• • •

8.2 INDUTTORE

Se applichiamo una corrente i, si genera un flusso elettromagnetico $\Phi = Li$ dove L è l'induttanza dell'induttore. L'induttanza si misura in [H] (Henry) e dipende dalla geometria dell'induttore.

Derivando l'eq. di prima abbiamo che:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt} \rightarrow V = L\frac{di}{dt}$$

Alcune osservazioni:

- definito solo su base corrente
- se ci troviamo in regime stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito
- è lineare, tempo invariante e dinamico; come il condensatore anche l'induttore ha memoria
- la potenza sarà pari a $p_a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)$ dove $w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ è l'energia immagazzinata nell'induttore nell'istante t; dal punto di vista della potenza è attivo, energeticamente, invece, è passivo.
- la $i(t)$ è variabile di stato

8.3 STATO DI UN CIRCUITO

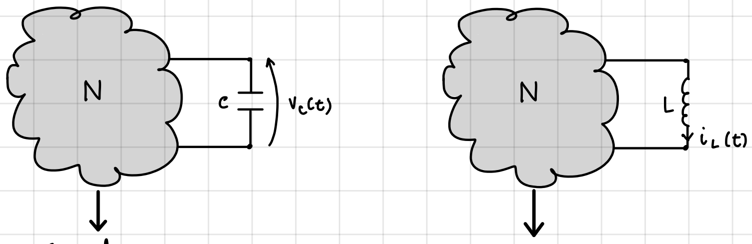
Per stato di un circuito in t_0 si intende un insieme di informazioni che riassumono cosa è successo per $t<t_0$. Se conosciamo lo stato per t_0 e gli ingressi indipendenti per $t>t_0$, possiamo determinare lo stato anche per $t>t_0$. Le variabili di stato sono le grandezze elettriche che costituiscono lo stato. Le variabili non di stato possono essere ricavate dalle variabili di stato tramite equazioni algebriche.

I circuiti adinamici sono privi di stato.

8.4 CIRCITI RC E RL (1° ORDINE)

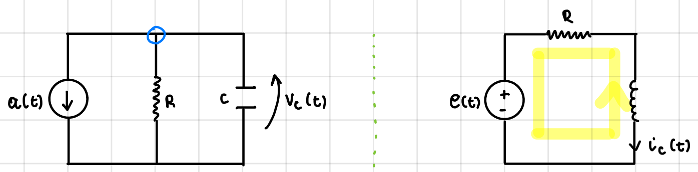
Essere del primo ordine significa avere 1 variabile di stato, generano una eq. differenziale di primo ordine.

Consideriamo una rete N che contiene componenti lineari, adinamici, tempo varianti e sorgenti impressive.



Circuito RC   Circuito RL

Per risolvere questi circuiti usiamo un modello equivalente: per il condensatore usiamo l'eq. di Norton, mentre per l'induttore usiamo l'eq. di Thevenin:



$$a(t) + \frac{V_c}{R} + i_c = 0 \rightarrow C\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R} = -a(t)$$

$$e(t) = R i_c + V_c \rightarrow L\frac{di_c}{dt} + R i_c = e(t)$$

Le due equazioni ricavate sono le equazioni di stato. Riscritte in forma canonica diventano:

$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{1}{RC}V_c - \frac{a(t)}{C} \qquad \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L + \frac{e(t)}{L}$$

Esse sono equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a coefficienti costanti. Per risolvere il problema di Cauchy aggiungiamo la condizione iniziale:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC} V_C - \dfrac{a(t)}{C} \\ V_C(t_0) = V_{C_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R}{L} i_L + \dfrac{e(t)}{L} \\ i_L(t_0) = i_{L_0} \end{cases}$$

Considerando la generica O.D.E diamo dei nomi ai valori:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} x(t)}_{\text{STATO}} = \underbrace{\lambda}_{\text{FREQ. LIBERA}} x(t) + \underbrace{u(t)}_{\text{INGRESSO}}$$

La soluzione generica della O.D.E è data dalla somma di due termini:

- soluzione dell'omogenea associata $\frac{d}{dt} x_A(t) = \lambda x_A(t) \rightarrow x_A(t) = K e^{\lambda(t-t_0)}$ → per $\lambda < 0$, si dice che il circuito è stabile ($x(+\infty) \rightarrow 0$)
  possiamo chiamare $\tau = \frac{1}{|\lambda|}$ costante di tempo del circuito; λ e τ sono caratteristiche del circuito passivato.
- soluzione dell'integrale particolare (risolve $\frac{d}{dt} x_{IP}(t) = \lambda x_{IP}(t) + u(t)$)
  - $u(t) = \alpha e^{\beta(t-t_0)} \rightarrow x_{IP}(t) = \gamma e^{\beta(t-t_0)}$
  - $u(t) = \sum \alpha_K (t-\bar{t})^K \rightarrow x_{IP}(t) = \sum \gamma_K (t-\bar{t})^K$
  - $u(t) = \alpha \cos(wt + \varphi) \rightarrow x_{IP}(t) = \beta \cos(wt) + \gamma \sin(wt)$

Applichiamo la soluzione generica ai nostri circuiti:

RC: supponiamo $a(t) = A \rightarrow V_C(t) = K e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} - RA$

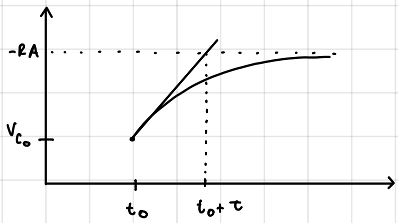
considerando le condizioni iniziali possiamo ricavare $K = V_{C_0} + RA$ ottenendo

$$V_C = \underbrace{(V_{C_0} + RA) e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}_{\text{transitorio}} \underbrace{- RA}_{\text{regime}}$$

$$\downarrow$$

$$V_C = \underbrace{V_{C_0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}_{\text{risp. libera}} \underbrace{- RA \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right]}_{\text{risp. forzata}}$$

$\Longrightarrow$



RL: si risolve in modo analogo. Per lo svolgimento completo cfr. dispensa
($i_L = K e^{-R/L (t-t_0)} + \frac{E}{R}$)