Proiectarea Algoritmilor

Curs 10 – Arbori minimi de acoperire

Bibliografie

[1] http://monalisa.cacr.caltech.edu/monalisa__Service_Applications__Monitoring_VRVS.html

[2] http://www.cobblestoneconcepts.com/ucgis2summer2002/guo/guo.html

[3] Giumale – Introducere in Analiza Algoritmilor cap. 5.5

[4] R. Sedgewick, K Wayne – curs de algoritmi Princeton 2007 www.cs.princeton.edu/~rs/AlgsDS07/ 01UnionFind si 14MST

[5] http://www.pui.ch/phred/automated_tag_clustering/

[6] Cormen – Introducere în Algoritmi cap. Arbori de acoperire minimi (24)

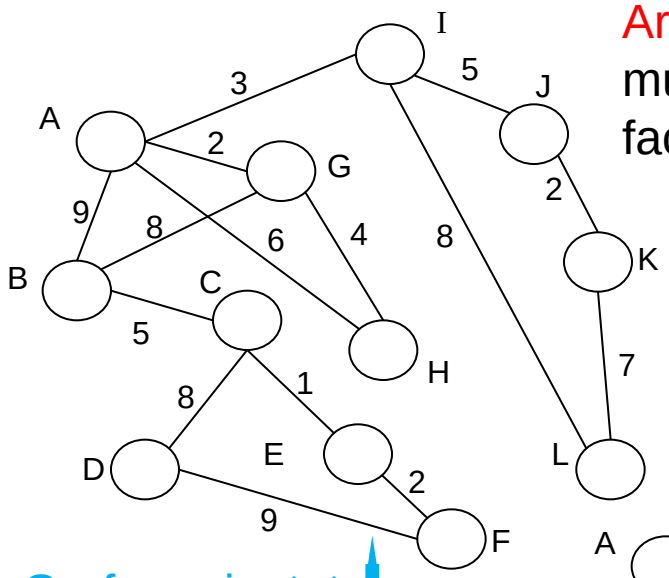
Planul cursului

- Arbori minimi de acoperire:
  - Definiție;
  - Utilizare;
  - Algoritmi.
- Operații cu mulțimi disjuncte:
  - Structuri de date pentru reprezentarea mulțimilor disjuncte;
  - Algoritmi pentru reuniune și căutare;
  - Calcul de complexitate.

Arbori minimi de acoperire – Definiții

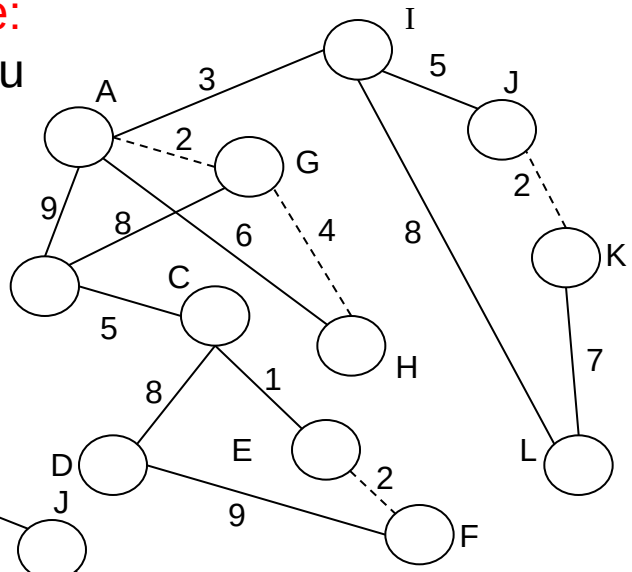
- Fie G = (V,E) graf neorientat și conex, iar w: E → $\mathfrak{R}$ o funcție de cost (w(u,v) = costul muchiei (u,v)).
- Definiție: Un arbore liber al lui G este un graf neorientat conex și aciclic Arb = (V',E'); V' $\subseteq$ V, E' $\subseteq$ E. Costul arborelui este: C(Arb) = Σ w(e), e $\in$ E'.
- Definiție: Un arbore liber se numește arbore de acoperire dacă V' = V.
- Definiție: Un arbore de acoperire (Arb) se numește arbore minim de acoperire (notăm AMA) dacă Arb $\in$ ARB(G) a.î. C(Arb) = min{C(Arb') | Arb' $\in$ ARB(G)}.

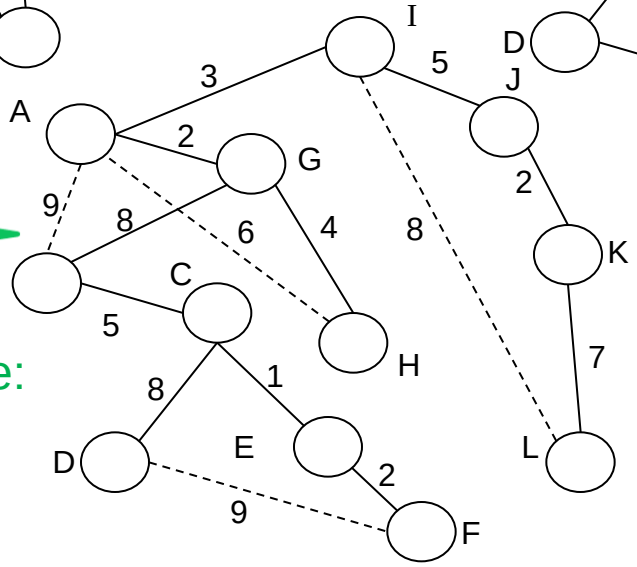
Exemple



Graf neorientat conex

Arbore de acoperire:
muchiile punctate nu fac parte din arbore



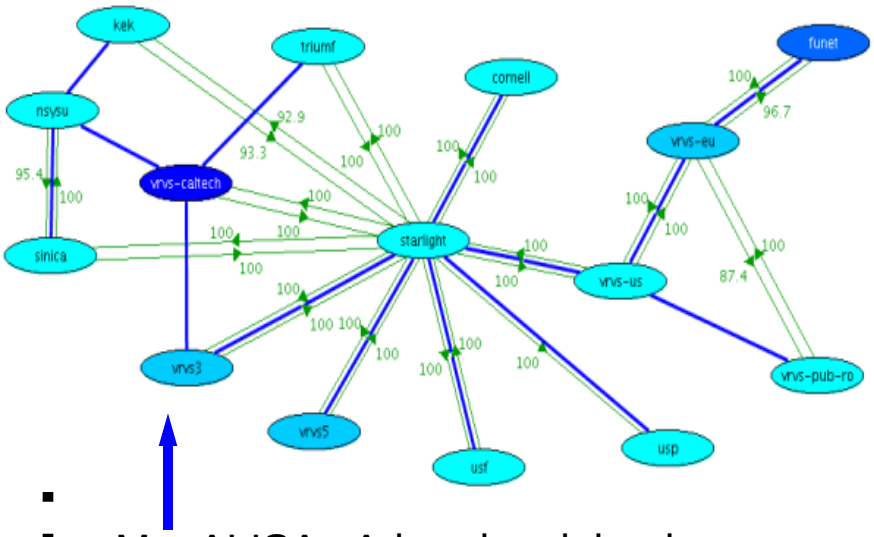


Arbore minim de acoperire:
muchiile punctate au fost eliminate din graf

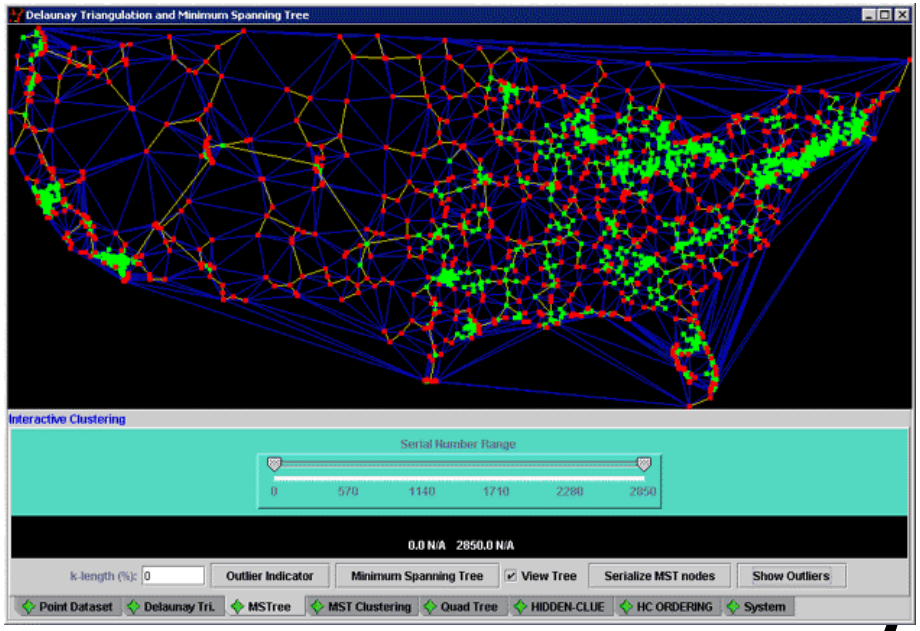
Utilizări

- Proiectarea rețelelor:
  - Electrice, calculatoare, drumuri.
- Clustering.
- Algoritmi de aproximare pentru probleme NP-complete.

Exemple de utilizare



MonALISA - Arborele minim de acoperire al conexiunilor si calitatea conexiunilor peer-to-peer pentru un set de relee VRVS (caltech) [1]



Arbore minim de acoperire pentru cca 2850 de orașe din USA [2]

AMA – Definiții (II)

- Definiție: Fie $A \subseteq E$ o mulțime de muchii ale unui graf $G = (V,E)$ și $(S,V-S)$ o partiționare a lui V. Partiționarea respectă mulțimea A dacă $\nexists e \in A$ care taie frontiera dintre S și $V-S$ ($\forall (u,v) \in A \rightarrow u,v \in S$ sau $u,v \in V-S$).

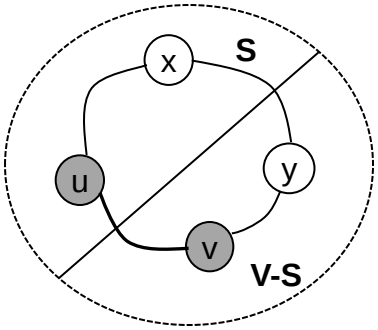
- Definiție: Fie $A \subseteq E'$ o mulțime de muchii ale unui AMA $Arb = (V,E')$ al grafului $G = (V,E)$, iar $e \in E$ o muchie oarecare din G. Muchia e este sigură în raport cu A dacă mulțimea $A \cup \{e\}$ face parte dintr-un AMA al lui G.

AMA – Teoremă

- Teorema 5.23: Fie A o mulțime de muchii ale unui AMA al grafului G = (V,E). Fie (S,V-S) o partiționare care respectă A, iar (u,v) $\in$ E o muchie care taie frontiera dintre S și V-S a.î.

w(u,v) = min{w(x,y) | (x,y) $\in$ E și (x $\in$ S, y $\in$ V-S) sau (x $\in$ V-S, y $\in$ S)}

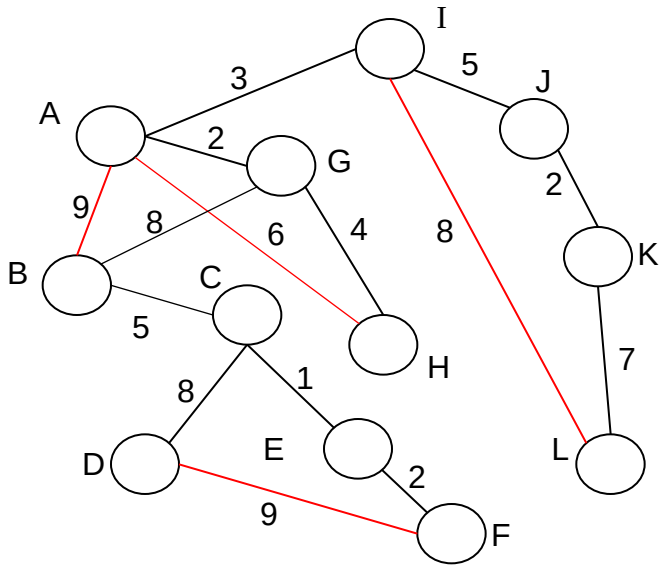
Muchia (u,v) este sigură in raport cu A.



- Dem (Reducere la absurd):
  - pp (u,v) nu e muchie sigură.
  - (I) → ∃ AMA Arb' = (V,E'), a.î. A ⊆ E'. Pp (u,v) ∉ Arb'
  - În Arb' ∃ cale u..v → ∃ (x,y) ∈ u..v care taie partiționarea și (x,y) ∈ Arb'
  - (x,y) ∉A, (u,v) ∉ A pt. că partiționarea respectă A, iar w(u,v) ≤ w(x,y) (I)
  - Dacă în Arb' eliminăm (x,y) și adăugăm (u,v) → Arb" = (V,E"), E" = E' – {(x,y)} + {(u,v)}
  - C(Arb") ≤ C(Arb'), Arb' – AMA → C(Arb') = C(Arb") → Arb" – AMA → (u,v) – muchie sigură.

Proprietăți (I)

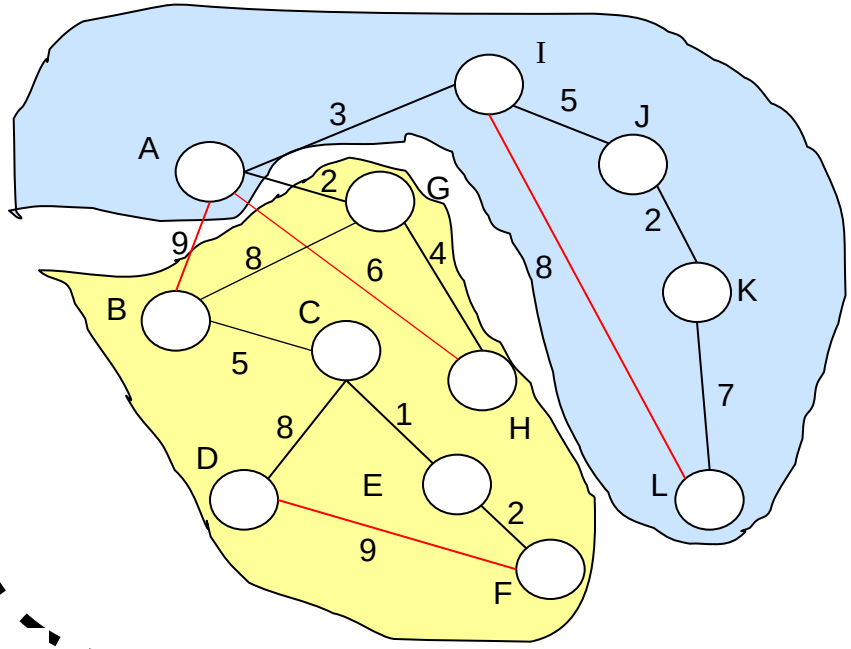
G = (V,E), C = (V',E') – ciclu în G; e ∈ E' a.î. w(e) = max {w(e') | e' ∈ E'} => e ∉ Arb(G) unde Arb(G) = AMA în G.



- Dem (Reducere la absurd): Pp e ∈ Arb(G).
- Eliminând e din Arb(G) → 2 mulțimi de muchii: S_1, S_2.
- e ∈ E' (ciclu) → ∃ e' ∈ E', w(e) > w(e') a.î. un capăt din e' este în S_1 și celalalt în S_2.
- Arb(G) – e + e' = arbore de acoperire.
- Cost(Arb(G) - w(e) + w(e') < Cost(Arb(G)) => Arb(G) nu este arbore minim.

Proprietăți (II)

G = (V,E), S = (V',E'), V' $\subset$ V; e = (u,v) a.î. e $\notin$ E' și (u $\in$ V' și v $\notin$ V') sau (u $\notin$ V' și v $\in$ V') cu proprietatea că:
w(u,v) = min{w(u',v')| (u'$\in$V' și v'$\notin$V') sau (u'$\notin$V' și v'$\in$V')} => (u,v) $\in$ AMA.



•Dem (Reducere la absurd): Pp e $\notin$ Arb(G).

•Arb' = Arb(G) – e' + e (unde e' o muchie similară cu e).

•Arb'= arbore de acoperire.

•Cost(Arb') < Cost(Arb) → Arb nu este arbore minim.

AMA

- Bazați pe ideea de muchie sigură – se identifică o muchie sigură și se adaugă în AMA.

- 2 algoritmi de tip greedy:
  - Prim: se pornește cu un nod și se extinde pe rând cu muchiile cele mai ieftine care au un singur capăt în mulțimea de muchii deja formată (Proprietatea 2). Algoritmul este asemănător algoritmului Dijkstra.

  - Kruskal: inițial toate nodurile formează câte o mulțime și la fiecare pas se reunesc 2 mulțimi printr-o muchie. Muchiile sunt considerate în ordinea costurilor și sunt adăugate în arbore doar dacă nu creează ciclu (Proprietatea 1).

Algoritmul lui Prim

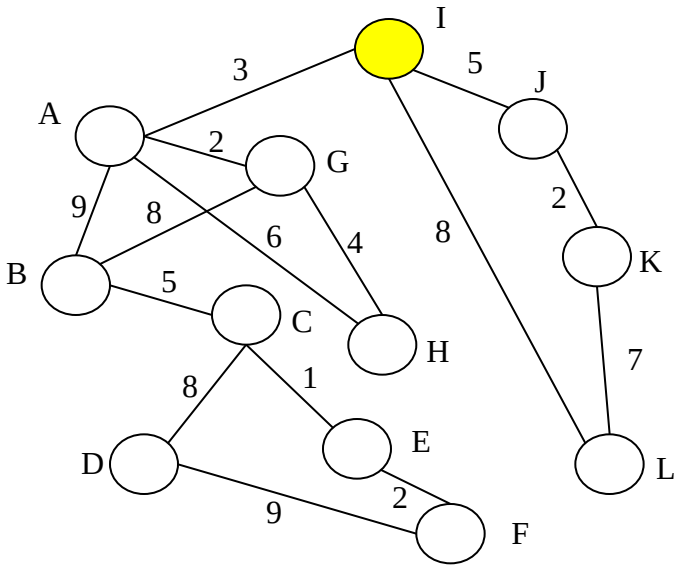
- Prim(G,w,s)

Implementare în Java la [4] !

  - A = ∅ // AMA
  - **Pentru fiecare** (u ∈ V)
    - d[u] = ∞; p[u] = null // inițializăm distanța și părintele
  - d[s] = 0; // nodul de start are distanța 0
  - Q = constrQ(V, d); // ordonată după costul muchiei
    // care unește nodul de AMA deja creat
  - **Cât timp** (Q != ∅) // cât timp mai sunt noduri neadăugate
    - u = ExtrageMin(Q); // extrag nodul aflat cel mai aproape
    - A = A ∪ {(u,p[u])}; // adaug muchia în AMA
    - **Pentru fiecare** (v ∈ succs(u))
      - **Dacă** d[v] > w(u,v) **atunci**
        - d[v] = w(u,v); //+ d[u] // actualizăm distanțele și părinții nodurilor
        - p[v] = u; // adiacente care nu sunt în AMA încă
  - **Întoarce** A - {(s,p(s))} // prima muchie adăugată

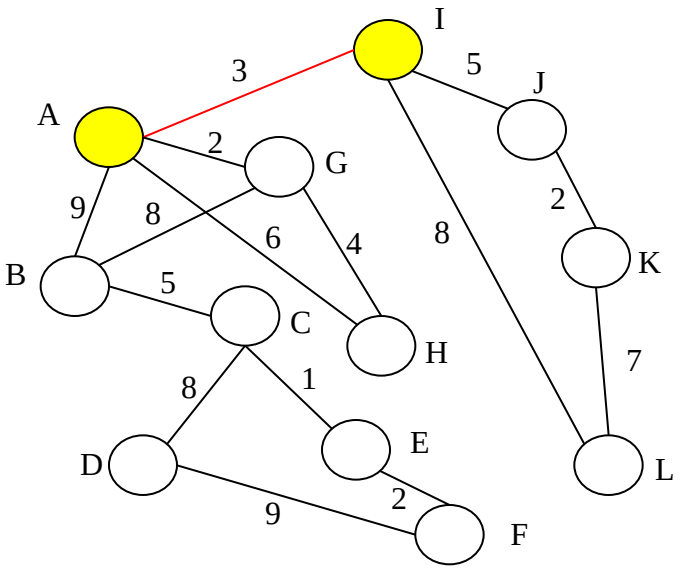
Exemplu (I)

- Pornim din I



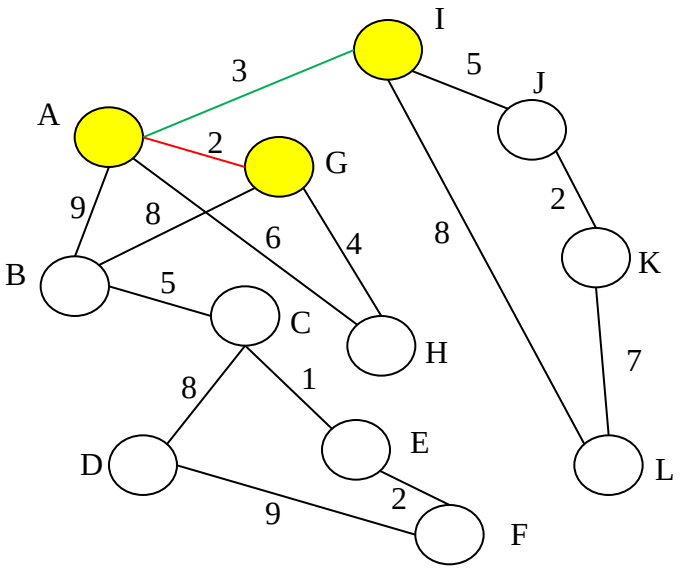
- Q: A(3), J(5), L(8), B(∞), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞), G(∞), H(∞), K(∞)
  → A

Exemplu (II)



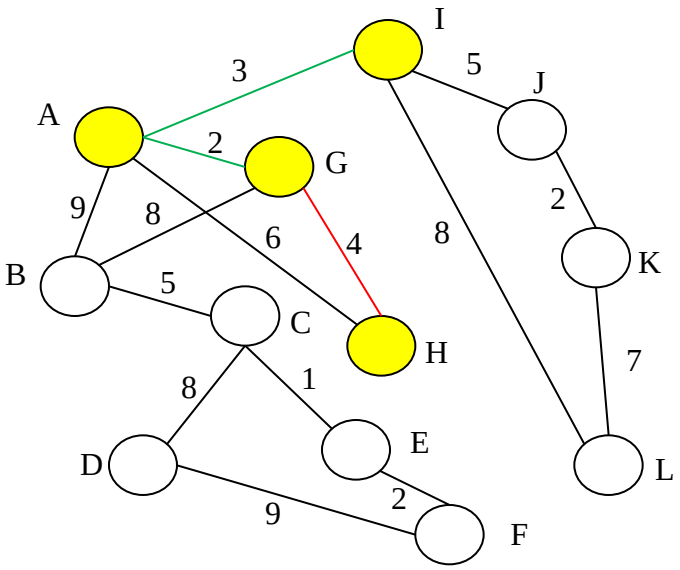
- Q: G(2), J(5), H(6), L(8), B(9), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞), K(∞) → G

Exemplu (III)



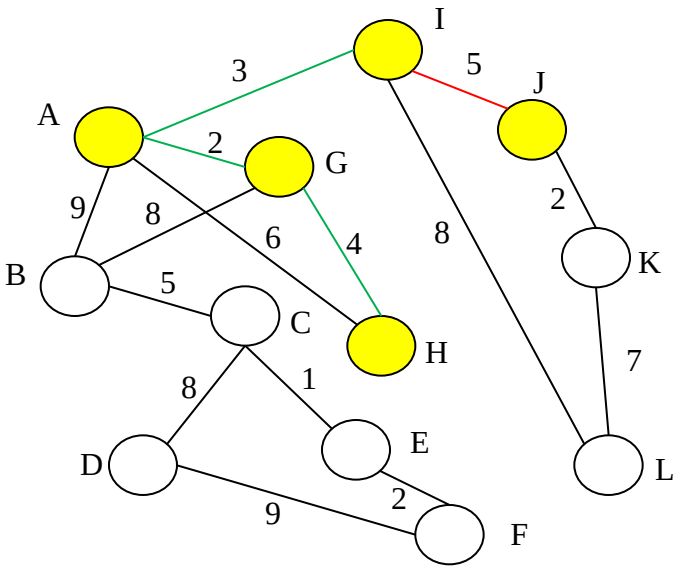
- Q: G(2), J(5), H(6), L(8), B(9), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞), K(∞) → G
- Q: H(4), J(5), L(8), B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞), K(∞) → H

Exemplu (IV)



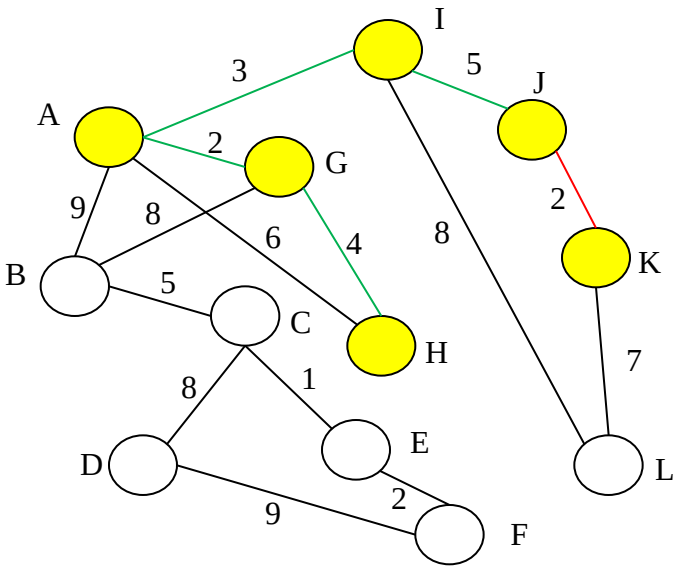
- Q: J(5), L(8), B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞), K(∞) → J

Exemplu (V)



- Q: K(2), L(8), B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞)
  → K

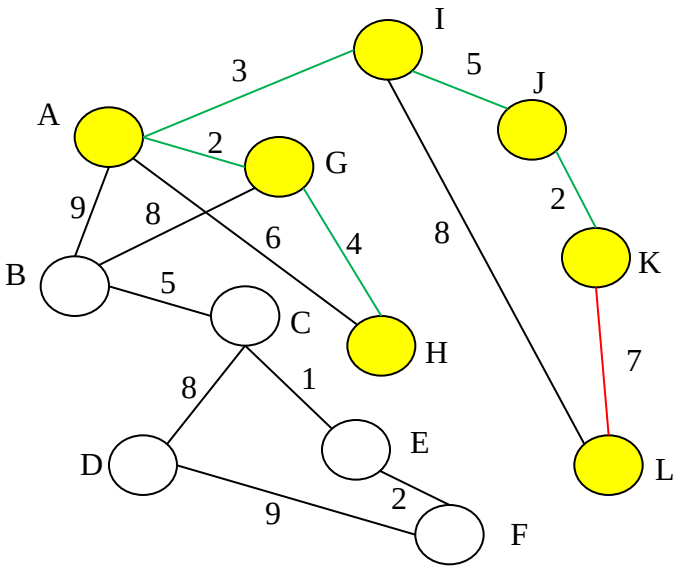
Exemplu (VI)



- Q: K(2), L(8), B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞) → K

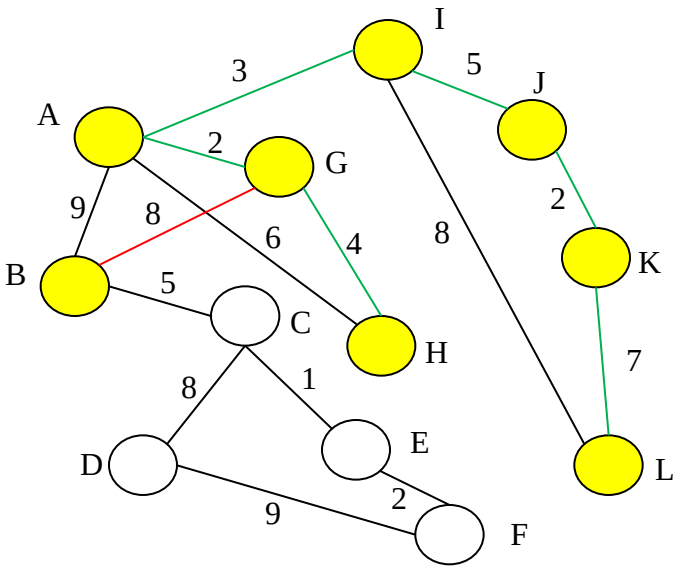
- Q: L(7), B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞) → L

Exemplu (VII)



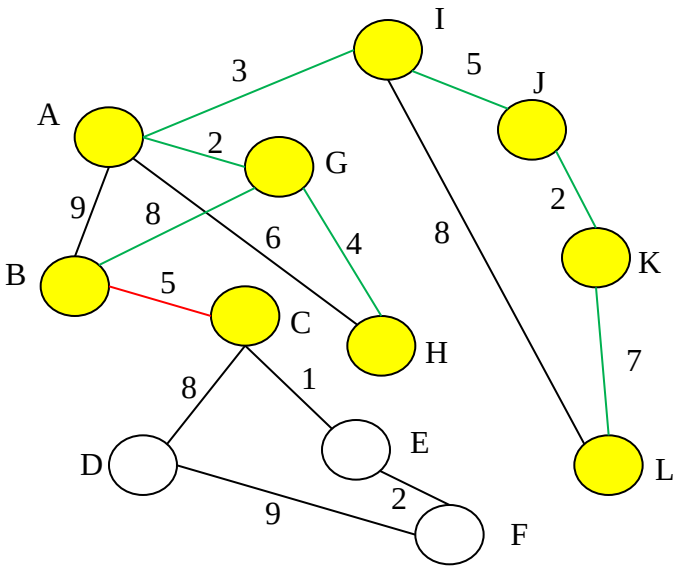
- Q: B(8), C(∞), D(∞), E(∞), F(∞) → B

Exemplu (VIII)



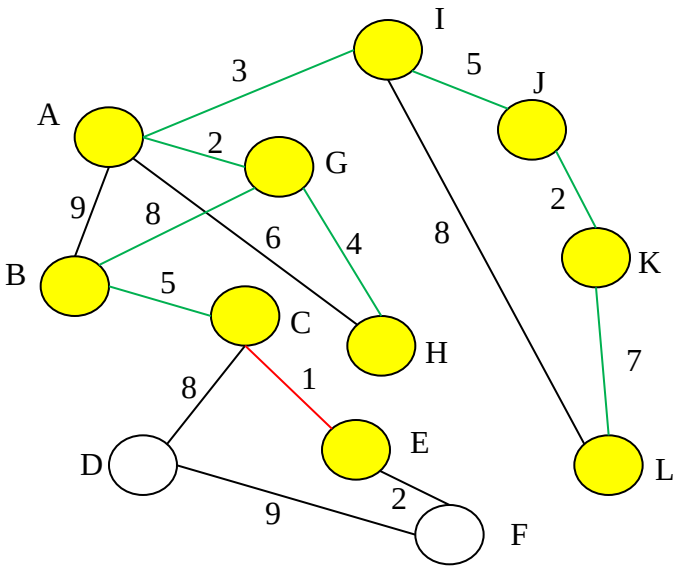
- Q: C(5), D(∞), E(∞), F(∞) → C

Exemplu (IX)



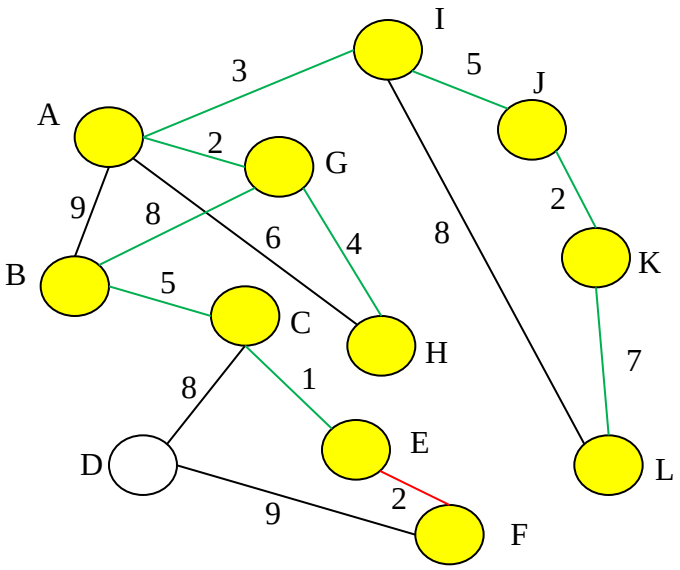
- Q: E(1), D(8), F(∞) → E

Exemplu (X)



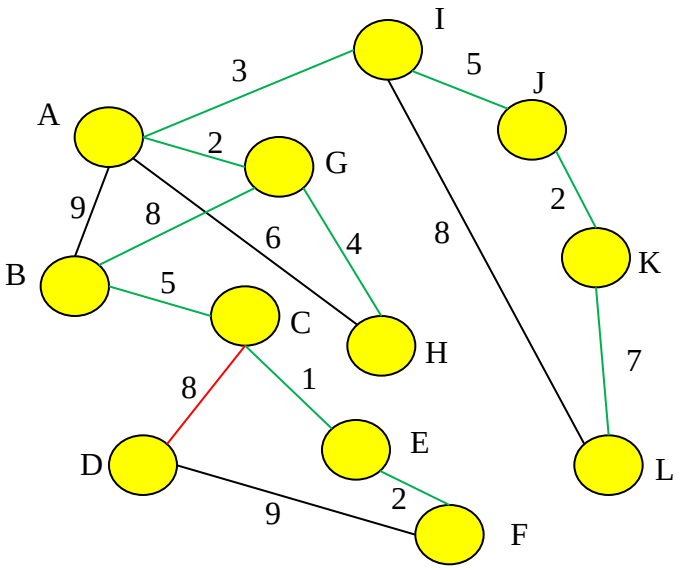
- Q: F(2), D(8) → F

Exemplu (XI)



- Q: D(8) → D

Exemplu (XII)



- Q: Ø

Corectitudine (I)

- 1. Arătăm că muchiile pe care le adăugăm aparțin Arb:
- Dem prin inducție după muchiile adăugate în AMA:
- P_1: avem V' = s, E' = ∅. Adaug muchia (u,s), u = nod adiacent sursei aflat cel mai aproape de aceasta → din Propr. 2 → (u,s) ∈ Arb.
- $P_n \rightarrow P_{n+1}$:
  - S = (V',E') mulțimea vârfurilor și muchiilor adăugate deja în arbore înainte de a adăuga (u,p[u]).
  - p[u] ∈ V', u ∉ V'; (u,p[u]) are cost minim dintre muchiile care au un capăt în S (conform extrage minim)
  - din Propr. 2 → (u,p[u]) ∈ Arb

Corectitudine (II)

- 2. arătăm că muchiile ignorate nu fac parte din Arb:
  - d[v] scade tot timpul de-a lungul algoritmului până când v este adăugat în AMA. În momentul adăugării, s-a găsit muchia de cost minim ce conectează nodul v la AMA;
  - Pp. (u,v) a.î. Arb(u) = Arb(v)
    - → (u,v) creează un ciclu în Arb(u) (arborii sunt aciclici) – fie ciclul format din u..x..v și (u,v).
    - w(u,v) = max {w(u',v') | (u',v') ∈ Arb(u)} DE CE?
      - Nodul u i-a fost adiacent nodului v, dar nu a fost ales la niciunul din momentele ulterioare de timp, când au fost parcurse muchiile din u..x..v → (u,v) are costul maxim din ciclu
    - → din Propr. 1 → (u,v) ∉ Arb

Algoritmul lui Prim

- Prim(G,w,s)
  - A = ∅ // AMA
  - **Pentru fiecare** (u ∈ V)
    - d[u] = ∞; p[u] = null // inițializăm distanța și părintele
  - d[s] = 0; // nodul de start are distanța 0
  - Q = constrQ(V, d); // ordonată după costul muchiei
    // care unește nodul de AMA deja creat
  - **Cât timp** (Q != ∅) // cât timp mai sunt noduri neadăugate
    - u = ExtrageMin(Q); // extrag nodul aflat cel mai aproape
    - A = A ∪ {(u,p[u])}; // adaug muchia în AMA
    - **Pentru fiecare** (v ∈ succs(u))
      - **Dacă** d[v] > w(u,v) **atunci**
        - d[v] = w(u,v); //+ d[u] // actualizăm distanțele și părinții nodurilor
        - p[v] = u; // adiacente care nu sunt în AMA încă
  - **Întoarce** A - {(s,p(s))} // prima muchie adăugată

Complexitate?

Reminder Dijkstra (II)

- Dijkstra(G,s)
  - **Pentru fiecare** (u ∈ V)
    - d[u] = ∞; p[u] = null;
  - d[s] = 0;
  - Q = construiește_coada(V) // coadă cu priorități
  - **Cât timp** (Q != ∅)
    - u = ExtrageMin(Q); // extrage din V elementul cu d[u] minim
    - // Q = Q - {u} – se execută în cadrul lui ExtrageMin
    - **Pentru fiecare** (v ∈ Q și v din succesorii lui u)
      - **Dacă** (d[v] > d[u] + w(u,v))
        - d[v] = d[u] + w(u,v) // actualizez distanța
        - p[v] = u // și părintele

Complexitate Prim

- Depinde de implementare (vezi Dijkstra)
  - Matrice de adiacență $O(V^2)$
  - Heap binar $O(ElogV)$
  - Heap Fibonacci $O(VlogV+E)$

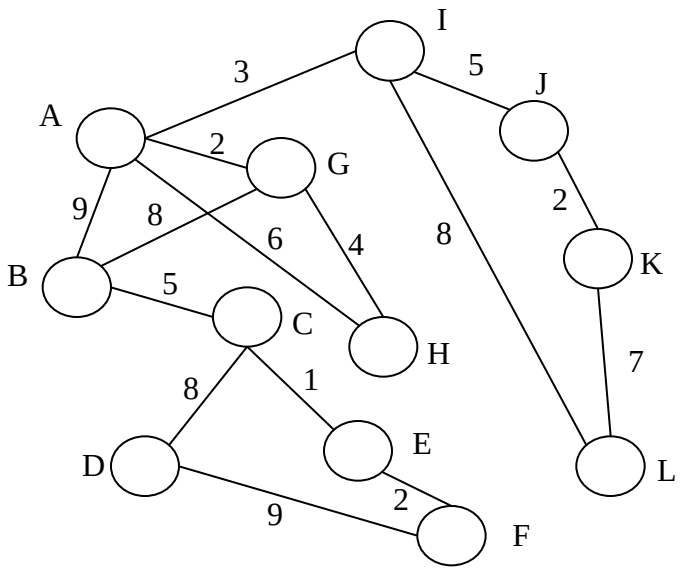
- Concluzii
  - Grafuri dese
    - Matrice de adiacență preferată
  - Grafuri rare
    - Heap binar sau Fibonacci

Algoritmul lui Kruskal

- Kruskal(G,w)
  - A = ∅; // AMA
  - **Pentru fiecare** (v ∈ V)
    - Constr_Arb(v) // creează o mulțime formată din nodul respectiv // (un arbore cu un singur nod)
  - Sortează_asc(E,w) // se sortează muchiile în funcție de // costul lor
  - **Pentru fiecare** ((u,v) ∈ E) // muchiile se extrag în ordinea // costului
    - **Dacă** Arb(u) != Arb(v) **atunci** // verificăm dacă se creează ciclu
      - Arb(u) = Arb(u) ∪ Arb(v) // se reunesc mulțimile de noduri (arborii)
      - A = A ∪ {(u,v)} // se adaugă muchia sigură în AMA
  - **Întoarce** A

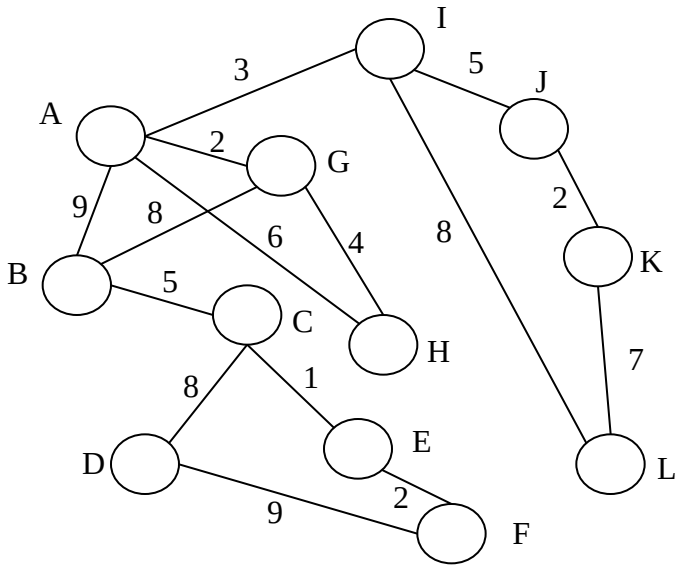
Implementare în Java la [4] !

Exemplu (I)

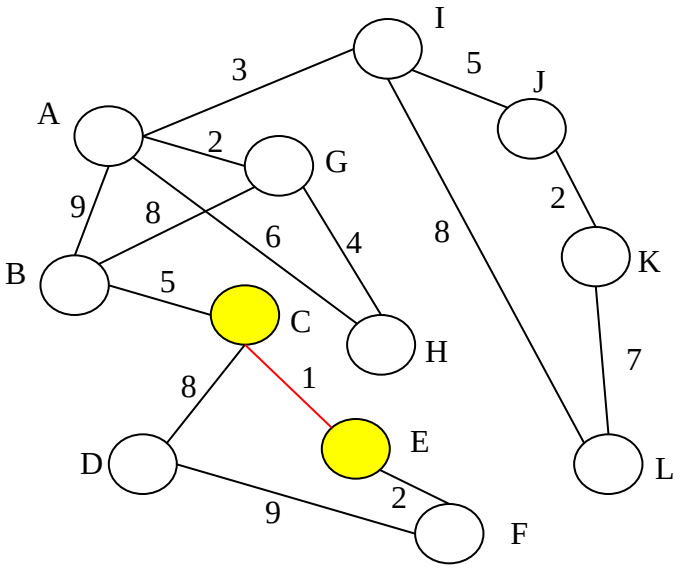


- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9

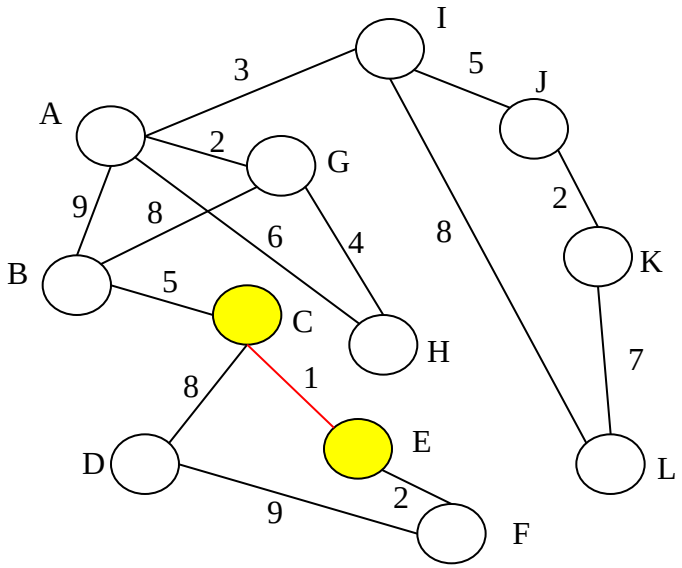
Exemplu (II)



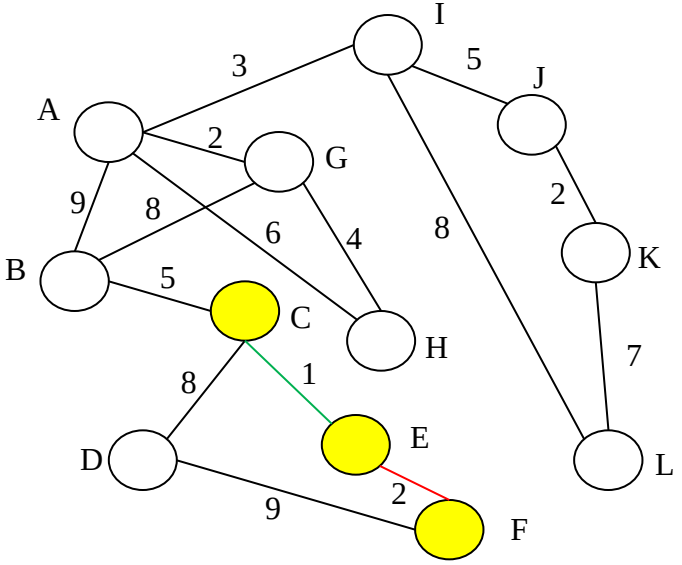
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



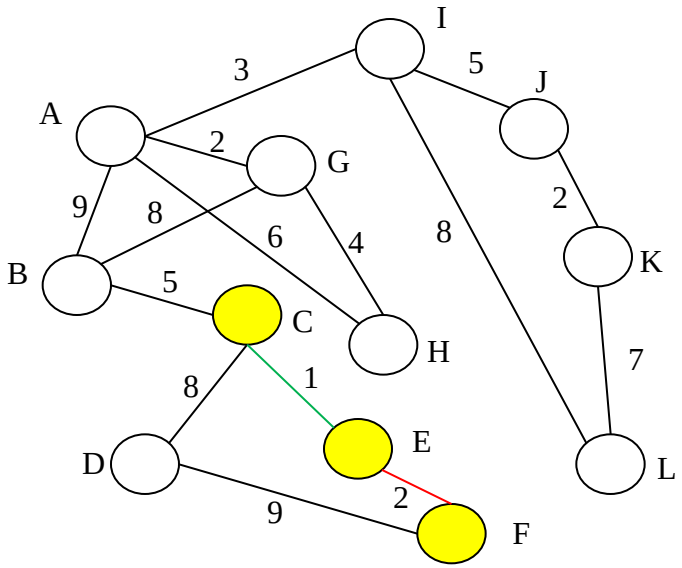
Exemplu (III)



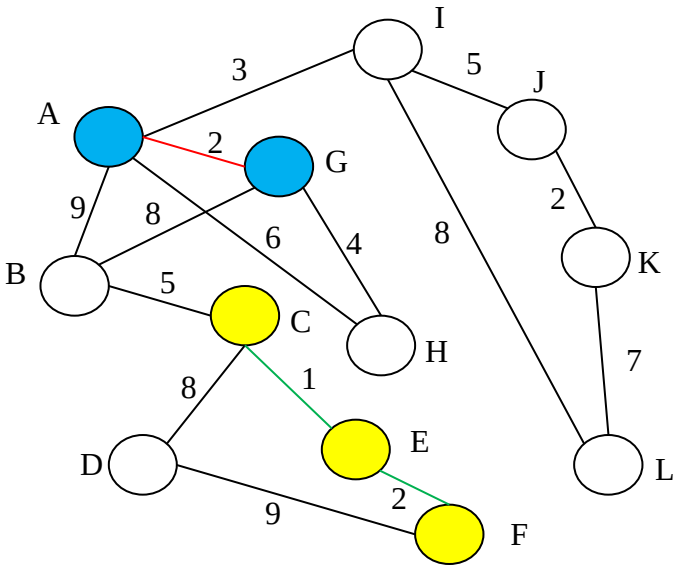
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



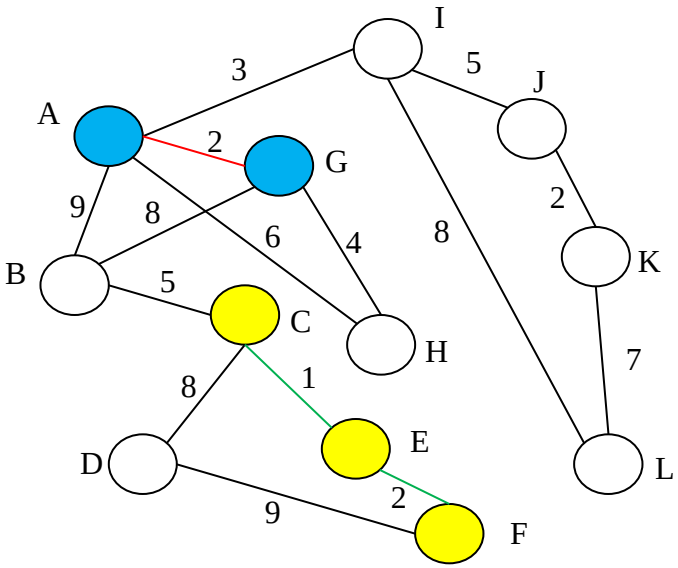
Exemplu (IV)



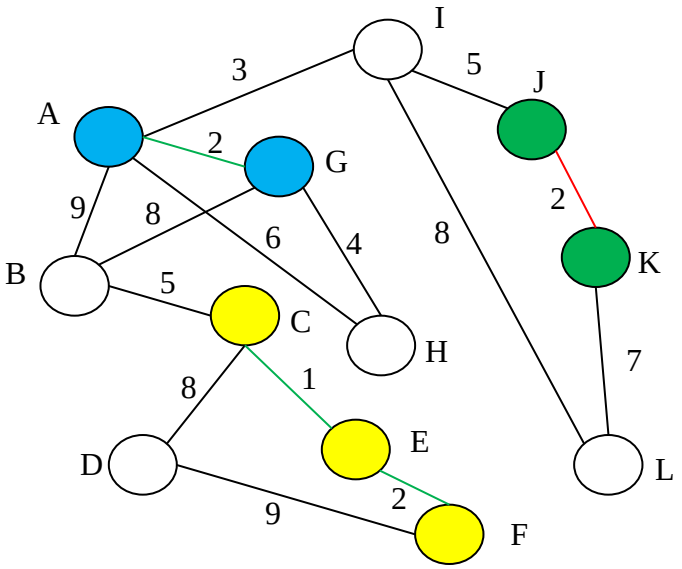
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



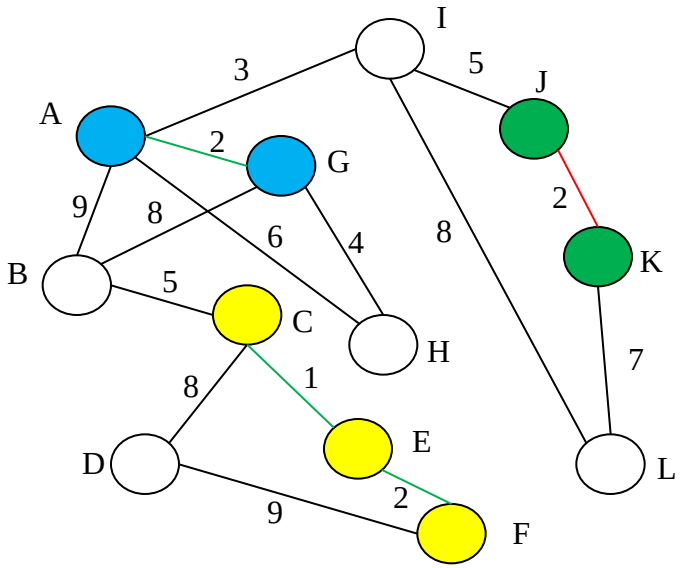
Exemplu (V)



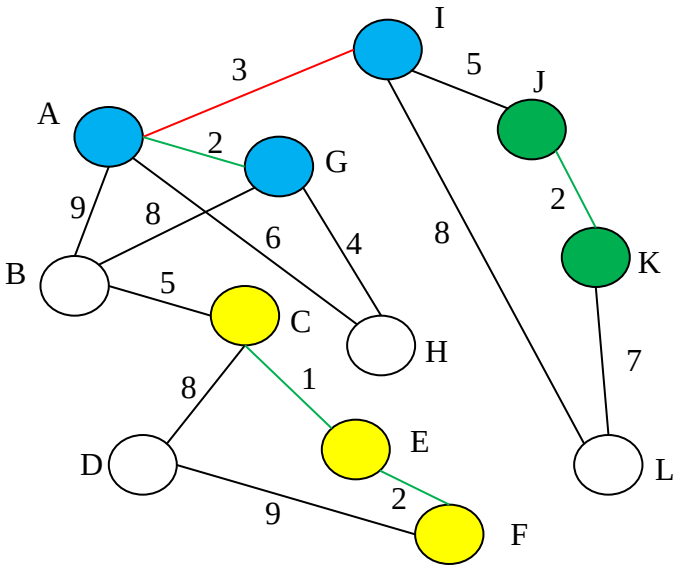
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



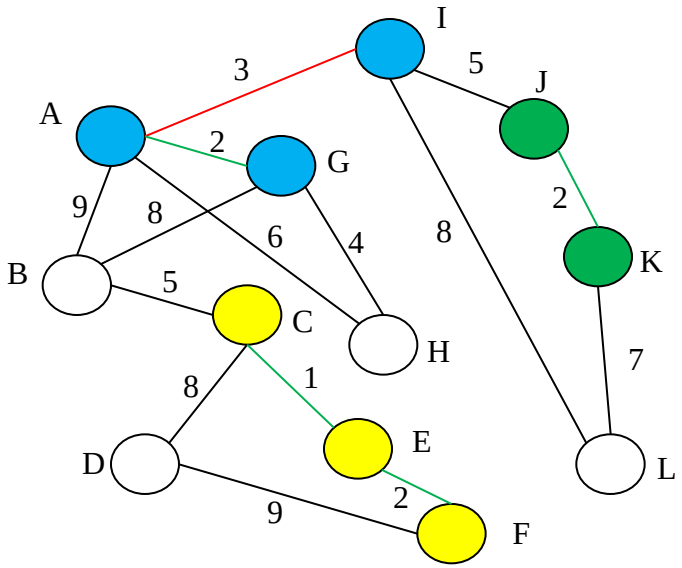
Exemplu (VI)



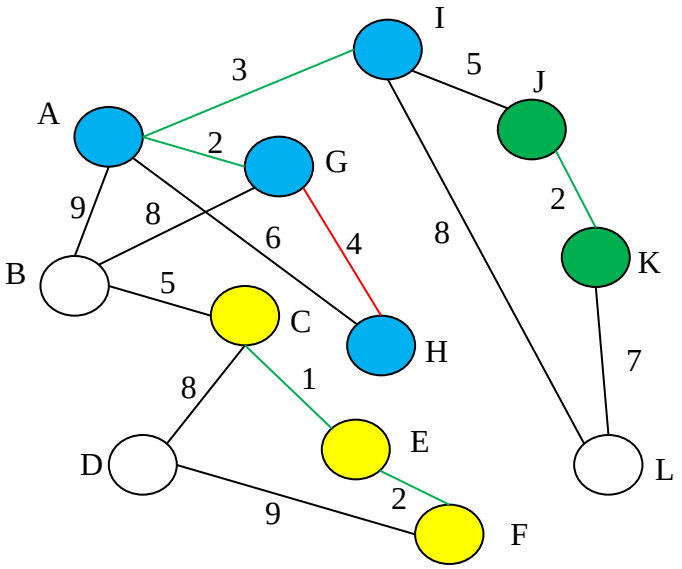
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



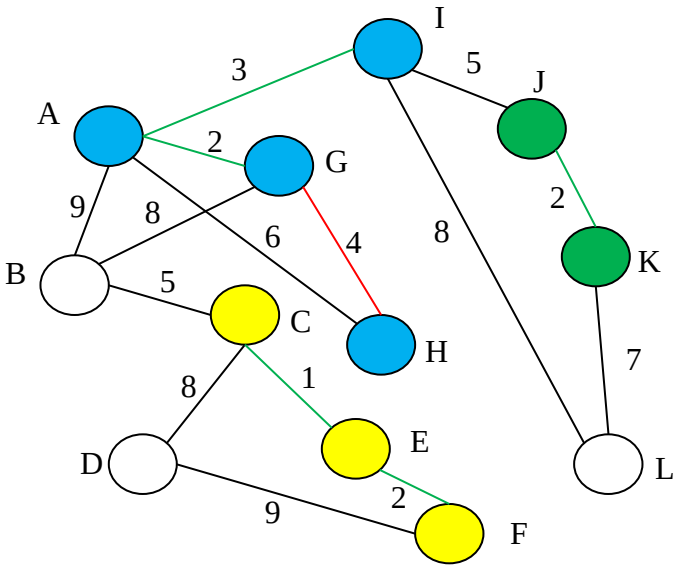
Exemplu (VII)



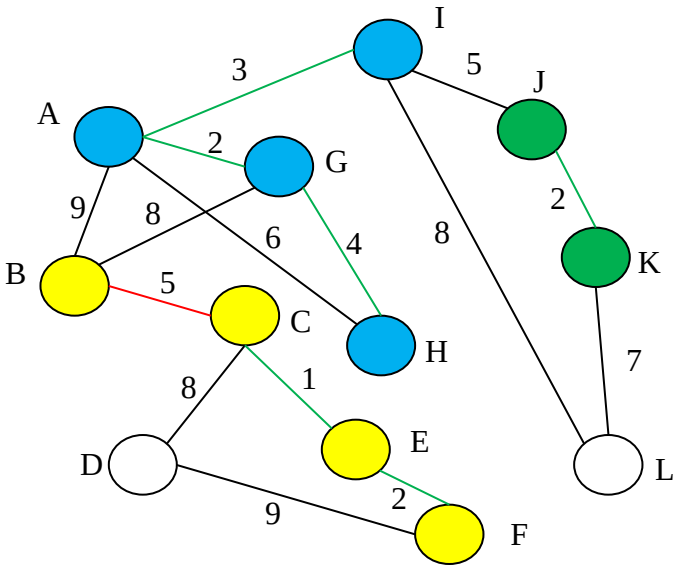
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



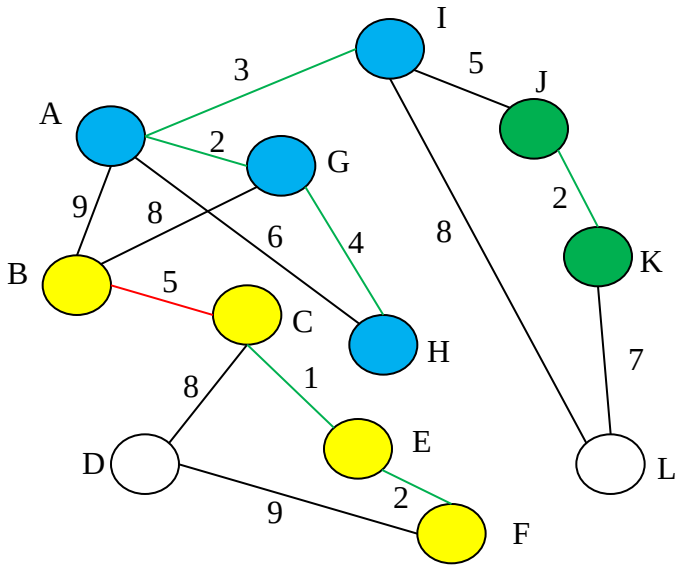
Exemplu (VIII)



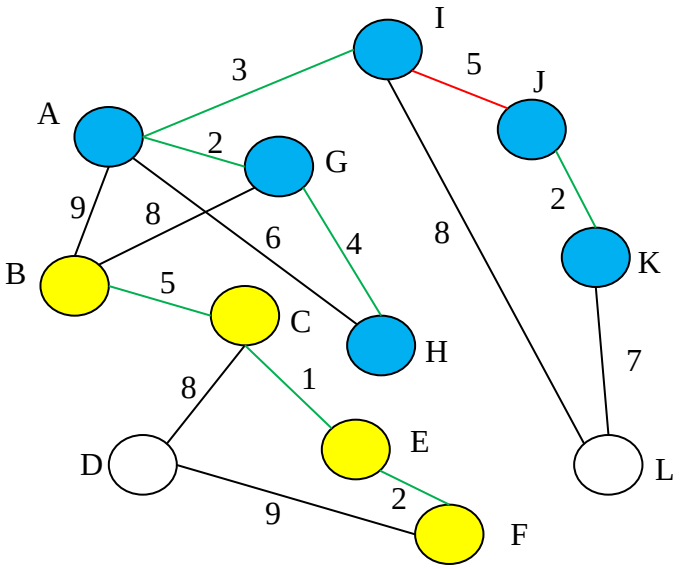
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



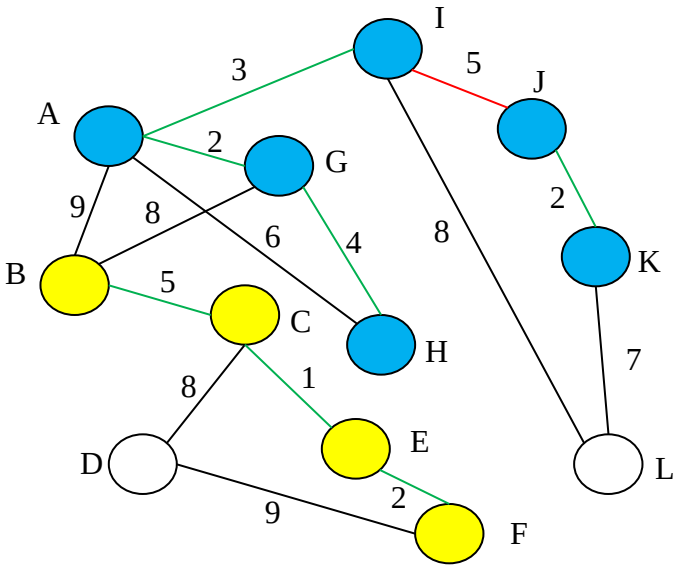
Exemplu (IX)



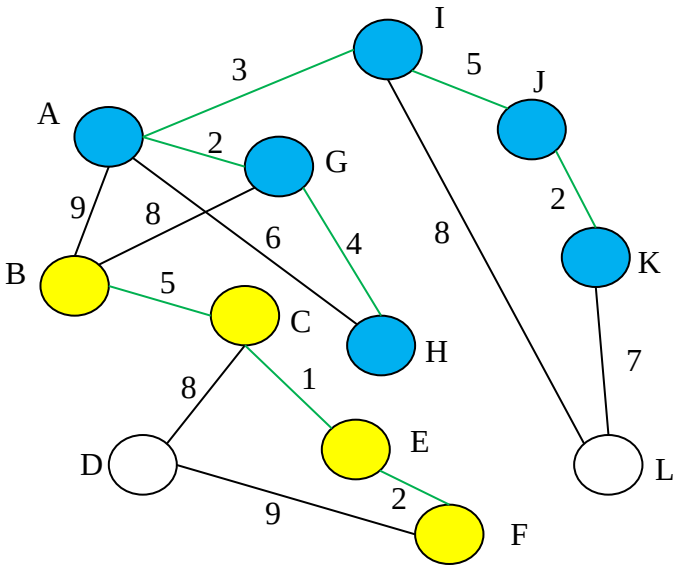
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



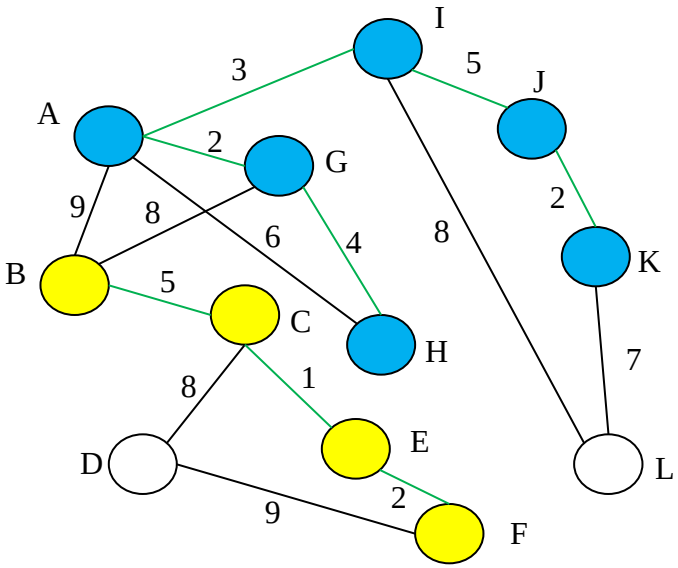
Exemplu (X)



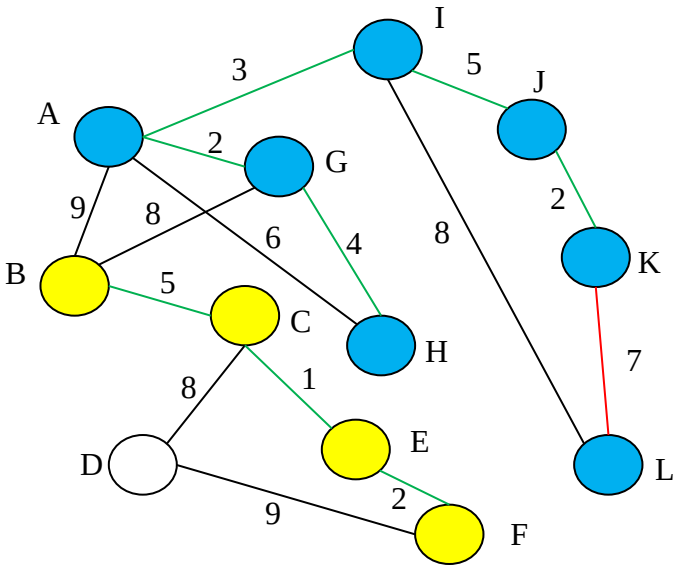
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



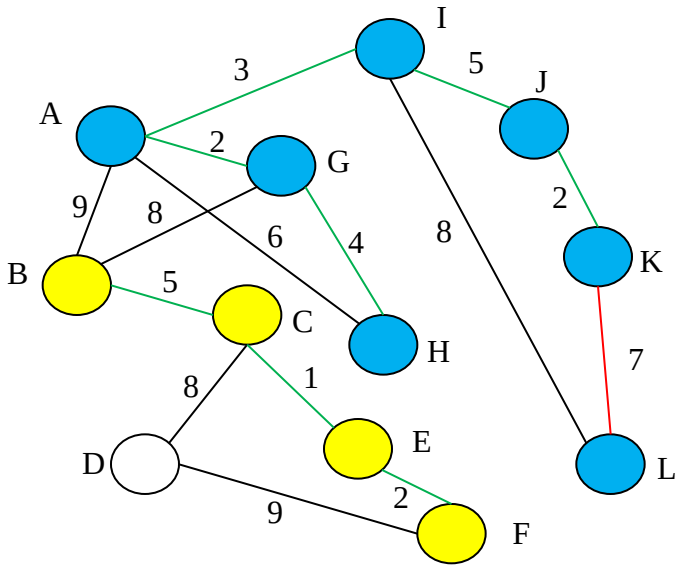
Exemplu (XI)



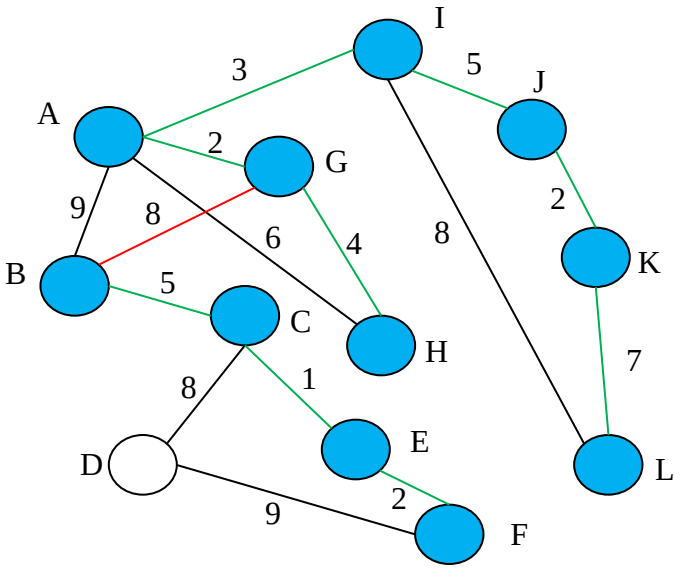
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



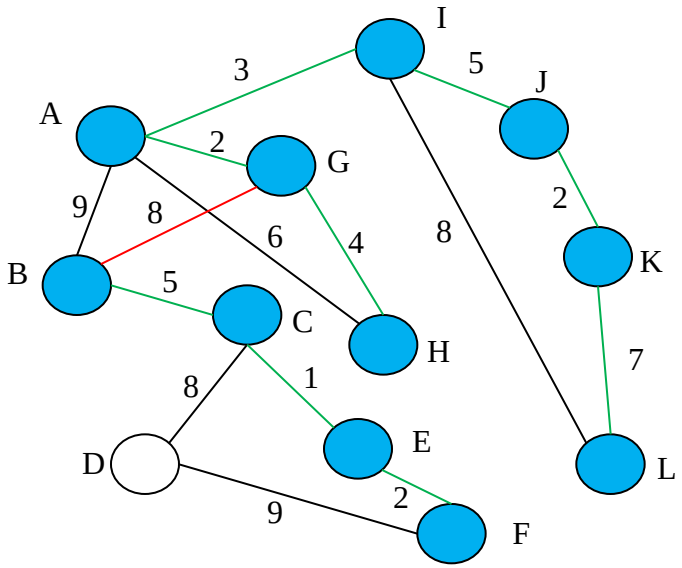
Exemplu (XII)



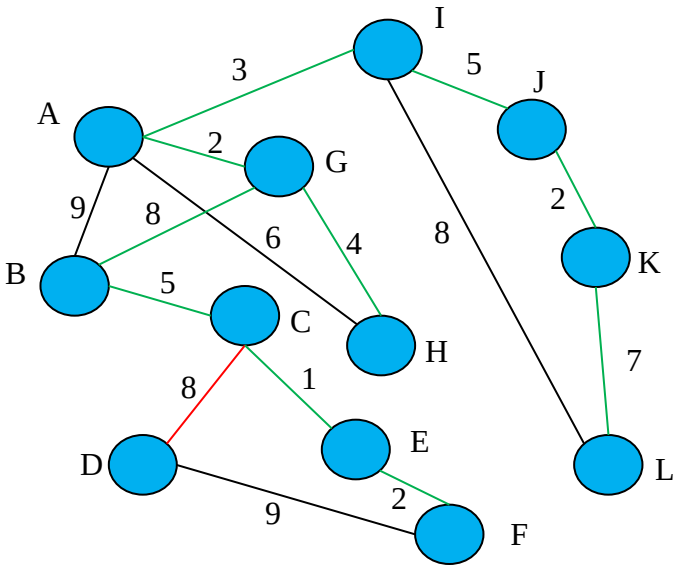
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



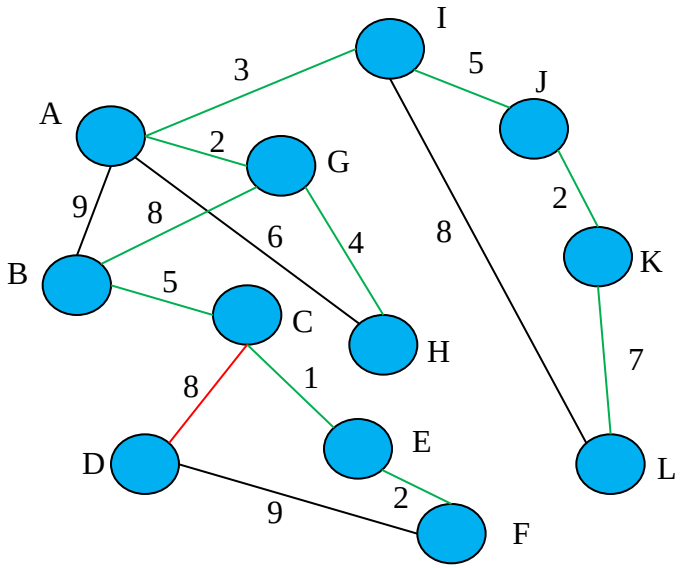
Exemplu (XIII)



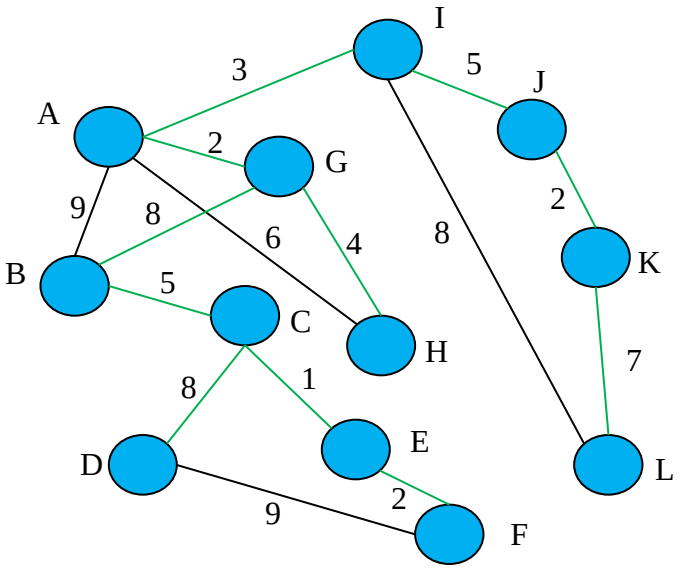
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



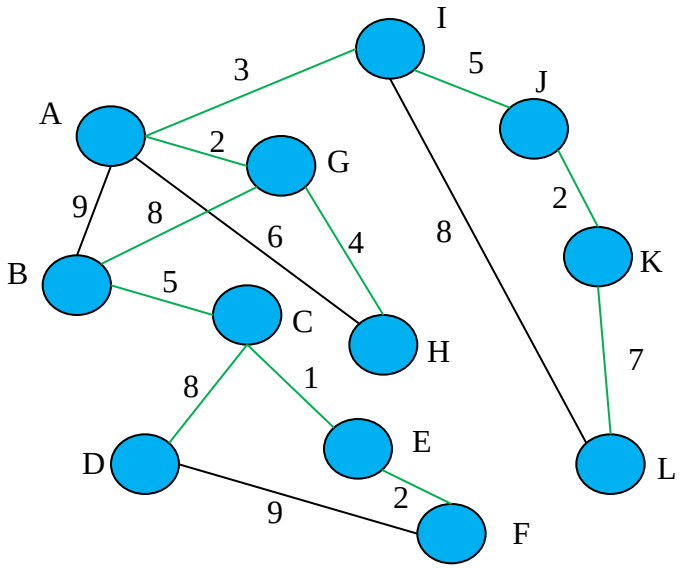
Exemplu (XIV)



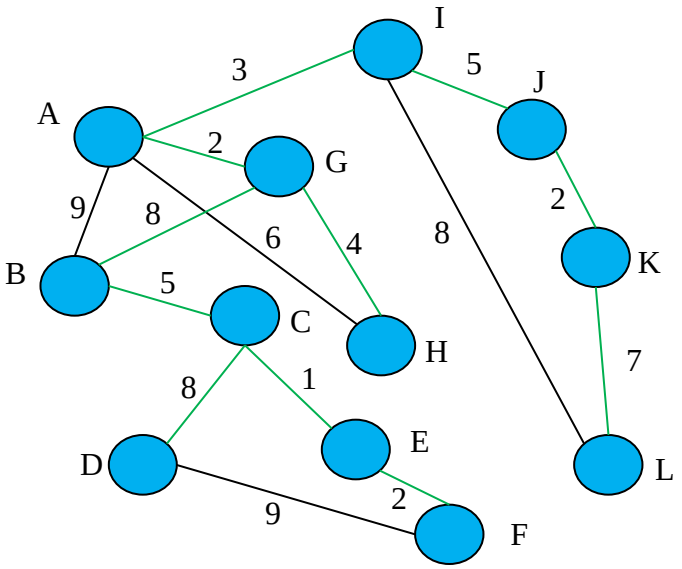
- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



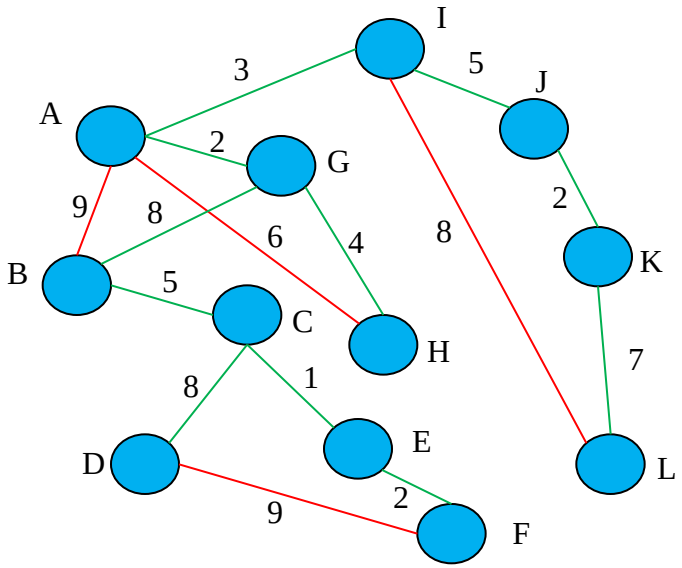
Exemplu (XV)

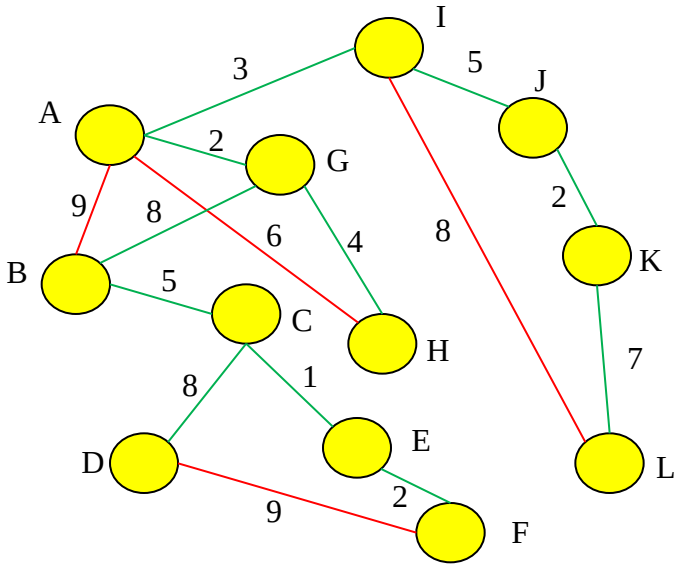


- CE -1
- EF -2
- AG-2
- JK-2
- AI-3
- GH-4
- BC-5
- IJ-5
- AH-6
- KL-7
- BG-8
- CD-8
- IL-8
- AB-9



Comparație Prim - Kruskal





Corectitudine (I)

- 1. arătăm că muchiile ignorate nu fac parte din Arb:
  - Pp. (u,v) a.î. Arb(u) = Arb(v)
    - → (u,v) creează un ciclu în Arb(u) (arborii sunt aciclici)
    - w(u,v) = max {w(u',v') | (u',v') ∈ Arb(u)} (din faptul că muchiile sunt sortate crescător)
    - → din Propr. 1 → (u,v) ∉ Arb

Corectitudine (II)

- 2. arătăm că muchiile pe care le adăugăm aparțin Arb:
- Dem prin inducție după muchiile adăugate în AMA:
- P_1: Avem nodurile u și v, cu muchia (u,v) având proprietatea w(u,v) = min {w(u',v') | (u',v') ∈ E} → din Propr. 2 → (u,v) ∈ Arb.
- $P_n \rightarrow P_{n+1}$:
  - Arb(u) != Arb(v)
  - → (u,v) muchie cu un capăt în Arb(u)
  - (u,v) are cel mai mic cost din muchiile cu un capăt în u (din faptul că muchiile sunt sortate crescător)
  - → din Propr. 2 → (u,v) ∈ Arb

Algoritmul lui Kruskal

- Kruskal(G,w)
  - A = ∅; // AMA
  - **Pentru fiecare** (v ∈ V)
    - Constr_Arb(v) // creează o mulțime formată din nodul respectiv // (un arbore cu un singur nod)
  - Sortează_asc(E,w) // se sortează muchiile în funcție de // costul lor
  - **Pentru fiecare** ((u,v) ∈ E) // muchiile se extrag în ordinea // costului
    - **Dacă** Arb(u) != Arb(v) **atunci** // verificăm dacă se creează ciclu
      - Arb(u) = Arb(u) ∪ Arb(v) // se reunesc mulțimile de noduri (arborii)
      - A = A ∪ {(u,v)} // se adaugă muchia sigură în AMA
  - **Întoarce** A

Complexitate?

Complexitate Kruskal

- Elementele algoritmului:
  - Sortarea muchiilor: O(ElogE) ≈ O(ElogV)
  - Arb(u) = Arb(v) – compararea a 2 mulțimi disjuncte
    {1,2,3} {4,5,6} – mai precis trebuie identificat dacă 2 elemente sunt în aceeași mulțime
  - Arb(u) ∪ Arb(v) – reuniunea a 2 mulțimi disjuncte într-una singură

- → depinde de implementarea mulțimilor disjuncte

Variante de implementare mulțimi disjuncte (Var. 1) – contraexemplu

Mulțimile implementate ca vectori (populară la laborator ☺) – NERECOMANDATĂ ☹

- Comparare (M_1, M_2)
  - **Pentru fiecare** (u ∈ M_1)
    - **Pentru fiecare** (v ∈ M_2)
      - **Dacă** (u = v) **Întoarce true**
  - **Întoarce false**
- Complexitate: V^2

- Reuniune (M1, M2)
  - **Pentru** i **de la** length(M_1) **la** length(M_1) + length(M_2)
    - $M_1[i] = M_2[i - length(M_1)]$
  - **Întoarce** M_1
- Complexitate: V

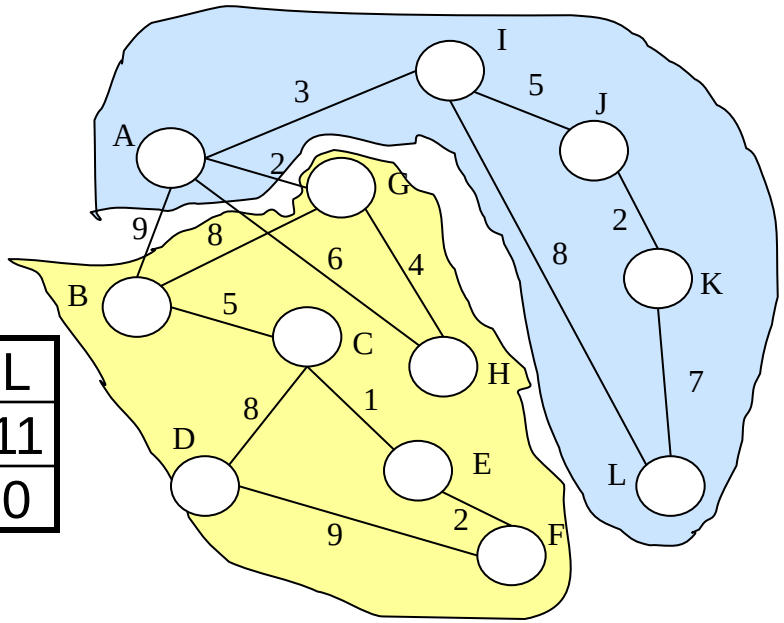
- numărul de apelări – E

- Complexitate totală: $E*V^2$

Variante de implementare mulțimi disjuncte (Var. 2) – Regăsire Rapidă

- Mulțimile - vectori
- Id - vector de id-uri conținând id-ul primului nod din componentă

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0



- Arb(u) != Arb(v)
  - Complexitate?
- Arb(u) = Arb(u) ∪ Arb(v)
  - Complexitate?

Complexitate maximă?

Regăsire rapidă (Complexitate)

- Compararea – O(1) // Căutare în vector și verificare dacă au același id
- Reuniunea – O(V) // trebuie să modifice toate id-urile nodurilor din una din mulțimi

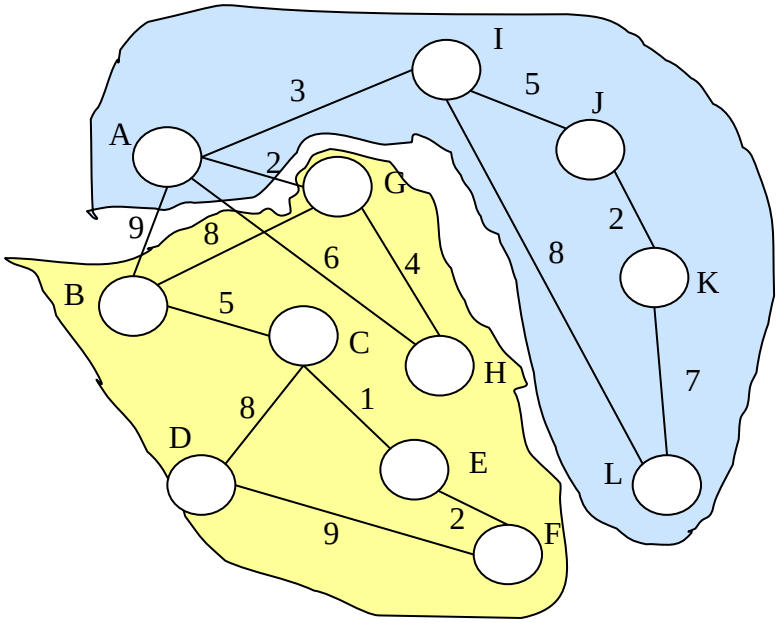
- Complexitate maximă
  - O(V * E) // E = numărul de reuniuni

- Inacceptabil pentru grafuri f mari

Variante de implementare mulțimi disjuncte (Var. 3) – Reuniune Rapidă

- se folosește tot un vector auxiliar de id-uri

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	1	1	2	2	4	1	6	8	8	9	10



- id[i] reprezintă părintele lui i
- pentru rădăcina arborelui id[i] = i

Variante de implementare mulțimi disjuncte – reuniune rapidă

- Comparare (u, v)
  - Verifică dacă 2 noduri au aceeași rădăcină;
  - Implică identificarea rădăcinii:

- Arb(u) // identificarea rădăcinii unei componente
  - **Cât timp** (i != id[i]) i = id[i];
  - **Întoarce** i

- Comparare (u, v)
  - **Întoarce** Arb(u) != Arb(v)

- Reuniune (u,v) // implică identificarea rădăcinii
  - v = Arb(v)
  - id[v] = u;

Complexitate?

Reuniune rapidă (Complexitate)

Compararea – O(V) // în cel mai rău caz, am o lista și trebuie să trec din părinte în părinte.

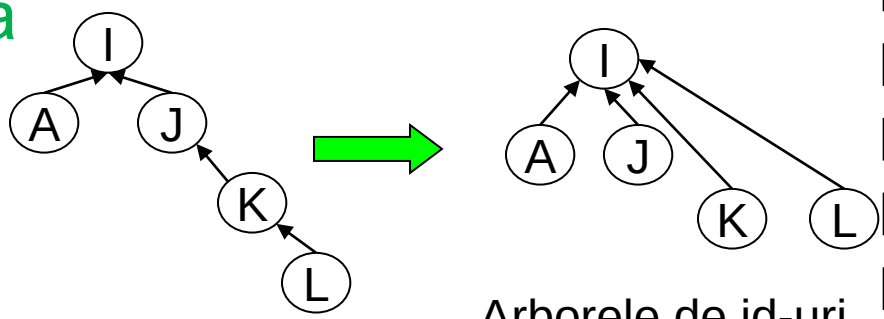
Reuniunea – O(V) // implică regăsirea rădăcinii pentru a ști unde se face modificarea

Optimizarea reuniunii rapide (1)

- Reuniune rapidă balansată
- Se menține numărul de noduri din fiecare subarbore.
- Se adaugă arborele mic la cel mare pentru a face mai puține căutări → înălțimea arborelui e mai mică și numărul de căutări scade de la V la lg V.
- Complexitate:
  - Compararea – O(lg V)
  - Reuniune – O(lg V)

Optimizarea reuniunii rapide (2)

- Reuniune rapidă balansată cu compresia căii:



Arborele de noduri

Arborele de id-uri

K: id[K] = id[J] = I

L: id[L] = id[K] = I

- Identificarea rădăcinii:
  - Arb(u)
    - **Cât timp** (i != id[i])
      - id[i] = id[id[i]];
      - i = id[i];
    - **Întoarce** i
- Menține o înălțime redusă a arborilor.

Implementare în Java și exemplu la [4]

Complexitate după optimizări

- Orice secvență de E operații de căutare și reuniune asupra unui graf cu V noduri consumă $O(V + E*\alpha(V,E))$.
- α – de câte ori trebuie aplicat lg pentru a ajunge la 1.
  - În practică este ≤ 5.
- → În practică O(E)

Complexitate Kruskal

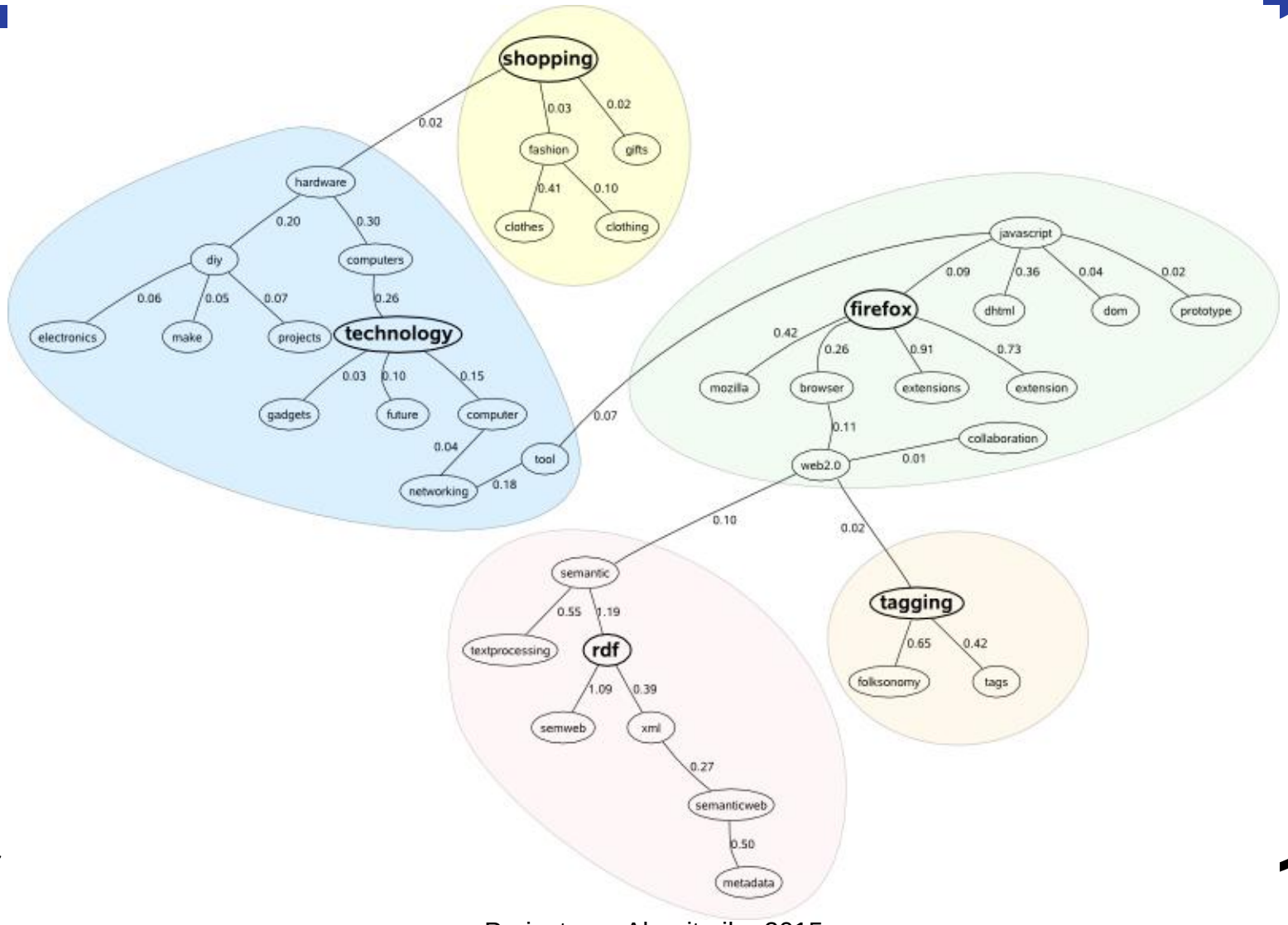
- Max (complexitate sortare, complexitate operații mulțimi) = max(O(ElogV), O(E)) = O(ElogV)

- → Complexitatea algoritmului Kruskal este dată de complexitatea sortării costurilor muchiilor.

Aplicație practică

- K-clustering
  - Împărțirea unui set de obiecte în grupuri astfel încât obiectele din cadrul unui grup să fie “apropiate” considerând o “distanță” dată.
- Utilizat în clasificare, căutare (web search de exemplu).
- Dându-se un întreg K să se împartă grupul de obiecte în K grupuri astfel încât spațiul dintre grupuri să fie maximizat.

Exemplu


shopping
0.02
0.03
0.02
fashion
gifts
0.41
0.10
clothes
clothing
hardware
0.20
0.30
diy
computers
0.06
0.05
0.07
0.26
electronics
make
projects
technology
0.03
0.10
0.15
gadgets
future
computer
0.04
tool
networking
0.18
0.07
javascript
0.09
0.36
0.04
0.02
firefox
dhtml
dom
prototype
0.42
0.26
0.91
0.73
mozilla
browser
extensions
extension
0.11
collaboration
web2.0
0.01
0.10
0.02
semantic
tagging
0.55
1.19
0.65
0.42
textprocessing
rdf
folksonomy
tags
1.09
0.39
semweb
xml
0.27
semanticweb
0.50
metadata

Algoritm

- Se formează V clustere (un cluster per obiect).
- Găsește cele mai apropiate 2 obiecte din clustere diferite și unește cele 2 clustere.
- Se oprește când au mai rămas k clustere.
- → chiar algoritmul Kruskal

ÎNTREBĂRI?

Bibliografie curs 11

[1] C. Giumale – Introducere in Analiza Algoritmilor - cap. 5.6

[2] Cormen – Introducere in algoritmi - cap. 27

[3] Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/Ford-Fulkerson_algorithm