Rappresentazione dei numeri razionali

Valore di N = $\sum_{i=-m}^{n-1} c_i b^i$

n ≡ numero cifre parte intera

m ≡ numero cifre parte decimale

Es.

$13,375_{10} = 5*10^{-3} + 7*10^{-2} + 3*10^{-1} + 3*10^{0} + 1*10^{1}$

Rappresentazione in virgola fissa

- Precisione costante della parte frazionaria
- E_a costante

16 bit parte intera | 16 bit parte frazionaria

13 codifica interi | 375 codifica frazionaria

13,375

codifica parte frazionaria:
moltiplicazione per 2 sino a quando vale 0 e i bit corrispondono ai riporti nell'ordine prodotto:

Es.:

	x 2	riporto	
0,375	0,75	0	2^{-1}
0,75	1,5	1	2^{-2}
0,5	1,0	1	2^{-3}
0			

$0,375_{10}$=011 0000000…

- L'algoritmo può non convergere

0,1	|0,2	| 0	
0,2	|0,4	| 0	$0{,}1_{10}=0.0001100011\ldots$ (∞ bit)
0,4	|0,8	| 0	
0,8	|1,6	| 1	
0,6	|1,2	| 1	
0,2	|0,4	si ripete in modo periodico	

e se non converge si introduce un'approssimazione (imprecisione).

Approssimazione ed errore

Numero 1,30 con 6 bits per PF

PF		
000 000	1.000000	| distanza costante tra due numeri
000 001	1.015625	| rappresentati = 0.015625 $=1/2^6$
000 010	1.031250	
000 011	1.046875	
….		
010 011	1.296875	
010 100	1.312490	

Errore assoluto = |valore reale – valore rappresentato| ≤ distanza
Errore relativo = errore assoluto / valore reale

Errore assoluto costante ed errore assoluto aumenta sui numeri piccoli
Errore assoluto su 16 bits ≤ $2^{-16} = 0{,}000015$

- Rigidità della pre-divisione dei bit

8.750.000.000 non rappresentabile nei 16 bit della parte intera
16 bit frazionaria inutilizzati

0,0000000000875 16 bit parte intera inutilizzati
16 bit parte frazionaria a 0 (approssimazione)

Real numbers in finite representation
"a large grey area"

Before 1985
Non esiste un accordo su un format per real numbers (fighting)

1985 Agreement
Standard IEEE 754-1985 for binary FP arithmetic
"What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic", David Goldberg, ACM Computing Surveys, Vol 23, No 1, March 1991, pp. 5-48

- non evita tutti i problemi
- stabilisce vincoli sull'entità dei "rounding error" per le operazioni aritmetiche
- un'implementazione hdw è IEEE compliant se produce risultati uguali a quelli degli algoritmi IEEE

↓

Program1 (CPU1) = Program1 (CPU2)

Tutto risolto?
New York Times, nov. 1994 "Intel's Pentium problem persists"
(300 milioni di dollari per il ritiro)

2008 IEEE-754-2008 standard per decimal FP arithmetic

Altri problemi più avanti

Virgola mobile
(standard ANSI/IEEE 754-1985 binary FP arithmetics)

Obiettivi della rappresentazione:
- autoadattabilità tra parte intera e frazionaria
- errore relativo costante

Rappresentazione normalizzata $N= s\ M * 2^e$

$s=\pm$ $1\leq M<2$ $b=2$ $e=\pm$numero intero

Codifiche dedicate per 0, NaN ($\sqrt{-2}$, 0/0, ∞+-/∞) ∞

Es. $11_{10}= 1{,}375\ 2^3$ $0.25_{10}= 1\ 2^{-2}$

$\Downarrow$

Modelli di precisione

	Hidden	n_s	n_M	n_e	$e+ (2^{(ne-1)}-1)$	precisione
singola precis. FP32	0	1	23	8 -126 – 127	e+127	24
doppia precis. FP64	0	1	52t	11 -1022 – 1023	e+1023	53
Intel 80 bit	1	1	63	15		64

s 0=positivo 1=negativo

M codifica della sola parte frazionaria

e codifica del valore positivo es. FP32 $\Rightarrow$ e+127

Es.: $11_{10} = 1{,}375\ 2^3$ (1,) sottinteso in FP

s=0
M= 01100000000000000000000
e(3) + 127 = 130 ⇒ 10000010

⇓

0 10000010 01100000000000000000000
s e M

Esempi di intervalli

Tipi C	Bit	Intervallo possibile (float.h)
float	FP32	$-3{,}4*10^{38}$ …$-1{,}1*10^{-38}$ (`FLT_MIN`) $1{,}1*10^{-38}$… $3.4*10^{38}$ (`FLT_MAX`) `FLT_MAX =` `(1+0,5+0,25+...)`2^{127}`=` 2^{128} `FLT_MIN = (1+0)`2^{-126}
double	FP64	$-1.7*10^{308}$…$-2.2*10^{-308}$ (`DBL_MIN`) $2.2*10^{-308}$ *a* $1.7*10^{308}$ (`DBL_MAX`)

Osservazione 1 FP vs v.fissa

8.750.000.000
v. fissa: non rappresentabile
FP32: $0{,}875*10^{10} = 1{,}018634065..*2^{33}$
= 0 10100000 00000100110001010011001

0,0000000000875
v.fissa: rappresentato come 0
FP32: $0{,}875*10^{-10} = 1{,}5032385..*\ 2^{-34}$
= 0 01011101 10000000110101000011110

~~**Osservazione 2**~~ (sospesa) Come si esegue una somma

$S*2^E + T * 2^F$ con E>F

$\Downarrow$

- denormalization of T: shifting right T (+hidden bit) di (E-F) bits
- sum, normalize and rounding

Es. Mantissa da 7 bit

3 +	$1.5*2^1$		1000000
0.75=	$1.5 * 2^{-1}$	1]1000000 shift 2bit sx	0110000

		$1.875*2$ $\Leftarrow$	1110000

Osservazione 3 NON corrispondenza precisione decimale e FP

numero

1) $2,1 = 1,05 * 2^1 \Rightarrow$ 00001100110011…….

2) $1,5= 1,5 * 2^0 \Rightarrow$ 1(0..0) = 1,5

3) $1,8750= 1,875*2^0 \Rightarrow$ 111 (0…0) = 1,875

4) $16,5625=1,035*2^4 \Rightarrow$ 00001001

Corrispondenza precisa

Osservazione 4 La flessibilità nella gestione dei bit
Nell'esempio supponiamo di usare N=7 bit per la mantissa

Origine	norm.	PI	PF	mantissa	stored
2,1	$1{,}05 * 2^1$	10	00011001100..∞	0*000110	2.093
1,5	$1{,}5 * 2^0$	1	100000000000	*1000000	1.5
1,8750	$1{,}875*2^0$	1	111000000000	*1110000	1.8750
16,5625	$1{,}035*2^4$	10000	100100000000	0000*100	16.5

- si considerano i bit della PI (I) da destra
- hidden bit
- si aggiungono N-I bit della PF
- PF descresce al crescere della PI

Osservazione 5 Distanza tra numeri rappresentati

Distanza costante nell'intervallo [1,00….* 2^x e 1,00 * $2^{(x+1)}$[perché hanno lo stesso numero di bit della PF (vedi esponente osservazione 4).

Esempi (FP 32)

Intervallo [1..2[ossia numeri 1,xx $*2^0$
23 bit mantissa per la parte frazionaria
ossia
oltre 8.000.000 configurazioni (frazioni decimali)
ossia
distanza costante tra due numeri rappresentati
= 0,000000119 = 2^{-23}

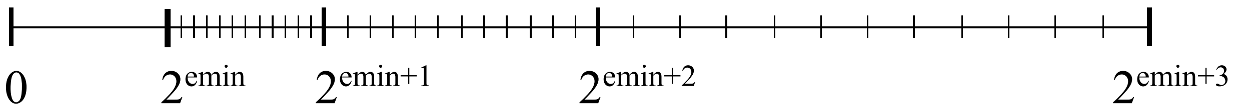
23 bits M	n.rappresentato		n.inserito
0000 0000 0000 0000 0000 000	1.0	⇐	1
0000 0000 0000 0000 0000 001	1.000000119		
…			
0000 0000 0000 0000 0001 000	1.000000953	⇐	1,000001
0000 0000 0000 0000 0001 001	1.000001072	⇐	1,0000011
0000 0000 0000 0000 0001 010	1.000001192	⇐	1,0000012
0000 0000 0000 0000 0001 011	1.000001311	⇐	1,0000013
0000 0000 0000 0000 0001 100	1.000001430	⇐	1,0000014
0000 0000 0000 0000 0001 101	1.000001549	⇐	1,0000015/6
0000 0000 0000 0000 0001 110	1.000001668	⇐	1,0000017
0000 0000 0000 0000 0001 111	1.000001788	⇐	1,0000018
0000 0000 0000 0000 0010 000	1.000001907	⇐	1,0000019
0000 0000 0000 0000 0010 001	1.00000202	⇐	1,000002
…			
0000 0000 0000 0000 0011 001	1.00000298	⇐	1,000003
0000 0000 0000 0000 0011 010	1.00000309		
…			
0000 0000 0000 0000 0100 001	1.00000393		
0000 0000 0000 0000 0100 010	1.00000405	⇐	1,000004

Intervallo [1,0 * 2^{22},1,99999 * 2^{22}] ossia tra 4.194.304 e 8.388607
22 bit utilizzati per la PI e ne rimane 1 per la PF

23 bits M	n. rappresentato	n. inserito
0000 0000 0000 0000 0000 000	4.194.304	4.194.304 … 4.194.304,4
0000 0000 0000 0000 0000 001	4.194.304,5	4.194.304,5 … 4.194.304,9
0000 0000 0000 0000 0000 010	4.194.305	……
0000 0000 0000 0000 0000 011	4.194.305,5	

Distanza costante 0,5

Distribuzione dei numeri rappresentati nel semiasse positivo



Per curiosità
Intervallo [2..4[ossia numeri 1,xx $*2^1$
1 bit mantissa per parte intera
22 bit mantissa per la parte frazionaria
ossia
oltre 4.000.000 configurazioni /2 (ampiezza intervallo)
ossia
2.000.000 per [1,2[e 2.000.000 per [2,3[
(comportamento analogo a quello dell'intervallo precedente)o

Intervallo [≈8milioni – 16777215] ossia 1,xx $*2^{23}$
23 bit mantissa per parte intera
0 bit mantissa per la parte frazionaria rappresentazione interi
Distanza = 1

Osservazione 6 L'errore dell'approssimazione

Errore assoluto costante in ogni intervallo e aumenta col numero

ε (machine epsilon – FLT_EPSILON): distanza tra il numero 1 e quello immediatamente successivo in FP
Es. 1.0000000... 0001 - 1.0000000...0000

	FP32	FP64
$\varepsilon = 2^{-p}$	$\varepsilon = 2^{-23}$	2^{-52}

Distanza tra un valore x e il successivo in FP (**u**nits in **l**ast **p**lace – ulp(x)) ?

$ulp(x) = (1+\varepsilon) * 2^{e} - 1 * 2^{e} = \varepsilon * 2^{e} = 2^{-p} * 2^{e} = 2^{-p+e}$

- $FP32 = 2^{-23+e}$
- cresce al crescere di e
- è costante nell'area di valori che hanno lo stesso valore di e

Esempi su FP 32

numero più piccolo $2^{-23-126} = 10^{-45}$

intervallo [1,2[$2^{-23+0} = 10^{-7}$

intervallo $[2^{23}, 2^{24}[$ ossia [8.388608,16777216[

$=2^{0}\ (2^{-(p-1)+e} = 1) = 1$

numero più grande $2^{-23+127} = 10^{31}$

Errore relativo

$2^{-p+e} / 1 * 2^{e} = 2^{-p}$ **(costante)**

Osservazione 7 Intervallo valori di CP2 e FP32

int 32 $\approx 4 * 10^{9}$

FP 32 <<1 | >>1 $\approx 6.8 * 10^{38}$

8/16mil

Osservazione 8. Corrispondenza biunivoca tra decimale e FP

Si afferma che esiste in FP32(64) con decimali composti da 6/7 (15) cifre decimali.

Significa che la PF può essere composta da 6 cifre decimali?

Intervallo [1,2[sembrerebbe di sì

23 bits M	n.rappresentato		n.inserito
0000 0000 0000 0000 0000 000	1.0	⇐	1
0000 0000 0000 0000 0000 001	1.000000119		
…			
0000 0000 0000 0000 0001 000	1.000000953	⇐	1,000001
0000 0000 0000 0000 0001 001	1.000001072	⇐	1,0000011
0000 0000 0000 0000 0001 010	1.000001192	⇐	1,0000012
0000 0000 0000 0000 0001 011	1.000001311	⇐	1,0000013
0000 0000 0000 0000 0001 100	1.000001430	⇐	1,0000014
0000 0000 0000 0000 0001 101	1.000001549	⇐	1,0000015/6
0000 0000 0000 0000 0001 110	1.000001668	⇐	1,0000017
0000 0000 0000 0000 0001 111	1.000001788	⇐	1,0000018
0000 0000 0000 0000 0010 000	1.000001907	⇐	1,0000019
0000 0000 0000 0000 0010 001	1.00000202	⇐	1,000002
…			
0000 0000 0000 0000 0011 001	1.00000298	1,000003	
0000 0000 0000 0000 0011 010	1.00000309		

- con 7 cifre non c'è biunivocità, ma con 6 sì

Intervallo [1,0 * 2^{22},1,99999 * 2^{22}] ossia tra 4.194.304 e 8.388607
- 22 bit utilizzati per la PI e ne rimane 1 per la PF

0000 0000 0000 0000 0000 000	4.194.304
0000 0000 0000 0000 0000 001	4.194.304,5
0000 0000 0000 0000 0000 010	4.194.305
0000 0000 0000 0000 0000 011	4.194.305,5

Da 6 cifre decimali all'unità

Detta

- p bits della mantissa
- q una precisione decimale

Esiste la corrispondenza se

configurazioni binarie configurazioni decimali

$$2^p \quad >= \quad 10^q$$

Da cui $q = \lfloor p \log_{10}2 \rfloor$ che per p=23/52 ottiene 6/15

Cosa significa

Numeri decimali composti da 6/15 cifre complessive sono in corrispondenza biunivoca .con configurazioni FP32/64

Osservazione 9. A proposito dell'arrotondamento e dell'errore

Se la sequenza dei bit necessari è maggiore dei bit disponibili l'algoritmo approssima attraverso la funzione "round"

Dato x>0

$$x_- \xleftarrow{\text{down, toward 0}} x \xrightarrow{\text{roundup}} x_+$$

round to nearest

Round to nearest

1. Ea(x) $0 <= |x - round(x)| < ulp(x)/2 = 2^{-p+e-1}$
2. Er(x) $= |\,(x - round(x)) \,/\, x|$

dalla 1) e dato che $x > 2^e$ si deriva che:

$Er(x) < 2^{-p+e} / 2^e$ ossia $< 2^{-p-1}$ $(= \varepsilon/2)$

Er(x) è costante e va bene quindi per micro e macro numeri

Non va bene per domini applicativi nei quali il valore dipende da convenzioni

Es. Bounding Box Regione Lombardia del sistema UTM32/WGS84

- $X \in [459.973, 683.970]$
  pi(19bit) pf(33) $Ea=2^{19} * 2^{-23} = 0{,}0625$ 6cm
- $Y \in [4.949.981, 5.169.976]$
  pi(22bit) pf(30) $Ea=2^{22} * 2^{-23} = 0{,}5$ 50cm

Adesso è più chiaro perché….

Esempio 1. round superiore all'unità

```
#include <stdio.h>
int is=0, ix=7,i; float s=0.0, x=7.0;
int main()
{     for(i=1;i<=10000000; i++)  {s=s+x; is=is+ix;}
      printf("is= %d e s= %f",is,s);
}
```

Risultato is= 70.000.000 e s= 77.603.248 (inizio differenza intorno a 16.777.216)

Esempio 2. Denormalizzazione perde numeri piccoli

```
#include <stdio.h>
float a=0.0, b;
int main()
{      for(;;)  {b=a; a=a+1.0; printf("n= %f e n+1= %f",b,a);
                  if(b!=(a-1)) {printf("\ndiversi");exit();}
                }
}
```

Problema a 16777215

Oppure che: numeri distanti o molto vicini tra loro

$$x^2-y^2 \neq (x-y)*(x+y)$$

Esempio 3. Uguaglianza non sempre funziona

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main ()
{float a=.1;float i; printf("\na inizio=%f10\n", a); ⇒ 0.1000001
 for (i=0.1; i!=10.0;i=i+0.1)   {a=a+0.1;  printf("\n%f10", i);}
```

ciclo ∞

passa da 9.90000210 a 10.00000210

Nota: Matlab introduce concetto di tolerance per l’uguaglianza

Esempio 4 Cancellation problem in a-b

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

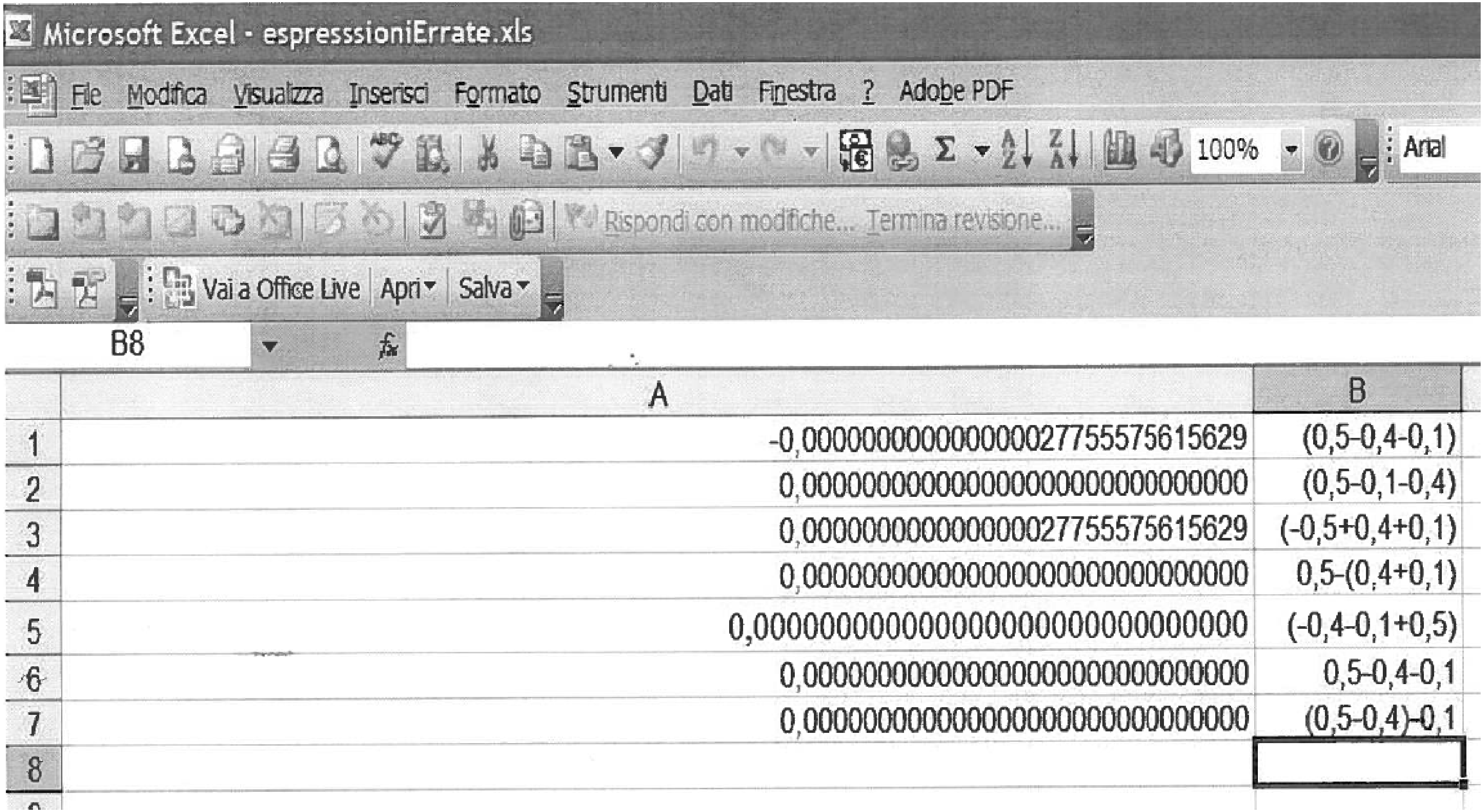
```
#include <stdio.h>   … <math.h>
int main()// derivata di sqrt(x)
{int c;double x, epsilon;   printf("x?");scanf("%lf",&x);epsilon=1.;
 while (epsilon > 1.e-17)
   {printf("\n x= %f, epsilon= %e,derivata=  %f",
              x, epsilon, (sqrt(x + epsilon)-sqrt(x))/epsilon);
     epsilon=epsilon/10.;
    }
}
```

Risultato x?1.

```
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e+000,derivata=  0.414214
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -001,derivata=  0.488088
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -002,derivata=  0.498756
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -003,derivata=  0.499875
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -004,derivata=  0.499988
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -005,derivata=  0.499999
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -006,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -007,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -008,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -009,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -010,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -011,derivata=  0.500000
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -012,derivata=  0.500044
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -013,derivata=  0.499600
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -014,derivata=  0.488498
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -015,derivata=  0.444089
 x= 1.000000, epsilon= 1.000000e -016,derivata=  0.000000
```

Esempio 5


Visita la Gallery Add-On
Italia Cambia | Tutti i siti Microsoft
Supporto tecnico Microsoft
Cerca in Supporto tecnico Microsoft
bing
Home page Supporto tecnico
Centri di supporto
Ricerca avanzata
Acquista prodotti
Identificativo articolo: 78113 - Ultima modifica: giovedì 13 maggio 2010 - Revisione: 7.0
Operazioni aritmetiche dei valori in virgola mobile potrebbe produrre risultati non accurati in Excel
Per visualizzare l'articolo tradotto automaticamente accanto all'originale in inglese, fare clic qui.
Attenzione: Questo è un articolo tradotto in automatico.
Visualizza i prodotti a cui si riferisce l'articolo.
In questa pagina
Espandi tutto | Chiudi tutto
Sommario
Altre risorse
Altri siti di supporto
Community
Richiedi assistenza
Traduzione articoli
Inglese (Stati Uniti)
Centri di supporto tecnico correlati
Excel 2010
Excel
Excel 2007
Excel 2002
Excel 2000



	A	B
1	-0,000000000000000027755575615629	(0,5-0,4-0,1)
2	0,000000000000000000000000000000	(0,5-0,1-0,4)
3	0,000000000000000027755575615629	(-0,5+0,4+0,1)
4	0,000000000000000000000000000000	0,5-(0,4+0,1)
5	0,000000000000000000000000000000	(-0,4-0,1+0,5)
6	0,000000000000000000000000000000	0,5-0,4-0,1
7	0,000000000000000000000000000000	(0,5-0,4)-0,1
8		