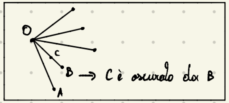
Approfondimento: Computer Vision

Come rappresentare lo spazio?

La scelta del modello geometrico non è banale: il modello euclideo si è dimostrato insufficiente. Già ai tempi di Gauss, a causa di esperimenti sulla triangolazione, si sospetta qualcosa, ma l'errore misurativo non permetteva di concludere nulla. Ai tempi di Einstein, invece, si iniziò ad usare il modello non euclideo

Come funziona una fotocamera?

Il modello con cui la fotocamera interagisce con il mondo è quello di un foro dal quale entrano dei raggi.
I punti sono sostituiti da rette che fuoriescono dall'otturatore della nostra fotocamera.



Spazio Proiettivo

Possiamo dire che i nostri "punti" sono sottospazi affini di dimensione 1:

$\vec{u} \in \mathcal{L}(\vec{v}) \iff \exists\, s,t \in \mathbb{R} : s\vec{u} + t\vec{v} = 0 \quad , s,t \neq 0$

Come associamo delle coordinate ai nostri "punti": l'origine è già scelta (l'otturatore), scegliamo una base.

$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$

$\vec{u} = y_1\vec{v}_1 + \dots + y_n\vec{v}_n$

$\implies \vec{u}, \vec{v}$ lin. dip. se $r\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = 1 \quad \vee \quad (y_1 \dots y_n) = \lambda(x_1 \dots x_n)$

Le coordinate di $\mathcal{L}(\vec{v})$ saranno allora $(x_1, \dots, x_n)$ a meno di un fattore di proporzionalità. $(x_1 : \dots : x_n)$ vengono dette COORDINATE OMOGENEE.

Quello che abbiamo costruito è lo SPAZIO PROIETTIVO $\mathbb{P}^{n-1}(V)$

ESEMPIO

$\mathbb{P}^2$ $\quad A\,(1:1:0)$, $B\,(1:2:3)$. Eq. della retta per AB?

↳ $(x,y,z) = s(1,1,0)^T + t(1,2,3)^T \implies$ piano in par. $\implies x - y + \frac{1}{3}z = 0$

Dentro a $\mathbb{P}$ è possibile ritrovare IE:

Prendiamo $\mathbb{P}^2$. Scrivendo $r: x_0 = 0$ abbiamo che $\mathbb{P}^2 \setminus r = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 \neq 0\} \implies \begin{matrix} \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ (x_0:x_1:x_2) & \mapsto & \left(\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right) \end{matrix}$

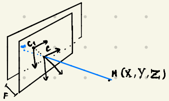
Possiamo, quindi, pensare lo spazio $\mathbb{A}^2$ come il complementare a una retta di $\mathbb{P}^2$.

Due parallele in $\mathbb{A}^2$, una volta immerse in $\mathbb{P}^2$, possono incontrarsi in un punto. Questo è quello che in prospettiva viene chiamato punto di fuga

punto su una "retta all'infinito"

Tra il piano di cattura e l'immagine vi una piccola distanza, la distanza focale. La fotocamera e il piano dell'immagine hanno rispettivamente dei loro sistemi di riferimento.

APPROFONDIRE



$CM = \begin{cases} x = tX \\ y = tY \\ z = tZ \end{cases}$

$\{m\} = CM \cap \{z = -f\}$

$t = -\frac{f}{z}$

$\begin{cases} x = -\frac{fx}{z} = u \\ y = -\frac{fy}{z} = v \\ z = -f \end{cases} \implies m\left(-\frac{fx}{z}, -\frac{fy}{z}\right)$

$\downarrow$

$(-fx : -fy : z)$

↳ proietto $(x : y : z : 1) \mapsto (-fx : -fy : z)$

Per calcolare le proiezioni usiamo una matrice di proiezione:

$$A = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$