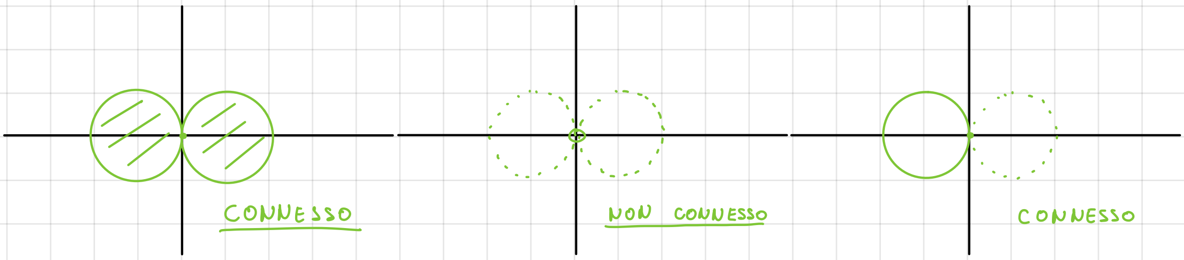
14/09/20

1) Verifica se sono connessi:

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 \le 1 \ \vee\ (x-1)^2+y^2 \le 1\}$$
$$B = \{ \quad '' \qquad '' \ < \qquad '' \ < \ \}$$
$$C = \{ \quad '' \qquad '' \ \le \qquad '' \ < \ \}$$




Nota bene: nessuno degli insiemi è convesso.

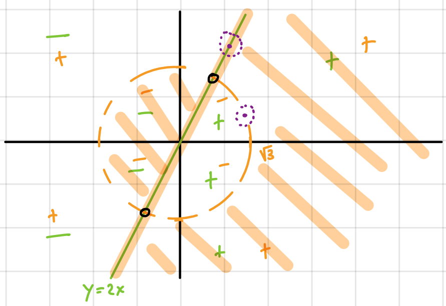
2) Dato $C_n = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le (2-\frac{1}{n})^2\}$, determina $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

Ogni $C_n$ è una circonferenza con raggio crescente $R \to 2$. L'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ viene uguale a $C_\infty = \{ \ '' : x^2+y^2 < 2\}$. L'unione infinita di chiusi non è per forza anch'essa chiusa.

Proprietà è scrivibile come:
1) Unione infiniti aperte è aperta
2) Intersezione infinita di chiusi è chiusa.

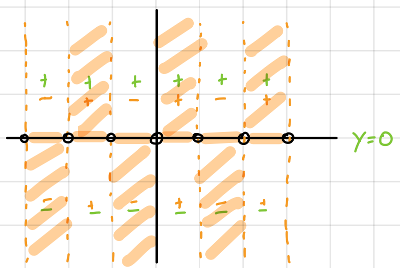
3) Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, determiniamo D

- $f(x,y) = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso ($\partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi
- $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2y-4}} \Rightarrow x^2+2y^2>4 \to$ fuori dall'ellisse di semiasse $a=2$, $b=\sqrt{2} \Rightarrow$ D è aperto, non chiuso, illimitato, connesso per archi.
- $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{2x-y}{x^2+y^2-3}} \Rightarrow \begin{cases} N & 2x-y \ge 0 \\ D & x^2+y^2-3>0 \end{cases} \to \begin{cases} N & y \le 2x \\ D & x^2+y^2>3 \end{cases}$




L'insieme non è aperto ($\exists \partial D \subset D$), non è chiuso ($\exists \partial D \not\subset D$), illimitato, sconnesso per archi

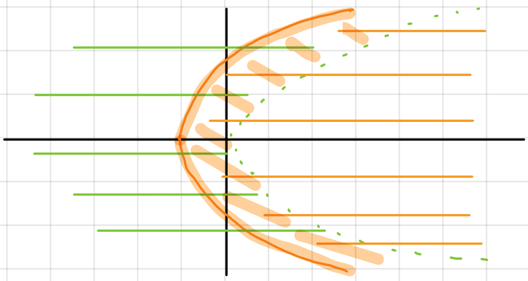
- $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{\sin x}} \Rightarrow \begin{cases} N & y \ge 0 \\ D & \sin x > 0 \to 0+2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{cases}$




Né aperto né chiuso, illimitato, sconnesso per archi

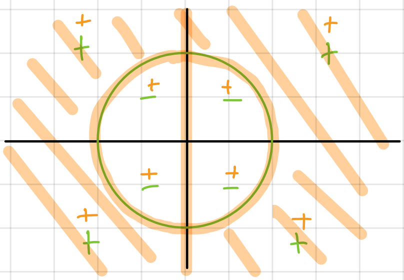
01/19

• $f(x,y)=\sqrt{-\ln(y^2-x)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} -\ln(y^2-x)\geq 0 \to \ln(y^2-x)\leq \ln 1 \to y^2-x\leq 1 \to \begin{cases} x\geq y^2-1 \\ x<y^2 \end{cases} \\ x<y^2 \end{cases}$



Né aperto né chiuso, illimitato, connesso

• $f(x,y)=\sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\Rightarrow$ $F_1$ $|x|\geq 0$
$F_2$ $x^2+y^2-4\geq 0$



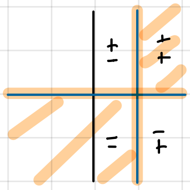
È chiuso, non è aperto, illimitato e connesso per archi

21/09/20

1) Determina dominio, zeri e curve di livello delle seguenti funzioni:

• $f(x,y)=\sqrt{xy-y}+1$

D $xy-y\geq 0 \to y(x-1)\geq 0 \to \begin{cases} y\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$



Dominio chiuso, non aperto e connesso per archi

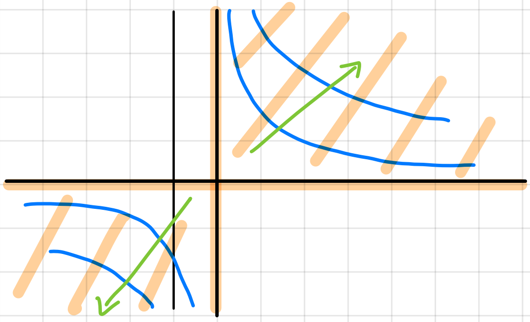
0 ± sempre positiva senza zeri in D

LIVELLI $\sqrt{xy-y}+1=c$ se $c\leq 0$ $E_c=\emptyset$

se $c<1$ $E_c=\emptyset$

se $c\geq 1$ $\longrightarrow$ $xy-y=(c-1)^2 \Rightarrow y=\frac{(c-1)^2}{x-1}$ per $x\neq 1$

$x=1 \iff c=1 \to y(x-1)=0$



• $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D $x^2+y^2>0$ $(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

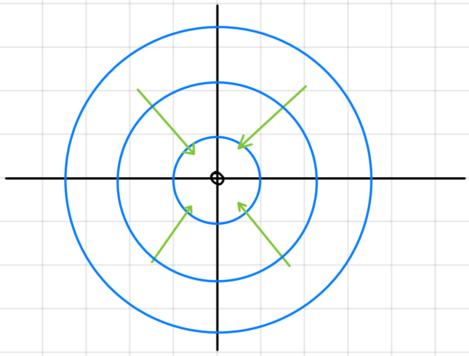
Dominio aperto, non chiuso, illimitato e connesso per archi

± funzione sempre positiva

0 non ci sono zeri

LIVELLI $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$ $c\leq 0$ $E_c=\emptyset$

$c>0$ $\frac{1}{x^2+y^2}=c^2 \to x^2+y^2=\frac{1}{c^2}$



- $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}} - 1$

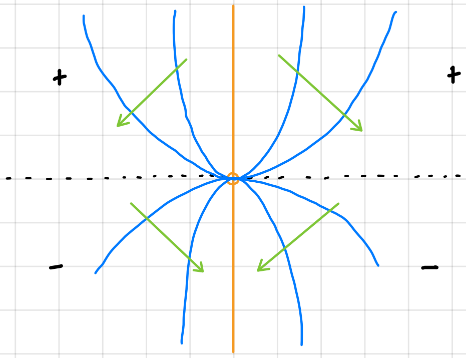
**D** $D = \mathbb{R} \setminus \{y=0\}$ Dominio aperto, non chiuso, illimitato, non connesso per archi

**0** $e^{\frac{x^2}{y}} = 1 \to \frac{x^2}{y} = 0 \quad x=0$

**±** $e^{\frac{x^2}{y}} > e^0 \to \frac{x^2}{y} > 0 \quad y>0$

**LIVELLI** $e^{\frac{x^2}{y}} - 1 = c \to e^{\frac{x^2}{y}} = c+1$ $\quad c \leq -1 \quad E_c = \emptyset$

$c > -1 \quad e^{\frac{x^2}{y}} = c+1 \to \frac{x^2}{y} = \ln(c+1) \to \begin{cases} x=0 & \text{se } c=0 \\ y = \frac{1}{\ln(c+1)} x^2 & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$



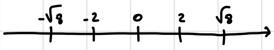

2) Trova gli zeri di $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4$ $(D = \mathbb{R})$

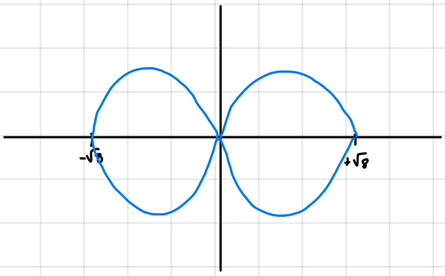
$y^2 = 8x^2 - x^4 \to y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$ ; Studio $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$; l'altra è simmetrica

$y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ PARI, $D = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

$y = 0$ se $x=0$, $x = \pm\sqrt{8}$

$y' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} \geq 0 \iff 4x(4-x^2) \geq 0$




## 28/03/20

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^3 y + x^3}{x^4 + y^2}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$ $\nexists$ lim $\to$ Il limite non esiste

2) Calcola il dominio e verifica la continuità di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$f$ è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$. In $(x,y) = (0,0)$ abbiamo:

$\lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) =$

restringo $y=0$: $\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^6} = 0$

restringo $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2}=0$

restringo $y=mx$: $\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6+m^2x^2} = \dots = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^4+m^2} = 0$

restringo $y=x^3$: $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^6}}{2\cancel{x^6}} = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ poiché $\frac{1}{2} \neq 0$, il limite non esiste $\Rightarrow$ la funzione non è continua in $(0,0)$

3) Calcola se esiste:

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^3}{x^2+y^4} = \dots = 0$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to 0} x = 0$

restringo $x=0$: $\lim_{y\to 0} 0 = 0$

restringo $x=y^2$: $\lim_{y\to 0} \frac{y^{\cancel{6}\,2}}{2\cancel{y^4}} = 0$

Ipotizzo che il limite esista, allora $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ $(\forall \varepsilon \dots)$

Ma: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|x|\cancel{(x^2+y^4)}}{\cancel{x^2+y^4}}$. Siccome $\lim_{x\to 0}|x|=0$, il limite esiste e vale $0$.

4) ...

$$\lim_{x,y\to 0,0} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$$

restrizione $x=0$: $\lim_{y\to 0} e^{-\frac{0}{y^2}} = 1$

$y=x$: $\lim_{x\to 0} e^{-1} = e^{-1}$

$\nexists$ limite

5) ...

$$\lim_{x,y\to 0,0} \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{0} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{y^2}}}_{\nexists}$$

siccome $0 < e^{-\frac{x^2}{y^2}} \leq 1$, il limite esisterà e sarà $0$.

6) Dato $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste e quanto vale

polari: $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\, \rho^3 \sin\theta}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^{5-2\alpha}\cos\theta \sin\theta$

$$\rho^{5-2\alpha} \text{ per } \rho\to 0^+ \begin{cases} \to 0 & \text{se } 5-2\alpha>0 \\ =1 & \text{se } \alpha = \frac{5}{2} \\ \to +\infty & \text{se } 5-2\alpha<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Se } \alpha<\frac{5}{2} & l=0 \\ \text{Se } \alpha \geq \frac{5}{2} & \nexists l \end{cases}$$

7) Calcola il limite se esiste:

$$\lim_{\|x,y\|\to +\infty} e^{-x^2-y^2}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$

polari: $\lim_{\rho\to+\infty} e^{-\rho^2} = 0$ $\forall\theta$ $\Longrightarrow$ il limite esiste e vale $0$

8) ...

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} e^{-x^3-y^3}$$

restringo $y=0$: $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^3} = \begin{cases} 0^+ & x\to-\infty \\ +\infty & x\to+\infty \end{cases} \Longrightarrow \nexists$ limite

9) ...

$$\lim_{x,y\to 2,-1} \frac{(y^2-x^2+3)^2}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

restringo $x=2$: $\lim_{y\to -1} \frac{(y^2-4+3)^2}{(y+1)^2} = \dots = 4$

polari: $\begin{cases} x = 2+\rho\cos\theta \\ y=-1+\rho\sin\theta \end{cases} \to \lim_{\rho\to 0} \frac{[(-1+\sin\theta)^2-(2+\rho\cos\theta)^2+3]^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{[-2\rho\sin\theta-4\rho\cos\theta+\rho^{\cancel{2}}\sin^2\theta-\rho^{\cancel{2}}\cos\theta^2]^2}{\rho^{\cancel{2}}}$

$= \lim_{\rho\to 0}[-2\sin\theta-4\sin\theta+\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta]^2 = [-2\sin\theta-4\sin\theta]^2 \to$ dipende da $\theta$ quindi $\nexists l$

10) Data $f(x,y) = e^{3x+y^2}$, calcolare $\nabla f(0,0)$ e calcolare $D_{\bar v} f(3,-2)$ dato $\bar v = [2,1]^T$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3h}-1}{h} = 3 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = 0 \end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [3,0]$$

Normalizziamo $\bar v$: $\hat v = \begin{bmatrix} 2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \end{bmatrix}$. Avremo che $D_{\hat v} f(3,-2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(3+t\,2/\sqrt5, -2+t\,1/\sqrt5) - f(3,-2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{3(3+\frac{2t}{\sqrt5}) + (-2+\frac{t}{\sqrt5})^2} - e^{13}}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{13 + \frac{2t}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}t^2} - e^{13}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{13}(e^{\frac{2t}{\sqrt5}+\frac{t^2}{\sqrt5}} - 1)}{t} = e^{13} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt5}t + \frac{1}{5}t^2}{t} = \frac{2}{\sqrt5} e^{13}$$

11) Calcolare, se esiste, $\nabla f(0,0)$ con $f(x,y) = y - |x| y^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(0 - |h| 0) - 0}{h} = 0 \quad \text{costante} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(h - 0 \cdot h^2) - 0}{h} = 1 \end{aligned}\right\} \nabla f(0,0) = [0,1]$$

12) Calcola $\nabla f(x,y)$ data $y \sin^2(x^2-y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y\, 2 \sin(x^2-y) \cos(x^2-y)(2x+0) = 4xy \sin(x^2-y)\cos(x^2-y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1 \cdot \sin^2(x^2-y) + y\, 2 \sin(x^2-y)\cos(x^2-y)(-1) = \sin(x^2-y)[1 - 2y\cos(x^2-y)]$$

13) Calcola $\nabla f(x,y)$ data

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{3x^2y(x^6+y^2) - x^3 y\, 6x^5}{(x^6+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x^3(x^6+y^2) - x^3 y\, 2y}{(x^6+y^2)^2} \end{aligned}\right\}$$

Entrambe le derivate non esistono in $(0,0)$. Per calcolare $\nabla f(0,0)$ bisogna usare la definizione ($\nabla f(0,0)$ esiste perché $f \in \mathcal{C}$)

↳ Le regole di derivazioni non sono sempre valide per le funzioni definite a tratti (in questo caso non valgono per $(x,y) = (0,0)$)

14) Calcola $\nabla f(x,y)$ con $f(x,y) = y^x$ (definita per $y>0$)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y^x \ln y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x y^{x-1}$$

## 5/10/20

1) $f(x,y) = e^{3x+y^2}$ ; calcola $D_{\underline v} f(3,-2)$, $\underline v = (2/\sqrt5, 1/\sqrt5)$

$\nabla f(x,y) = [3e^{3x+y^2}; 2ye^{3x+y^2}] \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2$

$D_{\underline v} f(3,-2) = \nabla f(3,-2) \cdot \underline v = \ldots = 2e^{13}/\sqrt5$ (Formula del gradiente)

2) $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ trovare $\alpha$ per continuità; per tale $\alpha$, capire se derivabile in $(0,0)$; l'equazione del piano tangente al grafico in $(-1,0,f(-1,0))$

1) $D = \mathbb{R}^2$, $f$ sicuramente continua in $(x,y) \neq (0,0)$

in $(0,0)$ $\lim_{x,y\to 0,0} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(\frac{1}{h^2}) - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\arctan(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 0$

$t>0$, $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \dots = 0$

$\nabla f(0,0) = \emptyset$

3) $f(-1,0) = \frac{\pi}{4}$ derivo: $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{-2}}[-(x^2+y^2)2x]$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{-2}}[-(x^2+y^2)2y]$ in $(-1,0)$ $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R})$ quindi è differenziabile

$\nabla f(-1,0) = \dots = [1;0] \Rightarrow \pi: \quad z = \frac{\pi}{4} + 1(x+1) + 0(y-0) = \frac{\pi}{4} + (x+1)$

$\hookrightarrow f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)(y-y_0)$

3) $f(x,y) = 2ye^{x^2}$ ; scrivere la retta tangente alla curva di livello di $f$ per $(0,1)$ ($f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2$)

$f(0,1) = \dots = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \cancel{2}ye^{+x^2} = \cancel{2} \to y = e^{-x^2} \to$ uso analisi 1

2° modo: Curva di livello $\perp \nabla f(0,1) \to \nabla f(0,1) = \dots = [0,2] \Rightarrow m=0 \to r: y=1$

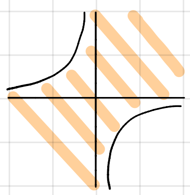
4) $f(x,y) = \frac{\ln(y-2x)}{y^2+x}$ scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello per $(-2,-3)$

$f(-2,-3) = 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left[\frac{\frac{1}{y-2x}(-2)(y^2+x) - 1\log(y-2x)}{(y^2+x)^2} ; \frac{-\frac{1}{y+2x}\cdot 1(y^2+x) - 2y\log(y-2x)}{(y^2+2x)^2}\right] \Rightarrow \nabla f(-2,-3) = [-\frac{2}{7}; \frac{1}{7}]$

trovo direzione $\underline{v} \perp \nabla f(-2,-3) \to -\frac{2}{7}v_x + \frac{1}{7}v_y = 0 \to v_2 = 2v_x \to \underline{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow r: \quad y = -3 + 2(x+2)$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ trova: dominio; continuità; per quali $v$ esiste $D_{\underline{v}} f(0,0)$; se $f$ è differenziabile in $(0,0)$

1) $1+xy > 0 \to xy > -1$



2) $f$ è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$ ; $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$ restringo a $y=0$ : $\frac{\log(1)}{x^2} = 0$ ; restringo a $y=x$ : $\frac{\log(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\nexists \lim$

$\hookrightarrow$ $f$ non è continua in $(0,0)$

3) $\underline{v} = \begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{bmatrix}$, $D_{\underline{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\ln(1+t^2\cos\alpha\sin\alpha)}{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2\cos\alpha\sin\alpha)}{t^3} = \begin{cases} \text{se } \cos\alpha = 0 \lor \sin\alpha = 0 & D_{\underline{v}} f(0,0) = 0 \\ \text{se } \cos\alpha \neq 0 \lor \sin\alpha \neq 0 & \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t^3} = \pm\infty \end{cases}$

$\hookrightarrow$ esistono 4 derivate direzionali: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

4) $f$ non è differenziabile in $(0,0)$ perché $f$ non è continua

6) $f(x,y) = \sqrt[3]{y} \cdot x$ trova se: $f$ è derivabile in $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue in $(0,0)$; $f$ è differenziabile in $(0,0)$

1) $f$ continua in $\mathbb{R}^2$ $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow$ uso la def in $(0,0) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ $\Big\}$ derivabile

2) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ continua in $(0,0)$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$

restringo a $x = \sqrt[3]{y^2}$ : $\lim_{y\to 0} \dots = \frac{1}{3} \neq 0$ $\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$ $\Big\}$ non continua

3) Usiamo la definizione $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)(x-0)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0,0} \frac{\sqrt[3]{y^2}\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

↳ $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\rho \sin\theta}\cdot \rho\cos\theta}{\rho} = 0$

↳ $f$ differenziabile in $(0,0)$ anche se le derivate non sono continue

7) $f(x,y) = xy|x-y|$ dov'è continua, derivabile, differenziabile

continua in $\mathbb{R}^2$

se $x<y \rightarrow f(x,y) = xy^2 - x^2y \Rightarrow \nabla f(x,y) = [y^2-2xy;\ 2xy-x^2] \Rightarrow$ differenziabile

se $x>y \rightarrow$ ... (analogo a sopra) ... differenziabile

se $y=x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0+h)y_0|x_0+h-y_0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2|h|}{h} \rightarrow \begin{cases} \text{se } x_0 \neq 0 & \nexists \frac{\partial}{\partial x} \\ \text{se } x_0 = 0 & \exists \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \text{si verifica } \nabla f(0,0) = [0,0] \end{cases}$

È differenziabile in $(0,0)$? $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{xy|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow$ differenziabile

↳ $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2 \cos\theta\sin\theta\,|\rho\cos\theta - \rho\sin\theta|}{\rho} = 0$

8) $f(x,y) = xy^2 - y^3 + 2x^2$, $g(t) = (1-t^2, t)$. Data $h(t) = (f\circ g)(t)$, calcola $h'(1)$

$g$ è differenziabile in $t=1$, $f$ è differenziabile in $g(t_0)$

↳ $h'(1) = \nabla f(g(1))\cdot g'(1) = [1,-3]\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = -5$

$g'(1) = \dots = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ ; $g(1) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ; $\nabla f(x,y) = [y^2+4x;\ 2xy-3y^2]$; $\nabla f(0,1) = [1;-3]$

9) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x+y^2,\ e^x+2y)$ ; $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $g(u,v) = [\log(u^2+1),\ u-v^2,\ \cos u\sin v]$.
Detta $h = g\circ f$, scrivere $J_h(0,0)$

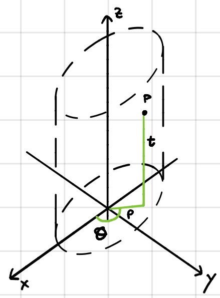
$f$ differenziabile in $(0,0)$ e $f(0,0) = (0,1)$. $g$ è differenziabile in $f(0,0)$.

↳ $J_h(0,0) = J_g(0,0)\cdot J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \\ \cos 1 & 2\cos 1 \end{bmatrix}$

$$J_f(x,y): \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ e^x & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v): \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u^2+1}2u & 0 \\ 1 & -2v \\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v \end{bmatrix} \Rightarrow J_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & \cos 1 \end{bmatrix}$$

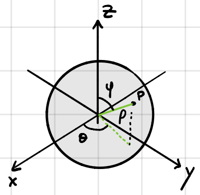
10)




$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \Longrightarrow [0,+\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} \rightarrow f(\rho,\theta,t) = (x(\rho,\theta,t),\ y(\rho,\theta,t),\ z(\rho,\theta,t))$$

$$J_f(\rho,\theta,t) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |J_f(\rho,\theta,t)| = \dots = \rho$$

11)




ρ: distanza da $(0,0)$
θ: sul piano $xy$
φ: misurato rispetto a $z>0$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times [0,2\pi) \to f(x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi))$$

$$Jf(\rho,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix} \to |Jf(\rho,\theta,\varphi)| = \dots = -\rho^2 \sin\varphi$$

## 12/10/20

1) $f(x,y) = \log(x^3 - y)$, $(x_0, y_0) = (-1,-2)$. Trova: a) differenziale secondo in $x_0$ b) polinomio di Taylor di 2° ord in $x_0$ c) formula di Taylor di 2° ord. in $x_0$

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{3x^2}{x^3-y} \,;\, -\frac{1}{x^3-y}\right]$$
↳ $\nabla f(x_0) = [1 ; -1]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{6x(x^3-y) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-y)^2} = \frac{-3x^4 - 6xy}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0) = -15$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = -[-(x^3-y)^{-2}]\, 3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0) = 3$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -\frac{1}{(x^3-y)^2} \to \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0) = -1$$

a) $d^2 f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0)(y-y_0)^2 = -15(x+1)^2 + 6(x+1)(y+2) - 1(y+2)^2$

b) $P_2(x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$

c) $f(x,y) = P_2(x_0) + o(\|x_0\|^2)$

2) $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$, studia differenziabilità, simmetrie; determina estremi

$D = \mathbb{R}^2$, funzione differenziabile (derivate continue): $\frac{\partial}{\partial x} f = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = -2xy\, e^{-x^2-y^2}$
↳ $f \in \mathcal{C}^1$

SIMMETRIE: $f(-x,y) = -x e^{-x^2-y^2} = -f(x,y) \to$ dispari in $x$
$f(x,-y) = x e^{-x^2-y^2} = f(x,y) \to$ pari in $y$ (simmetrico rispetto a $xz$)

ESTREMI: da cercare nei punti stazionari:
$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xy\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right),\ B\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

Classifico usando la mat. Hessiana:
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = -4x e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = (1-2x^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = -2x e^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2}$$
$$Hf\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ minimo}$$
$\Rightarrow$ per la disparità B è massimo

Non ci sono altri estremi. Poiché $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$, si può concludere che gli estremi sono anche globali.

3) $f(x,y) = x^4 + y^2$; determina gli estremi

$D = \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}^2$ $\quad \nabla f(x,y) = [4x^3; 2y] \to$ solo $[0;0] \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ???

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow [0;0]$ è minimo assoluto

4) $f(x,y) = \begin{cases} y \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ; studia continuità, derivabilità e estremi

$D = \mathbb{R}^2$, continua per $x_0 \neq 0$

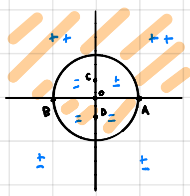
$\lim_{x,y \to 0,0} y \log(x^2+y^2)$ ; $\nexists \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \Rightarrow$ gli estremi sono da ricercare tra i punti di non derivabilità

$\hookrightarrow \lim_{\rho \to 0^+} \rho \sin\theta \log(\rho^2) = 0$

se $x \neq 0$ : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{y \cdot 2x}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f = \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \log(y^2) + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{e} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \log(x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

sfruttiamo il segno:




$A(1,0)$ $C(0,\frac{1}{e})$

$B(-1,0)$ $D(0,-\frac{1}{e})$ $\Rightarrow$

O: sella

A, B: sella

C : minimo almeno relativo

D : massimo almeno relativo

poiché $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$, gli estremi sono per forza relativi

## 13/10/20

1) $f(x,y) = x^2 - y^2$ ; estremi in: 1) D 2) $y = 1-2x$ 3) segmento di estremi $(0,1) - (2,-3)$ 4) $Q = [-1,1] \times [-1,1]$
5) $x^2+y^2 = 4$

1) Dominio $\mathbb{R}^2$ ; $C^\infty$. Unico punto critico è $(0,0)$ ed è una sella.

2) La retta è un vincolo di uguaglianza esplicitabile.

$f|_r = f(x, 1-2x) = x^2 - (1-2x)^2 = -3x^2 + 4x - 1 \rightarrow f'|_r = -6x + 4 \rightarrow$ Max assoluto in $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

3) Troviamo l'equazione della retta passante per i due punti: $r$: $y = 1-2x$. Studiamo poi cosa succede per $x \in [0,2]$

$f'|_r = -6x + 4$

$\hookrightarrow$ $0 \nearrow \frac{2}{3} \searrow 2$ $\Rightarrow$ abbiamo un max assoluto in $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ e due candidati a minimo:

$f(0,1) = -1$ ; $f(2,-3) = -5$ $\Rightarrow$ $(2;-3)$ è un punto di minimo assoluto e $(0,1)$ è minimo relativo

4) Q è il prodotto cartesiano tra due intervalli: abbiamo definito un quadrato. All'interno del quadrato sappiamo da 1) che abbiamo una sella in $(0,0)$.

Per studiare il bordo parametrizziamo i segmenti. Poiché la funzione è pari in x e y, studiamo due lati:

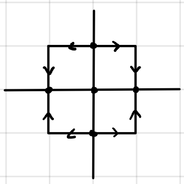
- $\gamma_1 = \begin{cases} x = 1 \\ y = t & -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_1} = f(1,t) = 1 - t^2 \rightarrow f'|_{\gamma_1} = -2t \geq 0$ per $t \leq 0$

$\hookrightarrow$ $-1 \nearrow 0 \searrow 1$

- $\gamma_2 = \begin{cases} y = 1 \\ x = t & -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f|_{\gamma_2} = f(t,1) = t^2 - 1 \rightarrow f'|_{\gamma_2} = 2t \geq 0$ per $t \geq 0$

$\hookrightarrow$ $-1 \searrow 0 \nearrow 1$

Per simmetria vale anche per i segmenti rimanenti.

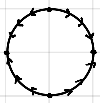


$(0,1)$ e $(0,-1)$ candidati minimi: $f(0,1) = f(0,-1) = -1$

$(1,0)$ e $(-1,0)$ candidati massimi: $f(1,0) = f(-1,0) = 1$

5) $\mathcal{C} = \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$ $\quad f|_{\mathcal{C}} = 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 4\cos(2\theta) \to f'|_{\mathcal{C}} = -4\sin(2\theta)\cdot 2 \geq 0$ per $\frac{\pi}{2}+k\pi \leq \theta \leq \pi + k\pi$

↳ $0 \to \frac{\pi}{2} \to \pi \to \frac{3}{2}\pi \to 2\pi$



→ $(2,0)$ e $(-2,0)$ sono massimi assoluti
$(0,2)$ e $(0,-2)$ sono minimi assoluti

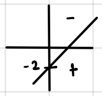
2) $f(x,y) = |y|(x-y-2)$ determina gli estremi in 1) D 2) triangolo T (bordo e area) che $r: y = -x-2$ forma con gli assi

1) $D = \mathbb{R}^2$; non è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ → i punti di non derivabilità $(y=0)$ possono essere massimi o minimi.

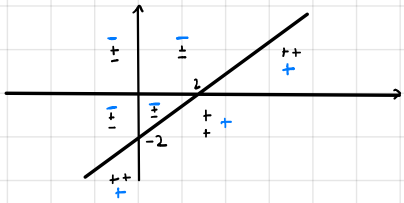
se $y>0$ $f(x,y) = xy - y^2 - 2y$ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ !! $y=0$, non accettabile

analogo per $y<0$. Non esistono punti critici.

Studio il segno: $|y| \geq 0$
$x - y - 2 \geq 0 \to y \leq x-2$

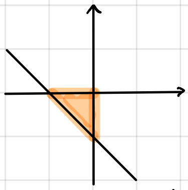


→



$\begin{cases} \text{se } x<2 & \text{max relativo} \\ \text{se } x>2 & \text{min relativo} \end{cases}$

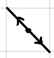
2) vincolo:



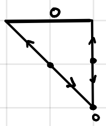
Vale Weierstrass. In 1) abbiamo capito che nell'area non ci sono estremi.

Studiamo il bordo. Per quanto già visto, $H=0$ assunto lungo l'asse x e in $(0,-2)$. Studiamo gli altri lati.

- $\gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t & -2 \leq t \leq 0 \end{cases} \to f|_{\gamma_1} = f(0,t) = |t|(-t-2) \overset{t\leq 0}{=} t^2 + 2t \to f'|_{\gamma_1} = 2t+2 \geq 0$ per $t \geq -1$
↳ $-2 \to -1 \to 0 \Rightarrow$ ↕
- $\gamma_2 = \begin{cases} x = t & -2 \leq t \leq 0 \\ y = -2-t \end{cases} \to f|_{\gamma_2} = f(t,-2-t) = |-2-t|(t \cancel{+2} + t \cancel{-2}) \overset{t\leq 0}{=} (2+t)2t = 2t^2 + 4t \to f'|_{\gamma_2} = 4t+4 \geq 0$ per $t \geq -1$
↳ $-2 \to -1 \to 0 \Rightarrow$



Incollando il tutto:



$(-1,-1)$ e $(0,-1)$ candidati a minimo: $f(-1,-1) = -2$; $f(0,-1) = -1 \Rightarrow$ $(-1,-1)$ è min assoluto
$(0,-1)$ è min relativo

3) $f(x,y) = xy + 4$; determinare estremi assoluti sull'ellisse $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$

Non riesco a parametrizzare l'ellisse. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange:

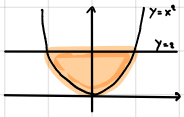
1) verifichiamo l'ipotesi: $\nabla g = [2x-y, 2y-x] = \underline{0} \iff (x,y) = \underline{0}$ ma $g(0,0) \neq 0$, quindi le ipotesi sono soddisfatte

2) $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f - \lambda \frac{\partial}{\partial y} g = 0 \\ g = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \to (y-x) + 2\lambda(y-x) + \lambda(y-x) = 0 \longrightarrow (y-x)(1+3\lambda) = 0$

$\begin{cases} y = x \\ x - \lambda x = 0 \\ x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} \lambda = 1 \\ x = \pm 1 \end{matrix} \Rightarrow (1, 1, \cancel{1})$; $(-1, -1, \cancel{1})$ → $\begin{cases} f(1,1) = 5 \to \text{massimo assoluto} \\ f(-1,-1) = 5 \end{cases}$

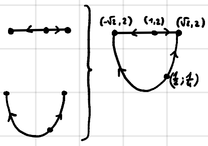
$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ x + \frac{2}{3} y - \frac{1}{3} x = 0 \\ x^2 + x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} y = -x \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cancel{-\frac{1}{3}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cancel{-\frac{1}{3}}\right)$ → $\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \to \text{minimo assoluto} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11}{3} \end{cases}$

4) $f(x,y) = (x-1)^2 + y$ ; estremi assoluti in $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2 \}$

L'insieme E equivale a:  . Vale Weierstrass.

Studiamo l'interno: $\nabla f = [2(x-1), 1] \ne 0 \quad \forall (x,y)$
Studiamo il bordo:

- $\gamma_1$ : $\begin{cases} y = 2 \\ x = t \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow f|_{\partial_1} = f(t,2) = (t-1)^2 + 2 \rightarrow f'|_{\partial_1} = 2(t-1) \ge 0 \iff t \ge 1$
  ↳ $-\sqrt{2} \searrow 1 \nearrow \sqrt{2} \Rightarrow$
- P : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \rightarrow f|_P = f(t,t^2) = (t-1)^2 + t^2 \rightarrow f'|_P = 2t - 2 + 2t = 4t - 2 \ge 0 \iff t \ge \frac{1}{2}$
  ↳ $-\sqrt{2} \searrow \frac{1}{2} \nearrow \sqrt{2} \Rightarrow$



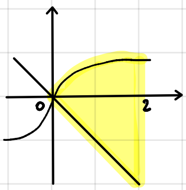
$(-\sqrt{2},2), (\sqrt{2},2)$ max
$(1,2), (\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ min

Eseguendo le sostituzioni abbiamo che $(-\sqrt{2},2)$ è max assoluto e $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ è minimo assoluto.

## 26/10/20

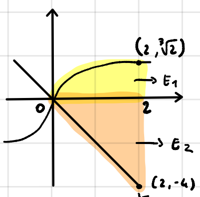
1) Cambiare l'ordine di integrazione: $\int_0^2 \left( \int_{-2x}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\, dy \right) dx$

Abbiamo $E = \{ 0 \le x \le 2,\ -2x \le y \le \sqrt[3]{x} \}$
↳ y - semplice



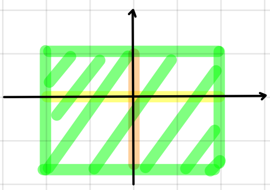
Scambiare l'ordine di integrazione prevede una riparametrizzazione x - semplice:

$E = E_1 \cup E_2$
↳ $E_1$: $0 \le y \le \sqrt[3]{2} \qquad y^3 \le x \le 2$
↳ $E_2$: $-4 \le y < 0 \qquad -\frac{1}{2}y \le x \le 2$



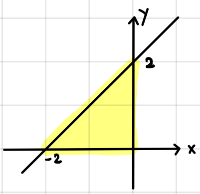
Possiamo quindi scrivere $\iint_E f(x,y) = \iint_{E_1} f(x,y) + \iint_{E_2} f(x,y) \Rightarrow \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left[ \int_{y^3}^2 f(x,y)\,dx \right] dy + \int_{-4}^0 \left[ \int_{-\frac{1}{2}y}^2 f(x,y)\,dx \right] dy$

2) Calcola $\iint_E \frac{\sin x}{1+y^2}\,dx\,dy$ , $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2 \ \wedge\ -\frac{3}{2} \le y \le 1 \}$

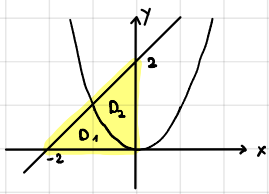


→ Sia x che y semplice $\Rightarrow \int_{-2}^2 \int \frac{\sin x}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_{-2}^2 \sin x \left( \int_{-3/2}^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy \right) dx = \int_{-2}^2 \sin x\,dx \int_{-3/2}^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy$
Calcolando otteniamo $\int_{-\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{1+y^2}\,dx\, [-\cos x]_{-2}^{2} = 0$
↳ Potevamo capirlo da disparità in x + intervallo simmetrico a $(0,0,0)$

3) Calcola $\iint_D |x^2 - y|\,dx\,dy$ con D triangolo formato a $y = x+2$ e gli assi



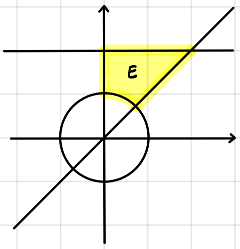
Distinguiamo i casi: $\begin{cases} x^2 - y & \text{se } x^2 - y \ge 0 \quad y \le x^2 \\ -x^2 + y & \text{se } x^2 - y < 0 \quad y > x^2 \end{cases}$



Quindi dobbiamo calcolare $\iint_{D_1} (x^2 - y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (-x^2 + y)\,dx\,dy$:

$\left. \begin{array}{lll} D_1: & 0 \le y \le 1 & y - 2 \le x \le -\sqrt{y} \\ D_2: & -1 \le x \le 0 & x^2 \le y \le 2 + x \end{array} \right\}$ $\int_0^1 \left[ \int_{y-2}^{-\sqrt{y}} (x^2 - y)\,dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[ \int_{x^2}^{2+x} (-x^2 + y)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} - yx \right]_{y-2}^{-\sqrt{y}} dy + \int_{-1}^0 \left[ -x^2 y + \frac{y^2}{2} \right] dx =$
$= \int_0^1 \left[ -\frac{y\sqrt{y}}{3} + y\sqrt{y} - \frac{(y-2)^3}{3} + y(y-2) \right] dy + \int_{-1}^0 \left[ -x^2(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} + x^4 - \frac{x^4}{2} \right] dx = \dots$

4) $\iint_E \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ , E insieme il cui bordo è la retta $y=x$, la retta $y=2$, l'asse y e la circonferenza $x^2+y^2=1$




$E=\{(x,y):\ x\geq 0;\ x^2+y^2\geq 1;\ y\geq x;\ y\leq 2\}$

In E la funzione è continua e limitata. Inoltre $f(x,y)\geq 0$ in E.

Scriviamo $f(x,y)\,dx\,dy$ in polari: $\frac{2\rho\cos\theta}{\rho}\cdot|\rho|\,d\rho\,d\theta$

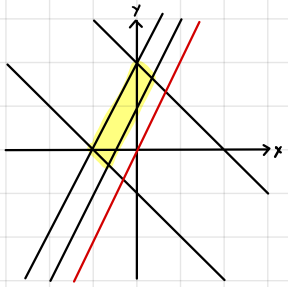
Scriviamo E in polari: $E=\{\rho\cos\theta\geq 0;\ \rho^2\geq 1;\ \rho\sin\theta\geq\rho\cos\theta;\ \rho\sin\theta\leq 2\}$

$$\hookrightarrow\begin{cases}\cos\theta\geq 0\\ \sin\theta\geq\cos\theta\\ \rho\geq 1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\\ \rho\geq 1\end{cases}\Rightarrow\ \rho\leq\frac{2}{\sin\theta}$$

$\hookrightarrow E=\{(\rho,\theta):\ \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2};\ 1\leq\rho\leq\frac{2}{\sin\theta}\}$

Calcoliamo l'integrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\frac{2}{\sin\theta}}2\cos\theta\,\rho\,d\rho=\ldots=\frac{9}{2}\sqrt{2}-5$

5) $\iint_D \frac{x+y}{2x-y}\,dx\,dy$ $\quad D=\{(x,y):\ -1-x\leq y\leq 2-x,\ \ 2x+1\leq y\leq 2x+2\}$




$\rightarrow$ C.E $y\neq 2x$ rispettata in D

D: $-1\leq x+y\leq 2$ e $-1\leq 2x-y\leq -2$ $\Rightarrow$ Cambio variabili in $u=x+y$ e $v=2x-y$

$\hookrightarrow\tilde{D}=\{u,v:\ -1\leq u\leq 2;\ -2\leq v\leq -1\}$ e $\tilde{f}(u,v)=\frac{u}{v}$

Calcoliamo la Jacobiana in termini di $u=x+y$ e $v=2x-y$:

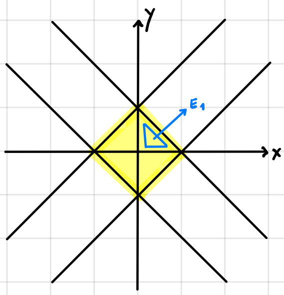
$$\begin{cases}u=x+y\\ v=2x-y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}v\\ y=u-x=\frac{2}{3}u-\frac{1}{3}v\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3} & \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3}\\ \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2}{3} & \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{3}\end{bmatrix}\rightarrow|\det(J)|=\frac{1}{3}$$

Scriviamo l'integrale: $\int_{-1}^{2}\left[\int_{-2}^{-1}\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3}dv\right]du=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}u\,du\int_{-2}^{-1}\frac{dv}{v}=\frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{2}\left[\ln(v)\right]_{-2}^{-1}=\ldots=-\frac{\log 2}{2}$

6) $\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $\quad E=\{(x,y):\ |x|+|y|\leq 1\}$

Studiamo i vari casi

$\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+y\leq 1\end{cases}$ | 1° quad $\quad\begin{cases}x<0\\ y\geq 0\\ -x+y\leq 1\end{cases}$ | 2° quad $\quad\begin{cases}x<0\\ y<0\\ -x-y\leq 1\end{cases}$ | 3° quad $\quad\begin{cases}x\geq 0\\ y<0\\ x-y\leq 1\end{cases}$ | 4° quad



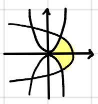

$\rightarrow$ x e y pari

Possiamo calcolare l'integrale facendo $4\iint_{E_1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$ : $E_1$: $0\leq x\leq 1$ , $0\leq y\leq 1-x$ $\rightarrow 4\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\right]dx=\ldots=\frac{2}{3}$

2/11/20

1) $E=\{x,y:\ |y|\leq x^2\ \wedge\ 0\leq x\leq 2-y^2\}$. Trova baricentro con densità omogenea.

$-x^2\leq y\leq x^2$ $\quad 0\leq x\leq 2-y^2$ $\rightarrow$

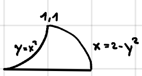


Baricentro $(\bar{x},\bar{y})$: $\quad\bar{y}=0\ \Rightarrow$ E simm. rispetto a $y=0$

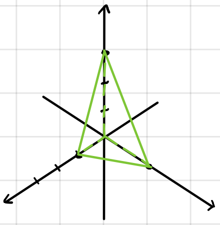
$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_E x\,dx\,dy$ ; $M=\iint_E\delta\,dx\,dy=\iint_E dx\,dy=2$ $\quad |E|$

$\hookrightarrow\bar{x}=\frac{2}{|E|}\iint_{E_{\geq 0}}x\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^{2-y}x\,dx\right]dy=\ldots=\frac{71}{60}$

Baricentro: $(\frac{71}{60};0)$



2) Parametrizzare per fili e per strati la piramide di vertici $0$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$



Per fili: $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y) \rightarrow 0 \le z \le \frac{6-6x-3y}{2}$

L'integrale di $f(x,y)$ sarebbe: $\int_0^1 \left\{ \int_0^{2-2x} \left[ \int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right\} dx$

Per strati: fisso $0 \le z \le 3$, analizzo lo strato a quel livello: $y = \frac{6-6x-2z_0}{3}$ e $x = 1 - \frac{1}{3}z$

Abbiamo $0 \le x \le 1 - \frac{1}{3}z$ e $0 \le y \le \frac{6-6x-2z}{3}$

L'integrale di $f(x,y,z)$ sarebbe: $\int_0^3 \left\{ \int_0^{1-\frac{1}{3}z} \left[ \int_0^{\frac{6-6x-2z}{3}} f(x,y,z)\, dy \right] dx \right\} dz$

3) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = y - x$ nella regione compresa tra $[0,1]\times[0,1]$ in $xy$ e $z = x^2+y^2$

Per fili: $0 \le z \le x^2+y^2 \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} (y-x)\, dz\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 (y-x)[z]_0^{x^2+y^2} dx\, dy = \dots = 0$

4) $\iiint_E (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ ; $E = \{ x,y,z : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \}$

Cono Semisfera

$\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow x^2+y^2 \le 2 \Rightarrow$ Parametrizziamo per polari nel piano + fili per $z$ → cilindriche o per sferiche.

$x^2+y^2 = \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = \rho^2 \sin^2\varphi \rightarrow f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \tilde{f}(\rho,\theta,\varphi)\, \rho \sin^2\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

$E = \{ \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi} \le \rho\cos\varphi \le \sqrt{4-\rho^2\sin^2\varphi} \}$ , $\theta \in [0; 2\pi]$

$$\begin{cases} \rho\sin\varphi \le \rho\cos\varphi \\ \rho\cos\varphi \le \sqrt{4-\rho^2\sin^2\varphi} \\ \rho\sin\varphi \le \sqrt{4-\rho^2\sin^2\varphi} \end{cases}$$

C.E. $\rho^2 \sin^2 \le 4$ ✓ poiché $0 \le \rho \le 2$

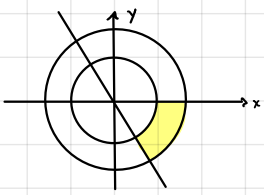
$\rightarrow \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

Le 3 coordinate sono indipendenti

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^2 \rho^4 \sin^3\varphi\, d\rho \right] d\varphi \right\} d\theta = \int_0^2 \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \dots = \frac{64}{5}\pi \left[ \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\sqrt{2} \right]$$

5) Integrare $f(x,y,z) = \frac{z^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2(z^2+1)}$ in $D = \{ x,y,z : 1 \le x^2+y^2 \le 3 ; -\sqrt{3}x \le y \le 0 , 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \}$. Si suggerisce di rappresentare la proiezione di $D$ in $xy$.

$1 \le x^2+y^2 \le 3$ è una corona circolare; $-\sqrt{3}x \le y \le 0$ è sopra la retta $y = -\sqrt{3}x$ e sotto $y = 0$:




Sopra $xy$ si sviluppa un cono.

Usiamo le coordinate cilindriche: $1 \le \rho^2 \le 3$ , $-\sqrt{3}\rho\cos\theta \le \rho\sin\theta \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \le 0 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge -\sqrt{3}\cos\theta \end{cases} \rightarrow -\frac{\pi}{3} \le \theta \le 0$

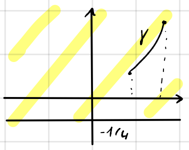
$f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{z^2 \cdot \sqrt{\rho^2}}{\rho^2\cos^2\theta\, (z+1)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \left\{ \int_1^{\sqrt{3}} \left[ \int_0^\rho \frac{z^2\, dz}{\cos^2\theta\, (z^2+1)} \right] d\rho \right\} d\theta =$

$= \int_1^{\sqrt{3}} \left[ \int_0^\rho \frac{z^2}{z^2+1} dz \right] d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \dots$

## 16/11/20

1) Calcolare $\int_\gamma \frac{\log(1+x)}{xy\sqrt{1+4y}} ds$ con $\gamma : (y = x^2, [1,2])$

C.E.: $\begin{cases} (x,y) \neq 0 \\ y > -1 \\ y > -\frac{1}{4} \end{cases}$




→ F continua su $\gamma$. Inoltre $r'(t) = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases}$ regolare e $\|r'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

$$\int_\gamma F(x,y)\, ds = \int_1^2 F(x(t), y(t)) \sqrt{1+4t^2}\, dt = \dots$$

2) Calcolare il baricentro della circonferenza $C(0,0)$ $R=1$ $\{x = \cos\theta \; ; \; y = \sin\theta\}$ dotata di densità $\delta = 1-x$

La densità sarà compresa tra $0 \le \delta \le 2$

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\sin\theta \\ y'(\theta) = \cos\theta \end{cases} \rightarrow \|r'(\theta)\| = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} M = \int_\gamma (1-x)\,ds = \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\,d\theta = \dots = 2\pi \\ \bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma x\delta\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta - \cos^2\theta\,d\theta = \dots = -\frac{1}{2} \\ \bar{y} = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma x\delta\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta - \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0 \end{array} \Bigg\} \; (\bar{x},\bar{y}) = (\tfrac{1}{2}, 0)$$

3) $\int_\gamma x^2\sqrt{y}\,ds$ con $\gamma$ arco di $y=x^2$ da $[-1,0]$ percorsa dall'origine al punto $(-1,1)$.

L'integrale di linea di primo specie non varia al variare del verso della curva.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ regolare e F continua su } \gamma \; ; \; \|r'(t)\| = \sqrt{1-4t^2}$$

$$\hookrightarrow \int_\gamma x^2\sqrt{y}\,ds = \int_{-1}^{0} t^2 \underbrace{\sqrt{t^2}}_{=|t|=-t} \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_{-1}^{0} -t^3\sqrt{1+4t^2}\,dt = \dots = -\frac{1}{8}\left[0 - \frac{1}{15} - \frac{2}{3}5^{3/2} + \frac{1}{15}5^{3/2}\right]$$

## 23/11/20

1) Calcolare la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

In analisi 1 abbiamo dimostrato che essa converge. Riconosciamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con $R=\infty$. Essa ha somma $e^x$.
Quindi la nostra serie ha somma $e^3$

2) Determina l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+3)^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty \rightarrow R=0$$ quindi l'insieme di convergenza è $\{-3\}$

3) Determina l'intervallo di convergenza e la somma di $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e calcola $\int_0^1 f(\frac{x^2}{4})\,dx$

Abbiamo una serie geometrica. $R=1$ e $x_0=0$ quindi converge in almeno $(-1;1)$. Agli estremi otteniamo una serie irregolare e una divergente, quindi converge solo in $(-1;1)$.

La somma è $f(x) = \frac{1}{1-x}$ uguaglianza valida in $x \in (-1,1)$

$$\int_0^1 f\left(\frac{x^2}{4}\right)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{4^n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)4^n}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n} \rightarrow \text{La somma si calcola come } \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$$

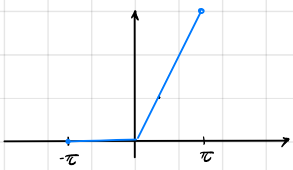
$\hookrightarrow -1 < \frac{x^2}{4} < 1 \rightarrow -2 < x < 2$ ✓ integrale fattibile

4) Calcolare a meno di $\varepsilon = 10^{-3}$ $\int_0^1 \cos x^2\,dx$

Sappiamo che $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Questa serie ha $R=\infty$. Quindi possiamo fare $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}\,dx$ ottenendo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 x^{4n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!(4n+1)}$. Dal criterio di Leibniz sappiamo che $|s-s_n| < b_{n+1}$, nel nostro caso $b_n = \frac{1}{(2n)!(4n+1)}$. Dobbiamo trovare $b_{n+1} < 10^{-3}$ $\rightarrow$ per $N=2$ $b_{N+1} < 10^{-3}$ e quindi $S \cong +1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{24 \cdot 9}$

5) Data $f(x)$ $2\pi$-periodica tale che $f|_{[-\pi,\pi)} = x + |x|$ disegnare il grafico e scriverla come serie di Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 2\pi & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

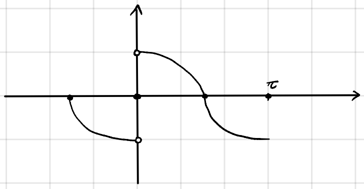


$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \dots = \pi$$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos Kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x \cos Kx = \dots = \begin{cases} 0 & K - \text{pari} \\ -\frac{4}{\pi K^2} & K - \text{dispari} \end{cases}$$

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin Kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x \sin Kx = \dots = -\frac{2}{K}(-1)^K$$

6) $f|_{[0,\frac{\pi}{2}]} = \cos x \;,\; f(Kx) = 0$




$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \overset{\text{dispari}}{=} 0$$

$a_K = 0$

$$b_K = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2Kx)\,dx = \dots = -2K$$