è immediato e si lascia allo studente.

4.3.3 Modello equivalente di Thevènin

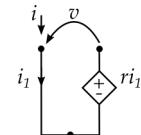


Figure 4.5: $r > 0$.

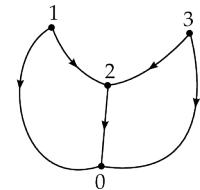
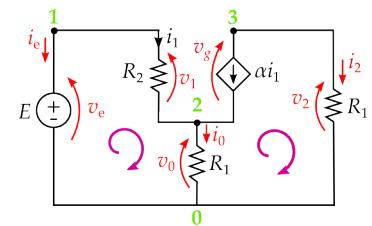


Figure 4.6: Per il circuito in figura sono state evidenziate anche le due maglie che verranno utilizzate per scrivere le KVL-II e il grafo che è stato orientato come le correnti.

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.7 si ricavino i parametri del modello equivalente di Thevènin ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione v tra i morsetti A e B e la tensione v_2 ai capi di R_2 sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario permette quindi di scrivere

$$v + \alpha v - R_1 \left(A_0 + i - \frac{v}{R_2} \right) = 0 , \quad (4.6)$$

da cui

$$v = \underbrace{\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2(1 + \alpha)} i}_{R_{th}} + \underbrace{\frac{R_2 R_1 A_0}{R_1 + R_2(1 + \alpha)}}_{E_{th}} . \quad (4.7)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Thevènin è verificata a posteriori se sono definite E_{th} ed R_{th} . A questo proposito è necessario che $R_1 + R_2(1 + \alpha) \neq 0$, ovvero $\alpha \neq -\frac{R_1}{R_2} - 1$.

INFINE NOTIAMO CHE (i) se passivassimo la sorgente indipendente A_0 il termine E_{th} si annulla e (ii), nonostante si passivi A_0 , R_{th} dipende da α dato che per ricavare R_{th} si deve inserire il generatore i . Questa ultima considerazione si estende facendo notare che, in generale, il termine R_{th} dipende da eventuali generatori pilotati che non è lecito passivare!

4.3.4 Modello equivalente di Norton 1

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.8 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione v tra i morsetti A e B e la tensione ai capi di R_3 sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario permette quindi di scrivere

$$v - r(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_1(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_2(i - \frac{v}{R_3}) = 0 , \quad (4.8)$$

da cui

$$i = \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3 + r}{R_3(R_1 + R_2 + r)} v}_{G_{nr}} - \underbrace{\frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I}_{A_{nr}} . \quad (4.9)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è verificata a posteriori se sono definite A_{nr} ed G_{nr} . A questo proposito è necessario che $R_1 + R_2 + r \neq 0$, ovvero $r \neq -(R_1 + R_2)$, e $R_3 \neq 0$. Nuovamente, se passivassimo I otterremmo $A_{nr} = 0$.

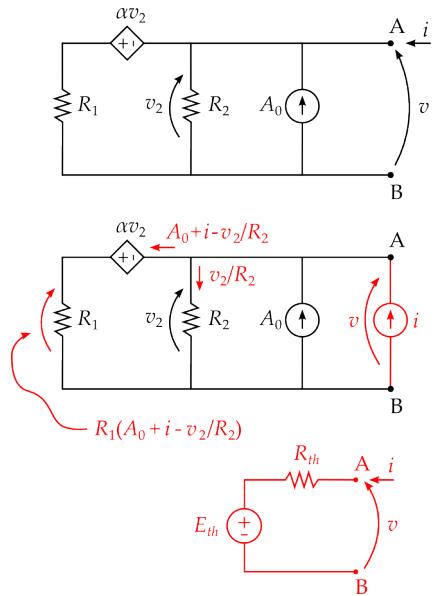


Figure 4.7: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Thevènin del quale si vogliono determinare i parametri E_{th} ed R_{th} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

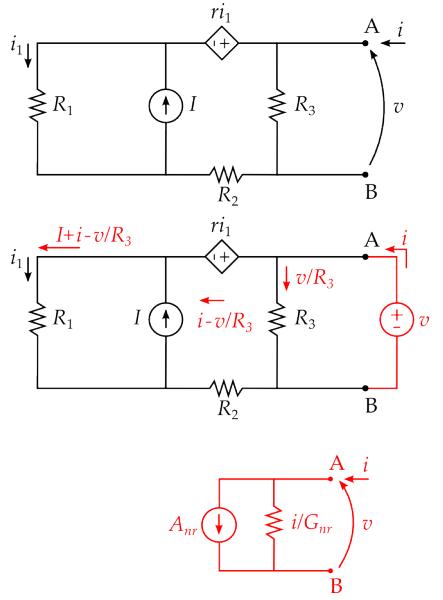


Figure 4.8: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri A_{nr} ed G_{nr} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

4.3.5 Modello equivalente di Norton 2

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.9 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti A e B (se esiste).

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO a quello usato negli esercizi precedenti si ricava

$$i = \underbrace{\frac{1}{R_2} v}_{G_{nr}} + \underbrace{gE}_{A_{nr}} . \quad (4.10)$$

PER L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è necessario che $R_2 \neq 0$. Nuovamente, se passivassimo E otterremmo $A_{nr} = 0$. Si noti però che, in questo caso specifico, passivare E comporta che $v_1 = 0$ e che quindi $rv_1 \equiv 0$. Ciò significa che il cccvs può essere sostituito con un corto circuito equivalente. Inoltre, se si passiva E, ri_2 non viene passivato ma non assorbe e non eroga potenza dato che è percorso da corrente nulla.

4.4 L'analisi nodale

INTRODUCIAMO IN QUESTO PARAGRAFO una procedura sistematica per risolvere i circuiti (cioè per ricavare univocamente il valore delle variabili elettriche) che si basa sulle equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.10). Nell'introdurre queste ultime per un circuito con un grafo connesso, con n nodi ed l lati, abbiamo scritto un sistema del tipo

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ v - A^T u = 0 \end{cases} , \quad (4.11)$$

in $l + n - 1$ equazioni linearmente indipendenti e $2l + n - 1$ incognite. A tale sistema è necessario aggiungere le l equazioni costitutive dei componenti che essendo indipendenti permettono di avere complessivamente tante incognite quante equazioni. Ci occuperemo nel seguito di formalizzare questo aspetto, ottenendo anche un teorema di esistenza ed unicità della soluzione, per adesso introduciamo un metodo che consente di ridurre le equazioni di Tableau e ricavare tutti gli $n - 1$ potenziali di nodo del circuito in esame (da qui il nome di **analisi nodale**) e da essi ricavare le tensioni e le correnti di lato incognite. Per fare ciò fissiamo un'ipotesi di lavoro che poi andremo a rimuovere

il circuito contiene solo componenti definiti su base tensione.

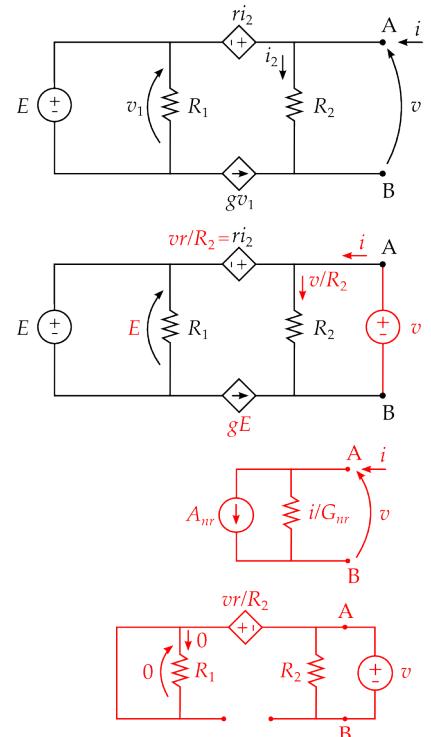


Figure 4.9: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri A_{nr} ed G_{nr} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema. L'ultima schema circuitale in basso rappresenta il circuito equivalente che si ottiene passivando la sorgente impressiva E nel calcolo dei parametri A_{nr} ed G_{nr} .

Passo 0: Si sceglie, tra gli n nodi del circuito, un nodo di riferimento per il potenziale. Lo chiameremo nodo 0 e il suo potenziale u_0 può essere scelto arbitrariamente nullo.

Passo 1: Tutte le tensioni di lato del circuito sono ricavate in funzione dei potenziali di nodo usando le KVL-I. Di fatto si utilizza l'equazione $v - A^T u = 0$.

Passo 2: Mediante le equazioni costitutive dei componenti, che sono stati assunti controllabili in tensione (cioè $i = i(v)$), si ricavano le correnti di lato in funzione dei potenziali nodi (cioè $i = i(A^T u)$).

Passo 3: Si risolvono le KCL in funzione dei potenziali di nodo, cioè $Ai = Ai(A^T u) = 0$.

L'ULTIMO PASSO DEL METODO comporta la risoluzione di un sistema di $n - 1$ equazioni (le KCL) in $n - 1$ incognite (i potenziali di nodo). Una volta determinati i potenziali di nodo, è possibile ripercorre i passi a ritroso e ricavare le correnti e le tensioni di lato.

APPARENTEMENTE, per come abbiamo risolto i circuiti finora, si potrebbe erroneamente pensare che mediante l'analisi nodale non si utilizzino le KVL ma solo le KCL. Ciò è ovviamente falso: si usano le KVL-I al "Passo 1", che sappiamo corrispondere alle KVL-II (cfr. paragrafo 2.8), quelle che abbiamo sempre usato e che sembrano mancare all'appello.

4.5 Un esempio guida

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.10. Il "Passo 0" del metodo è stato applicato direttamente sullo schema del circuito in analisi scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando $u_0 = 0$.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1 \\ v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_1 \\ v_4 &= -u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.12)$$

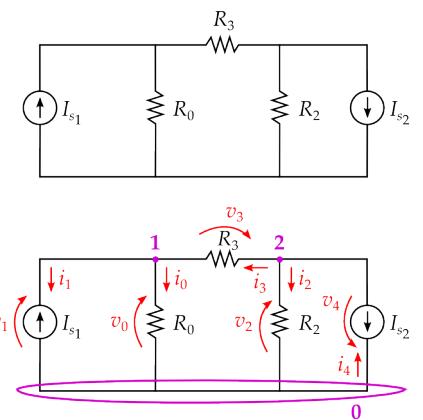


Figure 4.10: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{v_0}{R_0} = \frac{u_1}{R_0} \\ i_1 &= -I_{s1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_2 - u_1}{R_3} \\ i_4 &= -I_{s2} \end{aligned} \quad . \quad (4.13)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } i_1 + i_0 - i_3 &= -I_{s1} + \frac{u_1}{R_0} - \frac{u_2 - u_1}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_2 + i_3 - i_4 &= \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_1}{R_3} + I_{s2} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.14)$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 2 equazioni in 2 incognite che può essere riscritto evidenziandone incognite e termini noti

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3} \right) u_1 - \frac{u_2}{R_3} = I_{s1} \\ -\frac{u_1}{R_3} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u_2 = -I_{s2} \end{cases} \quad . \quad (4.15)$$

e risolto ottenendo

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{I_{s1} R_0 (R_2 + R_3) - I_{s2} R_0 R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \\ u_2 &= -\frac{I_{s2} R_2 (R_0 + R_3) - I_{s1} R_0 R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad . \quad (4.16)$$

4.6 Un altro esempio

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.11 per il quale si è scelto ("Passo 0") il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando $u_0 = 0$. Il circuito ha 3 nodi e quindi l'analisi nodale dovrà fornire un sistema di 3 equazioni lineari avente come incognite i tre potenziali di nodo u_1 , u_2 e u_3 .

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ \bar{v} &= u_2 \\ v_3 &= u_3 \\ v_g &= u_2 - u_3 \\ v_a &= u_1 \end{aligned} \quad . \quad (4.17)$$

Si noti che le correnti i_1 e i_4 non dipendono dai potenziali di nodo dato che corrispondono a generatori indipendenti di corrente.

Si noti come nell'espressione dei potenziali 4.16 di nodo sia evidente il contributo distinto dei due generatori indipendenti.

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= \frac{\bar{v}}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_3}{R_3} \\ i_g &= g\bar{v} = gu_2 \\ i_a &= -A \end{aligned} \quad (4.18)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } -i_a - i_1 &= A - \frac{u_1 - u_2}{R_1} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_1 - i_g - i_2 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - gu_2 - \frac{u_2}{R_2} = 0 \quad . \quad (4.19) \\ \text{KCL nodo 3: } i_g - i_3 &= gu_2 - \frac{u_3}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 3 equazioni in 3 incognite che può essere risolto

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 A + u_2 \\ (R_1 A + u_2 - u_2)R_2 - R_1(gR_2 + 1)u_2 &= R_1[R_2 A - (gR_2 + 1)u_2] = 0 \quad , \\ u_3 &= gR_3 u_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(R_1 + \frac{R_2}{gR_2 + 1} \right) A \\ u_2 &= \frac{R_2}{gR_2 + 1} A \\ u_3 &= \frac{gR_3 R_2}{gR_2 + 1} A \end{aligned} \quad (4.21)$$

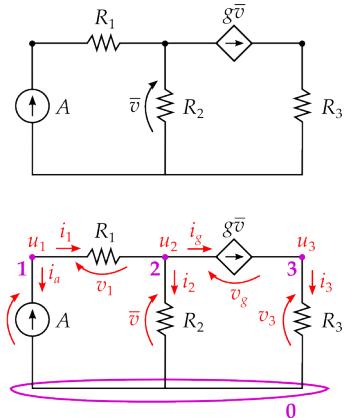


Figure 4.11: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2 e 3 con i potenziali u_1 , u_2 e u_3 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

4.7 Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione

IN QUESTO PARAGRAFO, con l'ausilio di alcuni esempi, si discuterà come l'analisi nodale possa essere estesa a quei circuiti che contengano componenti non controllabili in tensione.

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 4.12 e si applichi l'analisi nodale per ricavare i potenziali di nodo u_1 e u_2 .

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_2 \quad . \\ v_a &= -u_2 \\ v_E &= u_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_1 - u_2}{R_3} \quad . \\ i_a &= -A_0 \\ i_E &= \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_E + i_1 + i_3 &= i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2 : } i_2 - i_3 - i_a &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.24)$$

DALL'ESEMPIO PROPOSTO si nota come la presenza di un componente non controllabile in tensione² lascia una corrente incognita, i_E , nelle equazioni dei potenziali di nodo dato che tale corrente non può essere espressa in funzione dei potenziali stessi.

TUTTAVIA È POSSIBILE estendere il sistema dell'analisi nodale aggiungendo l'equazione implicita che descrive la caratteristica del componente non controllabile in tensione, cioè $v_E = u_1 = E$, ripristinando così un numero di equazioni pari al numero di incognite³

$$\left\{ \begin{array}{l} i_E + i_1 + i_3 = i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

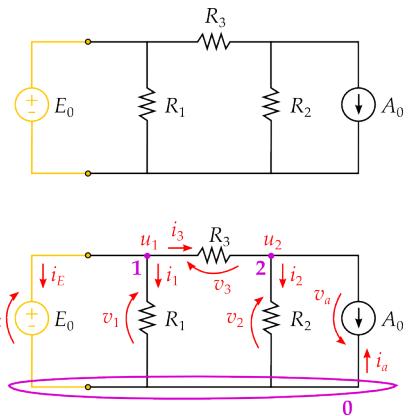


Figure 4.12: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente E_0 non è definito su base tensione.

² Nel caso di un bipolo esso corrisponde direttamente ad un lato non controllabile in tensione. Più in generale potrebbe essere anche un n -terminale, che ammette come base la n -upla costituita da m correnti ($m \leq n$) e $n - m$ tensioni, che comporta m lati non controllabili in tensione.

³ Nel caso in cui ci fossero m lati non controllabili in tensione per un circuito con $n - 1$ nodi, si avrebbe un sistema finale in $n - 1 + m$ equazioni e $n - 1 + m$ incognite.

LA SOLUZIONE PROPOSTA è quella che potrebbe essere codificata in modo sistematico in un calcolatore. Tuttavia noi, per risolvere i circuiti con "carta e matita", useremo un ulteriore passo che permette di riportarci nuovamente nella condizione di avere $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite. Per fare ciò distinguiamo due casi possibili

- a: il lato non controllabile in tensione è connesso tra un generico nodo k e il nodo 0;
- b: il lato non controllabile in tensione è connesso tra due generici nodi k e h .

Ipotiziamo che al nodo k , nel caso "a" e "b", e al nodo h , nel caso "b", non siano connessi altri lati non controllabili in tensione.

EVIDENTEMENTE, in generale, ci troveremo nella situazione di avere contemporaneamente alcuni lati non controllabili in tensione nel caso "a" ed altri nel caso "b". Per ciascuno di essi si dovrà applicare la procedura corrispondente.

4.7.1 Il caso "a": connessione $k - 0$

QUESTO CASO È QUELLO che abbiamo incontrato in figura 4.12 ed è facile convincersi che porterà sempre ad avere una KCL al nodo k in cui il lato non controllabile incide (uscente o entrante non è rilevante). Inoltre ci sarà un'equazione del componente del tipo $u_k = u_k(\mathbf{i}, \mathbf{v})$, dove \mathbf{i} e \mathbf{v} sono i vettori delle correnti e delle tensioni di lato del circuito.

LA TECNICA DI RIDUZIONE delle equazioni, in questo caso, prevede la rimozione della KCL al nodo k , che contiene la corrente nel lato non controllabile in tensione, e l'aggiunta tra le KCL dell'equazione descrittiva del componente.

Facendo riferimento al circuito in figura 4.12, il sistema di equazioni 4.25 diventerebbe

$$\begin{cases} i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{cases}, \quad (4.26)$$

cioè un sistema di 2 equazioni in 2 incognite (i soli potenziali di nodo). Risolto il sistema 4.26, sarà poi possibile percorre a ritroso i passi compiuti e ricavare la i_E dall'equazione rimossa, in cui ormai tutto sarà noto tranne la i_E stessa, e poi ricavare come al solito tutte le grandezze di lato incognite.

UN ESEMPIO ULTERIORE del caso discusso è rappresentato in figura 4.13: Applicheremo direttamente l'analisi nodale *modificata* per risolverlo.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ v_2 &= -u_2 \\ v_{g1} &= u_1 \\ v_{g2} &= -u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.27)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= -\frac{u_2}{R_2} \\ i_{g2} &= -g(u_1 - u_2) \end{aligned} \quad . \quad (4.28)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 2: } i_1 + i_2 + i_{g2} &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - g(u_1 - u_2) = 0 \\ \text{Eq. cost. VCVS: } v_{g1} - \beta v_2 &= u_1 - \beta(-u_2) = u_1 + \beta u_2 = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.29)$$

Si ottiene quindi $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, risultato che non deve sorprendere dato che la rete contiene solo elementi non impressivi, tempo-invarianti e adinamici.

SI NOTI CHE non è possibile avere in un circuito ben posto più lati di tipo $k - 0$ che incidano nel medesimo nodo k . Questa situazione degenera, infatti, potrebbe violare le equazioni di Kirchhoff per le tensioni dato che si avrebbero componenti non definiti su base tensione connessi in parallelo tra i nodi k e 0 oppure portare a una o più correnti indeterminate.

4.7.2 Il caso "b": connessione $k - h$

INTRODUCIAMO QUESTO CASO con un esempio. Consideriamo il circuito in figura 4.14 per il quale sceglieremo il nodo 0 di riferimento per il potenziale.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_{A_0} &= u_1 \\ v_{A_1} &= -u_2 \\ v_E &= u_1 - u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.30)$$

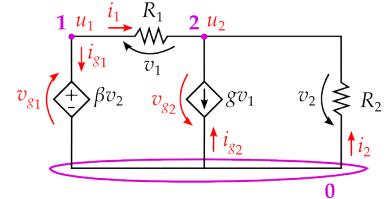
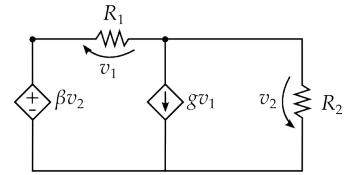


Figure 4.13: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione pilotato βv_2 , di cui non è stato riportato il lato pilotante, non è definito su base tensione.

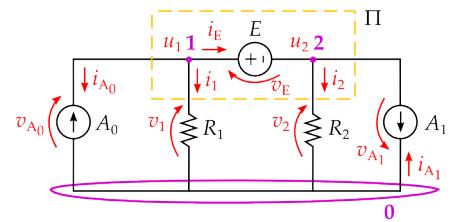
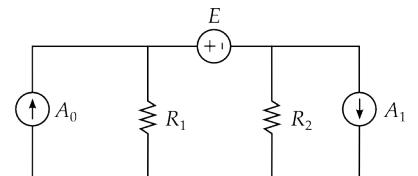


Figure 4.14: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente E non è definito su base tensione.

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2}{R_2} \\ i_{A_0} &= -A_0 \\ i_{A_1} &= -A_1 \end{aligned} \quad . \quad (4.31)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_{A_0} + i_1 + i_E &= -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + i_E = 0 \\ \text{KCL nodo 2 : } i_2 - i_{A_1} - i_E &= \frac{u_2}{R_2} + A_1 + \frac{u_1}{R_1} - i_E = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.32)$$

IN QUESTO CASO si nota come le due KCL contengono entrambe la corrente i_E del lato non controllabile in tensione. Ciò non sorprende dato che il lato non è incidente nel nodo 0 e, dato che il grafo è connesso, deve quindi entrare ed uscire, rispettivamente, da altri due nodi del circuito. Non possiamo procedere eliminando le due equazioni dato che, in questo modo, ci troveremmo solo con l'equazione del componente non controllabile in tensione, $v_E = u_1 - u_2 = E$. Non possiamo neppure toglierne una delle due perché avremmo 2 equazioni e 3 incognite.

DATO CHE il lato non controllabile in tensione entra nel nodo 2 ed esce dal nodo 1, nelle due KCL la i_E appare con segno opposto.

Questo fa sì che, sommandole, si elimini la corrente i_E

$$i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} = 0 \quad . \quad (4.33)$$

Di fatto questa nuova equazione è la KCL alla superficie Π evidenziato in figura 4.14. Tale superficie prende il nome di **supernodo** dal momento che racchiude entrambi i nodi ai quali è connesso il lato non controllato in tensione.

A LIVELLO SISTEMATICO, questo tipo di situazione è trattabile evidenziando il componente non controllato in tensione, connesso ai due generici nodi k e h , disegnando il supernodo Π_{kh} corrispondente e scrivendo al "Passo 3" la KCL al supernodo, utilizzando infine l'equazione costitutiva del componente non controllato in tensione. Per l'esempio considerato, il "Passo 3" diventa quindi

$$\text{KCL supernodo } \Pi_{12} : i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} = -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + A_1 = 0$$

$$\text{Eq. cost. Gen : } u_1 - u_2 - E = 0$$

(4.34)

Risolvendo si ottiene $u_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(A_0 - A_1 - \frac{E}{R_1} \right)$ e $u_1 = E + u_2$.

IN QUESTO CASO, se avessimo considerato il nodo 1 o il nodo 2 come riferimento per la tensione, il generatore di tensione sarebbe ricaduto nel caso "a" precedentemente discusso. Si lascia allo studente verificare che si sarebbe trovata una soluzione del circuito coerente con quella proposta.

4.7.3 Un caso più complesso

UN ESEMPIO PIÙ COMPLESSO in cui, se si sceglie 0 come nodo di riferimento, si ha a che fare con i casi "k - 0" e "k - h" contemporaneamente, è riportato in figura 4.15. Evidentemente se avessimo scelto 1 come nodo di riferimento avremmo avuto due lati non controllabili in tensione del tipo "k - 0" e si lascia allo studente verificare la coerenza dei risultati che si sarebbero ottenuti.

NEL CIRCUITO SCELTO possiamo notare che al nodo 1 sono connessi due lati non controllabili in tensione e questo richiederà un approccio leggermente diverso da quelli precedentemente descritti.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 \\ v_E &= u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_3 \\ v_g &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_3 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_3}{R_1} \\ \bar{i} &= \frac{u_1 - u_3}{R_2} \\ i_3 &= \frac{u_2 - u_3}{R_3} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Passo 3:

$$\text{KCL nodo 3 : } \bar{i} + i_3 - i_1 = \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0$$

$$\text{KCL supernodo } \Pi_{12} : i_E + \bar{i} + i_3 = i_E + \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} = 0$$

$$\text{Eq. cost. Gen : } u_1 - E = 0$$

$$\text{Eq. cost. CCVS : } u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \quad (4.37)$$

ANALIZZANDO LE ultime equazioni scritte al Passo "3", si evince che compare ancora la corrente i_E . Il sistema ottenuto è di 4 equazioni

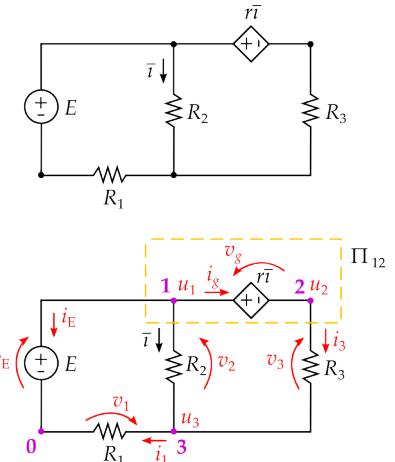


Figura 4.15: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Sono due gli elementi non controllabili in tensione: il generatore di tensione indipendente E e il CCVS $r\bar{i}$ (di cui non si è evidenziato il lato pilotante).

in 4 incognite, ovvero una in più rispetto a quelle dell'analisi nodale, dato che il circuito ha 4 nodi. Il sistema può essere però ridotto eliminando la KCL al supernodo Π_{12} . Questo può essere fatto perché al supernodo incide anche il generatore indipendente E che fissa il potenziale u_1 . Il nodo 1, infatti, è chiamato in causa dal lato di tipo $k - 0$ e da uno di tipo $k - h$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0 \\ u_1 - E = 0 \\ u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \end{array} \right. . \quad (4.38)$$

Risolvendole si ricava

$$\begin{aligned} u_1 &= E \\ u_3 &= \frac{R_1(R_3 + R_2 - r)}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2 - rR_1} E \\ u_2 &= \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) E + \frac{r}{R_2} u_3 \end{aligned} . \quad (4.39)$$

Si noti come l'aver eliminato dal circuito il lato pilotante del generatore di tensione pilotato in corrente è stato possibile solo grazie ad un "trucco". Infatti, per essere rigorosi, il lato pilotante sarebbe un cortocircuito collegato in serie ad R_2 e con un morsetto connesso al nodo 1. Se così fosse considerato il circuito, utilizzare il super nodo per eliminare tale lato non avrebbe funzionato perché la corrente pilotante sarebbe poi stata comunque necessaria nell'equazione $v_g = r\bar{i}$ e non la si sarebbe potuta scrivere, per definizione, in funzione dei potenziali di nodo. Nell'esempio, la si è invece scritta come la corrente in R_2 , un lato controllabile in tensione che "accompagna" il lato pilotante omesso. Solo così si è potuto esplicitare $v_g = r\bar{i}$ in funzione dei potenziali di nodo. Nel seguito faremo sempre questa scelta (quando possibile!). Se il lato che preleva la corrente pilotante non fosse invece "accompagnato", non sarebbe possibile eliminare dalle incognite tale corrente e riportarsi ad $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite.

4.7.4 Sempre peggio

UN CASO ANCORA PIÙ COMPLESSO di quelli trattati precedentemente è riportato in figura 4.16. Il circuito contiene 3 bipoli non controllabili in tensione e saremmo tentati di dire che servono i supernodi Π_{21} e Π_{24} . Si noti tuttavia che al nodo 2 sono connessi due lati non controllabili in tensione.

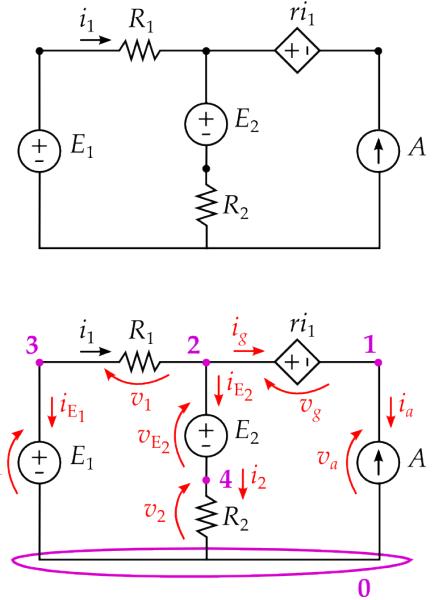


Figure 4.16: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2, 3 e 4, con i potenziali u_1, u_2, u_3 e u_4 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il circuito contiene 3 bipoli non definiti su base tensione.

Passo 1:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= u_3 - u_2 \\
 v_{E_1} &= u_3 \\
 v_{E_2} &= u_2 - u_4 \\
 v_2 &= u_4 \\
 v_g &= u_2 - u_1 \\
 v_a &= u_1
 \end{aligned} \quad . \quad (4.40)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{u_3 - u_2}{R_1} \\
 i_2 &= \frac{u_4}{R_2} \\
 i_a &= -A
 \end{aligned} \quad . \quad (4.41)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned}
 \text{KCL supernodo } \Pi_{21} : \quad i_a + i_{E_2} - i_1 &= -A + i_{E_2} - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\
 \text{KCL supernodo } \Pi_{24} : \quad i_1 - i_g - i_2 &= \frac{u_3 - u_2}{R_1} - i_g - \frac{u_4}{R_2} = 0 \\
 \text{Eq. cost. E}_1 : \quad u_3 - E_1 &= 0 \\
 \text{Eq. cost. E}_2 : \quad u_2 - u_4 - E_2 &= 0 \\
 \text{Eq. cost. CCVS : } u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} &= 0
 \end{aligned} \quad . \quad (4.42)$$

SEGUENDO LA PROCEDURA descritta in precedenza, cioè,

- eliminando la KCL al nodo 3 e inserendo l'equazione costitutiva del generatore E_1 (connessione $k - 0$),
- usando la KCL al supernodo Π_{21} e inserendo l'equazione costitutiva del generatore pilotato,
- usando la KCL al supernodo Π_{24} e inserendo l'equazione costitutiva del generatore E_2 ,

si ottiene un sistema di 5 equazioni in 6 incognite contro le 4 in 4 incognite che ci saremmo aspettati. Questo si deve al fatto che al nodo 2 sono connessi 2 lati non controllabili in tensione di tipo $k - h$.

SI RICHIEDE di utilizzare il supernodo Π_{124} che racchiude completamente 2 lati non controllati in tensione di tipo $k - h$, e nasconde quindi le correnti i_{E_2} e i_g , e tagli solo lati controllabili in tensione

(quelli dei componenti R_1 , R_2 ed A . Le equazioni del “Passo 3” modificato diventano quindi

$$\begin{aligned} \text{KCL supernodo } \Pi_{124} : \quad i_2 + i_a - i_1 &= \frac{u_4}{R_2} - A - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\ \text{Eq. cost. } E_1 : \quad u_3 - E_1 &= 0 \\ \text{Eq. cost. } E_2 : \quad u_2 - u_4 - E_2 &= 0 \\ \text{Eq. cost. CCVS : } u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{R_1(E_2 + AR_2 + E_1)}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{r}{R_1} \right) - \frac{r}{R_1} E_1 \\ u_2 &= \frac{R_1 E_2 + AR_1 R_2 + R_1 E_2}{R_1 + R_2} \\ u_3 &= E_1 \\ u_4 &= \frac{R_2(AR_1 - E_2 + E_1)}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

TANTO IN QUESTO ULTIMO ESEMPIO quanto in quello precedente qualora si fosse scelto come nodo di riferimento il nodo 3, il circuito contiene un nodo (il nodo 2 in questo caso e il nodo 1 nel precedente) in cui incidono due lati del grafo non controllabili in tensione di tipo $k - h$. In questo tipo di situazione, anche quando siano più di due i lati incidenti, si interviene individuando delle superfici di controllo più complesse del supernodo che **racchiudono completamente solo lati non controllabili in tensione e tagliano solo lati controllabili in tensione**.

5

5.1 Teorema di esistenza e unicità

SI CONSIDERI UN CIRCUITO LINEARE costituito da multi-terminali, adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, che corrisponda ad un grafo connesso con n nodi e l lati. Facendo riferimento al formalismo usato introducendo le equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.10), si considerino i vettori $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^l$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$, delle correnti e delle tensioni di lato, e dei potenziali di nodo ridotti (cioè non si considera il nodo scelto come riferimento per il potenziale) e si scrivano le equazioni

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} . \quad (5.1)$$

COME POSSIAMO ASPETTARCI che siano formulabili le equazioni costitutive dei componenti nelle ipotesi di lavoro (linearità, adinamicità e tempo-varianza)? Verificheremo con alcuni esempi che è possibile scrivere la relazione matriciale

$$M(t)\mathbf{v}(t) + N(t)\mathbf{i}(t) = \mathbf{z}(t) , \quad (5.2)$$

con $M(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $N(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$, che introduce l equazioni lineari in $2l$ incognite.

COME PRIMO ESEMPIO consideriamo il circuito in figura 5.1. Possiamo scrivere banalmente $v_1 = R_1 i_1$, $v_2 = R_2 i_2$ e $v_E = e(t)$. Queste tre equazioni costitutive possono essere riorganizzate in forma matriciale nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e(t) \end{bmatrix} . \quad (5.3)$$

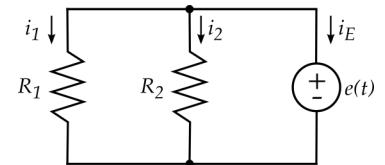


Figure 5.1: Per questo circuito le matrici M ed N sono diagonali.

UN ALTRO ESEMPIO lo costruiamo a partire dal circuito in figura 5.2 in cui è stato evidenziato anche il lato pilotante del CCVS, cioè il cortocircuito tra i nodi 3 e 0. Le equazioni costitutive dei componenti sono $v_1 - R_1 i_1 = 0$ e $v_2 - R_2 i_2 = 0$ per i due resistori lineari, $v_G - r i_{cc} = 0$ e $v_{cc} = 0$ per il generatore pilotato, $i_a = a(t)$ per il generatore indipendente di corrente. In questo caso l'equazione 5.2 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_G \\ v_1 \\ v_a \\ v_2 \\ v_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_G \\ i_1 \\ i_a \\ i_2 \\ i_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Si noti che la presenza del generatore pilotato fa sì che la matrice N presenti un termine fuori dalla diagonale. Infatti il CCVS ha un'equazione costitutiva che lega la sua tensione di lato alla corrente di un altro lato del circuito.

In tutti e due gli esempi scelti, $M(t)$ ed $N(t)$ sono matrici costanti dato che i componenti non sono tempo-varianti.

INTRODUCIAMO ADESSO IL VETTORE $w(t)$ così organizzato

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

grazie al quale possiamo riscrivere le equazioni 5.1 e 5.2 nel modo seguente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbb{O}_{(n-1) \times l} & A \\ -A^T & \mathbb{1}_l & \mathbb{O}_{l \times l} \\ \mathbb{O}_{l \times (n-1)} & M(t) & N(t) \end{bmatrix}}_{T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbb{O}_{l \times 1} \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}}_{y(t)}, \quad (5.6)$$

dove $\mathbb{O}_{m \times n}$ è una matrice di 0 con m righe e n colonne e $\mathbb{1}_l$ è la matrice identità di taglia $l \times l$.

Un circuito lineare, composto da N -terminali adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, ammette quindi una ed una sola soluzione in $t = \hat{t}$ se e solo se $\det(T(\hat{t})) \neq 0$. Tale soluzione unica è pari a $\mathbf{w}(\hat{t}) = T(\hat{t})^{-1} \mathbf{y}(\hat{t})$.

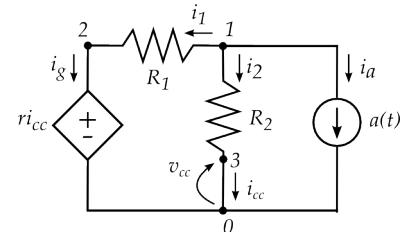


Figure 5.2: Per questo circuito la matrice N non è diagonale a causa della presenza del generatore pilotato. Si noti il lato pilotante (corto circuito) tra i nodi 3 e 0.

LA CONDIZIONE DI ESISTENZA ED UNICITÀ che è stata ricavata, nonostante la sua valenza teorica, è di scarsa utilità pratica e di difficile applicazione. Esistono metodi di analisi che possono essere applicati a grandi classi di circuiti lineari e non lineari che contengano elementi resistivi (incluse le sorgenti pilotate) che consentono di determinare, spesso per ispezione, se il circuito ammette soluzione unica.

5.2 Il principio di sovrapposizione degli effetti

INTRODUCIAMO IL PRINCIPIO o teorema di sovrapposizione degli effetti mediante un esempio. Risolviamo, in particolare, il circuito in figura 5.3 con il metodo dell'analisi nodale modificata per determinarne il potenziale ai nodi 1 e 2.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - u_1 \\ v_3 &= u_1 \\ v_4 &= u_1 \\ v_E &= u_2 \end{aligned} \quad . \quad (5.7)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2 - u_1}{R_2} \\ i_3 &= gv_2 = g(u_2 - u_1) \\ i_4 &= -I \end{aligned} \quad . \quad (5.8)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_4 + i_3 + i_1 - i_2 &= -I + \frac{u_1}{R_1} + g(u_2 - u_1) - \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0 \\ \text{Eq. cost. Gen : } v_E &= u_2 = E \end{aligned} \quad . \quad (5.9)$$

Svolgendo i conti è possibile ricavare agilmente

$$u_1 = \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{h_1} I + \underbrace{\frac{R_1 (1 - g R_2)}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{k_1} E \quad (5.10)$$

e si noti come h_1 e k_1 non dipendono dai generatori indipendenti ma solo dalle grandezze "non impressive" del circuito. h_1 rappresenta l'effetto di I su u_1 e k_1 l'effetto di E . Passivando uno alla

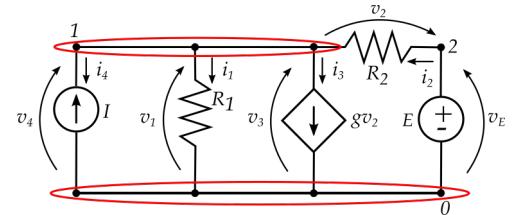


Figure 5.3: Il generatore indipendente di tensione E non è controllabile in tensione ed è connesso al nodo di riferimento 0. Il potenziale al nodo 2 è quindi pari ad E .

volta i due generatori, il potenziale u_1 è esprimibile come uno dei due effetti preso singolarmente. Inoltre, se i generatori venissero passivati contemporaneamente il circuito sarebbe in quiete e u_1 sarebbe nullo. Analogamente si ricava $u_2 = 0 \cdot I + 1 \cdot E$. Tuttavia, affinché, il circuito in figura 5.3 abbia una soluzione, è necessario che $R_2 - gR_1R_2 + R_1 \neq 0$. Il circuito deve quindi essere *ben posto*.

DALL'ESEMPPIO CONSIDERATO si nota come i potenziali di nodo siano una combinazione lineare degli ingressi del circuito. Dato che tensioni di lato e correnti di lato sono esprimibili come combinazioni lineari dei potenziali di nodo, anche quest'ultime sono scrivibili come combinazione lineare degli ingressi del circuito.

PER GENERALIZZARE L'ESEMPPIO proposto, consideriamo un circuito elettrico costituito da multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti e da sorgenti impressive di tensione e di corrente, che ammetta una sola soluzione. Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che

l'intensità di corrente e la tensione associata a ciascun lato del grafo corrispondente al circuito sono pari, rispettivamente, alla somma delle intensità di corrente e delle tensioni che ciascuno dei generatori indipendenti produrrebbe se agisse da solo con tutti gli altri generatori spenti.

La situazione è rappresentata graficamente in figura 5.4 dove il generico lato a cui ci si riferisce nell'enunciato del principio di sovrapposizione degli effetti è indicato dal bipolo b (lineare, adinamico e non impressivo).

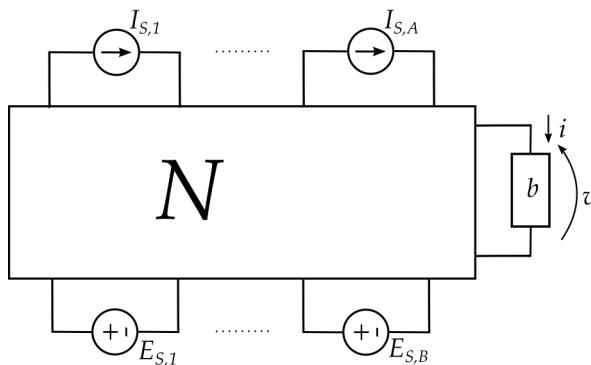


Figure 5.4: La figura evidenzia un generico circuito dal quale sono state messe in evidenza tutte le sorgenti impressive e un lato al quale è connesso un generico bipolo b (lineare, adinamico e non impressivo). N contiene solo multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti.

Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma quindi che

$$\begin{aligned} v &= h_1(t)I_{S,1} + \cdots + h_A(t)I_{S,A} + k_1(t)E_{S,1} + \cdots + k_B(t)E_{S,B} \\ i &= \hat{h}_1(t)I_{S,1} + \cdots + \hat{h}_A(t)I_{S,A} + \hat{k}_1(t)E_{S,1} + \cdots + \hat{k}_B(t)E_{S,B} \end{aligned} \quad (5.11)$$

dove $\{h_1(t), \dots, h_A(t)\}$, $\{k_1(t), \dots, k_B(t)\}$, $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_A(t)\}$ e $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_B(t)\}$ non dipendono dai generatori indipendenti e si

può quindi calcolare l'effetto complessivo ad esempio su v delle sorgenti impressive "accendendole" una alla volta.

Dopo aver introdotto il principio di sovrapposizione degli effetti, se ne propone una dimostrazione nel caso in cui il circuito in esame sia costituito, eccezion fatta per le sorgenti impressive, da multi-terminali controllabili in tensione e ammetta, come richiesto dal principio stesso, una ed una sola soluzione. Si considerino quindi le equazioni di 5.1 e 5.2 e si ricavino le correnti di lato i in funzione delle tensioni di lato v e degli ingressi $z(t)$.

$$i = N^{-1} (z(t) - Mv) . \quad (5.12)$$

In base alla seconda delle equazioni 5.1, si ottiene ancora

$$i = N^{-1} (z(t) - MA^T u) \quad (5.13)$$

che, sostituita nella prima delle 5.1 ci consente di scrivere

$$AN^{-1} (z(t) - MA^T u) = 0 , \quad (5.14)$$

ovvero

$$\underbrace{AN^{-1} MA^T}_{a \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}} \underbrace{u}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} = \underbrace{AN^{-1}}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} z(t) . \quad (5.15)$$

I potenziali di nodo si ottengono quindi come $u = a^{-1} b z(t)$, le tensioni di lato come

$$v = \underbrace{A^T a^{-1} b}_{d \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) \quad (5.16)$$

e le correnti di lato come

$$\begin{aligned} i &= N^{-1} (z(t) - MA^T a^{-1} b z(t)) \\ &= \underbrace{N^{-1} (1_l - MA^T a^{-1} b)}_{f \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

A questo punto, se ci focalizziamo per esempio sulle correnti di lato e ne consideriamo la j -esima ($j = 1, \dots, l$), l'equazione 5.17 ci consente di scrivere

$$i_j = \sum_{k=1}^l f_{jk} z_k(t) \quad (5.18)$$

in cui si evidenziano i singoli *effetti* delle sorgenti z sulla corrente i_j . Lo stesso può essere fatto per le tensioni di lato e per i potenziali di nodo.

Se N non contenesse componenti tempo-varianti i coefficienti $\{h_1(t), \dots, h_A(t)\}$, $\{k_1(t), \dots, k_B(t)\}$, $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_A(t)\}$ e $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_B(t)\}$ sarebbero costanti e non dipenderebbero quindi dal tempo t .

5.2.1 Esempio

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 5.5 e si calcoli la potenza assorbita dal resistore R_1 . Possiamo risolvere il problema considerando uno alla volta l'effetto dei generatori I ed E e poi sommare i risultati. Passivando il generatore E lo dobbiamo sostituire con un corto circuito e si ottiene il circuito in figura 5.6.

Si ricava facilmente

$$i_3^I = -\frac{R_4 I}{(R_1||R_2) + R_3 + R_4} = -6A \quad (5.19)$$

e

$$i_1^I = \frac{R_2 i_3^I}{R_1 + R_2} = -3A \quad (5.20)$$

Passivando adesso I ed inserendo E si ottiene il circuito in figura 5.7.

$$v_1^E = -\frac{R_1 E}{R_1 + [R_2||(R_3 + R_4)]} = -10V \quad (5.21)$$

La corrente complessiva $i_1^I + i_1^E$ è uguale a $-13A$ e quindi la potenza assorbita da R_1 è pari a $p_a = R_1 (-13)^2 = 169W$.

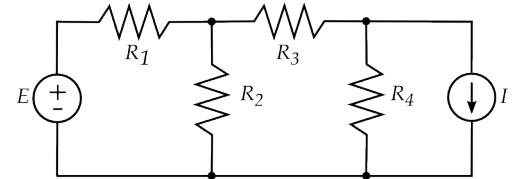


Figure 5.5: $E = 15V$, $I = 18A$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = R_4 = 0.5\Omega$.

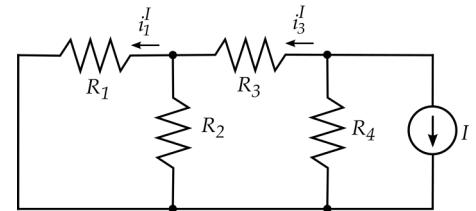


Figure 5.6: La corrente i_3^I può essere ricavata applicando la regola del partitore di corrente tra R_4 e $(R_1||R_2) + R_3$.

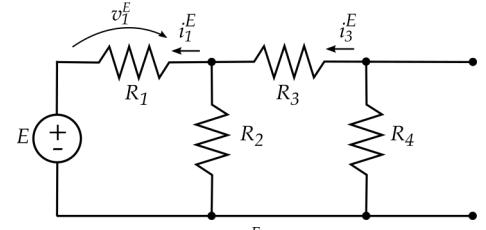


Figure 5.7: La tensione v_1^E può essere ricavata applicando la regola del partitore di tensione tra R_1 e $R_2||(R_3 + R_4)$.

5.3 Il teorema di Thevènin e Norton

SIA DATO UN BIPOLO composito \mathcal{N} costituito da elementi lineari adinamici, eventualmente tempo-varianti, e da sorgenti imperative di corrente e/o di tensione. Il suo comportamento ai morsetti A e B è equivalente (cfr. il principio di equivalenza al paragrafo 3.7) a quello di un bipolo equivalente \mathcal{N}_{eq} del tipo **Thevènin** se ammette una ed una sola soluzione, per ogni i , il circuito che si ottiene collegando ai morsetti A e B un generatore di corrente i come in figura 5.9. Il bipolo \mathcal{N} deve quindi essere **controllabile in corrente**.

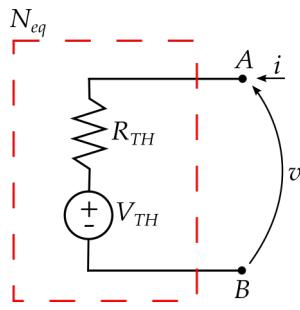


Figure 5.8: Il circuito equivalente di Thevènin.

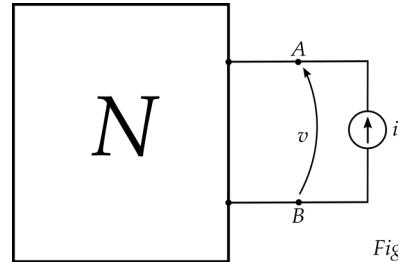


Figure 5.9: Il composito \mathcal{N} collegato al generatore di prova i .

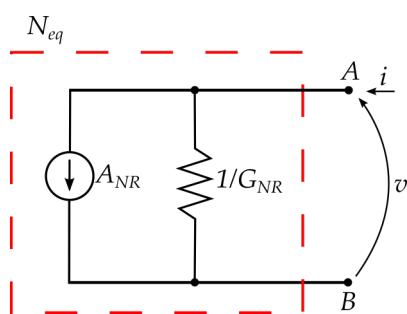


Figure 5.10: Il circuito equivalente di Norton.

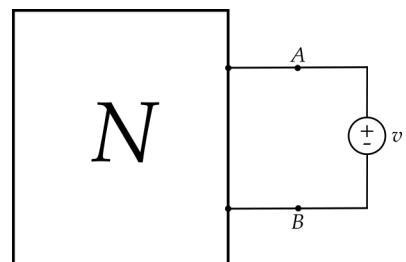


Figure 5.11: Il composito \mathcal{N} collegato al generatore di prova v .

Qualora \mathcal{N} ammetta sia la base corrente sia la base tensione, sono definiti entrambi i bipoli equivalenti.

FORNIAMO LA DEMOSTRAZIONE nel caso del circuito equivalente di Thevènin. Si consideri il circuito in figura 5.9: se per ogni i ammette una ed una sola soluzione, allora è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2) e scrivere la tensione

di lato v tra i morsetti A e B come

$$v = ri(t) + \sum_{j=1}^A h_j I_{S,j} + \sum_{i=1}^B k_i E_{S,i} , \quad (5.22)$$

dove $I_{S,j}$ e $E_{S,i}$ sono i generatori indipendenti di corrente e tensione eventualmente presenti in \mathcal{N} .

La tensione v , quando si passivino tutte le sorgenti indipendenti interne è pari a

$$\begin{aligned} v|_{I_{S,j}=0, \forall j} &= ri(t) , \\ E_{S,i} &= 0, \forall i \end{aligned} \quad (5.23)$$

e si definisce

$$\begin{aligned} \frac{v}{i}|_{I_{S,j}=0, \forall j} &= R_{th} . \\ E_{S,i} &= 0, \forall i \end{aligned} \quad (5.24)$$

Analogamente, se $i \equiv 0$, se cioè si lavora in condizioni di **circuito aperto** (c.a.),

$$v|_{c.a.} = \sum_{j=1}^A h_j I_{S,j} + \sum_{i=1}^B k_i E_{S,i} = E_{th} . \quad (5.25)$$

Si lascia allo studente la dimostrazione del caso Norton che equivale a

$$\begin{aligned} \frac{i}{v}|_{I_{S,j}=0, \forall j} &= G_{nr} \\ E_{S,i} &= 0, \forall i \end{aligned} \quad (5.26)$$

e

$$i|_{c.c.} = \sum_{j=1}^A h_j I_{S,j} + \sum_{i=1}^B k_i E_{S,i} = A_{nr} , \quad (5.27)$$

dove il pedice "c.c." sta per **corto circuito**.

LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA è di tipo costruttivo, nel senso che fornisce un'indicazione precisa su come poter ricavare i parametri dei circuiti equivalenti. Per ricavare R_{th} si passivano tutti i generatori interni alla rete e si impone una corrente i ai morsetti A e B e si misura il rapporto tra la tensione v ai morsetti A e B e la corrente i stessa. Nel caso Norton, cioè per ricavare G_{nr} , si impone una tensione v , si misura una corrente i , si valuta il loro rapporto $i/v = G_{nr}$. Per ricavare invece E_{th} e A_{nr} , si considerano la tensione di circuito aperto e la corrente di cortocircuito, rispettivamente. Ovvero, si lasciano appesi A e B e si misura E_{th} ai morsetti, oppure si impone un cortocircuito tra A e B e si misura la corrente A_{nr} che attraversa il cortocircuito stesso.

L'APPROCCIO DESCRITTO SOPRA, che prende il nome di **prove semplici**, non è l'unico e neppure il meno laborioso. A volte è più conveniente impostare la corrente i o la tensione v , a seconda del modello che si sta cercando, e ricavare la tensione v o la corrente i corrispondenti esattamente come si è fatto introducendo i circuiti equivalenti di Thevènin e Norton nel paragrafo 3.9. Da un punto di vista sperimentale, però, è il modo più semplice per ricavare i parametri dei circuiti equivalenti.

5.3.1 Esempi di applicazione dei teoremi di Thevènin e Norton

PER IL BIPOLO composito in figura 5.12 si ricavi, ai morsetti A e B , il circuito equivalente di Norton descritto dall'equazione costitutiva $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

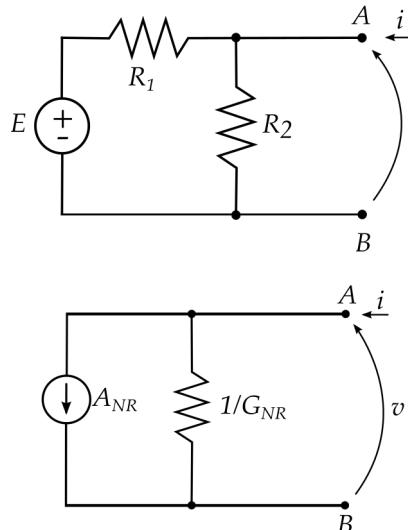


Figure 5.12: Per il bipolo composito connesso ai morsetti A e B si vogliono ricavare i parametri del circuito equivalente di Norton.

Si ricorda che $G_{nr} = \frac{i}{v} \Big|_{A_{nr}=0}$ e che $A_{nr} = i|_{v=0}$.

Imporre $A_{nr} = 0$ equivale a passivare il generatore indipendente di tensione E (cfr. figura 5.13). Ai morsetti A e B rimangono quindi, connessi in parallelo, R_1 ed R_2 . Possiamo quindi ricavare $G_{nr} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, ovvero il rapporto tra la corrente i entrante al morsetto A qualora si colleghi un generatore di prova v tra i morsetti A e B .

Collegando invece un cortocircuito ai morsetti A e B (cfr. figura 5.14), il resistore R_2 non ha alcun effetto nella rete avendo ai suoi capi una tensione nulla. La corrente i di corto circuito sarà dunque $i = -\frac{E}{R_1} = A_{nr}$.

L'equazione costitutiva del circuito equivalente di Norton è dunque

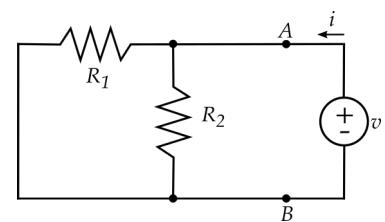
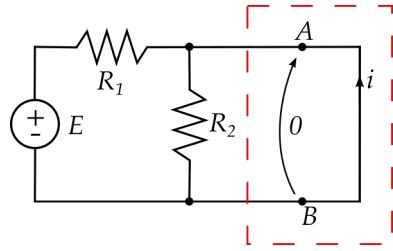


Figure 5.13: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di G_{nr} .



$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} - \frac{E}{R_1} = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v}_{G_{nr}} - \underbrace{\frac{E}{R_1}}_{A_{nr}} . \quad (5.28)$$

A questo risultato si poteva arrivare collegando il generatore v ai morsetti A e B ricavando poi la corrente i . Si sarebbe scritto $i_{R_1} = \frac{E-v}{R_1}$ e $i = \frac{v}{R_2} - \frac{E-v}{R_1}$ che equivale all'equazione 5.28.

SI CALCOLI ADESSO per i circuito in figura 5.15, la resistenza equivalente R_{eq} "sentita" tra A e B .

Per risolvere il problema possiamo come prima cosa calcolare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti C e D , rimuovendo R_C , e poi ricollegare come in figura 5.16 il circuito equivalente ad R_C . A questo punto, passivando E_{th} , la resistenza sentita ai morsetti A e B è $R_{eq} = R_{th} || R_C$.

Si ricorda che, in figura 5.16, $v = R_{th}i + E_{th}$ e che, se $E_{th} = 0$ (ovvero $E = 0$), $\frac{v}{i} = R_{th}$. In particolare, $v_B = R_B i$, $v_A = R_A i$ e $v_{GS} = -v_A$. Quindi $v - iR_B - kR_A i - R_A i = 0$ e cioè $R_{th} = R_B + (1+k)R_A$.

La resistenza cercata è quindi pari a $R_{eq} = R_C \parallel (R_B + (1+k)R_A)$.

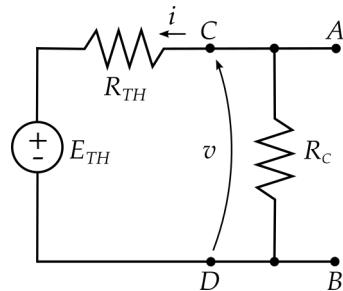


Figure 5.14: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di A_{nr} .

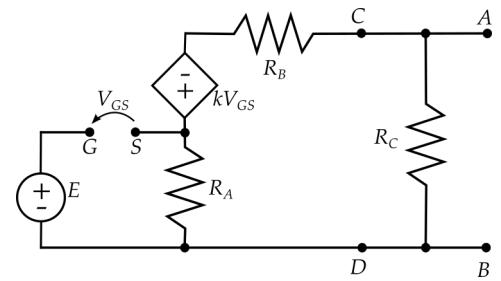


Figure 5.15: Quanto vale la resistenza equivalente R_{eq} "sentita" tra A e B ?

Figure 5.16: Dopo aver ricavato il circuito equivalente di Thevenin riconnetto R_C .

5.4 Reciprocità

IN FISICA LA RECIPROCITÀ È UNA PROPRIETÀ che si incontra in diversi ambiti tra i quali l'elettrostatica, la meccanica e l'acustica. Qualitativamente possiamo affermare che quando un sistema fisico è reciproco, l'ingresso e l'uscita possono essere scambiati senza alterare la risposta del sistema ad una data forma d'onda dell'ingresso. Per quanto riguarda la teoria dei circuiti lineari, è possibile formalizzare la proprietà di reciprocità come segue.

SI CONSIDERI UN n -TERMINALI lineare (al più affine), adinamico e tempo-invariante e un insieme di variabili descrittive che lo caratterizzino in modo completo. Per semplicità, ipotizziamo di scegliere tensioni e correnti descrittive che diano origine ad un grafo a stella del componente e che siano prese con la convenzione normale (cfr. paragrafo 2.3). In figura 5.17 è possibile osservare un esempio nel caso di un 5-terminali.

Introduciamo adesso le due coppie di vettori v' e i' , v'' e i'' , che rappresentano le $n - 1$ tensioni e le $n - 1$ correnti descrittive dell' n -terminali in due situazioni elettriche diverse. Si definiscano poi le potenze virtuali

$$\begin{aligned} p' &= v''^T i' = i'^T v'' \\ p'' &= v'^T i'' = i''^T v' \end{aligned} \quad . \quad (5.29)$$

Se si verifica che $p' = p''$ per ogni v' , i' , v'' e i'' , allora l' n -terminali si definisce *reciproco*. Altrimenti il componente si definisce *non-reciproco*. Si lascia allo studente la semplice verifica che il resistore lineare e tempo-invariante, il corto-circuito ed il circuito aperto sono componenti reciproci mentre i generatori indipendenti di corrente e tensione non lo sono.

LA DEFINIZIONE DI RECIPROCITÀ che si basa sulle potenze virtuali permette di verificare le tre asserzioni fondamentali che riguardano la reciprocità nelle reti elettriche. Si consideri a questo proposito un circuito lineare C (al più affine), adinamico e tempo-invariante (ad eccezione di eventuali generatori indipendenti di tensione e/o corrente) e si colleghino ad esso due coppie di terminali che definiscono, rispettivamente i morsetti a e b e i morsetti A e B . Tali coppie di terminali possono essere collegate, una o entrambi, come si collega un voltmetro, cioè a coppie di nodi esistenti (si parlerà quindi di connessioni in parallelo) o come si collega un amperometro (connessioni in serie). L'operazione compiuta origina un 4-terminali schematizzato in figura 5.18. Scegliendo ad esempio B come morsetto di riferi-

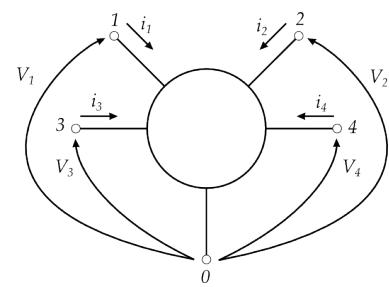


Figure 5.17: Tensioni e correnti descrittive per un 5-terminali scelti sulla base di un arbitrario morsetto (e terminale) di riferimento.

mento, si identificano le tensioni descrittive $v = (v_{aB}, v_{bB}, v_{AB})^T$ e le correnti $i = (i_a, i_b, i_A)^T$. Se il 4-terminali così ottenuto è reciproco in base alla definizione data precedentemente, allora le seguenti asserzioni sono verificate.

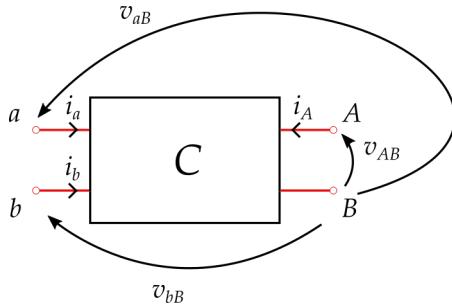


Figure 5.18: Il 4-terminali ottenuto collegando al circuito C i terminali che identificano i morsetti a , b , A e B .

Asserzione 1: Si colleghi ai morsetti a e b un generatore di tensione $e_0(t)$ e si misuri la corrente $i'_{cc} = -i'_A$ che scorre nel corto-circuito che sarà connesso ai morsetti A e B . Si colleghi poi lo stesso generatore ai morsetti A e B e si misuri la corrente $i''_{cc} = -i''_a$ che scorre nel corto-circuito che sarà adesso connesso ai morsetti a e b . Si ottiene $i'_{cc} = i''_{cc}$ per ogni t . Si noti che nell'effettuare l'operazione è necessario rispettare la convenzione scelta per tensioni e correnti alle due porte.

Asserzione 2: Si colleghi ai morsetti a e b un generatore di corrente $i_0(t)$, che impone la corrente i'_a , e si misuri la tensione v'_{AB} ai capi del circuito aperto che sarà connesso ai morsetti A e B . Si colleghi poi lo stesso generatore ai morsetti A e B , imponendo così la corrente i''_A , e si misuri la tensione v''_{ab} ai capi del circuito aperto che sarà adesso connesso adesso ai morsetti a e b . Si ottiene $v'_{AB} = v''_{ab}$ per ogni t .

Asserzione 3: Si colleghi ai morsetti a e b un generatore di corrente $i_0(t)$, che impone la corrente i'_a , e si misuri la corrente $i'_{cc} = -i'_A$ che scorre nel corto-circuito che sarà connesso ai morsetti A e B . Si colleghi poi un generatore di tensione $e_0(t)$ ai morsetti A e B e si misuri la tensione v''_{ab} ai capi del circuito aperto che sarà adesso connesso adesso ai morsetti a e b . Se $e_0(t) = i_0(t)$ per ogni t , allora si ottiene $v''_{ab} = i'_{cc}$ per ogni t .

Innanzitutto si noti che, nell'effettuare le operazioni descritte, è necessario rispettare la convenzione scelta per tensioni e correnti alle due porte. Verifichiamo quindi l'Asserzione 3 e si lascia allo studente l'analogia verifica delle altre due. Le potenze virtuali p' e p'' che

La connessione del generatore di tensione e del corto-circuito dell'Asserzione 1 può evidentemente essere fatta solo se il circuito risultante dalla connessione delle due coppie di terminali al circuito originale ammette, alle due porte così individuate, la base di definizione tensione. Analogamente, *mutatis mutandis*, per le Asserzioni 2 e 3.

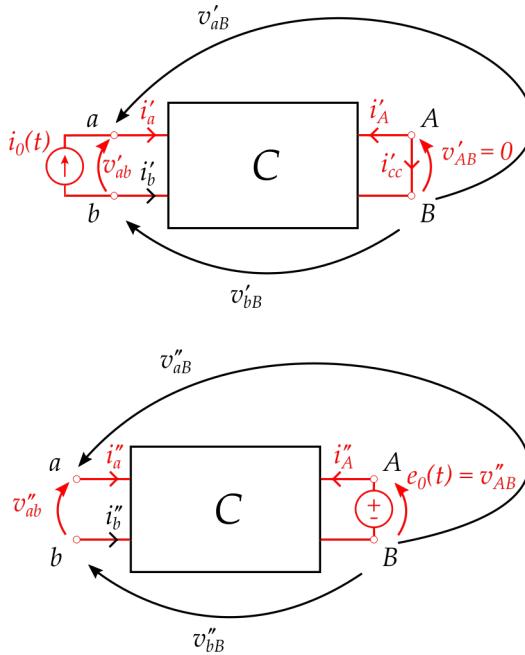


Figure 5.19: In alto e in basso si osservano le due diverse connessioni alle porte che si realizzano in base all'Asserzione 3.

derivano dalla connessioni in figura 5.19 sono pari a

$$\begin{aligned}
 p' &= i_0(t)(v_{ab}'' + v_{bB}'') - i_0(t)v_{bB}'' - i_{cc}'e_0(t) = i_0(t)v_{ab}'' - i_{cc}'e_0(t) \\
 p'' &= 0 \cdot v_{aB}' + 0 \cdot v_{bB}' + i_A'' \cdot 0 = 0
 \end{aligned} \quad . \quad (5.30)$$

Quindi, dato che per ipotesi $p' = p''$ e $e_0(t) = i_0(t)$ si ricava $i_{cc}' = v_{ab}''$.

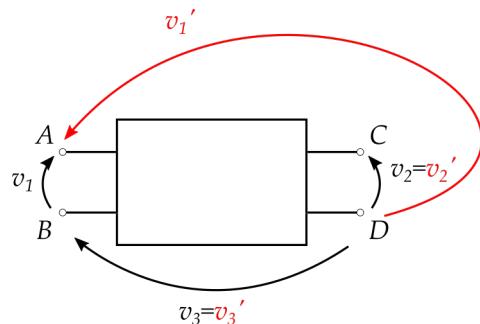
5.4.1 Teorema di reciprocità

L'IMPORTANTE TEOREMA (che non verrà dimostrato) afferma che *un circuito costituito da componenti reciproci è reciproco*. Si tratta di una condizione sufficiente di reciprocità. Infatti non è altresì vero che un circuito che contenga elementi non-reciproci sia non-reciproco.

6

6.1 I doppi-bipoli

IN QUESTA SEZIONE DEL CORSO ci dedichiamo allo studio di una particolare famiglia di 4-terminali, i **doppi-bipoli** (adinamici e tempo-invarianti). Un 4-terminali è, in generale, caratterizzato da 3 tensioni descrittive e da 3 correnti descrittive.



In figura 6.1, sono state evidenziate due scelte possibili per le tensioni. In particolare, le tensioni v'_1 , v'_2 e v'_3 , che corrispondono al grafo del componente riportato in figura 6.2 a destra, e le tensioni v_1 , v_2 e v_3 che corrispondono, invece, al grafo a sinistra. Si noti che entrambi i grafici sono stati orientati come le correnti avendo scelto la convenzione normale per le 3 porte che li costituiscono.

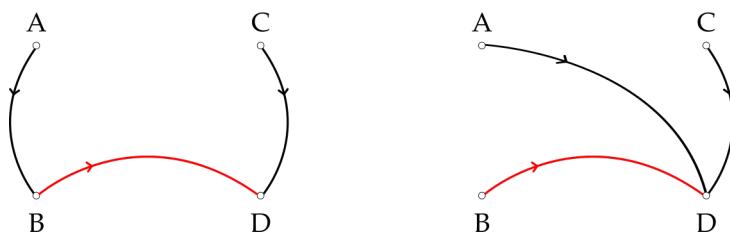


Figure 6.1: Un generico 4-terminali con le tensioni descrittive scelte in due modi diversi che danno origine ai grafi (orientati come le correnti e con la convenzione normale) riportati in figura 6.2.

Figure 6.2: I grafi, orientati come le correnti e con la convenzione normale, di un generico 4-terminali in base alle due diverse scelte delle tensioni descrittive riportate in figura 6.1. Si noti che solo la scelta v_1 , v_2 e v_3 , che origina un grafo a stella, consente una corrispondenza diretta tra le correnti evidenziate sui lati del grafo del componente e le correnti effettivamente entranti nei morsetti del 4-terminali.

SUPPONIAMO ADESSO che il 4-terminali sia inserito all'interno di un circuito in modo tale che i suoi morsetti siano connessi ad un numero arbitrario di morsetti di altri componenti. Questa situazione è riportata in figura 6.3, in cui il grafo del 4-terminali, per entrambe le scelte delle tensioni descrittive, è connesso a lati di altri componenti del circuito.

Introduciamo quindi le correnti

$$\begin{aligned} I_A &= \sum_{j=0}^{N_A} i_j^A \\ I_C &= \sum_{j=0}^{N_C} i_j^C \\ I_B &= \sum_{j=0}^{N_B} i_j^B \\ I_D &= \sum_{j=0}^{N_D} i_j^D \end{aligned}, \quad (6.1)$$

essendo i_j^A ($j = 0, \dots, N_A$), i_j^B ($j = 0, \dots, N_B$), i_j^C ($j = 0, \dots, N_C$), e i_j^D ($j = 0, \dots, N_D$), le correnti che afferiscono, rispettivamente, ai nodi A , B , C e D diverse da i_1 , i_2 e i_3 .

IL 4-TERMINALI SI DEFINISCE DOPPIO-BIPOLÒ quando si verifica che

$$\begin{aligned} I_A &= -I_B \\ I_C &= -I_D \end{aligned}, \quad (6.2)$$

Facendo riferimento alle due situazioni riportate in figura 6.3, questo equivale ad avere $i_3 = 0$ (per il grafo in alto) e $i_3 = -i_1$ (per il grafo in basso).

Un 4-terminali può comportarsi da doppio-bipolo per due motivi diversi. In primo luogo è possibile che sia il circuito nel quale è connesso il 4-terminali a fare sì che la condizione 6.2 sia verificata. In questo caso il doppio-bipolo si definisce, in generale, **improprio**. Un esempio è riportato in figura 6.4. In particolare, sono i due bipoli b_1 e b_2 ad imporre che, ai terminali del doppio-bipolo, si osservi $i_1 = i'_1$ e $i_2 = i'_2$, condizioni equivalenti ad avere $i_3 = 0$ e $i_3 = -i_1$ per le due diverse scelte del grafo del 4-terminali.

Altrimenti, è possibile che sia la natura stessa del 4-terminali a fare sì che la 6.2 sia soddisfatta per qualunque condizione di funzionamento del componente e, in questo caso, il doppio-bipolo si dice **proprio**. Due esempi sono riportati in figura 6.5. Si noti infatti come, per il 4-terminali in alto, la presenza di un circuito aperto tra B e D , scegliendo il grafo a sinistra in figura 6.2, comporti sempre $i_3 = 0$. Per il 4-terminali in basso, invece, è banale verificare la condizione (strutturale) $i_3 = -i_1$ relativa al grafo a destra in figura 6.2.

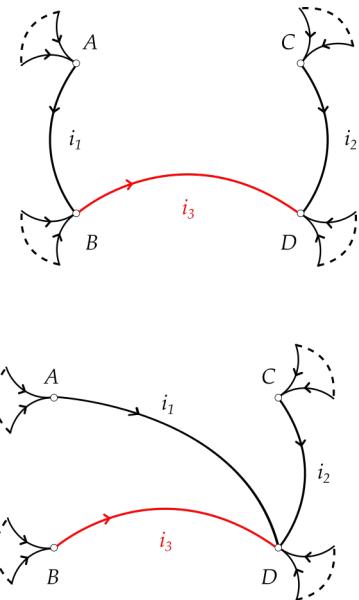


Figure 6.3: Il grafo di generico 4-terminali connesso al grafo di altri componenti. Sono riportate entrambe le situazioni corrispondenti ai grafi in figura 6.2.

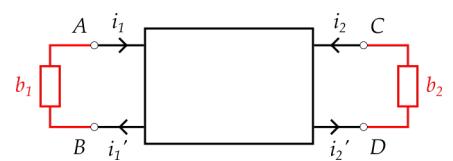


Figure 6.4: Il 4-terminali lavora come doppio-bipolo qualunque sia la sua struttura interna.

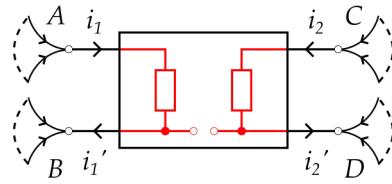
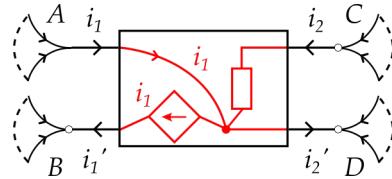


Figure 6.5: I doppi-bipoli sono propri dato che, adottando per quello in alto e per quello in basso, rispettivamente, i grafi a sinistra e a destra in figura 6.2, le condizioni corrispondenti $i_3 = 0$ e $i_3 = -i_1$ sono verificate in qualunque modo sia connesso il 4-terminali.



In figura 6.6 si riporta la struttura di un 4-terminali che non è un doppio-bipolo proprio ma che, connesso come in figura 6.7 si comporta come un doppio-bipolo (improprio).

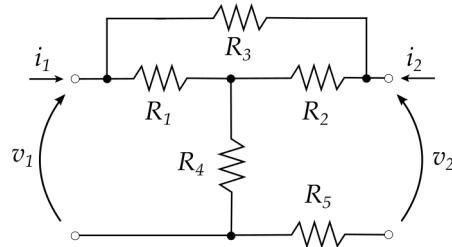


Figure 6.6: Un particolare 4-terminali che non è un doppio bipolo proprio.

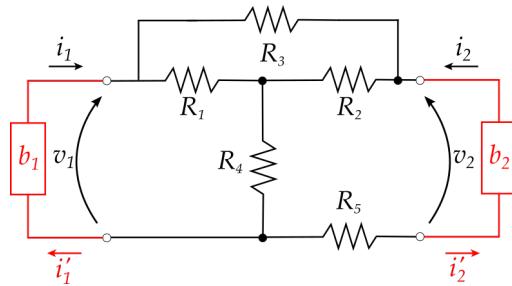


Figure 6.7: Il 4-terminali di figura 6.6, collegato a due generici bipoli b_1 e b_2 , si comporta come doppio bipolo per come è realizzata la connessione.

POSSIAMO ADESSO NOTARE che, sia che il doppio-bipolo sia proprio, sia che sia improprio, scelto arbitrariamente uno dei due grafi in figura 6.2 per schematizzarlo, sono solo le correnti descrittive i_1 ed i_2 necessarie per caratterizzarlo dato che la corrente sulla porta connessa tra B e D è fissata. Tali correnti, qualunque sia il grafo scelto, sono identificabili come le correnti che entrano nel 4-terminali ai morsetti A e C .

PER QUANTO RIGUARDA LA TENSIONE alla porta connessa tra B e

D, quando un doppio-bipolo improprio è collegato correttamente la tensione v_3 assumerà un valore ben preciso determinato dal circuito in cui il 4-terminali è inserito. Se il doppio bipolo è proprio, invece, è facile convincersi che tale tensione può eventualmente risultare indeterminata.

La porta tra *B* e *D* quindi non è di particolare interesse e il 4-terminali si rappresenta, trascurando tale porta, con uno dei due grafi in figura 6.8, degenerazione di quelli in figura 6.2. Da qui il nome di doppio-bipolo (o 2-porte), più evidente per il grafo in alto dato che quello del grafo in basso ricorda di più di un tripolo. In questo secondo caso, infatti, trascurare la porta relativa alla corrente i_3 significa far collassare il morsetto *B* e il morsetto *D* ottenendo, di fatto, il grafo di un tripolo.

LA POTENZA ELETTRICA ASSORBITA da un doppio bipolo è data dall'espressione

$$p_a = v_1 i_1 + v_2 i_2 , \quad (6.3)$$

in cui le tensioni sono quelle rappresentate in figura 6.1 e le correnti ai morsetti sono prese secondo la convenzione normale (ovvero sono entranti). Tale espressione deriva direttamente dalla definizione di potenza per un 4-terminali generico (cfr. sezione 3.1.1) e dalla condizione $i_3 = -i_1$. Infatti

$$\begin{aligned} p_a &= (v_1 + v_3)i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 \\ &= (v_1 + v_3)i_1 + v_2 i_2 - v_3 i_1 . \end{aligned} \quad (6.4)$$

LE EQUAZIONI COSTITUTIVE necessarie e sufficienti per descrivere il comportamento del generico doppio bipolo sono quindi 2 e nella forma

$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \end{cases} . \quad (6.5)$$

Se sono lineari, allora il doppio bipolo si dice lineare. Ci limiteremo allo studio di doppi bipoli **lineari affini**:

$$\begin{cases} m_{11}v_1 + m_{12}v_2 + n_{11}i_1 + n_{12}i_2 + c_1 = 0 \\ m_{21}v_1 + m_{22}v_2 + n_{21}i_1 + n_{22}i_2 + c_2 = 0 \end{cases} . \quad (6.6)$$

PARTIAMO DAL CASO **omogeneo**, con $c_1 = c_2 = 0$ nell'equazione 6.6. Omogeneo equivale a dire che all'interno del doppio bipolo non ci sono sorgenti impressive indipendenti. Ciò deriva direttamente dal principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2). Possiamo infatti pensare alle due porte del doppio bipolo come a due lati per i quali ad esempio, se il componente è controllabile in tensione

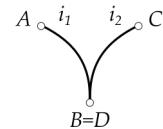
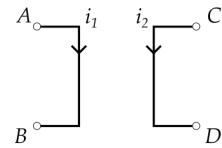


Figure 6.8: Grafi del doppio-bipolo (sia improprio sia proprio) come degenerazione dei grafi di un generico 4-terminali (figura 6.2) quando la condizione 6.2 è verificata.

Le sorgenti pilotate le cui due porte non abbiano un morsetto in comune sono dei doppi-bipoli propri il cui grafo è quello in alto in figura 6.8.

ad entrambe le porte, le correnti di porta si potranno esprimere come somma di contributi dovuti ai generatori di controllo imposti alle porte e delle sorgenti interne. Nel caso omogeneo, restando solo i contributi alle porte, di fatto non sono presenti sorgenti impulsive interne.

6.2 Le rappresentazioni cardinali

IN GENERALE, UN DOPPIO BIPOLO ammette 6 possibili rappresentazioni, di cui quattro sono dette **rappresentazioni cardinali**. Le basi possibili sono la base tensione (v_1, v_2) , la base corrente (i_1, i_2) e le due basi miste (v_1, i_2) e (i_1, v_2) . Queste sono le rappresentazioni cardinali. Le ultime due rappresentazioni sono quelle (v_1, i_1) e (v_2, i_2) .

6.2.1 Forma esplicita con parametri R

SE È POSSIBILE ASSEGNAME alle due porte le correnti i_1 e i_2 e ricavare univocamente le tensioni v_1 e v_2 , allora il doppio bipolo ammette la base di definizione corrente ed è possibile risolvere il sistema di equazioni 6.6 con $c_1 = c_2 = 0$ e scrivere

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}, \quad (6.7)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

COME SI RICAVANO I PARAMETRI della matrice di resistenze \mathcal{R} dato un 4-terminali che si comporta come un doppio bipolo? Usiamo la sovrapposizione degli effetti. In base all'equazione 6.7, infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} & R_{12} &= \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} \\ R_{21} &= \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} & R_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (6.9)$$

La prima colonna di equazioni nella 6.9 equivale, dal punto di vista operativo, a lasciare aperta la porta 2 del doppio bipolo e a collegare un generatore indipendente di corrente i_1 alla porta 1 (cfr. figura 6.9).

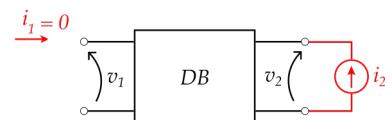
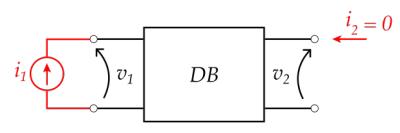


Figure 6.9: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice \mathcal{R} .

Si misurano quindi le tensioni v_1 e v_2 e si ricavano i parametri R_{11} e R_{21} . Analogamente, per la seconda colonna di equazioni, si lascia aperta la porta 1 del doppio bipolo e si collega un generatore indipendente di corrente i_2 alla porta 2 (cfr. figura 6.9). Si misurano ancora le tensioni v_1 e v_2 e si ricavano i parametri R_{12} e R_{22} .

Questo approccio, detto delle **prove semplici**, è fondamentale per **misurare** praticamente i parametri della matrice \mathcal{R} distinguendo i contributi e gli effetti alle porte delle sorgenti di controllo. Quando invece si debbono **ricavare simbolicamente** i parametri della matrice \mathcal{R} per un 4-terminali di cui si conosce la struttura interna, questo approccio non è sempre il più vantaggioso, in termini di complessità, rispetto a quello diretto nel quale si impongono contemporaneamente le correnti i_1 ed i_2 e si misurano le tensioni v_1 e v_2 . Dopo di che, per ispezione diretta si identificano i parametri R_{jk} ($j = 1, 2$ e $k = 1, 2$).

6.2.2 Forma esplicita con parametri G

QUESTA È LA RAPPRESENTAZIONE duale di quella con parametri R . Il doppio bipolo deve ammettere la base di definizione tensione e quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.10)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Anche in questo caso, per ricavare i parametri della matrice di conduttanze \mathcal{G} possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} & G_{12} &= \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0} \\ G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} & G_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Le prove semplici per ricavare i parametri della matrice \mathcal{G} sono illustrate graficamente in figura 6.10.

SE UN DOPPIO BIPOLO è controllabile in tensione e in corrente, allora ammette la rappresentazione mediante matrici \mathcal{R} e \mathcal{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{G}$ e quindi le due matrici non sono singolari o, in modo equivalente, il loro determinante è non nullo.

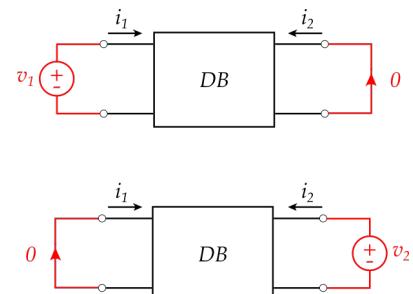


Figure 6.10: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice \mathcal{G} .

6.2.3 Forma esplicita con parametri H

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 1 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista (i_1, v_2) .

$$\begin{cases} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.13)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{H} possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} & H_{12} &= \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0} \\ H_{21} &= \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} & H_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned}. \quad (6.15)$$

Dopo aver introdotto la matrice H possiamo fare un semplice approfondimento e riprendere il fatto che il doppio-bipolo è un particolare tipo di quadripolo. Consideriamo la figura 6.1, potremmo scrivere

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Nel caso di un doppio-bipolo proprio il fatto che la porta 3 sia un circuito aperto cioè che $i_3 \equiv 0$ e che la tensione v_3 possa assumere qualunque valore, implica $H_{31} = H_{32} = H_{33} = 0$ e $H_{13} = H_{23} = 0$. Pertanto la parte "significativa" della matrice ibrida 3×3 è rappresentato dalla sottomatrice H .

6.2.4 Forma esplicita con parametri H'

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 2 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista (v_1, i_2) .

$$\begin{cases} i_1 = H'_{11}v_1 + H'_{12}i_2 \\ v_2 = H'_{21}v_1 + H'_{22}i_2 \end{cases}. \quad (6.17)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{H}' possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H'_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} & H'_{12} &= \frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_1=0} \\ H'_{21} &= \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} & H'_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} . \quad (6.19)$$

6.3 Matrice T di trasmissione diretta

Diciamo che deve essere possibile algebricamente ricavare (v_1, i_1) date (v_2, i_2) .

$$\begin{cases} v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2) \\ i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2) \end{cases} . \quad (6.20)$$

Nell'equazione 6.20 si noti la presenza di $-i_2$. Con questa rappresentazione, infatti, si considera la corrente che esce dalla porta 2 (ovvero $-i_2$). Da qui il nome *trasmissione*: se si collegasse alla porta 2 un altro doppio bipolo, la corrente $-i_2$ sarebbe la corrente in ingresso alla porta 1 del nuovo elemento. La potremmo quindi vedere come la corrente *trasmessa* da un doppio bipolo all'altro. In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{T} non si possono effettuare direttamente le prove semplici, dato che non possiamo assegnare contemporaneamente v_2 e i_2 . Da qui il fatto che questa rappresentazione non è considerata cardinale. Possiamo però scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{11}} &= \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} & \frac{1}{T_{12}} &= -\frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} \\ \frac{1}{T_{21}} &= \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} & \frac{1}{T_{22}} &= -\frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} \end{aligned} . \quad (6.22)$$

Si noti quindi che per ricavare T_{11} si assegnano v_1 e i_2 ; per ricavare T_{21} si assegnano i_1 e i_2 ; per ricavare T_{12} si assegnano v_1 e v_2 ; per ricavare T_{22} si assegnano i_1 e i_2 . Di fatto, quindi si sfruttano tutte e quattro le rappresentazioni cardinali per ricavare i parametri della matrice \mathcal{T} .

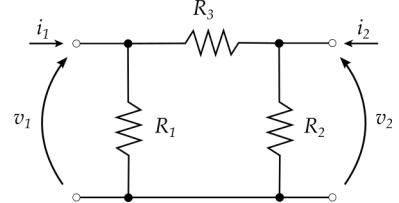


Figure 6.11: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice \mathcal{G} .

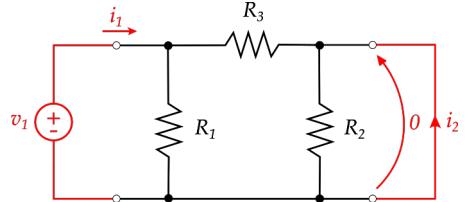


Figure 6.12: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.11 di cui si vuole ricavare \mathcal{G} : la porta 2 viene cortocircuitata e si impone v_1 alla porta 1.

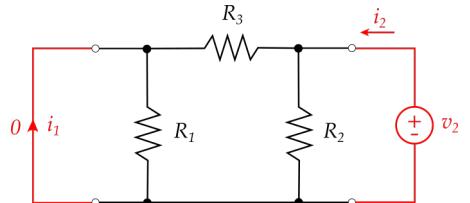


Figure 6.13: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.11 di cui si vuole ricavare \mathcal{G} : la porta 1 viene cortocircuitata e si impone v_2 alla porta 2.

6.4 Esempi

6.4.1 Esempio 1

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.11 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{G} .

In base alla richiesta dell'esercizio, dobbiamo quindi assumere che il doppio bipolo sia almeno controllabile in tensione da v_1 e v_2 . Possiamo procedere impiegando le prove semplici e impostare $v_2 = 0$, cioè mettendo in corto circuito la porta 2, e impostare v_1 alla porta 1 con un generatore indipendente di tensione (cfr. figura 6.12). Così facendo si ottiene

$$v_1 = (R_1 \parallel R_3)i_1 \text{ e } i_2 = -\frac{v_1}{R_3}. \text{ Quindi}$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \\ G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} = -\frac{1}{R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.23)$$

Analogamente (cfr. figura 6.13), cortocircuitando la porta 1 e imponendo v_2 si ricava $v_2 = (R_2 \parallel R_3)i_2$ e $i_1 = -\frac{v_2}{R_3}$ da cui

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\frac{1}{R_3} \\ G_{22} &= \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.24)$$

In forma matriciale quindi

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

6.4.2 Esempio 2

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.14 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{R} .

Proviamo a farlo senza utilizzare le prove semplici ma collegando i generatori i_1 e i_2 alle porte 1 e 2, rispettivamente, e ricavando $v_1(i_1, i_2)$ e $v_2(i_1, i_2)$. Dalla maglia più esterna al circuito e da quella di sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 + v - \alpha v + 3Ri_2 - v_2 &= 0 \\ v_1 + v - R(i_1 + i_2) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (6.26)$$

Dato che la grandezza pilotante v è pari a $-2Ri_1$ si ricava

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 3R & R \\ R(1 + 2\alpha) & 4R \end{bmatrix} \quad . \quad (6.27)$$

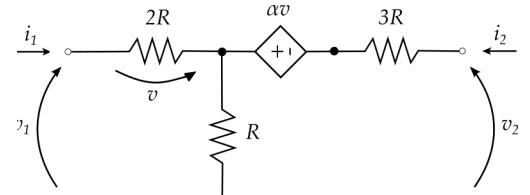


Figure 6.14: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice \mathcal{R} .

6.4.3 Esempio 3

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.11 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{R} .

Procediamo questa volta imponendo la corrente i_1 alla porta 1 e lasciamo aperta la porta 2 (cfr. figura 6.15 in alto). Si ricava, impiegando ad esempio il partitore di corrente tra R_1 e $R_3 + R_2$, che

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \end{aligned} . \quad (6.28)$$

Procedendo con la prova duale (cfr. figura 6.15 in basso) si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} i_2 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_2 \end{aligned} . \quad (6.29)$$

In forma matriciale

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix} . \quad (6.30)$$

6.5 Simmetria

UN DOPPIO BIPOLO SI DICE SIMMETRICO se le due equazioni costitutive che lo descrivono rimangono immutate scambiando le due correnti tra loro e le due tensioni tra loro. Altrimenti viene detto non-simmetrico. Da un punto di vista circuitale, questa definizione significa che se si scambiano le porte, le equazioni costitutive del doppio bipolo non cambiano e quindi *in un circuito è possibile collegarlo senza preoccuparsi di sapere la numerazione delle porte*. Si analizzano nel seguito quali sono i vincoli imposti dalla simmetria alle matrici che rappresentano un doppio bipolo.

PER QUANTO RIGUARDA LA FORMULAZIONE mediante matrice \mathcal{R} ricordiamo che la scriviamo come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} . \quad (6.31)$$

¹ Dato che se ne è calcolata la matrice \mathcal{G} si potrebbe ricavare $\mathcal{R} = \mathcal{G}^{-1}$ assicurandosi che \mathcal{G} sia non singolare.

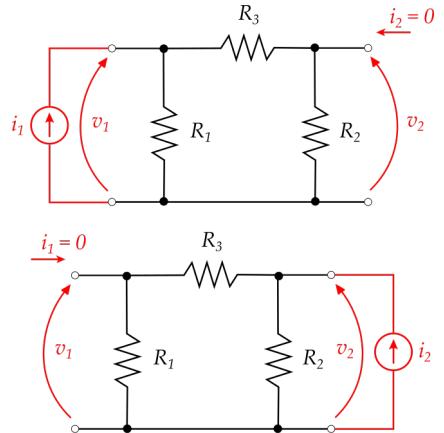


Figure 6.15: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.11 di cui si vuole ricavare \mathcal{R} .

Scambiando le variabili alle porte si ottiene

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

che, riordinata affinchè si possa confrontare con la prima, diventa

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{22} & R_{21} \\ R_{12} & R_{11} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}'} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Dunque, affinchè il doppio bipolo sia simmetrico, è necessario che $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, ovvero $R_{11} = R_{22}$ e $R_{12} = R_{21}$. Si noti quindi che *la simmetria della matrice \mathcal{R} è necessaria ma non sufficiente per garantire la simmetria del doppio bipolo*. Per la matrice \mathcal{G} , si ottengono condizioni analoghe, ovvero $G_{11} = G_{22}$ e $G_{12} = G_{21}$.

PER QUANTO RIGUARDA LA MATRICE IBRIDA \mathcal{H} , si ricava che le condizioni di simmetria sono

$$H_{11} = \frac{H_{11}}{|\mathcal{H}|}, \quad H_{12} = -\frac{H_{21}}{|\mathcal{H}|}, \quad H_{21} = -\frac{H_{12}}{|\mathcal{H}|}, \quad H_{22} = \frac{H_{22}}{|\mathcal{H}|}.$$

Una possibile soluzione è $|\mathcal{H}| = 1$ & $H_{12} = -H_{21}$, ma non è l'unica!

Analogamente, per la matrice \mathcal{H}' si ottiene

$$H'_{11} = \frac{H'_{11}}{|\mathcal{H}'|}, \quad H'_{12} = -\frac{H'_{21}}{|\mathcal{H}'|}, \quad H'_{21} = -\frac{H'_{12}}{|\mathcal{H}'|}, \quad H'_{22} = \frac{H'_{22}}{|\mathcal{H}'|},$$

che ha come possibile soluzione $|\mathcal{H}'| = 1$ & $H'_{12} = -H'_{21}$.

PER QUANTO RIGUARDA LA MATRICE DI TRASMISSIONE \mathcal{T} le condizioni di simmetria sono

$$T_{11} = \frac{T_{22}}{|\mathcal{T}|}, \quad T_{12} = \frac{T_{12}}{|\mathcal{T}|}, \quad T_{21} = \frac{T_{21}}{|\mathcal{T}|}, \quad T_{22} = \frac{T_{11}}{|\mathcal{T}|},$$

che ha come possibile soluzione $|\mathcal{T}| = 1$ & $T_{11} = T_{22}$.

DATO CHE LA SIMMETRIA È UNA PROPRIETÀ INTRINSECA di un doppio bipolo, essa non dipende dalla particolare forma canonica scelta per rappresentarlo. In altre parole, se esso ammette un certo numero di rappresentazioni, se una di esse garantisce la simmetria del doppio bipolo anche le altre la debbono garantire. Ad esempio, se la formulazione con matrice \mathcal{R} risulta simmetrica anche quella con matrice \mathcal{G} , se esiste, lo è. Infatti $\mathcal{G} = \mathcal{R}^{-1}$ e, chiamato $|\mathcal{R}|$ il determinante di \mathcal{R} ,

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{11} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{|\mathcal{R}|} & -\frac{R_{12}}{|\mathcal{R}|} \\ -\frac{R_{12}}{|\mathcal{R}|} & \frac{R_{11}}{|\mathcal{R}|} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

6.6 Reciprocità dei doppi bipoli lineari, adinamici e tempo-invarianti

LA DEFINIZIONE GENERALE DI RECIPROCITÀ fornita nel paragrafo 5.4, permette di ricavare condizioni specifiche che riguardano le matrici usate per rappresentare i doppi bipoli e che ne garantiscono la reciprocità.

6.6.1 Matrici \mathcal{R} e \mathcal{G}

SI DEFINISCANO $v = (v_1, v_2)^T$ e $i = (i_1, i_2)^T$ con

$$v = \mathcal{R}i .$$

Le potenze virtuali si possono scrivere come

$$\begin{aligned} p' &= v'^T i' = (\mathcal{R}i'')^T i' = i''^T \mathcal{R}^T i' \\ p'' &= v'^T i'' = i''^T v' = i''^T \mathcal{R}i' \end{aligned} \quad (6.35)$$

L'uguaglianza $p' = p''$, che significa la reciprocità del componente, si verifica dunque se e solo se la matrice \mathcal{R} è simmetrica. Si noti che se il doppio bipolo è simmetrico, le condizioni di simmetria implicano quelle di reciprocità.

6.6.2 Matrici \mathcal{H} e \mathcal{H}'

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Si noti che per ricavare le potenze virtuali è stata utilizzata la definizione di potenza assorbita da un doppio bipolo. Essa deriva, come dimostrato precedentemente, dalle condizioni che garantiscono che un generico 4-terminali sia interpretabile come doppio-bipolo.

$$p' = v'^T i' = v'_1 i'_1 + v'_2 i'_2 = (H_{11} i''_1 + H_{12} v''_2) i'_1 + v''_2 (H_{21} i'_1 + H_{22} v'_2)$$

$$p'' = v'^T i'' = v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = (H_{11} i'_1 + H_{12} v'_2) i''_1 + v'_2 (H_{21} i''_1 + H_{22} v''_2)$$

Affinchè $p' = p''$ per qualunque coppia di situazioni elettriche è necessario che

$$H_{11} i'_1 i''_1 + H_{12} v''_2 i'_1 + H_{21} v''_2 i'_1 + H_{22} v'_2 v''_2 = H_{11} i'_1 i''_1 + H_{12} v'_2 i''_1 + H_{21} v'_2 i''_1 + H_{22} v'_2 v''_2$$

che si riduce a

$$(H_{12} + H_{21}) v''_2 i'_1 = (H_{12} + H_{21}) v'_2 i''_1 .$$

Le grandezze v''_2 , v'_2 , i'_1 e i''_1 devono essere arbitrarie e di conseguenza si deve verificare $H_{12} = -H_{21}$ ovvero \mathcal{H} è antisimmetrica. Stessa condizione si ricava per la matrice \mathcal{H}' .

6.6.3 Matrice \mathcal{T}

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathcal{T} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

$$p' = v_1''i_1' + v_2''i_2' = (T_{11}v_2'' - T_{12}i_2'')(T_{21}v_2' - T_{22}i_2') + v_2''i_2'$$

$$p'' = v_1'i_1'' + v_2'i_2'' = (T_{11}v_2' - T_{12}i_2')(T_{21}v_2'' - T_{22}i_2'') + v_2'i_2''$$

$$\begin{aligned} p' - p'' &= -T_{11}T_{22}v_2''i_2' - T_{12}T_{21}v_2'i_2'' + v_2''i_2' - (-T_{11}T_{22}v_2'i_2'' - T_{12}T_{21}i_2'v_2'' + v_2'i_2'') = \\ &= (1 - T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})(v_2''i_2' - v_2'i_2'') . \end{aligned}$$

Affinchè $p' - p'' = 0$ per ogni coppia di situazioni elettriche (v_2'', v_2' , i_1', i_2'' devono essere arbitrarie) si deve verificare

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$$

ovvero $|\mathcal{T}| = 1$.

6.6.4 Esempio

Il doppio bipolo rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r & -5r \\ r & 4r \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

è realizzabile con soli resistori lineari a due terminali? Siccome \mathcal{R} non è simmetrica, il doppio bipolo non è reciproco. Quindi non può essere realizzato con soli resistori lineari. Se lo fosse, infatti, poichè un componente composito costituito da elementi reciproci è reciproco (cfr. sezione 5.4.1), sarebbe reciproco e dunque \mathcal{R} dovrebbe essere simmetrica.

6.7 Riepilogo

	SIMMETRICO	
	RECIPROCO	
\mathcal{R}	$R_{12} = R_{21}$	$R_{11} = R_{22}$
\mathcal{G}	$G_{12} = G_{21}$	$G_{11} = G_{22}$
\mathcal{T}	$ \mathcal{T} = 1$	$T_{11} = T_{22}$
\mathcal{H}	$H_{12} = -H_{21}$	$ \mathcal{H} = 1$
\mathcal{H}'	$H'_{12} = -H'_{21}$	$ \mathcal{H}' = 1$

Table 6.1: Condizioni per la simmetria o la reciprocità doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari.

CONDIZIONI PER LA SIMMETRIA O LA RECIPROCITÀ DOPPI BIPOLI adinamici, tempo-invarianti e lineari sono riportate in tabella 6.1.

Si noti che le quattro condizioni relative alla simmetria del doppio bipolo espressa tramite la matrice di trasmissione o le matrici ibride

sono meno generali rispetto a quelle ricavate nel paragrafo 6.5, ma vanno *quasi sempre* bene. Le condizioni di reciprocità, invece, sono necessarie e sufficienti in tutti i casi presentati.

6.8 Doppii bipoli lineari affini

QUANDO LE EQUAZIONI COSTITUTIVE 6.6 contengono le costanti c_1 e c_2 non entrambi nulle, il doppio bipolo è adinamico, tempo-invariante, lineare affine.

Nel caso in cui ammetta la base di definizione corrente, possiamo riscrivere le sue equazioni costitutive nella forma

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + E_1 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + E_2 \end{cases}, \quad (6.37)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Possiamo quindi rappresentare il componente come in figura 6.16 in cui si nota la presenza di un doppio bipolo lineare definito dalla matrice \mathcal{R} e due generatori di tensione *opportunamente* connessi. Si noti infatti il verso delle tensioni E_1 ed E_2 scelto in modo coerente con il segno + nell'equazione 6.38.

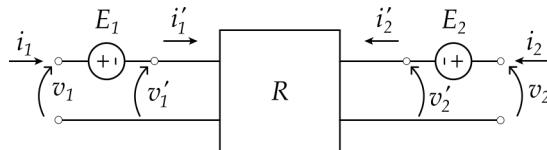


Figure 6.16: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base corrente (i_1, i_2).

POSSIAMO PENSARE un doppio bipolo lineare affine come una generalizzazione per i doppi bipoli del circuito equivalente di Thevènin (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). Il doppio bipolo descritto da \mathcal{R} equivale a R_{th} e i due generatori E_1 ed E_2 sono l'analogo di E_{th} . Dato un circuito che contiene elementi lineari e adinamici e generatori indipendenti di corrente e/o tensione, nel quale individuiamo una coppia di porte, è possibile ricavarne un modello come quello dell'equazione 6.38

- passivando tutti i generatori indipendenti (il cui effetto si *riassume* in E_1 ed E_2) per ottenere un doppio bipolo descritto da \mathcal{R} di cui i parametri si ricavano come descritto per i doppi bipoli lineari;

- determinare E_1 ed E_2 come le tensioni a vuoto (con le porte aperte) alle porte 1 e 2, rispettivamente.

PER ESEMPLIFICARE QUANTO DETTO consideriamo il circuito in figura 6.17. Si cerca il modello equivalente alle porte 1 e 2 nella forma 6.38. Le tensioni v_1 e v_2 risentono dell'effetto del generatore di corrente A . Se si procede passivandolo, i generatori E_1 ed E_2 impongono tensione nulla ed in questa condizione possiamo ricavare \mathcal{R} . Il circuito con le sorgenti passivate è lo stesso dell'esercizio al paragrafo 6.4.3 figura 6.11 e pertanto

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Lasciando invece aperte le porte 1 e 2, cioè $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$, dall'equazione 6.38 si deduce $v_1 = E_1$ e $v_2 = E_2$. Nel caso specifico $E_1 = -\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}A$ e $E_2 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}A$.

Complessivamente quindi

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

QUALORA IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE ammetta la base tensione, lo possiamo pensare come un'estensione ai doppi bipoli del circuito equivalente di Norton (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). La sua schematizzazione è quella in figura 6.18 e corrisponde alle equazioni descrittive

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2 \end{cases}, \quad (6.41)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

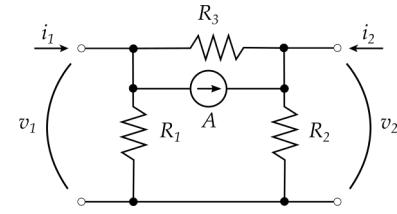


Figure 6.17: Un doppio bipolo lineare affine di cui si vuole ricavare la rappresentazione di tipo 6.38.

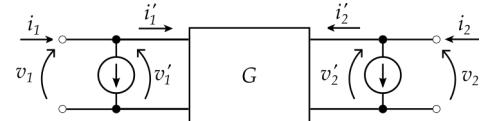


Figure 6.18: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base tensione (v_1, v_2).

NEL CASO IN CUI IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE ammetta la base mista (i_1, v_2) o (v_1, i_2), sono possibili rappresentazioni mediante matrici \mathcal{H} ed \mathcal{H}' , rispettivamente. I due casi sono riportati in figura 6.19 e le corrispondenti equazioni costitutive in forma matriciale diventano

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

e

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

ANCHE ALLA MATRICE DI TRASMISSIONE \mathcal{T} è possibile associare un bipolo lineare affine che ha la struttura riportata in 6.20. Le sue equazioni costitutive sono

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

6.9 Connessione di doppi bipoli

AFFINCHÈ ABbia UN SENSO interconnettere doppi bipoli, è necessario che le porte che si collegano tra loro ammettano basi di definizione compatibili. Inoltre, le regole valgono solo per doppi bipoli propri.

6.9.1 Collegamento in serie

IL COLLEGAMENTO IN SERIE DI DUE DOPPI BIPOLI PROPRI è schematizzato in figura 6.21.

Affinchè la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base corrente. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in serie tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.1) che richiede la definizione su base corrente dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , la connessione equivale ad una matrice equivalente $\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$. Infatti, facendo

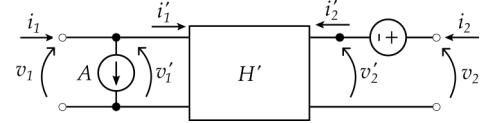
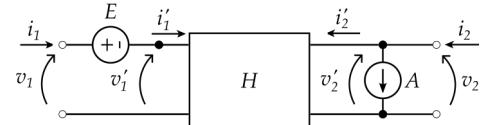


Figure 6.19: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base mista (i_1, v_2) (in alto) e (v_1, i_2) (in basso). Si notino i versi dei generatori di corrente e di tensione che sono scelti in modo da essere coerenti con le equazioni costitutive del doppio bipolo (cfr. equazioni 6.43 e 6.44).

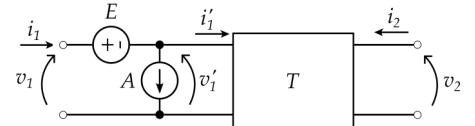


Figure 6.20: Un doppio bipolo lineare affine rappresentato con la matrice di trasmissione \mathcal{T} .

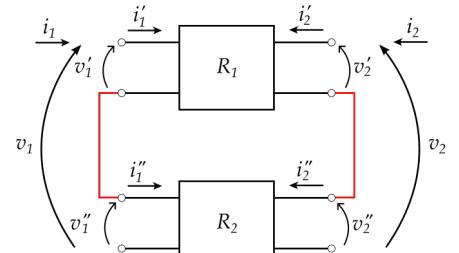


Figure 6.21: Collegamento in serie di due doppi bipoli. Da notare che $i'_1 = i''_1$ e $i'_2 = i''_2$.

riferimento alla figura 6.21, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

e

$$\begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} . \quad (6.47)$$

Ma $i_1 = i'_1 = i''_1$ e $i_2 = i'_2 = i''_2$ da cui

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}_{\mathcal{R}_{eq}}) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} . \quad (6.48)$$

6.9.2 Collegamento in parallelo

IL COLLEGAMENTO IN PARALLELO DI DUE DOPPI BIPOLI PROPRI è schematizzato in figura 6.22.

Affinchè la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base tensione. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in parallelo tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.3) che richiede la definizione su base tensione dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , la connessione equivale ad una matrice equivalente $\mathcal{G}_{eq} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$. Infatti, facendo riferimento alla figura 6.22, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_1 \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

e

$$\begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_2 \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} . \quad (6.50)$$

Ma $v_1 = v'_1 = v''_1$ e $v_2 = v'_2 = v''_2$ da cui

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}_{\mathcal{G}_{eq}}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} . \quad (6.51)$$

6.9.3 Connessione in cascata

LA CONNESSIONE IN CASCATA (o a catena) sfrutta la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{T} . In particolare, con riferimento alla figura 6.23, due doppi bipoli, che ammettono rispettivamente matrice

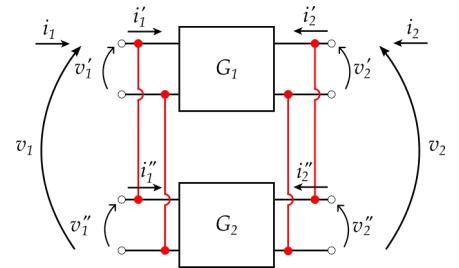


Figure 6.22: Collegamento in parallelo di due doppi bipoli. Da notare che $v'_1 = v''_1$ e $v'_2 = v''_2$.

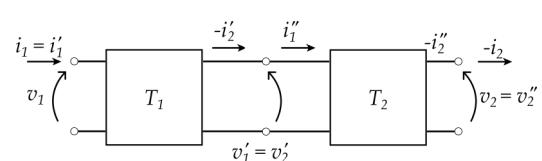


Figure 6.23: Collegamento a catena di due doppi bipoli. Da notare che $-i'_2 = i''_1$.

\mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , connessi in modo tale che i morsetti della porta 2 del primo coincidano con i morsetti della porta 1 del secondo, danno origine ad un doppio bipolo che ammette una $\mathcal{T}_{eq} = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ tale che

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2}_{\mathcal{T}_{eq}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

6.10 Doppii bipoli notevoli

6.10.1 Il trasferitore ideale di potenza

IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA, talvolta chiamato anche trasformatore ideale, è un *doppio bipolo proprio inerte*. La potenza che quindi assorbe istante per istante è sempre nulla, in qualunque condizione di funzionamento. In formule possiamo scrivere che $p_a(t) = i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \equiv 0$ per ogni t . Poichè, essendo inerte, di fatto *trasferisce* dalla porta 1 alla porta 2 e viceversa, la potenza $i_1(t)v_1(t) = -i_2(t)v_2(t)$, proviamo a ricavarne le equazioni costitutive usando la rappresentazione mediante matrice di trasmissione \mathcal{T} :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Così facendo possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_a(t) &= i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \\ &= (T_{21}v_2(t) - T_{22}i_2(t))(T_{11}v_2(t) - T_{12}i_2(t)) + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v_2^2(t) - (T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})v_2(t)i_2(t) + T_{12}T_{22}i_2^2(t) + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v_2^2(t) + (1 - T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})i_2(t)v_2(t) + T_{12}T_{22}i_2^2(t) \end{aligned} \quad (6.54)$$

e, affinchè $p_a(t)$ sia nulla per ogni t è necessario imporre

$$\begin{cases} T_{11}T_{21} = 0 \\ 1 - T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 0 \\ T_{12}T_{22} = 0 \end{cases}. \quad (6.55)$$

Il sistema 6.55 è non lineare, in 3 equazioni e 4 incognite. Non stupisce quindi che ammetta più di una soluzione. Sono infatti soluzioni ammissibili

$$\begin{cases} T_{11} = 0 \\ T_{12}T_{21} = 1 \\ T_{22} = 0 \end{cases}, \quad (6.56)$$

oppure

$$\begin{cases} T_{12} = 0 \\ T_{21} = 0 \\ T_{11}T_{22} = 1 \end{cases} . \quad (6.57)$$

Entrambe le soluzioni rappresentano un insieme infinito di possibilità e, tra le due, sceglieremo la 6.57 che porta ad avere un componente reciproco². Una matrice \mathcal{T} che soddisfa la 6.57 è

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

che equivale alle equazioni costitutive

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases} . \quad (6.59)$$

Il parametro n è il *rapporto di trasformazione* del trasferitore ideale di potenza il cui simbolo è rappresentato in figura 6.24.

IN TERMINI DI RAPPRESENTAZIONI CARDINALI, il trasferitore ideale di potenza ammette la rappresentazione mediante matrici \mathcal{H} ed \mathcal{H}' dato che, a partire dalla 6.59, è facile convincersi che ammette solo le basi miste (i_1, v_2) e (v_1, i_2) .

LA SINTESI DEL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA mediante generatori pilotati è riportata in figura 6.25. Si verifica facilmente che le due soluzioni proposte corrispondono alle due basi miste ammesse dal doppio bipolo e che equivalgono entrambe alle equazioni costitutive 6.59.

6.10.2 L'amplificatore operazionale ideale

PER POTER PRESENTARE e discutere il modello circuitale dell'amplificatore operazionale ideale o *nullore* è necessario introdurre due bipoli *pato-logici*: il *nullatore* e il *noratore*.

IL NULLATORE, il cui simbolo è riportato in figura 6.26, ha le equazioni costitutive $i = 0$ e $v = 0$. La sua caratteristica è quindi un solo punto sul piano (v, i) : il punto $(0, 0)$. Il fatto che sia un bipolo e che necessiti di due equazioni costitutive rende il nullatore un bipolo patologico.

² Il concetto di *reciprocità* non verrà necessariamente affrontato in questo corso. Lo studente interessato può fare riferimento al Capitolo 5.4 o alla letteratura inerente la teoria dei circuiti lineari per approfondire l'argomento.

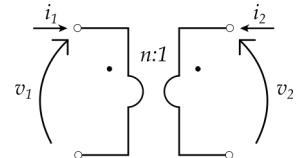


Figure 6.24: Il trasferitore ideale di potenza. Si noti la presenza dei due "pallini" alle porte del doppio bipolo. La posizione del pallino indica, alla porta corrispondente, il morsetto al quale è riferita la punta della freccia che indica la tensione di porta.

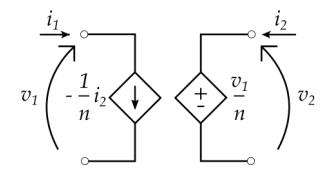
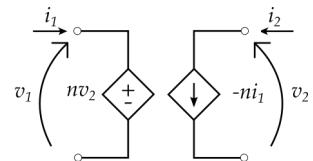


Figure 6.25: Il trasferitore ideale di potenza sintetizzato mediante generatori pilotati.

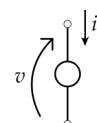


Figure 6.26: Il simbolo del bipolo patologico nullatore.

IL NORATORE fa coppia con il nullatore: il suo simbolo è riportato in figura 6.27 ed è un altro bipolo patologico dato che ammette qualunque coppia (v, i) e la sua equazione caratteristica è quindi tutto il piano (v, i) .

SE SI UTILIZZANO CONTEMPORANEAMENTE nullatore e noratore come i due bipoli che costituiscono il doppio bipolo *nullore* (cfr. figura 6.28) si ottiene un componente le cui equazioni costitutive sono

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases} . \quad (6.60)$$

Il nullore non ammette rappresentazioni cardinali ma solo la matrice \mathcal{T} tutta nulla.

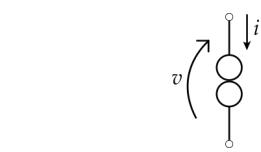
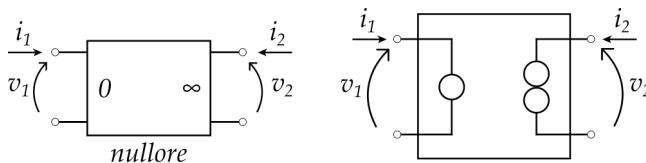


Figure 6.27: Il simbolo del bipolo patologico noratore.

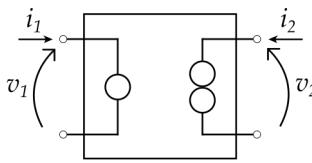


Figure 6.28: Il doppio bipolo nullore ottenuto combinando un nullatore e un noratore.

IL NULLORE È IL MODELLO dell'amplificatore operazionale *ideale* ovvero un amplificatore operazionale in opportune condizioni di funzionamento e caratteristiche costruttive.

L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE è un quadripolo (cfr. figura 6.29) caratterizzato dalle relazioni $i_- = I_-$, $i_+ = I_+$ e (cfr. figura 6.30)

$$v_o = \begin{cases} E_{sat}, & v_i > \epsilon \\ \frac{E_{sat}}{\epsilon} v_i, & v_i \in [-\epsilon, \epsilon] \\ -E_{sat}, & -v_i < -\epsilon \end{cases} . \quad (6.61)$$

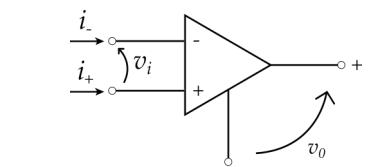
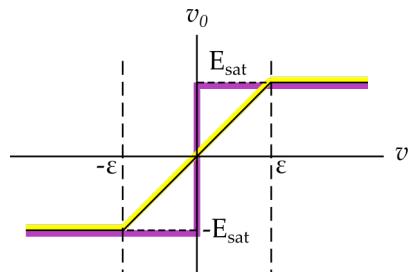


Figure 6.29: Il simbolo dell'amplificatore operazionale.

Figure 6.30: In giallo il legame $v_o(v_i)$ che tende alla spezzata viola quando il guadagno in tensione $A_v = E_{sat}/\epsilon \rightarrow +\infty$.

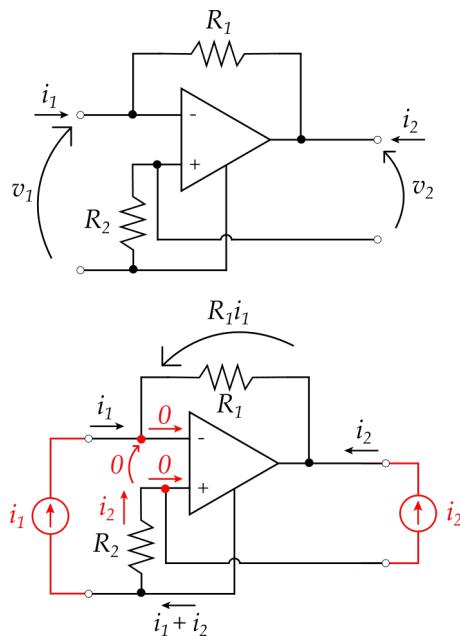
Valori tipici di I_- e I_+ sono dell'ordine dei μA , se non dei nA . Si è quindi soliti fare l'approssimazione $I_- = I_+ = 0$. Si noti che, avendo

assunto $I_- = I_+ = 0$, l'amplificatore operazionale diventa un doppio bipolo.

La tensione E_{sat} è tipicamente dell'ordine dei 10-15V e, nella regione lineare $v_i \in [-\epsilon, \epsilon]$, il guadagno in tensione $A_v = E_{sat}/\epsilon$ è dell'ordine di $10^5 - 10^6$. Si può quindi ragionevolmente approssimare la caratteristica lineare a tratti riportata nella 6.61, con la curva viola in figura 6.30 in cui il tratto lineare viene assunto verticale e per $v_i = 0$ il valore di v_o può assumere qualunque valore nell'intervallo $[-E_{sat}, E_{sat}]$. Le equazioni caratteristiche dell'amplificatore operazionale, in queste ipotesi di funzionamento, denominando $I_- = i_1$ e $v_i = v_1$, sono quindi quelle di un nullore.³

6.10.3 Un esercizio sul nullore

IL CIRCUITO IN FIGURA 6.31 (in alto) rappresenta un doppio bipolo realizzato connettendo opportunamente un amplificatore operazionale, che si assume ideale ovvero un nullore, con due resistori. Si richiede di determinare le equazioni costitutive del doppio bipolo risultante.



³ Si noti che affinchè l'amplificatore operazionale possa essere modellato con il doppio bipolo nullore, è necessario che nei circuiti in cui viene inserito ne sia garantito il funzionamento nella regione lineare. La condizione $v_i = 0$ (o di *massa virtuale*) non è infatti conseguenza della tecnologia con la quale il quadripolo è realizzato, come invece è il caso per la condizione $I_- = I_+ = 0$, ma dipende dal funzionamento del componente. Nei circuiti che affronteremo, si farà sempre l'ipotesi che ciò avvenga e non vedremo in questo corso le tecniche che vengono tipicamente adottate per verificare questa ipotesi. Lo studente interessato può consultare a questo proposito un qualunque testo di elettronica di base.

Figure 6.31: Un doppio bipolo che contiene un nullore. Di esso si vogliono ricavare le equazioni descrittive.

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO, dal momento che non è stato specificato diversamente, assumiamo che sia ammissibile la base corrente (i_1, i_2) e collegiamo quindi due generatori indipendenti alle porte 1 e 2 (cfr. figura 6.31 in basso). Dato che il morsetto – del nullore non assorbe corrente, la corrente i_1 scorre interamente in R_1 e con i_2 entra

nel nullore dal morsetto + della porta 2 per poi uscire dal morsetto -. La corrente in R_2 è dunque pari a i_2 . Dato che la tensione alla porta di ingresso del nullore è nulla, $v_1 = -R_2 i_2$ e $v_2 = -R_1 i_1$. Se ad esempio si scegliesse $R_2 = 0$, il doppio bipolo si comporterebbe da generatore di tensione alla porta 2 pilotato in corrente alla porta 1.

7

7.1 L'interazione magnetica

SECOLI PRIMA DI CRISTO, si osservò che alcuni minerali di ferro, come la *magnetite*, avevano la proprietà di attrarre piccoli pezzetti di ferro. Questa proprietà non è in relazione alla gravitazione. Non tutti i corpi, infatti, la presentano e appare concentrata solo in "certi punti" del minerale di ferro. Chiaramente, inoltre, non è in relazione all'interazione elettrica: né pezzetti di carta né palline di sughero sono attratti da questi minerali per polarizzazione. A questa nuova proprietà fisica venne dato il nome **magnetismo**, dalla antica città di Magnesia, in Asia Minore, dove, secondo la tradizione il fenomeno fu osservato per la prima volta.

LE REGIONI DI UN CORPO, dove il magnetismo sembra essere concentrato, sono detti **poli magnetici** e un corpo magnetizzato si dice **magnete**. Gli esperimenti dimostrano che ci sono due poli magnetici, "+" e "-" o *NORD* e *SUD*, e che poli diversi si attraggono mentre poli uguali si respingono. È importante notare che, mentre la carica elettrica positiva e quella negativa sono state *isolate*, non si è ancora riusciti a fare altrettanto con i poli magnetici, che viaggiano sempre in coppia. Neppure è stata identificata alcuna particella elementare che manifesti "un solo tipo" di magnetismo. Del resto, dal punto di vista teorico, si è giunti alla conclusione che non è necessario definire la *massa magnetica* o il *monopolio magnetico* perché, come vedremo, **il magnetismo è in realtà manifestazione di cariche elettriche in movimento**¹.

¹ A livello microscopico questa affermazione necessiterebbe di dettagliate spiegazioni, analoghe qualitativamente a quelle inerenti la polarizzazione dei dielettrici, che non troveranno spazio in questo corso.

7.2 Forze magnetiche su cariche in moto - La forza di Lorenz

LE INTERAZIONI (forze) tra corpi magnetizzati (come tra corpi elettrificati e masse) possono essere descritte a partire dall'assunzione che un corpo magnetizzato produce un **campo magnetico** nello spazio circostante.

L'effetto della presenza di un campo magnetico si rileva osservando la forza a cui viene sottoposta una carica (di prova) in moto nella regione in cui si vuole misurare il campo:

la forza magnetica esercitata da un campo magnetico su una carica in moto è proporzionale alla carica elettrica ed alla sua velocità ed è orientata perpendicolarmente alla velocità con cui si muove la carica.

Detta q la carica in moto con velocità \bar{v} , la forza \bar{F} su di essa esercitata dal campo magnetico \bar{B} è dunque

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} , \quad (7.1)$$

dove il simbolo “ \times ” indica il prodotto vettoriale e l'intensità B del campo \bar{B} si misura in Tesla (T). Data la direzione e il verso dei vettori \bar{v} e \bar{B} , la direzione di \bar{F} è data dalla normale al piano identificato da \bar{v} e \bar{B} (figura 7.1) e il verso di \bar{F} si ottiene in base alla regola della mano destra schematizzata in figura 1.4. L'intensità di \bar{F} è pari a

$$F = qvB \sin \alpha , \quad (7.2)$$

dove l'angolo α è mostrato in figura 7.1.

Da notare che se \bar{v} e \bar{B} sono paralleli, la forza \bar{F} ha intensità nulla dato che $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$. Viceversa, se \bar{v} e \bar{B} sono perpendicolari, F è massima in modulo dato che $\alpha = \pm \pi/2$.

Poiché \bar{F} e \bar{v} sono sempre perpendicolari, *il campo magnetico è associato ad un lavoro nullo* quindi il campo magnetico, o meglio la forza magnetica, non produce variazione dell'energia cinetica della carica in moto sulla quale si manifesta.

Quando una carica (di prova) si muove in una regione dello spazio in cui sono presenti sia un campo elettrico \bar{E} sia un campo magnetico \bar{B} , si osserva su di essa l'azione di una forza, risultante dalla presenza dei due campi, detta **forza di Lorenz**

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) . \quad (7.3)$$

7.3 Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)

FINO A QUESTO PUNTO IL CAMPO MAGNETICO è stato discusso senza alcun riferimento a come vengono generati i campi magnetici;

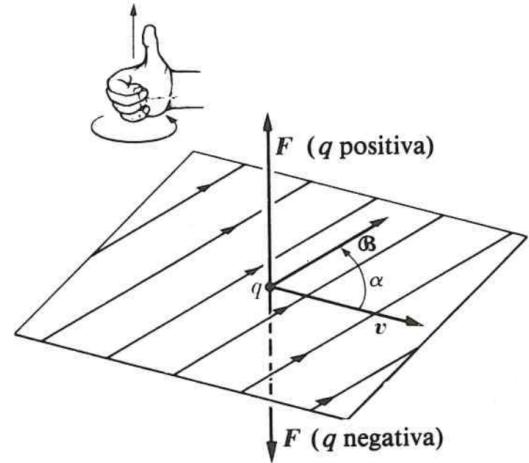


Figure 7.1: Data la direzione e il verso dei vettori \bar{v} , velocità con la quale si muove la carica q e \bar{B} , il campo magnetico, la direzione di \bar{F} sentita da q è data dalla normale al piano identificato da \bar{v} e \bar{B} e il verso di \bar{F} si ottiene in base alla regola della mano destra.

è stato solo fatto cenno a certe sostanze, chiamate magneti, che nel loro stato naturale producono campi magnetici. Un passo avanti fondamentale per la comprensione dell'origine del magnetismo venne compiuto nel 1819, quando il fisico danese Hans Christian Oersted fortuitamente scoprì che una bussola magnetica, quando veniva posta sotto un lungo filo percorso da corrente, si orientava perpendicolarmente alla direzione del filo stesso. Poiché una corrente elettrica consiste in un flusso di cariche elettriche in moto, sembra ragionevole ipotizzare che i campi magnetici non solo sono sentiti da cariche in moto, ma anche sono prodotti da cariche in moto.

LA VALIDITÀ DI QUESTA IPOTESI è stata ampiamente verificata analizzando il moto di particelle cariche. In accordo con tale ipotesi, mentre una carica elettrica a riposo rispetto ad un osservatore produce soltanto un campo elettrico, una particella carica in moto relativamente ad un osservatore produce sia un campo elettrico che un campo magnetico.

Il campo elettrico e il campo magnetico sono semplicemente due diversi aspetti di un'unica proprietà fondamentale della materia, ed il termine campo elettromagnetico descrive più adeguatamente la situazione fisica coinvolgente cariche in moto.

Si consideri una carica q (figura 7.2) che si muove con velocità \bar{v} rispetto ad un osservatore². Il campo elettrico della carica è radiale ed è dato dalla stessa espressione fornita al paragrafo 1.4 per una particella a riposo, e cioè

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r . \quad (7.4)$$

Misure del campo magnetico effettuate in diversi punti mostrano che il campo magnetico è dato dall'espressione

$$\bar{B} = K_m q \frac{\bar{v} \times \hat{u}_r}{r^2} , \quad (7.5)$$

con $K_m = 10^{-7} \text{ mkgC}^{-2}$. Introducendo la **permittività magnetica del vuoto** $\mu_0 = 4\pi K_m \approx 1.3566 \cdot 10^{-6} \text{ mkgC}^{-2}$, la 7.5 diventa

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \times \hat{u}_r}{r^2} . \quad (7.6)$$

Perciò, in qualsiasi punto dello spazio, come A in figura 7.2, vi è un campo elettrico \bar{E} nella direzione radiale ed un campo magnetico \bar{B} in direzione perpendicolare sia a \hat{u}_r che a \bar{v} .

I FATTI SPERIMENTALI MOSTRANO che il campo magnetico della carica in moto può essere rappresentato da linee di forza magnetiche

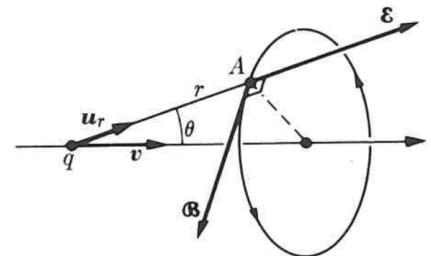


Figure 7.2: La carica q si muove con velocità \bar{v} e produce in ogni punto A un campo elettrico nella direzione radiale \hat{u}_r ed un campo magnetico \bar{B} in direzione perpendicolare sia a \hat{u}_r che a \bar{v} .

² Si ammetta che questa velocità sia piccola rispetto alla velocità della luce, così che non occorra tener conto di effetti relativistici nei calcoli.

che sono cerchi con i centri sulla linea di moto della carica. Quando la carica è positiva, il senso delle linee di forza magnetiche è diretto come le dita della mano destra quando il pollice punta in direzione del moto della carica. Si noti in particolare che \bar{B} non ha componente lungo la direzione del moto della carica.

Utilizzando la 7.4, è possibile riscrivere la 7.6 come

$$\bar{B} = \frac{1}{c^2} (\bar{v} \times \bar{E}) , \quad (7.7)$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ e $[c] = \text{ms}^{-1}$. Sostituendo i valori di μ_0 ed ϵ_0 si ottiene $c \approx 2.9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ovvero c è la velocità della luce (o di qualsiasi segnale elettromagnetico) nel vuoto. Questa relazione non verrà discussa in questo corso così come non si dimostrerà l'importante proprietà della 7.7 che, nonostante la 7.4 e la 7.6 debbano essere modificate quando \bar{v} diventa prossima a c , rimane invece valida anche per velocità decisamente elevate.

7.4 Forza magnetica su di una corrente elettrica

SUPPONIAMO ORA CHE UN CONDUTTORE, in cui si presente un campo densità di corrente elettrica \bar{j} , sia immerso in un campo magnetico. La forza su ogni carica in moto è pari a $\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$, se vi sono n particelle per unità di volume, e la forza \bar{f} per unità di volume è³

$$\bar{f} = nq(\bar{v} \times \bar{B}) . \quad (7.8)$$

La forza totale su un piccolo volume dV del mezzo sarà

$$d\bar{F} = \bar{f}dV = \bar{j} \times \bar{B}dV , \quad (7.9)$$

e la forza totale su un volume finito V si ottiene integrando questa espressione su tutto il volume. Cioè,

$$\bar{F} = \int_V \bar{j} \times \bar{B}dV . \quad (7.10)$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI vi sia corrente lungo un filo o un filamento di lunghezza L . Un elemento di volume dV è dato da Sdl (figura 7.3) e il vettore densità di corrente \bar{j} ha la direzione del versore \hat{u}_T tangente all'asse del filamento. Pertanto, assumendo l'intensità di corrente I lungo il filo uguale in tutti i punti del conduttore, l'equazione 7.10 dà

$$\bar{F} = \int_V j\hat{u}_T \times \bar{B}Sdl = \int_V \underbrace{jS}_{I} \hat{u}_T \times \bar{B}dl = I \int_L \hat{u}_T \times \bar{B}dl . \quad (7.11)$$

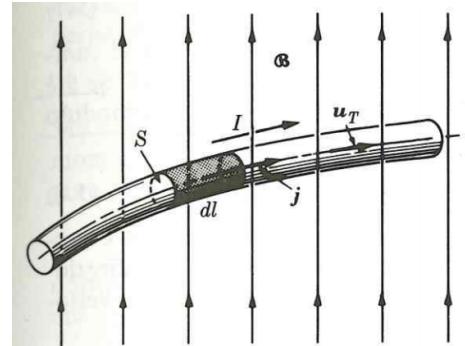


Figure 7.3: Un filamento di materiale conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico uniforme e stazionario.

³ Si noti che nq è una densità volumetrica di carica, perciò, è coerente con la definizione di campo di densità di corrente elettrica (cfr. paragrafo 1.10), $\bar{j} = nq\bar{v}$.

Questo risultato può essere verificato ponendo conduttori di forme diverse in un campo magnetico e misurando nei vari casi la forza sul conduttore.

Consideriamo, come esempio, il caso di un conduttore rettilineo posto in un campo magnetico uniforme e costante \bar{B} (figura 7.4). Allora, sia \hat{u}_T sia \bar{B} sono costanti (in direzione e modulo) lungo il conduttore e l'equazione 7.11 diviene $\bar{F} = IL\hat{u}_T \times \bar{B}$. La forza alla quale è sottoposto il filo è dunque perpendicolare al piano definito da \hat{u}_T e \bar{B} e la sua intensità è pari a $F = ILB \sin \theta$.

QUESTO È IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO dei motori elettrici che hanno avvolgimenti costituiti da spire simili a quella in figura 7.5 che per semplicità consideriamo di forma rettangolare. Consideriamo la corrente che scorre in un circuito rettangolare, disposto in modo che la normale \hat{u}_N al suo piano (normale orientata nel senso definito con la regola della mano destra a partire dal senso della corrente) faccia un angolo θ col campo \bar{B} , e che due lati del circuito siano perpendicolari al campo.

Le forze \bar{F}' agenti sui lati L' hanno lo stesso modulo (uguale a $IBL' \sin(\pi/2 - \theta) = IBL' \cos \theta$), ma hanno eguale direzione e versi opposti. Le forze \bar{F}' tendono a deformare il circuito, ma non producono nessuna coppia. Le forze \bar{F} sui lati L hanno modulo $F = IBL (\bar{B} e \hat{u}_T)$ sono perpendicolari per costruzione lungo i lati L) e costituiscono una coppia il cui braccio di leva è $L' \sin \theta$. Le forze \bar{F} producono sul circuito un momento $\tau = IBLL' \sin \theta$ che tende ad orientare la spira perpendicolarmente al campo \bar{B} .

7.5 Legge di Ampère-Laplace

LA PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO è riconoscibile dalla forza che il campo produce su una carica in moto. Inoltre, come già visto nel paragrafo 7.3, una carica in moto produce un campo magnetico.

Dopo molti esperimenti fatti durante un periodo di vari anni si ottenne un'espressione generale per calcolare il campo magnetico prodotto da una spira di corrente chiusa di forma qualsiasi. Questa espressione è detta legge di Ampère-Laplace. Con riferimento alla figura 7.6, il piccolo segmento dl della spira di corrente contribuisce al campo magnetico nel punto P con un termine infinitesimo pari a

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \hat{u}_T \times \hat{u}_r , \quad (7.12)$$

e l'integrale è esteso all'intero circuito chiuso (ragione per cui si usa il simbolo \oint) fornisce il campo \bar{B} nel punto P come risultante di tutti i

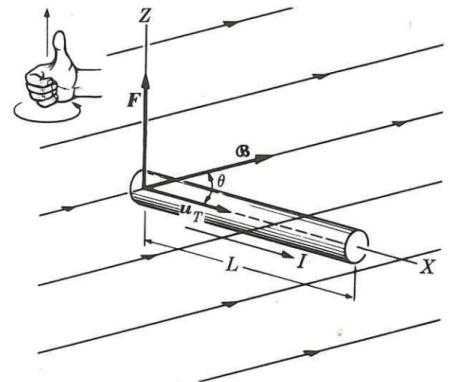


Figure 7.4: Un caso particolare: un filamento *rettilineo* di materiale conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico *uniforme*.

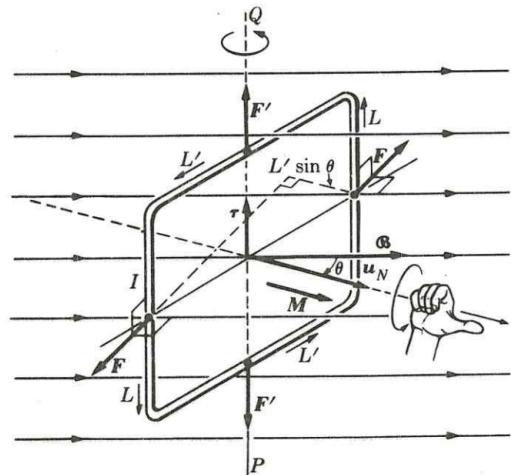


Figure 7.5: Forza che agisce su una spira rettangolare percorsa da corrente.

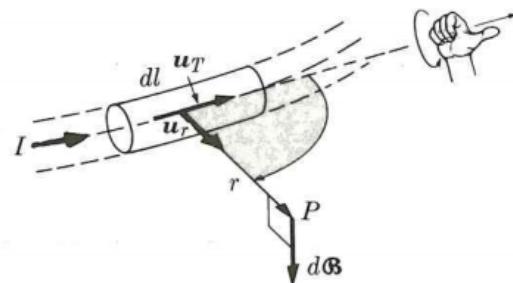
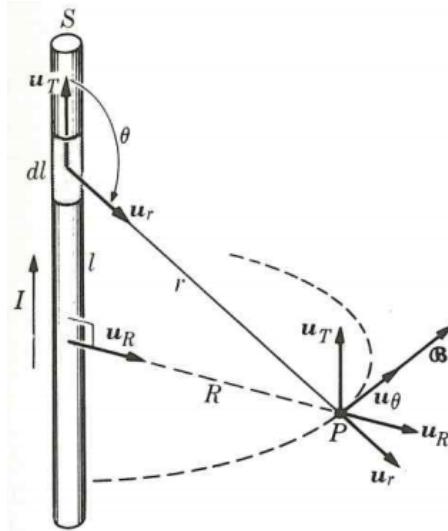


Figure 7.6: Schema illustrante la definizione dei termini impiegati nella legge di Ampère-Laplace. Il piccolo segmento dl della spira di corrente contribuisce al campo magnetico nel punto P . Il suo contributo è perpendicolare al piano definito da \hat{u}_T e \hat{u}_r .

contributi infinitesimi di tipo 7.12:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} dl . \quad (7.13)$$

Come caso particolare della legge di Ampère-Laplace si studia il caso del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita e sezione molto piccola (figura 7.7).



Per ogni punto P ed ogni elemento dl della corrente, il vettore $\hat{u}_T \times \hat{u}_r$ è perpendicolare al piano determinato da P e dalla corrente, e perciò la sua direzione è quella del versore \hat{u}_θ . In P il campo magnetico prodotto da dl è quindi tangente al cerchio di raggio R che passa attraverso P , ha il centro sulla corrente ed è in un piano perpendicolare alla corrente. Perciò, quando facciamo l'integrazione nell'equazione 7.13, i contributi di tutti i termini nell'integrale hanno la stessa direzione \hat{u}_θ e il campo magnetico risultante \bar{B} è pure tangente al cerchio. Così è necessario soltanto trovare il modulo di \bar{B} . Il modulo di $\hat{u}_T \times \hat{u}_r$ è $\sin \theta$, poiché \hat{u}_T e \hat{u}_r sono vettori unitari. Quindi, per una corrente rettilinea, l'equazione 7.13 in modulo è

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} . \quad (7.14)$$

Le linee di forza di \bar{B} sono circonferenze concentriche con la corrente e perpendicolari ad essa, come illustrato nella figura 7.8. La regola della mano destra per determinare la direzione del campo magnetico relativa alla direzione della corrente è pure indicata nella figura. In forma vettoriale si ottiene quindi la formula di Biot-Savart:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_\theta . \quad (7.15)$$

Figure 7.7: Il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita.

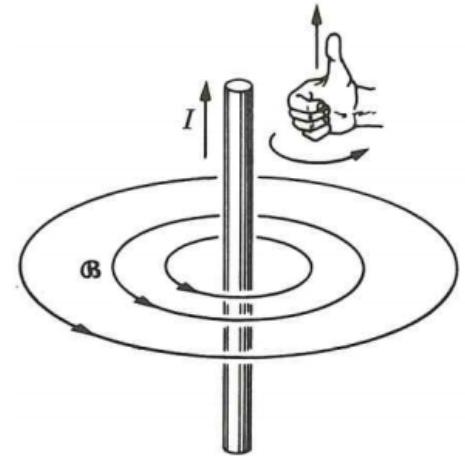


Figure 7.8: Le linee di forza chiuse del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita. Un campo con linee di forza chiuse si dice solenoidale.

Le linee di forza del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea sono chiuse. Questo è vero per qualunque campo \bar{B} dato che non esiste il monopolo magnetico. Un campo con queste caratteristiche si dice *solenoidale*.

7.6 Campo magnetico di una spira di corrente circolare

USARE LA LEGGE DI AMPÈRE-LAPLACE per calcolare il campo magnetico in un punto arbitrario è un problema matematico alquanto complicato, ma nei punti lungo l'asse del cerchio (figura 7.9) il calcolo è un compito piuttosto semplice. In primo luogo, si noti che l'equazione 7.13 può essere interpretata matematicamente come affermazione che in P il campo magnetico risultante \bar{B} prodotto dalla corrente è la somma di un grande numero di piccolissimi contributi elementari $d\bar{B}$ dovuti ad ognuno dei segmenti o elementi di lunghezza dl componenti la spira. Ogni contributo elementare $d\bar{B}$ ha modulo

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}, \quad (7.16)$$

dato che per costruzione $\hat{u}_T \times \hat{u}_r = 1$, e direzione perpendicolare al piano PAA' .

Tuttavia il campo è obliquo rispetto all'asse X . Decomponendo $d\bar{B}$ in un componente $d\bar{B}_{||}$, parallelo all'asse X ed in un componente $d\bar{B}_{\perp}$ perpendicolare ad esso, si nota che, quando integriamo lungo la circonferenza, per ogni $d\bar{B}_{\perp}$, ve ne è un altro in verso opposto da parte dell'elemento di lunghezza direttamente opposto a dl , e perciò tutti i vettori $d\bar{B}_{\perp}$, sommati danno zero. La risultante \bar{B} sarà la somma di tutti i vettori $d\bar{B}$ ed è quindi diretta come l'asse X . Ora poiché $\cos \alpha = a/r$,

$$dB_{||} = dB \cos \alpha = dB \frac{a}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} dl, \quad (7.17)$$

e quindi

$$B = \oint B_{||} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}. \quad (7.18)$$

Definendo $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ si ottiene $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$. Rispetto alla coordinata x presa lungo l'asse X , il campo magnetico è massimo per $x = 0$, ovvero al centro della spira e $B|_{x=0} = \frac{\mu_0 I}{2a}$. Le linee di forza del campo magnetico (solenoidale) di una spira di corrente circolare è rappresentato nella figura 7.10.

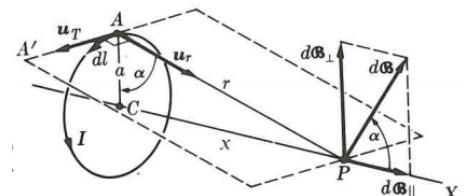


Figure 7.9: Il campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa da corrente.

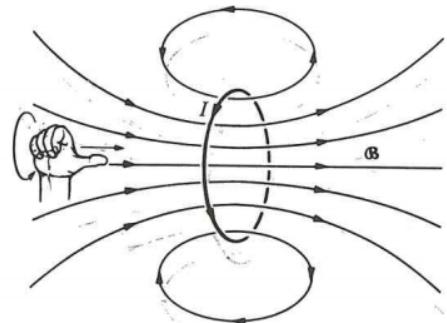


Figure 7.10: Le linee di forza del campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente.

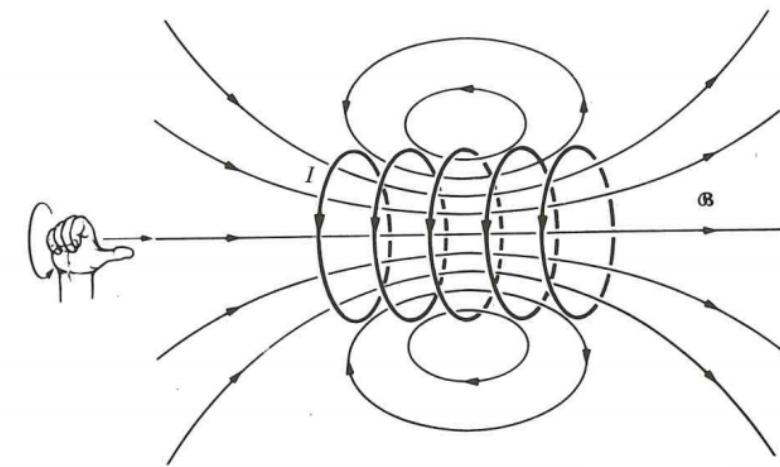


Figure 7.11: Le linee di forza del campo magnetico generato da un solenoide ideale: N spire dello stesso raggio (molto piccolo) e disposte in modo coassiale a contatto l'una con l'altra sono percorse dalla medesima corrente.

AVENDO A DISPOSIZIONE N spire dello stesso raggio e disponendole in modo coassiale come in figura 7.11 si realizza un *solenoido* (o circuito solenoidale) di lunghezza l . Si dimostra, utilizzando la legge di Ampère-Laplace, che, se il solenoide è abbastanza lungo, il campo magnetico \bar{B} prodotto dalla corrente I che circola nelle spire è pressoché costante all'interno del solenoide ed è pari a $\frac{\mu_0 NI}{l}$. L'orientamento del campo è dato dalla regola della mano destra in base al verso della corrente I (figura 7.11) e le sue linee di forza chiuse sono estremamente concentrate all'interno del solenoide e si diradano molto al suo esterno. Al di fuori del solenoide, quindi, il campo magnetico è circa nullo.⁴ I solenoidi vengono utilizzati per creare campi magnetici (piuttosto) uniformi in regioni limitate nella prossimità del suo centro.

In figura 7.12 si mostra come di fatto si realizza un solenoide: non mediante tante spire ravvicinate e coassiali ma tramite gli avvolgimenti di un filo conduttore percorso dalla corrente I .

7.7 La legge di Ampère

LA LEGGE DI AMPÈRE afferma che, data una linea chiusa L (di cui si sceglie arbitrariamente il verso di percorrenza), la risultante I delle correnti con essa concatenate determina la circuitazione Λ_B del campo magnetico \bar{B} prodotto dalle correnti stesse

$$\Lambda_B = \oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I . \quad (7.19)$$

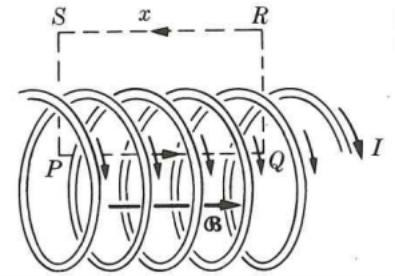


Figure 7.12: Un solenoide reale.

⁴ Si ricordi infatti che un campo vettoriale, in una regione dello spazio, è tanto più intenso quanto più le sue linee di forza sono "dense".

Facendo riferimento alla figura 7.13 e orientando L , ad esempio, in senso antiorario, la direzione del pollice della mano destra, che con le altre dita avvolge L in base al suo orientamento, determina quali delle correnti concatenate con L contribuiscano positivamente o negativamente alla corrente complessiva I . Quando applichiamo l'equazione 7.19, quindi, prendiamo una corrente come positiva se "trapassa" una superficie avente L come bordo, nel senso di avanzamento indicato dal pollice della mano destra e negativa se nel senso opposto. Così, nella figura 7.13, le correnti I_1 e I_3 sono considerate positive e I_2 negativa.

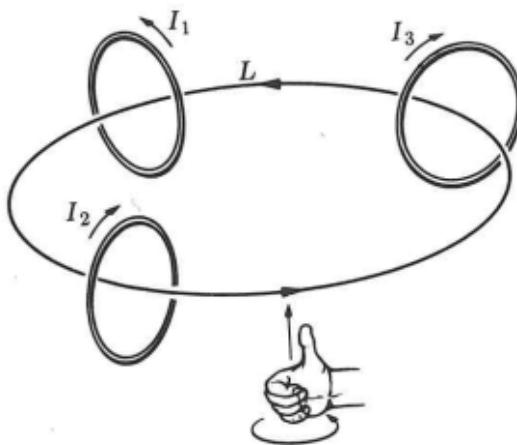


Figure 7.13: Un esempio di applicazione della legge di Ampère.

Ricordando che la corrente elettrica può essere espressa come il flusso di una densità di corrente (cfr. paragrafo 1.10)

$$I = \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.20)$$

cioè possiamo esprimere la legge di Ampère, equazione 7.19, anche nella forma

$$\Lambda_B = \oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.21)$$

dove S è una qualsiasi superficie delimitata da L . Si noti che il versore \hat{u}_N , che indica l'orientamento di S , lo si deve orientare in base alla direzione che fissa il verso positivo delle correnti concatenate con L .

Il fatto che la circolazione del campo magnetico generalmente non è nulla, indica che *il campo magnetico non ammette un potenziale magnetico nello stesso senso in cui il campo elettrico ammette un potenziale elettrico*.

LA LEGGE DI AMPÈRE è particolarmente utile quando vogliamo calcolare il campo magnetico prodotto da distribuzioni di correnti aventi

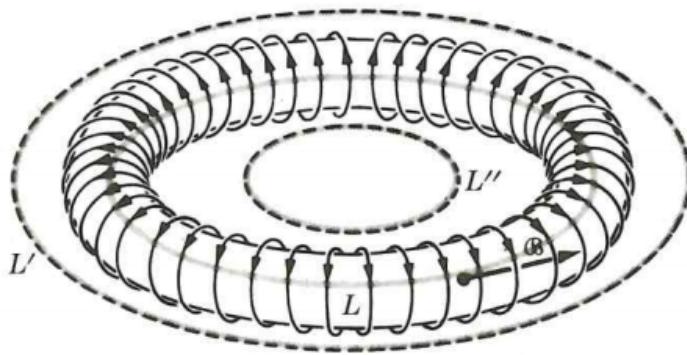


Figure 7.14: Applicazione della legge di Ampère per il calcolo del campo magnetico generato da un avvolgimento toroidale percorso da corrente.

certe simmetrie geometriche. Un esempio di importanza pratica è costituito dall'avvolgimento toroidale di figura 7.14. Un avvolgimento toroidale consiste in un filo avvolto uniformemente su un toro, o superficie a forma di ciambella.

Sia N il numero di spire, tutte ugualmente distanziate, ed I sia la corrente elettrica che le percorre. La simmetria del problema suggerisce che le linee di forza del campo magnetico \vec{B} sono cerchi concentrici al toro. Prendiamo dapprima come percorso di integrazione un cerchio L entro il toro. La circolazione magnetica è allora $\Lambda_B = BL$. Il percorso L concatena tutte le spire attorno al toro e perciò la corrente totale che lo attraversa è NI . Perciò, applicando la legge di Ampère, otteniamo $BL = \mu_0 NI$. Se il raggio della sezione del toro è piccolo rispetto al suo raggio, possiamo considerare L uguale per tutti i percorsi interni. Dato che $n = N/L$ è il numero di spire per unità di lunghezza, concludiamo che il campo magnetico entro il toro è uniforme e ha il valore costante $B = \mu_0 n I$.

Per un qualsiasi percorso che giace al di fuori del toro, come L' o L'' , la corrente totale che lo concatena vale zero. Quindi otteniamo $B = 0$. In altre parole, il campo magnetico di un avvolgimento toroidale è totalmente confinato nel suo interno. Questa situazione è applicabile solo al caso di avvolgimenti toroidali in cui le spire sono assai poco spaziate fra loro.

7.8 Flusso magnetico

IL FLUSSO MAGNETICO ATTRAVERSO una qualsiasi superficie S , chiusa o no, è

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.22)$$

dove il versore \hat{u}_N indica la direzione normale ad S in ogni suo punto.

Il concetto di flusso magnetico attraverso una superficie arbitraria è di grande importanza, specialmente quando la superficie non è chiusa. Il flusso magnetico, che dimensionalmente è il campo magnetico moltiplicato per un'area, è espresso in Tm^2 , un'unità chiamata weber (Wb) in onore del fisico tedesco Wilhelm E. Weber.

Poichè non vi sono masse o poli magnetici (per lo meno non sono ancora stati osservati), le linee di forza del campo magnetico \bar{B} sono chiuse, come indicato negli esempi discussi finora. Concludiamo che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo. Cioè, il flusso entrante attraverso una superficie chiusa è uguale al flusso uscente. Perciò

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (7.23)$$

Tralasciamo la dimostrazione. Il risultato costituisce la **legge di Gauss per il campo magnetico**.

7.9 Equazioni del campo elettromagnetostatico

POSSIAMO RIASSUMERE LE EQUAZIONI PRINCIPALI che caratterizzano il campo *elettromagnetostatico* che abbiamo visto in questo paragrafo (per la parte magnetica) e nel capitolo 1 per la parte elettrica. Le quattro equazioni che andiamo a scrivere sono le **leggi di Maxwell per il campo magnetostatico**.

- Legge di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8)

$$\oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (7.24)$$

- Legge di Gauss per il campo magnetico (paragrafo 7.8)

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (7.25)$$

- Circuitazione per il campo elettrico (paragrafo 1.5)⁵

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 . \quad (7.26)$$

- Circuitazione per il campo magnetico (paragrafo 7.7)

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (7.27)$$

⁵ Per uniformità con la legge 7.27 ricavata al paragrafo 7.7 inerente la circuitazione del campo magnetico, la linea chiusa denominata γ nell'intero paragrafo paragrafo 1.5 è stata rinominata L nella 7.26.

8.1 Il campo elettromagnetico dipendente dal tempo

NEI CAPITOLI 1 E 7, abbiamo preso in considerazione i campi elettrici e magnetici non dipendenti dal tempo o, in altre parole, statici. In questo paragrafo considereremo campi dipendenti dal tempo; cioè *in un punto assegnato dello spazio i campi possono variare con il tempo*. In questo caso valgono nuove relazioni. Vedremo che un campo magnetico variabile comporta l'esistenza di un campo elettrico e, viceversa, che un campo elettrico variabile comporta l'esistenza di un campo magnetico. Le leggi che descrivono queste due situazioni sono chiamate legge di Faraday-Henry e legge di Ampere-Maxwell. Nell'introdurre tali leggi, ci riferiremo al caso in cui il sistema in oggetto non presenti entità geometriche in movimento.

8.2 La legge di Faraday-Henry

L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA è il principio di funzionamento del generatore elettrico, del trasformatore e di molti altri apparecchi di uso quotidiano. Supponiamo che un conduttore elettrico formante un circuito chiuso sia posto in una regione nella quale esista un campo magnetico \vec{B} . **Assumiamo che il circuito sia fermo e che non si deformi al variare del tempo.** Se il flusso magnetico Φ_B ,¹ concatenato con il circuito varia con il tempo, si può osservare una corrente nel circuito mentre il flusso sta variando. La presenza di una corrente elettrica indica l'esistenza, o l'induzione, di una forza elettromotrice² (fem) agente nel circuito e quindi di un campo elettrico \vec{E} . Misure di questa fem indotta mostrano che essa dipende dalla rapidità di variazione del flusso magnetico $d\Phi_B/dt$. Per esempio, se un magnete è posto vicino ad un circuito conduttore chiuso si osserva una fem del circuito se esso (o il circuito) viene mosso in modo tale

¹ Nel seguito, per semplicità di notazione, si indicherà con Φ_B il flusso $\Phi_S(\vec{B})$ del campo \vec{B} attraverso la superficie S . Questa notazione non esplicita la superficie attraverso la quale si definisce il flusso di \vec{B} . Tale superficie verrà evidenziata caso per caso.

² La generica forza elettromotrice V_{fem} è definita come lavoro, normalizzato rispetto alla carica q , che il campo elettrico compie per muovere, lungo le sue linee di forza sul generico percorso γ , la carica q stessa. Per questo motivo, $V_{fem} = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, si noti cioè l'assenza del segno “-” rispetto alla definizione di tensione elettrica introdotta nel paragrafo 1.2. Se la fem si riferisce ad un percorso chiuso, come nel caso in questione, allora $V_{fem} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

che il flusso magnetico concatenato cambi. L'entità della fem indotta dipende dal fatto che il magnete (o il circuito) venga mosso rapidamente o lentamente. La fem indotta è tanto maggiore, quanto maggiore è la derivata del flusso rispetto al tempo. La direzione lungo la quale agisce la fem indotta dipende dal fatto che il flusso del campo magnetico aumenta o diminuisce.

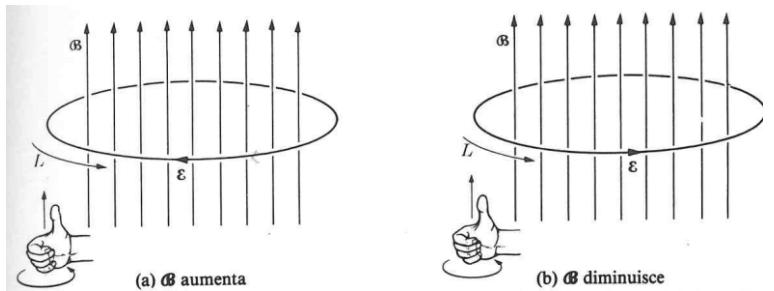


Figure 8.1:

PER ESSERE PIÙ PRECISI, riferiamoci alla figura 8.1 nella quale la linea L è orientata come le dita della mano destra con il pollice nella direzione e verso del campo magnetico \bar{B} . Supponiamo che la geometria rimanga invariata ma che si osservi una variazione dell'intensità B del campo. Quando il flusso magnetico aumenta (cioè $d\Phi_B/dt > 0$) si manifesta una fem indotta

$$V_{fem} = \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} < 0 , \quad (8.1)$$

ovvero si manifesta un campo elettrico \bar{E} diretto come in figura.

Tale campo metterebbe naturalmente in moto un carica positiva in senso orario o una negativa in senso antiorario. V_{fem} agisce quindi nel "senso negativo" rispetto all'orientamento di L . Se il flusso magnetico diminuisce (cioè $d\Phi_B/dt < 0$), V_{fem} agisce invece in "senso positivo" e

$$V_{fem} = \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} > 0 . \quad (8.2)$$

Quindi il segno della fem indotta è sempre opposto a quello di $d\Phi_B/dt$. Misure minuziose mostrano che il valore della fem indotta, espresso in volt, è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico. Quindi possiamo scrivere

$$V_{fem} = - \frac{d\Phi_B}{dt} , \quad (8.3)$$

formula che esprime la **legge di Faraday-Henry** dell'induzione elettromagnetica. Possiamo esprimere in parole in questo modo:

in un campo magnetico variabile, in ogni circuito viene indotta una forza elettromotrice (fem) uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso il circuito col segno cambiato.

Notiamo come, nell'ipotesi di partenza in cui la linea chiusa L di fatto costituisce una piccola spira di materiale conduttore, l'induzione di una fem lungo la linea genera una corrente I che circola nella spira in base al verso della fem. Questa corrente genera a sua volta un campo magnetico \bar{B}_{ind} (legge di Biot-Savart 7.15 per una spira circolare percorsa da corrente) che, in base al verso di I , è diretto in modo da opporsi alle variazioni del flusso Φ_B (in questo caso, dato che la geometria è fissata, si oppone direttamente alle variazioni di B). L'opporsi alla variazione del flusso magnetico da parte di \bar{B}_{ind} esprime il segno “-” nella 8.3 che può essere spiegato in termini di conservazione dell'energia. In effetti se il segno della fem fosse lo stesso di quello di $d\Phi_B/dt$, il campo magnetico \bar{B}_{ind} prodotto dalla corrente I generata da V_{fem} tenderebbe a cambiare nello stesso verso e quindi contribuirebbe ad aumentare \bar{B} e così via. Quindi una piccola variazione di Φ_B sarebbe l'inizio di un cambiamento continuo cosicché una piccola quantità d'energia impiegata inizialmente per cambiare Φ_B darebbe luogo ad un grande cambiamento dell'energia magnetica del sistema.

FACENDO RIFERIMENTO ALLA FIGURA 8.1, ipotizziamo di scegliere la superficie piana S di cui L è il contorno, ipotizziamo che $B = B_0 \sin(\omega t)$ e che \bar{B} sia parallelo al versore \hat{u}_N normale ad S in ogni suo punto. In queste ipotesi si ricava

$$V_{fem} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -SB_0\omega \cos(\omega t) , \quad (8.4)$$

e si intuisce quindi come l'effetto della V sia tanto maggiore quanto più la pulsazione ω è grande.

Ricordando che $V_{fem} = \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l}$ e che si sono assunte fisse tutte le entità geometriche considerate, la 8.3 può essere riscritta come

$$-\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (8.5)$$

dalla quale si deduce che *in condizioni non stazionarie il campo elettrico \bar{E} non ammette un potenziale e quindi non è valida la legge di Kirchhoff per le tensioni*. La legge di Faraday-Henry nella forma 8.5 coincide con la forma integrale della terza legge di Maxwell.

Infine si evidenzia come la legge di Faraday-Henry ha validità ancor più generale di quanto già non mostrato. Non è necessario infatti che il percorso L coincida con un conduttore quale un circuito chiuso; consideriamo invece una regione dello spazio nella quale esiste un campo magnetico variabile nel tempo.

Allora l'equazione 8.5 equivale a dire che

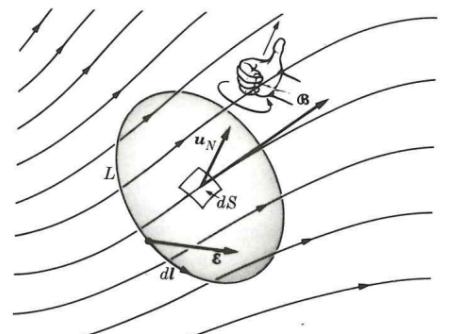


Figure 8.2:

un campo magnetico dipendente dal tempo comporta l'esistenza di un campo elettrico, tale che la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso arbitrario è uguale ed opposta alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso una superficie avente per contorno quel percorso.

Questa è un'altra maniera di enunciare la legge di Faraday-Henry dell'induzione elettromagnetica. Essa ci fornisce una visione più approfondita del contenuto fisico del fenomeno dell'induzione elettromagnetica; ci mostra cioè il fatto che un campo elettrico deve esistere tutte le volte che un campo magnetico varia nel tempo e che i due campi sono in relazione tra loro, secondo l'equazione 8.5. Il campo elettrico può essere determinato misurando la forza agente su una carica in quiete nella regione nella quale il campo magnetico sta variando.

8.3 Applicazione della legge di Farady-Henry ai circuiti elettrici

VALE LA PENA DI RIVEDERE LA LEGGE DI FARADY-HENRY in relazione alla sua applicazione nell'ambito dei circuiti elettrici. Per questo, si inizi considerando il circuito elementare composto da una singola maglia di resistori e da una sorgente di tensione (es. una pila) come descritto in Fig. 8.3. Senza perdere di generalità, si assume di misurare le tensioni V_1 e V_2 in modo concorde al verso antiorario di orientamento della maglia. È possibile scrivere la legge di Kichhoff delle tensioni

$$V_1 + V_2 - E_0 = - \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (8.6)$$

dal momento che $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}_N dS = 0$ in quanto \vec{B} è nullo. Si ricava quindi

$$V_1 + V_2 = V_0 . \quad (8.7)$$

In base alla definizione di forza elettromotrice, il generatore E_0 corrisponde ad una $V_{fem} = -E_0$, orientata in verso opposto rispetto al generatore stesso. Poiché $V_1 = R_1 I$ e $V_2 = R_2 I$, si conclude che il generatore di tensione, ovvero di forza elettromotrice, induce una corrente di maglia $I = E_0 / (R_1 + R_2)$. È altresì evidente che se la forza elettromotrice viene spenta, cioè si rimuove la pila, non si avrà alcuna corrente circolante nella maglia.

TUTTAVIA SI CONSIDERI DI RIMUOVERE LA PILA e di immergere il circuito in un campo $\vec{B}(t)$ variabile nel tempo la cui direzione sia uscente dal foglio e perpendicolare ad esso come mostrato in Fig. 8.4. Il flusso di $\vec{B}(t)$ attraverso la superficie delimitata dalla spira, di area

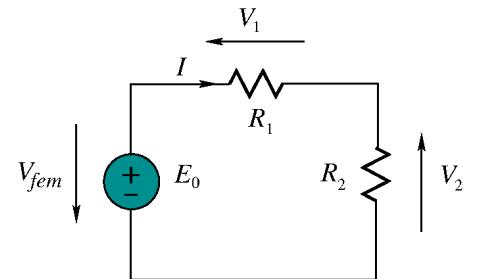


Figure 8.3:

Si noti che γ è una linea che si sviluppa lungo il circuito, percorsa per scelta in senso antiorario, che racchiude la superficie S il cui versore normale, in base alla regola della mano destra, è uscente dal piano del foglio.

S , sia $\Phi_B(t) = B(t)S$. Siccome tale flusso varia nel tempo esso induce una forza elettromotrice $V_{fem} = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$.

Si avrà

$$V_1 + V_2 = - \oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -V_{fem} = \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{n}_N dS \neq 0. \quad (8.8)$$

Nella maglia circolerà una corrente

$$I = \frac{\frac{d\Phi_B(t)}{dt}}{R_1 + R_2}. \quad (8.9)$$

Talvolta, per facilitare il calcolo, si indica sullo schema circuitale il simbolo di un generatore di tensione esternamente al circuito, come mostrato in Fig. 8.4. Tuttavia si noti che in realtà non esiste alcun generatore di tipo pila o batteria collegato al circuito ma semplicemente si è in presenza di una violazione della legge di Kirchhoff delle tensioni per cui $V_1 + V_2 \neq 0$. Si noti, inoltre, che anche se l'effetto finale della fem dovuta alla legge di Faraday-Henry è del tutto simile a quella di una pila, esistono alcune differenze. Una per tutte, mentre la pila è collegata a ben precisi terminali nella maglia, per questo è talvolta detta "fem di contatto", la fem indotta da un flusso magnetico variabile non è localizzabile lungo la maglia.

8.4 La legge di Ampere-Maxwell

LA LEGGE DI FARADAY-HENRY, discussa nel precedente paragrafo, stabilisce una relazione tra il campo magnetico ed il campo elettrico in una medesima regione dello spazio. La stretta connessione che esiste tra i campi elettrico e magnetico suggerisce che una relazione analoga debba esistere tra la rapidità di variazione di un campo elettrico ed un campo magnetico nello stesso luogo. Di fatto, la legge di Faraday-Henry, formalizzata dall'equazione 8.5, lega la circuitazione del campo elettrico alle variazioni rispetto al tempo del flusso del campo magnetico. Viene spontaneo cercare l'analogo di questa legge nella legge di Ampere 7.27 che interessa direttamente la circuitazione del campo magnetico

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS . \quad (8.10)$$

Si noti però come la 8.10 non contenga alcuna variazione rispetto al tempo del flusso del campo elettrico. Del resto questo non deve stupire dato che è stata definita in condizioni statiche. La legge di Ampere deve essere rivista per poter essere applicata a campi dipendenti dal tempo.

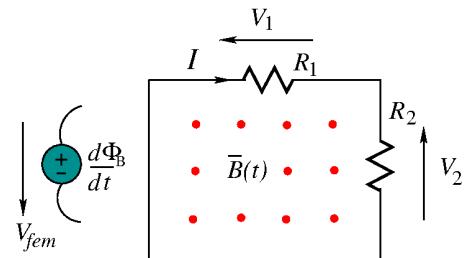


Figure 8.4:

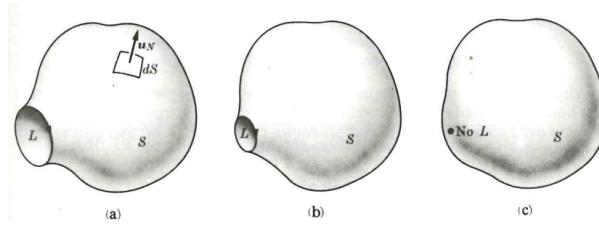


Figure 8.5:

LA LEGGE DI AMPERE nella forma 8.10 si applica alla superficie S il cui contorno è la linea L . La superficie S è arbitraria, col solo vincolo di essere delimitata dalla linea L . Se la linea L si restringe (figura 8.5), il valore di $\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l}$ diminuisce e questo valore diviene nullo quando L si riduce ad un punto e la superficie S diviene una superficie chiusa. In queste ipotesi quindi la legge di Ampére richiede quindi che

$$\oint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (8.11)$$

L'equazione 8.11 è in accordo con le leggi di conservazione della carica 1.23 dato che siamo in condizioni stazionarie.

LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL si ottiene modificando la legge di Ampere considerando il principio di conservazione della carica nella sua formulazione più generale che tiene conto dei fenomeni legati alla tempo-varianza:

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (8.12)$$

Si noti come la presenza del termine

$$\mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (8.13)$$

nella 8.12 implica il cessare della validità della legge di Kirchhoff per le correnti in regime tempovariante.

UN NECESSARIO PASSO SUCCESSIVO è costituito dalla verifica sperimentale della correttezza dell'equazione 8.12 e del fatto che questa descrive la situazione reale che si riscontra in natura. La miglior prova di questo fatto è costituita dall'esistenza delle onde elettromagnetiche, argomento questo non sarà trattato in questa dispensa. Il ricercatore che per primo suggerì la legge di Ampére nella maniera suddetta è stato il fisico inglese James Clerk Maxwell verso la fine del secolo scorso e pertanto l'equazione 8.12 è chiamata legge di Ampére-Maxwell. La modifica dovuta a Maxwell fu originata più dal

Si ricordi che si sono assunte fisse tutte le entità geometriche considerate.

bisogno di dare una coerenza matematica alla teoria che da fatti sperimentali. Infatti gli esperimenti che confermarono le idee di Maxwell furono eseguiti solo dopo alcuni anni.

LA LEGGE DI AMPÉRE pone in relazione una corrente stazionaria con il campo magnetico. La legge di Ampére-Maxwell si spinge oltre e mostra che anche un campo elettrico dipendente dal tempo contribuisce al campo magnetico. Per esempio, in assenza di correnti, abbiamo dall'equazione 8.12

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N dS , \quad (8.14)$$

che mostra più chiaramente la relazione tra un campo elettrico dipendente dal tempo ed il campo magnetico associato. In altre parole,

un campo elettrico dipendente dal tempo comporta l'esistenza, nel medesimo luogo, di un campo magnetico.

La circuitazione del campo magnetico è chiamata *forza magnetomotrice* applicata alla linea chiusa L ed è indicata con Λ_B . Il flusso elettrico attraverso la superficie S limitata dalla linea L è indicato con $\Phi_S(\bar{E})$. Allora l'equazione 8.14 può essere scritta nella forma

$$\Lambda_B = \mu_0 \epsilon_0 \Phi_S(\bar{E}) . \quad (8.15)$$

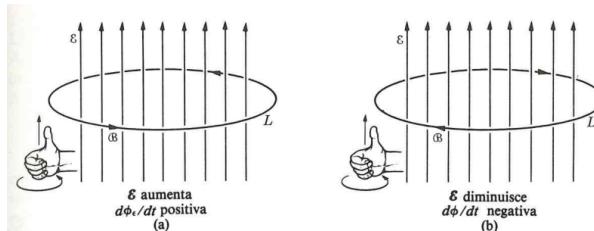


Figure 8.6:

L'ORIENTAMENTO RELATIVO DEI CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO è mostrato nella figura 8.6 in corrispondenza ad un campo elettrico uniforme dipendente dal tempo. Se il campo elettrico aumenta (o diminuisce) l'orientamento delle linee di forza del campo magnetico è il medesimo (od opposto) del senso di rotazione di una vite destra che avanza nella direzione del campo elettrico. Si lascia allo studente il compito di confrontare questo risultato con la figura 8.5. La legge di Ampére-Maxwell, nella forma data dall'equazione 8.12, differisce per molti aspetti dalla legge di Faraday-Henry nella forma 8.5. In primo luogo nell'equazione 8.12 abbiamo un termine corrispondente

ad una corrente elettrica, mentre nell'equazione 8.5 non esiste un termine corrispondente ad una corrente magnetica. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che non esistono in natura poli magnetici liberi. In secondo luogo, la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico compare con il segno positivo nell'equazione 8.12, mentre il flusso del campo magnetico compare con il segno negativo nell'equazione 8.5.

8.5 Equazioni di Maxwell (in forma integrale) del campo elettromagnetico

- Legge di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8)

$$\oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (8.16)$$

- Legge di Gauss per il campo magnetico (paragrafo 7.8)

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (8.17)$$

- Circuitazione per il campo elettrico (paragrafo 8.2)

$$-\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (8.18)$$

- Circuitazione per il campo magnetico (paragrafo 8.4)

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (8.19)$$

8.6 Approfondimento sull'induzione elettromagnetica

LA LEGGE DI FARADAY-HENRY o “regola del flusso” richiede di essere maneggiata con cura quando le entità geometriche considerate non sono fisse nello spazio, rispetto ad un sistema inerziale di riferimento, ma si trovano invece in movimento. La trattazione che forniamo in questo capitolo è tratta dal lavoro del Prof. Giuseppe Giuliani dell’Università di Pavia³.

Il punto di partenza di questa trattazione sono due principi primi della fisica, la forza di Lorentz (si veda il paragrafo 7.2)

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v}_q \times \bar{B}) \quad (8.20)$$

e la terza equazione di Maxwell

$$-\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{n}_N dS , \quad (8.21)$$

introdotta nei paragrafi precedenti.

Se consideriamo una carica elettrica q , il lavoro compiuto dal campo *elettromagnetico*, per unità di carica, per muoverla lungo un percorso chiuso L è pari a

$$\mathcal{E} = \oint_L (\bar{E} + \bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = - \oint_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{n}_N dS + \oint_L (\bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} , \quad (8.22)$$

espressione che è da interpretarsi come una *forza elettromotrice* dovuta all’effetto combinato del campo \bar{E} e del campo \bar{B} . Nel vuoto, poiché la carica si muoverebbe tangenzialmente alle linee di campo, si avrebbe $d\bar{l} = \bar{v}_q dt$, e quindi la forza elettromotrice si ridurrebbe a

$$\mathcal{E} = - \oint_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{n} \equiv \oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} . \quad (8.23)$$

Le cose cambiano se il moto della carica q avviene all’interno di un conduttore. Inizialmente, limitiamoci al caso di circuiti realizzati con componenti filiformi, molto sottili, eventualmente contenuti parti mobili. In questo caso, la velocità della carica può essere scritta come $\bar{v}_q = \bar{v}_d + \bar{v}_L$, dove \bar{v}_d è la velocità di drift, mentre \bar{v}_L è la velocità della porzione di circuito in movimento⁴.

Un classico esempio è riportato in figura 8.7. Il circuito è costituito da due conduttori: la “U” fissa e la barretta mobile, con velocità \bar{v}_L rispetto al sistema inerziale di riferimento. Il circuito è immerso in un campo \bar{B} . La superficie S muta nel tempo. La velocità \bar{v}_q sarà pari a \bar{v}_d nella parte fissa del circuito e pari a $\bar{v}_d + \bar{v}_L$ nella barretta. Se il

³ La trattazione originale è contenuta nei seguenti articoli:

- Giuliani, G., Marazzini, P., “Induzione elettromagnetica: un possibile percorso didattico”, La Fisica nella Scuola, XLV, 2, 2012.
- Giuliani, G., “A general law for electromagnetic induction”, EPL, 81(6), 2008.
- Giuliani, G. “Induzione elettromagnetica: fisica e flashbacks”, La Fisica nella Scuola, Quaderno 14, pg. 46 – 66, 2002.

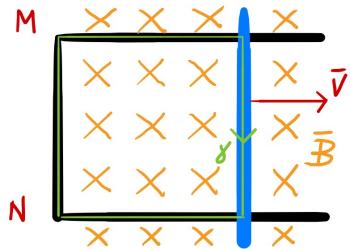


Figure 8.7: La barretta di lunghezza l si muove con velocità \bar{v}_L . Il campo \bar{B} è costante. Nel circuito si misura la presenza di una corrente elettrica I che induce un campo magnetico tale da opporsi alla variazione del flusso di \bar{B} attraverso S .

⁴ Questa composizione galileiana delle velocità è permessa dal fatto che $v_d \ll c$ e $v_L \ll c$.

campo \bar{B} è costante, allora si ottiene che

$$\mathcal{E} = \oint_L (\bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} . \quad (8.24)$$

Questa *nuova* forza elettromotrice non è prodotta da alcun campo elettrico, ma bensì dalla parte mozionale della forza di Lorentz.

COME POSSIAMO RICONDURRE LA 8.22 ALLA "REGOLA DEL FLUSSO"?

La derivata del flusso di un campo vettoriale \bar{A} attraverso una superficie $S(t)$ come in figura 8.8, in cui ogni elemento infinitesimo di linea $d\bar{l}$ lo si assume in movimento con velocità \bar{v}_L (che può variare con continuità lungo la linea) è pari a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{S(t)}(\bar{A}) &= \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \bar{A} \cdot \hat{u}_N dS \\ &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{A} - \bar{\nabla} \times (\bar{v}_L \times \bar{A}) + \bar{v}_L \bar{\nabla} \cdot \bar{A} \right) \cdot \hat{u}_N dS \end{aligned} \quad (8.25)$$

dove $\bar{\nabla}$ è l'operatore differenziale nabla $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$, il prodotto vettoriale " \times " di $\bar{\nabla}$ e un qualunque vettore ne rappresenta il rotore e il prodotto scalare " \cdot " di $\bar{\nabla}$ e un qualunque vettore ne rappresenta la divergenza.

Utilizzando il teorema di Stokes, che afferma che

$$\int_S \bar{\nabla} \times (\bar{v}_L \times \bar{A}) \cdot \hat{u}_N dS = \oint_L (\bar{v}_L \times \bar{A}) \cdot d\bar{l} , \quad (8.26)$$

è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{S(t)}(\bar{A}) &= \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \bar{A} \cdot \hat{u}_N dS \\ &= \int_{S(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{A} + \bar{v}_L \bar{\nabla} \cdot \bar{A} \right) \cdot \hat{u}_N dS - \oint_{\gamma} (\bar{v}_L \times \bar{A}) \cdot d\bar{l} . \end{aligned} \quad (8.27)$$

Tornando al nostro problema di partenza, poiché la divergenza del campo \bar{B} è sempre nulla (teorema di Gauss in forma locale per il campo \bar{B}), otteniamo

$$\frac{d}{dt} \Phi_S(\bar{B}) = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS - \oint_{\gamma} (\bar{v}_L \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} , \quad (8.28)$$

da cui è possibile scrivere

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS + \oint_{\gamma} (\bar{v}_L \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} . \quad (8.29)$$

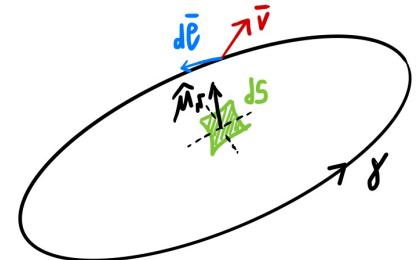


Figure 8.8: L'elemento infinitesimo di linea $d\bar{l}$ lo si assume in movimento con velocità \bar{v}_L . Scelto il versore \hat{u}_N la linea L , che è l'orlo della superficie S , viene percorsa in base alla regola della mano destra.

Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{E} = \left[-\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS - \oint_{\gamma} (\bar{v}_L \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \right] + \oint_L (\bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} , \quad (8.30)$$

in cui il termine racchiuso tra parentesi quadre svanisce se il campo \bar{B} è costante. Ricordando l'espressione della \bar{v}_q , possiamo dunque scrivere

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS + \oint_L (\bar{v}_d \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} , \quad (8.31)$$

Notando poi che in circuiti filiformi la velocità di drift è parallela all'elemento infinitesimo di circuito (oppure circuiti ad essi equivalenti) l'espressione precedente si riduce alla regola del flusso la quale predice correttamente la forza elettromotrice indotta, pur oscurandone completamente l'origine fisica. Ci piace citare cosa scrive a proposito il premio Nobel R. Feynman nelle sue "Lezioni",

Dobbiamo guardare alla "legge del flusso" in questo modo. In generale, la forza sulla carica unitaria è $\bar{F}/q = \bar{E} + \bar{v}_q \times \bar{B}$. In fili in moto c'è una forza derivante dal secondo termine. Inoltre, c'è un campo elettrico se, da qualche parte, c'è un campo magnetico che varia. Sono due effetti indipendenti.

Nell'esempio in figura 8.8, assumendo che per $t = t_0$ la barretta coincida con in lato MN , si ottiene $S = lv_L(t - t_0)$. Il flusso del campo \bar{B} ha derivata rispetto al tempo positiva, dato che $\Phi_B = lv_L(t - t_0)\hat{u}_N \cdot \bar{B} = lv_L B(t - t_0)$. Risulta $\mathcal{E} = lv_L B$.

COSA ACCADREBBE SE INVECE DI USARE LA "REGOLA DEL FLUSSO" decidessimo di usare la 8.22? Come prima cosa il primo termine a destra del segno di uguaglianza sarebbe nullo, essendo \bar{B} costante. Poi, dovremmo notare che l'integrale di linea darebbe un risultato non nullo solo lungo la barretta e possiamo facilmente verificare che troveremmo coerentemente $\mathcal{E} = lv_L B$. Utilizzare la 8.22 fornisce lo stesso risultato numerico ma ci permette di affermare che la forza elettromotrice, in questo caso, non è distribuita lungo tutto il circuito ma si trova localizzata ai capi della barretta in movimento.

SI CONSIDERI ADESSO IL CASO IN figura 8.9. Il circuito esterno è in contatto, nei punti D e C , con un disco conduttore, rotante alla velocità angolare uniforme ω , immerso in un campo \bar{B} costante. Nel complesso, non è possibile identificare un circuito chiuso nel quale fluisce la corrente i , che risulterebbe sperimentalmente misurata da un amperometro posto in serie al circuito esterno. Proviamo a considerare la linea chiusa costituita dal circuito esterno e dal segmento DC . Se applicassimo la regola del flusso, poiché il campo \bar{B} non varia nel tempo e la superficie, che ha come bordo la linea chiusa

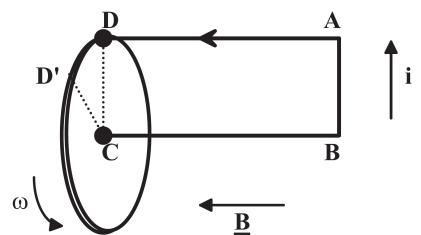


Figure 8.9: Disco di Faraday. Un disco metallico ruota intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω in un campo magnetico \bar{B} uniforme, perpendicolare al piano del disco; la freccia sul telaio indica il senso di percorrenza della linea chiusa scelta per il calcolo della forza elettromotrice.

scelta, è fissa, la forza elettromotrice indotta sarebbe nulla e quindi dovrebbe esserlo anche la corrente. Ciò tuttavia non è coerente con l'osservazione sperimentale. Usiamo dunque la formulazione 8.22, in cui il termine che dipende dalla derivata rispetto al tempo di \bar{B} sarà nullo. Tuttavia il termine che esprime la forza di Lorentz, anche trascurando la velocità di drift, sarà non nullo lungo il segmento DC in cui $v_q(r) = \omega(R - r)$, con r la distanza dal bordo del disco al centro del disco. In particolare

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint_L (\bar{E} + \bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \oint_L (\bar{v}_q \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \\ &= \int_0^R \omega B(R - r) dr = \frac{1}{2} \omega B R^2.\end{aligned}\quad (8.32)$$

Nel circuito $ABCD$ circola quindi una corrente (radiale nel disco) diretta nello stesso senso lungo il quale è stata calcolata la forza elettromotrice. Lo stesso risultato si otterrebbe utilizzando come percorso chiuso la linea $ABCC'A$. Tale percorso ci permetterebbe anche di utilizzare la regola del flusso, considerando il raggio CC' in movimento, al fine poter considerare un'area crescente, data da $\frac{1}{2}\omega t R$, attraverso la quale calcolare il flusso del campo \bar{B} . Si deve dunque operare una scelta *ad hoc* per poter applicare la regola del flusso, mentre ciò non è necessario con il principio generale formulato mediante la 8.22.

SI RIMANDA IL LETTORE INTERESSATO ai lavori del Prof. Giuliani citati all'inizio del paragrafo, per una trattazione approfondita di quei casi in cui la velocità di drift fornisce un contributo significativo. In particolare, egli potrà apprendere come, nel caso stesso del disco di Faraday, il prodotto della forza elettromotrice indotta non sia solo la corrente *radiale* di cui sopra, ma anche una corrente *circolare* dovuta alla velocità di drift della corrente radiale stessa.

9

IN QUESTO CAPITOLO, partendo dalle nozioni elementari di elettrostatica ed elettromagnetismo introdotte nei capitoli 1, 7, e 8, si definiscono il condensatore lineare e l'induttore lineare, due bipoli dinamici, tempo-invarianti, di fondamentale importanza.

9.1 La capacità elettrica - il condensatore

SI CONSIDERI LA SFERA di raggio R rappresentata in figura 9.1 e si assuma la presenza di una carica Q , uniformemente distribuita sulla sua superficie. Utilizzando il teorema di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8) e ragionando sulla simmetria centrale (rispetto al centro C della sfera) della geometria, si ricava facilmente che il campo elettrico generato dalla carica Q è diretto radialmente rispetto a C ed ha intensità (per $r \geq R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} . \quad (9.1)$$

Il campo elettrico \vec{E} , essendo in regime stazionario, ammette un potenziale $V(r)$ che, se la sfera è immersa in un dielettrico di permittività relativa ϵ_r , sulla sua superficie è pari a

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{R} , \quad (9.2)$$

da cui si nota come il rapporto $Q/V(R)$ è una quantità costante, indipendente dalla carica Q . Questo è comprensibile poiché, se il potenziale è proporzionale alla carica che lo produce, il rapporto dei due deve essere una costante. Questa ultima affermazione è valida per qualsiasi conduttore carico di qualsiasi forma geometrica. Di conseguenza, la **capacità elettrica** C di un conduttore isolato è definita come il rapporto fra la sua carica Q e il suo potenziale V .

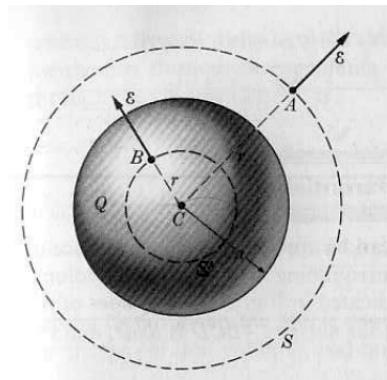


Figure 9.1: Una sfera di raggio R la cui superficie sia uniformemente carica genera un campo radiale rispetto a centro C della sfera stessa.

L'equazione $Q = CV$ mostra quanta carica viene immagazzinata su un conduttore per un assegnato valore del potenziale.

LA CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE SFERICO è $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R$. Se la sfera è circondata dal vuoto, invece che da un dielettrico, la sua capacità è $C_0 = 4\pi\epsilon_0 R$. Dunque il circondare una sfera, e in generale un conduttore qualsiasi, con un dielettrico aumenta la sua capacità elettrica di un fattore ϵ_r . Ciò è dovuto all'effetto schermante delle cariche di segno opposto che sono state indotte sulla superficie del dielettrico adiacente al conduttore. Queste cariche riducono la carica efficace del conduttore e diminuiscono il potenziale del conduttore secondo lo stesso fattore (in altre parole, a parità di carica Q il potenziale V risulta essere inferiore).

La capacità di un conduttore è espressa in CV^{-1} , un'unità chiamata farad (F) in onore di Michael Faraday. Il farad è definito come la capacità di un conduttore isolato il cui potenziale elettrico, avendo esso ricevuto la carica di 1C, vale un 1V.

IL CONCETTO DI CAPACITÀ ELETTRICA può essere esteso a un sistema di conduttori. Consideriamo il caso di due conduttori aventi cariche Q^+ e Q^- (figura 9.2). Se V_1 e V_2 sono i rispettivi potenziali, sicché $V = V_1 - V_2$ è la loro differenza di potenziale, la capacità del sistema è definita come

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} . \quad (9.3)$$

Questa disposizione costituisce ciò che si chiama un condensatore.

I CONDENSATORI HANNO AMPIA APPLICAZIONE nei circuiti elettrici ed elettronici. Un tipico condensatore è formato da due conduttori piani (armature) paralleli di superficie S separati da una distanza d , con lo spazio fra l'uno e l'altro riempito da un dielettrico di permittività relativa ϵ_r (figura 9.3).

9.2 Il condensatore in regime stazionario

Si collega il condensatore in Fig. 9.3 ad una sorgente di tensione **V costante** (es. una pila) come mostrato in Fig. 9.4. La pila, al suo interno, opera separando cariche positive da quelle negative. Dette cariche, muovendosi lungo i fili conduttori, si accumulano sulle due facce opposte del condensatore generando un campo elettrico. La generazione e accumulo di carica si arresta quando la tensione sul condensatore egualia la forza elettromotrice della sorgente, cioè quando $v_{AB} = V$. In questa condizione, si raggiunge un regime

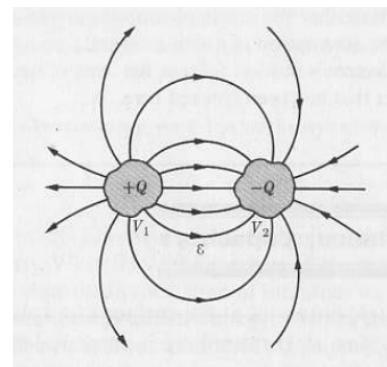


Figure 9.2: Un sistema di due conduttori aventi cariche Q^+ e Q^- .

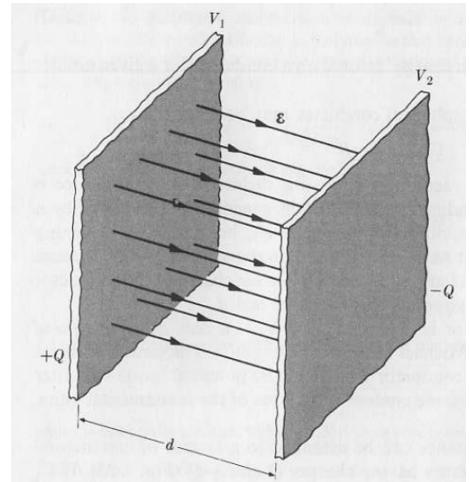


Figure 9.3: Il condensatore a facce piane e parallele.

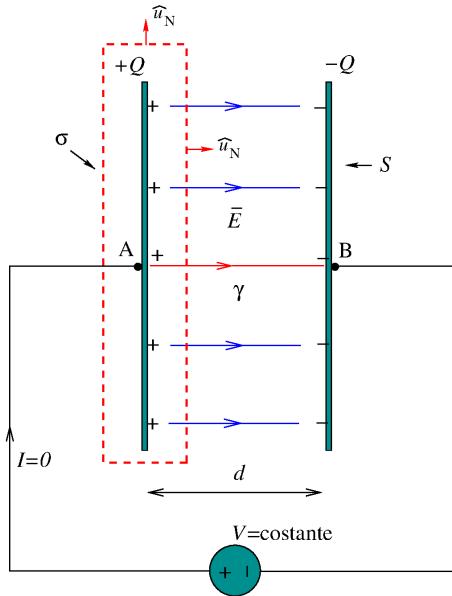


Figure 9.4: Sezione del condensatore (faccie piane e parallele) collegato ad una sorgente di tensione costante nel tempo.

stazionario in cui la carica Q e il campo \bar{E} sono costanti nel tempo. Inoltre, poiché Q non varia, non si ha alcun transito di carica nei fili conduttori esterni dove $I = 0$. È dunque corretto affermare che in regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto dato che non vi può essere circolazione continua di carica (cioè corrente di conduzione) attraverso il materiale isolante del dielettrico. Nell'ipotesi che le armature siano molto estese rispetto alla loro distanza d , si crea una particolare situazione di simmetria che consente di semplificare l'analisi. In questa ipotesi e trascurando gli effetti di bordo, si ha infatti che il campo \bar{E} è non nullo solo all'interno delle armature, dove è costante spazialmente e orientato perpendicolarmente alle armature. È dunque immediato legare la quantità specifica campo elettrico alle grandezze integrali tensione e carica elettrica. Dalla definizione di tensione, si deriva:

$$-\int_{\gamma_{AB}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = v_{BA} \approx -Ed, \quad (9.4)$$

dove $E = |\bar{E}|$ e γ_{AB} è il segmento interno alle armature orientato dal punto A al punto B . Mentre, dalla legge di Gauss applicata alla superficie chiusa σ che avvolge l'armatura con $+Q$, si ha:

$$\frac{Q}{\epsilon} = \oint_{\sigma} \bar{E} \cdot \hat{u}_N d\sigma \approx ES, \quad (9.5)$$

dove $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ è la costante dielettrica assoluta ed S è la misura, cioè l'area, di una faccia dell'armatura (si noti infatti che solo sulla porzione di σ che è proiezione dell'armatura il campo è diverso da zero). Infine, ricavando E dalla (9.4) e sostituendo nella (9.5), si con-

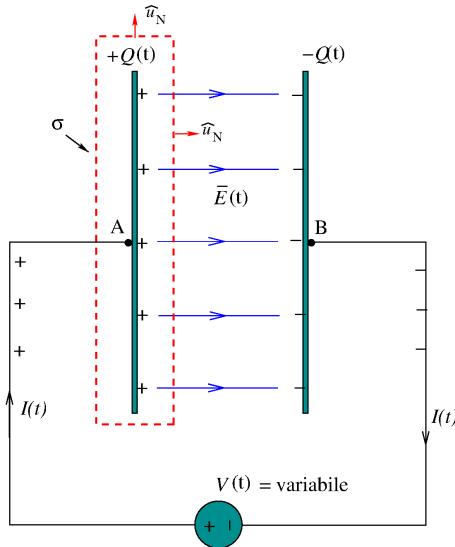


Figure 9.5: Condensatore (faccie piane e parallele) collegato ad una sorgente di tensione che varia nel tempo.

clude che:

$$Q = \frac{\epsilon S}{d} (-v_{BA}) = \frac{\epsilon S}{d} V = CV, \quad (9.6)$$

ovvero che la capacità del condensatore vale

$$C = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (9.7)$$

9.3 Il condensatore in condizioni tempo varianti

Si consideri ora il caso in cui il generatore collegato al condensatore sia variabile nel tempo e imprima una tensione $V(t)$, come mostrato in Fig. 9.5. Se in un intervallo di tempo Δt , la tensione subisce una variazione ΔV , dalla (9.6) si deduce che la carica accumulata sull'armatura avrà una variazione $\Delta Q = C \Delta V$. Tale variazione di carica comporta un transito di carica ΔQ nei conduttori esterni e quindi una corrente elettrica (media nell'intervallo Δt)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (9.8)$$

Ragionando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, si ricava l'espressione della corrente istantanea

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}. \quad (9.9)$$

È istruttivo osservare come la (9.9) riscritta in forma implicita

$$-I + \frac{dQ}{dt} = 0, \quad (9.10)$$

corrisponda all'applicazione del principio di conservazione della carica al volume racchiuso internamente alla superficie σ orientata

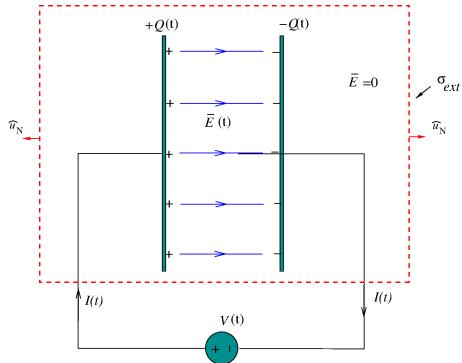


Figure 9.6: Condensatore (faccie piane e parallele) collegato ad una sorgente di tensione che varia nel tempo.

con senso di attraversamento positivo dall'interno verso l'esterno.

Tale principio afferma che

$$\oint_{\sigma} \bar{J} \cdot \hat{u}_N d\sigma + \frac{d}{dt} \oint_{\sigma} \epsilon \bar{E} \cdot \hat{u}_N d\sigma = 0, \quad (9.11)$$

dove è facile riconoscere in Fig. 9.5 che $\oint_{\sigma} \bar{J} \cdot \hat{u}_N d\sigma = -I$ (I infatti entra in σ), mentre $\oint_{\sigma} \epsilon \bar{E} \cdot \hat{u}_N d\sigma = Q$ è una riscrittura della legge di Gauss. È altrettanto importante notare come la legge di Kirchhoff delle correnti, che impone il bilancio delle correnti di conduzione attraverso una superficie chiusa, non valga per la superficie σ che "attraversa internamente" la struttura fisica del condensatore. Per tale superficie vale una legge delle correnti generalizzata che include nel bilancio il termine

$$\frac{d}{dt} \oint_{\sigma} \epsilon \bar{E} \cdot \hat{u}_N d\sigma. \quad (9.12)$$

Il termine (9.12) tiene conto dell'accumulo di carica e viene indicato col nome di *corrente di spostamento*, mentre il campo vettoriale $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ che compare nell'integrale è indicato col nome di *spostamento elettrico*. Poiché il campo variabile \bar{E} (e quindi \bar{D}) è confinato all'interno del dispositivo condensatore, per ogni superficie esterna σ_{ext} al condensatore (ad esempio quella riportata in figura 9.6) la corrente di spostamento è nulla e dunque, esternamente al condensatore, continuerà a valere la legge di Kirchhoff (per sole correnti di conduzione)

$$\oint_{\sigma_{ext}} \bar{J} \cdot \hat{u}_N d\sigma_{ext} = 0. \quad (9.13)$$

Queste considerazioni ci permettono di includere nel modello circolante il dispositivo condensatore attraverso un nuovo elemento di tipo bipolo (tale bipolo confina al suo interno le correnti di spostamento/accumulo di carica), denominato condensatore lineare, il cui legame costitutivo è dato dalla (9.9).

Il simbolo che rappresenta il bipolo condensatore lineare è riportato in figura 9.7. L'equazione costitutiva del condensatore 9.9 conferma che se V è costante (regime costante) questo componente si

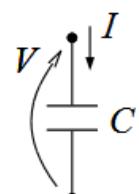


Figure 9.7: Il simbolo del bipolo condensatore lineare. $I = C \frac{dV}{dt}$.

comporta come un circuito aperto. Integrando l'equazione su di un intervallo di tempo $[t_0, t]$, è possibile derivare che

$$V(t) = V(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau . \quad (9.14)$$

La forma integrale mette in luce come la tensione $V(t)$ ai capi del condensatore in un istante finale $t > t_0$ dipende dalla corrente $I(\tau)$ su tutto l'intervallo (t_0, t) e dalla tensione $V(t_0) = V_0$, che fornisce la carica accumulata dal condensatore all'istante iniziale t_0 . Conoscere la tensione V_0 non ci dice come si sia arrivati a caricare il condensatore (in quanto tempo, con che velocità, etc.) ci dice solo lo **stato** del componente all'istante t_0 . In qualche modo possiamo pensare che V_0 racchiuda la "storia" del condensatore che si è svolta, per $t < t_0$, con una dinamica non ricostruibile.

In termini energetici, la tensione descrittiva V gioca un ruolo significativo per il condensatore. La *potenza istantanea assorbita* dal condensatore è infatti pari a

$$p_a(t) = V(t)I(t) = CV(t)\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{CV^2(t)}{2} \right) = \frac{dw_a^E}{dt} , \quad (9.15)$$

dove $w_a^E(t) = \frac{1}{2}CV^2(t)$ è l'**energia elettrica** immagazzinata dal bipolo. Si noti come la variazione dell'energia tra due istanti di tempo t_1 e $t_2 > t_1$, non dipende dall'andamento di $V(t)$ tra t_1 e t_2 ma solo da $V(t_1)$ e $V(t_2)$. La tensione $V(t)$ è la **variabile di stato** del condensatore e conoscerne il valore permette di conoscerne l'energia immagazzinata.

Il condensatore è un componente *conservativo*: è in grado di immagazzinare energia e poi di erogarla. È quindi un componente attivo nel senso che la sua potenza istantanea assorbita può essere negativa ma dal punto di vista energetico è passivo nel senso che non è in grado di erogare più potenza di quella che ha immagazzinato.

9.4 L'autoinduzione - l'induttore

CONSIDERIAMO UNA SPIRA DI CORRENTE (che interpretiamo come un generico circuito elementare) nella quale fluisce una corrente costante I (figura 9.7). Secondo la legge di Ampère-Laplace (equazione 7.13) la corrente I produce un campo magnetico \vec{B} che, in ogni punto, è proporzionale ad I stessa.

Possiamo calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il circuito dovuto al campo generato dal circuito stesso, flusso Φ_B che

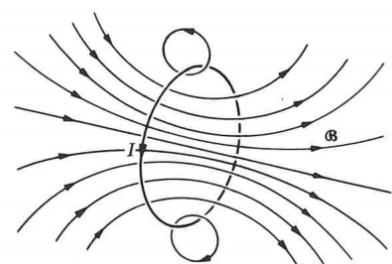


Figure 9.8: Una spira nella quale fluisce una corrente I e le linee di forza del campo magnetico che essa produce.

chiameremo **flusso auto-concatenato**. Questo flusso, è quindi proporzionale alla corrente I e possiamo scrivere

$$\Phi_B = LI . \quad (9.16)$$

Il coefficiente L dipende dalla forma del conduttore ed è chiamato **autoinduttanza** del circuito. Il coefficiente è espresso in WbA^{-1} , unità chiamata henry, in omaggio a Joseph Henry e abbreviata con H.

È possibile convincersi piuttosto facilmente del fatto che l'induttanza L di una spira come quella in figura 9.8 è una grandezza positiva. Il campo \bar{B} indotto dalla corrente I lo si può infatti scrivere sfruttando la legge di Ampère-Laplace (equazione 7.13) e quindi la 9.16 diventa

$$\begin{aligned} \Phi_B(I) &= \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = \\ &= \int_S \left[\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} dl \right] \cdot \hat{u}_N dS = \\ &= \underbrace{\int_S \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} dl \right] \cdot \hat{u}_N dS}_{L} I = \\ &= LI . \end{aligned} \quad (9.17)$$

Si noti come nella 9.17, poiché la linea che è bordo di S (e quindi il versore \hat{u}_T) e il versore \hat{u}_N sono orientati in base alla regola della mano destra, il prodotto vettoriale $\hat{u}_T \times \hat{u}_r$ risulta essere orientato come \hat{u}_N (si tenga conto che \hat{u}_r punta all'interno della spira dato che il flusso è calcolato attraverso S). Per questo motivo, l'autoinduttanza $L = \int_S \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} dl \right] \cdot \hat{u}_N dS$, che dipende solo dalla geometria della spira, è sempre positiva.

SUPPONIAMO ADESSO CHE la corrente elettrica I non sia costante. Quando la corrente I cambia nel tempo, il flusso del campo magnetico attraverso la spira cambia e, secondo la legge dell'induzione elettromagnetica, nel circuito viene indotta una fem. Questo caso speciale di induzione elettromagnetica è chiamato **autoinduzione**. Combinando le equazioni 8.3 e 9.16 abbiamo che, nell'ipotesi di orientare \hat{u}_N come il campo \bar{B} indotto da I , la fem vale

$$V_{fem} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt} . \quad (9.18)$$

9.5 L'induttore in regime stazionario

La figura 9.9 mostra un esempio di induttore collegato ad una sorgente che eroga una corrente I costante nel tempo. Il dispositivo induttore è formato da un supporto di materiale cilindrico di

lunghezza l (per esempio una lega di ferro con elevata permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$) su cui è avvolto un filo conduttore di rame – si assume che la resistività del filo sia zero. Nell’ipotesi che il numero N di spire sia grande (≥ 1000) e che le spire siano avvolte in modo serrato, il campo \bar{B} risulta in pratica confinato, cioè non nullo, all’interno dell’avvolgimento. Inoltre, trascurando gli effetti di bordo, tale campo è spazialmente costante e orientato lungo l’asse del cilindro. È dunque semplice calcolare il valore del modulo B applicando la legge di Ampère. A tal fine, si consideri la linea chiusa γ mostrata in figura 9.9 che concatena le N spire, si ha

$$\mu NI = \oint_{\gamma} \bar{B} \cdot d\bar{l} \approx Bl . \quad (9.19)$$

Da cui si ricava,

$$B = \frac{\mu N}{l} I \quad (9.20)$$

Il Lettore attento ricorderà come nel caso del condensatore, trattato precedentemente, dal valore del campo \bar{E} si passasse a quello della grandezza integrale carica Q calcolandone il flusso. Ripetendo tale procedimento per l’induttore, è possibile derivare la grandezza integrale flusso del campo \bar{B} attraverso superficie orientata σ delimitata dalla singola spira

$$\Psi_B = \int_{\sigma} \bar{B} \cdot \hat{n}_N d\sigma \approx BS, \quad (9.21)$$

dove S è l’area della spira cioè della sezione del cilindro. È infine possibile derivare il valore del flusso totale concatenato con l’induttore moltiplicando per il numero di spire,

$$\Phi_B = N\Psi_B = \frac{\mu N^2 S}{l} I \quad (9.22)$$

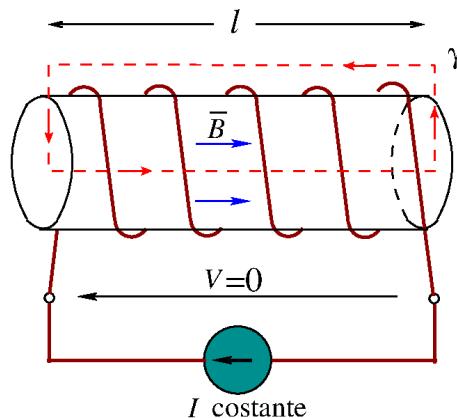


Figure 9.9: Schematizzazione di un induttore, ottenuto mediante un solenoide con N spire, collegato ad una sorgente di corrente costante nel tempo.

Il coefficiente $L = \frac{\mu N^2 S}{l}$ che lega la corrente al flusso è l'induttanza dell'avvolgimento. Se la corrente I è costante nel tempo, anche Φ_B lo è ed in accordo alla legge di Farady-Henry non si ha alcuna fem indotta lungo i fili dell'avvolgimento – vale dunque la legge di Kirchhoff delle tensioni anche all'interno dell'induttore. Nell'ipotesi che la resistenza del filo dell'avvolgimento sia nulla $R = 0$, la tensione misurata ai capi dell'induttore è $V = -V_{fem} = 0$. In regime stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito.

9.6 L'induttore in condizioni tempo varianti

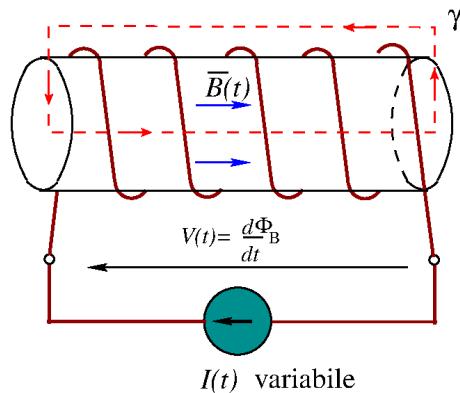


Figure 9.10: Induttore collegato ad una sorgente di corrente che varia nel tempo.

Si passa ora ad analizzare l'induttore collegato ad una sorgente di corrente $I(t)$ che varia nel tempo, come mostrato in figura 9.10. In questo caso, anche il flusso magnetico varia, $\Phi_B(t) = L I(t)$, ed in base alla legge di Faraday-Henry si induce una fem $V_{fem} = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$ delocalizzata lungo i fili dell'avvolgimento. Tale fem viene misurata ai morsetti esterni dell'induttore in una tensione

$$V(t) = \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (9.23)$$

Per capacitarsi del segno + che compare nell'equazione (9.23), proponiamo l'esercizio di analizzare il circuito composto da una singola spira di materiale conduttore ideale mostrato in figura 9.11. La corrente I produce all'interno della spira un campo \bar{B} perpendicolare al foglio ed ivi entrante. Con la regola della mano destra, orientiamo la spira in senso orario scegliendo \hat{u}_N orientato come \bar{B} . Facendo riferimento alla linea chiusa composta $\gamma = \gamma_{ext} \cup \gamma_{int}$, possiamo scrivere

La legge di Faray-Henry risulta:

$$-\int_{\gamma_{ext}} \bar{E} \cdot d\bar{l}_{ext} - \int_{\gamma_{int}} \bar{E} \cdot d\bar{l}_{int} = \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \bar{B} \cdot \hat{u}_N d\sigma, \quad (9.24)$$

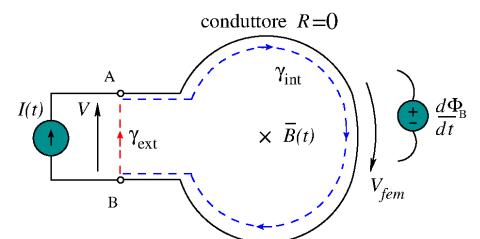


Figure 9.11: Induttore composto da una singola spira.

dove σ è la superficie che ha come bordo la spira. Poiché il campo \bar{E} nel conduttore ideale è nullo, il secondo integrale in (9.24) $\int_{\gamma_{int}} \bar{E} \cdot d\bar{l}_{int} = 0$, mentre il primo fornisce la tensione ai morsetti,

$$-\int_{\gamma_{ext}} \bar{E} \cdot d\bar{l}_{ext} = v_{AB} = V, \quad (9.25)$$

confermando la (9.23). In presenza di una corrente variabile nel tempo, ai morsetti esterni del dispositivo induttore si misura una tensione $V(t)$ non nulla. Tale tensione corrisponde ad una violazione della legge di Kirchhoff delle tensioni dovuta alla presenza di un flusso magnetico variabile, in accordo con la legge di Faraday-Henry. Tuttavia, tale flusso è confinato all'interno dell'induttore e quindi la legge di Kirchhoff delle tensioni continuerà a valere all'esterno dell'induttore. Questo ci permette di includere il dispositivo induttore nel modello circuitale attraverso un nuovo bipolo (che confina al suo interno il flusso magnetico), denominato induttore lineare, il cui legame costitutivo è dato dalla (9.23).

Il simbolo che rappresenta l'induttore lineare è riportato in figura 9.12.

Dall'equazione costitutiva dell'induttore 9.23, oltre a notare che in regime stazionario questo componente si comporta come un cortocircuito, è possibile derivare

$$I(t) = I(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau, \quad (9.26)$$

da cui si evince che la corrente $I(t)$ che fluisce nell'induttore per $t > t_0$ dipende dalla tensione $V(t)$ ma anche dalla corrente $I(t_0) = I_0$, che fornisce il flusso magnetico accumulato dall'induttore all'istante t_0 . La corrente I gioca lo stesso ruolo della tensione V per il condensatore ed è la **variabile di stato** dell'induttore.

In termini energetici, la corrente descrittiva I , a partire dalla *potenza istantanea assorbita* dall'induttore

$$p_a(t) = V(t)I(t) = LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2(t)}{2} \right) = \frac{dw_a^M}{dt}, \quad (9.27)$$

permette di ricavare $w_a^M(t) = \frac{1}{2}LI^2(t)$ cioè l'**energia magnetica** immagazzinata dal bipolo. Si noti come la variazione dell'energia tra due istanti di tempo t_1 e $t_2 > t_1$, non dipende dall'andamento di $I(t)$ tra t_1 e t_2 ma solo da $I(t_1)$ e $I(t_2)$.

L'induttore, come il condensatore, è un componente *conservativo*: è in grado di immagazzinare energia e poi di erogarla. È quindi un componente attivo nel senso che la sua potenza istantanea assorbita può essere negativa ma dal punto di vista energetico è passivo nel

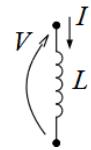


Figure 9.12: Il simbolo dell'induttore lineare tempo-invariante. $V = L \frac{dI}{dt}$

senso che non è in grado di erogare più potenza di quella che ha immagazzinato.

10

10.1 Circuito RC del primo ordine non degenero

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 10.1 in cui è stato evidenziato un bipolo composito \mathcal{N}_R che al suo interno è costituito da multi-terminali lineari, adinamici e tempo-invarianti e da generatori indipendenti di tensione e/o corrente. Si ipotizza che \mathcal{N}_R possa essere rappresentato con un modello equivalente di Norton, di cui $A_{eq}(t)$ e R_{eq} sono, rispettivamente, il generatore indipendente di corrente e il resistore lineare, e che quindi il circuito in esame diventi quello in figura 10.2. La scelta dell'equivalente Norton non è casuale: poiché il condensatore è un elemento non controllabile in tensione, è necessario lo sia il bipolo composito \mathcal{N}_R a cui è collegato.

Possiamo scrivere l'equazione che governa la dinamica del circuito sfruttando il bilancio di corrente (KCL) al nodo A, l'unico nodo significativo del circuito stesso

$$A_{eq}(t) + \frac{v_C(t)}{R_{eq}} + i_C(t) = A_{eq}(t) + \frac{v_C(t)}{R_{eq}} + \underbrace{C \frac{d}{dt} v_C(t)}_{i_C(t)} = 0 , \quad (10.1)$$

che può essere riscritta in *forma canonica* come

$$\frac{d}{dt} v_C(t) = -\frac{1}{R_{eq}C} v_C(t) - \frac{A_{eq}(t)}{C} = \lambda v_C(t) + u(t) . \quad (10.2)$$

DAL MOMENTO CHE l'equazione 10.2 coinvolge la variabile di stato $v_C(t)$ del condensatore come unica *funzione incognita*, tale equazione prende il nome di **equazione di stato**.

Si tratta di un'*equazione differenziale ordinaria lineare* che ha come soluzione non un valore numerico dell'incognita ma una funzione della variabile indipendente t . La soluzione della 10.2, infatti, è una qualunque funzione la cui derivata rispetto a t sia la somma di un

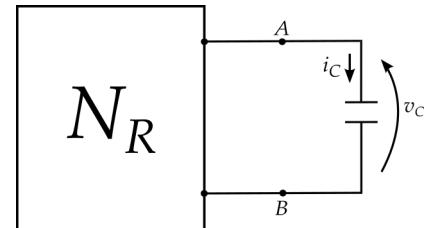


Figure 10.1: Un generico circuito dinamico elementare ottenuto collegando un condensatore lineare ad un bipolo composito, adinamico, che ammette modello equivalente di Norton.

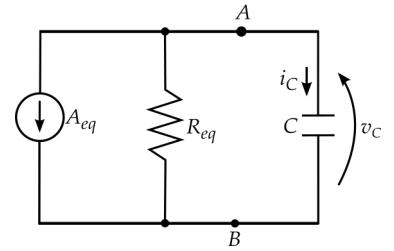


Figure 10.2: Circuito equivalente a quello di figura 10.1.

contributo proporzionale alla funzione stessa e di una funzione nota $u(t)$ che dipende dal problema.

NON È SCOPO DI QUESTO CORSO discutere i teoremi e le tecniche di soluzione inerenti le equazioni differenziali ordinarie lineari e ci limiteremo pertanto ad esporre i concetti indispensabili per la soluzione dei circuiti di nostro interesse, lasciando ai corsi di analisi matematica l'approfondimento di questi argomenti.

TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE come la 10.2,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) + u(t) , \quad (10.3)$$

si ottengono, in generale, come somma di due contributi: una famiglia di funzioni $x_{OA}(t; k, t_0)$, funzioni del tempo e parametrizzate dai due parametri k e t_0 , che risolvono l'equazione *omogenea associata*

$$\frac{d}{dt}x_{OA}(t; k, t_0) = \lambda x_{OA}(t; k, t_0) , \quad (10.4)$$

e una ulteriore funzione $x_{IP}(t)$, chiamata *integrale particolare*, che risolve la 10.3.

Si dimostra per sostituzione che la famiglia di funzioni $x_{OA}(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)}$ risolve la 10.4, infatti

$$\frac{d}{dt}\left(ke^{\lambda(t-t_0)}\right) = \lambda\left(ke^{\lambda(t-t_0)}\right) . \quad (10.5)$$

La soluzione dell'equazione completa 10.3 sarà dunque del tipo

$$x(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)} + x_{IP}(t) . \quad (10.6)$$

LA DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE $x_{IP}(t)$ è in generale più complessa ed esistono tavole di integrali particolari che corrispondono a diversi termini noti $u(t)$. Per i nostri scopi è sufficiente avere presenti le seguenti corrispondenze

$$\begin{array}{ccc} u(t) & \rightarrow & x_{IP}(t) \\ \alpha e^{\beta(t-\bar{t})} & \rightarrow & \gamma e^{\beta(t-\bar{t})} \\ \sum_{k=0}^N \alpha_k (t-\bar{t})^k & \rightarrow & \sum_{k=0}^N \gamma_k (t-\bar{t})^k \\ \alpha \cos(\omega t + \varphi) & \rightarrow & \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t) \end{array} . \quad (10.7)$$

A titolo di esempio, si scelga $u(t) = U$ nella 10.3. In base alla tabella si tratta di ingresso di tipo polinomiale con $N = 0$ e quindi l'integrale particolare sarà una costante γ_0 che sostituita nella 10.3 la risolva. Si ottiene per sostituzione

$$\frac{d}{dt}\gamma_0 = 0 = \lambda\gamma_0 + U , \quad (10.8)$$

da cui si deriva che $x_{IP}(t) = \gamma_0 = -\frac{U}{\lambda}$.

NEL SEGUITO AVREMO MODO di verificare altre corrispondenze della tabella fornita ma torniamo adesso alla nostra equazione di stato 10.2 ipotizzando $-R_{eq}A_{eq}(t) = E_{eq}$. La sua soluzione sarà la famiglia di funzioni

$$v_C(t; k, t_0) = ke^{-\frac{t-t_0}{R_{eq}C}} + E_{eq} . \quad (10.9)$$

Si verifica infatti facilmente che in questo caso l'integrale particolare è la costante E_{eq} , ovvero la tensione a vuoto dell'equivalente Norton.

LA COSTANTE $\lambda = -\frac{1}{R_{eq}C}$ si chiama **frequenza libera o pulsazione naturale** della rete. Le sue dimensioni fisiche sono s^{-1} e quindi la costante $\tau = |\frac{1}{\lambda}| = R_{eq}C$ prende il nome di **costante di tempo**. λ non dipende da $A_{eq}(t)$, ovvero è una *caratteristica della rete passivata*. Per calcolarla, quindi, in alternativa al derivarla dall'equazione di stato, si può procedere passivando i generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo composito \mathcal{N}_R , il cui modello equivalente di Norton si riduce così alla sola resistenza R_{eq} .

SI NOTI CHE SE λ è negativa il termine legato alla soluzione dell'omogenea associata tende a zero per t che tende all'infinito e la soluzione dell'equazione di stato tende al solo integrale particolare. Nell'esempio specifico, in cui $A_{eq}(t) = -\frac{E_{eq}}{R_{eq}}$, la soluzione di regime è di tipo stazionario e quindi il condensatore si comporta a regime come un circuito aperto. Infatti, poiché in regime stazionario le derivate rispetto al tempo sono nulle per definizione, la corrente $i_C(t)$, a regime, diventa nulla. La tensione $v_C(t)$, a regime, diventa quindi pari a E_{eq} . Nel caso di ingressi costanti (e frequenza libera negativa, cioè circuito asintoticamente stabile) possiamo quindi ricavare il valore di regime della variabile di stato risolvendo un circuito resistivo in cui il condensatore viene sostituito dal suo equivalente in regime stazionario. Ciò non è possibile se $A_{eq}(t)$ non è costante.

QUALORA PER IL CONDENSATORE si specifichi una condizione iniziale v_{C_0} all'istante t_0 , la famiglia di soluzioni $v_C(t; k, t_0)$ della 10.2 si riduce ad una sola funzione. Infatti, è necessario identificare il parametro k in modo tale che $v_C(t_0; k, t_0) = v_{C_0}$. Concentriamoci sul caso in cui $E_{eq} = -R_{eq}A_{eq}(t)$ e quindi la famiglia di soluzioni sia la 10.9, possiamo scrivere

$$v_C(t_0; k, t_0) = ke^{-\frac{t_0-t_0}{R_{eq}C}} + E_{eq} = k + E_{eq} = v_{C_0} , \quad (10.10)$$

da cui si ottiene $k = v_{C_0} - E_{eq}$. La soluzione dell'equazione di stato con condizioni iniziali è dunque in questo caso

$$v_C(t) = \underbrace{(v_{C_0} - E_{eq})e^{-\frac{t-t_0}{R_{eq}C}}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{E_{eq}}_{\text{regime}} . \quad (10.11)$$

Nel caso più generale in cui sia l'ingresso $A_{eq}(t)$ non sia costante, si avrà infatti un integrale particolare $v_{C_{IP}}(t)$ e la costante k si determinerà scrivendo

$$v_C(t_0; k, t_0) = ke^{-\frac{t_0-t_0}{R_{eq}C}} + v_{C_{IP}}(t) = k + v_{C_{IP}}(t_0) = v_{C_0}, \quad (10.12)$$

da cui $k = v_{C_0} - v_{C_{IP}}(t_0)$.

In figura 10.3 è riportato l'andamento della funzione 10.11. Si ricava facilmente che la retta tangente alla soluzione in t_0 è

$$r(t) : \frac{(E_{eq} - v_{C_0})(t - t_0)}{\tau} + v_{C_0} = 0 \quad (10.13)$$

e che tale retta interseca l'asintoto orizzontale $v_C = E_{eq}$ per $t = t_0 + \tau$. La costante di tempo τ dà l'indicazione di quanto rapidamente la tensione $v_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico: maggiore è τ e più lenta è la dinamica del circuito, minore è τ e più veloce è la dinamica del circuito

LA SOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA, con $A_{eq}(t)$ qualunque, può essere riorganizzata evidenziando i contributi dovuti all'ingresso (**risposta forzata**) e quelli dovuti alla condizione iniziale (**risposta libera**)

$$v_C(t) = \underbrace{v_{C_0} e^{-\frac{t-t_0}{R_{eq}C}}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{v_{C_{IP}}(t) - v_{C_{IP}}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{R_{eq}C}}}_{\text{risposta forzata}}. \quad (10.14)$$

Si nota quindi che, con ingresso nullo, il condensatore evolve scaricandosi (se $\lambda < 0$). Con condizione iniziale nulla, invece, il circuito presenta comunque una fase transitoria che porta al regime per t che tende all'infinito.

NEL CASO IN CUI il bipolo composito \mathcal{N}_R in figura 10.1 ammetta anche la base corrente, ovvero il modello di Norton non sia degenere con $G_{eq} = 0$, è possibile risolvere il circuito di partenza trasformandolo come in figura 10.4.

Si lascia allo studente il compito di ricavare la corrispondente equazione di stato confrontandola poi con la 10.2.

SI ANALIZZERÀ NEL SEGUITO il caso *degenero* in cui $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = 0$ che comporta $|\lambda| \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow 0^+$.

10.1.1 Esempio

SI RICAVI L'ANDAMENTO DELLA TENSIONE $v_C(t)$ per il circuito in figura 10.5 sapendo che $v_C(0) = V_0$ e $e(t) = E$.

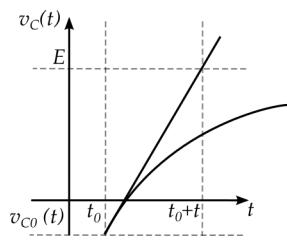


Figure 10.3: Andamento della 10.11 con $v_{C_0} < 0 < E_{eq}$ e $t_0 > 0$.

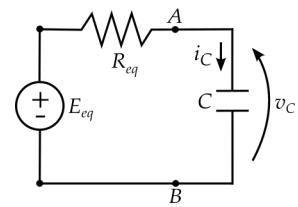


Figure 10.4: Circuito equivalente a quello di figura 10.1 se \mathcal{N}_R ammette anche la base corrente.

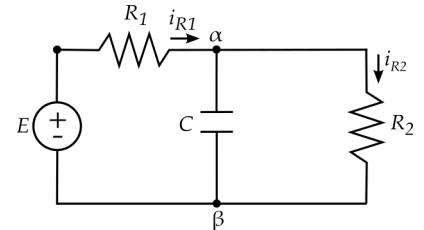


Figure 10.5: Il bipolo composito \mathcal{N}_R è costituito dal circuito connesso ai morsetti α e β una volta scollegato il condensatore C .

Possiamo seguire due strade diverse. La prima prevede di scollegare il condensatore dal circuito, calcolare il modello equivalente di Norton per il bipolo composito collegato ai morsetti α e β e riportarci quindi nella condizione di figura 10.2. Alternativamente possiamo ricavare direttamente l'equazione di stato che governa la dinamica della rete.

Nel primo caso si ricava facilmente che $R_{eq} = R_1 \parallel R_2$ e $A_{eq} = -\frac{E}{R_1}$. Da qui è quindi possibile ricavare la soluzione del problema usando la 10.11

$$v_C(t) = (V_0 - E)e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} + E_{eq} . \quad (10.15)$$

con $E_{eq} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$.

Impariamo però a risolvere il circuito senza ricavare il modello equivalente di Norton. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} i_{R_2} &= \frac{v_C(t)}{R_2} \\ i_{R_1} &= \frac{E - v_C(t)}{R_1} , \end{aligned} \quad (10.16)$$

da cui

$$i_{R_1} - i_{R_2} - C \frac{d}{dt} v_C(t) = \frac{E - v_C(t)}{R_1} - \frac{v_C(t)}{R_2} - C \frac{d}{dt} v_C(t) = 0 . \quad (10.17)$$

Riorganizzando quest'ultima equazione si ricava

$$\frac{d}{dt} v_C(t) = -\underbrace{\frac{1}{R_1 R_2} C}_{\lambda = -\frac{1}{R_{eq} C}} v_C(t) + \frac{E}{R_1 C} . \quad (10.18)$$

La soluzione dell'equazione differenziale così ottenuta è quindi

$$v_C(t) = k e^{\lambda t} + H , \quad (10.19)$$

con H tale che

$$0 = -\frac{1}{R_1 R_2} C H + \frac{E}{R_1 C} , \quad (10.20)$$

ovvero $H = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = E_{eq}$. La costante k , invece, deve essere tale da garantire che $V_0 = k + H$, ovvero $k = V_0 - H = V_0 - E_{eq}$.

10.2 Circuito RL del primo ordine non degenero

IL CASO DUALE DI QUELLO analizzato nel paragrafo precedente è rappresentato dal circuito in figura 10.6. In questo caso, il bipolo composito \mathcal{N}_R (che al suo interno è costituito da multi-terminali lineari, adinamici e tempo-invarianti e da generatori indipendenti di tensione e/o corrente) si ipotizza possa essere rappresentato con un modello equivalente di Thevènin, di cui $E_{eq}(t)$ e R_{eq} sono, rispettivamente, il generatore di tensione indipendente e la resistenza lineare. Il circuito in esame diventa quindi quello in figura 10.7. Anche in questo caso la scelta del circuito equivalente è dovuta al fatto che l'induttore non è controllabile in corrente e quindi il bipolo equivalente a cui è connesso deve esserlo.

L'equazione di stato che regola la dinamica del circuito può essere ricavata a partire dal bilancio delle tensioni tra i nodi A e B del circuito

$$R_{eq}i_L(t) + v_L(t) - E_{eq}(t) = R_{eq}i_L(t) + \underbrace{L \frac{d}{dt} i_L(t)}_{v_L(t)} - E_{eq}(t) = 0 , \quad (10.21)$$

che può essere riscritta in *forma canonica* come

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{R_{eq}}{L} i_L(t) + \frac{E_{eq}(t)}{L} = \lambda i_L(t) + u(t) , \quad (10.22)$$

dove $\lambda = -\frac{R_{eq}}{L}$ e $[\lambda] = \text{s}^{-1}$. La costante di tempo del circuito è $\tau = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{L}{R_{eq}}$.

Come per il caso RC , qualora il bipolo composito \mathcal{N}_R ammetta anche la base tensione, ovvero il modello di Thevènin sia non degenero con $R_{eq} \neq 0$, il circuito in figura 10.6 può essere analizzato anche impiegando un circuito equivalente di Norton. Studieremo nel seguito il caso *degenero* in cui $R_{eq} = 0$ che comporta $|\lambda| \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow 0^+$.

La soluzione dell'equazione 10.22 si costruisce in modo assolutamente analogo a quello presentato nel paragrafo precedente e per questo vedremo direttamente un esempio di analisi circuitale.

10.2.1 Esempio

SI RICAVI L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE $i_L(t)$ per il circuito in figura 10.8 sapendo che $i_L(0) = I_0$ e $a(t) = A$.

Si potrebbe procedere ricavando il circuito equivalente di Thevènin ai morsetti α e β e riportarsi nella situazione standard descritta dall'equazione 10.22. Sceglieremo invece di ricavare l'equazione di

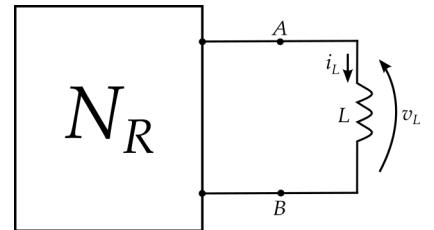


Figure 10.6: Un generico circuito dinamico elementare ottenuto collegando un induttore lineare ad un bipolo composito, adinamico, che ammette modello equivalente di Thevènin.

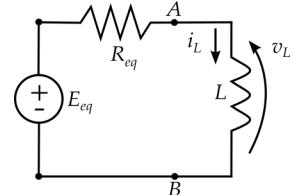


Figure 10.7: Circuito equivalente a quello di figura 10.6.

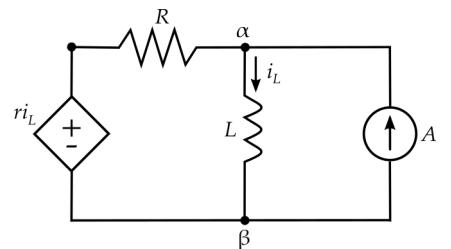


Figure 10.8: Il bipolo composito \mathcal{N}_R è costituito dal circuito connesso ai morsetti α e β una volta scollegato l'induttore L .

stato analizzando direttamente il circuito. Il bilancio delle correnti al nodo α è il seguente

$$A + \frac{ri_L(t) - v_L}{R} - i_L(t) = A + \left(\frac{r}{R} - 1 \right) i_L(t) - \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i_L(t) = 0 , \quad (10.23)$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{r-R}{L} i_L(t) + \frac{AR}{L} . \quad (10.24)$$

Si noti che $\lambda = \frac{r-R}{L}$ e che affinchè sia negativa, per garantire che il transitorio del circuito si esaurisca al tendere di t all'infinito, si deve avere $r - R < 0$ ovvero $r < R$.

La soluzione della 10.24 sarà del tipo $i_L(t, k, t_0) = ke^{\frac{r-R}{L}(t-t_0)} + i_{L_{IP}}(t)$. Dato che $a(t)$ è costante, l'integrale particolare sarà un'opportuna costante H tale che $\frac{r-R}{L}H + \frac{AR}{L} = 0$. Si ricava quindi $H = -\frac{AR}{r-R}$.

La costante H poteva essere ricavata risolvendo il circuito in figura 10.8 in regime stazionario ovvero sostituendo l'induttore con un corto circuito ($v_L = 0$). Questo è il circuito che si ottiene a regime (con un ingresso costante) quando il transitorio si è esaurito e quindi la $i_L(t)$ è costante come l'ingresso.¹ Dalla 10.23 con $v_L = 0$ si avrebbe $A + \frac{ri_L-0}{R} - i_L = A + \frac{r}{R}i_L - i_L = 0$ da cui $i_L = -\frac{AR}{r-R}$.

La soluzione del problema tenendo conto della condizione iniziale $i_L(0) = I_0$, ottenuta imponendo $i_L(0, k, 0) = k - \frac{AR}{r-R} = I_0$ per ricavare $k = I_0 + \frac{AR}{r-R}$, sarà quindi $i_L(t) = \left(I_0 + \frac{AR}{r-R} \right) e^{\frac{r-R}{L}t} - \frac{AR}{r-R}$.

¹ Si noti che se $a(t)$ non fosse costante, l'integrale particolare non si potrebbe ottenere dalla risoluzione del circuito in regime stazionario dato che, in questo caso, il comportamento a regime della $i_L(t)$ non sarebbe costante.

11

11.1 Richiami di trigonometria

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$
- $\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \cos(\alpha)\cos(\beta)$

La funzione $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, in virtù delle formule sopra elencate, può essere riscritta come $X_m \cos \varphi \cos(\omega t) - X_m \sin \varphi \sin(\omega t)$. Data la funzione $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ come è possibile riscriverla nella forma $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, ricavando i valori di X_m e φ corrispondenti? Innanzitutto possiamo scrivere che

$$(X_m \cos \varphi)^2 + (-X_m \sin \varphi)^2 = X_m^2 = A^2 + B^2 , \quad (11.1)$$

ovvero $X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Inoltre

$$\frac{-X_m \sin \varphi}{X_m \cos \varphi} = -\tan \varphi = \frac{B}{A} , \quad (11.2)$$

da cui

$$\begin{aligned} \varphi &= -\text{atan} \frac{B}{A} & A > 0 \\ \varphi &= -\text{atan} \frac{B}{A} \pm \pi & A < 0 \end{aligned} . \quad (11.3)$$

11.2 Richiami sui numeri complessi

Il numero $z = a + jb$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e j l'unità immaginaria tale che $j^2 = -1$, si definisce **numero complesso**. L'insieme dei numeri complessi lo indichiamo con la lettera \mathbb{C} . Il numero reale a si definisce *parte reale* di z e si scrive $a = \operatorname{Re}\{z\}$. Analogamente, il numero reale b si definisce *parte immaginaria* di z e si scrive $b = \operatorname{Im}\{z\}$. Possiamo quindi scrivere $z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\}$. Per rappresentare graficamente i numeri complessi si usa il piano cartesiano. Sull'asse orizzontale del piano si rappresenta la parte reale di un dato numero z e sull'asse verticale la sua parte immaginaria. Questa è la rappresentazione di Argand-Gauss. Il punto $(\operatorname{Re}\{z\}, \operatorname{Im}\{z\})$ identifica univocamente z sul piano complesso (cfr. figura 11.1). La scrittura $z = a + jb$ si avvale della rappresentazione *cartesiana o rettangolare* ed è possibile introdurre anche la rappresentazione *polare* del punto z sul piano complesso utilizzando il *modulo* $|z|$ di z e la sua *fase* o *argomento* φ e si indica con $\arg(z)$. Si può quindi scrivere

$$z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi \quad (11.4)$$

da cui

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}} \quad (11.5)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} & \operatorname{Re}\{z\} > 0 \\ \varphi &= \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} \pm \pi & \operatorname{Re}\{z\} < 0 \end{aligned} \quad . \quad (11.6)$$

Inoltre utilizzando la *formula di Eulero*

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}, \quad (11.7)$$

possiamo scrivere

$$z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi = |z| e^{j\varphi}. \quad (11.8)$$

Vediamo alcuni numeri complessi notevoli

$$\begin{aligned} e^{j2\pi k} &= 1, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(\pi/2+2\pi k)} &= j, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(\pi+2\pi k)} &= -1, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(3\pi/2+2\pi k)} &= -j, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad . \quad (11.9)$$

11.2.1 Uguaglianza di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 , essi sono uguali se e solo se

$\operatorname{Re}\{z_1\} = \operatorname{Re}\{z_2\}$ e $\operatorname{Im}\{z_1\} = \operatorname{Im}\{z_2\}$. Un numero complesso z è quindi nullo se $\operatorname{Re}\{z\} = 0$ e $\operatorname{Im}\{z\} = 0$.

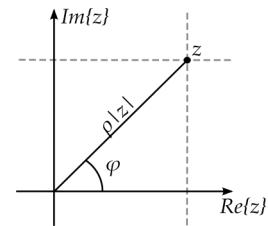


Figure 11.1: Il piano complesso: la rappresentazione di Argand-Gauss

Invece di utilizzare la 11.6 che può portare ad una determinazione sbagliata dell'argomento qualora non si tenga opportunamente conto del quadrante del piano cartesiano in cui si trova z , è possibile ricorrere alle relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}\{z\}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}}} \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}}} \end{array} \right.$$

11.2.2 Il complesso coniugato

DATO UN NUMERO COMPLESSO $z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z|e^{j\varphi}$ si definisce $z^* = \operatorname{Re}\{z\} - j\operatorname{Im}\{z\} = |z|e^{-j\varphi}$ il suo coniugato. La rappresentazione geometrica sul piano complesso è fornita in figura 11.2. I due numeri z e z^* hanno lo stesso modulo e fase opposta (si ricordi che gli angoli si misurano da 0 a 2π in senso antiorario e da 0 a -2π in senso orario, partendo dall'asse orizzontale come riferimento). Si noti che $zz^* = |z|e^{j\varphi}|z|e^{-j\varphi} = |z|^2$.

11.2.3 Somma algebrica di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 si definisce la loro somma algebrica il numero complesso $z = z_1 + z_2 = \operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}$,

$$z = \operatorname{Re}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} + j(\operatorname{Im}\{z_1\} + \operatorname{Im}\{z_2\}) \quad (11.10)$$

11.2.4 Prodotto e di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 si definisce il loro prodotto il numero complesso $z = z_1z_2 = (\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\})(\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\})$ che può essere riscritto come

$$z = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + j(\operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\}) . \quad (11.11)$$

Nel caso del prodotto, la notazione esponenziale facilita molto la scrittura. Infatti

$$z = z_1z_2 = |z_1|e^{j\varphi_1}|z_2|e^{j\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} . \quad (11.12)$$

11.2.5 Razionalizzazione del rapporto di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 , il loro rapporto $z = \frac{z_1}{z_2}$ può essere scritto agevolmente in forma esponenziale ottenendo

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} . \quad (11.13)$$

Se si usa invece la rappresentazione con parte reale e parte immaginaria

$$z = \frac{\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\}}{\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}} , \quad (11.14)$$

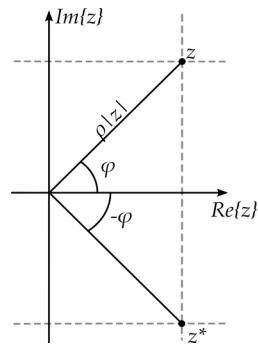


Figure 11.2: Un numero complesso z e il suo complesso coniugato z^* .

per essere semplificato necessita prima la rimozione del numero complesso al denominatore. Si procede *razionalizzando* in questo modo

$$z = \frac{\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\}}{\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}} \frac{z_2^*}{z_2^*}, \quad (11.15)$$

che restituisce

$$z = \frac{(\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\})(\operatorname{Re}\{z_2\} - j\operatorname{Im}\{z_2\})}{\operatorname{Re}^2\{z_2\} + \operatorname{Im}^2\{z_2\}}. \quad (11.16)$$

A questo punto è possibile calcolare il prodotto tra complessi al numeratore dividendo poi parte reale e parte immaginaria del risultato per il denominatore che è adesso reale.

Ad esempio

$$z = \frac{1+2j}{1-j} = \frac{(1+2j)(1+j)}{2} = \frac{-1+3j}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j. \quad (11.17)$$

11.3 Verso l'analisi fasoriale

PER INTRODURRE L'UTILITÀ DELL'ANALISI FASORIALE, proviamo a vedere come si dovrebbe calcolare l'integrale particolare $x_{IP}(t)$ per l'equazione 10.3 qualora si avesse $u(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ con $\varphi = 0$. Questo caso è di notevole importanza dato che i sistemi di alimentazione di quasi tutti gli utilizzatori della nostra vita quotidiana (e non) sono in *continua* o in *alternata*. Nel primo caso si studiano quindi circuiti dinamici con ingressi costanti (*regime stazionario*), nel secondo caso si studiano circuiti con ingressi sinusoidali alla pulsazione ω (*regime sinusoidale permanente*) ¹.

In base alla 10.6 e alla tabella 10.7 sappiamo che ci dobbiamo aspettare

$$x(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)} + \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t) \quad (11.18)$$

ed è necessario identificare il valore di β e γ . Per farlo dobbiamo sostituire $x_{IP}(t) = \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)$ nella 10.3 ottenendo così

$$\frac{d}{dt} [\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)] = \lambda[\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)] + \alpha \cos(\omega t). \quad (11.19)$$

Calcolando la derivata rispetto al tempo si ottiene

$$-\beta\omega \sin(\omega t) + \gamma\omega \cos(\omega t) = \lambda\beta \cos(\omega t) + \lambda\gamma \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t). \quad (11.20)$$

Dato che l'identità deve essere verificata per ogni istante di tempo t , si deve avere

$$\begin{cases} \beta\omega + \lambda\gamma = 0 \\ \gamma\omega - \lambda\beta - \alpha = 0 \end{cases} \quad (11.21)$$

¹ Si noti che affinchè un circuito ammetta una soluzione di regime stazionario o di regime sinusoidale è necessario che sia *asintoticamente stabile* ovvero che la sua soluzione transitoria si esaurisca al tendere del tempo all'infinito. Finora (cfr. capitolo 10) abbiamo verificato che ciò avviene quando la frequenza libera λ è negativa. In circuiti che contengono però più elementi dinamici, e che quindi non siano in generale caratterizzati dalla presenza di una sola variabile di stato, la stabilità è garantita se la parte reale di tutte le frequenze libere (in generale complesse) presenti è negativa. Nell'ambito di questo corso non avremo modo di studiare come queste frequenze libere si calcolano e ci limiteremo ad assumere che, quando verrà specificata l'ipotesi di *circuito che evolve in regime sinusoidale*, tale ipotesi sia coerente con l'esistenza di un regime, ovvero con la stabilità del circuito.

da cui $\gamma = -\frac{\omega}{\lambda}\beta$ che, sostituito nella seconda equazione, fornisce
 $-\left(\frac{\omega^2}{\lambda} + \lambda\right)\beta = \alpha$ ovvero

$$\begin{cases} \beta = -\frac{\alpha\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} \\ \gamma = \frac{\alpha\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \end{cases} \quad (11.22)$$

e quindi

$$x_{IP}(t) = [\omega \sin(\omega t) - \lambda \cos(\omega t)] \frac{\alpha}{\omega^2 + \lambda^2} . \quad (11.23)$$

La soluzione della 10.3 quindi, se $\lambda < 0$ e $u(t) = \alpha \cos(\omega t)$, tende alla 11.23 per t che tende all'infinito (ovvero quando il transitorio si sarà esaurito).

Considerazioni di base di carattere trigonometrico permettono di riscrivere la 11.23 come

$$x_{IP}(t) = \rho(\lambda, \omega, \alpha) \cos(\omega t + \psi(\lambda, \omega, \alpha)) . \quad (11.24)$$

Inoltre, se si scegliesse $\varphi \neq 0$, si avrebbe

$$x_{IP}(t) = \rho(\lambda, \omega, \alpha, \varphi) \cos(\omega t + \psi(\lambda, \omega, \alpha, \varphi)) . \quad (11.25)$$

Se pensiamo alla 10.3 come all'equazione di stato di una circuito RC o RL del primo ordine non degenere, l'integrale particolare dipende quindi dai parametri che specificano l'ingresso (ω, α e φ) del circuito e dalla struttura di \mathcal{N}_R attraverso λ .

L'analisi fasoriale ci fornirà un metodo efficace per ricavare la soluzione di regime di circuiti in cui gli ingressi (sorgenti impulsive di corrente e/o tensione) possono essere $M \geq 1$ e hanno tutti la medesima pulsazione ω e una struttura del tipo $\alpha_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ per $k = 1, \dots, M$. I circuiti in questione, oltre che dalle sorgenti impulsive, saranno per noi costituiti da N -terminali lineari, dinamici e adinamici, tempo-invarianti. I circuiti dinamici visti finora ne sono un caso particolare con un'unica sorgente e un unico bipolo dinamico lineare.

11.4 Una considerazione importante

SENZA ESSERSI FATTE TROPPE DOMANDE, nei precedenti paragrafi (10 e 11.3) abbiamo incluso, all'interno del nostro modello circuitale, componenti dinamici e ingressi tempo-varianti. In realtà, quando abbiamo introdotto le leggi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni (cfr. paragrafi 1.14 e 1.6), abbiamo supposto di lavorare in condizioni stazionarie (e non è questo il caso) o in condizioni quasi-stazionarie. Affinchè quest'ultima ipotesi sia verificata, è necessario che le dimensioni fisiche dei circuiti che studiamo siano molto più piccoli della

più piccola lunghezza d'onda l_{min} associata alle grandezze elettriche del circuito stesso. Dal momento che $l_{min} = \frac{c}{f_{max}}$, dove $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ è la velocità della luce (nel vuoto) e f_{max} è la frequenza più alta presente nello spettro dei segnali di interesse, possiamo verificare, caso per caso, in che misura l'ipotesi di quasi-stazionarietà è soddisfatta.

Se consideriamo ad esempio un calcolatore dei primi anni '90, che funzionava con frequenza massima del processore pari a 25MHz, scopriamo che $l_{min} = 3 \cdot 10^8 / 25 \cdot 10^6 = 12\text{m}$, dimensione sicuramente molto più grande del calcolatore in esame. Per questo tipo di circuito complesso, quindi, le leggi di Kirchhoff possono essere utilizzate in modo sicuro. I processori di oggi, invece, con frequenze massime di 4GHz hanno una $l_{min} = 0.075\text{m}$. Queste velocità, quindi, non possono essere raggiunte dai segnali sulla scheda madre dei nostri calcolatori, a causa delle loro dimensioni. Non varrebbe per questi circuiti l'ipotesi di quasi-stazionarietà e verrebbe quindi meno il modello a parametri concentrati. Anche i processori, comunque, più piccoli dei package da $0.0375\text{m} \times 0.0375\text{m}$ in cui sono alloggiati, vanno trattati con molta cura perché il limite di validità dell'ipotesi di quasi-stazionarietà è per essi molto vicino.

11.5 I fasori

LA GENERICA FUNZIONE $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ è rappresentata in figura 11.3. $T [\text{s}]$ è il periodo della funzione, $\omega = \frac{2\pi}{T} [\text{rad s}^{-1}]$ è la pulsazione, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} [\text{Hz}]$ è la frequenza, $\varphi [\text{rad}]$ è la fase e X_m è l'ampiezza.

Dato che è possibile scrivere

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right) \quad (11.26)$$

la fase φ rappresenta una traslazione della funzione $x(t)$ sull'asse t . Se $\varphi < 0$ la funzione $x(t)$ si dice in *ritardo* e se $\varphi > 0$ la funzione $x(t)$ si dice in *anticipo*.

Ad esempio, se $\varphi = -\pi/2$, $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{-\pi/2}{2\pi/T} = -\frac{T}{4}$ e infatti la funzione $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$ è in ritardo di $T/4$ rispetto a $\cos(\omega t)$. Analogamente, se $\varphi = \pi/2$, $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$ è in anticipo di $T/4$ rispetto a $\cos(\omega t)$.

QUELLO CHE FAREMO INTRODUCENDO IL CONCETTO di fasore
è stabilire un *corrispondenza biunivoca* tra una funzione del tipo $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ e un numero complesso \bar{x} . Cercheremo quindi una relazione biunivoca tra un insieme di funzioni della variabile t (dominio del tempo) e i numeri complessi.

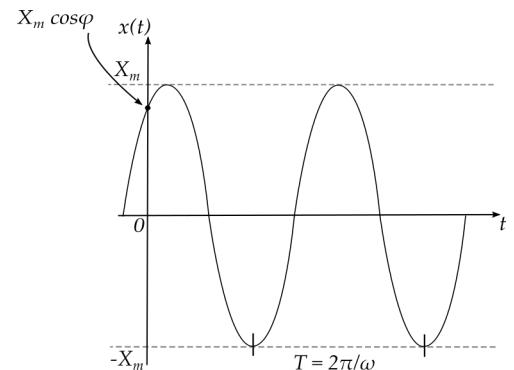


Figure 11.3: Andamento nel tempo della generica funzione $X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

SI CONSIDERI IL NUMERO COMPLESSO

$$X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\bar{x}} e^{j\omega t} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + j X_m \sin(\omega t + \varphi) . \quad (11.27)$$

Risulta evidente che

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{\bar{x} e^{j\omega t}\} \quad (11.28)$$

e definiamo quindi la relazione tra dominio del tempo e dominio dei numeri complessi nel modo seguente

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow X_m e^{j\varphi} = \bar{x} . \quad (11.29)$$

Data una funzione $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ le associamo dunque il numero complesso (*fasore*) $X_m e^{j\varphi}$ e per passare da quest'ultimo alla funzione originaria è sufficiente l'operazione 11.28. È importante notare che, nel passare da una funzione nel dominio del tempo alla sua rappresentazione fasoriale, si perde il valore della pulsazione ω ; è quindi fondamentale verificare che i fasori con cui si opera rappresentino tutti funzioni trigonometriche alla stessa pulsazione.

PER APPROFONDIRE LA RELAZIONE tra un fasore e la funzione sinusoidale ad esso associata, consideriamo il numero complesso $X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. Sul piano complesso esso corrisponde ad un punto che ruota attorno all'origine $(0,0)$ con velocità angolare ω (cfr. figura 11.4). Ad ogni istante di tempo t , la sua parte reale (ovvero la sua proiezione sull'asse orizzontale) è corrispondente al punto $(X_m \cos(\omega t + \varphi), 0)$ la cui ascissa si muove quindi sinusoidalmente nell'intervallo $[-X_m, X_m]$. Per $t = 0$ è pari a $|\bar{x}| \cos(\varphi)$.

LA CORRISPONDENZA TRA FUNZIONI SINUSOIDALI E FASORI gode di tre importanti proprietà

- **unicità** ,
- **linearità** ,
- **derivazione**.

La proprietà di *unicità* afferma che date due funzioni $x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ e $x_2(t) = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ esse sono uguali se e solo se $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Da qui si stabilisce che la corrispondenza tra funzioni sinusoidali e fasori è *biunivoca*.

La proprietà di *linearità* afferma che date due funzioni $x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ e $x_2(t) = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ e due costanti reali a_1 ed a_2 , il fasore \bar{x} associato alla funzione $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è pari a

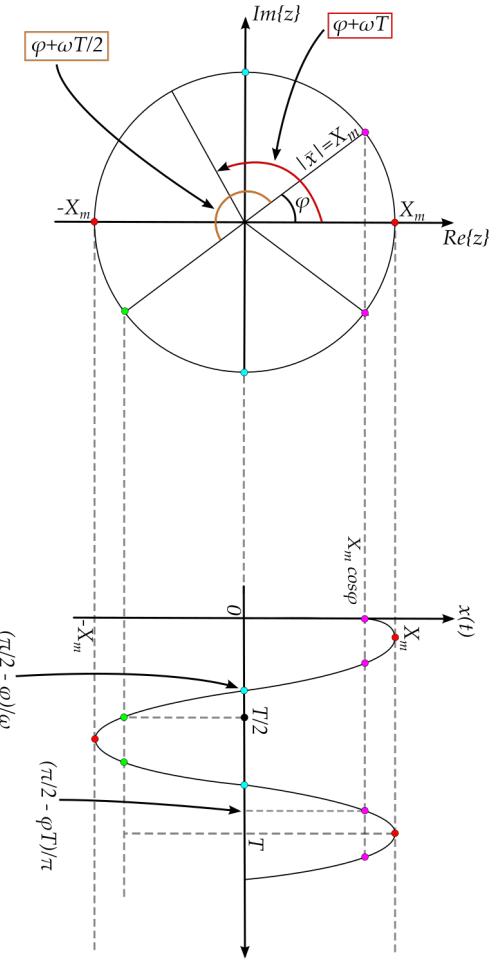


Figure 11.4: La relazione grafica tra il vettore rotante $X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ e al funzione $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2$. La proprietà derivata dalla linearità degli operatori $\text{Re}\{\cdot\}$ e $\text{Im}\{\cdot\}$.

La proprietà di *derivazione* afferma che il fasore \bar{y} associato alla funzione $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, con $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, è pari a $j\omega\bar{x}$. Infatti, possiamo scrivere,

$$y(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) . \quad (11.30)$$

Il fasore associato a $y(t)$ sarà dunque $\omega X_m e^{j(\varphi + \pi/2)} = \omega X_m e^{j\varphi} e^{j\pi/2} = j\omega X_m e^{j\varphi}$, ovvero $j\omega\bar{x}$.

LE PROPRIETÀ DI CUI GODONO I FASORI CI PERMETTONO di enunciare il **metodo dei fasori** o **metodo simbolico** per risolvere un circuito costituito da N -terminali lineari e sorgenti impressive di tipo sinusoidale, isofrequenziali (stessa ω), che ammetta il regime sinusoidale permanente:

*tutte le tensioni e le correnti del circuito vengono rappresentate mediante un opportuno fasore e l'analisi del circuito dinamico si riduce all'analisi di un equivalente circuito adinamico a parametri complessi. Quindi non si risolvono più equazioni differenziali lineari, ma equazioni lineari algebriche a coefficienti complessi le cui incognite sono i fasori corrispondenti alle tensioni e alle correnti incognite. Tali equazioni derivano dalla topologia del circuito (KCL e KVL) e dalle equazioni costitutive (riscritte nel dominio dei fasori) dei componenti che lo costituiscono.*²

PER ESEMPLIFICARE COME PROCEDERE si consideri dunque il circuito in figura 11.5 con $e(t) = E_m \cos \omega t$ che evolve in regime sinusoidale. L'equazione di stato che regola la sua dinamica è

$$L \frac{di}{dt} = e(t) - Ri , \quad (11.31)$$

che riscriviamo come

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) . \quad (11.32)$$

Se ad ogni variabile elettrica associamo il corrispondente fasore possiamo riscrivere l'equazione di stato come un'equazione algebrica a coefficienti complessi. Infatti, introducendo

$$\begin{aligned} e(t) &\leftrightarrow \bar{E} = E_m \\ i(t) &\leftrightarrow \bar{i} \\ L \frac{di}{dt} &\leftrightarrow j\omega L \bar{i} \end{aligned} , \quad (11.33)$$

l'equazione di stato diventa

$$(j\omega L + R)\bar{i} = E_m , \quad (11.34)$$

² Supponiamo che il circuito in esame sia costituito da l lati e che le sue tensioni e correnti di lato siano tutte del tipo ($k = 1, \dots, l$) $v_k(t) = V_k \cos(\omega t + \varphi_{v_k})$ e $i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \varphi_{i_k})$, rispettivamente. Allora ad ogni lato associamo una coppia di fasori \bar{v}_k e \bar{i}_k . Le KCL ad ogni nodo saranno del tipo $\sum_h \pm i_h(t)$ e le KVL per ogni maglia del tipo $\sum_h \pm v_h(t)$. Sfruttando le proprietà di unicità e linearità dei fasori esse corrisponderanno alle equazioni lineari complesse $\sum_h \pm \bar{i}_k$ e $\sum_h \pm \bar{v}_k$.

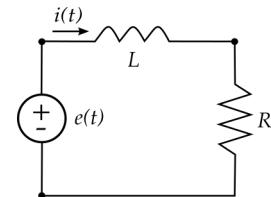


Figure 11.5: La frequenza libera del circuito è $\lambda = -R/L$ quindi il transitorio si esaurisce ed è ammesso un regime.

da cui

$$\bar{I} = \frac{E_m}{R + j\omega L} = \frac{E_m(R - j\omega L)}{\omega^2 L^2 + R^2} . \quad (11.35)$$

Per ricavare la corrente $i(t)$ è necessario calcolare

$$\operatorname{Re}\{\bar{I}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{E_m(R - j\omega L)}{\omega^2 L^2 + R^2}(\cos \omega t + j \sin \omega t)\right\} , \quad (11.36)$$

che restituisce

$$i(t) = \frac{E_m}{\omega^2 L^2 + R^2}(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) . \quad (11.37)$$

Analogamente, riscrivendo $\bar{I} = |\bar{I}|e^{j\varphi_{\bar{I}}}$, con $|\bar{I}| = \frac{E_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ e $\varphi_{\bar{I}} = -\operatorname{atan}\frac{\omega L}{R}$,

$$i(t) = \operatorname{Re}\{|\bar{I}|e^{j\varphi_{\bar{I}}}e^{j\omega t}\} = |\bar{I}| \cos(\omega t + \varphi_{\bar{I}}) . \quad (11.38)$$

Dalla 11.37 alla 11.38, e viceversa, si passa in ogni caso attraverso opportune semplificazioni trigonometriche.

IN GENERALE, NON È TUTTAVIA NECESSARIO scrivere l'equazione di stato e poi trasformarla nel dominio dei fasori ma si possono scrivere direttamente le equazioni algebriche complesse che descrivono il funzionamento del circuito. Per fare ciò vediamo come si trasformano, nel dominio dei fasori, le equazioni dei componenti che conosciamo.

Per quanto riguarda il **resistore** (cfr. paragrafo 3.5.1) la relazione costitutiva $v = Ri$ diventa

$$\bar{v} = R\bar{I} . \quad (11.39)$$

Il componente è adinamico e quindi non presenta sfasamento tra la tensione e la corrente descrittiva infatti $|\bar{v}|e^{j\varphi_{\bar{v}}} = R|\bar{I}|e^{j\varphi_{\bar{I}}}$ e $|\bar{v}| = R|\bar{I}|$ e $\varphi_{\bar{v}} = \varphi_{\bar{I}}$.

Il **condensatore** (cfr. paragrafo 9.1), invece, è descritto dall'equazione costitutiva $i = C\frac{dv}{dt}$ che, nel dominio dei fasori, usando la proprietà di derivazione, diventa

$$\bar{I} = j\omega C\bar{v} , \quad (11.40)$$

da cui $|\bar{I}|e^{j\varphi_{\bar{I}}} = \omega C e^{j\pi/2} |\bar{v}|e^{j\varphi_{\bar{v}}} = \omega C |\bar{v}|e^{j(\varphi_{\bar{v}} + \pi/2)}$. Il modulo del fasore \bar{I} varia dunque con la pulsazione ω e la sua fase è in *anticipo* di $\pi/2$ rispetto a quella del fasore della tensione v . Per ω che tende a zero, il condensatore si comporta come un circuito aperto dato che $|\bar{I}|$ tende a zero. Viceversa, per ω che tende all'infinito, $|\bar{v}| = |\bar{I}|/\omega$ tende a zero e quindi il condensatore si comporta come un cortocircuito.

L'**induttore** (cfr. paragrafo 9.4), è descritto dall'equazione costitutiva $v = L\frac{di}{dt}$ che, nel dominio dei fasori, diventa

$$\bar{v} = j\omega L\bar{I} , \quad (11.41)$$

da cui $|\bar{v}|e^{\pm j\varphi_v} = \omega L e^{\pm j\pi/2} |\bar{i}|e^{\pm j\varphi_i} = \omega L |\bar{i}|e^{\pm j(\varphi_i + \pi/2)}$. Il modulo del fasore \bar{v} varia dunque con la pulsazione ω e la sua fase è in *anticipo* di $\pi/2$ rispetto a quella del fasore della corrente \bar{i} . Per ω che tende a zero e all'infinito il comportamento dell'induttore è il duale di quello del condensatore: si comporta, rispettivamente, come un cortocircuito ($|\bar{v}|$ tende a zero) e come un circuito aperto ($|\bar{i}| = |\bar{v}|/\omega$ tende a zero).

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO IN FIGURA 11.6, se ne vuole calcolare l'andamento della tensione $v_C(t)$ assumendo che esso stia funzionando in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

Il bilancio delle correnti al nodo 1 si traduce in termini fasoriali nell'equazione

$$\bar{i}_1 + \bar{i}_L = \bar{A}, \quad (11.42)$$

essendo $\bar{A} = A \sin \omega t$ il fasore dell'ingresso $a(t)$. Analogamente, al nodo 2 possiamo scrivere

$$\bar{i}_L = \frac{\bar{v}_C}{R_2} + \bar{i}_C = \frac{\bar{v}_C}{R_2} + j\omega C \bar{v}_C = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) \bar{v}_C. \quad (11.43)$$

Dalla KVL esterna possiamo scrivere

$$R_1 \bar{i}_1 - \bar{v}_L - \bar{v}_C = R_1 (\bar{A} - \bar{i}_L) - j\omega L \bar{i}_L - \bar{v}_C = 0, \quad (11.44)$$

ovvero

$$\left((R_1 + j\omega L) \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) + 1 \right) \bar{v}_C = R_1 \bar{A}. \quad (11.45)$$

Si può quindi ricavare il fasore della tensione $v_C(t)$ come

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= \frac{R_1 R_2 \bar{A}}{R_2 + (R_1 + j\omega L)(1 + j\omega C R_2)} \\ &= \frac{R_1 R_2 \bar{A}}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) + j\omega(L + C R_1 R_2)}. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Razionalizzando il risultato possiamo riscriverlo come

$$\bar{v}_C = \frac{R_1 R_2 \bar{A} [(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) - j\omega(L + C R_1 R_2)]}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2)^2 + \omega^2(L + C R_1 R_2)^2}. \quad (11.47)$$

L'andamento cercato per la tensione ai capi del condensatore è quindi

$$\begin{aligned} \bar{v}_C(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_C e^{j\omega t}\} \\ &= \chi [(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) \cos \omega t + \omega(L + C R_1 R_2) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (11.48)$$

dove $\chi = \frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2)^2 + \omega^2(L + C R_1 R_2)^2}$.

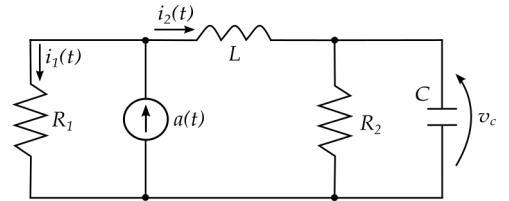


Figure 11.6: Il circuito con un generatore indipendente di corrente di tipo sinusoidale $a(t) = A \cos \omega t$, contiene due elementi dinamici e quindi, in generale, è caratterizzato da due frequenze libere λ_1 e λ_2 . Assumiamo che ammetta il regime sinusoidale, ovvero che entrambe le frequenze libere appartengano al semipiano sinistro del piano complesso, in altre parole $\operatorname{Re}\{\lambda_1 < 0\}$ e $\operatorname{Re}\{\lambda_2 < 0\}$.

11.6 Impedenza e ammettenza

NEL PARAGRAFO PRECEDENTE, dopo aver introdotto il concetto di fasore, abbiamo visto come le equazioni costitutive di alcuni componenti di base vengono trasformate dal dominio del tempo al dominio dei fasori. Fondamentalmente abbiamo fatto ciò per i bipoli lineari impressivi e non impressivi. Per i primi, semplicemente dobbiamo convertire la forma d'onda sinusoidale che li caratterizza nel corrispondente fasore, per i secondi, invece, si è trovato un legame di proporzionalità attraverso una grandezza, in generale complessa, tra il fasore della tensione e quello della corrente descrittive del bipolo stesso.

Ricapitolando, nel caso del resistore, del condensatore e dell'induttore, abbiamo scritto, rispettivamente,

$$\begin{aligned}\bar{v}_R &= R\bar{i}_R \\ \bar{v}_C &= \frac{1}{j\omega C} \bar{i}_C \quad , \\ \bar{v}_L &= j\omega L \bar{i}_L\end{aligned}\tag{11.49}$$

dove è facile verificare che le dimensioni fisiche di R , $\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$ e $j\omega L$ sono Ω . A ciascuno dei tre bipoli suddetti possiamo quindi assegnare, in regime sinusoidale, una grandezza complessa che rappresenta il rapporto tra il fasore della tensione descrittiva e quello della corrente descrittiva e che prende il nome di **impedenza**. Tale grandezza si indica tipicamente con $Z(j\omega)$ e³

$$\begin{aligned}Z_R(j\omega) &= R \in \mathbb{R} \\ Z_C(j\omega) &= \frac{1}{j\omega C} \quad . \\ Z_L(j\omega) &= j\omega L\end{aligned}\tag{11.50}$$

Se si considera invece il rapporto tra il fasore della corrente descrittiva e quello della tensione descrittiva si definisce l'**ammettenza**
 $Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$, misurata in Ω^{-1} ,

$$\begin{aligned}Y_R(j\omega) &= \frac{1}{R} \in \mathbb{R} \\ Y_C(j\omega) &= j\omega C \quad . \\ Y_L(j\omega) &= \frac{1}{j\omega L}\end{aligned}\tag{11.51}$$

³ Si noti che $Z(j\omega)$ non è un fasore e quindi lo indicheremo senza la barra. Non esiste infatti il suo corrispettivo nel dominio del tempo e quindi non c'è ambiguità nella notazione.

IL CONCETTO DI IMPEDENZA E DI AMMETTENZA PUÒ ESSERE NATURALMENTE ESTESO a bipoli composti costituiti dall'interconnessione

di N -terminali lineari tempo-invarianti, che, definiti ai morsetti su base tensione o su base corrente, sono tali da ammettere il regime sinusoidale.⁴ In altre parole, supponendo che un bipolo composito sia definito su base tensione, il circuito che si ottiene connettendo ai suoi morsetti un corto circuito deve essere caratterizzato da frequenze libere tutte con parte reale negativa. Analogamente per la base corrente, deve accadere lo stesso per il bipolo composito i cui morsetti vengano lasciati appesi, ovvero siano connessi ad un circuito aperto.

Nelle ipotesi suddette si definiscono impedenza e ammettenza il rapporto tra il fasore della tensione e della corrente o della corrente e della tensione, rispettivamente, ai morsetti del bipolo composito. Se il bipolo è definito solo su base corrente è possibile definire solo la sua impedenza $Z(j\omega)$. Viceversa, se è definito solo su base tensione possiamo definire solo la sua ammettenza $Y(j\omega)$. Qualora esistano entrambe le basi è possibile definire sia l'impedenza sia l'ammettenza e varrà $Z(j\omega) = 1/Y(j\omega)$.

Impedenza ed ammettenza sono, in generale, due numeri complessi e, come tali, sono caratterizzati da una parte reale e da una parte immaginaria. In particolare

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) , \quad (11.52)$$

dove $R(\omega)$ e $X(\omega)$ sono, rispettivamente, la **resistenza** e la **reattanza**, e

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) , \quad (11.53)$$

dove $G(j\omega)$ e $B(j\omega)$ sono, rispettivamente, la **conduttanza** e la **suscettanza**.

IN BASE AL SEGNO DELLA REATTANZA, valutato per un particolare valore di $\omega = \hat{\omega}$, si classificano le impedenze nel modo seguente

- $X(\hat{\omega}) < 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **capacitivo**, come il condensatore per il quale $X_C(\omega) = -\frac{1}{\omega C} < 0$ per ogni ω ;
- $X(\hat{\omega}) = 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **resistivo**, come il resistore per il quale $X_R(\omega) = 0$ per ogni ω ;
- $X(\hat{\omega}) > 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **induttivo**, come l'induttore per il quale $X_L(\hat{\omega}) = \omega L > 0$ per ogni ω .

11.7 Doppi-bipoli con matrice di rappresentazione complessa

INTRODUCENDO IL MODELLO DEI COMPONENTI ELEMENTARI in regime fasoriale (cfr. paragrafo 11.5) si è accennato anche al modello dei doppi-bipoli lineari e statici introdotti nel capitolo 6. Tuttavia,

⁴ Si noti che i bipoli composti per cui si definisco l'ammettenza e l'impedenza non contengono generatori indipendenti di tensione e corrente.

in regime sinusoidale, risulta semplice trattare anche doppi-bipoli lineari dinamici, ovvero doppi-bipoli le cui equazioni costitutive contengano derivate rispetto al tempo (tralasciamo per semplicità il caso in cui siamo presenti integrali) delle loro variabili descrittive. Ovviamente, affinchè ciò sia fattibile, dobbiamo supporre che tali doppi-bipoli dinamici, siano inseriti all'interno di un circuito il cui comportamento complessivo (doppi-bipoli inclusi) sia tale da garantire l'esistenza del regime sinusoidale. Tali doppi bipoli saranno descritti mediante matrici \mathcal{Z} (equivalente della matrice \mathcal{R}), \mathcal{Y} (equivalente della matrice \mathcal{G}), \mathcal{H} , \mathcal{H}' e \mathcal{T} i cui elementi saranno in generale numeri complessi funzione della ω di riferimento.

Per quanto riguarda i **doppi bipoli lineari adinamici** (cfr. paragrafo 6.1) descritti mediante matrice \mathcal{R} , \mathcal{G} , \mathcal{H} e \mathcal{H}' , l'equivalente descrizione nel dominio dei fasori si ottiene semplicemente sostituendo alle grandezza elettriche alle porte $v_1(t)$, $v_2(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ i fasori corrispondenti e ricordando la proprietà di linearità dei fasori. Così facendo, ad esempio per la rappresentazione con matrice \mathcal{Z} , si ottiene

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.54)$$

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il doppio-bipolo in figura 11.7. Se assumiamo che sia definito su base corrente, possiamo ricavare le sue equazioni costitutive nel dominio del tempo nella forma

$$\begin{aligned} v_1(t) - L \frac{d}{dt} i_1(t) - R(i_1(t) + i_2(t)) &= 0 \\ i_2(t) - C \frac{d}{dt} [v_2(t) - R(i_1(t) + i_2(t))] &= 0 \end{aligned} \quad (11.55)$$

Passando ai fasori

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 - j\omega L \bar{i}_1 - R(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) &= 0 \\ \bar{i}_2 - j\omega C [\bar{v}_2 - R(\bar{i}_1 + \bar{i}_2)] &= 0 \end{aligned}, \quad (11.56)$$

in forma matriciale possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R + j\omega L & R \\ R & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.57)$$

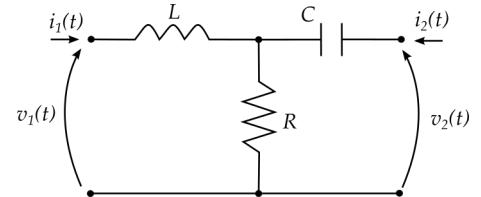


Figure 11.7: Il doppio bipolo è dinamico e ipotizziamo che ammetta la base corrente ($i_1(t), i_2(t)$).

11.8 Adesso siamo pronti per ...

... ESTENDERE AI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE, descritti con il metodo fasoriale, molti risultati che abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti per l'analisi di circuiti il cui grafo sia connesso e siano composti da N -terminali lineari, tempo-invarianti e adinamici, e generatori indipendenti di corrente e tensione. Poichè nell'ipotesi di regime sinusoidale isofrequenziale si è visto che il modello matematico dei circuiti, il cui grafo sia connesso, composti da N -terminali lineari, tempo-invarianti, adinamici e dinamici, e generatori indipendenti di corrente e tensione (sinusoidali e isofrequenziali) è lo stesso di quello usato per descrivere la classe sopracitata di circuiti (solo avremo a che fare adesso con coefficienti in generale complessi), possiamo naturalmente estendere i seguenti risultati

- analisi topologica del circuito in termine di tensioni e correnti associate ad ogni lato, potenziali di nodo, maglie e tagli linearmente indipendenti, matrice di incidenza, analisi nodale, etc. Si noti che correnti, tensioni e potenziali sono adesso fasori, cioè numeri complessi;
- connessione in serie e parallelo di impedenze e ammettenze con relativi partitori di corrente e tensione;
- sovrapposizione degli effetti;
- teoremi di Thévenin e Norton.

11.8.1 Esempio: connessione in serie di impedenze e partitore di tensione

CONSIDERIAMO IL BIPOLO COMPOSITO IN FIGURA 11.8. Si ricava banalmente che $\bar{v} = \bar{v}_R + \bar{v}_C + \bar{v}_L$ e

$$\bar{v} = R\bar{i} + \frac{1}{j\omega C}\bar{i} + j\omega L\bar{i} = \underbrace{\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)}_{Z_{eq}(j\omega)} \bar{i} . \quad (11.58)$$

Come nel caso dei resistori, quindi, l'*impedenza equivalente ad M impedenze $Z_k(j\omega)$ connesse in serie è pari alla somma delle impedenze*, cioè $Z_{eq}(j\omega) = \sum_{k=1}^M Z_k(j\omega)$.

Analogamente al risultato presentato per i resistori (cfr. paragrafo 3.7.2), il fasore \bar{v}_j , riferito alla j -esima impedenza che costituisce la serie, è pari a

$$\bar{v}_j = \frac{Z_j(j\omega)}{\sum_{k=1}^M Z_k(j\omega)} \bar{v} . \quad (11.59)$$

Nel caso specifico della equazione (11.58) si può notare che può essere riscritta come

$$Z_{eq}(j\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (11.60)$$

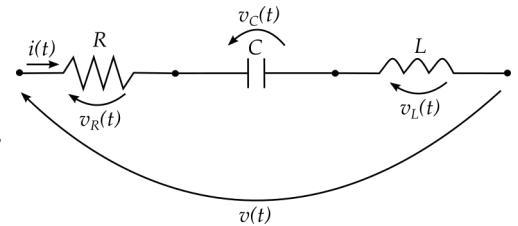


Figure 11.8: Resistore, condensatore e induttore sono connessi in serie poichè attraversati dalla stessa corrente (cfr. paragrafo 3.7.1).

dove la parte immaginaria si annulla per $\omega \triangleq \omega_R = \frac{1}{\sqrt{CL}}$. La pulsazione ω_R viene chiamata *pulsazione di risonanza* e il bipolo equivalente serie si comporta come il solo resistore R . In altre parole la serie composta dal condensatore C e dall'induttore L si comporta come un corto circuito alla pulsazione di risonanza. Per pulsazioni $\omega < \omega_R$ la serie si comporta come un'impedenza resistivo-capacitiva, mentre per $\omega > \omega_R$ si comporta come un'impedenza resistivo-induttiva.

Si lascia allo studente considerare il caso duale di una ammettenza composta dalla connessione in parallelo di un resistore R , di un induttore L e di un condensatore C . In questo caso di parlerà di risonanza parallelo e la connessione parallelo $L-C$ si comporterà come un circuito aperto.

11.8.2 Esempio: connessione in parallelo di ammettenze e partitore di corrente

CONSIDERIAMO IL BIPOLO COMPOSITO IN FIGURA 11.9. Si ricava banalmente che $\bar{i} = \bar{i}_R + \bar{i}_C$ e

$$\bar{i} = G\bar{v} + j\omega C\bar{v} = \underbrace{(G + j\omega C)}_{Y_{eq}(j\omega)} \bar{v} . \quad (11.61)$$

Come nel caso dei resistori, quindi, l'ammettenza equivalente ad M ammettenze $Y_k(j\omega)$ connesse in parallelo è pari alla somma delle ammettenze, cioè $Y_{eq}(j\omega) = \sum_{k=1}^M Y_k(j\omega)$.

Analogamente al risultato presentato per i resistori (cfr. paragrafo 3.7.4), il fasore \bar{i}_j , riferito alla j -esima ammettenza che costituisce il parallelo, è pari a

$$\bar{i}_j = \frac{Y_j(j\omega)}{\sum_{k=1}^M Y_k(j\omega)} \bar{i} . \quad (11.62)$$

Nel caso di due sole ammettenze $Y_1(j\omega) = \frac{1}{Z_1(j\omega)}$ e $Y_2(j\omega) = \frac{1}{Z_2(j\omega)}$ connesse in parallelo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 &= \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \bar{i} \\ \bar{i}_2 &= \frac{Z_1(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \bar{i} . \end{aligned} \quad (11.63)$$

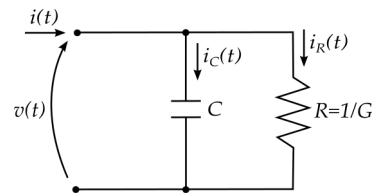


Figure 11.9: Resistore e condensatore sono connessi in parallelo poiché hanno ai morsetti la medesima tensione (cfr. paragrafo 3.7.3).

11.8.3 Esempio: un circuito con l'amplificatore operazionale ideale

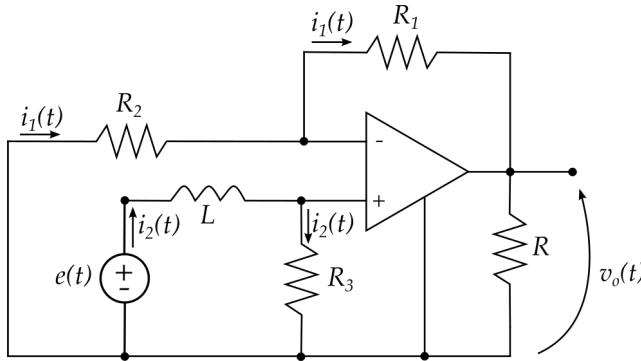


Figure 11.10: L'amplificatore operazionale è assunto ideale e funziona come un nullo (cfr. paragrafo 6.10.2).

IL CIRCUITO IN FIGURA 11.10 FUNZIONA IN REGIME SINUSOIDALE, $e(t) = E \cos(\omega t)$ e l'amplificatore operazionale è assunto ideale.

Determinare la tensione $v_o(t)$.

Il fasore associato al generatore $e(t)$ è il numero reale E . Utilizzando la KLV esterna che interessa R_1 , R_2 , ed R possiamo scrivere $\bar{v}_o = -R_1 \bar{i}_1 - R_2 \bar{i}_1$, dato che la corrente in R_1 è uguale a quella in R_2 (si ricordi che i terminali dell'amplificatore operazionale ideale non fanno passare corrente). Ricaviamo quindi

$$\bar{v}_o = -(R_1 + R_2) \bar{i}_1 . \quad (11.64)$$

Dalla maglia che interessa R_2 , R_3 , e la caduta (nulla) tra i morsetti $-$ e $+$ dell'amplificatore operazionale ideale, possiamo scrivere $R_3 \bar{i}_2 + R_2 \bar{i}_1 = 0$, ovvero

$$\bar{i}_2 = -\frac{R_2}{R_3} \bar{i}_1 . \quad (11.65)$$

Se consideriamo adesso la maglia composta dal generatore di tensione, l'induttore, la caduta (nulla) tra i morsetti $-$ e $+$ dell'amplificatore operazionale ideale e R_2 , possiamo scrivere $E - j\omega L \bar{i}_2 + R_2 \bar{i}_1 = 0$ ovvero

$$E + j\omega L \frac{R_2}{R_3} \bar{i}_1 + R_2 \bar{i}_1 = E - \left(R_2 + j\omega L \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{\bar{v}_o}{R_1 + R_2} = 0 . \quad (11.66)$$

Il fasore della tensione $v_o(t)$ sarà dunque

$$\bar{v}_o = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2(R_3 + j\omega L)} E . \quad (11.67)$$

Per ricavare la forma d'onda cercata si deve da ultimo valutare

$$\begin{aligned}
 v_o(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_o e^{j\omega t}\} = \\
 &= \frac{R_3(R_1 + R_2)E}{R_2(R_3^2 + \omega^2 L^2)} \operatorname{Re}\{(R_3 - j\omega L)(\cos \omega t + j \sin \omega t)\} . \\
 &= \frac{R_3(R_1 + R_2)E}{R_2(R_3^2 + \omega^2 L^2)} (R_3 \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)
 \end{aligned} \tag{11.68}$$

11.8.4 Esempio: circuiti equivalenti di Thevènin e Norton

IN REGIME SINUSOIDALE, utilizzando i fasori, le equazioni costitutive dei circuiti equivalenti di Thevènin e Norton introdotte nel paragrafo 3.9, diventano, rispettivamente,

$$\bar{v} = Z_{th}(j\omega)\bar{i} + \bar{E}_{th}(j\omega) \tag{11.69}$$

e

$$\bar{i} = Y_{nr}(j\omega)\bar{v} + \bar{A}_{nr}(j\omega) . \tag{11.70}$$

I due circuiti equivalenti necessitano, al solito, dell'opportuna controllabilità del bipolo composito a cui si riferiscono: base corrente per il circuito di Thevènin e base tensione per il circuito di Norton. Sarà quindi possibile ricavare i parametri di tali circuiti direttamente imponendo i fasori \bar{i} e \bar{v} , per ricavare \bar{v} e \bar{i} , oppure si potranno applicare le prove semplici introdotte nel paragrafo 5.3.

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il bipolo composito in figura 11.11 di cui si vuole ricavare il modello equivalente di Thevènin in regime sinusoidale. L'ipotesi di lavoro sarà quindi che, connesso un generatore di corrente sinusoidale alla pulsazione ω tra i morsetti α e β , il circuito risultante ammetta il regime sinusoidale. Al generatore di corrente abbineremo quindi il fasore \bar{i} . Si ricava facilmente che

$$\bar{i} = j\omega C\bar{v} + \frac{\bar{v}}{R_2} + \frac{\bar{v} - \bar{E}}{R_1} , \tag{11.71}$$

da cui

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}}_{Z_{th}(j\omega)} \bar{i} + \underbrace{\frac{R_2 \bar{E}}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}}_{E_{th}(j\omega)} , \tag{11.72}$$

SI NOTI COME I FASORI \bar{E}_{th} e \bar{A}_{nr} , che rappresentano i generatori sinusoidali equivalenti di Thevènin e Norton, rispettivamente, abbiano in generale ampiezza e fase che dipendono da ω . Questa considerazione suggerisce che un modo più generale di quello scelto per

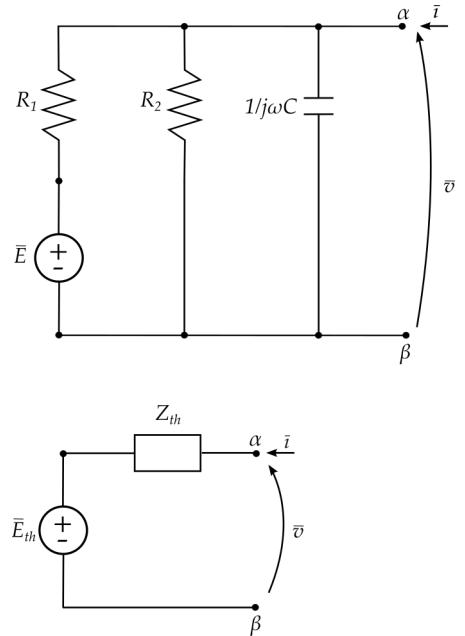


Figure 11.11: Circuito in regime sinusoidale in cui al generatore indipendente di tensione è assegnato un generico fasore \bar{E} .

introdurre una relazione tra funzioni sinusoidali a ω fissata e numeri complessi sarebbe

$$x(t) = X_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \leftrightarrow X_m(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \bar{x}(\omega) . \quad (11.73)$$

11.8.5 Esempio: sovrapposizione degli effetti (e di due regimi)

L'ESEMPIO PROPOSTO TRATTA IL CASO in cui, in un circuito che ammette un regime (cioè le sue frequenze libere si trovano tutte nel semipiano sinistro del piano complesso, ovvero hanno tutte parte reale negativa), sono presenti due ingressi di natura diversa: un generatore di tensione costante $e(t) = E$ e un generatore di corrente sinusoidale $a(t) = A \sin(\omega t)$. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, e assumendo che l'evoluzione transitoria del circuito sia esaurita, risolveremo quindi un circuito in regime stazionario, in cui i condensatori e gli induttori si comportano come circuiti aperti corto circuiti, rispettivamente, e un circuito in regime sinusoidale. Si determini l'andamento a regime della tensione $v_1(t)$ in figura 11.12.

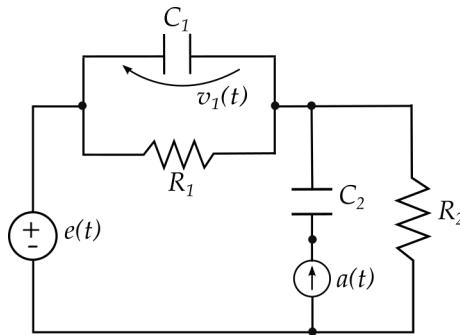


Figure 11.12: Il circuito, a regime, verrà risolto sovrapponendo gli effetti dei due generatori.

Iniziamo passivando $a(t)$: il condensatore C_2 rimane appeso e il condensatore C_1 si comporta come un circuito aperto dato che $e(t) = E$ e siamo a regime stazionario. Il circuito equivalente è riportato in figura 11.13. Si ricava banalmente $v_1^e(t) = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$.

Il caso in cui si passivi $e(t)$, che viene dunque sostituito da un corto circuito, dà origine al circuito in figura 11.14.

Come prima cosa si ricava il fasore \bar{a} che corrisponde a $a(t) = A \sin \omega t$. Dalle relazioni trigonometriche di base sappiamo che $A \sin \omega t = A \cos(\omega t - \pi/2)$ e quindi $\bar{a} = A e^{-j\pi/2} = -jA$. L'impedenza equivalente al parallelo di C_1 , R_1 ed R_2 è

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} , \quad (11.74)$$

conseguentemente

$$\bar{v}_1 = -\frac{R_1 R_2 (-jA)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} = \frac{jR_1 R_2 A}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} . \quad (11.75)$$

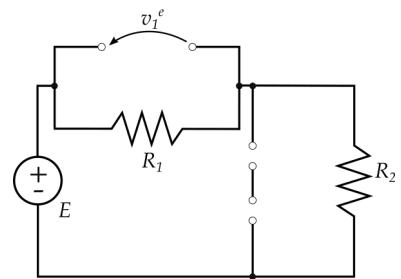


Figure 11.13: Circuito in regime stazionario.

La forma d'onda cercata sarà dunque

$$\begin{aligned}
 v_1^a(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_1 e^{j\omega t}\} = \\
 &= \underbrace{\frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C_1)^2}}_{I_a} \operatorname{Re}\{j(R_1 + R_2 - j\omega R_1 R_2 C_1) e^{j\omega t}\} \\
 &= I_a \operatorname{Re}\{[j(R_1 + R_2) + \omega R_1 R_2 C_1](\cos \omega t + j \sin \omega t)\} \\
 &= I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega t - (R_1 + R_2) \sin \omega t)
 \end{aligned} \quad (11.76)$$

Complessivamente, quindi,

$$v_1(t) = v_1^e(t) + v_1^a(t) = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} + I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega t - (R_1 + R_2) \sin \omega t) \quad (11.77)$$

11.9 Il regime multi-frequenziale

L'ESEMPIO PROPOSTO nel paragrafo 11.8.5 è un caso particolare di circuito che evolve in regime multi-frequenziale in cui una delle frequenze coinvolte è nulla, ovvero contribuisce con termini costanti che comportano il regime stazionario. Più in generale, però, possiamo pensare ad un circuito costituito da N -terminali lineari, tempo-invarianti dinamici e adinamici, che ammette un regime e che contenga generatori indipendenti di tipo sinusoidale ma a pulsazioni diverse. In questo caso, proprio come si è fatto nell'esempio del paragrafo 11.8.5, si agisce applicando la sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo e risolvendo, con una tecnica opportuna, tanti circuiti, ciascuno per ogni ingresso o per ogni famiglia di ingressi simili (ad esempio tutti quelli costanti o tutti quelli alla medesima pulsazione). Nel caso di più pulsazioni ω_k , se ne ipotizzino M , si risolverà un circuito con il metodo dei fasori per ogni pulsazione. È estremamente importante notare che i componenti la cui impedenza, ad esempio, dipende dalla pulsazione, avranno equazioni costitutive diverse per pulsazioni diverse. Un condensatore, ad esempio, la cui equazione costitutiva nel dominio del tempo sia $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$, avrà nel dominio dei fasori impedenza $j\omega_k C$. Allo stesso modo, quando si passerà dal dominio dei fasori al dominio del tempo, sarà necessario farlo con cura, utilizzando la pulsazione corrispondente alla famiglia di generatori sinusoidali che si stanno considerando.

PER ESEMPLIFICARE IL CONCETTO si consideri il circuito in figura 11.12 dove però il generatore di corrente sia $a(t) = A \sin(\omega_1 t)$ e quello di tensione sia $e(t) = E \cos(\omega_2 t)$. Il calcolo di $v_1^a(t)$, ovvero la componente di $v_1(t)$ dovuta all'ingresso $a(t)$ procederà in modo

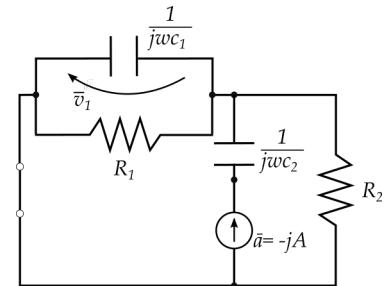


Figure 11.14: Circuito in regime sinusoidale. Le grandezze elettriche sono state evidenziate mediante i fasori corrispondenti.

analogo a quello proposto nell'esercizio e si otterrà

$$\begin{aligned}
 v_1^a(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_1 e^{j\omega_1 t}\} = \\
 &= \underbrace{\frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 R_1 R_2 C_1)^2}}_{I^a} \operatorname{Re}\{j(R_1 + R_2 - j\omega_1 R_1 R_2 C_1) e^{j\omega_1 t}\} \\
 &= I_a \operatorname{Re}\{[j(R_1 + R_2) + \omega_1 R_1 R_2 C_1](\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t)\} \\
 &= I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega_1 t - (R_1 + R_2) \sin \omega_1 t)
 \end{aligned} \tag{11.78}$$

Si noti che la pulsazione utilizzata per definire le impedenze e per "ritornare" nel dominio del tempo è ω_1 , ovvero la pulsazione di $a(t)$.

Qualora invece si voglia calcolare $v_1^e(t)$, ovvero la componente di $v_1(t)$ dovuta all'ingresso $e(t)$, si dovrà utilizzare la pulsazione ω_2 per ottenere, utilizzando un partitore di tensione,

$$\bar{v}_1^e = \frac{\frac{R_1}{1+j\omega_2 C_1 R_1}}{\frac{R_1}{1+j\omega_2 C_1 R_1} + R_2} E = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega_2 C_1 R_1 R_2} E \tag{11.79}$$

Per ottenere $v_1^e(t)$ si dovrà dunque valutare

$$\begin{aligned}
 v_1^e(t) &= \operatorname{Re}\left\{\frac{R_1 E}{R_1 + R_2 + j\omega_2 C_1 R_1 R_2} e^{j\omega_2 t}\right\} \\
 &= \frac{R_1 E}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_2 R_1 R_2 C_1)^2} \operatorname{Re}\{(R_1 + R_2 - j\omega_2 R_1 R_2 C_1) e^{j\omega_2 t}\} \\
 &= \frac{R_1 E}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_2 R_1 R_2 C_1)^2} [(R_1 + R_2) \cos \omega_2 t + \omega_2 R_1 R_2 C_1 \sin \omega_2 t]
 \end{aligned} \tag{11.80}$$

Si faccia attenzione al fatto che non è possibile sommare i fasori \bar{v}_1^a e \bar{v}_1^e dato che sono riferiti a pulsazioni diverse. Sommiamo invece le funzioni ottenute nel dominio del tempo per esprimere $v_1(t) = v_1^a(t) + v_1^e(t)$.

11.10 Funzioni di rete

ABBIAMO VISTO CHE in regime sinusoidale, dato un bipolo caratterizzato dalla tensione descrittiva $v(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{v}) e la corrente $i(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{i}), se ammette la base di definizione corrente, è possibile definire l'impedenza $Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$ (cfr paragrafo 11.6). In modo completamente duale è possibile definire l'ammettenza $Y(j\omega) = \frac{\bar{i}}{\bar{v}}$ se il bipolo ammette la base di definizione tensione.

SI PUÒ PENSARE DI GENERALIZZARE questo concetto introducendo le **funzioni di rete** come rapporto tra due fasori qualunque di un

circuito che evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Se considereremo il rapporto tra i fasori di due tensioni o due corrente otterremo un numero complesso, in generale funzione di ω , che non avrà dimensioni fisiche. Altrimenti, dal rapporto di un fasore di una tensione e di una corrente, o viceversa, potremmo ottenere un numero complesso, ancora in generale funzione di ω , che avrà le dimensioni fisiche di un'impedenza (Ω) o di un'ammettenza (Ω^{-1}). In generale si usa la notazione $H(j\omega)$ per indicare un funzione di rete.

SI CONSIDERI, AD ESEMPIO, un circuito che contenga M_E generatori di tensione e M_A generatori di corrente alla pulsazione ω . Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, sappiamo che la generica tensione $v(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{v}) sarà esprimibile come somma di contributi dovuti ciascuno ad uno degli $M_E + M_A$ generatori presenti. I contributi saranno ottenuti pesando opportunamente i fasori associati a ciascun ingresso e potremo scrivere

$$\bar{v} = H_1^A(j\omega)\bar{A}_1 + \cdots + H_{M_A}^A(j\omega)\bar{A}_{M_A} + H_1^E(j\omega)\bar{E}_1 + \cdots + H_{M_E}^E(j\omega)\bar{E}_{M_E}. \quad (11.81)$$

Ciascuno dei coefficienti complessi $H_k^A(j\omega)$ ($k = 1, \dots, M_A$) e $H_h^E(j\omega)$ ($h = 1, \dots, M_E$) è una funzione di rete. Ciascuna di queste funzioni di ω rappresenta la **risposta in frequenza** che lega \bar{v} all'ingresso corrispondente. Vediamo con un paio di esempi da cosa deriva il termine "risposta in frequenza".

11.10.1 Un filtro passa-basso

CONSIDERIAMO IL SEMPLICE circuito RC in figura 11.15 in cui interpretiamo la tensione $e(t) = E \cos \omega t$ come **ingresso** della rete e la tensione $v(t)$ del condensatore C come **uscita**. Si ricava molto facilmente la funzione di rete (adimensionale) che lega nel dominio dei fasori le due grandezze

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{1}{1+j\omega RC}}_{H(j\omega)} E = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}}_{|H(j\omega)|} e^{j \overbrace{(-\text{atan}(\omega RC))}^{\arg(H(j\omega))}} E \quad (11.82)$$

Se si analizza adesso l'andamento del modulo $|H(j\omega)|$ della funzione di rete, si ricava che $|H(0)=1|$ e che $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = 0$. Per $\omega_t = \frac{1}{RC}$, che è definita **pulsazione di taglio** del filtro passa basso, $|H(j\omega_t)| = \sqrt{2}/2$. Per quanto riguarda la fase della funzione di rete,

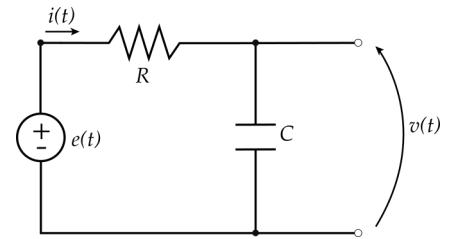


Figure 11.15: Circuito in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

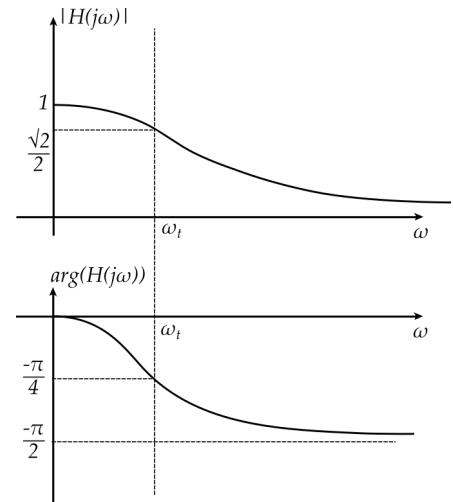


Figure 11.16: Il modulo (in alto) e la fase (in basso) della funzione di rete $\frac{1}{1+j\omega RC}$.

invece, $\arg(H(0)) = 0$, $\arg(H(j\omega_t)) = -\pi/4$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\arg(H(j\omega))| = -\pi/2$.

L'andamento del modulo e della fase della funzione di trasferimento $H(j\omega)$ è riportato in figura 11.16. Dall'andamento di $|H(j\omega)|$, in particolare, si capisce perché questo circuito, di cui $e(t)$ è l'ingresso e $v(t)$ l'uscita, prende il nome di passa basso. Qualora la pulsazione ω sia "bassa", infatti, l'ampiezza dell'uscita del circuito risulta molto meno attenuata rispetto a E di quanto non avvenga ad alte frequenze, per le quali, al limite, l'ampiezza dell'uscita tende a zero. Ad esempio, dato che $|H(j\omega_t/10)| \approx 0.995$, in un intervallo di pulsazioni pari a $[0, \omega_t/10]$, l'ingresso viene attenuato del 5%. Si nota anche come per basse frequenze l'uscita sia un versione pressoché non sfasata dell'ingresso, dato che la funzione arcotangente è sufficientemente piatta per valori piccoli del suo argomento. In particolare, $-\text{atan}(0.1) \approx -5^\circ$ e quindi in un intervallo di pulsazioni pari a $[0, \omega_t/10]$ l'uscita risulta sfasata di al più -5° .

Se ci mettessimo invece nell'intervallo di pulsazioni $[10\omega_t, 100\omega_t]$, l'uscita sarebbe attenuata da circa il 90% all'99% e sfasata da circa -84° a -89° .

Possiamo allora immaginare di sostituire $e(t)$ mono-frequenziale con $e(t) = \sum_{k=1}^K E_k \cos \omega_k t$. Per ciascuna pulsazione ω_k potremo applicare il metodo fasoriale e ritornando da ultimo nel dominio del tempo, ottenere $v(t)$ sommando tutti i contributi a pulsazioni diverse. L'uscita $v(t)$ sarà la sovrapposizione di K termini dei quali quelli per alti valori di ω_k risulteranno sempre più attenuati. Ovviamente "basso" e "alto" di per sè non hanno alcun significato ma è lo specificare la pulsazione di taglio del filtro, attraverso R e C , che ci consente di selezionare quali pulsazioni "basse" rispetto a ω_t preservare e quali, "alte" rispetto a ω_t , tagliare.

11.10.2 Un filtro passa alto

IL CIRCUITO RAPPRESENTATO IN figura 11.15, rappresenta un filtro di tipo passa alto qualora l'uscita considerata sia la corrente $i(t)$ rappresentata mediante il fasore \bar{i} . Possiamo infatti scrivere

$$\bar{i} = \frac{E - \frac{\bar{i}}{j\omega C}}{R}, \quad (11.83)$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right) \bar{i} = \frac{E}{R} \quad (11.84)$$

e quindi

$$\bar{I} = \underbrace{\frac{j\omega C}{1+j\omega RC}}_{H(j\omega)} E = \underbrace{\frac{\omega C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}}_{|H(j\omega)|} e^{j(\pi/2 - \text{atan}(\omega RC))} E . \quad (11.85)$$

Se si studia l'andamento del modulo e della fase della funzione di rete $H(j\omega)$ si ricava che $|H(0)| = 1$, $|H(j\omega_t)| = 2/\sqrt{2R}$ ($\omega_t = 1/RC$) e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = 1/R$. Per quanto riguarda la fase della funzione di rete, $\arg(H(0)) = \pi/2$, $\arg(H(j\omega_t)) = \pi/4$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\arg(H(j\omega))| = 0$. Il comportamento del filtro, il cui andamento di modulo e fase è riportato in figura 11.17, è il duale del filtro passa basso.

11.11 La potenza in regime sinusoidale

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO LINEARE, tempo-invariante, dinamico, che ammetta il funzionamento in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Identificando uno qualunque dei lati del suo grafo, possiamo certamente scrivere la tensione e la corrente descrittiva di quel lato, prese con la convenzione degli utilizzatori, come

$$\begin{aligned} v(t) &= V \cos(\omega t + \varphi_V) \\ i(t) &= I \cos(\omega t + \varphi_I) \end{aligned} , \quad (11.86)$$

che sarà poi rappresentata mediante i fasori $\bar{v} = Ve^{j\varphi_V}$ e $\bar{I} = Ie^{j\varphi_I}$, rispettivamente.

LA POTENZA ISTANTANEA assorbita dal lato di grafo che stiamo considerando è pari a⁵

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v(t)i(t) = V \cos(\omega t + \varphi_V) I \cos(\omega t + \varphi_I) \\ &= \underbrace{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)}_{\text{potenza media}} + \underbrace{\frac{VI}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I + \overbrace{(\varphi_V - \varphi_V)}^{\text{agg./tolto } \varphi_V})}_{P} \\ &= \underbrace{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)}_{\text{potenza media}} + \underbrace{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) \cos(2\omega t + 2\varphi_V)}_{p_a^{\text{attiva istantanea}}(t)} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \sin(2\omega t + 2\varphi_V)}_{p_a^{\text{reattiva istantanea}}(t)} \end{aligned} \quad (11.87)$$

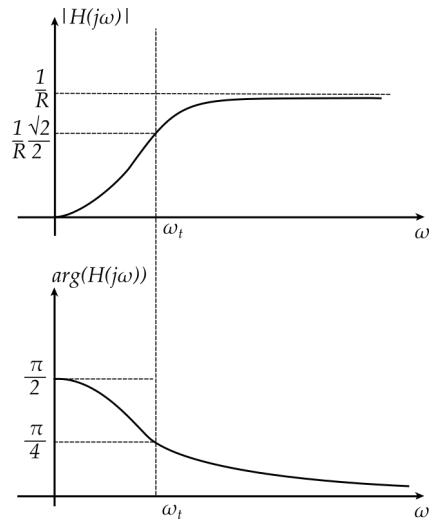


Figure 11.17: Il modulo (in alto) e la fase (in basso) della funzione di rete $\frac{j\omega C}{1+j\omega RC}$.

⁵ Si ricordi che

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

e

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Come si può notare i termini P e Q introducono un sistema fasoriale alla pulsazione 2ω ; inoltre si nota come il termine P coincide numericamente con il valore della potenza media che *effettivamente compie lavoro*. I termini P e Q prendono il nome di **potenza attiva** e **potenza reattiva**, rispettivamente.

$p_a^{\text{r.i.}}(t)$ è la potenza che istante per istante viene scambiata dal lato in questione con gli elementi del circuito in grado di immagazzinare ed erogare energia. La si osserva solo se $\sin(\varphi_V - \varphi_I) \neq 0$. Tuttavia, in media, il suo valore sul periodo è nullo ad indicare che *nei lati del circuito in cui* $\sin(\varphi_V - \varphi_I) \neq 0$ i contributi assorbiti ed erogati di potenze reattive si bilanciano in media nel periodo.

Si noti che per i lati del circuito che ammettono un'impedenza $Z(j\omega) = \bar{v}/\bar{i} = |Z|e^{j\varphi_Z}$ (sono quindi esclusi i generatori indipendenti di tensione e corrente), $\varphi_V - \varphi_I = \varphi_Z$. Se l'impedenza fosse puramente immaginaria (cioè di tipo capacitivo o induttivo) la potenza media assorbita nel periodo sarebbe nulla, dato che $\cos \varphi_Z = 0$ e $\langle p_a^{\text{r.i.}}(t) \rangle = 0$.

Per i lati che ammettono rappresentazione mediante impedenza $Z(j\omega)$ questo implica che la potenza reattiva istantanea si osserva solo se l'impedenza non è resistiva ($\sin(\varphi_Z) \neq 0$).

Nel ricavare la equazione (11.87) si è sommato/sottratto arbitrariamente la fase φ_V ; si sarebbe potuto in modo del tutto lecito sommare/sottrarre la fase φ_I . In questo caso avremmo ottenuto

$$\begin{aligned} p_a(t) &= \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) \cos(2\omega t + 2\varphi_I) + \\ &\quad - \frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \sin(2\omega t + 2\varphi_I) \end{aligned} \tag{11.88}$$

Come si nota la potenza Q ha segno opposto rispetto all'equazione 11.87. Questo dà origine a due possibili convenzioni per la potenza complessa \hat{A} che introdurremo a breve che differiscono per come essa si ricava dai fasori \bar{v} ed \bar{i} . Per il momento adottiamo la 11.87 ed evidenzieremo nel seguito le conseguenze dell'altra scelta.

PER QUANTO RIGUARDA il resistore, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = R\bar{i}$ e quindi $\varphi_Z = 0$. Di conseguenza

$$P = \frac{|\bar{v}| |\bar{i}|}{2} \cos 0 = \frac{R |\bar{i}|^2}{2} = \frac{|\bar{v}|^2}{2R} \tag{11.89}$$

e $Q = 0$. Se ne deduce che il resistore non immagazzina energia che "scambia" con gli altri componenti del circuito ma semplicemente dissipia tutto ciò che assorbe.

Per il condensatore, invece, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = -\frac{j}{\omega C}\bar{i}$ e $\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$. Si ricava

$$P = \frac{|\bar{v}| |\bar{i}|}{2} \cos(-\pi/2) = 0 \tag{11.90}$$

e

$$Q = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{|\bar{i}|^2}{2\omega C} = -\frac{|\bar{v}|^2 \omega C}{2} . \quad (11.91)$$

Se ne deduce che il condensatore non dissipà la potenza che assorbe ma la "scambia".

Infine, per l'induttore, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = j\omega L\bar{i}$ e $\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$. Quindi

$$P = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \cos(\pi/2) = 0 \quad (11.92)$$

e

$$Q = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \sin(\pi/2) = \frac{\omega L |\bar{i}|^2}{2} = \frac{|\bar{v}|^2}{2\omega L} . \quad (11.93)$$

Anche l'induttore come il condensatore non dissipà la potenza che assorbe ma la "scambia".

UNA GENERICA IMPEDENZA $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |Z(j\omega)|e^{j\varphi_Z}$ di tipo capacitivo (cfr. paragrafo 11.6), caratterizzata cioè da un reattanza negativa, comporta una Q negativa; del resto, se $X(\omega) < 0$, $\varphi_Z \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Viceversa, un'impedenza di tipo induttivo, avrà $X(\omega) > 0$ e quindi $\varphi_Z \in [0, \pi/2]$. Si noti che l'angolo $\varphi_Z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dato se consideriamo impedenze con parte resistiva $R(\omega) \geq 0$.

INTRODUCIAMO ADESSO LA POTENZA COMPLESSA come il numero complesso

$$\hat{A} = P + jQ = \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + j\frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) = \frac{VI}{2} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} . \quad (11.94)$$

Ancora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P &= |\hat{A}| \cos(\varphi_V - \varphi_I) , \\ Q &= |\hat{A}| \sin(\varphi_V - \varphi_I) \end{aligned} \quad (11.95)$$

con $A = |\hat{A}|$ che prende il nome di **potenza apparente**.

La potenza apparente si misura in VA e non esplicitamente in W. Ciò viene fatto per ricordare che la potenza complessa non viene trasformata tutta in effettivo lavoro ma solo la sua parte reale P (la potenza attiva che esprimiamo in W) contribuisce ad esso. La potenza reattiva Q si esprime invece in VA *reattivi*.⁶

Come possiamo ricavare \hat{A} a partire dai fasori $\bar{v} = Ve^{j\varphi_V}$ e $\bar{i} = Ie^{j\varphi_I}$ che rappresentano la tensione e la corrente del lato del circuito che stiamo considerando? Un primo tentativo potrebbe essere quello di calcolare

$$\bar{v}\bar{i} = Ve^{j\varphi_V} Ie^{j\varphi_I} = VIe^{j(\varphi_V + \varphi_I)} , \quad (11.96)$$

che però non porta ad un risultato corretto. In primo luogo perché (si veda l'equazione 11.94) il modulo andrebbe diviso per 2 e poi perché

⁶ Nonostante la potenza complessa sia di fatto un fasore, essa è riferita alla pulsazione 2ω , come evidenziato a fronte della 11.87, per un circuito che si trova a regime sinusoidale alla pulsazione ω . Per questo motivo la scriviamo usando il "cappelletto" invece della "barretta".

la fase della potenza \hat{A} dipenderebbe da $\varphi_V + \varphi_I$ e non da $\varphi_V - \varphi_I$. Un secondo tentativo, allora, sarà quello di valutare

$$\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} = \frac{VI}{2}e^{j\varphi_V}e^{-j\varphi_I} = \frac{VI}{2}e^{j(\varphi_V-\varphi_I)} . \quad (11.97)$$

Si ottiene quindi

$$\hat{A} = P + jQ = \frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} \quad (11.98)$$

e, ovviamente, $P = \text{Re}\{\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2}\}$ e $Q = \text{Im}\{\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2}\}$.

A questo punto possiamo tornare un momento alle due possibili scelte che ci hanno portato alla 11.87 ed alla 11.88. La prima, che prende il nome di convenzione *europea*, proietta (si veda la 11.97) il fasore tensione che ha fase φ_V sul fasore corrente che ha fase φ_I , cioè la fase della potenza complessa è $\varphi_V - \varphi_I$, in modo da ottenere il segno positivo per la potenza reattiva Q .

L'altra convenzione prende il nome di *americana* e proietta il fasore corrente che ha fase φ_I sul fasore tensione che ha fase φ_V per avere il segno positivo per la potenza Q , cioè la fase della potenza complessa è $\varphi_I - \varphi_V$, altrimenti si avrà il segno negativo. Con la convenzione americana si ha dunque $\hat{A} = P + jQ = \frac{\bar{v}^*\bar{i}}{2}$.

Noi adottiamo la convenzione europea che, come si vedrà, porterà ad avere potenza reattiva positiva per gli induttori e negativa per i condensatori, in opposizione a quella americana che avrebbe potenza Q positiva per i condensatori e negativa per gli induttori.

Poichè la potenza complessa introdotta nella 11.94 è stata definita a partire da una tensione ed una corrente di lato (e relativi fasori) prese con la convenzione normale, si tratta di una *potenza complessa assorbita*. Se fossimo interessati alla **potenza complessa erogata** dovremmo calcolare $-\hat{A} = -\frac{\bar{v}^*\bar{i}}{2}$, ovvero potremmo scegliere \bar{v} e \bar{i} con la convenzione dei generatori.

11.11.1 Un primo esempio di calcolo della potenza complessa

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 11.18 che evolve in regime sinusoidale alla pulsazione di riferimento ω . Si calcoli la potenza complessa assorbita dal bipolo composito connesso al generatore \bar{E} .

Possiamo procedere calcolando l'impedenza equivalente al bipolo composito che risulta essere data dalla connessione in serie dell'induttore L e del parallelo tra R e C , ovvero

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \\ &= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} \end{aligned} . \quad (11.99)$$

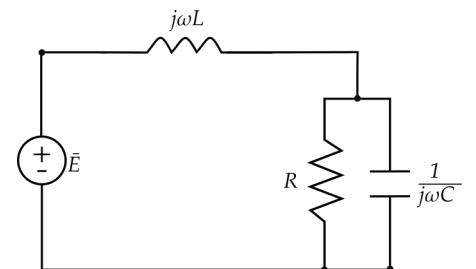


Figure 11.18: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

La corrente rappresentata dal fasore \bar{i} è dunque pari a $\frac{\bar{E}}{Z(j\omega)}$, cioè

$$\bar{i} = \frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \bar{E} . \quad (11.100)$$

La potenza complessa assorbita dal bipolo composito è pari a

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\bar{E}\bar{i}^*}{2} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \left(\frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \right)^* \\ &= \frac{|\bar{E}|^2 [(1 + j\omega RC)(R - \omega^2 RLC - j\omega L)]^*}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} \\ &= \underbrace{\frac{|\bar{E}|^2}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} (R - \omega^2 RLC + \omega^2 RLC)}_{\kappa} . \\ &- \underbrace{\frac{j|\bar{E}|^2}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} (\omega R^2 C - \omega^3 R^2 L C^2 - \omega L)}_{\kappa} \\ &= \kappa [R - j(\omega R^2 C - \omega^3 R^2 L C^2 - \omega L)] \end{aligned} \quad (11.101)$$

11.11.2 Il "triangolo" delle potenze

CONSIDERIAMO IL GENERICO LATO di un grafo che si riferisca ad un circuito che evolve in regime sinusoidale permanente. Come abbiamo fatto nell'introdurre la potenza complessa, siano la tensione e la corrente descrittiva di quel lato, prese con la convenzione degli utilizzatori,

$$\begin{aligned} v(t) &= V \cos(\omega t + \varphi_V) \\ i(t) &= I \cos(\omega t + \varphi_I) \end{aligned} , \quad (11.102)$$

rappresentate mediante i fasori $\bar{v} = V e^{j\varphi_V}$ e $\bar{i} = I e^{j\varphi_I}$, rispettivamente. Per semplicità assumiamo $\varphi_V - \varphi_I \in [-\pi/2, \pi/2]$, ovvero $\cos(\varphi_V - \varphi_I) \geq 0$, e quindi il lato in questione dissipava effettivamente la potenza attiva assorbita (o entrante). Facendo riferimento alla figura 11.19, si dice che il fasore \bar{i} è in *anticipo* rispetto al fasore \bar{v} , nel caso rappresentato in alto, e che \bar{i} è in *ritardo* rispetto al fasore \bar{v} nel caso in basso. Le due situazioni limite sono, rispettivamente, quelle in cui $\varphi = \varphi_V - \varphi_I = -\pi/2$ o $\varphi = \varphi_V - \varphi_I = \pi/2$. Il lato in questione, qualora ammetta un'impedenza equivalente, sarà quindi di tipo puramente capacitivo o induttivo. La posizione relativa tra i fasori, che determina l'eventuale anticipo o ritardo, è da intendersi relativamente alla rotazione antioraria del piano fasoriale (cfr. figura 11.4).

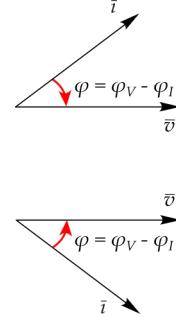


Figure 11.19: L'orientamento della freccia in corrispondenza dell'angolo φ indica che nel caso in alto (corrente in anticipo rispetto alla tensione) $\varphi \leq 0$ mentre, nel caso in basso, (corrente in ritardo rispetto alla tensione) $\varphi \geq 0$.

DAL PUNTO DI VISTA DELLA POTENZA COMPLESSA le due diverse situazioni discusse si traducono, utilizzando un piano fasoriale rotante a pulsazione 2ω , nei triangoli di potenze di figura 11.20.

In particolare, l'anticipo del fasore di corrente si traduce nell'anticipo del vettore che rappresenta la potenza attiva, preso sull'asse delle ascisse del piano complesso, rispetto alla potenza complessa \hat{A} . Analogamente il ritardo di \bar{t} rispetto a \bar{v} comporta il ritardo di \hat{A} . La potenza reattiva Q è infatti negativa nel primo caso e positiva nel secondo. Si definisce **fattore di potenza** il coseno dell'angolo φ come

$$\cos \varphi = \frac{P}{|\hat{A}|} . \quad (11.103)$$

Poichè $\cos(\varphi) \geq 0$ per $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, il caso in cui $Q \leq 0$ si specifica fornendo $\cos(\varphi)$ e la dicitura “in anticipo” e il caso in cui $Q \geq 0$ si specifica fornendo $\cos(\varphi)$ e la dicitura “in ritardo”. In questo modo, nel primo caso $\varphi = -\arccos\left(\frac{P}{|\hat{A}|}\right)$ e nel secondo $\varphi = \arccos\left(\frac{P}{|\hat{A}|}\right)$. Una volta ricavato φ con il segno opportuno,

$$Q = P \tan \varphi . \quad (11.104)$$

11.12 Il teorema di Boucherot

IL TEOREMA DI BOUCHEROT può essere visto come l'estensione al dominio dei fasori del teorema di Tellegen (cfr. paragrafo 3.2). In particolare, si consideri un circuito il cui grafo ad n nodi sia connesso e i cui l lati siano orientati secondo la convenzione normale. Se si introducono i vettori v ed i che raccolgono le tensioni e le corrispondenti correnti descrittive del circuito, il teorema di Tellegen afferma che $v^T i = 0$.

Questa relazione può essere estesa ai fasori che rappresentano le tensioni e le correnti di lato qualora il circuito evolva in regime sinusoidale. Infatti, sappiamo che i fasori soddisfano le equazioni di Kirchhoff del circuito e i vettori \bar{v} e \bar{i} sono quindi compatibili con il grafo. Tuttavia la relazione $\bar{v}^T \bar{i} = 0$ non generalizza il teorema di Tellegen dato che i termini $\bar{v}_k \bar{i}_k$ che la costituiscono ($k = 1, \dots, l$) non rappresentano la potenza complessa assorbita dal lato k -esimo.

Si noti però che anche il vettore \bar{i}^* rappresenta un insieme di correnti compatibili con il grafo del circuito. Infatti, se consideriamo la generica KCL al nodo j -esimo del grafo, possiamo scrivere

$$\sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \bar{i}_h = \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} + j \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} = 0 , \quad (11.105)$$

con N_j il numero di lati che incidono al nodo j e α_h un coefficiente che vale $+1$ o -1 in base al verso della corrente \bar{i}_h (ad esempio $+1$

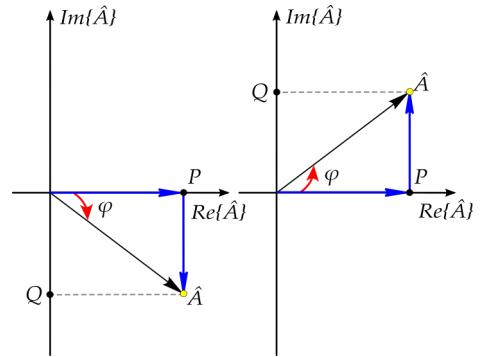


Figure 11.20: L'angolo φ ha lo stesso valore e lo stesso segno di figura 11.19.

se entrante nel nodo j e -1 se uscente). Dalla scrittura precedente si deriva che (cfr. paragrafo 11.2.1) che

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} &= 0 \\ \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} &= 0\end{aligned}, \quad (11.106)$$

e quindi anche \bar{i}^* è compatibile con la KCL al nodo j dato che

$$\sum_{h=1}^{N_j} \bar{i}_h^* = \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} - j \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} = 0 . \quad (11.107)$$

Questo ragionamento si estende a tutti i nodi del grafo e quindi possiamo generalizzare il teorema di Tellegen nel modo seguente

$$\frac{1}{2} \bar{v}^T \bar{i}^* = \sum_{k=1}^l P_k + j Q_k = 0 , \quad (11.108)$$

da cui

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^l P_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^l Q_k &= 0\end{aligned}. \quad (11.109)$$

Quest'ultima coppia di relazioni è il teorema di Boucherot da cui si evince che in un circuito che funziona in regime sinusoidale, il cui grafo sia连通的, esiste un principio di conservazione della potenza attiva e della potenza reattiva.

11.12.1 Un esempio di applicazione

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 11.21 e si calcoli la potenza reattiva Q_e^E erogata dal generatore indipendente di tensione che è rappresentato dal fasore \bar{E} . Applicando il teorema di Boucherot possiamo scrivere che

$$Q_a^E + \underbrace{Q_a^{R_1}}_{=0} + \underbrace{Q_a^{R_2}}_{=0} + Q_a^C = Q_a^E + Q_a^C = 0 \quad (11.110)$$

da cui si ricava che $-Q_a^E = Q_e^E = Q_a^C$. Possiamo quindi ricavare la potenza reattiva assorbita dal condensatore per valutare la potenza reattiva erogata dal generatore di tensione.

$$\bar{v}_C = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C}} \bar{E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \bar{E} \quad (11.111)$$

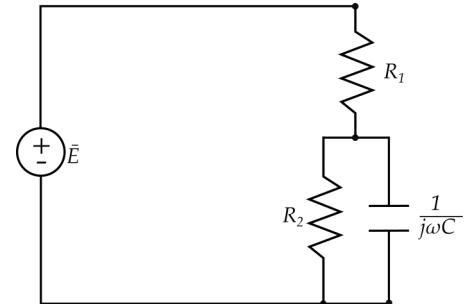


Figure 11.21: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

Sapendo che $Q_a^C = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C \bar{i}_C^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C (\text{j}\omega C \bar{v}_C)^*}{2} \right\}$, si ottiene
 $Q_e^E = -\omega C \frac{|\bar{v}_C|^2}{2}$, ovvero

$$Q_e^E = -\frac{\omega C}{2} \frac{R_2^2 E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2} . \quad (11.112)$$

11.12.2 Un secondo esempio di applicazione

SI CALCOLI LA POTENZA COMPLESSA erogata dai due generatori in figura 11.22 rappresentati dai fasori \bar{A} ed \bar{E} . Si procede applicando la sovrapposizione degli effetti e passivando per primo il generatore \bar{A} . Così facendo il condensatore rimane appeso e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P_a^E + P_a^R &= 0 \\ Q_a^E + Q_a^L &= 0 \end{aligned} , \quad (11.113)$$

da cui

$$\begin{aligned} P_e^E = P_a^R &= \text{Re} \left\{ \frac{\bar{v}_R \bar{i}_R^*}{2} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{\bar{E} \left(\frac{\bar{E}}{R} \right)^*}{2} \right\} = \frac{E^2}{2R} \\ Q_e^E = Q_a^L &= \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_L \bar{i}_L^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{E} \left(\frac{\bar{E}}{\text{j}\omega L} \right)^*}{2} \right\} = \frac{E^2}{2\omega L} \end{aligned} . \quad (11.114)$$

Passivando adesso il generatore di tensione, il resistore e l'induttore sono corto circuitati. Il generatore non eroga quindi potenza attiva dato che rimane solo il condensatore ad assorbire potenza complessa. Per quanto riguarda Q_e^A , invece, possiamo scrivere

$$Q_e^A = Q_a^C = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C \bar{i}_C^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\frac{\bar{A}}{\text{j}\omega C} \bar{A}^*}{2} \right\} = -\frac{A^2}{2\omega C} . \quad (11.115)$$

11.12.3 Il Teorema di Boucherot e il triangolo delle potenze

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 11.23. Denominata \hat{S} la potenza complessa assorbita dalle due impedenze Z_1 e Z_2 , caratterizzata da $|\hat{S}| = 10\text{VA}$ e $\cos \varphi_S = 0.8$ in anticipo, sapendo che $Q_2 = 0$ e $P_2 = 3\text{W}$ (assorbite), si determinino la potenza reattiva $Q_S = \Im \hat{S}$, P_1 e Q_1 (assorbite) e il tipo di impedenza di Z_1 .

Per ricavare Q_S possiamo scrivere $Q_S = -\sqrt{|\hat{S}|^2 - P_S^2}$ con $P_S = |\hat{S}| \cos \varphi_S = 8\text{W}$. Quindi $Q_S = -6\text{VA}$ reattivi. Si noti il segno “-” dovuto al fatto che \hat{S} è stata specificata con un fattore di potenza in anticipo, ovvero P_S in anticipo rispetto alla potenza complessa e

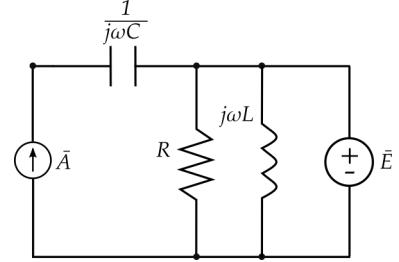


Figure 11.22: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

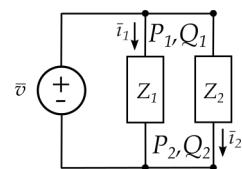


Figure 11.23: Le potenze $P_1 + \text{j}Q_1$ e $P_2 + \text{j}Q_2$ sono entranti o assorbite dalle impedenze Z_1 e Z_2 .

quindi $Q_S \leq 0$, come nel caso in basso di figura 11.20. Utilizzando ora il teorema di Boucherot possiamo scrivere $Q_S = Q_1 + Q_2 = Q_1$ e $P_S = P_1 + P_2 = P_1 + 3W$. Da queste relazioni possiamo ricavare $Q_1 = -6\text{VA}$ reattivi e $P_1 = 5\text{W}$. Si deduce inoltre che, essendo $Q_1 < 0$ e $P_1 > 0$, Z_1 è un'impedenza di tipo resistivo-capacitivo.

Possiamo ancora disegnare il diagramma fasoriale qualitativo in figura 11.24 sapendo che (i) la corrente \bar{i}_2 e la tensione \bar{v} sono in fase essendo $Q_2 = 0$ e (ii) \bar{i}_1 è in anticipo rispetto a \bar{v} essendo $Q_1 < 0$.

11.13 Il rifasamento

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 11.25 in cui un generatore di tensione sinusoidale alla pulsazione ω è connesso ad un'impedenza $Z(j\omega) = |Z|e^{j\varphi_Z}$ attraverso una *linea di trasmissione* che modelliamo con un resistore di resistenza R . Possiamo quindi pensare che l'impedenza sia un utilizzatore della potenza erogata da \bar{E} e il flusso di potenza tra i due bipoli avvenga attraverso un collegamento non ideale ma con perdite che assumiamo puramente resistivo. Applicando il teorema di Boucherot possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P_e^E &= P_a^R + P_a^Z, \\ Q_e^E &= Q_a^Z \end{aligned} \quad (11.116)$$

e quindi una parte della potenza attiva erogata da \bar{E} viene assorbita dalla connessione.

Se si indica con \bar{I} la corrente che circola nel circuito, $P_a^R = \frac{R|\bar{I}|^2}{2}$ e

$$P_a^Z = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{v}_Z \bar{I}^*}{2} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{|Z|e^{j\varphi_Z} \bar{I} \bar{I}^*}{2} \right\} = \frac{|\bar{I}| |\bar{v}_Z|}{2} \cos \varphi_Z. \quad (11.117)$$

Il modulo della corrente che circola nel resistore è quindi pari a $|\bar{I}| = \frac{2P_a^Z}{|\bar{v}_Z| \cos \varphi_Z}$ ed è minima in funzione della fase di Z quando $\cos \varphi_Z = 1$. La potenza attiva assorbita dalla linea è quindi minimizzata se il carico è puramente resistivo. Gli scambi di potenza reattiva, infatti, nonostante siano mediamente nulli sul periodo, avvengono attraverso una corrente che fluisce sulla linea e che contribuisce a perdite di potenza inutili. La potenza attiva erogata dal generatore, infatti, viene utilizzata dal carico (si pensi ad un motore elettrico che gira) mentre la potenza reattiva non dà contributi utili ma il suo effetto in termini di perdite non è nullo.

PER OTTIMIZZARE IL CIRCUITO dobbiamo agire sull'impedenza Z in modo tale che venga vista come puramente resistiva. Dato che, tipicamente, gli utilizzatori sono impedenze di tipo induttivo, possiamo provare a bilanciare la parte immaginaria dell'impedenza di

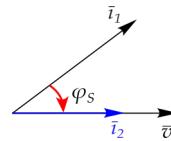


Figure 11.24: Diagramma fasoriale.

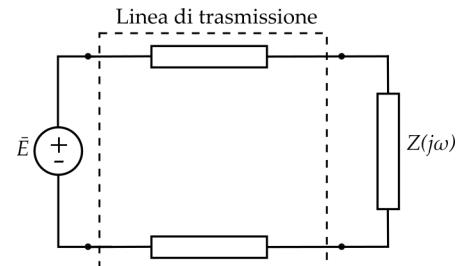


Figure 11.25: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

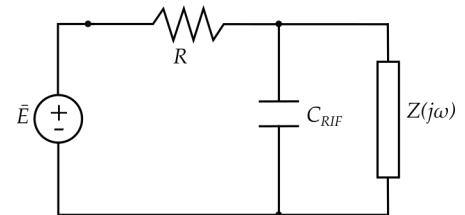


Figure 11.26: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

carico collegandole un **condensatore di rifasamento** C_{RIF} in parallelo (figura 11.26). Questo perché la reattanza del carico sarà positiva e quella del condensatore negativa e miriamo a scegliere C_{RIF} in modo tale che, complessivamente, $\text{Im}\{Z(j\omega) \parallel \frac{1}{j\omega C_{RIF}}\} = 0^{\circ}$.

In assenza del condensatore di rifasamento la potenza apparente assorbita dall'impedenza $Z(j\omega)$ è pari a

$$A_Z = \sqrt{P_Z^2 + Q_Z^2} = \frac{|\bar{v}_Z| |\bar{I}|}{2} \quad (11.118)$$

$$\text{e di conseguenza } |\bar{I}| = \frac{2\sqrt{P_Z^2 + Q_Z^2}}{|\bar{v}_Z|}.$$

Inserendo il condensatore di rifasamento, è necessario agire modificando il modulo della tensione \bar{E} affinché ai capi dell'impedenza $Z(j\omega)$ si misuri la stessa tensione $|\bar{v}_Z|$ che si rilevava in assenza di C_{RIF} . In questo caso quindi, la potenza apparente assorbita dall'impedenza equivalente $Z_{RIF}(j\omega) = Z(j\omega) \parallel \frac{1}{j\omega C_{RIF}}$ è

$$\tilde{A}_{Z_{RIF}} = \sqrt{P_Z^2 + (Q_Z + Q_{C_{RIF}})^2} = \frac{|\bar{v}_Z| |\bar{I}_{RIF}|}{2} \quad (11.119)$$

e di conseguenza $|\bar{I}_{RIF}| = \frac{2\sqrt{P_Z^2 + (Q_Z + Q_{C_{RIF}})^2}}{|\bar{v}_Z|}$ è il modulo del fasore della corrente che scorre in R .

Poiché $Q_{C_{RIF}} = -\frac{\omega C_{RIF} |\bar{v}_Z|^2}{2}$, è possibile scegliere una C_{RIF} tale che $Q_Z + Q_{C_{RIF}} = 0$ minimizzando quindi il modulo della corrente che scorre in R e che comporta un assorbimento indesiderato da parte della linea. Il valore da scegliere sarà

$$C_{RIF} = \frac{2Q_Z}{\omega |\bar{v}_Z|^2} = \frac{2}{\omega |\bar{v}_Z|^2} \underbrace{\frac{|\bar{v}_Z|^2 \sin \varphi_Z}{2|Z|}}_{Q_Z} = \frac{\sin \varphi_Z}{\omega |Z|}. \quad (11.120)$$

Dagli esercizi seguenti vedremo che il calcolo della capacità di rifasamento (o anche dell'induttanza di rifasamento se l'impedenza da rifasare fosse di tipo capacitivo) può essere fatto seguendo vie alternative a quella descritta ma simili dal punto di vista concettuale.

11.13.1 Un esempio di rifasamento

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 11.27 e si calcoli il valore della capacità C tale da rifasare l'impedenza "vista" dal condensatore ai morsetti A e B . In altre parole si cerca il valore di C tale che la potenza reattiva Q_e^E , erogata da \bar{E} sia nulla.

Come prima cosa possiamo calcolare l'espressione dell'impedenza da rifasare scollegando il generatore \bar{E} e il condensatore C .

$$\bar{v} = R\bar{i} + j\omega L(\bar{i} + \alpha\bar{i}) = (R + j\omega L(\alpha + 1))\bar{i}, \quad (11.121)$$

⁷ In linea di principio nulla vieta di rifasare $Z(j\omega)$ collegandole in serie un condensatore di rifasamento. Tuttavia, questa scelta porterebbe a modificare la tensione ai capi dell'impedenza di carico mentre la connessione in parallelo lascia tale tensione pressoché inalterata se la caduta ai capi di R_L è piccola rispetto alle tensioni in gioco.

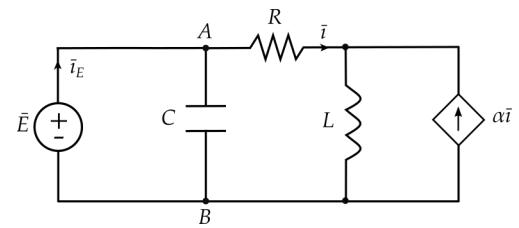


Figure 11.27: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

da cui $Z(j\omega) = R + j\omega L(\alpha + 1)$. In base al teorema di Boucherot sappiamo che $Q_a^E + Q_a^{Z||C} = 0$, ovvero $Q_e^E = Q_a^{Z||C}$. Per fare sì che $Q_a^{Z||C}$ sia nulla è sufficiente che $\text{Im}\{C||Z(j\omega)\} = 0$.

$$\begin{aligned} C||Z(j\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L(\alpha+1)} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L(\alpha + 1)}{1 - \omega^2 LC(\alpha + 1) + j\omega RC} \\ &= \frac{(R + j\omega L(\alpha + 1))(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1) - j\omega RC)}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \end{aligned} \quad (11.122)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{C||Z(j\omega)\} &= \frac{\omega L(\alpha + 1)(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1)) - \omega R^2 C}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \\ &= \frac{\omega L(\alpha + 1) - \omega R^2 C - \omega^3 L^2 C(\alpha + 1)^2}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \end{aligned} \quad (11.123)$$

Per annullare $\text{Im}\{C||Z(j\omega)\}$ è necessario scegliere

$$C = \frac{L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2} \quad (11.124)$$

ALTERNATIVAMENTE È POSSIBILE imporre che sia nulla $Q_e^E = \text{Im}\left\{\frac{\bar{E}\bar{i}_E^*}{2}\right\}$.

$$\bar{i}_E = \bar{E} \left(j\omega C + \underbrace{\frac{1}{R + j\omega L(\alpha + 1)}}_{\bar{C}||Z(j\omega)} \right), \quad (11.125)$$

quindi

$$Q_e^E = \text{Im}\left\{\frac{\bar{E}\bar{i}_E^*}{2}\right\} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \text{Im}\left\{\left(j\omega C + \frac{R - j\omega L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2}\right)^*\right\}, \quad (11.126)$$

che è nulla se

$$C = \frac{L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2}, \quad (11.127)$$

11.14 Condizione di massimo trasferimento di potenza attiva

LA RICERCA DELLA CONDIZIONE DI massimo trasferimento di potenza attiva è duale rispetto al rifasamento. L'idea è capire come deve essere fatta l'impedenza di carico affinchè la potenza attiva trasferita da \bar{E} a $Z(j\omega)$ sia massima, cioè si minimizzi quella assorbita dall'impedenza $Z_g(j\omega)$. $Z_g(j\omega)$ e \bar{E} costituiscono l'equivalente Thevènin del circuito di alimentazione connesso al carico $Z(j\omega)$ (cfr.

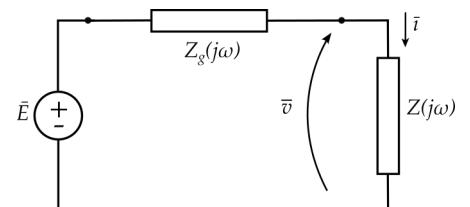


Figure 11.28: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . $Z_g(j\omega)$ e \bar{E} costituiscono l'equivalente Thevènin del circuito di alimentazione connesso al carico $Z(j\omega)$.

figura 11.27). Assumendo $Z_g(j\omega) = R_g(\omega) + jX_g(\omega)$ e $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$,

$$\begin{aligned}
 P_a^Z + jQ_a^Z &= \frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\bar{E}Z(j\omega)}{Z(j\omega) + Z_g(j\omega)}}_{\bar{v}} \underbrace{\frac{\bar{E}^*}{(Z(j\omega) + Z_g(j\omega))^*}}_{\bar{i}^*} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|\bar{E}|^2 Z(j\omega)}{|Z(j\omega) + Z_g(j\omega)|^2} \\
 &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega) + jX(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 + (X(\omega) + X_g(\omega))^2}
 \end{aligned} \tag{11.128}$$

L'ottimizzazione di

$$P_a^Z = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 + (X(\omega) + X_g(\omega))^2} \tag{11.129}$$

deve essere fatta rispetto a $R(\omega)$ e $X(\omega)$. In particolare, è necessario scegliere $X(\omega) = -X_g(\omega)$ per minimizzare il denominatore della 11.129 e quindi massimizzare P_a^Z che diventa

$$\tilde{P}_a^Z = P_a^Z \Big|_{X(\omega) = -X_g(\omega)} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2} . \tag{11.130}$$

Adesso è necessario massimizzare la 11.130 rispetto a $R(\omega)$. Per fare ciò calcoliamo

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)} &= \frac{d}{dR(\omega)} \left[\frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2} \right] \\
 &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 - 2R(\omega)(R(\omega) + R_g(\omega))}{(R(\omega) + R_g(\omega))^4} \\
 &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R_g(\omega) - R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^3}
 \end{aligned} \tag{11.131}$$

Si verifica facilmente che per $R(\omega) = R_g(\omega)$ la $\frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)}$ è nulla e ci troviamo in corrispondenza di un massimo locale di \tilde{P}_a^Z dato che $\frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)} > 0$ se $R(\omega) < R_g(\omega)$ e viceversa.

La condizione di massimo trasferimento di potenza attiva è dunque

$$Z(j\omega) = Z_g^*(j\omega) , \tag{11.132}$$

condizione che comporta anche l'annullarsi della potenza reattiva erogata dal generatore \bar{E} che vede ai suoi capi

$$Z(j\omega) + Z_g^*(j\omega) = 2R(\omega) \in \mathbb{R} . \tag{11.133}$$

12

12.1 Circuiti del primo ordine degeneri

QUANDO SONO STATI INTRODOTTI i circuiti dinamici RC ed RL del primo ordine (cfr. capitolo 10), si è assunto che un bipolo composito \mathcal{N}_R , costituito da N –terminali lineari e generatori indipendenti di tensione e/o corrente, fosse connesso, attraverso il suo modello equivalente di Norton o di Thevènin, ad un condensatore lineare o ad un induttore lineare. Alla base di questa modelizzazione si è assunto inoltre che i circuiti così ottenuti fossero non degeneri, ovvero che i modelli equivalenti di Thevènin e Norton fossero entrambi definiti per \mathcal{N}_R , e si avesse quindi $R_{TH} = 1/G_{NR}$. Cosa accadrebbe se \mathcal{N}_R non fosse definito su base tensione, ovvero ammettesse solo il modello equivalente di Thevènin con $R_{TH} = 0$? In questo caso, il circuito lineare dinamico del primo ordine si ridurrebbe alla connessione di un generatore di tensione E_{TH} e di un condensatore o di un induttore.

NEL PRIMO CASO si otterebbe un “maglia CE” che può essere pensata come il limite per R_{TH} che tende a 0 di un circuito RC serie. La costante di tempo del circuito assumerebbe il valore

$$\tau_{CE} = \lim_{R_{TH} \rightarrow 0} R_{TH}C = 0 , \quad (12.1)$$

corrispondente ad una frequenza libera $\lambda_{CE} = -\infty$. Questo comporterebbe una risposta in transitorio che si esaurisce istantaneamente e, del resto, qualunque sia lo stato iniziale del condensatore C , non appena esso viene connesso al generatore E_{TH} , la tensione v_C ai suoi capi, ovvero la *candidata* ad essere variabile di stato del circuito, “si adatta” alla tensione imposta dal generatore. In questa condizione di lavoro, la tensione v_C non è una variabile di stato dato che il suo valore non dipende più dalla sua storia pregressa ma è forzato, istante per istante, dal generatore E_{TH} .

NEL SECONDO CASO si osserva invece una “maglia LE” come limite di un circuito RL serie. In questo caso

$$\tau_{LE} = \lim_{R_{TH} \rightarrow 0} \frac{L}{R_{TH}} = \infty , \quad (12.2)$$

corrispondente ad una frequenza libera $\lambda_{LE} = 0$. In questa condizione, la corrente i_L dell’induttore, candidata ad essere variabile di stato, è a tutti gli effetti variabile di stato e il circuito non è *asintoticamente stabile* ma semplicemente *stabile*. Vediamo con un esempio cosa vuol dire.

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO RL SERIE in figura 12.1. Sappiamo che, data una condizione iniziale $i_L(0) = I_0^1$, la variabile di stato evolve per $t \in [0, +\infty)$ come

$$i_L^1(t) = \left(I_0^1 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} . \quad (12.3)$$

Se scegliessimo invece una condizione iniziale $i_L(0) = I_0^2 = I_0^1 + \delta I_0$ avremmo

$$i_L^2(t) = \left(I_0^2 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \left(I_0^1 + \delta I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} . \quad (12.4)$$

Si verifica banalmente che

$$|i_L^1(t) - i_L^2(t)| = |\delta I_0| e^{-\frac{R}{L}t} , \quad (12.5)$$

il che significa che l’effetto di una perturbazione della condizione iniziale tende a svanire per t che tende all’infinito, cioè $i_L^1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} i_L^2(t)$. In questo caso il circuito si dice *asintoticamente stabile*. Qualora si avesse $R = 0$, ovvero $\lambda = 0$, la perturbazione della condizione iniziale del circuito si propagherebbe inalterata nel tempo, $|i_L^1(t) - i_L^2(t)| = |\delta I_0|$. Il circuito si dice in questo caso semplicemente *stabile*: il circuito non è in grado di annullare l’effetto della perturbazione per t che tende all’infinito.

SITUAZIONI DUALI RISPETTO ALLE DUE finora analizzate si osservano quando \mathcal{N}_R non è definito su base corrente, ovvero ammette solo il modello equivalente di Norton con $G_{NR} = 0$. Ci si imbatte in “tagli CA”, come degenerazione di circuiti RC parallelo, e “tagli LA”, come degenerazione di circuiti RL parallelo.

NEL PRIMO CASO, un “taglio CA” genera la situazione analoga alla “maglia LE”. La candidata ad essere variabile di stato, cioè la tensione v_C ai capi del condensatore, è variabile di stato a tutti gli effetti ma con una $\lambda_{CA} = 0$ ($\tau_{CA} = \infty$). Il circuito sarà quindi semplicemente *stabile*.

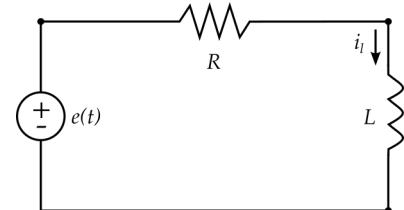


Figure 12.1: Circuito RL serie con $e(t) = E$.

NEL SECONDO CASO, una “taglio LA” genera la situazione analoga alla “maglia CE”. La candidata ad essere variabile di stato non è variabile di stato e $\lambda_{LA} = -\infty$, ovvero $\tau_{LA} = 0$. La corrente nell’induttore, infatti, viene forzata istante per istante dal generatore di corrente A_{NR} come accadeva per v_C e E_{TH} nel caso della “maglia CE”.

COME CASI PARTICOLARI delle situazioni generiche descritte si hanno

- C ed $E_{TH} = 0$: il condensatore è corto circuitato ovvero si scarica istantaneamente.
- L ed $E_{TH} = 0$: l’induttore mantiene la condizione iniziale $i_L(t_0) = I_0$ per t che tende all’infinito. Nella maglia circola quindi una corrente costante non nulla e la caduta ai capi dell’induttore è nulla.
- C ed $A_{NR} = 0$: il condensatore mantiene la condizione iniziale $v_C(t_0) = V_0$ per t che tende all’infinito. Non circola quindi corrente nel condensatore, che è appeso, e si misura una tensione costante ai suoi capi.
- L ed $A_{NR} = 0$: l’induttore appeso si scarica istantaneamente.

12.2 Circuiti dinamici riducibili a circuiti del primo ordine

INTRODUCIAMO QUESTA CLASSE DI CIRCUITI mediante una esempio. Si consideri il circuito in figura 12.2, con $e(t) = \alpha t$ ($[\alpha] = \text{Vs}^{-1}$), per il quale possiamo scrivere

$$e(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t) , \quad (12.6)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}e(t) = \frac{d}{dt}v_{C_1}(t) + \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) . \quad (12.7)$$

Usando la KCL al nodo in cui confluiscono C_1 , C_2 , R_1 ed R_2 , si ottiene quindi

$$C_1 \frac{d}{dt}v_{C_1}(t) = C_1 \left(\frac{d}{dt}e(t) - \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) \right) = C_2 \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) + \frac{v_{C_2}}{R_1} + \frac{v_{C_2}}{R_2} , \quad (12.8)$$

che si riscrive come

$$\frac{d}{dt}v_{C_2}(t) = -\frac{1}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_{C_2} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{d}{dt}e(t) . \quad (12.9)$$

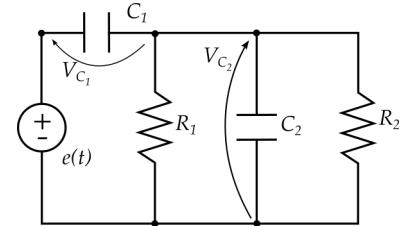


Figure 12.2: Si noti la “maglia CE” che coinvolge $e(t)$, C_1 e C_2 .

Si noti che l'equazione di stato ottenuta presenta la dipendenza della derivata della variabile di stato dalla derivata dell'ingresso, cosa questa che non accadeva quando non ci si trovava in presenza di "maglie CE". Questo circuito infatti contiene una tale degenerazione come evidenziato dalla KVL 12.6. La presenza di tale maglia implica una **relazione algebrica** tra le candidate ad essere variabili di stato (v_{C_1} e v_{C_2} in questo caso) e gli ingressi (in questo caso il solo $e(t)$). Una delle due candidate, nell'esempio in questione, non sarà quindi una variabile di stato dato che il suo valore dipende, istante per istante, dall'altra variabile di stato e dall'ingresso.

POSSIAMO GENERALIZZARE IL RISULTATO anticipato con l'esempio.

In un circuito che contiene N -terminali lineari, tempo invarianti, generatori indipendenti di tensione e/o corrente, e M variabili elettriche candidate ad essere variabili di stato, il numero delle variabili di stato effettive è pari a $M - \kappa$, dove κ è il numero di relazioni algebriche linearmente indipendenti che sussistono tra le M candidate e (eventualmente) gli ingressi.

Nel caso in cui il circuito abbia M candidate e presenti $M - 1$ delle suddette relazioni algebriche linearmente indipendenti, si riduce di fatto ad un circuito del primo ordine in cui l'equazione di stato, detta $x(t)$ la candidata che sia variabile di stato a tutti gli effetti, è del tipo

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) + \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_P u_P(t) + \beta_1 \frac{d}{dt}u_1(t) + \dots + \beta_P \frac{d}{dt}u_P(t), \quad (12.10)$$

dove $u_p(t)$, per $p = 1, \dots, P$ sono gli ingressi del circuito e i coefficienti α_p e β_p non sono necessariamente tutti nulli.

Risulta quindi evidente che sarà sufficiente una sola condizione iniziale del circuito in $t = t_0$, assegnata per la variabile di stato $x(t)$, dato che le altre candidate avranno in $t = t_0$ un valore che dipende, secondo le relazioni algebriche esistenti, da $x(t_0)$ e da $u_p(t_0)$ (e non necessariamente da tutti i $p = 1, \dots, P$).

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il circuito in figura 12.3. Si possono evidenziare le seguenti relazioni algebriche indipendenti

$$\begin{aligned} e(t) + v_{C_1}(t) - v_{C_2}(t) &= 0 \\ v_{C_1}(t) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (12.11)$$

Dato $M = 3$ il numero di candidate, si ha $\kappa = 2$ e quindi il circuito è del primo ordine. L'equazione di stato che ne governa la dinamica è

$$\frac{d}{dt}i_L = -\frac{R_2}{L}i_L, \quad (12.12)$$

corredata della condizione iniziale $i_L(t_0) = I_0$. Nell'esempio si vede chiaramente che ci sono 2 "maglie CE" ovvero le relazioni algebriche evidenziate nella 12.11.

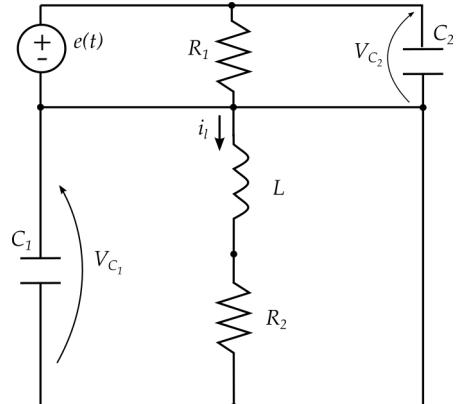


Figure 12.3: Il circuito contiene 3 candidate ad essere variabili di stato: v_{C_1} , v_{C_2} e i_L .

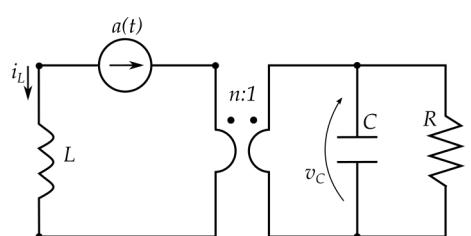


Figure 12.4: Il circuito contiene 2 candidate ad essere variabili di stato: v_C ed i_L .

SI CONSIDERI ORA IL CIRCUITO in figura 12.4. Si nota banalmente la presenza della relazione algebrica $i_L(t) + a(t) = 0$ (un “taglio LA”) e l’equazione di stato è

$$\frac{d}{dt}v_C = -\frac{1}{R_2C}v_C + \frac{1}{nC}a(t) . \quad (12.13)$$

Si hanno quindi $M = 2$ candidate ma una sola variabile di stato, la tensione $v_C(t)$.

ESISTONO TUTTAVIA CASI in cui la presenza di “maglie CE” e/o “tagli LA” non è evidente e le relazioni algebriche tra candidate ad essere variabili di stato e (eventualmente) gli ingressi vengono messe in luce elaborando le KVL e/o le KCL tenendo conto anche delle equazioni costitutive dei componenti.

Si consideri ad esempio il circuito in figura 12.5 in cui il doppio bipolo è descritto dalla matrice ibrida \mathcal{H}

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} . \quad (12.14)$$

Analizzando la matrice si nota che $v_1 = av_2$ e che quindi $v_C - ae(t) = 0$. Questa relazione algebrica implica che v_C non sia variabile di stato seppur candidata ma il circuito non presenta esplicitamente alcuna “maglia CE”.

12.3 Circuiti del primo ordine con ingresso discontinuo

FINORA NON CI SIAMO MAI OCCUPATI di casi in cui un circuito dinamico del primo ordine (o riconducibile al primo ordine) presenti un ingresso discontinuo. Tuttavia è fatto comune che le reti elettriche presentino fenomeni di discontinuità, pensiamo, ad esempio ad ogni volta che usiamo un interruttore per accendere o spegnere una luce. In laboratorio, ad esempio, abbiamo un pulsante che ci permette di accendere o spegnere un generatore di tensione e questa operazione corrisponde, per il circuito, ad avere un ingresso discontinuo.

INTRODUCIAMO LA FUNZIONE GRADINO $u(t)$ definita come

$$\begin{cases} u(t) = 0, & t < 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{cases} , \quad (12.15)$$

che in $t = 0$ presenta un discontinuità di prima specie.

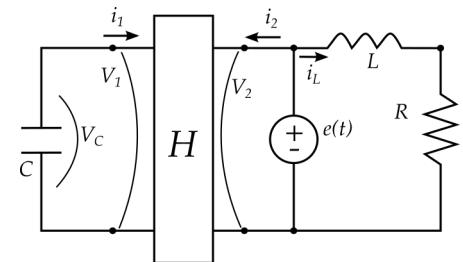


Figure 12.5: Il circuito contiene 2 candidate ad essere variabili di stato: v_C ed i_L .

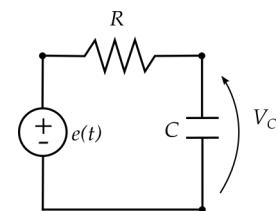


Figure 12.6: $e(t) = Eu(t - \bar{t})$.

CONSIDERIAMO ADESSO IL SEMPLICE CIRCUITO RC serie in figura 12.6 in cui l'ingresso è pari a $e(t) = Eu(t - \bar{t})$ (sia per esempio $\bar{t} > 0$), cioè una funzione che vale

$$\begin{cases} 0, & t < \bar{t} \\ E > 0, & t > \bar{t} \end{cases} . \quad (12.16)$$

Ipotizziamo che il circuito sia in funzione da $t = -\infty$ e che quindi, dato che $\lambda = -\frac{1}{RC} < 0$, si trovi a regime stazionario per $t = \bar{t}^- = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} t$.

Qualunque fosse la condizione iniziale $v_C(-\infty)$, il condensatore sarà scarico per $t = \bar{t}^-$, cioè $v_C(\bar{t}^-) = 0$. Cosa accade tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ a cavallo della discontinuità? Per rispondere è sufficiente analizzare l'equazione di stato

$$\frac{d}{dt}v_C(t) + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{e(t)}{RC} . \quad (12.17)$$

Tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ l'ingresso presenta una discontinuità di prima specie e quindi anche la parte a sinistra del segno di egualianza nella 12.17 deve presentare tale discontinuità. Tuttavia, poiché la parte a sinistra del segno di egualianza contiene sia la variabile di stato sia la sua derivata rispetto al tempo (si ricordi che qualunque funzione è "più continua" o "continua tanto quanto" la sua derivata) sarà quest'ultima a presentare tale discontinuità tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ mentre la variabile di stato è continua, ovvero $v_C(\bar{t}^-) = v_C(\bar{t}^+)$. Si dice che la variabile di stato è "più continua" dell'ingresso¹.

Risolvere il circuito nell'intervallo $(\bar{t}^-, +\infty)$ equivale a risolverlo in $[\bar{t}, +\infty)$ con condizione iniziale $v_C(\bar{t}) = 0$. La soluzione sarà quindi $v_C(t) = E \left(1 - e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}}\right)$. Il grafico della soluzione è riportato in figura 12.7 in alto.

12.3.1 Sulla continuità delle variabili di stato

UNA PROPRIETÀ MOLTO IMPORTANTE DELLE GRANDEZZE DI STATO DI UN CIRCUITO è che (nell'ipotesi che le grandezze impresse dai generatori indipendenti siano limitate) esse sono continue. In altri termini, anche laddove per via di generatori con comportamenti discontinui o di interruttori (cfr. paragrafo 12.4) alcune grandezze del circuito possono subire dei salti di discontinuità², ciò non accade mai per le grandezze di stato. Questa proprietà, detta proprietà di *continuità delle variabili di stato*, è molto importante e assai utile nella soluzione dei circuiti dinamici. Essa può essere dimostrata attraverso un ragionamento che è allo stesso tempo semplice e "rigoroso".

¹ In circuiti che presentano relazioni algebriche tra le variabili di stato e (eventualmente) gli ingressi, a destra del segno di egualianza può in generale comparire anche la derivata degli ingressi rispetto al tempo (cfr. equazione 12.10). In questi casi la variabile di stato può essere "discontinua tanto quanto" gli ingressi.

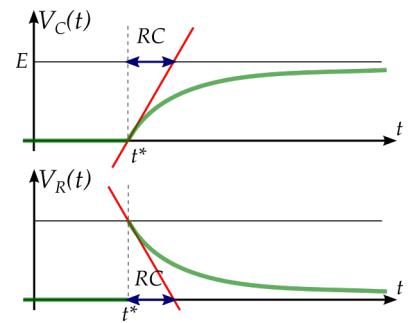


Figure 12.7: Per t prossimo a \bar{t} da sinistra il condensatore è scarico ed inizia a caricarsi con continuità in $t = \bar{t}$.

² Una funzione reale $f(t)$ ha una discontinuità di prima specie in un punto $t = \bar{t}$ se $f(\bar{t}^+)$ e $f(\bar{t}^-)$ esistono (finiti) ed $f(\bar{t}^+) \neq f(\bar{t}^-)$; la differenza $f(\bar{t}^+) - f(\bar{t}^-)$ è il salto di $f(t)$ per $t = \bar{t}$. $f(t)$ si dice generalmente continua in un intervallo $[a, b]$ se e solo se $f(t)$ è continua in $[a, b]$ eccetto che in un numero finito di punti in cui presenta discontinuità di prima specie.

CONCENTRIAMOCI SUL CONDENSATORE. Le variabili di stato di un circuito sono necessariamente limitate, altrimenti l'energia immagazzinata nel circuito sarebbe infinita e ciò non può accadere. Ad esempio per il condensatore la tensione dovrà essere limitata. Poiché in ogni circuiti dinamico, tutte le grandezze non di stato possono essere espresse come una combinazione lineare delle variabili di stato e degli ingressi³, allora anche l'intensità di corrente del condensatore è limitata.⁴ Consideriamo allora l'equazione costitutiva del condensatore in forma integrale

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau , \quad (12.18)$$

e ipotizziamo che a cavallo di t_0 la corrente i_C , seppur limitata presenta un salto. La 12.18 calcolata tra t_0^- e t_0^+ diventa allora

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) + \frac{1}{C} \int_{t_0^-}^{t_0^+} i_C(\tau) d\tau = v_C(t_0^-) , \quad (12.19)$$

dato che l'integrale su un intervallo infinitesimo di una funzione limitata è identicamente nullo.

SI POTEVA PROCEDERE NELL'ESEMPIO presentato nel paragrafo precedente integrando la 12.17 a cavallo della discontinuità dell'ingresso.

$$\int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{d}{dt} v_C(t) dt + \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{1}{RC} v_C(t) dt = \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{e(t)}{RC} dt \quad (12.20)$$

che equivale a

$$\int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} dv_C(t) = v_C(\bar{t}^+) - v_C(\bar{t}^-) = 0 \quad (12.21)$$

dato che $v_C(t)$ e $e(t)$ sono limitate.

SI NOTI PERÒ CHE, in generale, le variabili di circuito con ingressi discontinui non sono tutte "più continue" dell'ingresso: è una caratteristica delle variabili di stato. Consideriamo infatti la tensione v_R ai capi del resistore R in figura 12.6. Essa sarà pari a $Ri_C(t)$, ovvero sarà nulla per $t = \bar{t}^-$ (il condensatore è in regime stazionario e quindi è un aperto) e

$$Ri_C(t) = RC \frac{d}{dt} \left[E \left(1 - e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}} \right) \right] = E e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}} , \quad (12.22)$$

per $t \in (\bar{t}^+, +\infty)$. Si noti che il limite sinistro e destro di v_R sono diversi ($0 \neq E$) e quindi la tensione è discontinua come $e(t)$ in $t = \bar{t}$ (cfr. figura 12.7 in basso).

Si poteva arrivare a questo risultato scrivendo l'equazione differenziale (ingresso-uscita) che lega $v_R(t)$ all'ingresso $e(t)$. Si ha infatti che

³ C'è un modo molto semplice ed efficace per rendersi conto di ciò. Cosa significa esprimere le grandezze del circuito in funzione delle grandezze di stato? Significa considerare le tensioni dei condensatori e le intensità di corrente degli induttori come variabili indipendenti (cioè come se fossero note). Si consideri allora il circuito ottenuto sostituendo a ciascun condensatore un generatore di tensione con la stessa tensione del condensatore ed a ciascun induttore un generatore di corrente con la stessa intensità di corrente dell'induttore. Per costruzione questo circuito, a cui si dà il nome di *circuito resistivo associato*, descrive il legame tra le grandezze di stato e tutte le altre grandezze del circuito dinamico. Siccome il circuito resistivo associato è adinamico e lineare la relazione tra una generica grandezza ed i generatori è di tipo algebrico lineare. Attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere tutte le grandezze di un circuito dinamico in funzione delle grandezze di stato e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti, ed in particolare le intensità di corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori.

⁴ Si osservi che questa proprietà non vale se in parallelo al condensatore c'è un interruttore che si chiude. Un analogo risultato vale per le tensioni degli induttori se non vi sono interruttori in serie agli induttori che si aprono. Nei due casi citati, infatti, ci troveremmo in presenza di una "maglia CE" e di un "taglio LA".

$e(t) = v_C + v_R$ e quindi $\frac{d}{dt}e(t) = \frac{d}{dt}v_C + \frac{d}{dt}v_R = \frac{i_C}{C} + \frac{d}{dt}v_R$. Ricordando che $v_R = Ri_C$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}v_R = -\frac{1}{RC}v_R + \frac{d}{dt}e(t) . \quad (12.23)$$

Integriamo adesso tra t^- e t^+ , si scrive

$$\int_{t^-}^{t^+} \frac{d}{dt}v_R(t)dt + \int_{t^-}^{t^+} \frac{1}{RC}v_R(t)dt = \int_{t^-}^{t^+} \frac{d}{dt}e(t)dt \quad (12.24)$$

da cui

$$v_R(t^+) - v_R(t^-) = e(t^+) - e(t^-) = E - 0 . \quad (12.25)$$

In conclusione $v_R(t^+) = E + v_R(t^-) = E$. Del resto è ciò che si ottiene valutando in t^+ la KVL $e(t) = v_C(t) + v_R(t)$ dopo aver ricavato $v_C(t^+) = v_C(t^-)$.

12.3.2 Un esempio non banale

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 12.8 che sia assume a regime per $t = 0^-$. Gli ingressi sono definiti come segue

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t > 0 \end{cases} , \quad (12.26)$$

$$e(t) = \begin{cases} E, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} . \quad (12.27)$$

Si è interessati a determinare $i_R(0^-)$ e $i_R(t)$ per $t \in (0^+, +\infty)$.

In $t = 0^-$ il circuito è quello in figura 12.9 in cui il generatore di corrente è nullo, il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Siamo infatti a regime, per ipotesi, e a regime stazionario poiché $e(t) = E$. In queste condizioni il generatore pilotato si comporta come un resistore di resistenza $-r$ dato che è pilotato dalla stessa corrente che lo attraversa, infatti $i_L(0^-) = i_R(0^-)$. Possiamo quindi ricavare

$$i_R(0^-) = \frac{E}{r - R} . \quad (12.28)$$

Passiamo adesso all'istante $t = 0^+$ in cui $e(t)$ "si spegne" e $a(t)$ "si accende" (cfr. figura 12.10). Si nota l'esistenza di un legame algebrico tra le grandezze candidate ad essere variabili di stato, infatti,

$$v_C(t) - ri_L(t) = 0 . \quad (12.29)$$

Il circuito è quindi del primo ordine e la sua equazione di stato, scritta ad esempio in $i_L(t)$ è

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = -\frac{R - r}{L}i_L(t) - \frac{RA}{L} , \quad (12.30)$$

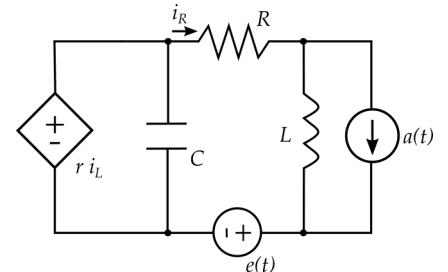


Figure 12.8: Si assume $0 < r < R$.

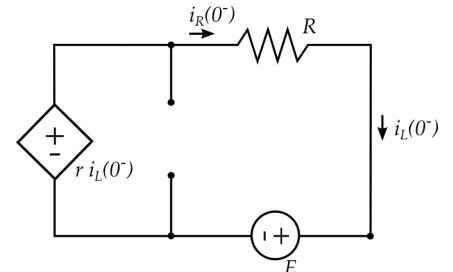


Figure 12.9: Il circuito in $t = 0^-$.

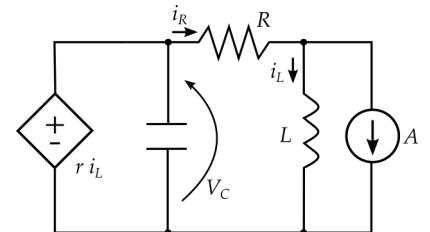


Figure 12.10: Il circuito per $t \in (0^+, +\infty)$.

da cui si ricava $\lambda = -\frac{R-r}{L} < 0$, dato che, per ipotesi, $0 < r < R$ ⁵. Risolvere l'equazione di stato per determinare $i_L(t)$ ci consente di determinare anche $i_R(t)$ dato che $i_R = i_L + A$. In particolare, integrando l'equazione di stato tra 0^- e 0^+ si ricava che $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{r-R}$ e quindi $i_R(0^+) = \frac{E}{r-R} + A$. La soluzione dell'equazione di stato per $t \geq 0$ comporta

$$i_L(t) = ke^{-\frac{R-r}{L}t} + H \quad (12.31)$$

dove H si determina imponendo

$$\frac{d}{dt}H = -\frac{R-r}{L}H - \frac{RA}{L}, \quad (12.32)$$

ovvero⁶ $H = \frac{RA}{r-R}$.

La costante k la si ricava a partire dalla condizione iniziale

$$i_L(0) = i_L(0^+) = \frac{E}{r-R} = k + \frac{RA}{r-R}, \quad (12.33)$$

ovvero $k = \frac{E-RA}{r-R}$. La corrente cercata che scorre nel resistore sarà quindi

$$i_R(t) = i_L(t) + A = \frac{E-RA}{r-R}e^{-\frac{R-r}{L}t} + \frac{rA}{r-R}. \quad (12.34)$$

Si noti quindi che

- la variabile di stato $i_L(t)$ è continua in $t = 0$ mentre la corrente $i_R(t)$ è discontinua come gli ingressi;
- la relazione $v_C(t) = ri_L(t)$ consente di poter utilizzare alternativamente $v_C(t)$ come variabile di stato e anch'essa risulta continua in $t = 0$.

12.4 Circuiti del primo ordine con tasti

NEL PARAGRAFO PRECEDENTE abbiamo introdotto circuiti dinamici del primo ordine caratterizzati da ingressi discontinui. Dagli esempi proposti è facile convincersi che, di fatto, la soluzione di questi circuiti consiste in un'analisi fatta su intervalli temporali definiti dagli istanti di tempo in cui le discontinuità degli ingressi si manifestano.

Un altro caso tipico in cui si ripropone un'analisi ad intervalli è quello in cui nel circuito siano presenti dei tasti (interruttori e/o deviatori) che in determinati istanti di tempo prefissati agiscono commutando la loro posizione e cambiando, di fatto, la topologia del circuito. Si procede risolvendo il circuito in ciascuno degli intervalli di funzionamento facendo particolare attenzione a cosa accade a cavallo degli istanti di commutazione in cui le variabili di stato evolveranno

⁵ Si noti che essendo la frequenza libera una caratteristica della rete passivata (non dipende cioè dagli ingressi), per questo circuito essa è la stessa per $t \in (-\infty, \infty)$. L'ipotesi di partenza, dunque, che assumeva il regime per $t = 0^-$, è corretta.

⁶ Questo risultato lo si poteva ottenere risolvendo il circuito a regime stazionario per t che tende all'infinito, dato che è stabile e con ingressi costanti.

genericamente con continuità (se non sono presenti relazioni algebriche tra le candidate ad essere variabili di stato ed (eventualmente) gli ingressi) e le altre variabili elettriche potranno essere discontinue.

12.4.1 Un esempio semplice

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 12.1 che evolve in regime stazionario per $t = 0^-$. In $t = 0$ il tasto connesso in serie ad R_2 si apre lasciando quest'ultimo appeso. Come si procede per il calcolo di $v_C(t)$ per $t \in (0^-, +\infty)$? Innanzitutto si ricava $v_C(0^-)$ sapendo che $e(t) = E$. In $t = 0^-$ il condensatore si comporta come un circuito aperto e quindi

$$v_C(0^-) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} . \quad (12.35)$$

La presenza del tasto è di fatto equivalente a modellare R_2 come un resistore di resistenza tempo variante. L'equazione di stato che regola la dinamica del circuito sarà quindi

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = -\underbrace{\frac{R_1 + R_2(t)}{R_1 R_2(t)C}}_{\lambda(t)} v_C(t) + \frac{E}{R_1 C} . \quad (12.36)$$

La frequenza libera del circuito $\lambda(t)$ è una funzione del tempo poiché

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \lambda(t) &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t) &= -\frac{1}{R_1 C} \end{aligned} \quad , \quad (12.37)$$

quindi, integrando l'equazione di stato tra 0^- e 0^+ si ottiene $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. L'equazione di stato, per $t \in (0^+, +\infty)$ diventa

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = -\frac{1}{R_1 C}v_C(t) + \frac{E}{R_1 C} , \quad (12.38)$$

da cui $v_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right) + \frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$.

Se l'incognita del problema fosse stata la corrente $i_{R_2}(t)$ avremmo agito sempre risolvendo il circuito in due intervalli di tempo distinti e avremmo però trovato un andamento discontinuo dell'incognita.

Infatti, a ridosso della discontinuità per $t = 0^-$, avremmo avuto

$$i_{R_2}(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (12.39)$$

e

$$i_{R_2}(0^+) = 0 . \quad (12.40)$$

Si verifichi che, per quanto riguarda la corrente $i_{R_1}(t)$, essa è invece continua a cavallo di $t = 0$.

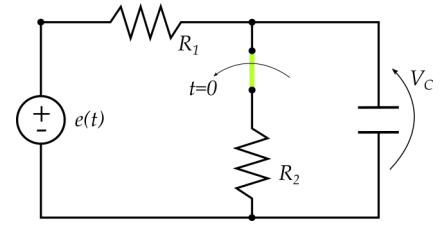


Figure 12.11: Il tasto si apre per $t = 0$ ed il resistore R_2 che gli è connesso in serie rimane appeso.

12.4.2 Un esempio avanzato

IL CIRCUITO IN FIGURA 12.12, per il quale si assume

$$R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C = 0 , \quad (12.41)$$

evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω per $t = (\frac{\pi}{2\omega})^-$ e i due tasti sono disposti in modo tale da lasciare R_2 appeso ed R_1 in serie con l'induttore di induzione L . In $t = (\frac{\pi}{2\omega})^+$, invece, la topologia del circuito cambia e si ottengono due sotto circuiti che evolvono autonomamente, l'uno rispetto all'altro, essendo R_1 appesa. Siamo interessati a determinare l'andamento di $i_L(t)$ per $t \in (\frac{\pi}{2\omega}^-, +\infty)$.

Il fasore associato al generatore di tensione $e(t) = E \cos \omega t$ è il numero reale E . Il fasore che rappresenta la corrente cercata è pari a

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}}}{R_0 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}}{R_0 + \frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}}{\underbrace{R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C + j\omega(R_0 R_1 C + L)}_{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \quad , \quad (12.42) \\ &= \frac{R_1 + j\omega L}{\underbrace{R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C + j\omega(R_0 R_1 C + L)}_{=0}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{E}{j\omega(R_0 R_1 C + L)} = -j \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)} \end{aligned}$$

da cui $i_L(t) = \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)} \sin \omega t$ e $i_L(\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)}$.

Poichè gli ingressi sono limitati e, come discusso in precedenza, la presenza di tasti produce variazioni dei parametri circuituali che introducono salti di discontinuità limitati, la variabile di stato $i_L(t)$ sarà continua per $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

CON LA COMMUTAZIONE DEI TASTI, la topologia del circuito muta. A sinistra si crea un circuito RC serie con ingresso sinusoidale. La sua evoluzione sarà governata da un risposta in transitorio e da un regime chiaramente di tipo sinusoidale. A destra, invece, l'induttore forma una maglia con il resistore R_2 e quindi la corrente in esso immagazzinata in $t = \frac{\pi}{2\omega}$ fluisce nella maglia fino a scaricarlo completamente. L'energia immagazzinata in $t = \frac{\pi}{2\omega}$, ovvero

$$w_a^L = \frac{1}{2} L i_L^2 \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{\omega^2 (R_0 R_1 C + L)^2} , \quad (12.43)$$

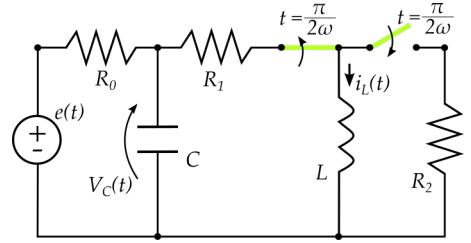


Figure 12.12: I tasti si aprono/chiudono contemporaneamente per $t = \frac{\pi}{2\omega}$.
 $e(t) = E \cos \omega t$.

verrà dissipata integralmente dal resistore. Si ricava banalmente che, per $t \in [\frac{\pi}{2\omega}, +\infty)$,

$$i_L(t) = \frac{E}{\omega(R_0R_1C + L)} e^{-\frac{R_2}{L}(t - \frac{\pi}{2\omega})} . \quad (12.44)$$

L'andamento della corrente $i_L(t)$ è riportato in figura 12.13.

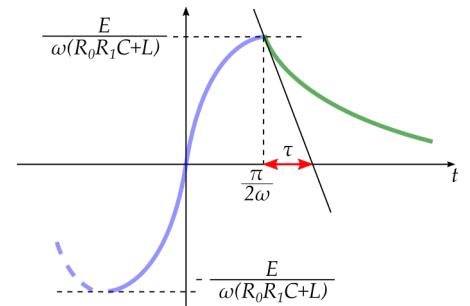


Figure 12.13: Andamento della corrente $i_L(t)$ a cavallo dell'apertura/chiusura dei tasti.

13

13.1 Valori efficaci

NELL'INGEGNERIA DEI SISTEMI ELETTRICI DI POTENZA è d'uso comune definire il fasore rappresentativo di una generica grandezza sinusoidale usando come modulo, al posto del valore massimo, il *valore efficace* della grandezza sinusoidale. In generale, il valore efficace X_{eff} (valore quadratico medio, o valore rms) di una grandezza periodica $x(t)$ di periodo T è definito come

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt} , \quad (13.1)$$

dove t_0 è un arbitrario istante di tempo. Per una grandezza sinusoidale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ il valore efficace è quindi $X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$. Il fasore equivalente a $x(t)$ e riferito al valore efficace è quindi $\bar{x} = X_{eff}e^{j\phi} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}e^{j\phi}$ e per trasformare il fasore nel dominio del tempo è quindi necessario usare la relazione $x(t) = \text{Re}\{\sqrt{2}\bar{x}e^{j\omega t}\}$.

NELLE ABITAZIONI AD USO CIVILE la rete di distribuzione dell'energia elettrica opera in regime sinusoidale alla frequenza di 50Hz con una tensione nominale di circa 230V in valore efficace. L'andamento nel tempo della tensione nominale di esercizio è quindi $e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi)$ dove $E_m = 230\sqrt{2} \approx 325V$, $\omega = 2\pi 50 = 314 \text{ rad s}^{-1}$ e la fase iniziale ϕ dipende dalla scelta dell'origine per la variabile temporale. Questo è dunque l'andamento (in condizioni normali) della tensione tra i due terminali di una comune presa per l'energia elettrica (nel funzionamento a vuoto).

SE CONSIDERIAMO QUINDI in un circuito che evolve in regime sinusoidale permanente i fasori delle tensioni e delle correnti riferiti ai valori efficaci, è immediato verificare che la potenza complessa

$\hat{A} = P + jQ$ assorbi un lato del grafo del circuito caratterizzato dalla tensione fasoriale \bar{v} e dalla corrente \bar{i} , prese con la convenzione normale, è pari a $\bar{v}\bar{i}^*$. Rispetto alla formula 11.98 si nota quindi la perdita di un fattore $1/2$. Infatti

$$\begin{aligned}\hat{A} &= P + jQ \\ &= \frac{V_m e^{j\phi_V} I_m e^{-j\phi_I}}{2} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi_V} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_I} \\ &= V_{eff} e^{j\phi_V} I_{eff} e^{-j\phi_I}\end{aligned}\quad (13.2)$$

13.2 Tensioni trifase bilanciate

UN INSIEME DI TENSIONI TRIFASE BILANCIATE è per definizione costituito da tre tensioni sinusoidali alla medesima pulsazione ω , con il medesimo valore efficace ma sfasate tra loro di 120° ovvero di $\frac{2}{3}\pi$ rad. Ad esempio

$$\begin{aligned}v_a(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ v_b(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{2}{3}\pi) \\ v_c(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{4}{3}\pi)\end{aligned}\quad (13.3)$$

La terna trifase così definita, in cui la fase ϕ_0 può essere arbitrariamente scelta pari a 0, si dice *sequenza abc* o meglio *sequenza positiva* ed è caratterizzata dal fatto che $v_a(t)$ anticipa $v_b(t)$ di $\frac{2}{3}\pi$ e analogamente $v_b(t)$ nei confronti di $v_c(t)$.

Analogamente è possibile definire quella che si chiama *sequenza acb* o meglio *sequenza negativa* come

$$\begin{aligned}v_a(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ v_c(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{2}{3}\pi) \\ v_b(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{4}{3}\pi)\end{aligned}\quad (13.4)$$

Le due sequenze vengono tipicamente prodotte da un generatore di tensione trifase (alternatore) che è sostanzialmente costituito da un magnete rotante (rotore) circondato da un sistema di avvolgimenti fisso (stator). Nello stator sono presenti tre avvolgimenti separati, i cui terminali $a - a'$, $b - b'$ e $c - c'$ sono spaziati di 120° lungo la circonferenza. Quando il rotore ruota attorno ad un asse ortogonale “al foglio”, il suo campo magnetico produce un flusso tempo-variante nei tre avvolgimenti e quindi una tensione indotta ai morsetti. La sequenza positiva viene generata quando il rotore gira in senso orario. Viceversa si genera la sequenza negativa. La connessione dei morsetti

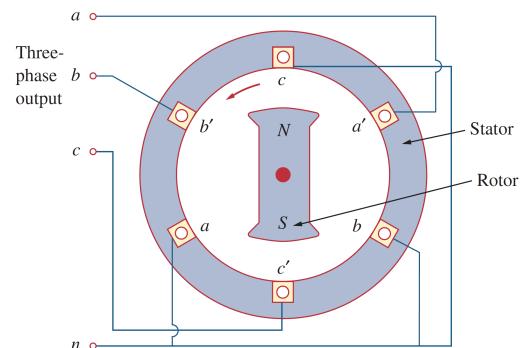


Figure 13.1: Generatore trifase.

a' , b' e c' in figura 13.1 in un unico morsetto comune n (detto *neutro*), genera la connessione detta a *stella* (o a "Y") dei tre generatori (si veda la figura 13.2a). Le tensioni della configurazione a stella (dette *tensioni di fase* del generatore) sono scrivibili come nella 13.3 o nella 13.4 in cui è stato omesso il pedice "n". Ovvero, ad esempio, $v_{an}(t) = v_a(t)$. Tanto la sequenza positiva quanto quella negativa

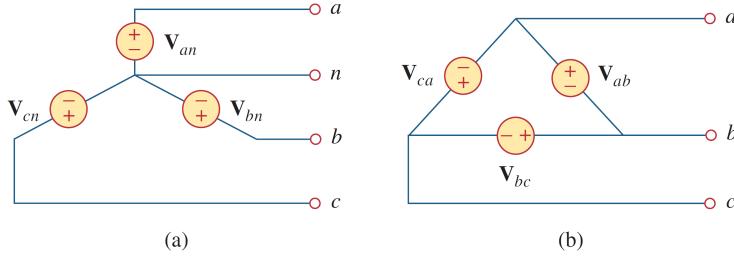


Figure 13.2: Generatori di tensione trifase: (a) collegati a stella (Y) e (b) collegati a triangolo (Δ).

godono della proprietà $v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0$. Si dimostra facilmente usando i fasori associati alle singole forme d'onda (saranno riferiti al valore efficace $V_p = V_0/\sqrt{2}$) che

$$\begin{aligned} \bar{v}_a + \bar{v}_b + \bar{v}_c &= V_p \left(1 + e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{-j\frac{4}{3}\pi} \right) \\ &= V_p \left(1 + e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{j(2\pi-\frac{4}{3}\pi)} \right) \\ &= V_p \left(1 + e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\frac{2}{3}\pi} \right) \\ &= V_p (1 + 2 \cos(\frac{2}{3}\pi)) \\ &= V_p \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13.5)$$

Alternativamente alla connessione a stella, è possibile ottenere la connessione detta a *triangolo* (o a " Δ ") (si veda la figura 13.2b). Si ricavano facilmente le formule di passaggio dalle tensioni della stella alle tensioni del triangolo (o tensioni linea-linea o più semplicemente tensioni di linea). Ad esempio (sequenza positiva)

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ab} &= \bar{v}_{an} - \bar{v}_{bn} \\ &= V_p \left(1 - e^{-j\frac{2}{3}\pi} \right) \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \sqrt{3}V_p e^{j\frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \bar{v}_{an} \end{aligned} \quad (13.6)$$

Analogamente si ottiene $\bar{v}_{bc} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \bar{v}_{bn}$ e $\bar{v}_{ca} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \bar{v}_{cn}$. Quindi le tensioni di linea sono scalate di un fattore $\sqrt{3}$ in modulo e ciascuna è in anticipo di 30° rispetto alla corrispondente tensione di

fase. Questo fa sì che la somma delle tensioni di linea è nulla istante per istante come accade per quelle di fase.

Si possono definire anche le formule per il passaggio dalla configurazione a triangolo a quella a stella ipotizzando la sequenza positiva o negativa per le tensioni di triangolo, ovvero

$$\begin{aligned} v_{ab}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ v_{bc}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{2}{3}\pi) \\ v_{ca}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{4}{3}\pi) \end{aligned} \quad (13.7)$$

e

$$\begin{aligned} v_{ab}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ v_{ca}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{2}{3}\pi) \\ v_{bc}(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \frac{4}{3}\pi) \end{aligned} . \quad (13.8)$$

Le formule di conversione si derivano a partire dallo schema in figura 13.3 assumendo $V_p = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$. Nel caso di sequenza positiva, ad esempio,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{an} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}} \bar{v}_{ab} \\ \bar{v}_{bn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{5}{6}\pi} = \frac{e^{-j\frac{5}{6}\pi}}{\sqrt{3}} \bar{v}_{bc} , \\ \bar{v}_{cn} &= \frac{V_p}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{3}{2}\pi} = \frac{e^{-j\frac{3}{2}\pi}}{\sqrt{3}} \bar{v}_{ca} \end{aligned} \quad (13.9)$$

ovvero le tensioni rispetto al centro stella sono scalate di un fattore $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in modulo e ciascuna è in ritardo di 30° rispetto alla corrispondente tensione a triangolo.

13.3 Carico trifase bilanciato

COME ACCADE PER I GENERATORI, ANCHE I CARICHI di un sistema trifase possono essere collegati a stella o a triangolo (cfr. figura 13.4).

Dato che il sistema trifase è considerato per i nostri scopi in regime sinusoidale permanente (trascuriamo quindi le dinamiche transitorie) i carichi saranno modellati come delle impedenze. Il carico si dice *bilanciato* se le impedenze di fase hanno tutte lo stesso modulo e lo stesso argomento (cioè sono uguali in campo complesso).

Quindi in un carico bilanciato collegato a stella

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y \quad (13.10)$$

e per il carico a triangolo

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Delta . \quad (13.11)$$

Usando le trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella è possibile ricavare $Z_\Delta = 3Z_Y$ e quindi $Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$.

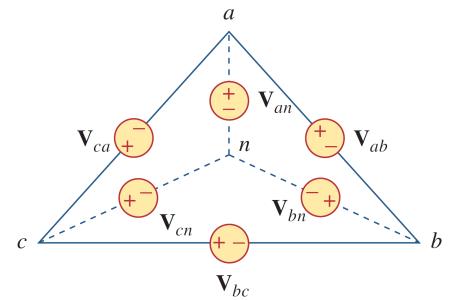


Figure 13.3: Trasformazione di un generatore a triangolo in uno equivalente collegato a stella.

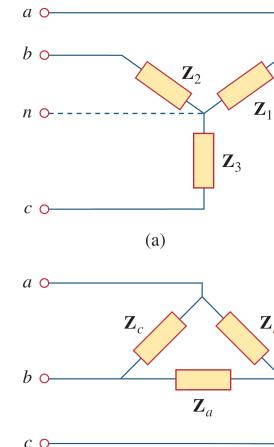


Figure 13.4: Due possibili configurazioni di carico trifase: (a) a stella (Y), (b) a triangolo (Δ).

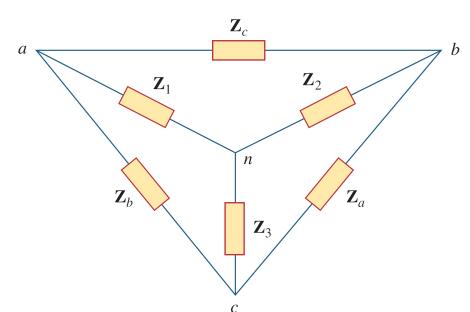


Figure 13.5: Schema per la conversione $Y-\Delta$ e $\Delta-Y$.

13.4 Schemi di connessione generatore - carico

Lo SCHEMA GENERALE di un circuito trifase è costituito da un generatore trifase e da un carico trifase collegati insieme per mezzo di tre conduttori; questi costituiscono la *linea trifase*. I tre conduttori della linea si suppongono generalmente, per semplicità, equipotenziali. Le tensioni tra i conduttori della linea si dicono *tensioni di linea* o *tensioni concatenate*. Si chiamano *correnti di linea* le correnti che scorrono nella linea trifase. Si chiamano invece *tensioni di fase* e *correnti di fase* le tensioni ai capi dei singoli bipoli che costituiscono il carico e le correnti che li attraversano.

Poichè i GENERATORI E I CARICHI possono essere connessi ciascuno a stella o a triangolo, si definiscono 4 possibili schemi di connessione.

13.4.1 Collegamento Y-Y

IN QUESTO SCHEMA SIA IL GENERATORE SIA IL CARICO SONO CONNESSI A STELLA.

Si deduce banalmente che le correnti di linea (che corrispondono in questa configurazione alle correnti di fase) si ricavano come

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{v}_{kn}}{Z_Y} , \quad (13.12)$$

con $k \in \{a, b, c\}$. La somma delle correnti di fase è quindi nulla istante per istante come accade per le tensioni. Da ciò si deduce che

$$\bar{I}_n = -(\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c) = 0 . \quad (13.13)$$

Ciò significa che se assumiamo la presenza di un'impedenza Z_n del collegamento tra neutro e neutro la caduta di tensione ai suoi capi (\bar{v}_{nn}) sarà anch'essa nulla dato che $\bar{I}_n = 0 \forall Z_n$.

I sistemi stella-stella bilanciati possono essere analizzati anche utilizzando quello che si definisce *circuito equivalente monofase*. Viene cioè eseguita un'analisi "per fasi". Ad esempio, considerando la fase "a" (cfr. figura 13.7), si ricava $\bar{I}_a = \frac{\bar{v}_{an}}{Z_Y}$. Dalla \bar{I}_a e la sequenza delle fasi, è possibile ricavare le correnti di fase mancanti.

13.4.2 Collegamento Y-Δ bilanciato.

IL COLLEGAMENTO Y-Δ BILANCIATO (cfr. figura 13.8), ovvero generatore a stella e carico a triangolo entrambe bilanciati, è lo schema di

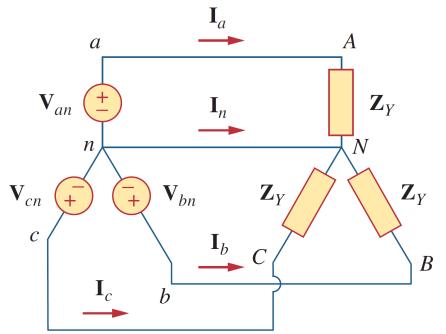


Figure 13.6: Collegamento Y-Y bilanciato.

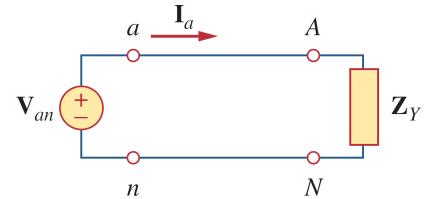


Figure 13.7: Circuito equivalente monofase.

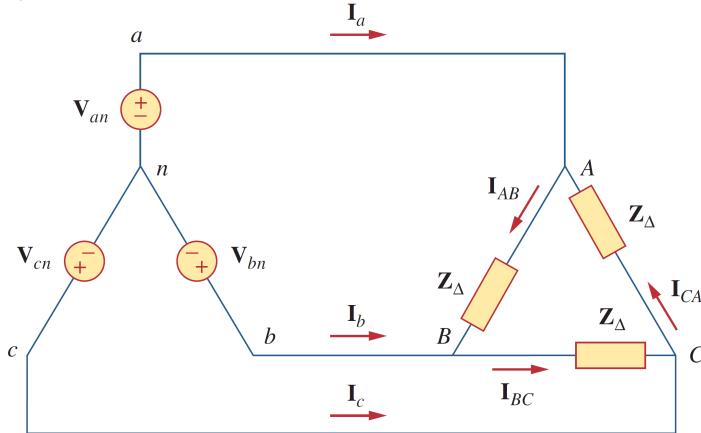


Figure 13.8: Collegamento Y-\$\Delta\$ bilanciato.

uso più frequente nella pratica dei sistemi trifase. Non vi è in questo caso alcun collegamento neutro tra il generatore e il carico.

Le tensioni di linea, ipotizzando la sequenza positiva delle tensioni di fase, si determinano in base alla 13.6. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{t}_{AB} &= \frac{\bar{v}_{ab}}{z_\Delta} = \frac{\bar{v}_{AB}}{z_\Delta} \\ \bar{t}_{BC} &= \frac{\bar{v}_{bc}}{z_\Delta} = \frac{\bar{v}_{BC}}{z_\Delta} \\ \bar{t}_{CA} &= \frac{\bar{v}_{ca}}{z_\Delta} = \frac{\bar{v}_{CA}}{z_\Delta}\end{aligned}\quad (13.14)$$

Le correnti di linea, si ottengono applicando la legge di Kirchhoff per le correnti ai nodi \$A\$, \$B\$ e \$C\$:

$$\begin{aligned}\bar{t}_a &= \bar{t}_{AB} - \bar{t}_{CA} \\ \bar{t}_b &= \bar{t}_{BC} - \bar{t}_{AB} \\ \bar{t}_c &= \bar{t}_{CA} - \bar{t}_{BC}\end{aligned}\quad (13.15)$$

Dal momento che

$$\bar{t}_{CA} = \frac{\bar{v}_{CA}}{z_\Delta} = \frac{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\bar{v}_{cn}}{z_\Delta} = \overbrace{\frac{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\bar{v}_{an}e^{-j\frac{4}{3}\pi}}{z_\Delta}}^{\bar{v}_{AB}} = \bar{t}_{AB}e^{-j\frac{4}{3}\pi}, \quad (13.16)$$

si ottiene

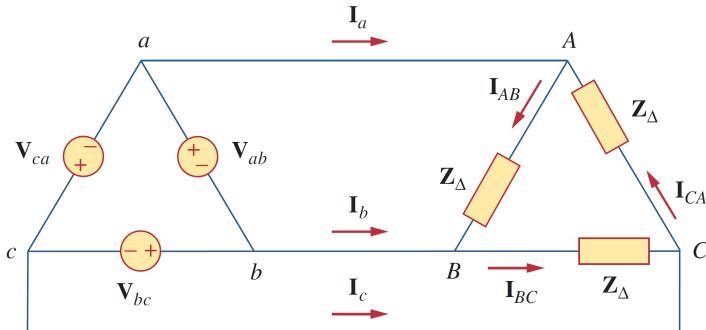
$$\begin{aligned}\bar{t}_a &= \bar{t}_{AB} \left(1 - e^{-j\frac{4}{3}\pi}\right) \\ &= \bar{t}_{AB} \left(1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \bar{t}_{AB} \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}\right) \\ &= \bar{t}_{AB} \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}\pi}\end{aligned}\quad (13.17)$$

Analogamente si ricava

$$\begin{aligned}\bar{t}_b &= \bar{t}_{BC} \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}\pi} \\ \bar{t}_c &= \bar{t}_{CA} \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}\pi}\end{aligned}\quad (13.18)$$

Alternativamente, operando una trasformazione triangolo-stella del carico, è possibile ridurre il circuito ad una connessione di tipo $Y - Y$ e introdurre l'equivalente monofase in figura 13.9. Da questo circuito si possono ricavare solo le correnti di linea e le correnti di fase si deducono dalle relazioni ottenute sopra.

13.4.3 Collegamento $\Delta-\Delta$ bilanciato.



ANCHE IN QUESTA CONFIGURAZIONE l'interesse è quello di calcolare le correnti di linea e le correnti di fase. Le tensioni di linea coincidono con le tensioni di fase quindi le correnti di fase sono

$$\begin{aligned} \bar{I}_{AB} &= \frac{\bar{v}_{ab}}{Z_{\Delta}} = \frac{\bar{v}_{AB}}{Z_{\Delta}} \\ \bar{I}_{BC} &= \frac{\bar{v}_{bc}}{Z_{\Delta}} = \frac{\bar{v}_{BC}}{Z_{\Delta}} \\ \bar{I}_{CA} &= \frac{\bar{v}_{ca}}{Z_{\Delta}} = \frac{\bar{v}_{CA}}{Z_{\Delta}} \end{aligned} \quad (13.19)$$

Le correnti di linea si ottengono come nel caso di connessione $Y - \Delta$.

13.4.4 Collegamento $\Delta-Y$ bilanciato.

IN QUESTA CONFIGURAZIONE le tensioni di linea coincidono con le tensioni di fase del generatore. Per ottenere le correnti di linea è possibile operare in diversi modi. Una possibilità è ricavare la configurazione a stella del generatore trifase e equivalente al triangolo presente e riportarsi quindi ad uno schema di tipo $Y - Y$. Assumendo la sequenza positiva per le tensioni di fase della configurazione a triangolo \bar{v}_{AB} , \bar{v}_{BC} e \bar{v}_{CA} , le equivalenti tensioni rispetto al centro stella si ricavano dalla 13.9. Ad esempio

$$\bar{v}_{an} = \frac{\bar{v}_{ab}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\bar{v}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad (13.20)$$

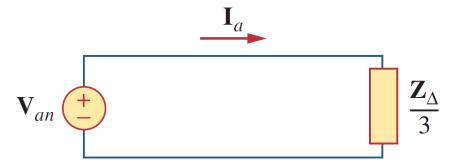
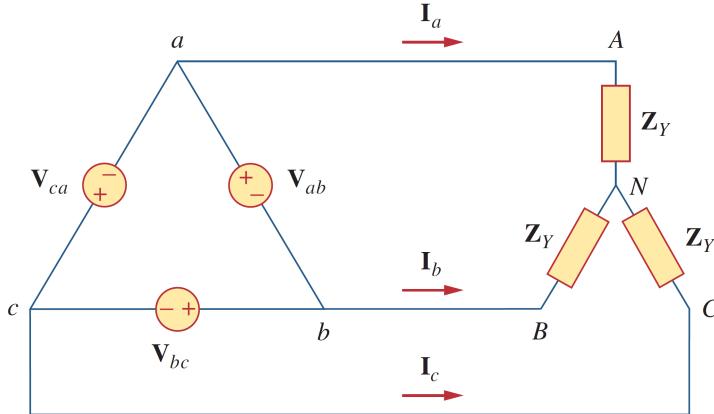


Figure 13.9: Circuito equivalente monofase.

Figure 13.10: Collegamento $\Delta-\Delta$ bilanciato.

Figure 13.11: Collegamento Δ - Y bilanciato.

Utilizzando adesso il circuito equivalente monofase del collegamento $Y - Y$ si ricava

$$\bar{I}_A = \frac{\frac{\bar{V}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}}{Z_Y} . \quad (13.21)$$

13.5 Potenza in un sistema trifase bilanciato

CONSIDERIAMO ADESSO il calcolo delle potenze in un circuito trifase bilanciato e simmetrico. La potenza istantanea assorbita dal carico trifase, supponendolo collegato a Y , si scrive nel dominio del tempo a partire dalle tensioni di fase¹

$$\begin{aligned} v_{AN} &= \sqrt{2}V_p \cos(\omega t) \\ v_{BN} &= \sqrt{2}V_p \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ v_{CN} &= \sqrt{2}V_p \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \end{aligned} , \quad (13.22)$$

dove il fattore $\sqrt{2}$ è necessario dato che V_p è riferito al valore efficace delle tensioni. Assumendo un'impedenza di carico

$$Z_Y = |Z_Y|e^{j\arg(Z_Y)} = Ze^{j\theta} , \quad (13.23)$$

le correnti di fase si possono scrivere come

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} \underbrace{I_p}_{V_p/Z} \cos(\omega t - \theta) \\ i_b &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta - \frac{2}{3}\pi) \\ i_c &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta - \frac{4}{3}\pi) \end{aligned} . \quad (13.24)$$

¹ Si assume la sequenza positiva delle tensioni di fase.

La potenza istantanea totale nel carico è la somma delle potenze istantanee nelle tre fasi, cioè,

$$\begin{aligned} p_a^{ZY}(t) &= v_{AN}(t)i_a(t) + v_{BN}(t)i_b(t) + v_{CN}(t)i_c(t) = \\ &2V_p I_p [\cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta) + \\ &\cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \theta) + \\ &\cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \theta)] . \end{aligned} \quad (13.25)$$

Usando l'identità trigonometrica $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, si ottiene

$$\begin{aligned} p_a^{ZY} &= V_p I_p [3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \\ &\cos(2\omega t - \theta - \frac{4}{3}\pi) + \cos(2\omega t - \theta - \frac{8}{3}\pi)] = \\ &V_p I_p [3 \cos \theta + \cos \gamma + \cos \gamma \cos(\frac{4}{3}\pi) + \sin \gamma \sin(\frac{4}{3}\pi) + \\ &\cos \gamma \cos(\frac{2}{3}\pi) + \sin \gamma \sin(\frac{2}{3}\pi)] = \\ &V_p I_p [3 \cos \theta + \cos \gamma + 2 \cos \gamma \cos(\frac{4}{3}\pi) + \sin \gamma \sin(\frac{4}{3}\pi) - \sin \gamma \sin(\frac{4}{3}\pi)] = \\ &V_p I_p [3 \cos \theta + \cos \gamma + 2(-\frac{1}{2}) \cos \gamma] = 3V_p I_p \cos \theta , \end{aligned} \quad (13.26)$$

dove $\gamma = 2\omega t - \theta$.

La potenza istantanea totale in un sistema trifase bilanciato è quindi costante, non varia nel tempo come fanno invece le potenze istantanee delle singole fasi.

Un generatore trifase bilanciato che alimenta carichi bilanciati eroga una potenza istantanea costante, anziché pulsante come nel caso monofase.

Questo risultato è valido anche per un carico a triangolo e costituisce un'importante ragione per utilizzare un sistema trifase per generare e distribuire la potenza elettrica. Poichè la potenza istantanea complessiva è indipendente dal tempo, la potenza media assorbita per fase per il carico a stella o a triangolo è $\frac{p_a^{ZY}}{3} = \frac{p_a^{Z\Delta}}{3} = V_p I_p \cos \theta$. La potenza attiva per fase è dunque pari a

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad (13.27)$$

e quella reattiva è pari a

$$Q_p = V_p I_p \sin \theta . \quad (13.28)$$

Data la relazione tra tensione e corrente di fase e tensione e corrente di linea nella schema di connessione $Y - Y$, possiamo anche scrivere $P_p = 3 \frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \cos \theta = \sqrt{3} V_l I_l \cos \theta$ e, analogamente, $Q_p = \sqrt{3} V_l I_l \sin \theta$. La potenza complessa assorbita per fase è pari a

$$\hat{A}_p = P_p + j Q_p . \quad (13.29)$$

A QUESTO PUNTO ALCUNE CONSIDERAZIONI sono d'obbligo.

Il fatto che la potenza istantanea assorbita dal carico trifase sia costante non implica che la potenza attiva istantanea e reattiva istantanea, calcolate per il singolo bipolo del carico siano nulle istante per istante.

Con riferimento alla 11.87, infatti, non possiamo affermare che la componente pulsante della potenza istantanea assorbita dal singolo bipolo di carico sia nulla. Bensì, dato che il carico è bilanciato e le tensioni impresse dal generatore di fase sono bilanciate, i contributi pulsanti di potenza attiva e reattiva istantanea non solo hanno valore medio nullo sul periodo per ciascuno bipolo del carico, ma si bilanciano istante per istante. Non dobbiamo quindi aspettarci che la potenza reattiva Q_p per fase sia nulla. Essa è definita infatti, in base alla 11.87, come il coefficiente del termine pulsante sinusoidale a pulsazione 2ω che si ottiene, ad esempio per la fase a , dalla potenza istantanea assorbita $v_{AN}i_a(t)$. Tale coefficiente non è nullo ma, raccolto a fattor comune per le tre fasi bilanciate, risulta pesare una terna di funzioni sinusoidali bilanciate (a pulsazione 2ω) la cui somma, per definizione, è nulla istante per istante.

14.1 Il campo magnetico, il campo di induzione magnetica e la magnetizzazione

NEL CAPITOLO 7 È STATO INTRODOTTO il campo \bar{B} che abbiamo chiamato campo magnetico. La definizione operativa del campo \bar{B} è stata fornita in analogia con quella del campo elettrico \bar{E} , cioè attraverso la forza che una carica di prova q , in moto con velocità \bar{v} , subisce qualora venga a trovarsi in una regione dello spazio in cui il campo \bar{B} è presente.

In realtà, il campo \bar{B} è più propriamente definito come *campo di induzione magnetica* e, per descrivere i fenomeni magnetici nei mezzi materiali, è necessario introdurre altri due campi: il campo \bar{H} (denominato effettivamente *campo magnetico*), ed il campo \bar{M} (indicato come *campo di magnetizzazione*).

Questi tre campi permettono di separare il valore del campo magnetico \bar{B} complessivamente presente in un punto nella somma dei suoi due contributi: il contributo \bar{H} , dato dalle *sorgenti* del campo magnetico, ed il contributo \bar{M} , dato dal materiale eventualmente presente nel punto in cui misuriamo \bar{B} . La relazione che lega i suddetti campi è la seguente

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) , \quad (14.1)$$

dove μ_0 è la permeabilità del vuoto già introdotta del capitolo 7.

Ne possiamo quindi dedurre che, essendo \bar{M} un campo dovuto alla presenza di un mezzo materiale, nel vuoto tale campo è nullo e $\bar{B} = \mu_0\bar{H}$.

IMMAGINIAMO ORA DI GENERARE UN CAMPO MAGNETICO utilizzando una sorgente di campo magnetico, chiamiamo \bar{H}_s questo contributo, e di applicare tale campo ad un materiale: quanto vale \bar{B} all'interno del materiale stesso? Se il materiale è di tipo ferromag-

netico (come ad esempio il ferro, il nickel o il cobalto), ovvero si magnetizza in modo molto marcato, al suo interno il vettore \bar{M} avrà un'intensità elevata. Oltre a questo risultato, si deve considerare il fatto che il materiale magnetizzato diventa a sua volta una sorgente di campo magnetico; a seguito di questo all'interno del materiale si produrrà perciò un campo \bar{H}_m . Il campo totale prodotto dalle sorgenti sarà perciò $\bar{H} = \bar{H}_s + \bar{H}_m$. La relazione 14.1 ci dice che, dentro al materiale, nel complesso, il valore di induzione magnetica, risente sia del contributo dato dalle sorgenti (\bar{H}) che del contributo della magnetizzazione del materiale (\bar{M}). Se invece cerchiamo di capire cosa succeda quando consideriamo un punto che si trova al di fuori del materiale, in questo caso il valore di \bar{H} risentirà ancora del contributo della sorgente di campo magnetico e del contributo dato dal materiale (che una volta magnetizzato diventa a sua volta una sorgente di campo); viceversa, \bar{M} sarà nullo, in quanto in questo caso ci troviamo al di fuori del materiale.

Come descritto nel paragrafo 1.9 per il vettore \bar{P} , anche per \bar{M} esistono materiali che si definiscono lineari per i quali la relazione 14.1 si traduce in $\bar{B} = \mu_r \mu_0 \bar{H}$, in cui μ_r è la permeabilità relativa del materiale. L'introduzione di quest'ultima è dovuta alla relazione $\bar{M} = \chi_m \bar{H}$, dove χ_m è la suscettività magnetica, una costante adimensionale che quantifica il grado di magnetizzazione di un materiale. Possiamo quindi scrivere

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \chi_m \bar{H}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \bar{H} . \quad (14.2)$$

Per tutti i mezzi lineari, le equazioni di Maxwell che abbiamo introdotto nel capitolo 8 rimangono inalterate a patto di sostituire a μ_0 il coefficiente $\mu = \mu_r \mu_0$ (analogamente si sostituirà ϵ_0 con il coefficiente $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$).

14.2 Circuiti magnetici

IN MOLTE SITUAZIONI DI IMPORTANZA PRATICA (trasformatori, relais, motori elettrici), è possibile calcolare in modo approssimato la matrice di induttanza di un sistema di avvolgimenti avvolti su un nucleo di materiale ad alta permeabilità magnetica, tenendo presenti le seguenti ipotesi semplificative:

- Il flusso $\Phi_B \equiv \Psi$ e il campo \bar{B} sono trascurabili all'esterno del nucleo ad alta permeabilità, come mostrato in figura 14.1. Infatti, applicando la legge di Ampère alle due curve chiuse γ_1 e γ_2 di lunghezza paragonabile si ottiene in entrambi i casi $H_1 L = H_2 L =$

Queste note sono tratte dalle dispense del Prof. Giovanni Ghione al Politecnico di Milano.

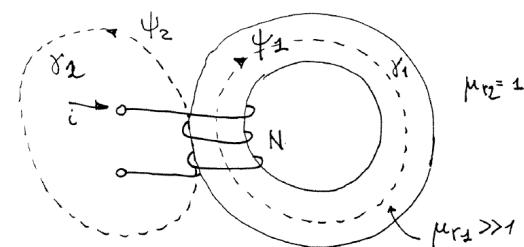


Figure 14.1: Flusso in un nucleo ad alta permeabilità magnetica.

Ni , ove H_1 e H_2 sono i valori medi dei campi magnetici dentro e fuori il nucleo; pertanto $H_1 \approx H_2$, ma $B_1 \gg B_2$ perché $\mu_1 \gg \mu_2$.

2. Il campo di induzione magnetica \bar{B} e il campo magnetico \bar{H} sono approssimativamente costanti in tratti uniformi del nucleo (ossia tratti fatti dello stesso materiale e con uguale area della sezione).
3. Il materiale del nucleo è lineare. Questa ipotesi può essere abbandonata con qualche complicazione ma non verrà trattata in questa sede.

14.2.1 Esempio

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO UN NUCLEO TOROIDALE sul quale sono avvolti due avvolgimenti di N_1 e N_2 spire, come mostrato in figura 14.2.

Indichiamo con $L = 2\pi r$ e S rispettivamente la lunghezza media e l'area del nucleo e con Ψ_1 e Ψ_2 le **direzioni** dei flussi originati dagli avvolgimenti 1 e 2 quando l'altro avvolgimento è disattivato.

Per direzione del flusso si intende la direzione e il verso del versore normale alla superficie attraverso la quale il flusso stesso viene calcolato. Per semplicità, tipicamente si procede assegnando a Ψ_1 e Ψ_2 le direzioni dai campi $\bar{B}_1 = \mu_r \mu_0 \bar{H}_1$ e $\bar{B}_2 = \mu_r \mu_0 \bar{H}_2$ indotti dalle correnti i_1 ed i_2 , rispettivamente. Ovvero, si assumono i versori normali \hat{u}_{N_1} ed \hat{u}_{N_2} orientati come \bar{B}_1 e \bar{B}_2 .

Indichiamo invece con Ψ il flusso presente nel nucleo e dovuto, in generale, al campo complessivo \bar{B} presente in esso. Per la scelta della direzione del flusso Ψ , cioè della superficie S , non è data alcuna regola operativa. Poiché \bar{B} è costante nel nucleo e diretto secondo la direzione circonferenziale, e la sezione S del nucleo è costante, si ottiene che anche Ψ è costante in tutte le sezioni del nucleo e pari a:

$$\Psi = BS = \mu_r \mu_0 H S . \quad (14.3)$$

Si ha poi, dal teorema di Ampère, e tenendo presente che \bar{H} è costante nel nucleo:

$$\oint_{\gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = HL , \quad (14.4)$$

dove le correnti i_1 e i_2 si concatenano positivamente alla linea γ dato il loro orientamento reciproco (si veda il paragrafo 7.7). La lunghezza L della linea γ corrisponde alla lunghezza media del nucleo.

Si ha allora:

$$\Psi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{L} (N_1 i_1 + N_2 i_2) . \quad (14.5)$$

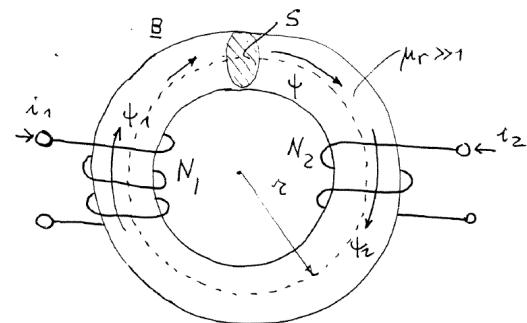


Figure 14.2: Nucleo toroidale con avvolgimenti.

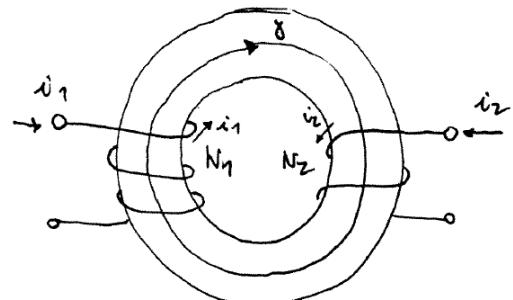


Figure 14.3: Orientamento della curva γ all'interno del nucleo toroidale.

Nella struttura toroidale che stiamo considerando, affinché tale equazione possa essere assunta valida a prescindere dalla scelta di γ e quindi di L , è necessario che $r \gg \sqrt{S}$.

Formalmente, introducendo la riluttanza del nucleo $\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S}$, la relazione

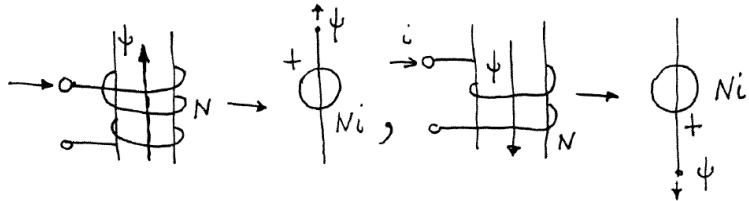
$$\Psi = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad (14.6)$$

è la soluzione del circuito elettrico equivalente riportato in figura 14.4.

POSSIAMO QUINDI OSSERVARE le seguenti analogie:

Circuito elettrico	Circuito magnetico
R resistenza	\mathcal{R} riluttanza
i corrente	Ψ flusso
e forza elettromotrice	Ni forza magnetomotrice
v tensione elettrica	$v_H = \mathcal{R}\Psi$ "tensione magnetica"

Si noti inoltre che vale la seguente convenzione:



Una volta determinato il flusso Ψ nel nucleo, i flussi concatenati con i due avvolgimenti sono:

$$\Phi_1 = N_1 \Psi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2 \quad (14.7)$$

$$\Phi_2 = N_2 \Psi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2 , \quad (14.8)$$

da cui, per definizione, la matrice induttanza è definita come

$$L_{11} = \frac{N_1}{\mathcal{R}} \quad (14.9)$$

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad (14.10)$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} . \quad (14.11)$$

Si noti che in questo caso si ha accoppiamento perfetto in quanto:

$$L_{11} L_{22} - M^2 = \frac{N_1^2 N_2^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{N_1^2 N_2^2}{\mathcal{R}^2} = 0 . \quad (14.12)$$

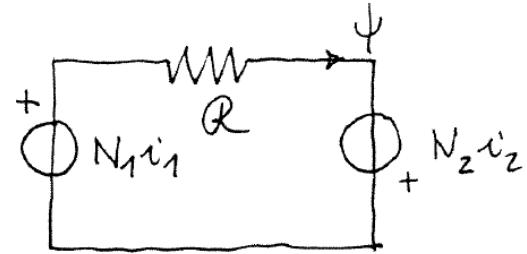


Figure 14.4: Circuito elettrico equivalente al nucleo toroidale riportato in figura 14.2.

Questo significa che tutto il flusso concatenato con l'avvolgimento 1 è anche concatenato con l'avvolgimento 2 (ossia, non c'è flusso disperso).

14.3 Teoria generale dei circuiti magnetici

CON IL TERMINE "CIRCUITO MAGNETICO" intendiamo una connessione o rete composta da lati formati da:

1. Elementi magneticamente passivi, formati da tratti di lunghezza L_i , sezione S_i e permeabilità relativa $\mu_{r,i}$. Questi hanno un circuito equivalente elettrico formato da una riluttanza $\mathcal{R}_i = \frac{L_i}{\mu_{r,i}\mu_0 S_i}$.
2. Elementi magneticamente attivi, formati da tratti di lunghezza L_k , sezione S_k e permeabilità relativa $\mu_{r,k}$, su cui è presente un avvolgimento di N_k spire percorse dalla corrente i_k . Il circuito equivalente elettrico è composto da una riluttanza $\mathcal{R}_k = \frac{L_k}{\mu_{r,k}\mu_0 S_k}$ in serie ad un generatore di forza magnetomotrice $e_k = \pm N_k i_k$.

Si hanno quindi i modelli circuituali riportati in figura 14.5.

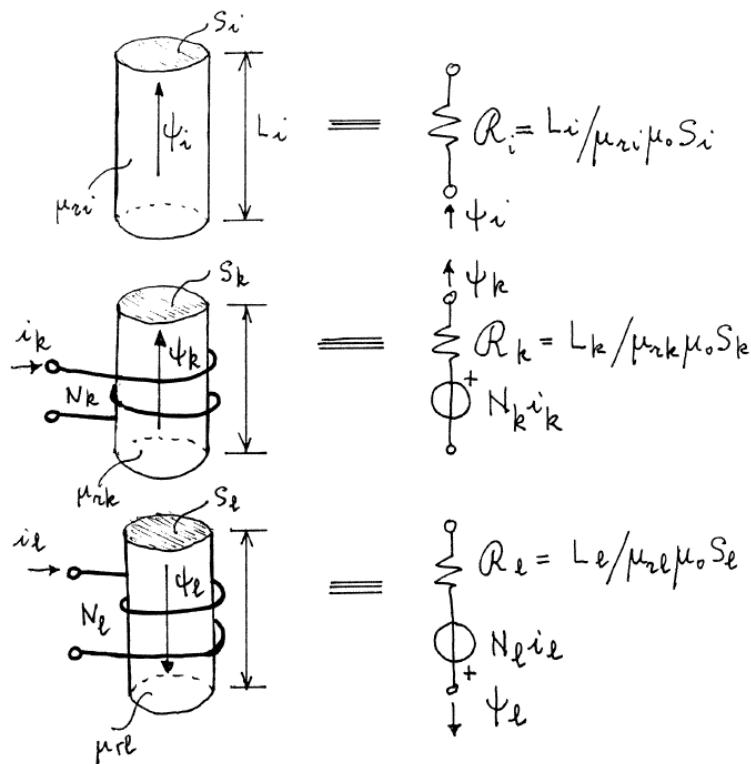


Figure 14.5: Modelli circuituali equivalenti.

I punti di connessione dei lati del circuito magnetico sono i *nodi* del circuito magnetico, poiché, per la legge di Gauss magnetica, vale la seguente equazione:

$$\oint_{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{n}_N d\sigma = 0 . \quad (14.13)$$

Si ha quindi, per densità di flusso costanti e nulle fuori dalle sezioni del circuito magnetico:

$$\oint_{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{n}_N d\sigma \approx \sum_k B_k S_k = \sum_k \Psi_k = 0 . \quad (14.14)$$

ENUNCIAMO QUINDI la KCL magnetica, schematizzata in figura 14.6:

la somma dei flussi entranti in un nodo è nulla, ossia $\sum_k \Psi_k = 0$.

Dato poi un percorso chiuso γ in un circuito magnetico, dalla legge di Ampère si ha:

$$\oint_{\gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} \approx \sum_k H_k L_k = \sum_k v_{H_k} = \quad (14.15)$$

$$= \sum_j N_j i_j \quad (14.16)$$

dove si è definita la tensione magnetica sul tratto $A \rightarrow B$ come

$$v_{H_{BA}} = - \int_A^B \bar{H} \cdot d\bar{l} = -v_{H_{AB}} . \quad (14.17)$$

14.3.1 Esempio

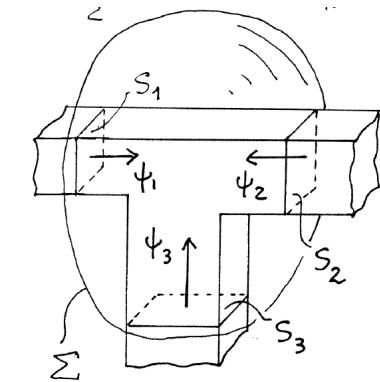
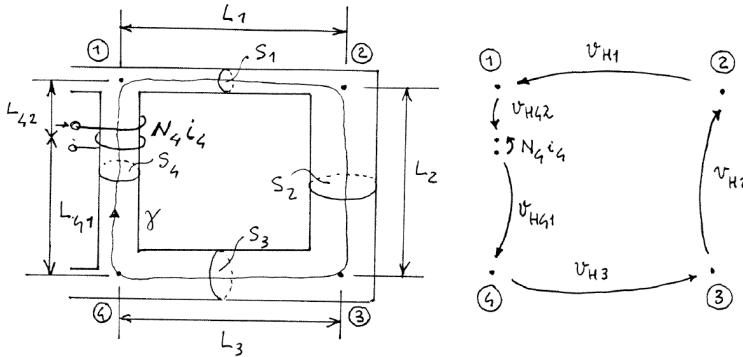


Figure 14.6: Rappresentazione della KCL magnetica.

Figure 14.7: Un semplice circuito magnetico.

Consideriamo ora il circuito magnetico riportato in figura 14.7: si ha che

$$\oint_{\gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = N_4 i_4 . \quad (14.18)$$

In termini di tensioni magnetica, la precedente equazione può essere scritta in modo esplicito come segue:

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3 + H_4 L_{41} + H_4 L_{42} = N_4 i_4 . \quad (14.19)$$

ossia:

$$v_{H_1} + v_{H_2} + v_{H_3} + v_{H_{41}} + v_{H_{42}} = N_4 i_4, \quad (14.20)$$

Si osservi che, considerata ad esempio la tensione magnetica v_{H_1} tra i punti 1 e 2 in figura 14.7, affinché essa possa essere assunta approssimativamente costante per qualunque scelta di γ , è necessario che $L_1 \gg \sqrt{S_1}$. Questa considerazione è evidentemente da generalizzare per ogni tratto del percorso chiuso γ .

IN DEFINITIVA, possiamo generalizzare la KVL magnetica come segue:

la somma delle cadute di tensione magnetica su di un percorso chiuso è pari alla somma delle forze magnetomotorie presenti sul percorso (pesate con segno opportuno).

In conclusione, un circuito magnetico soddisfa tutte le leggi (topologiche, KCL e KVL, relazioni costitutive) di un circuito elettrico, ed è quindi completamente sostituito dal relativo circuito equivalente elettrico.

14.3.2 Flusso e flusso concatenato

Si consideri una regione dello spazio come quella mostrata in figura 14.8, in cui sia presente una densità di flusso \bar{B} .

Una superficie Σ con contorno γ ha allora un flusso concatenato dato da

$$\Psi = \int_{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{n}_N d\sigma. \quad (14.21)$$

Supponiamo ora che su γ sia disposto un avvolgimento di N spire (ad es. $N = 2$, come mostrato in figura 14.9): se l'avvolgimento giace approssimativamente nello stesso piano della superficie Σ , allora il flusso concatenato all'avvolgimento Φ è quello relativo a $\Sigma_1 + \Sigma_2 \approx 2\Sigma$. In altre parole, il flusso concatenato Φ è dato da:

$$\Phi = 2\Psi = 2 \int_{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{n}_N d\sigma. \quad (14.22)$$

Più in generale, il flusso concatenato con un avvolgimento di N spire sarà dato da N volte il flusso concatenato con un solo avvolgimento:

$$\Phi = N\Sigma = N \int_{\Sigma} \bar{B} \cdot \hat{n} d\sigma. \quad (14.23)$$

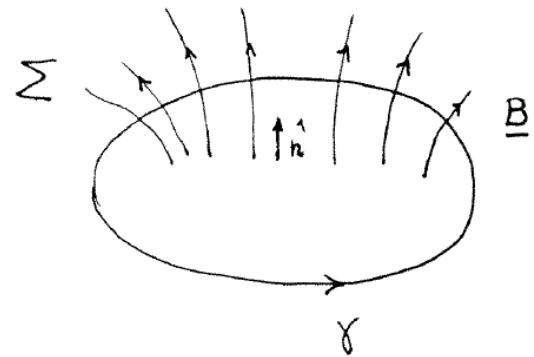


Figure 14.8: Flusso concatenato con la superficie Σ .

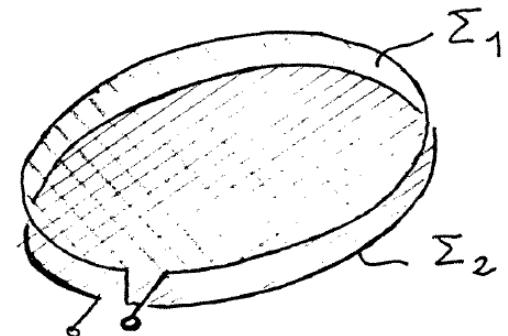


Figure 14.9: Le due spire giacciono nello stesso piano della superficie Σ .

14.3.3 Un esempio

Vogliamo calcolare la matrice induttanza della struttura in figura 14.10. Definite le riluttanze \mathcal{R} e \mathcal{R}_1 come

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S} \quad (14.24)$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{L}{\mu_r \mu_0 2S} = \frac{\mathcal{R}}{2}, \quad (14.25)$$

si ha che il circuito equivalente è quello mostrato in figura 14.11. La rete si può risolvere ad esempio applicando il teorema di Millman ai tre lati connessi ai nodi A e B. Nel circuito equivalente mostrato in figura 14.11, la tensione magnetica v_{AB} può essere calcolata come

$$v_{AB} = \frac{\frac{N_1 i_1}{3\mathcal{R}} + \frac{-N_2 i_2}{3\mathcal{R}} + \frac{2N_3 i_3}{\mathcal{R}}}{\frac{1}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{3\mathcal{R}} + \frac{2}{\mathcal{R}}} \quad (14.26)$$

$$= \frac{1}{8}(N_1 i_1 - N_2 i_2 + 6N_3 i_3) \quad (14.27)$$

Si ha inoltre che

$$v_{AB} = N_1 i_1 - 3\mathcal{R} \Psi_1 \quad (14.28)$$

$$= N_3 i_3 - \frac{\mathcal{R}}{2} \Psi_3 \quad (14.29)$$

$$= -N_2 i_2 + 3\mathcal{R} \Psi_2, \quad (14.30)$$

da cui possiamo ricavare le espressioni dei flussi Ψ_1 , Ψ_2 e Ψ_3 come segue:

$$\Psi_1 = \frac{1}{3\mathcal{R}}(N_1 i_1 - v_{AB}) = \quad (14.31)$$

$$= \frac{1}{3\mathcal{R}} \left[N_1 i_1 \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} N_2 i_2 - \frac{6}{8} N_3 i_3 \right] = \quad (14.32)$$

$$= \frac{1}{24\mathcal{R}} [7N_1 i_1 + N_2 i_2 - 6N_3 i_3] \quad (14.33)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{3\mathcal{R}}(N_2 i_2 + v_{AB}) = \quad (14.34)$$

$$= \frac{1}{3\mathcal{R}} \left[\frac{1}{8} N_1 i_1 - \left(\frac{1}{8} - 1\right) N_2 i_2 + \frac{6}{8} N_3 i_3 \right] = \quad (14.35)$$

$$= \frac{1}{24\mathcal{R}} [N_1 i_1 + 7N_2 i_2 + 6N_3 i_3] \quad (14.36)$$

$$\Psi_3 = \frac{2}{\mathcal{R}}(N_3 i_3 - v_{AB}) = \quad (14.37)$$

$$= \frac{2}{\mathcal{R}} \left[N_3 i_3 - \frac{1}{8} N_1 i_1 + \frac{1}{8} N_2 i_2 - \frac{6}{8} N_3 i_3 \right] = \quad (14.38)$$

$$= \frac{1}{4\mathcal{R}} [-N_1 i_1 + N_2 i_2 + 2N_3 i_3]. \quad (14.39)$$

Passando quindi ai flussi concatenati, e ricordando che $\Phi = N\Psi$, si

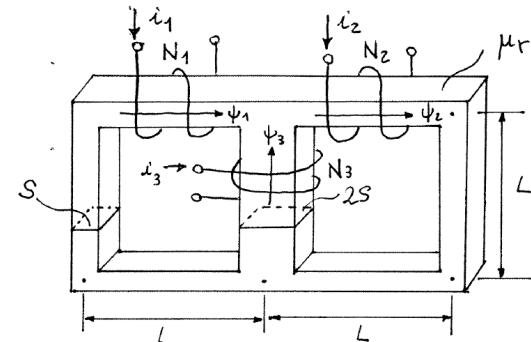


Figure 14.10: Esempio di circuito magnetico.

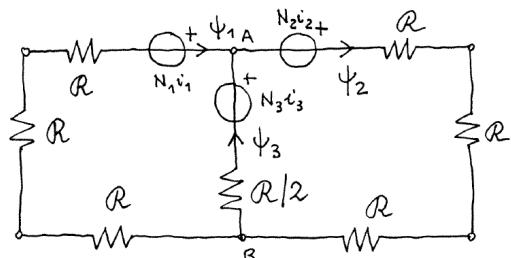


Figure 14.11: Circuito elettrico equivalente del circuito magnetico di figura 14.10.

ottiene che:

$$\Phi_1 = \frac{7}{24\mathcal{R}} N_1^2 i_1 + \frac{1}{24\mathcal{R}} N_1 N_2 i_2 - \frac{6}{24\mathcal{R}} N_1 N_3 i_3 \quad (14.40)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{24\mathcal{R}} N_1 N_2 i_1 + \frac{7}{24\mathcal{R}} N_2^2 i_2 + \frac{6}{24\mathcal{R}} N_2 N_3 i_3 \quad (14.41)$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{4\mathcal{R}} N_1 N_3 i_1 + \frac{1}{4\mathcal{R}} N_2 N_3 i_2 + \frac{2}{4\mathcal{R}} N_3^2 i_3, \quad (14.42)$$

ossia

$$L = \frac{1}{24\mathcal{R}} \begin{bmatrix} 7N_1^2 & N_1 N_2 & -6N_1 N_3 \\ N_1 N_2 & 7N_2^2 & 6N_2 N_3 \\ -6N_1 N_3 & 6N_2 N_3 & 12N_3^2 \end{bmatrix}. \quad (14.43)$$

Si verifica facilmente che, dal momento che $\det(L) = 0$, ci troviamo in una situazione di accoppiamento perfetto, ossia tutto il flusso concatenato con ciascuno degli avvolgimenti è anche concatenato con gli altri due.

14.4 Traferro

Un induttore realizzato con un nucleo ferromagnetico o ferrimagnetico di materiale dolce presenta tipicamente una caratteristica non lineare. In molte applicazioni elettroniche la nonlinearità è inaccettabile perché introduce distorsione. Si può ricorrere quindi ad un accorgimento: interrompere il nucleo mediante un tratto molto breve in aria, detto **traferro** o **intraferro**, come mostrato in figura 14.12.

La riluttanza del nucleo si esprime allora, se il traferro ha lunghezza l_t e il resto del nucleo lunghezza l_f , e se $l_t \ll \sqrt{S}$, ossia se il traferro è molto corto rispetto alla sezione del nucleo (cosa che consente di ipotizzare la continuità del flusso attraverso il traferro), come:

$$\mathcal{R} = \frac{l_f}{\mu_f S} + \frac{l_t}{\mu_0 S} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_t \quad (14.44)$$

La riluttanza del ferro \mathcal{R}_f , anche se non lineare, è sempre $\mathcal{R}_f \ll \mathcal{R}_t$, perché $\mu_f \gg \mu_0$. Pertanto, la riluttanza totale è somma di due contributi, dei quali il contributo eventualmente non lineare è *trascurabile*. La riluttanza totale è quindi:

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_t = \frac{l_t}{\mu_0 S}, \quad (14.45)$$

valore che si può rendere abbastanza piccolo (anche se sempre $\gg \mathcal{R}_f$) perché $l_t \ll l_f$. In definitiva, è possibile ottenere alte induttanze (ossia basse riluttanze) attraverso un nucleo ferromagnetico o ferrimagnetico dotato di un traferro molto sottile. Si noti che regolando lo spessore del traferro (ad esempio mediante una vite) è possibile modificare il valore dell'induttanza totale.

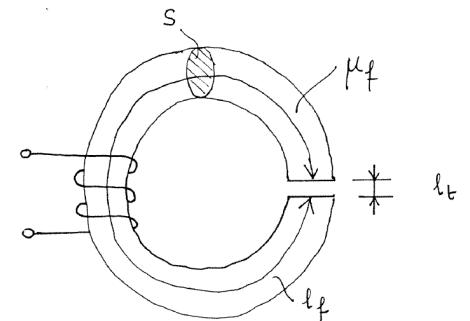


Figure 14.12: Rappresentazione schematica del traferro.