INVERTIBILITÀ

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

- Matrici quadrate SEZIONE 3.4
- Matrici invertibili SEZIONE 3.5
- Matrici elementari SEZIONE 3.5.2
- Esistenza ed unicità dell'inversa SEZIONI 3.5.1 - 3.5.3 - 3.5.4
- Algoritmo di Gauss - Jordan SEZIONE 3.5.3
- Teorema di Cramer SEZIONE 3.5.5

MATRICI QUADRATE (DEFINIZIONI 3.29 - 3.32)

$A \in Mat(n,n;\mathbb{K})$ si dice quadrata. Inoltre, se $a_{ij} = 0$ per:

- $i > j \Rightarrow A \in \mathbb{T}_a(n;\mathbb{K})$ è triangolare alta;
- $i \geq j \Rightarrow A \in \mathbb{T}_{sa}(n;\mathbb{K})$ è triangolare strettamente alta;
- $i < j \Rightarrow A \in \mathbb{T}_b(n;\mathbb{K})$ è triangolare bassa;
- $i \leq j \Rightarrow A \in \mathbb{T}_{sb}(n;\mathbb{K})$ è triangolare strettamente bassa;
- $i \neq j \Rightarrow A \in \mathbb{D}(n;\mathbb{K})$ è diagonale.

Inoltre:

- se $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A \in \mathbb{S}(n;\mathbb{K})$ è simmetrica;
- se $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow A \in \mathbb{A}(n;\mathbb{K})$ è antisimmetrica.

NOTAZIONE: $Mat(n,n;\mathbb{K}) = Mat(n;\mathbb{K})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_a(3;\mathbb{Q}) \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_{sa}(3;\mathbb{Q})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \overbrace{T_a(3;\mathbb{Q}) \cap T_b(3;\mathbb{Q})}^{= D(3;\mathbb{Q})} \cap S(3;\mathbb{Q})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \in A(3;\mathbb{Q}) \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \in S(3;\mathbb{Q})$$

PROPOSIZIONE 3.31

T_a, T_{sa}, T_b, T_{sb}, D, $Mat(n;\mathbb{K})$ sono chiusi rispetto a $+, \cdot, *$.

$A \in Mat(n;\mathbb{K}) \Rightarrow A^k = A * \dots * A \qquad P(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot A^i =$

$A^0 = I_n \qquad = c_0 \cdot I_n + c_1 \cdot A + \dots + c_k \cdot A^k$

PROPOSIZIONE 3.34

S, A sono chiusi rispetto a $+, \cdot$.

MATRICI INVERTIBILI (DEFINIZIONE 3.40)

$A, B, C \in Mat(n; \mathbb{K})$. Allora:

- B è inverso sinistro di A se $BA = I_n$;
- B è inverso destro di A se $AB = I_n$;
- A è invertibile se B, C esistono e vale $B = C$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = AC = I_2$.

CARATTERIZZAZIONE DELLE MATRICI INVERTIBILI (TEOREMA 3.42, PROPOSIZIONE 3.60)

i) A è invertibile sse vale una delle seguenti proprietà:

- $r(A) = n$;
- esiste l'inverso destro di A;
- esiste l'inverso sinistro di A.

ii) Se esiste, l'inverso è unico ed è indicato con A^{-1}.

Teorema di Cramer (Corollario 3.61)

A invertibile $\Rightarrow [A|B]$ ha unica soluzione $X = A^{-1}B$.

Dim: A invertibile $\Rightarrow r(A) = n \overset{R.C.}{\Rightarrow} \exists!$ soluzione.

Verifichiamo che sia X: $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$. $\blacksquare$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = X$$

Proprietà Elementari (Proposizione 3.44)

i) $(A^{-1})^{-1} = A$; (involuzione)

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Dim: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$ $\blacksquare$

Esercizio: siano $A_1, \dots, A_k$ invertibili $\Rightarrow (A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

La dimostrazione del Teorema 3.42 si spezza in più fasi:

i) unicità dell'inversa;

ii) matrici elementari e metodo di eliminazione;

iii) condizione sufficiente all'invertibilità;

iv) condizione necessaria all'invertibilità.

i) PROPOSIZIONE 3.43

Sia $A \in Mat(n; \mathbb{K})$ con B, C inverse a sinistra e a destra. Allora $B = C = A^{-1}$ ed esse sono uniche.

iv) PROPOSIZIONE 3.59

Se $r(A) < n$, allora non esistono le inverse a sinistra e a destra.

Concentriamoci sulle fasi ii e iii, così da arrivare a fornire un algoritmo esplicito per l'inversione di A.

(ii) MATRICI ELEMENTARI E (DEFINIZIONE 3.45)

- $I_n \xrightarrow{R(i) \leftrightarrow R(j)} P(i,j)$ = matrice di permutazione
- $I_n \xrightarrow{t \cdot R(i) \to R(i)} T(i;t) \qquad t \in \mathbb{K}^*$
- $I_n \xrightarrow{R(i) + t \cdot R(j) \to R(i)} T(i,j;t) \qquad t \in \mathbb{K}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \qquad P(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_2 \to R_2} \qquad T(2;3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \qquad T(2,1;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPOSIZIONE 3.47

Data $A \in Mat(m, n; \mathbb{K})$, le operazioni elementari sono:

- $A \xrightarrow{R(i) \leftrightarrow R(j)} B = P(i,j)A$;
- $A \xrightarrow{t \cdot R(i) \to R(i)} B = T(i;t)A$;
- $A \xrightarrow{R(i) + t \cdot R(j) \to R(i)} B = T(i,j;t)A$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \quad P(1,2)A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_1 \to R_1} \quad T(1;2)A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \quad T(1,2;-1)A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{bmatrix}$$

COROLLARIO 3.48

Ogni riduzione S di A si può ottenere come $S = E_1 \dots E_k A$.

LEMMA 3.49

Le inverse delle matrici elementari esistono e sono matrici elementari:

- $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$;
- $T(i;t)^{-1} = T(i;t^{-1})$;
- $T(i,j;t)^{-1} = T(i,j;-t)$.

PROPOSIZIONE 3.50

Se $S = E_1 \dots E_K A \Rightarrow A = E_K^{-1} \dots E_1^{-1} S$.

DIM: $(E_1 \dots E_K)^{-1} = E_K^{-1} \dots E_1^{-1} \Rightarrow$

$$E_K^{-1} \dots E_1^{-1} S = (E_1 \dots E_K)^{-1} (E_1 \dots E_K) A = A. \qquad \boxtimes$$

Quindi, ogni matrice è decomponibile come il prodotto di K matrici elementari ed una matrice a scala.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2 \cdot R_2 \to R_3]{1/2 \cdot R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

$$\Rightarrow \quad S = T(2,1;-1)\, T(3,2;-2)\, T(1;1/2)\, A$$

$$\Rightarrow \quad A = \left(T(2,1;-1)\, T(3,2;-2)\, T(1;1/2)\right)^{-1} S =$$

$$= T(1;1/2)^{-1}\, T(3,2;-2)^{-1}\, T(2,1;-1)^{-1} S =$$

$$= T(1;2)\, T(3,2;2)\, T(2,1,1)\, S =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OSS: l'algoritmo di riduzione è sempre invertibile, ovvero se $A \to S$ allora $S \to A$ attraverso operazioni elementari.

(iii) LEMMA 3.5.2

Se $A \in Mat(n; \mathbb{K})$, esiste la riduzione $A \to I_n$ sse $r(A) = n$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2 \cdot R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3 \to R_2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \quad \Rightarrow$$

- $I_3 = \underbrace{\left(T(1,2;-1)\, T(2,3;-2)\, T(3;1/2)\, P(1,2) \right)}_{= A^{-1}} A$

- $A = P(1,2)\, T(3;2)\, T(2,3;2)\, T(1,2;1)$

COROLLARI 3.53 - 3.54

- A è prodotto di matrici elementari sse $r(A) = n$;
- se $r(A) = n$ allora A è invertibile.

Algoritmo di Gauss - Jordan (Osservazione 3.56)

Supponiamo che $A \in Mat(n; \mathbb{K})$ sia invertibile $\Rightarrow$

- esiste A^{-1} che si può scrivere come $A^{-1} = E_1 \dots E_k$;
- $A^{-1} * [A \mid I_n] = [A^{-1}A \mid A^{-1} I_n] = [I_n \mid A^{-1}]$.

Quindi A^{-1} è associata alle operazioni elementari che trasformano $[A \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid A^{-1}]$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Verifica: } AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$$