8/10/20

1) Sia $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in R \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\alpha K$. Provare che R è di equivalenza e descrivere $\mathbb{N}_0/_R$

1) Sia $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che associa a n la massima potenza di 2 che divide n, quindi possiamo dire che $(n,m) \in R \iff f(n) = f(m)$. Avremo, quindi, che $R = Ker(f)$ e siccome $Ker\, f$ è di equivalenza, allora R è di equivalenza
$\mathbb{N}_0/_R = \{ [2^n]_R \mid n \in \mathbb{N} \}$ con $[2^n]_R \cdot \mathbb{D}$ con $\mathbb{D} = \{ 2m+1 \mid m \in \mathbb{N} \}$

2) Consideriamo $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \iff \exists h, K \in \mathbb{N}$ dispari, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$: $n = 2^\alpha h$, $m = 2^\beta K \wedge \alpha \le \beta$. Provare che S è di ordine.

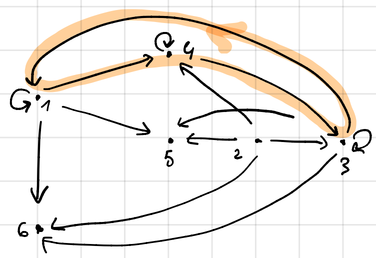
1) riflessiva: Sia $n \in \mathbb{N}_0$, allora $f(n) \le f(n)$ ($f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ che abbiamo visto in 1) quindi $(n,n) \in S$
transitiva: Siano $n, m, l \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S$ e $(m,l) \in S$ dunque $f(n) \le f(m) \le f(l) \Rightarrow f(n) \le f(l) \Rightarrow (n,l) \in S$
antisimmetrica: Siano $n, m \in \mathbb{N}_0$: $(n,m) \in S \wedge (m,n) \in S$ dunque $f(n) \le f(m) \wedge f(m) \le f(n) \Rightarrow f(n) = f(m)$. Dobbiamo ora dimostrare che f è iniettiva. In 1, però, abbiamo visto che è possibile che $[n]_R = [m]_R$, quindi l'antisimmetria non è valida.
↳ non è una relazione d'ordine.

3) Considera $T \subseteq \mathbb{N}_0/_R \times \mathbb{N}_0/_R$: $([n]_R, [m]_R) \in T \iff (n,m) \in S$, essa è d'ordine? ($R$ ed S definiti in 1 e 2).
Dimostra che T è d'ordine.

1) Bisogna prima dimostrare che T è ben definita, ossia se $n' \in [n]_R$ e $m' \in [m]_R$, allora $(n,m) \in S \iff (n', m') \in S$. Sia $(n,m) \in S \iff f(n) \le f(m) \iff f(n') \le f(m') \iff (n', m') \in S$.
Dimostrare le proprietà è facile.

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

$$\begin{array}{cc} A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



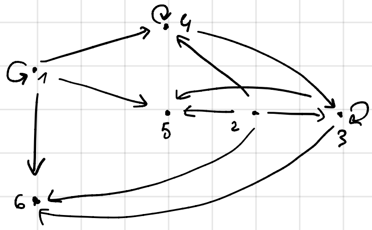
Dire:
1) Quali proprietà ha R
2) Qual è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se sì, trovare max, min. È un reticolo?
4) R contiene funzioni? Quante? R è contenuta in una funzione? Quale?

1) antisimmetrica
2) La chiusura d'equivalenza è ω_A, quindi $A/_{\omega_A} = \{A\}$: Esiste solo 1 componente connessa
3) La chiusura d'ordine non esiste perché nel ciclo orientato si formeranno delle frecce doppie, invalidando l'antisimmetria
4) Togliendo archi non si ottiene nessuna funzione, neanche aggiungendo archi

PRO TIP! Se hai un ciclo, la chiusura transitiva conterrà il ciclo in direzione opposta

4) Sia $R \subseteq A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con:

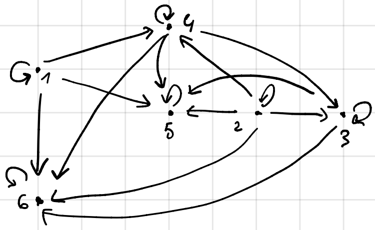
$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

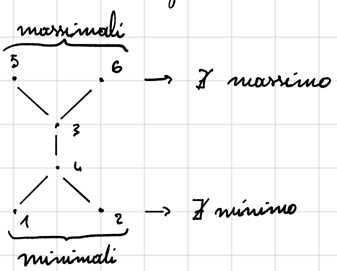


Dire:

1) Quali proprietà ha R
2) Qual'è la chiusura d'equivalenza di R
3) Esiste la chiusura d'ordine di R? Se si, trovare max, min. È un reticolo?
4) Sia T la chiusura d'ordine, T contiene funzioni? Quante? T è contenuta in una funzione? Quale?

1) N. A.
2) ω_A ; $A/_{\omega_A} = \{A\}$
3) Chiudiamo riflessivamente, transitivamente e disegnamo il diagramma di Hasse





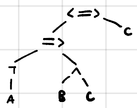
→ non è un reticolo

4) T non è contenuta in funzioni, ma contiene funzioni in quanto seriale. Ci sono $5^2 \cdot 4 \cdot 3$

22/10/20

1) Dire se sono ben formate:

1) $(((\neg A) \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow C)$ ✓



2) $(A \Rightarrow B($ ×
3) $(\neg A \Rightarrow B)$ ✓

2) Sia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$, stabilire se soddisfacibile:

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$A \Rightarrow \neg C$	F
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

→ Soddisfacibile con 7 modelli

3) Sia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$ e $G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$, dire se $F \models G$ o se $G \models F$

A	B	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$\Rightarrow F \not\models G$ e $G \not\models F$

3) Sia $F = (A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$ e $G = (A \Rightarrow \neg B) \vee C$, dire se $F \models F \wedge G$, $F \models F \vee G$, $F \wedge G \models F$, $F \vee G \models F$

A	B	C	F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow$
$F \not\models F \wedge G$
$F \models F \vee G$ → ogni formula modella una tautologia
$F \wedge G \models F$
$F \vee G \not\models F$ → una tautologia non è conseguenza nessuna formula

4) Sia $\Sigma = \{A\}$ provare che $(F(\Sigma)/_\equiv, \models)$ è un reticolo

A	$\perp$	A	$\neg A$	$\top$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ A \arrow[dr, dash] & & \neg A \arrow[dl, dash] \\ & \perp & \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow (Fma(\Sigma)/_\equiv, \models)$ è un reticolo

23/10/20

1) Sia F la f.b.f avente t.d.v

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Stabilire se $(\neg A \Rightarrow C) \wedge B \models F$

Possiamo usare la t.d.v, usiamo però un metodo più efficiente: $((\neg A \Rightarrow C) \wedge B)^c, (\neg F)^c \vdash_R \square$ (Risoluzione).
Scriviamo in forma a clausole le formule:

$(\neg A \Rightarrow C) \wedge B \equiv (A \vee C) \wedge B \to \{\{A, C\}, \{B\}\}$

$F \xrightarrow{\text{SINTESI}} (A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg(B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg C) \vee (A \vee \neg B \vee \neg C)$

$\neg F \equiv (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \equiv (A \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) \wedge (C \vee (\neg A \wedge B \wedge C)) \equiv \cancel{(A \vee \neg A)} \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (\cancel{C \vee C})^{c}$

↳ $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{\neg A, C\}, \{B, C\}, \{C\}\}$

Per ottenere □ ho:

$\{A,C\}\ \{B\}\ \{A,B\}\ \{\neg A,C\}\ \{B,C\}\ \{C\} \rightarrow$ Le lettere B e C sono ineliminabili $\Rightarrow$ □ è irraggiungibile

↳ Operazione di pruning: eliminare le lettere che sono sempre positive/negative

Visto che $((\neg A \Rightarrow C)\wedge B)^c, (\neg F)^c \nvdash_R \square$, $(\neg A \Rightarrow C)\wedge B \nvDash F$

2) Sia F la f.b.f avente t.d.v

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	x
0	1	1	0
1	0	0	y
1	0	1	z
1	1	0	1
1	1	1	0

Trovare F non equivalente alle formule date tale che:
$$\begin{cases} \overbrace{(C \Rightarrow (A \vee B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))}^{\mathcal{G}} \vDash F \\ F \vDash \underbrace{B \Rightarrow (A \wedge B \wedge \neg C)}_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

e provare la correttezza del risultato con la risoluzione.

A	B	C	$\mathcal{G}$	F	$\mathcal{H}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1 →	1 →	1
0	1	0	0	X ←	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	Y →	1
1	0	1	0	Z →	1
1	1	0	1 →	1	1
1	1	1	0	0	0

$x = 0$

$y = \{0,1\}$ → se $y = 0$, $z = 0$ $F = \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ prendiamo $y = 1$

$z = \{0,1\}$

↳ $F \equiv (A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee (\neg B \wedge C))$

Con la risoluzione le nostre condizioni saranno: $\begin{cases} \mathcal{G} \vDash F \iff \mathcal{G}^c, (\neg F)^c \vdash_R \square \\ F \vDash \mathcal{H} \iff F^c, (\neg \mathcal{H})^c \vdash_R \square \end{cases}$. Scriviamo le clausole:

$\neg\mathcal{H} \equiv \neg(\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \equiv B \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \rightarrow \{B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$

$F \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \rightarrow \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{A, C\}$

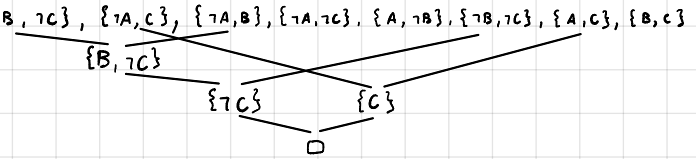
$\neg F \equiv (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \equiv (A \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C))) \wedge (C \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg C))) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge \cancel{(C \wedge B \wedge \neg C)}$

↳ $\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}$

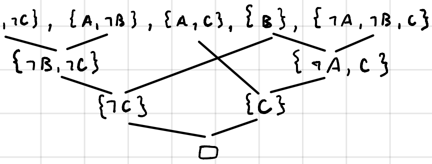
$\mathcal{G} \equiv \neg(\neg C \vee A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \equiv (\neg A \vee (A \vee B \vee \neg C)) \wedge (\neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \wedge (C \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \equiv$

$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee B) \rightarrow \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{B, C\}$

$\mathcal{G}^c, (\neg F)^c \vdash_R \square$: $\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{B, C\}$



$F^c, (\neg H)^c \vdash_R \square$: $\{\neg A, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{A, C\}, \{B\}, \{\neg A, \neg B, C\}$



3) Formalizzare e provare la correttezza di questo ragionamento:

"Sapendo che: 1) Se Carla non è nata a Catania, allora Anna non è ad Alessandria e Barbara non è nata a Bologna
2) Se Anna è nata ad Alessandria, allora Carla non è nata a Catania. Ne segue che Carla è nata a Catania oppure Anna non è nata ad Alessandria."

Otteniamo le seguenti formule: $\{\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B),\ A \Rightarrow \neg C\} \models C \vee \neg A$. Traduciamo in clausole:
$(\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))^c,\ (A \Rightarrow C)^c,\ (\neg(C \vee \neg A))^c \vdash_R \square$

$\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \equiv C \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B) \rightarrow \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}$

$A \Rightarrow \neg C \equiv \neg A \vee \neg C \rightarrow \{\neg A, \neg C\}$

$\neg(C \vee \neg A) \equiv \neg C \wedge A \rightarrow \{A\}, \{\neg C\}$

$\{\neg A, C\},\ \cancel{\{\neg B, C\}},\ \{\neg A, \neg C\},\ \{A\},\ \{\neg C\}$

$\{\neg A\}$

$\square$

5/11/20

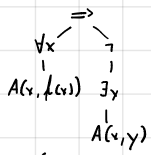
1) Individuare occorrenze libere e vincolate, scrivere l'albero di struttura, portare in forma normale prenessa e Skolemizzare le seguenti formule:

var. Lettera funz.

1) $\forall x\, A(x, f(x)) \Rightarrow \neg \exists y\, A(x,y)$

(Lettera pred.) — x Vincolata

var. — x Libera — y vincolata } Formula non chiusa



F.N.P: $\forall x\, A(x, f(x)) \Rightarrow \neg \exists y A(x,y) \equiv \exists z (A(z, f(z)) \Rightarrow \neg \exists y\, A(x,y)) \equiv \exists z (A(z, f(z)) \Rightarrow \forall y \neg A(x,y)) \equiv \exists z \forall y (A(z, f(z)) \Rightarrow A(x,y))$

F. SK: $\forall y (A(a, f(a)) \Rightarrow \neg A(x,y))$

2) $\forall x \exists y\ A(y, x, f(x,y)) \vee \neg \forall y\, B(x, g(y))$

x,y vincolate — y vincolata — x libera

FNP: $\forall x \exists y\, A(y,x, f(x,y)) \vee \neg \forall y\, B(x, g(y)) \equiv \forall x \exists y A(y,x,f(x,y)) \vee \exists y \neg B(x, g(y)) \equiv \exists z (\forall x \exists y\, A(y,x,f(x,y)) \vee \neg B(x, g(z))) \equiv$

$\equiv \exists z \forall w \exists y\, (A(y, w, f(w,y)) \vee \neg B(x, g(z)))$

FSK: $\forall w (A(h(w), w, f(w, h(w))) \vee \neg B(x, g(a)))$

2) Sia φ la f.b.f: $A(x,y) \Rightarrow \exists z (A(x,z) \wedge A(z,y))$ con x, y variabili. Discutere la soddisfacibilità e la verità di φ e delle sue chiusure universale ed esistenziale nell'interpretazione con dominio $\mathbb{N}$ e in cui $A = <$. Cosa cambia se il dominio è $\mathbb{R}$? E se $A = \leq$? φ è valida? È contraddittoria?

φ non è un enunciato. Traduciamo in linguaggio naturale: "se x e y (assegnati) sono naturali dati tali che $x<y$ allora esiste un naturale z tale che $x<z$ e $z<y$".
La veridicità di φ dipende dall'assegnamento.
Considero $s_1: x \mapsto 1, y \mapsto 3$, allora φ è soddisfatta, ma per $s_2: x \mapsto 1, y \mapsto 2$ φ non è soddisfatta. N.B $s_3: x \mapsto 1, y \mapsto 1$ soddisfa φ in quanto l'antecedente è falso. Quindi in $(\mathbb{N}, <)$ φ è soddisfacibile ma non è vera né falsa e quindi né valida.
Chiusura universale di φ è falsa in $(\mathbb{N}, <)$, quella esistenziale è vera in $(\mathbb{N}, <)$

Se considero l'interpretazione $(\mathbb{R}, <)$ φ risulta vera, infatti se s è un assegnamento ci sono 2 casi:
1) $s(x) < s(y)$: antecedente vero, conseguente vero = V
2) $s(x) \geq s(y)$: antecedente falso = V
Lo stesso vale per $(\mathbb{R}, \leq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$.

3) Sia φ la f.b.f: $\forall x \forall y ((A(x,y) \vee A(y,x)) \Rightarrow \exists z (A(x,z) \wedge A(z,y)))$, discutere la verità di φ in $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$

1) $(\mathbb{Z}, <)$, φ diventa: "per ogni coppia di interi x e y si ha che se $x<y$ oppure $y<x$ allora esiste un intero z tale che $x<z$ e $z<y$".
φ è falsa: basta considerare un numero e il suo successore.
2) $(\mathbb{Q}, \leq)$, φ è ancora falsa in quanto l'antecedente è sempre vero, ma il conseguente no se $x>y$
3) $(\mathbb{N}, |)$, φ è: "per ogni coppia di naturali x e y si ha che se $x|y$ o $y|x$ allora esiste z tale che $x|z$ e $z|y$". φ è ancora falsa:
se $x=4$ e $y=2 \rightarrow \exists z: 4|z$ e $z|2$? Ciò non è possibile.

4/12/20

11 Sia $Y = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ e $*$ l'operazione su Y così definita: $a * b = a + b - ab$

1) provare che $(Y, *)$ è un gruppo abeliano

2) sia φ la fbf: $\varphi := (\forall x \forall y \exists z\ A(f(x,z), y) \Rightarrow (\exists x \forall y\ A(f(x,z), z))$ dire se φ è vera / falsa / soddisf. ma non vera nell'interpretazione con dominio Y in cui A è il predicato '=' e f è l'operazione '$*$'. Essa è valida o no? È una contraddizione?

1) Verifico che '$*$' è interna. Vediamo se esistono $a, b \in Y$: $a * b = 1$:

$a + b - ab = 1$, $a(1-b) + b - 1 = 0$, $(1-b)(a-1) = 0 \iff b = 1 \vee a = 1$

dunque '$*$' è interna.

Osservo subito che '$*$' è commutativa. Verifico l'associatività di '$*$':

siano $a, b, c \in Y$: $\left.\begin{array}{l} a * (b * c) = \dots \\ (a * b) * c = \dots \end{array}\right\}$ coincidono

Cerco l'elemento neutro:

cerco $u \in Y$: $\forall x \in Y$ $x * u = x \rightarrow \cancel{x} + u - ux = \cancel{x}$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{deve valere } \forall x \in Y}}{u(1-x) = 0} \Rightarrow u = 0$

Per commutatività non dobbiamo cercare elementi neutri dx/sx.

Cerchiamo l'inverso:

$\forall x \in Y\ \exists y \in Y$: $x * y = 0 \rightarrow x + y - xy = 0$, ... , $y = \frac{x}{x-1} \in Y$

Dunque $(Y, *)$ è un gruppo commutativo

2) $\varphi := (\forall x \forall y \exists z\ A(f(x,z), y)) \Rightarrow (\exists z \forall x\ A(f(x,z), z))$.

Traduciamo nell'interpretazione:

"se per ogni x, y esiste z tale che $x * z = y$, allora esiste z tale che per ogni x si ha $x * z = z$"

La prima parte equivale a dire "ogni equazione lineare è risolvibile". Ciò è sempre vero per un gruppo. La seconda equivale ad affermare l'esistenza dell'elemento nullo. Questo è falso perché negherebbe l'ipotesi di invertibilità (per gruppi con più di un elemento). Quindi in questa interpretazione φ è falsa.

Di sicuro φ non è valida. Per dimostrare che non è una contraddizione bisogna trovare una interpretazione in cui è valida oppure che $\varphi^c \nvdash \square$. ...