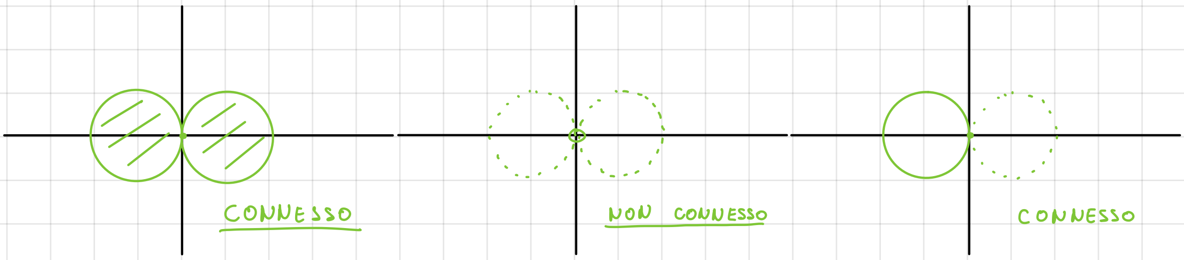
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \le 1 \ \vee \ (x-1)^2 + y \le 1\}$$
$$B = \{ \quad '' \qquad '' \quad < \qquad '' \quad < \ \}$$
$$C = \{ \quad '' \qquad '' \quad \le \qquad '' \quad < \ \}$$



Nota bene: nessuno degli insiemi è convesso.

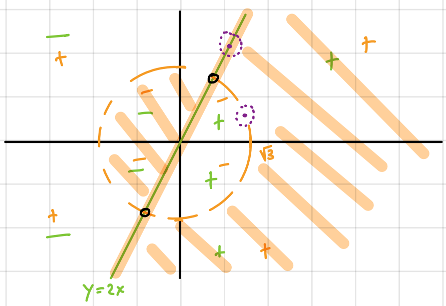
2) Dato $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le (2 - \frac{1}{n})^2\}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

Ogni C_n è una circonferenza con raggio crescente $R \to 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ viene uguale a $C_\infty = \{ \ '' : x^2 + y^2 < 2\}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'essa chiusa.

Proprietà è scrivibile come:
1) Unione infiniti aperte è aperta
2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

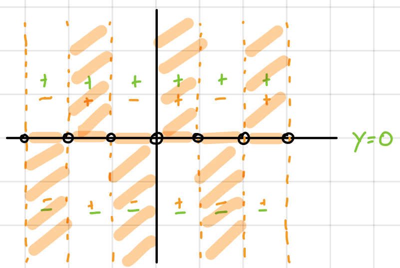
3) Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x,y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso ($\partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi
- $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2y-4}} \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 4 \to$ fuori dall'ellisse di semiasse $a = 2$, $b = \sqrt{2} \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso, illimitato, connesso per archi.
- $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{2x-y}{x^2+y^2-3}} \Rightarrow$ N $2x - y \ge 0$, D $x^2 + y^2 - 3 > 0$ $\to$ N $y \le 2x$, D $x^2 + y^2 > 3$



L'insieme non è aperto ($\exists \partial D \subset D$), non è chiuso ($\exists \partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi

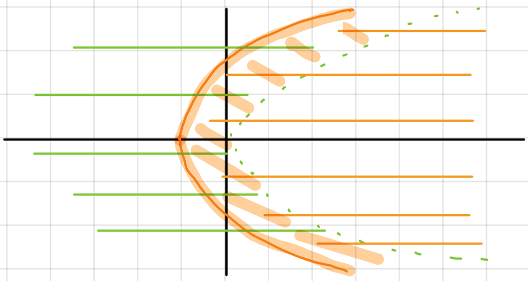
- $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow$ N $y \ge 0$, D $\sin x > 0 \to 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



Né aperto né chiuso, illimitato, sconnesso per archi

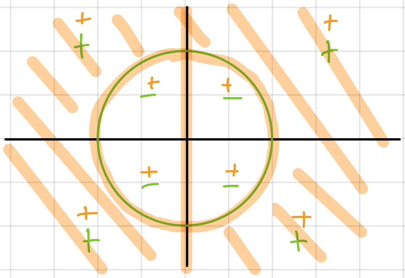
01/19

- $f(x,y)=\sqrt{-\ln(y^2-x)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}-\ln(y^2-x)\ge 0 \to \ln(y^2-x)\le \ln 1 \to y^2-x\le 1 \to \begin{cases}x\ge y^2-1\\ x<y^2\end{cases}\\ x<y^2\end{cases}$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

- $f(x,y)=\sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\Rightarrow$ F_1 $|x|\ge 0$
  F_2 $x^2+y^2-4\ge 0$

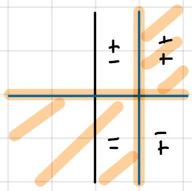


È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) $f(x,y)=\sqrt{xy-y}+1$

D $xy-y\ge 0 \to y(x-1)\ge 0 \to \begin{cases}y\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

O ± sempre positiva senza zeri in D

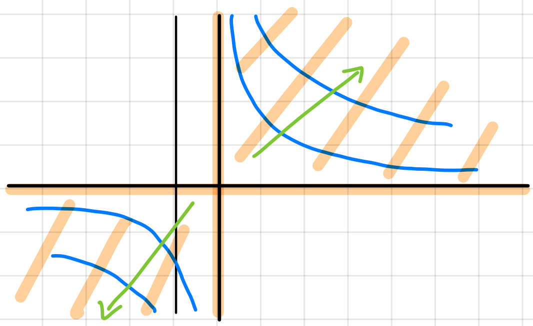
LIVELLI $\sqrt{xy-y}+1=c$

se $c\le 0$ $E_c=\emptyset$

se $c<1$ $E_c=\emptyset$

se $c\ge 1$ $\longrightarrow$ $xy-y=(c-1)^2 \Rightarrow y=\frac{(c-1)^2}{x-1}$ per $x\ne 1$

$x=1 \iff c=1 \to y(x-1)=0$



- $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D $x^2+y^2>0$ $(x,y)\ne(0,0)$ $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

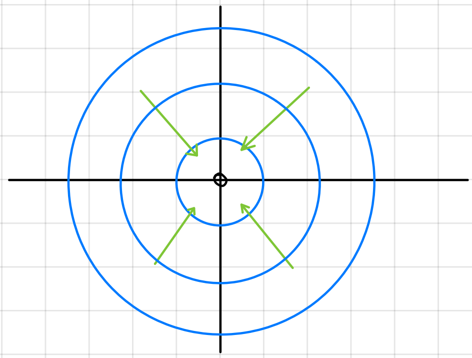
± funzione sempre positiva

0 non ci sono zeri

LIVELLI $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$

$c \le 0 \quad E_c=\emptyset$

$c>0 \quad \frac{1}{x^2+y^2}=c^2 \to x^2+y^2=\frac{1}{c^2}$



• $f(x,y)=e^{\frac{x^2}{y}}-1$

D $D=\mathbb{R}\setminus\{y=0\}$ Dominio aperto, non chiuso, illimitato, non connesso per archi

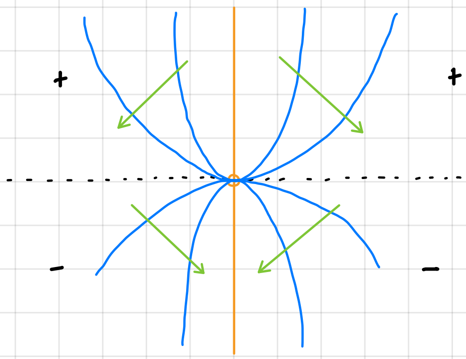
0 $e^{\frac{x^2}{y}}=1 \to \frac{x^2}{y}=0 \quad x=0$

± $e^{\frac{x^2}{y}}>e^0 \to \frac{x^2}{y}>0 \quad y>0$

LIVELLI $e^{\frac{x^2}{y}}-1=c \to e^{\frac{x^2}{y}}=c+1$

$c\le -1 \quad E_c=\emptyset$

$c>-1 \quad e^{\frac{x^2}{y}}=c+1 \to \frac{x^2}{y}=\ln(c+1) \to \begin{cases} x=0 & \text{se } c=0 \\ y=\frac{1}{\ln(c+1)}x^2 & \text{se } c\ne 0 \end{cases}$



2) Trova gli zeri di $f(x,y)=y^2-8x^2+x^4$ $(D=\mathbb{R})$

$y^2=8x^2-x^4 \to y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$; Studio $y=\sqrt{8x^2-x^4}$; l'altra è simmetrica

$y=\sqrt{8x^2-x^4}$ PARI, $D=[-\sqrt{8};\sqrt{8}]$

$y=0$ se $x=0,\ x=\pm\sqrt{8}$

$y'=\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}\ge 0 \iff 4x(4-x^2)\ge 0$