

LEZIONE ED ESERCITAZIONE DI ANALISI 1 DEL 4 OTTOBRE

LEZIONE: FUNZIONI

ESERCITAZ.: N. COMPLESSI



LEZIONE

FUNZIONI:

DEFINIZIONE:

una funzione è una terna di elementi A, B, f dove:

- A, B sono insiem

- f è una relazione da A a B col ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B $\rightarrow f: A \xrightarrow{\text{dominio}} B \xrightarrow{\text{codominio}}$

es: $y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R} = B$ NON è una funzione ($\exists x \in A : f$ non è valida)

$y = \sqrt{x}$ con $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ è una funzione ($\forall x \in A : f$ non è valida)

$f(a)$: è l'immagine di a

$\text{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$

$\Gamma(f) = \text{graffico di } f : \Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in A\}$. N.B.: $\Gamma(f) \neq \text{Im}(f)$

FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI UNA FUNZIONE:

- limitata: $\text{Im}(f)$ è limitato, $\text{Im} \subseteq \mathbb{R}$, $\exists M > 0, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A - M \leq f(x) \leq M$

- sup / inf limitata: $\exists \sup(\text{Im}(f)) / \exists \inf(\text{Im}(f))$

- crescente in ICA: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) < f(x_2)$

- decrescente in ICA: se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$

- monotona in I: se è crescente / decrescente (strettamente) in tutto I

- pari: se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ con $x, -x \in A$

- doppi: se $\forall x \in A : f(x) = -f(-x)$ con $x, -x \in A$

DOMINIO NATURALE: Il più grande sottoinsieme di \mathbb{R} in cui la funzione è definita

FUNZIONE SURIETTIVA: Dato $f: A \rightarrow B$ si dice che f è suriettiva se $\text{Im}(f) = B$

OSS: $\forall \bar{y} \in B$ esistono $y = \bar{y}$ f è suriettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in almeno un punto

FUNZIONE INIETTIVA: Dato $f: A \rightarrow B$ si dice che f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ / $\forall x_1, x_2 \in A$ se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

OSS.: $\forall y \in B$ contiene $y = \bar{y}$. f è iniettiva se la retta $y = \bar{y}$ interseca $\Gamma(f)$ in al più un punto

FUNZIONE BIUNIQUA: Dato $f: A \rightarrow B$ si dice che f è biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCITAZIONE

NUMERI COMPLESSI

$$\textcircled{1} \quad i(1+i) = i + i \cdot i = i - 1$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$i - 1 = \sqrt{2} (\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$e^{i\pi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

sottrai o reali o complessi coniugati

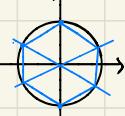
$$\textcircled{2} \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - \alpha c = 1 - 2 = -1 \quad z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

$$\textcircled{3} \quad z^2 + 3iz + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9c^2 - 4 = -18 \quad z_{1,2} = \frac{-3ic \pm \sqrt{-18}}{2} = \frac{-3ic \pm \sqrt{18}i}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad z^3 = -i \quad z_1 = i \quad z_2 = \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} \right) = z_3$$

$$\textcircled{5} \quad z^6 = -8 \quad z_1 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad z_2 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad z_3 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \quad z_4 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{3}{6}\pi + i \sin \frac{3}{6}\pi \right) \quad z_5 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right)$$

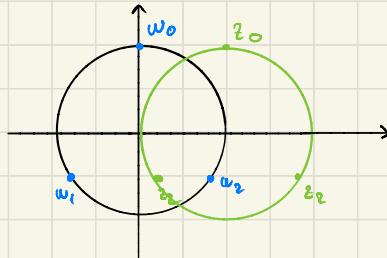
$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad z_6 = \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)$$



$$\textcircled{6} \quad (z-2)^2 + i = 0 \quad \text{risolviamo } z-2 \text{ con } w \Rightarrow w^3 = -1 \text{ come in } \textcircled{4} \Rightarrow z_1 = w_1 + 2 = 2 + 1$$

$$z_2 = w_2 + 2 = [...] = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} + 2$$

$$z_3 = w_3 + 2 = [...] = \frac{i\sqrt{3} + i}{2} + 2$$



$$\textcircled{7} \quad z^2 + (1+i)z + i = 0 \quad \Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i$$

non ho numeri con radici complesse: $\tilde{z} = 1$

$$z_{1,2} = \frac{-1-i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \begin{cases} \frac{-1-i + i}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1-i - i}{2} = -1-i \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \quad \boxed{i \cdot z^2 = \bar{z}}$$

NON è algebrica

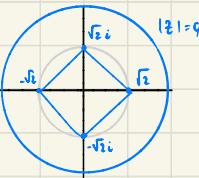
poniamo $z = pe^{i\theta}$, $\bar{z} = pe^{-i\theta}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot p^2 e^{i2\theta + \frac{\pi}{2}} = pe^{-i\theta}$ $p^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = pe^{-i\theta}$

$\text{dcl: } z_0 = 0 \quad \forall \theta \quad (p=0)$ (solutions coincident)

$$z_1 = \bar{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}-i}{2}$$

$$z_2 = \bar{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = i$$

$$z_3 = \bar{e}^{i\frac{5\pi}{2}} = \frac{-\sqrt{2}-i}{2}$$



$$\textcircled{9} \quad (z^4 - 4)(1z - 4) = 0$$

$$z^4 - 4 = 0 \quad z^4 = 4$$

$$|z|^4 - 4 = 0 \quad |z|^4 = 4$$

$\textcircled{10} \quad x^4 + 1 = 0$ Homework: Scavopore in IR

$$(x^2)^2 + 1^2 = 0 \quad ((x^2)^2 - 1) + 2 = 0 \quad (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2 = 0 \quad (x^2 + 1)(x-1)(x+1) \cdot 2 = 0$$

$$x^4 = -1$$

$$\omega \pi + i \sin \pi$$

$$x_0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = -1 - i$$

$$\begin{cases} p^2 = p \\ 2\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \vee p = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \vee p = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

$(k=0, 1, 2)$