

C RITERIO DEL RAPPORTO O DELLA RADICE

Lia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Lia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ o $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Si

1) $b > 1 \Rightarrow a_n$ non tende a 0, quindi la serie diverge

2) $b < 1 \Rightarrow a_n$ tende a 0, quindi la serie converge.

3) $b = 1 \Rightarrow$ NULL

DIM. RAD) Lia $b = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Se $b > 1$, allora $\lim a_n = +\infty$. Se $b < 1$, esiste $\epsilon \in \mathbb{R}$ compreso tra $b+1$ e $q+1$. Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - b| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < a_n - b < \epsilon \Rightarrow$
 $\rightarrow \sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{b} < \epsilon \Rightarrow a_n < (\epsilon+q)^n$. Per ϵ piccolo, $\epsilon+q < 1$. Usando il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon+q)^n$ è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge. Poiché a_n è minorata da $(q+\epsilon)^n$, anche a_n converge.

RAP) Lia $b = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Esiste allora $b < q+1$. Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - b| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < a_n - b < \epsilon \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \epsilon + b < \epsilon + q$. Poiché lavoriamo con termini positivi, abbiamo che $a_{n+1} < a_n(\epsilon+q)$. $\forall n > n_0 \Rightarrow a_{n+1} < a_{n_0}(\epsilon+q)$, $a_{n+2} < a_{n_0}(\epsilon+q) < a_{n_0}(\epsilon+q)^2$. Così poniamo oltre che $a_n < (\epsilon+q)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall K > n_0$. Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon+q)^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{(\epsilon+q)^{n_0}} \sum_{k=0}^{\infty} (\epsilon+q)^k$. La serie è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge. Di conseguenza anche a_n converge in quanto minorata da una serie convergente.

C RITERIO DI CONDENSAZIONE (SOSTITUZIONE)

Lia una serie a termini positivi con a_n non costante. La serie converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n$ converge.

DIVERGENZA SERIE ARMONICA

Consideriamo $b_K = (1 + \frac{1}{K})^K$. Supponiamo due definitivamente $(1 + \frac{1}{K})^K \xrightarrow{(VK, R)} e$. Abbiamo $\ln(1 + \frac{1}{K})^K \leq \ln e \rightarrow K \ln(1 + \frac{1}{K}) \leq 1 \rightarrow \ln(1 + \frac{1}{K}) \leq \frac{1}{K} \rightarrow \ln \frac{K+1}{K} \leq \frac{1}{K} \rightarrow$
 $\rightarrow \left[\ln K + \ln \frac{K+1}{K} \leq \frac{1}{K} \right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow$ la serie $\ln(K+1) - \ln(K)$ diverge. Anche $\frac{1}{K}$, allora diverge $\forall K > \bar{K}$
 Sarebbe telescopica: $(\ln K - \ln K+1) \Rightarrow -(-\ln K+1) = \ln(K+1)$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, per $\alpha \leq 1$ la serie diverge e per $\alpha > 1$ la serie converge.

DIM: Se $\alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$ poiché $n \leq n$. Allora per il criterio del confronto la serie diverge.

Se $\alpha > 1$, definiamo la successione delle somme parziali $S_K = 1 + (\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}) + (\frac{1}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{2k-1}}) + (\frac{1}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{2k+1}}) \leq 1 + 2 \frac{1}{2^{\alpha}} + 4 \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha})^2} + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^p$
 $S_K = \sum_{n=0}^K \left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^p \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^K \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^p$. Il secondo, però, è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, quindi converge. Perciò, per criterio del confronto anche S_K converge e quindi la serie converge.

SERIE A TERMINI NEGATIVI

Si dice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini negativi se $a_n < 0 \forall n$. Una serie a termini negativi può essere riservata in una a termini positivi:
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con $b_n = -a_n > 0 \forall n$.

SERIE DI TERMINI DI SEGNO VARIABILE

Una serie di segno variabile è ciò che modifica il nome. Una serie a segno variabile, oltre di essere divergente o convergente, può anche essere irregolare.
 La condizione necessaria di convergenza continua a valere.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Per le serie positive, allora la convergenza assoluta e quella semplice (convergenza "normale") coincidono. Stessa cosa per le serie negative.

Per le serie a segno variabile le cose sono più complicate

RELAZIONE CONVERGENZA SEMPLICE - ASSOLUTA.

Ciò una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ che converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.

DIM. Scriviamo $(a_n + |a_n|) - |a_n|$ da nostra serie sarà $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, la seconda converge per ipotesi. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |a_n|)$ è positiva ($(a_n - |a_n|) \geq 0 \forall n$), in più $|a_n - |a_n|| \leq 2|a_n| \forall n$. Avremo, quindi, che $\sum_{n=0}^{\infty} |(a_n - |a_n|)| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dato che la seconda converge per ipotesi, anche la prima converge per criterio del confronto. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

ESEMPIO: Data $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. La serie è a segno variabile \Rightarrow studio la convergenza assoluta. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \Rightarrow$ usiamo il confronto: $|\cos(n)| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge.

SERIE A SEGNO ALTERNATO

Una $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dice a segno alternato se $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n > 0 \forall n$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Ciò data una serie a segni alternati $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n > 0 \forall n$. Se valgono queste, la serie converge semplicemente:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$2) b_n \text{ è monotona decrescente}$$

CONVERGE $\lim s_{2n} = \bar{s}$

DIM. Consideriamo a_n decrescente tale che $S_K = S_{K-1} + (-1)^K a_K \Rightarrow \begin{cases} S_{2h} < S_{2h+1} + a_{2h} \Rightarrow S_{2h-2} + (a_{2h} - a_{2h-2}) < S_{2h-2} \Rightarrow \text{decresce} \Rightarrow \overline{s}_{2h} \leq \underline{s}_0, \overline{s}_{2h} \leq \underline{s}_{2h-2} - a_h \leq \dots \leq \underline{s}_1 \cdot a_m \\ S_{2h+1} = S_{2h} - a_{2h+1} = S_{2h-1} + (a_{2h} - a_{2h+1}) > S_{2h-1} \Rightarrow \text{crecente} \Rightarrow \underline{s}_{2h+1} > \underline{s}_1, \overline{s}_{2h+1} > \overline{s}_{2h} - a_{2h+1} \geq \dots \geq \overline{s}_0 \text{ armon} \end{cases}$

Quindi $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim a_h = 0$ ma $\lim (S_{2h} - S_{2h+1}) = \lim S_{2h} - \lim S_{2h+1} = \bar{s} - \tilde{s} = 0 \Rightarrow \bar{s} = \tilde{s} \Rightarrow S_n \text{ converge}$ CONVERGE $\Rightarrow \lim s_{2n+1} = \bar{s}$

FUNZIONI REALI A VARIABILE REALE

Sono funzioni del tipo $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Si diano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, si definisce $g(f(x))$ se $A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f(g(x))$ se $B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} g(B) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$.

Non vale la commutatività fra f e g .

Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall I(x_0)$ questo ha intersezioni non vuote con A .

Limite di Funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Si dice che f ha limite l per x che tende a x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$) se:

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

OSS: x_0 non deve pur forza appartenere ad $A \Rightarrow f(x_0)$ può anche non avere significato.

Il limite è una "distanza": $|f(x) - l| < \varepsilon$ significa che la distanza tra le due è zero nulla.