

Intorno in  $n$  dimensioni

Come visto in algebra,  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma euclidea si definisce:

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0^i)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio  $\epsilon$  come:

$$B(x_0, \epsilon) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \epsilon \right\} \quad (\text{Bolla})$$

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in  $n$  dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono spiccioli: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Consideriamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Presto un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ :

- $x$  si dice **INTERNO** ad  $A$  se  $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset A$
- $x$  si dice **DI FRONTIERA** per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \epsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- $x$  si dice **ESTERNO** ad  $A$  se  $\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad  $A$  viene indicato con  $A^\circ$ . L'insieme dei punti di frontiera di  $A$  è indicato con  $\partial A$ . Le frontiere di  $A$  e  $\bar{A}$  coincidono.

L'insieme  $A$  si dice **aperto** se ogni punto è interno. Se  $\bar{A}$  è aperto, allora  $A$  è chiuso e viceversa.  $A$  si dice **chiuso** se  $\partial A \subseteq A$ . Considerando  $\mathbb{R}^2$ , la sua frontiera è  $\emptyset$ , quindi è sia aperto che chiuso. Questa cosa vale per  $\emptyset$ . L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemni che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Intervalli limitati

In  $\mathbb{R}^2$  bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^n) \text{ è limitato se } \exists x_0 \in \mathbb{R}^2, p > 0 : A \subset B(x_0, p)$$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in  $\mathbb{R}$ . Bisogna ora definire quando un insieme è convesso, ovvero fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in  $\mathbb{R}^n$  una funzione

$$\begin{aligned} \bar{r} : I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \in I &\mapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo ora dire un insieme convesso come:

Presto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  è convesso per archi se, per ogni coppia di punti  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  esiste una curva  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\bar{r}(a) = \bar{x}$  e  $\bar{r}(b) = \bar{y}$ ,  $r(t) \in A$

Un insieme convesso è convesso per archi, ma non vale il viceversa.

## Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con } f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{cases}$$

Obliamo già varie delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

## LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| \rightarrow 0 \iff |x_i - x_{0i}| \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di  $\epsilon/\delta$ . Ciò ci permetterà di definire il limite di funzioni in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \iff \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = l_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad \text{con } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \underline{l} \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in  $\mathbb{R}^n$  avviene, quindi, per coordinate. Se si studiano  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  posso studiare anche  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

## Continuità e derivabilità di funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Consideriamo  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora  $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:

- $f \in C(I) \iff f_j \in C(\mathbb{R}) \quad \forall j = 1, \dots, n$
- $f$  è derivabile su  $I$  se e solo se sono derivabili tutte le  $f_j$  su  $I$

## LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Poiché  $\mathbb{R}^n$  non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Potrebbe distinguere il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello  $K$  di  $f$  come

$$I = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K\}.$$

Per distinguere il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (escludere le singole coordinate ponendo le altre pari a zero / costante).

Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazioni. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo rendere. Funzioni di questo tipo sono delle funzioni radiali.

## Limite (in) finito per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Dato  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  insieme aperto, definiamo  $\underline{l} \in \mathbb{R}^*$  limite di  $f$  per  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \in A$  se

$$\forall \mathcal{V}(\underline{l}) \exists \mathcal{U}(\underline{x}_0) : \forall \underline{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) \in \mathcal{V}$$

In particolare abbiamo:

- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{l} \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad |f(\underline{x}) - \underline{l}| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \rightarrow \forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \quad f(\underline{x}) > K$

## Limite per $(x, y) \rightarrow \infty$

Poiché per dire che il limite esiste la funzione deve avere lo stesso limite su tutte le rette radiali (vedi definizione successionale di limite), parlare di  $(x, y) \rightarrow \infty$  si complica la vita. Quando si affrontano i limiti di funzioni all'infinito, si farà riferimento alla norma del vettore  $(x, y)$ . Possiamo, allora, dire che:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall K > 0 \quad \exists R > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > K$$

## Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset \mathbb{R}^n, x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

## Continuità di funzione reale a più variabili reali

Dato  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Chiamiamo  $f$  continua in  $x_0 \in A$  se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma/prodotto/quoziente/composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

## Proprietà delle funzioni a più variabili continue

- Se  $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $x \in C$  è un chiuso di  $\mathbb{R}^m$  e  $A$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  allora  $f^{-1}(C)$  è un chiuso in  $\mathbb{R}^m$  e  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $\mathbb{R}^m$  !!  $f^{-1}$  è la controimmagine, non la funzione inversa !!
- Di conseguenza sia  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $c \in \mathbb{R}$  ( $c$  è un insieme chiuso), allora  $f^{-1}(c)$  è anch'esso chiuso. Poiché  $f(x, y) = c$  è la definizione di un insieme di livello, per il teorema sopra essi sono chiusi
- Di conseguenza sia  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , considera  $f((0, +\infty))^+$  aperto; per il teorema sopra avremo che la funzione sarà positiva (e con un procedimento analogo negativa) solo su insiemini aperti mentre sarà nulla su insiemini chiusi (vedi considerazione precedente)

## Teoremi sulle funzioni continue

- Teorema di Weierstrass: sia  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua e  $D$  un insieme chiuso e limitato,  $f$  avrà un massimo ed un minimo assoluto in  $D$ .
- Teorema degli zeri: sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua,  $A$  connesso per archi; se esiste  $x_1 \in A : f(x_1) > 0$  e  $x_2 \in A : f(x_2) < 0$  allora esiste  $x_0 \in A : f(x_0) = 0$

**DIMOSTRAZIONE:** Considero una curva  $\pi(t) : [a, b] \rightarrow A : \pi(a) = x_1 \quad \pi(b) = x_2$  (per definizione di curva  $\pi$  è continua).

Considero  $g = f \circ \pi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  è continua in quanto composizione di funzioni continue. Abbiamo che  $g(a) = f(\pi(a)) = f(x_1) > 0$  e  $g(b) = f(\pi(b)) = f(x_2) < 0$ . Per il Teorema degli zeri in 1 variabile, esiste  $t_0 \in [a, b] : g(t_0) = 0$ . Quindi  $\pi(t_0) = x_0$

- Conseguenza: se  $f(x, y)$  è continua, ogni regione connessa per archi individuata dagli zeri è di segno costante. ■

## Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per  $x \rightarrow x_0$  di  $f$  esiste, esso è unico

2. Algebra dei limiti:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [+ \infty - \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g \quad [0 \cdot \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad [\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}]$
- data  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$
- '  $g: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo  $\lim_{w \rightarrow w_0} f(g(w)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3. Teorema del confronto: Siano  $f, g, h$  definite da  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$  tali che esistono definitivamente per  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Allora se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  con  $l \in \mathbb{R}^*$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

4. Teorema della permanenza del segno: Sia  $f$  continua e sia  $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n : f(x_0) > 0$ . Allora  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$ .

**ESEMPIO:** Date  $f_1(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_3(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ,  $f_4 = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ . Calcola  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_i(x, y)$ .

$$|f_1(x, y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq 1, |y| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$$

$$|f_2(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, |x| \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 0$$

$$|f_3(x, y)| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2} \leq 1 \quad \text{Studiando } f_3(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ mentre } f_3(x, 0) = 0. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Al punto  $(0,0)$  ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore (cfr: definizione successionale di limite)

$$|f_4(x, y)| = \dots \leq 2 \quad \text{Studiando } f_4(x, -x) = 0, \text{ mentre } f_4(x, x) = \frac{2}{x} \rightarrow \infty. \quad \text{Il limite, quindi, non esiste.}$$

Passaggio a coordinate reali in  $\mathbb{R}^2$

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho \in (0, +\infty), \theta \in (-\pi; \pi] : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a  $x$  e  $y$  i corrispondenti. Nota bene:  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ .

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = l \iff \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}(\rho, \theta) = l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

**ESEMPIO:** Consideriamo  $f_1(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ . Calcolare il limite per  $x \rightarrow (0,0)$ .

$$\tilde{f}_1(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} = \rho \cos \theta \sin \theta \quad ; \quad \tilde{f}_2(\rho, \theta) = \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho} \rightarrow \text{Il limite poiché dipende da } \theta$$

$$|\tilde{f}_1(\rho, \theta)| \leq \rho \rightarrow 0 \stackrel{\text{C.F.R.}}{\Rightarrow} \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{f}_1(\rho, \theta) = 0$$

$$\tilde{f}_3(\rho, \theta) = \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

Per  $\rho \rightarrow 0$ , abbiamo  $\tilde{f}_3(\rho, \theta) \sim \rho \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ , quindi avremo un problema per  $\cos \theta \rightarrow 0$ . Quindi il limite non esiste.

## DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In  $\mathbb{R}$  i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

### Derivate parziali

Consideriamo  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerando la definizione di derivabilità otteniamo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  che non ha senso poiché  $\frac{h}{t}$  è un vettore. Fixiamo una direzione  $v$ , poniamo scrivere  $f(x_0 + tv) - f(x_0)$  e calcolare  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ . Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usuali saranno i versori canonici di  $\mathbb{R}^n$ .

Se esiste finito  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = l$ , dire che esiste la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = l$ . Analogamente per  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = l$ .

Le derivate parziali possono esistere anche se la funzione non è continua.

### Derivabilità e gradiente

Se esistono  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  diciamo che  $f$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$ . Definiamo il vettore  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \nabla f$  il gradiente di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

### Derivate direzionali

Consideriamo il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv, y_0 + tw) - f(x_0, y_0)}{t}$ . Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo  $D_v f(x_0, y_0)$  derivata direzionale.

La derivata direzionale può esistere anche se la funzione non è continua.

## Funzione differenziabile

In analogia al calcolo unidimensionale, se  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda$ , possiamo scrivere che  $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$  per  $h \rightarrow 0$ . Analogamente in  $\mathbb{R}^n$ , possiamo dire che  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile nel punto  $x_0 \in A$  se  $\exists \in \mathbb{R}^n: f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + o(\|h\|)$  per  $h \rightarrow 0$ .

In  $\mathbb{R}$ , la definizione di derivabilità e differenziabilità coincidono. In  $\mathbb{R}^n$ , però, questo non accade più.

Applicando la definizione di differenziabilità, otteniamo che

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h, k) = o(\sqrt{h^2+k^2}) \Rightarrow \lim_{h, k \rightarrow 0, 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Quello che stiamo facendo è associare una funzione differenziale definita così:

$$\begin{aligned} \text{d} f_{x_0}: \quad & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ & x_0 \mapsto \text{d} f_{x_0}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{differenziale primo} \end{array} \right\}$$

## Condizione necessaria di differenziabilità

Sia  $f$  differenziabile in  $x_0 \in A$ . Allora:

- $f$  è continua in  $x_0 \in A$
- $f$  è derivabile in  $x_0 \in A$  e  $\alpha = \nabla f(x_0)$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1 \exists D_v f(x_0) \wedge D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$  (formula del gradiente)

## Significato della formula del gradiente

Espandendo l'espressione otteniamo che  $D_v f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) v_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) v_2$ . Questo significa che tutte le rette tangenti ai grafici delle restrizioni di  $f$  a tutte le parallele per  $(x_0, y_0)$  sono tutte congruenti.

Chiamiamo  $(x, y)$  il vettore incrementale e  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$ , possiamo scrivere che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y-y_0)}_{\text{Piano tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0, y_0, f(x_0, y_0))} + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

Riprendendo la definizione, abbiamo che:

$$g(x) = \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)}_{\text{con } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g \text{ affine}}$$

Tangente a  $f(x_0)$

## Conseguenze della differenziabilità

- Significato geometrico del gradiente:  $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$  con  $\theta$  l'angolo formato tra i due vettori. Il gradiente sarà, quindi, la direzione di massima crescita (discesa).

## Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è derivabile in intorno a  $x_0$ , tutte le derivate parziali sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

Se  $f$  ha derivate parziali continue su tutto  $A$ , allora  $f$  è differenziabile su  $A$ . Possiamo dire che  $f \in C^1(A)$ .

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
 f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = g(h) - g(0) + g(0) - f(x_0, y_0) \\
 &\quad \hookrightarrow g(t) : [0, h] \rightarrow \mathbb{R} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0+\theta h, y_0+k) h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0+\eta k) k = \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + E_1(h, k) \right) h + \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + E_2(k, h) \right) k = \\
 \hookrightarrow \text{Lagrange: } g(h) - g(0) &= g'(0)h \quad \hookrightarrow E_{1,2} \rightarrow 0 \text{ per } (h, k) \rightarrow (0, 0) \\
 \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) h + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) k + E_1 h + E_2 k &= \nabla f(x_0, y_0)(h, k) + E(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) + \Theta(\sqrt{h^2+k^2}) \\
 \frac{|E(h, k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} &\leq \frac{|E(h, k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq E_1(h, k) + E_2(k, h) \rightarrow 0 \Rightarrow E(h, k) = \Theta(\sqrt{h^2+k^2}) \\
 (\text{affinché } E(h, k) &= \Theta(\sqrt{h^2+k^2})) \quad \nearrow
 \end{aligned}$$

### Differenziabilità di funzioni composite

( $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $x_0$  e  $g$  derivabile (o differenziabile) in  $y_0 = f(x_0)$ , allora  $h: g \circ f$  è differenziabile in  $x_0$  e  $\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $x_0 = g(t_0)$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivabile (o differenziabile) in  $t_0$ , allora  $h: f \circ g$  è derivabile (o differenziabile) in  $t_0$  e  $h'(t_0) = \nabla f(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$

### Gradiente e vettore tangente

La seconda ha un significato intuizionale se prengiamo  $g = \pi$  con  $\pi$  un arco di curva continuo e differenziabile. Il vettore  $\mathbf{T} = \frac{\pi'(t)}{\|\pi'(t)\|}$  è il vettore tangente alla curva in  $t$ .

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\pi$  una sua curva di livello con  $\pi'$  derivabile,  $\pi'(t) = 0$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x_0 \in \pi(I)$ , allora  $\nabla f(x_0)$  è ortogonale alla curva in  $x_0 = \pi(t_0)$ .

DIMOSTRAZIONE:  $h(t) = f(\pi(t))$  su  $\pi(I)$  è costante, quindi  $h$  è costante  $\forall t \in I$ . Segue che  $h'(t_0) = 0 = \nabla f(\pi(t_0)) \cdot \pi'(t_0) \Rightarrow \nabla f(\pi(t_0)) \perp \pi'(t_0) \quad (\parallel \mathbf{T}(t_0))$

### Teorema della media

Sia  $f$  differenziabile su  $A$ , Allora  $\forall x_1, x_2 \in A \quad \exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$  tale che  $f(x_1) - f(x_2) = \nabla f(\tilde{x})(x_2 - x_1)$

PRELIMINARE: l'espressione di una retta passante per due punti è  $\pi(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Per ottenere un seguendo, scriviamo  $\pi(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$  con  $\lambda \in [0, 1]$

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo  $f(x_2) - f(x_1)$ : scriviamo  $\pi(t) = x = x_1 + t(x_2 - x_1)$  e consideriamo  $h(t) = f(\pi(t))$ . Scriviamo che  $h(0) = f(x_1)$  e  $h(1) = f(x_2)$ . Notiamo che  $h$  risulta le ipotesi del Teorema di Lagrange. Allorciamo così che  $h(1) - h(0) = h'(0) = f(x_2) - f(x_1)$ . Come visto prima, abbiamo  $h'(0) = \nabla f(x_1 + \Theta(x_2 - x_1)) \pi'(0)$ . Siccome  $\pi' = x_2 - x_1$ , ottieniamo che  $f(x_2) - f(x_1) = \nabla f(\tilde{x})(x_2 - x_1)$ .

### Differenziazione di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Diciamo che  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $x_0 \in A$  se  $f_3$  è differenziabile.

Sezione ogni  $f_3$  avrà un  $\nabla f_3(x_0)$ , definiamo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_0) \end{bmatrix} = J_f(x_0) \rightarrow \text{Matrice Jacobiana di } f \text{ valutata in } x_0$$

Il determinante  $|J_{f(x_0)}|$  viene chiamato Jacobiano di  $f$  in  $x_0$ .

Se  $f$  è differenziabile su  $A$ , è possibile definire

$$\begin{aligned} J_f(x) &: A \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, n, m) \\ x_0 &\mapsto J_{f(x_0)} \end{aligned}$$

Come sarà fatto  $f(x_0+h) - f(x_0)$ ? Sappiamo che  $f(x_0+h) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot h$ , quindi l'incremento di  $f$  lo poniamo scrivere riga per riga:

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \cdot h \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \cdot h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix} \cdot h = J_{f(x_0)} \cdot h$$

### Differenziabilità di funzioni composte per $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Siamo  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g: f(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $f$  differenziabile in  $x_0 \in A$ ,  $g$  differenziabile in  $y_0 = f(x_0)$ . Della  $h = g \circ f$   $h: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $h$  è differenziabile in  $x_0$  e  $J_h(x_0) = J_g(y_0) \cdot J_f(x_0)$

### Teorema di Fermat

Diciamo che  $x_0 \in A$  è un punto di massimo (minimo) locale per  $f$  se  $\exists r > 0 : \forall x \in B(x_0, r) \cap A \quad f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ).  
Se al posto di  $\leq (>)$  consideriamo  $< (>)$  avremo un punto di massimo locale forte.

Possiamo adesso estendere il Teorema di Fermat: sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile (derivabile) in  $x_0 \in A$ ; se  $x_0$  è un punto di massimo (minimo) locale, si ha  $\nabla f(x_0) = 0$

Chiamiamo un punto  $x_0 \in A$ :  $\nabla f(x_0) = 0$  punto stazionario. Nota bene: un punto può essere di massimo (minimo) locale anche senza essere punto stazionario.

Poiché in  $\mathbb{R}^n$  perdiamo il concetto di crescente/decrecente, ci serve un altro modo per trovare i punti di max/min locale. Dal polinomio di Taylor possiamo dire che: data  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$ ; se  $f''$  è la prima derivata non nulla in  $x_0$  allora: se  $n$  è dispari  $x_0$  non è stazionario; se  $n$  è pari e  $f''(x_0) > 0$  è minimo, se  $f''(x_0) < 0$  è massimo.  
Possiamo quindi usare le derivate di ordine superiore per studiare massimi e minimi locali.

### Derivata di ordine superiore

Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile su  $A$ . Chiamiamo derivata seconda di  $f$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$$

Se  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avremo  $n^2$  derivate seconde.

### Teorema di Schwarz

Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile 2 volte in  $A$ ; se  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  e la  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$  sono funzioni continue in  $x_0 \in A$  allora  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0)$

### Differenziabilità di ordine superiore

Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile su  $A$ . Dico che  $f$  è differenziabile 2 volte in  $x_0 \in A$  se la funzione  $\nabla f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è differenziabile in  $x_0 \Rightarrow \forall i=1, \dots, n \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$  è differenziabile

Applicando la condizione sufficiente di differenziabilità, possiamo dire che se  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  sono continue, allora  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$  è differenziabile. In questo caso diciamo che  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Per il teorema di Schwarz, le derivate sono anche simmetriche.

## Matrice Hermitiana

In  $\mathbb{R}^2$ , definiamo matrice Hermitiana di  $f$  in  $x_0, y_0$  la seguente matrice:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{bmatrix}$$

Se  $f \in C^2$ , allora  $H_f(x_0, y_0) \in \mathcal{S}(2; \mathbb{R})$

## Differenziale secondo

Sia  $f \in C^2(A)$ , chiamiamo differenziale secondo di  $f$  in  $x_0 \in A$  la funzione:

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che } d^2 f(x_0)(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) h_i h_j$$

Studiando il caso per  $n=2$  otteniamo:

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0, y_0)(h, K) &= \dots = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) h K + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0) K^2}_{P_h(h, K)} \\ P_h(h, K) &= ah^2 + 2bhK + cK^2 \\ &= [h \ K] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Epondendoci su  $\mathbb{R}^n$  otteniamo

$$d^2 f(x_0)(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) h_i h_j = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h^T H_f(x_0) h \Rightarrow \text{polinomio di secondo grado omogeneo}$$

Possiamo, quindi, dire che  $d^2 f(x_0)$  è una forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$ .

## Formula di Taylor del 2° ordine per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $f \in C^2(A)$ ,  $A$  aperto, e sia  $x_0 \in A$ , allora

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) + o(\|h\|^2)$$

avrà la formula di Taylor del 2° ordine con resto di Peano. Invece:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta h)(h)$$

avrà la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Lagrange.

## Forme quadratiche

Definiamo forma quadraticha il polinomio ottenuto da:  $q(h) = h^T M h$ . ( $M \in \mathcal{S}(n; \mathbb{R})$ )

Dada  $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  forma quadraticha, dico che  $q$  è definita:

- **positiva (negativa)** se  $q(h) > 0$  ( $< 0$ )  $\forall h \neq 0$ ;
- **semipositiva (seminegativa)** se  $q(h) \geq 0$  ( $\leq 0$ )  $\forall h \neq 0 \wedge \exists h \neq 0 : q(h) = 0$
- **indefinita** se  $\exists h, K : q(h) > 0 \wedge q(K) < 0$

In  $\mathbb{R}^2$ , per studiare il segno di una forma quadraticha studiamo il determinante di  $M$

- se  $|M| > 0$   $q$  è definita positiva se  $a > 0$ , negativa se  $a < 0$
- se  $|M| = 0$   $q$  è semidefinita
- se  $|M| < 0$   $q$  è indefinita

In  $\mathbb{R}^n$ , invece, data  $M_K$  la sottomatrice quadrata di nord-ovest, diciamo che:

- se  $|M_K| > 0 \quad \forall K = 1, 2, \dots, n$  è definita positiva
- se  $(-1)^K |M_K| > 0 \quad \forall K = 1, 2, \dots, n$  è definita negativa

Esiste un metodo più veloce usando gli autovetori/autovettori

$$q(b) = b^T M_K b = b^T S \Lambda S^T b = \tilde{b}^T \Lambda K = \tilde{q}(K)$$

↳ diagonalizzabile poiché simmetrica

$$\tilde{q}(K) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i^2 \Rightarrow \tilde{q}(K) > 0 \quad \forall K \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

$$\tilde{q}(K) < 0 \quad \forall K \Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad \forall i$$

$$\text{e } \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow q(K) = 0 \text{ anche per } \tilde{K} \neq 0$$

Possiamo quindi dire che:

- se gli autovetori di  $M$  sono tutti positivi la forma è definita positiva
- se gli autovetori di  $M$  sono tutti negativi la forma è definita negativa
- se un autovettore è nullo e gli altri sono positivi allora la forma è semidefinita positiva
- se un autovettore è nullo e gli altri sono negativi allora la forma è semidefinita negativa
- se gli autovettori di  $M$  hanno segno misto allora la forma è indefinita.

Enunciato il seguente teorema: sia  $q$  definita positiva, allora  $q(b) \geq \lambda_{\min} \|b\|^2$ ; sia  $q$  definita negativa, allora  $q(b) \leq \lambda_{\max} \|b\|^2$ .

**DIMOSTRAZIONE:**  $q(b) = \tilde{q}(K) \geq \lambda_{\min} \|K\|^2 = \lambda_{\min} \|b\|^2$  poiché il cambio di base è un'isometria

**Massimi e minimi locali per  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$**

Sia  $A$  aperto,  $f \in C^2(A)$  e  $x_0 \in A$  punto stazionario. Allora se  $d^2 f(x_0)$  è una forma quadratica

- definita positiva (negativa) allora  $x_0$  è un punto di minimo (massimo) locale;
- indefinita  $x_0$  non è né max né min locale
- semidefinita non posso trovare conclusioni finché per il fatto che se c'è un estremante deve essere minimo se è semidefinita positiva e massimo se è semidefinita negativa.