INTEGRALE INFINITO

Data una funzione continua f su $[a;+\infty)$, avremo che

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{K\to+\infty}\int_a^K f(t)dt = \lim_{K\to+\infty}[F(K)-F(a)]$$

Se:
1) il limite converge allora l'integrale si dice che converge
2) il limite diverge allora l'integrale si dice che diverge
3) il limite non esiste allora l'integrale non esiste.

CRITERIO DEL CONFRONTO PER INTEGRALI DEFINITI

Siano f, g funzioni positive su $[a;x_0)$ e continue in $[a;x_0]$ con

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a;x_0]$: $\int_a^{x_0} f(t)dt \leq \int_a^{x_0} g(t)dt \Rightarrow$ se $\int_a^{x_0} g(t)dt$ converge, allora converge $\int_a^{x_0} f(t)dt$. Se invece $\int_a^{x_0} f(t)dt$ diverge, allora anche $\int_a^{x_0} g(t)dt$ diverge. (gli estremi non devono essere per forza finiti)

DIM: per Hp $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Per $\varepsilon > 0$ se faccio $\int_a^{x_0-\varepsilon} f(t)dt \leq \int_a^{x_0-\varepsilon} g(t)dt$ per la monotonia dell'integrale. Poiché la funzione integrale è una funzione monotona crescente, ammettono limite pari all'estremo superiore $\Rightarrow$ $0 \leq \sup(F(t)) \leq \sup(G(t)) \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x_0-\varepsilon} f(t)dt \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x_0-\varepsilon} g(t)dt \Rightarrow \int_a^{x_0} f(t)dt \leq \int_a^{x_0} g(t)dt$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER INTEGRALI

Siano f, g funzioni positive su $[a;x_0)$ e continue in $[a;x_0]$ con

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

Se $f(x) \sim g(x)$ allora $\int_a^{x_0} f(t)dt$ e $\int_a^{x_0} g(t)dt$ hanno lo stesso carattere (vale anche per estremi infiniti)