14/09

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Intorni in n dimensioni

Come visto in algebra, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e quindi norma (distanza). La norma canonica si definisce:

$$\|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}$$

Possiamo, quindi, definire l'intorno sferico di raggio ε come:

$$B(x_0,\varepsilon) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < \varepsilon\}$$ (Bolla)

Quindi gli intorni sferici sono una generalizzazione in n dimensioni dell'intorno simmetrico.

Il raggiungimento dei bordi di un intervallo sono speciali: non sono raggiungibili con percorsi qualunque. Suddividiamo quindi i tipi di punti dello spazio in più tipi:

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
- x si dice INTERNO ad A se $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A$
- x si dice DI FRONTIERA per A se $\forall \varepsilon > 0 \;\; B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$
- x si dice ESTERNO ad A se $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset \bar{A}$

L'insieme dei punti interni ad A viene indicato con A^0. L'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Le frontiere di A e $\bar{A}$ coincidono.

L'insieme A si dice aperto se ogni punto è interno. Se $\bar{A}$ è aperto, allora A è chiuso e viceversa. A si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$. Considerando $\mathbb{R}^2$, la sua frontiera è $\emptyset$, quindi è sia aperto che chiuso. Stessa cosa vale per $\emptyset$. L'insieme totale e quello nullo sono gli unici insiemi che sono contemporaneamente chiusi e aperti.

Insiemi limitati

In $\mathbb{R}^2$ bisogna ridefinire il concetto di limitatezza:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$ è limitato se $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2,\ \rho > 0 : A \subseteq B(x_0,\rho)$

Si può notare che la definizione sopra non è altro che una generalizzazione del concetto di limitatezza in $\mathbb{R}$. Bisogna ora definire quando un insieme è connesso, ossia fatto "da un solo pezzo".

Curva

Si definisce una curva (o arco di curva) in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\begin{aligned} \underline{r} :\ & I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & r(t) \longmapsto \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \\ & t \in I \end{aligned}$$

Possiamo ora dire un insieme connesso come:

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A è connesso per archi se, per ogni coppia di punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ esiste una curva $\bar{r} : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ con $\bar{r}(a) = x$ e $\bar{r}(b) = y$, $r(t) \subset A$

Un insieme convesso è connesso per archi, ma non vale il viceversa.

15/03 |

Funzioni in più variabili

Definiamo funzione in più variabili:

$$\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\underline{x}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{con } f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{cases}$$

Abbiamo già visto delle funzioni di questo tipo: le funzioni lineari

LIMITE DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

La norma è già stata definita sopra. Una proprietà dice che:

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \to 0 \iff |x^i - x_0^i| \to 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Si può anche dimostrare la stessa cosa in termini di ε / δ. Ciò ci permetterà di definire il limite di funzione in più variabili:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} \iff \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_J(\underline{x}) = l_J \quad \forall J = 1, 2, \dots, m \qquad \text{con } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ e } l \in \mathbb{R}^m$$

La convergenza in $\mathbb{R}^n$ avviene, quindi, per coordinate. Se so studiare $f^J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ posso studiare anche $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Continuità e derivabilità di funzioni $\underline{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Consideriamo $\underline{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, allora $f_J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non altro che una solita funzione vista fino ad ora. Possiamo allora estendere i concetti visti in analisi 1:
- $\underline{f} \in \mathcal{C}(I) \iff f_J \in \mathcal{C}(I) \quad \forall J = 1, \dots, n$
- $\underline{f}$ è derivabile su I se e solo se sono derivabili tutte le f_J su I

LIMITI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, non possiamo più parlare di funzioni crescenti o decrescenti. Possiamo, però, ancora parlare di massimi e di minimi.

Poiché disegnare il grafico di queste funzioni è difficile, definiamo gli insiemi di livello K di f come $I = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = K \}$.

Per disegnare il grafico di una funzione di questo tipo bisogna usare sia gli insiemi di livello che le restrizioni a retta (isolare le singole coordinate ponendo le altre pari a zero/costante).
Notiamo che le funzioni che dipendono dalla distanza dall'origine sono grafici di rotazione. Basta quindi trovare il grafico in 1 variabile e farlo ruotare. Funzioni di questo tipo sono dette funzioni radiali.

Limite (in)finito per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ di funzioni reali in più variabili reali

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A insieme aperto, definiamo $l \in \mathbb{R}^*$ limite di f per $\underline{x} \to \underline{x}_0 \in A$ se

$$\forall V(l) \ \exists U(\underline{x}_0) : \ \forall x \in U \setminus \{\underline{x}_0\} \ f(\underline{x}) \in V$$

In particolare abbiamo:
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \to \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \ |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \quad \to \quad \forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \ \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \setminus \{\underline{x}_0\} \ f(\underline{x}) > K$

Definizione successionale di limite

La definizione successionale di limite afferma che:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall \{x_n\}\ \underline{x}_n \in A \subseteq \mathbb{R}^n,\ \underline{x}_n \neq \underline{x}_0 : \lim_{n\to+\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0 \quad \text{si ha} \quad \lim_{n\to+\infty} f(\underline{x}_n) = l$$

Continuità di funzioni reali a più variabili reali

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Chiamiamo f continua in $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$.
In seguito ai teoremi dell'algebra dei limiti possiamo affermare che somma / prodotto / quoziente / composizione di funzioni continue dà una funzione continua.

Teoremi sui limiti

1. Unicità del limite: se il limite per $\underline{x}\to\underline{x}_0$ di f esiste, esso è unico
2. Algebra dei limiti:
   - $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f+g = \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f + \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g \qquad [+\infty - \infty]$
   - $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f\cdot g = \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f \cdot \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g \qquad [0\cdot\infty]$
   - $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \qquad [\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}]$
   - data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(f(\underline{x})) = \lim_{t\to t_0} g(t)$

     / $g: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{\underline{w}\to\underline{w}_0} f(g(\underline{w})) = \lim_{x\to x_0} f(\underline{x})$
3. Teorema del confronto: siano f, g e h definite da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tali che almeno definitivamente per $\underline{x}\to\underline{x}_0$ $f(\underline{x}) \le g(\underline{x}) \le h(\underline{x})$.
   Allora se $\exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ e $\exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(\underline{x}) = l$
4. Teorema della permanenza del segno: sia f continua e sia $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n : f(x_0) > 0$. Allora $\exists \delta > 0 : f(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$.

ESEMPI: Date $f_1(x,y) \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ $\quad f_2(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad f_3(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad f_4 = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Calcola $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$.

$$|f_1(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le 1\cdot|y| \to 0 \overset{\text{CFR.}}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

$$|f_2(x,y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1\cdot|x| \to 0 \overset{\text{CFR.}}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$$

$|f_3(x,y)| = \frac{|x||y|}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} \le 1$ $\quad$ Studiando $f_3(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, mentre $f_3(x,0) = 0$. Il limite, quindi, non esiste.

Al punto $(0,0)$ ci si può avvicinare in infiniti modi. Affinché il limite esista, tutte le restrizioni devono convergere allo stesso valore

def. succ. di limite

$|f_4(x,y)| = \dots \le 2$ $\quad$ Studiando $f_4(x,-x) = 0$, mentre $f_4(x,x) = \frac{2}{x} \to +\infty$. Il limite, quindi, non esiste.

Passaggio a coordinate reali in $\mathbb{R}^2$

Per coordinate polari si intendono:

$$\rho \in (0;+\infty),\ \theta \in (-\pi;\pi] : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Per passare alle coordinate polari basta sostituire a x e a y i corrispettivi. Nota bene: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Il passaggio a coordinate polari può aiutare nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \iff \lim_{\rho\to 0} \tilde{f}(\rho,\theta) = l \quad \text{uniformemente rispetto a } \theta$$

ESEMPIO: Consideriamo $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad f_2(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Calcolane il limite per $\underline{x}\to(0,0)$

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho} = \rho\cos\theta\sin\theta$$

$$|\tilde{f}(\rho,\theta)| \le \rho \to 0 \overset{\text{CFR}}{\Longrightarrow} \lim_{\rho\to 0} \tilde{f}(\rho,\theta) = 0$$

$\tilde{f}_2(\rho,\theta) = \frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho} \to \nexists \lim$ perché dipende da θ

$$f_s(\rho,\theta) = \frac{\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4 \sin^4\theta} = \rho \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta}$$

Per $\rho \to 0$, abbiamo $f_s(\rho,\theta) \sim \rho \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, quindi avremo un problema per $\cos\theta \to 0$. Quindi il limite non esiste

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

In $\mathbb{R}$ i due concetti erano pressoché equivalenti. Ora non più.

Derivate parziali

Consideriamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considerando la definizione di derivabilità otteniamo $\lim_{\underline{h} \to 0} \frac{f(x_0+\underline{h}) - f(x_0)}{\underline{h}}$ che non ha senso poiché $\underline{h}$ è un vettore. Fissiamo una direzione $\underline{v}$, possiamo scrivere $f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0)$ e calcolare $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t\underline{v}) - f(x_0)}{t}$. Ciò ci dà informazioni parziali valide solo per una direzione. Le direzioni usate saranno i versori canonici di $\mathbb{R}^2$.

Se esiste finito $\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = l_1$ dirò che esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = l_1$. Analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = l_2$

Derivabilità e gradiente

Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ diciamo che f è derivabile in (x_0, y_0). Definiamo il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \nabla f$ il gradiente di f in (x_0, y_0)

Derivata direzionale

Consideriamo il limite $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$. Se il precedente limite esiste finito lo chiamiamo $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0)$ derivata direzionale.