Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Primo prova in itinere – A.A. 2018/19

1. Dato il parametro reale h, nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\Pi_1 : \ x + y - z = -1, \qquad \Pi_2 : \ x + hy - hz = -3h \qquad \text{e} \qquad \Pi_3 : \ hy + z = 1 - h.$$

i. Discutere la mutua posizione dei tre piani al variare di h.

ii. Per $h = 2$ trovare il punto P_2 intersezione dei tre piani.

iii. Per $h = -1$ verificare che i tre piani appartengono al medesimo fascio proprio. Trovare quindi la retta r sostegno del fascio e la sua parallela s contenente il punto P_2.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (0, 1, 1, 0)$ ed $\mathbf{u_3} = (2, -1, -1, 2)$.

i. Determinare la dimensione ed una base di $U = \mathcal{L}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$.

ii. Determinare la dimensione ed una base di un sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Scrivere una rappresentazione algebrica di V.

iii. Determinare la dimensione ed una base di un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U + W = \mathbb{R}^4$ ed $U \cap W = \mathcal{L}(\mathbf{u_3})$. Scrivere una rappresentazione algebrica di W.

3. Dato il parametro reale h, in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i seguenti vettori:

$$\mathbf{v'_h} = (h+1) \cdot \mathbf{e_2} + h \cdot \mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{v''_h} = -\mathbf{e_1} + 2h \cdot \mathbf{e_2} + (h+1) \cdot \mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{v'''_h} = h \cdot \mathbf{e_2} + (h+1) \cdot \mathbf{e_3},$$
$$\mathbf{w'_h} = \mathbf{e_1} + h \cdot \mathbf{e_2}, \qquad \mathbf{w''_h} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + h \cdot \mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{w'''_h} = (h-1) \cdot \mathbf{e_2} + h \cdot \mathbf{e_3}.$$

i. Determinare i valori di h per i quali è univocamente determinata un'applicazione lineare f_h tale che

$$f_h(\mathbf{v'_h}) = \mathbf{w'_h}, \qquad f_h(\mathbf{v''_h}) = \mathbf{w''_h} \quad \text{e} \qquad f_h(\mathbf{v'''_h}) = \mathbf{w'''_h}.$$

Trovare inoltre i valori di h che rendono tale f_h suriettiva.

ii. Scrivere la matrice rappresentativa di f_{-1} rispetto alla base canonica e verificare l'invertibilità dell'applicazione.

iii. Trovare le dimensioni di $\ker(f_0)$ e $\mathrm{Im}(f_0)$ ed una base di ciascun sottospazio.

Soluzioni

1. i. Studiamo il sistema lineare:

$$[A_h|B_h] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & h & -h & -3h \\ 0 & h & 1 & 1-h \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & h-1 & -h+1 & -3h+1 \\ 0 & h & 1 & 1-h \end{array}\right] = [A'_h|B'_h].$$

Vale $\det(A'_h) = h^2 - 1 = 0$ se e solo se $h = \pm 1$. Di conseguenza abbiamo:

- $h \neq \pm 1$: il sistema lineare ammette un'unica soluzione, che corrisponde all'unico punto P_h intersezione dei tre piani;
- $h = 1$: riducendo a scala la matrice completa del sistema lineare otteniamo

$$[A'_1|B'_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right],$$

  pertanto il sistema non ammette soluzione. Analizzando direttamente la matrice $[A_1|B_1]$ si osserva che le prime due righe differiscono solo per il termine noto, mentre la terza riga di A_1 è indipendente dalle due precedenti. Geometricamente questo significa che i due piani Π_1 e Π_2 sono paralleli disgiunti, mentre Π_3 interseca Π_1 e Π_2 lungo due rette parallele. Naturalmente non esistono punti in comune a tutti e tre piani;
- $h = -1$: riducendo a scala la matrice completa del sistema lineare otteniamo

$$[A'_{-1}|B'_{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

  quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Pertanto i tre piani si intersecano lungo una retta r.

ii. Se $h = 2$, la matrice completa del sistema si riduce a

$$[A'_2|B'_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y - z = -5 \\ 3z = 9 \end{cases}.$$

Quindi l'unica soluzione è $P_2 = (4, -2, 3)$.

iii. Abbiamo già visto in precedenza che per $h = -1$ i tre piani hanno in comune la retta r, ovvero appartengono al medesimo fascio proprio con sostegno r. La rappresentazione parametrica di r si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -y + z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Pertanto la retta s parallela ad r e contenente il punto P_2 ha rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

2. i. Per studiare il sottospazio U riduciamo a scala la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza la dimensione di U è 2 ed una sua base è $\mathcal{B}_U = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.

ii. Dato che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$, vale $U + V = \mathbb{R}^4$ ed $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Per la formula di Grassmann abbiamo quindi:

$$\dim(V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V) - \dim(U) = 4 + 0 - 2 = 2.$$

Un tale sottospazio V è pertanto generato da due vettori linearmente indipendenti non appartenenti ad U. Ad esempio, $V = \mathcal{L}(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4})$. Ovviamente una base di V è $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ ed ogni vettore $\mathbf{v} = (x, y, z, w)$ di questo spazio ha la forma:

$$(x, y, z, w) = \alpha \cdot \mathbf{e_3} + \beta \cdot \mathbf{e_4} = (0, 0, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Segue che due equazioni definenti una rappresentazione algebrica di V sono semplicemente $x = y = 0$.

iii. Ripetendo il procedimento precedente, abbiamo

$$\dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) - \dim(U) = 4 + 1 - 2 = 3.$$

Un tale sottospazio W si può ottenere come $W = \mathcal{L}(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \mathbf{u_3})$, che soddisfa $U + W = \mathbb{R}^4$ ed $U \cap W = \{\mathbf{u_3}\}$. Una base di W è $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \mathbf{u_3}\}$ ed ogni vettore $\mathbf{w} = (x, y, z, w)$ di questo spazio ha la forma:

$$(x, y, z, w) = \alpha \cdot \mathbf{e_3} + \beta \cdot \mathbf{e_4} + \gamma \cdot \mathbf{u_3} = (2\gamma, -\gamma, \alpha - \gamma, \beta + 2\gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere una una rappresentazione algebrica di W riduciamo a scala la seguente matrice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \\ 0 & 1 & 2 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & z \\ 0 & 1 & 2 & w \\ 0 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x + 2y \end{array}\right].$$

Quindi $W: \ x + 2y = 0$.

3. i. Per il teorema di interpolazione, l'applicazione f_h è univocamente determinata se e solo se $\mathcal{B}_v^h = \{\mathbf{v_h'}, \mathbf{v_h''}, \mathbf{v_h'''}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Data $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, studiamo il determinante della matrice del cambiamento di base:

$$\det(M_{\mathcal{B}_v^h S}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h+1 & 2h & h \\ h & h+1 & h+1 \end{vmatrix} = (h+1)^2 - h^2 = (h + 1 - h)(h + 1 + h) = 2h + 1.$$

$\mathcal{B}_v^h$ una base se e solo se $h \neq -1/2$.

Ipotizzando che $h \neq -1/2$, osserviamo che l'immagine dell'applicazione f_h è generata dall'insieme di vettori $\mathcal{B}_w^h = \{\mathbf{w_h'}, \mathbf{w_h''}, \mathbf{w_h'''}\}$. Quindi f_h risulta suriettiva se e solo se $\mathcal{B}_w^h$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Come fatto precedentemente, studiamo il seguente determinante:

$$\det(M_{\mathcal{B}_w^h S}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ h & 1 & h-1 \\ 0 & h & h \end{vmatrix} = h - h(h-1) - h^2 = h(1 - h + 1 - h) = h(2 - 2h).$$

$\mathcal{B}_w^h$ è una base se e solo se $h \neq 0, 1$.

ii. Per $h = -1$ vale

$$\mathbf{v'_{-1}} = -\mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{v''_{-1}} = -\mathbf{e_1} - 2 \cdot \mathbf{e_2}, \qquad \mathbf{v'''_{-1}} = -\mathbf{e_2},$$

quindi

$$\mathbf{e_2} = -\mathbf{v'''_{-1}}, \qquad \mathbf{e_3} = -\mathbf{v'_{-1}}, \qquad \mathbf{e_1} = -\mathbf{v''_{-1}} - 2 \cdot \mathbf{e_2} = -\mathbf{v''_{-1}} + 2 \cdot \mathbf{v'''_{-1}}.$$

Di conseguenza

$$f(\mathbf{e_1}) = -f(\mathbf{v''_{-1}}) + 2 \cdot f(\mathbf{v'''_{-1}}) = -\mathbf{w''_{-1}} + 2 \cdot \mathbf{w'''_{-1}} = -(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}) + 2 \cdot (-2 \cdot \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}) = -\mathbf{e_1} - 5 \cdot \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3},$$

$$f(\mathbf{e_2}) = -f(\mathbf{v'''_{-1}}) = -\mathbf{w'''_{-1}} = 2 \cdot \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \qquad f(\mathbf{e_3}) = -f(\mathbf{v'_{-1}}) = -\mathbf{w'_{-1}} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}.$$

Pertanto la matrice rappresentativa di f_{-1} rispetto alla base canonica è

$$F = \left[\ f(\mathbf{e_1})|_S \quad f(\mathbf{e_2})|_S \quad f(\mathbf{e_3})|_S\ \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'invertibilità di f_{-1} è assicurata dalla sua suriettività, che è stata verificata nel punto (i).

iii. L'applicazione f_0 non è suriettiva. Infatti abbiamo

$$M_{\mathcal{B}_w^0 S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui deduciamo che $\dim(\mathrm{Im}(f_0)) = 2$ e $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f_0)} = \{\mathbf{w}'_{\mathbf{0}}, \mathbf{w}''_{\mathbf{0}}\}$. Per il teorema del rango, abbiamo $\dim(\ker(f_0)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f_0)) = 1$. Dall'osservazione della matrice $M_{\mathcal{B}_w^0 S}$ si ricava facilmente

$$\mathbf{0} = -\mathbf{w}'_{\mathbf{0}} + \mathbf{w}''_{\mathbf{0}} + \mathbf{w}'''_{\mathbf{0}} = -f(\mathbf{v}'_{\mathbf{0}}) + f(\mathbf{v}''_{\mathbf{0}}) + f(\mathbf{v}'''_{\mathbf{0}}) = f(-\mathbf{v}'_{\mathbf{0}} + \mathbf{v}''_{\mathbf{0}} + \mathbf{v}'''_{\mathbf{0}}).$$

Di conseguenza $\mathcal{B}_{\ker(f_0)} = \{-\mathbf{v}'_{\mathbf{0}} + \mathbf{v}''_{\mathbf{0}} + \mathbf{v}'''_{\mathbf{0}}\} = \{(-1, -1, 2)\}$.

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Seconda prova in itinere – A.A. 2018/19

1. Sia $f_h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo dipendente dal parametro reale h e definito da

$$f_h((x, y, z)) = (x + hy + hz, 2y, x + hy + 2z).$$

   i. Dire per quali h l'endomorfismo è diagonalizzabile.

   ii. Dato $h = 6$, calcolare una base $\mathcal{B}$ composta da autovettori di f_6 e scrivere la matrice rappresentativa $F_6|_{\mathcal{B}}$.

   iii. Data A la matrice rappresentativa di f_0 rispetto alla base canonica, stabilire se A è simile ad

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. In $\mathbb{E}^2$ consideriamo la conica $\gamma_h : x^2 + 2hxy + hy^2 + 4x + 2hy = 0$, dipendente dal parametro reale h.

   i. Classificare γ_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

   ii. Verificare che per $h = 1$ la conica ammette un solo asse di simmetria e calcolare l'angolo convesso tra tale asse e l'asse coordinato x.

   iii. Verificare che per $h = -1$ la conica ammette due vertici reali e calcolare l'eventuale centro di simmetria della conica.

3. In $\mathbb{E}^3$ si consideri la retta $s : x = y + z = 0$.

   i. Sia Π il piano ortogonale ad s e contenente l'origine. Scrivere una base ortonormale della giacitura di Π.

   ii. Sia r la retta parallela ad s e contenente $Q = (1, 0, 0)$. Determinare il luogo Ω dei punti di $\mathbb{E}^3$ a distanza 1 da r e verificare che Ω è una quadrica di rotazione.

   iii. Sia $\gamma = \Omega \cap \Pi$. Calcolare l'equazione del cilindro Γ avente generatrice parallela all'asse y e direttrice γ.

Soluzioni

1. i. Rispetto alla base canonica $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, l'endomorfismo è rappresentato da

$$F_h|_S = \left[\begin{array}{ccc} f_h(\mathbf{e_1})|_S & f_h(\mathbf{e_2})|_S & f_h(\mathbf{e_3})|_S \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} (1,0,1)|_S & (h,2,h)|_S & (h,0,2)|_S \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & h & h \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f_h è

$$P_h(\lambda) = \det(f_h - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & h & h \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & h & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-h) = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2-h),$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8+4h}}{2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+h}\ .$$

Abbiamo i seguenti casi:

- $h < -1/4$: le radici $\lambda_{2,3}$ non sono reali e pertanto l'applicazione non è diagonalizzabile;
- $h = -1/4$: abbiamo due autovalori coincidenti $\lambda_2 = \lambda_3 = 3/2$. La molteplicità geometrica di $3/2$ è la nullità dell'applicazione $f_{-1/4} - 3/2 \cdot \mathrm{Id}$:

$$\mathrm{k}\left(\begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{k}\left(\begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3-2 = 1.$$

  Quindi l'autovalore non è regolare ed $f_{-1/4}$ non è diagonalizzabile;
- $h = 0$: abbiamo due autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. La molteplicità geometrica di 2 è la nullità dell'applicazione $f_0 - 2 \cdot \mathrm{Id}$:

$$\mathrm{k}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3-1 = 2.$$

  Quindi l'autovalore è regolare ed f_0 è diagonalizzabile;
- $h > -1/4$ ed $h \neq 0$: le radici sono reali e distinte, quindi f_h è diagonalizzabile.

In conclusione, f_h è diagonalizzabile se e solo se $h > -1/4$.

ii. L'endomorfismo f_6 è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = -1$. I corrispondenti autospazi sono:

$$V_2 = \ker(f_6 - 2 \cdot \mathrm{Id}) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((-6,1,-2)),$$

$$V_4 = \ker(f_6 - 4 \cdot \mathrm{Id}) = \ker\left(\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((2,0,1)),$$

$$V_{-1} = \ker(f_6 - 2 \cdot \mathrm{Id}) = \ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((-3,0,1)).$$

Di conseguenza $\mathcal{B} = \{(-6,1-2),(2,0,1),(-3,0,1)\}$ e la matrice rappresentativa è

$$F_6|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

iii. Poiché f_0 è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, le due matrici sono simili se e solo se anche M è diagonalizzabile con uguali autovalori. Calcoliamo il polinomio caratteristico di M :

$$P_M(\mu) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 3 & 0 \\ 0 & 2-\mu & 0 \\ -1 & 2 & 1-\mu \end{vmatrix} = (2-\mu)^2(1-\mu),$$

le cui radici sono $\mu_1 = 2 = \lambda_1,\ \mu_2 = 2 = \lambda_2$ e $\mu_3 = 1 = \lambda_3$. Verifichiamo la diagonalizzabilità di M calcolando la molteplicità geometrica di 2 :

$$\mathrm{k}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3 - 2 = 1.$$

L'autovalore non è regolare e quindi M non è diagonalizzabile, di conseguenza M non è simile ad A.

2. i. Le matrici della conica sono

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & h \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} 2 \\ h \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_h = \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ h & h & h \\ 2 & h & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli invarianti della conica sono $I_1 = 1 + h,\ I_2 = h - h^2 = h(1-h)$ ed $I_3 = 3h^2 - 4h = h(3h-4)$. Classifichiamo la curva al variare di h :

- $h < 0 : I_3 \neq 0$ ed $I_2 < 0$, quindi γ_h è un'iperbole. Se $h = -1$ allora $I_1 = 0$ e quindi siamo nel caso particolare di iperbole equilatera;
- $h = 0 : I_3 = I_2 = 0$, quindi γ_0 è una coppia di rette parallele. L'equazione della conica è $x^2 + 4x = x(x+4) = 0$, pertanto le due rette parallele sono $x = 0$ ed $x + 4 = 0$, che ovviamente hanno infiniti punti reali;
- $0 < h < 1 : I_3 \neq 0,\ I_2 > 0$ ed $I_1 I_3 < 0$, quindi γ_h è un'ellisse reale;
- $h = 1 : I_3 \neq 0$ ed $I_2 = 0$, quindi γ_1 è una parabola;
- $h > 1$ ed $h \neq 4/3 : I_3 \neq 0$ ed $I_2 < 0$, quindi γ_h è un'iperbole;
- $h = 4/3 : I_3 = 0$ ed $I_2 < 0$, quindi $\gamma_{4/3}$ è una coppia di rette reali incidenti.

ii. La conica γ_1 è una parabola, quindi ha un solo asse di simmetria. La giacitura di tale asse è l'autospazio associato all'autovalore nullo di A_1. Quindi la giacitura dell'asse di simmetria è

$$V_0 = \ker(A_1) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left((1,-1)\right).$$

L'angolo convesso tra l'asse di simmetria e l'asse coordinato x è

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\langle (1,-1),(1,0)\rangle|}{\|(1,-1)\|\,\|(1,0)\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

iii. La conica γ_{-1} è un'iperbole, quindi ha due vertici reali ed un centro di simmetria. Le coordinate del centro Q si ricavano risolvendo il seguente sistema lineare:

$$[A_{-1}| - B_{-1}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad Q = (-3/2, 1/2).$$

3. i. Consideriamo i due vettori formati dai coefficienti delle due equazioni che definiscono la retta s :

$$\mathbf{n_1} = (1,0,0) \qquad \text{ed} \qquad \mathbf{n_2} = (0,1,1).$$

Essi sono indipendenti e per costruzione sono ortogonali alla retta stessa, pertanto forniscono una base della giacitura di Π. Essendo già ortogonali tra loro, per ottenere una base ortonormale è sufficiente normalizzare tali vettori:

$$\mathcal{B}_\Pi = \left\{\frac{\mathbf{n_1}}{\|\mathbf{n_1}\|}, \frac{\mathbf{n_2}}{\|\mathbf{n_2}\|}\right\} = \left\{(1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\right\}.$$

ii. Un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad s ed r si ottiene come

$$\mathbf{v} = \mathbf{n_1} \wedge \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{e_1} \\ 0 & 1 & \mathbf{e_2} \\ 0 & 1 & \mathbf{e_3} \end{vmatrix} = -\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = (0, -1, 1)\,.$$

Dato un generico punto $P = (x, y, z)$ di $\mathbb{E}^3$, abbiamo il vettore geometrico $\overrightarrow{QP} = (x-1, y, z)$. Il luogo geometrico Ω è definito da

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{v}, \overrightarrow{QP})}{G(\mathbf{v})}} = 1,$$

dove $d(P, r)$ è la distanza tra P e la retta r, che dipende dai due gramiani

$$G(\mathbf{v}, \overrightarrow{QP}) = \begin{vmatrix} \|\mathbf{v}\|^2 & \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{QP} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{QP} \rangle & \|\overrightarrow{QP}\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -y+z \\ -y+z & (x-1)^2 + y^2 + z^2 \end{vmatrix} = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x + 2$$

e

$$G(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = 2.$$

Di conseguenza Ω è descritto dall'equazione $G(\mathbf{v}, \overrightarrow{QP}) = G(\mathbf{v})$, ovvero

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x = 0.$$

Per costruzione Ω è il cilindro circolare di raggio 1 ed avente come asse la retta r, pertanto è una quadrica di rotazione.

iii. Il piano Π è perpendicolare a $\mathbf{v}$ e contiene l'origine, pertanto è definito dall'equazione $-y + z = 0$. Di conseguenza la direttrice γ è definita dal sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x = 0, \\ -y + z = 0. \end{cases}$$

L'equazione del cilindro Γ si ottiene eliminando y dal sistema di equazioni precedente:

$$\begin{cases} y = z, \\ 2x^2 + z^2 + z^2 + 2z^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Quindi Γ è definito da $x^2 + 2z^2 - 2x = 0$.

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Primo appello – A.A. 2018/19

1. Dato il parametro reale k, consideriamo le matrici:

$$A_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & 2 & k \\ -1 & k & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ed} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   i. Calcolare il rango di A_k in funzione di k.

   ii. Determinare per ogni k il numero di soluzioni del sistema $A_k\, X = B$.

   iii. Trovare i valori di k per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori.

2. In $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette $r_1 :\ (x, y, z) = (0, 1, 0) + t_1 \cdot (1, 0, 0)$ ed $r_2 :\ (x, y, z) = (0, 0, 0) + t_2 \cdot (1, 1, 0)$.

   i. Verificato che le rette sono incidenti, trovare l'equazione del piano che le contiene entrambe e le coordinate del loro punto di intersezione P.

   ii. Determinare l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q} = \{Q \in \mathbb{E}^3 \,|\, \mathrm{d}(Q, r_1) = 2\, \mathrm{d}(Q, r_2)\}$.

   iii. Verificare che $\mathcal{Q}$ è una quadrica, classificarla e dire se P appartiene a $\mathcal{Q}$.

3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi $U = \{(x, y, z, w) \,|\, 2x - y + w = 0\}$ e $W = \mathcal{L}((1, 2, 0, 0), (2, 1, 0, 3), (0, 1, 0, -1))$.

   i. Trovare dimensioni e basi di U e W ed una rappresentazione algebrica di W.

   ii. Calcolare le dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.

   iii. Scrivere la matrice di proiezione ortogonale su $U \cap W$.

Soluzioni

1. i. Osserviamo che il minore

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 6$$

è diverso da zero per ogni k, quindi il rango di A_k è sempre maggiore od uguale a due. Dal calcolo del determinante attraverso la regola di Sarrus otteniamo:

$$\det(A_k) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & 2 & k \\ -1 & k & 3 \end{vmatrix} = 18 - k^2 - 3k^3 - 2 = 16 - 4k^2.$$

Di conseguenza il rango di A_k è massimo se e solo se $k \neq \pm 2$.

ii. Se $k \neq \pm 2$ esiste un'unica soluzione del sistema lineare. Se $k = \pm 2$ dobbiamo studiare il rango di $[A_k|B]$. Dai risultati del punto precedente, e grazie al teorema di Kronecker, sappiamo che è sufficiente considerare il minore orlato

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ -1 & k & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 3(2 - k).$$

Se $k = 2$ allora $r([A_2|B]) = 2 = r(A_2)$ e quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Se $k = -2$ allora $r([A_{-2}|B]) = 3 > 2 = r(A_{-2})$, pertanto il sistema è impossibile.

iii. La matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k = 0$. In tal caso il polinomio caratteristico è

$$P_0(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Quindi gli autovalori sono $2, 4$. I corrispondenti autospazi sono:

$$V_2 = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0)),$$

$$V_4 = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((1,0,-1).$$

Quindi una base di autovettori di A_0 è $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}$. Essendo già ortogonale, è sufficiente normalizzare i tre vettori per ottenere una base ortonormale:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

2. i. Studiamo il sistema lineare che descrive i punti appartenenti ad entrambe le rette:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ 1 = t_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = t_2 = 1.$$

Quindi le rette si intersecano in $P = (1,1,0)$. É inoltre facile osservare che i punti di r_1 ed r_2 soddisfano l'equazione $z = 0$, che definisce quindi il piano contenente i due sottospazi affini.

ii. La retta r_1 contiene $P_1 = (0,1,0)$ ed è parallela a $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, mentre r_2 contiene $P_2 = (0,0,0)$ ed è parallela a $\mathbf{v_2} = (1,1,0)$. Le distanze di un generico punto $Q = (x,y,z)$ dai due sottospazi sono:

$$d(Q, r_1) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{v_1}, \overrightarrow{P_1Q})}{G(\mathbf{v_1})}} \qquad \text{e} \qquad d(Q, r_2) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{v_2}, \overrightarrow{P_2Q})}{G(\mathbf{v_2})}}\,.$$

Il luogo $\mathcal{Q}$ è quindi definito da

$$G(\mathbf{v_1}, \overrightarrow{P_1Q})G(\mathbf{v_2}) = 4G(\mathbf{v_2}, \overrightarrow{P_2Q})G(\mathbf{v_1}).$$

Dati $\overrightarrow{P_1Q} = (x, y-1, z)$ e $\overrightarrow{P_2Q} = (x, y, z)$, abbiamo:

$$G(\mathbf{v_1}, \overrightarrow{P_1Q}) = \begin{vmatrix} \|\mathbf{v_1}\|^2 & \langle \mathbf{v_1}, \overrightarrow{P_1Q}\rangle \\ \langle \mathbf{v_1}, \overrightarrow{P_1Q}\rangle & \|\overrightarrow{P_1Q}\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2+(y-1)^2+z^2 \end{vmatrix} = y^2+z^2-2y+1 \quad \text{e}$$

$$G(\mathbf{v_2}, \overrightarrow{P_2Q}) = \begin{vmatrix} \|\mathbf{v_2}\|^2 & \langle \mathbf{v_2}, \overrightarrow{P_2Q}\rangle \\ \langle \mathbf{v_2}, \overrightarrow{P_2Q}\rangle & \|\overrightarrow{P_2Q}\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x+y \\ x+y & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix} = x^2+y^2+2z^2-2xy\,,$$

mentre $G(\mathbf{v_1}) = \|\mathbf{v_1}\|^2 = 1$ e $G(\mathbf{v_2}) = \|\mathbf{v_2}\|^2 = 2$. Pertanto l'equazione del luogo geometrico $\mathcal{Q}$ è:

$$2x^2+y^2+3z^2-4xy+2y-1=0.$$

iii. $\mathcal{Q}$ è definito da un'equazione di secondo grado e quindi è una superficie quadrica. Le matrici associate sono:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 6,\ I_2 = 7,\ I_3 = -6$ ed $I_4 = 0$, pertanto $\mathcal{Q}$ è un cono con infiniti punti reali.

3. i. Per studiare il sottospazio U dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare:

$$2x-y+w=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = t_1 \\ y = 2t_1 + t_3 \\ z = t_2 \\ w = t_3 \end{cases}.$$

Quindi $\dim(U) = 3$ ed una base del sottospazio è $\mathcal{B}_U = \{(1,2,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.
Per studiare il sottospazio W ed ottenere una sua rappresentazione algebrica, riduciamo a scala la seguente matrice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 3 & -1 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 3 & -1 & w \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & -2x+y+w \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right].$$

Di conseguenza $\dim(W) = 2$, una base del sottospazio è $\mathcal{B}_W = \{(1,2,0,0)(2,1,0,3)\}$ ed una sua rappresentazione algebrica è $-2x+y+w = z = 0$.

ii. É facile verificare che il vettore $(2,1,0,3)$ di $\mathcal{B}_W$ non soddisfa l'equazione che definisce U, pertanto non appartiene ad U. Tenendo conto della dimensione di U, segue che $U + W = \mathbb{R}^4$. Di conseguenza, grazie alla formula di Grassmann abbiamo $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 1$.

iii. Una base di $U \cap W$ è formata dal vettore $\mathbf{v} = (1,2,0,0)$, comune ad entrambe le basi dei sottospazi. La proiezione ortogonale di $\mathbf{x} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ sull'intersezione è quindi

$$P_{U\cap W}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{x+2y}{5} \cdot (1,2,0,0) = \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5}, 0, 0\right).$$

Per il teorema di rappresentazione, la matrice rappresentativa della proiezione ortogonale rispetto alla base canonica è:

$$M = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Secondo appello – A.A. 2018/19

1. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (1,1,1), \mathbf{v_2} = (0,1,1), \mathbf{v_3} = (0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$, sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione tale che

$$T(\mathbf{v_1}) = 3\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 6\mathbf{v_3}, \qquad T(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 6\mathbf{v_3}, \qquad T(\mathbf{v_3}) = -\mathbf{v_2} + 5\mathbf{v_3}.$$

   i. Verificare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto a $\mathcal{B}$.

   ii. Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   iii. Calcolare autovalori ed autospazi di T. Stabilire se T è diagonalizzabile.

2. Sia $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'applicazione naturale associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Chiamiamo $W = \mathrm{Im}(f_A)$ ed $U = \ker(f_A)$.

   i. Trovare le dimensioni di W ed U.

   ii. Trovare le dimensioni di $W + U$ e $W \cap U$.

   iii. Determinare una base ortogonale di W e la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ su W. Scrivere una base ortogonale di $W + U$.

3. In $\mathbb{E}^3$ consideriamo le due rette

$$r_k: \ (x,y,z) = (1,0,1) + t_1 \cdot (k,k,k-1) \qquad \text{ed} \qquad s_k: \ (x,y,z) = (1,0,0) + t_2 \cdot (k,1,k-1),$$

dove k è un parametro reale. Definiamo inoltre la quadrica $\mathcal{Q}: \ 5x^2 + 3y^2 - 4yz + 4y = 0$.

   i. Determinare la mutua posizione delle due rette in funzione di k.

   ii. Riconoscere $\mathcal{Q}$ e determinarne l'eventuale centro.

   iii. Verificato che per $k = 0$ le rette sono complanari, trovare l'equazione del piano Π a cui appartengono. Classificare infine la conica ottenuta come $\mathcal{Q} \cap \Pi$.

Soluzioni

1. i. La matrice del cambio di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{S}$ è

$$M_{\mathcal{BS}} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{v_1}|_{\mathcal{S}} & \mathbf{v_2}|_{\mathcal{S}} & \mathbf{v_3}|_{\mathcal{S}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(M_{\mathcal{BS}}) = 1 \neq 0$, l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
La matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$T_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc} T(\mathbf{v_1})|_{\mathcal{B}} & T(\mathbf{v_2})|_{\mathcal{B}} & T(\mathbf{v_3})|_{\mathcal{B}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

ii. La matrice del cambio di coordinate da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{B}$ è $M_{\mathcal{SB}} = M_{\mathcal{BS}}^{-1}$, che calcoliamo con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$[\, M_{\mathcal{BS}} \,|\, I_3 \,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_2 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [\, I_3 \,|\, M_{\mathcal{SB}} \,].$$

La matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica è

$$T_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{BS}} T_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{SB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

iii. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} P_T(\lambda) &= \det(T_{\mathcal{S}} - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3). \end{aligned}$$

Quindi i due autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, i cui autospazi associati sono

$$V_2 = \ker(T - 2\,I_3) = \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((1,0,0)),$$

$$V_3 = \ker(T - 3\,I_3) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}((1,1,-2)).$$

Dato che la molteplicità algebrica e geometrica di λ_1 sono differenti, l'applicazione non è diagonalizzabile.

2. i. Riduciamo a scala la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \to R_4 \\ R_4 - R_1 \to R_3}]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sottospazio W è isomorfo allo spazio delle colonne $C(A)$, mentre U è isomorfo a $\ker(A)$. Di conseguenza $\dim(W) = r(A) = 2$ e $\dim(U) = n - r(A) = 2$.

ii. Una base di $C(A)$ è data dalle prime due colonne della matrice, quindi $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w_1} = (1,-1,1,1), \mathbf{w_2} = (0,1,0,1)\}$. Una base di U si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = -t_1 \\ y = -t_1 + t_2 \\ z = t_1 \\ w = t_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_U = \{\mathbf{u_1} = (-1,-1,1,0), \mathbf{u_2} = (0,1,0,1)\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{w_2} = \mathbf{u_2}$, mentre $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{u_1}\}$ è indipendente, infatti

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim(U + W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 1$.

iii. É immediato verificare che $\mathcal{B}_W$ è ortogonale. Di conseguenza, la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W è

$$\begin{aligned} P_W(\mathbf{v}) &= \tfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w_1} \rangle}{\|\mathbf{w_1}\|^2} \cdot \mathbf{w_1} + \tfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w_2} \rangle}{\|\mathbf{w_2}\|^2} \cdot \mathbf{w_2} = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (1, -1, 1, 1) + (0, 1, 0, 1) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Infine, dal punto precedente sappiamo che $\mathcal{B}_{U+W} = \{\mathbf{w_1} = (1, -1, 1, 1), \mathbf{w_2} = (0, 1, 0, 1), \tilde{\mathbf{u}} = (0, 0, 2, 3)\}$ è una base di $U + W$. I primi due vettori sono ortogonali, per cui applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt al solo $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w_1} \rangle}{\|\mathbf{w_1}\|^2} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w_2} \rangle}{\|\mathbf{w_2}\|^2} \cdot \mathbf{w_2} = (0, 0, 2, 3) - \frac{5}{4} \cdot (1, -1, 1, 1) - \frac{3}{2} \cdot (0, 1, 0, 1) = \frac{1}{4} \cdot (-5, -1, 3, 1).$$

Quindi una base ortogonale di $U + W$ è $\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (-5, -1, 3, 1)\}$.

3. i. Il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 0) - (1, 0, 1) = (0, 0, -1)$ collega un punto di r_k ed s_k. Le due rette sono complanari se e solo se $\mathbf{v}$ è parallelo allo spazio generato dai due vettori direttori delle rette:

$$\begin{vmatrix} k & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & k-1 & -1 \end{vmatrix} = -(k - k^2) = k(k-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 0, 1.$$

Se $k = 0$ i due vettori direttori sono $(0, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$, che non sono paralleli. Pertanto le rette sono incidenti.

Se $k = 1$ i due vettori direttori sono coincidenti, quindi le rette sono parallele. In questo caso è inoltre facile verificare che s_1 non contiene il punto $(1, 0, 1) \in r_1$, di conseguenza le due rette sono disgiunte.

Se $k \neq 0, 1$ le rette sono sghembe.

ii. La matrice completa della quadrica è

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con invarianti $I_1 = 8$, $I_2 = 11$, $I_3 = -20$, $I_4 = 0$. Quindi la quadrica è un cono con infiniti punti reali.

iii. Per $k = 0$ le rappresentazioni parametriche delle due rette sono

$$r_0 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t_1 \end{cases}, \qquad s_0 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t_2 \\ z = -t_2 \end{cases}.$$

Quindi esse sono entrambe contenute nel piano $x = 1$.

La conica $\mathcal{Q} \cap \Pi$ è descritta dal sistema

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 - 4yz + 4y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3y^2 - 4yz + 4y + 5 = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

La matrice completa della conica nel piano Π è

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

con invarianti $I_1 = 3$, $I_2 = -4$, $I_3 = -20$. Di conseguenza essa è un'iperbole.

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Terzo appello – A.A. 2018/19

1. Sia $T_k \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ l'applicazione rappresentata rispetto alle basi canoniche da

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,4;\mathbb{R}).$$

i. Calcolare $\dim(\mathrm{Im}(T_k))$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

ii. Dato $U = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1)) \subset \mathbb{R}^4$, calcolare una base $\mathcal{B}$ di U. Posto $k = 1$, calcolare una base $\mathcal{B}'$ di $T_1(U)$.

iii. Posto $k = 0$, calcolare $A_0^T A_0$. Dire se tale matrice è diagonalizzabile e verificare che 0 è un suo autovalore.

2. Dati $\mathbf{u} = (1,1,1)$ e $\mathbf{v} = (1,0,0)$ vettori di $\mathbb{R}^3$, siano $U = \mathcal{L}(\mathbf{u})$ e $V = \mathcal{L}(\mathbf{v})$.

i. Calcolare una base di $U + V$ e del suo complemento ortogonale $(U + V)^\perp$.

ii. Rappresentare le proiezioni ortogonali $\mathcal{P}_U$ e $\mathcal{P}_V$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

iii. Rappresentare l'applicazione $f = \mathcal{P}_U + \mathcal{P}_V$ rispetto alla base canonica. Calcolare l'azione di f sui vettori delle basi di $U + V$ ed $(U + V)^\perp$, e da questo dedurre se f coincide con la proiezione ortogonale su $U + V$.

3. Dato il parametro reale μ, consideriamo in $\mathbb{E}^2$ la conica $\gamma_\mu : \ (\mu - 1)\, x^2 + 4\mu\, xy + (\mu - 1)\, y^2 - 6\mu + 2 = 0$.

i. Classificare γ_μ per ogni $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Verificare che esistono esattamente due valori di μ tali per cui γ_μ è degenere. Fattorizzare le equazioni delle due coniche degeneri, così da individuare le rette che le costituiscono.

iii. Verificare che γ_1 è un'iperbole e calcolarne gli asintoti. Scrivere quindi l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione in $\mathbb{E}^3$ di tale iperbole rispetto ad un asintoto.

Soluzioni

1. i. Per prima cosa osserviamo che $\dim(\mathrm{Im}(T_k)) = r(A_k)$. É possibile calcolare il rango utilizzando la riduzione a scala oppure il teorema di Kronecker. Nel primo caso abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & k & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - kR_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & -2k & 1-k^2 \end{bmatrix}.$$

Non esistono valori di k per i quali l'ultima riga della matrice ridotta sia nulla, per cui vale sempre $r(A_k) = 3$.

Utilizzando invece il teorema di Kronecker, osserviamo che il minore ottenuto eliminando la seconda colonna della matrice è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Poiché il rango non può essere maggiore del numero di righe della matrice, segue che $r(A_k) = 3$ per ogni k reale.

ii. I primi due generatori di U sono indipendenti, mentre il terzo è somma dei precedenti. Quindi una base di U è $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{u_1} = (1,1,0,0), \mathbf{u_2} = (0,0,1,1)\}$. L'immagine di U rispetto a T_1 è generata dalle immagini dei vettori in $\mathcal{B}_U$:

$$T_1(U) = \mathcal{L}(T_1(\mathbf{u_1}), T_1(\mathbf{u_2})) = \mathcal{L}((0,1,1),(0,3,1)).$$

Essendo i due vettori indipendenti, essi costituiscono una base di $T_1(U)$.

iii. Per ogni matrice $M \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, il prodotto $M^T M$ è una matrice simmetrica. Nel nostro caso

$$A_0^T A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, per il teorema spettrale $A_0^T A_0$ è diagonalizzabile.

Osserviamo che 0 è un'autovalore di una matrice se e solo se il nucleo di questa non è costituito dal solo vettore nullo. Nel nostro caso, i vettori nel nucleo di A_0 appartengono anche al nucleo di $A_0^T A_0$, ovvero $\ker(A_0) \subseteq (\ker(A_0^T A_0))$. Dato che $r(A_0) = 3 < 4$, segue che

$$\dim(\ker(A_0^T A_0)) \geq \dim(\ker(A_0)) = 4 - 3 = 1 > 0.$$

Pertanto 0 è autovalore di $A_0^T A_0$.

Il ragionamento precedente può essere comprovato dal calcolo esplicito:

$$\ker(A_0^T A_0) = \ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(A_0^T A_0') = 1.$$

Un metodo alternativo passa dal calcolo del polinomio caratteristico della matrice:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)-4) - ((1-\lambda)(4-\lambda)-4) = (\lambda^2 - 3\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 5.$$

Essendo tutti distinti, la matrice è diagonalizzabile. Inoltre λ_3 è l'autovalore nullo desiderato.

2. i. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono indipendenti, pertanto $\mathcal{B}_{U+V} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Quindi il complemento ortogonale di $U+V$ ha dimensione

$$\dim((U+V)^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U+V) = 3-2 = 1.$$

Una sua base è costituita da un unico vettore, che possiamo scegliere essere il prodotto vettoriale di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e_1} \\ 1 & 0 & \mathbf{e_2} \\ 1 & 0 & \mathbf{e_3} \end{vmatrix} = (0,1,-1) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{B}_{(U+V)^{\perp}} = \{\mathbf{w}\}.$$

ii. Calcoliamo l'immagine del generico vettore $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ rispetto alle proiezioni ortogonali:

$$\mathcal{P}_U(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \cdot \mathbf{u} = \frac{x+y+z}{3} \cdot (1,1,1)\,, \qquad \mathcal{P}_V(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = x \cdot (1,0,0)\,.$$

Data la base canonica $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$, le due matrici rappresentative sono:

$$P_U = \left[\ \mathcal{P}_U(\mathbf{e_1})|_S \quad \mathcal{P}_U(\mathbf{e_2})|_S \quad \mathcal{P}_U(\mathbf{e_3})|_S\ \right] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$P_V = \left[\ \mathcal{P}_V(\mathbf{e_1})|_S \quad \mathcal{P}_V(\mathbf{e_2})|_S \quad \mathcal{P}_V(\mathbf{e_3})|_S\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$F = P_U + P_V = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

L'azione di f sulle due basi è quindi:

$$f(\mathbf{u}) = (2,1,1), \qquad f(\mathbf{v}) = (4/3, 1/3, 1/3), \qquad f(\mathbf{w}) = (0,0,0).$$

Anche se f manda i vettori ortogonali ad $U+V$ nel vettore nullo, essa non è la proiezione ortogonale, dato che non agisce come l'identità sui vettori di $U+V$. Infatti $f(\mathbf{u}) \neq \mathbf{u}$ ed $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$.
Alternativamente, si può calcolare la matrice rappresentativa della proiezione su $U+V$ sfruttando l'identità $P_{U+V} = \mathrm{Id} - P_{(U+V)^{\perp}}$. Per prima cosa, calcoliamo la proiezione sul complemento ortogonale:

$$\mathcal{P}_{(U+V)^{\perp}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \cdot \mathbf{w} = \frac{y-z}{2} \cdot (0,1,-1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_{U+V} &= I_3 - \left[\ \mathcal{P}_{(U+V)^{\perp}}(\mathbf{e_1})|_S \quad \mathcal{P}_{(U+V)^{\perp}}(\mathbf{e_2})|_S \quad \mathcal{P}_{(U+V)^{\perp}}(\mathbf{e_3})|_S\ \right] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \neq F. \end{aligned}$$

3. i. La matrice completa della conica è

$$C = \begin{bmatrix} \mu-1 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & -6\mu+2 \end{bmatrix}$$

ed i suoi invarianti euclidei sono

$$I_1 = 2(\mu-1), \qquad I_2 = (\mu-1)^2 - 4\mu^2 = -(\mu+1)(3\mu-1), \qquad I_3 = (-6\mu+2)I_2 = 2(\mu+1)(3\mu-1)^2.$$

- $\mu < -1$: abbiamo $I_2 < 0$ ed $I_3 \neq 0$, quindi γ_μ è un'iperbole;

- $\mu = -1$: abbiamo $I_2 = I_3 = 0$. Inoltre, è facile osservare che C ha rango due, di conseguenza γ_μ è una coppia di rette parallele distinte con infiniti punti reali;
- $-1 < \mu < 1/3$: abbiamo $I_2 > 0$ ed $I_1 I_3 < 0$, quindi γ_μ è un'ellisse con infiniti punti reali;
- $\mu = 1/3$: abbiamo $I_2 = I_3 = 0$. Inoltre, la matrice C ha rango uno, di conseguenza γ_μ è una retta doppia;
- $\mu > 1/3$: abbiamo $I_2 < 0$ ed $I_3 \neq 0$, quindi γ_μ è un'iperbole.

ii. Le coniche degeneri sono:

$$\gamma_{-1} : \; -2x^2 - 4xy - 2y^2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y-2)(x+y+2) = 0,$$

$$\gamma_{1/3} : \; -2/3x^2 + 4/3xy - 2/3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)^2 = 0.$$

Di conseguenza, le rette che costituiscono la prima conica sono rispettivamente definite dalle equazioni $x + y - 2 = 0$ ed $x + y + 2 = 0$.

L'unica retta che costituisce la seconda conica è invece definita da $x - y = 0$.

iii. La conica γ_1 è l'iperbole equilatera definita dall'equazione $xy = 1$. I suoi asintoti sono gli assi cartesiani. L'equazione della superficie S si ottiene eliminando i parametri x_0, y_0, z_0 dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x_0 y_0 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ y = y_0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_0 = y \\ x_0 = 1/y \\ z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1/y^2 + y^2 \end{cases}$$

e quindi $x^2y^2 + y^2z^2 - 1 = 0$.

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Prof. Marco Compagnoni – Quarto appello – A.A. 2018/19

1. Dato $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione definita da $f_k((x, y, z)) = ((x + (k + 2)z, kx - ky, x + ky + 2z)$.

   i. Determinare le dimensioni di nucleo ed immagine di f_k per ogni k.

   ii. Stabilire se esiste una base di autovettori di f_0.

   iii. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, h)$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f_{-3})$.

2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x + y - z - w = 0 \\ x + y - 2w = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V = \mathcal{L}((1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0)).$$

   i. Determinare la dimensione ed una base di U.

   ii. Trovare una rappresentazione algebrica di V ed una sua base ortonormale.

   iii. Trovare la dimensione ed una base di $U \cap V$.

3. In $\mathbb{E}^3$ consideriamo il punto $V = (2, 0, 1)$ ed il piano $\pi : \; x + y + z = 0$.

   i. Trovare una rappresentazione algebrica della retta r passante per V e perpendicolare a π.

   ii. Determinare il punto H intersezione di r e π. Calcolare la distanza d tra V e π.

   iii. Scrivere l'equazione del luogo $\mathcal{S}$ dei punti di $\mathbb{E}^3$ distanti d da r. Dire se $\mathcal{S}$ è una superficie di rotazione.

Soluzioni

1. i. La matrice rappresentativa di f_k rispetto alla base canonica è

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ k & -k & 0 \\ 1 & k & 2 \end{bmatrix}.$$

Riduciamo a scala tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ k & -k & 0 \\ 1 & k & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-kR_1\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ 0 & -k & -k(k+2) \\ 0 & k & -k \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2\to R_3]{-R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ 0 & k & k(k+2) \\ 0 & 0 & -k(k+3) \end{bmatrix}.$$

- $k=0$: abbiamo $r(F_0)=1$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(f_0))=1$ e $\dim(\ker(f_0))=2$;
- $k=-3$: abbiamo $r(F_{-3})=2$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(f_{-3}))=2$ e $\dim(\ker(f_{-3}))=1$;
- $k\neq 0,-3$: abbiamo $r(F_k)=3$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(f_k))=3$ e $\dim(\ker(f_k))=0$.

ii. Dal punto precedente sappiamo che $\lambda_1=0$ è un autovalore di molteplicità geometrica 2. Dato che f_0 non è l'applicazione nulla, anche la molteplicità algebrica di λ_1 è uguale a 2, pertanto l'autovalore è regolare. Esiste inoltre un secondo autovalore semplice λ_2, che si può ricavare da

$$\mathrm{tr}(f_0)=3=2\lambda_1+\lambda_2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2=3.$$

Quindi f_0 è diagonalizzabile per il secondo criterio di diagonalizzabilità.

iii. Dal primo punto dell'esercizio sappiamo che $\mathrm{Im}(f_{-3})=\mathcal{L}((1,3,1),(0,-3,3))$. Studiamo pertanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & h \end{vmatrix} = (9-3)+3h=0.$$

Quindi $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine se e solo se $h=-2$.

2. i. Riduciamo a scala la matrice associata al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_2]{R_2-R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza $\dim(U)=4-3=1$ ed una sua base si trova risolvendo il sistema ridotto:

$$\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ y-z=0 \\ z-w=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \\ w=t \end{cases}.$$

Una base di U è quindi $\mathcal{B}_U=\{(1,1,1,1)\}$.

ii. Riduciamo a scala la seguente matrice:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & w \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & w-x \end{array}\right].$$

Quindi una rappresentazione algebrica di V è $x-y=x-w=0$.
I vettori $\mathbf{u}=(1,1,1,1)$ e $\mathbf{v}=(0,0,1,0)$ costituiscono una base di V. Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per ortogonalizzare i due vettori:

$$\tilde{\mathbf{v}}=\mathbf{v}=(0,0,1,0), \qquad \tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}-\frac{\langle \mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}\rangle}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|^2}\cdot\tilde{\mathbf{v}}=(1,1,1,1)-(0,0,1,0)=(1,1,0,1).$$

Infine, normalizzando entrambi i vettori otteniamo una base ortonormale:

$$\hat{\mathbf{v}}=\frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|}=(0,0,1,0), \qquad \hat{\mathbf{u}}=\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\tilde{\mathbf{u}}\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1).$$

iii. Osserviamo che $U \subset V$, quindi $U \cap V = U$. Pertanto $\dim(U \cap V) = 1$ e $\mathcal{B}_{U\cap V} = \{(1,1,1,1)\}$.

3. i. Un vettore perpendicolare a π è $\mathbf{v} = (1,1,1)$. Quindi una rappresentazione parametrica di r è $(x,y,z) = (2,0,1) + t \cdot (1,1,1)$. Eliminando il parametro t si ottiene la rappresentazione algebrica:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x-2 \\ 1 & y \\ 1 & z-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} 1 & x-2 \\ 0 & -x+y+2 \\ 0 & -x+z+1 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad r:\ x-y-2 = x-z-1 = 0.$$

ii. Sostituiamo la rappresentazione parametrica della retta nell'equazione del piano:

$$2+t+t+1+t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t=-1 \qquad \Rightarrow \qquad H = (1,-1,0).$$

La distanza tra V ed il piano si può calcolare direttamente come

$$d(V,\pi) = \frac{|2+0+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$$

Essa coincide con la distanza tra V ed H :

$$d(V,H) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3}.$$

iii. Dato un punto $P = (x,y,z)$ di $\mathbb{E}^3$, la distanza tra il punto e la retta r è

$$d(P,r) = \sqrt{\frac{G\left(\mathbf{v}, \overrightarrow{VP}\right)}{G(\mathbf{v})}}.$$

Di conseguenza, $\mathcal{S}$ è definito dall'equazione $G(\mathbf{v}, \overrightarrow{VP}) = 3\,G(\mathbf{v})$, che esplicitamente diventa

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{VP} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{VP} \rangle & \langle \overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VP} \rangle \end{vmatrix} = 3\|\mathbf{v}\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 3 & x+y+z-3 \\ x+y+z-3 & (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{vmatrix} = 9.$$

Con alcuni passaggi algebrici si ottiene l'equazione:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6y - 3 = 0.$$

Per costruzione $\mathcal{S}$ è un cilindro circolare di raggio $\sqrt{3}$ ed asse la retta r, quindi si tratta di una quadrica di rotazione.