Universidad de Carabobo - Facultad de Ingenieria - Direccion de Postgrado
Programa: Maestria Matematica y Computacion - **Asignatura**: Introduccion al Calculo
Alumno: Ronald Medina - **Cedula**: V-16291029
Lapso: 03 - 2022 - **Fecha**: 14 - 03 - 2023
Titulo: Asignacion - **Parte 13 y 14)** Limites y Continuidad

```
> restart;
> with( plots ):
```

Ejercicio 13.1 $\lim_{x \to \pi} \cot(x)$

```
> k:=x->(cot(x));
```

$$k := x \to \cot(x) \quad \textbf{(1.1)}$$

Se grafica la funcion cotangente.

```
> plot(k(x),x=-10..10,
  title      ="Grafico 1",
  titlefont  =["Dubai",bold,15],
  color      ="blue",
  legend     =typeset(k(x)),
  discont    =true,
  legendstyle=[font=["Courant",roman, 14]]);
```

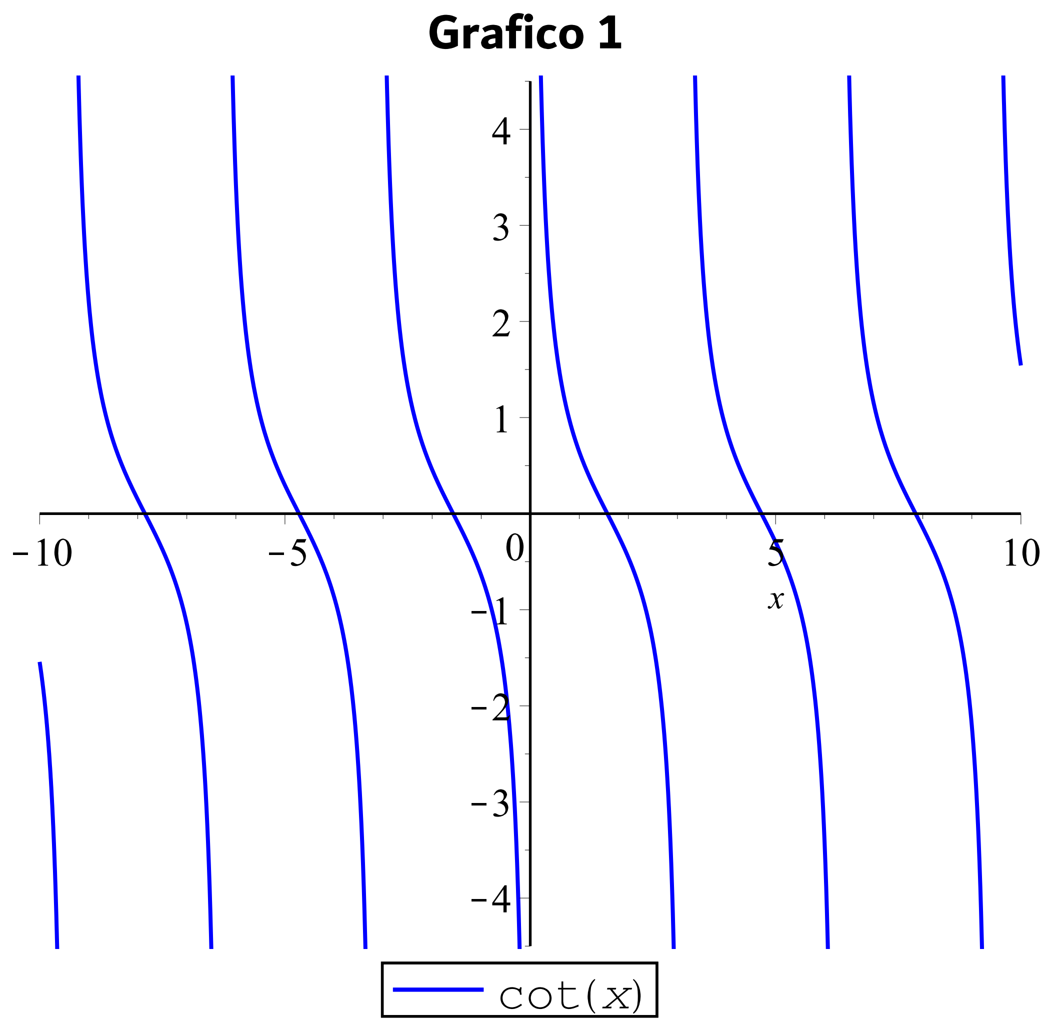
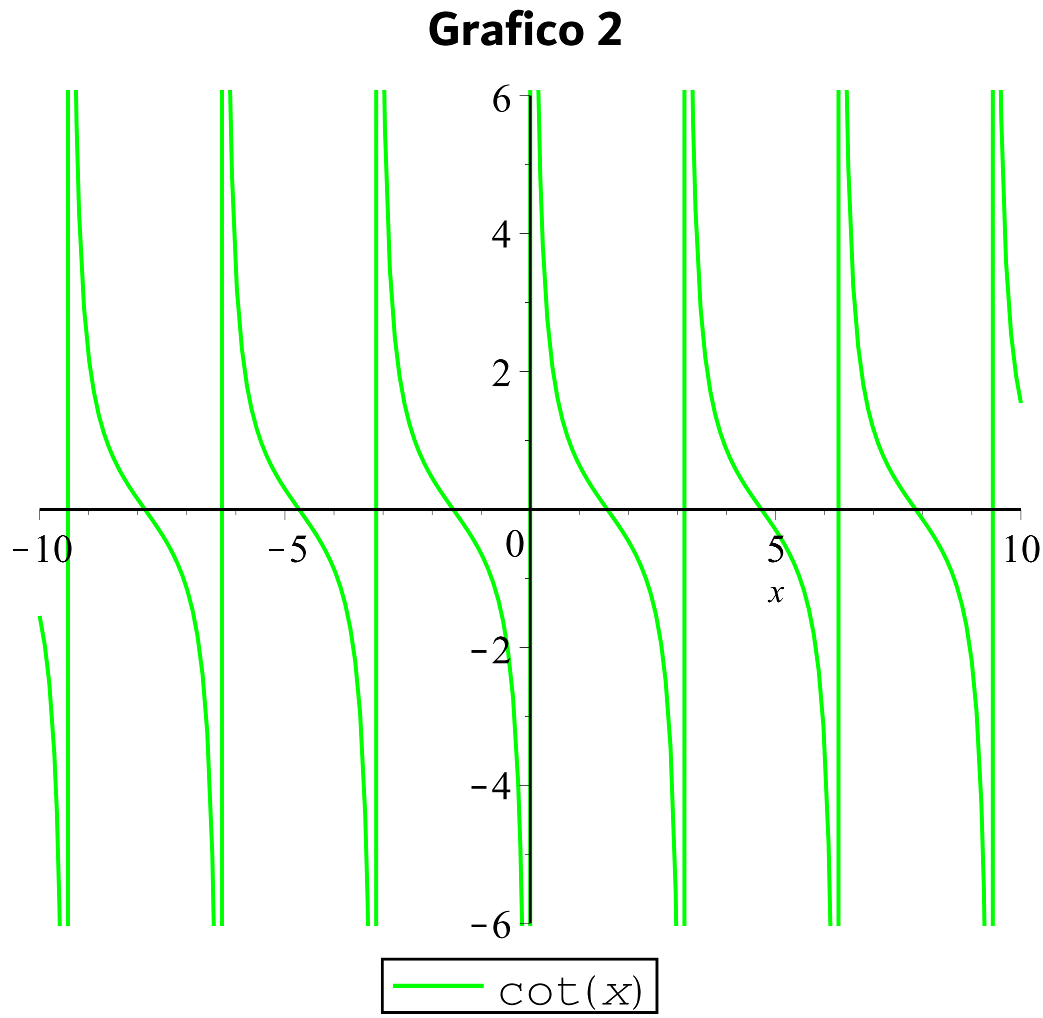


Grafico cot(x) donde se muestran las asintotas.

```
> plot(k(x),x=-10..10,
  title      ="Grafico 2",
  titlefont  =["Dubai",bold,15],
  color      ="green",
  legend     =typeset(k(x)),
  legendstyle=[font=["Courant",roman, 14]]);
```




```
> limit(k(x),x=Pi, left); #Se calcula el limite de la funcion, evaluando pi
  por la inzquierda
```

$$-\infty \quad (1.2)$$

```
> limit(k(x),x=Pi, right);   #Se calcula el limite de la funcion, evaluando
  pi por la derecha
```

$$\infty \quad (1.3)$$

```
> limit(k(x),x=Pi); #Como los limites por la izquierda y derecha son
  diferentes. El limite no esta definido. Se confirma usando la funcion
  limite total
```

$$\mathit{undefined} \quad (1.4)$$

Ejercicio 13.2 Derivabilidad de $f := x \rightarrow |x^2 - 1|$ *en* $x = 1$

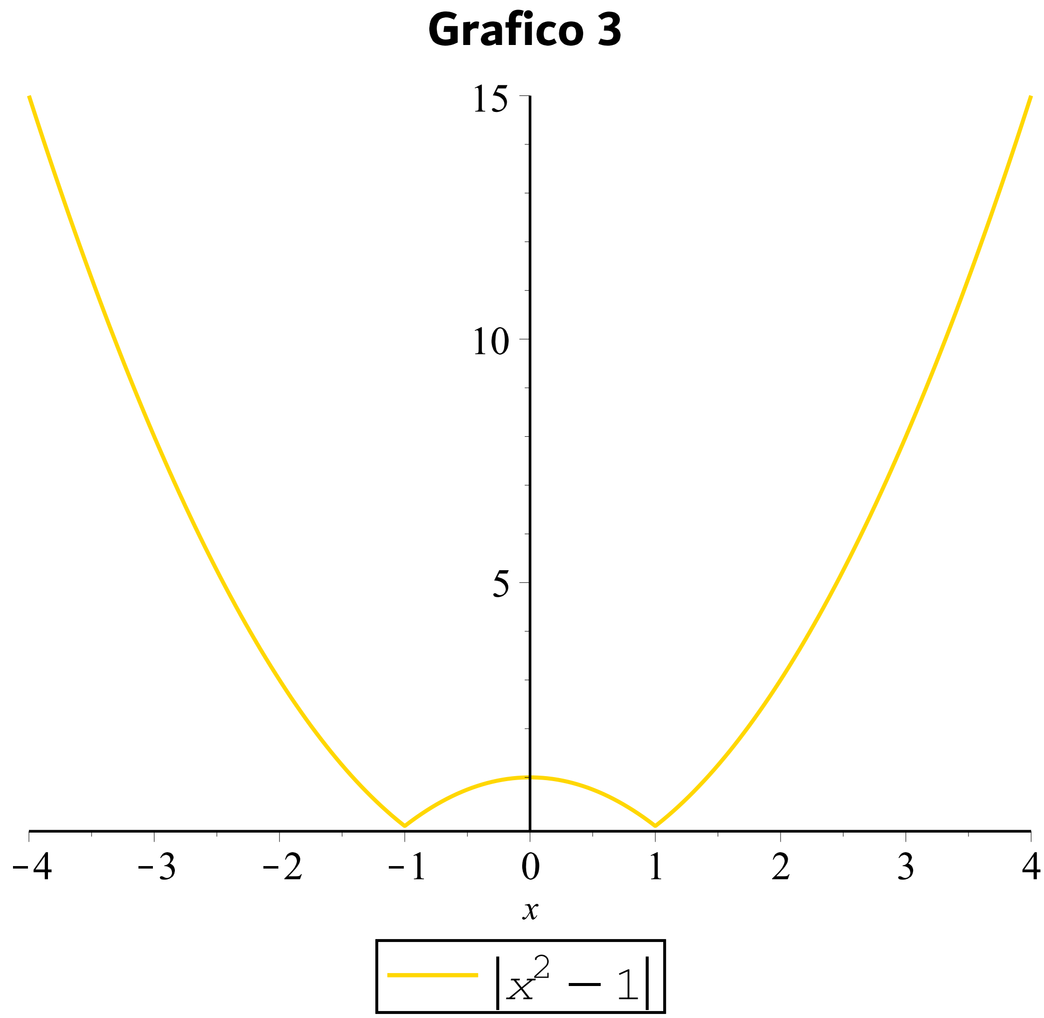
```
> f1:=x->abs(x^2-1);
```

$$f1 := x \rightarrow |x^2 - 1| \quad (2.1)$$

Se estudiara la derivabilidad de la función f(x) en el punto x=1

Se grafica la funcion $|x^2 - 1|$

```
> plot(f1(x),x=-4..4,
  title      ="Grafico 3",
  titlefont  =["Dubai",bold,15],
  color      ="Gold",
  legend     =typeset(f1(x)),
  legendstyle=[font=["Courant",roman, 14]]);
```




```
> f1(1); #al evaluar el punto en la funcion, esta definida, es continua en R
```

$$0 \tag{2.2}$$

```
> limit(f1(x),x=1, left); #Se comprueba que los limites laterales son
  iguales
```

$$0 \tag{2.3}$$

```
> limit(f1(x),x=1, right);
```

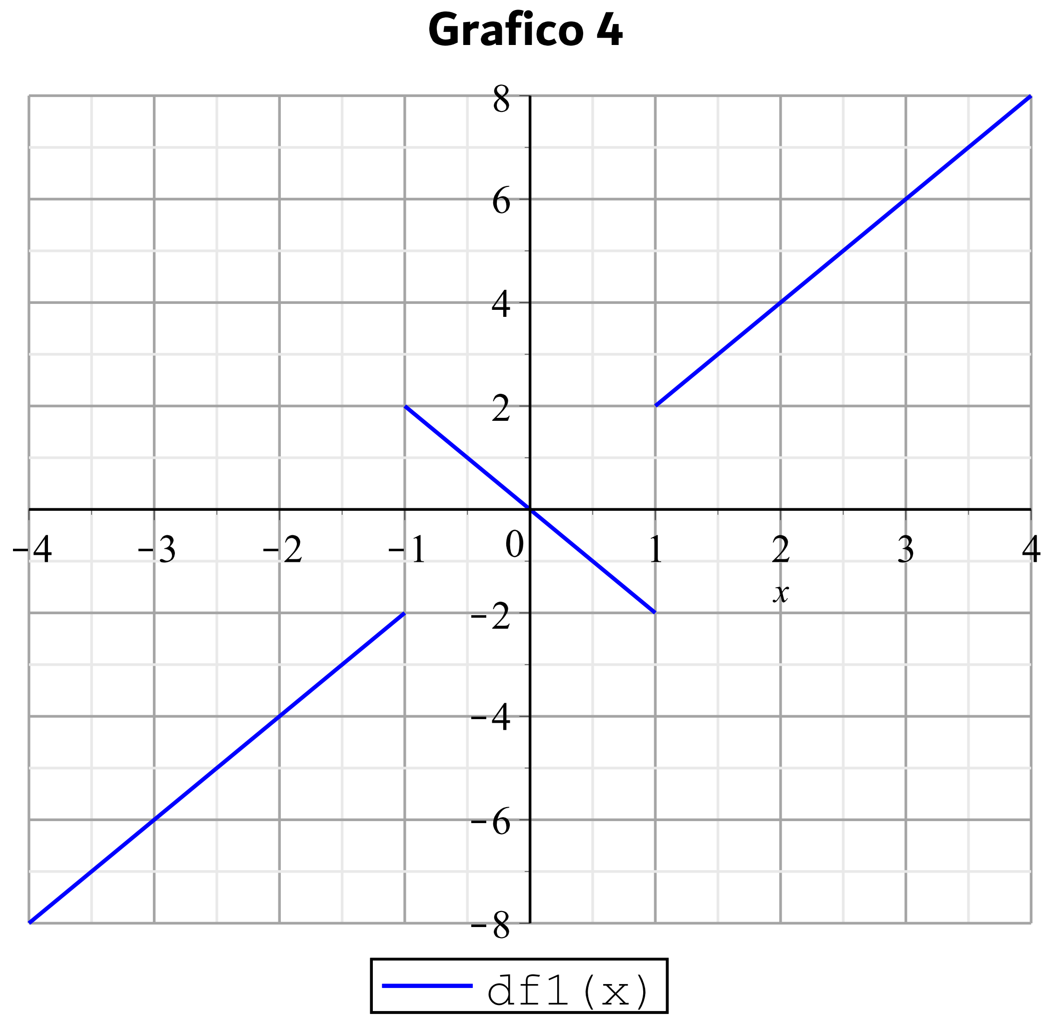
$$0 \tag{2.4}$$

```
> df1:=diff(f1(x),x); #Se calcula derivada de f(x)
```

$$df1 := 2\,x\,\mathrm{abs}\left(1, x^2 - 1\right) \tag{2.5}$$

Se va comprobar la derivabilidad en x=1, se obtuvo la derivada de la funcion y su grafica, (no se muestra las asintotas en x=1, x=-1.

```
> plot(df1(x),x=-4..4,
  title      ="Grafico 4",
  titlefont  =["Dubai",bold,15],
  color      ="blue",
  gridlines  =true,
  legend     =("df1(x)"),
  discont    =true,
  legendstyle=[font=["Courant",roman, 14]]);
```




```
> eval(df1,x=1); #al evular el punto en la derivada da error
Error, (in simpl/abs) abs is not differentiable at 0
> eval(df1,x=1.01);
```

$$2.02 \quad (2.6)$$

```
> eval(df1,x=0.99);
```

$$-1.98 \quad (2.7)$$

Al evaluar valores en df1(x) por la izquierda y a la derecha de x=1, se obtienen valores distintos, se comprueba que no es derivable en x=1. En el grafico 4 se observa como salta de -2 a 2 al arededor de x=1.

Ejercicio 14.1 $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

```
> f5:=x->x^2;
```

$$f5 := x \to x^2 \quad (3.1)$$

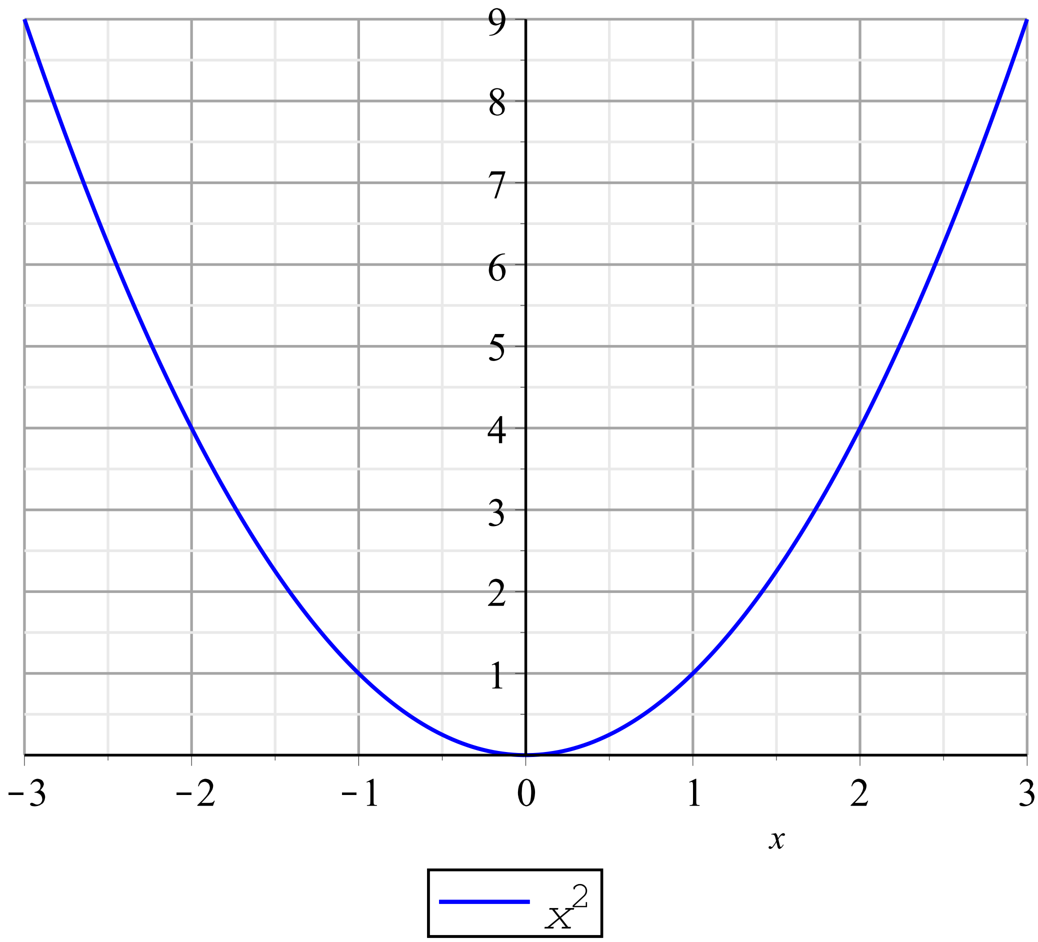
Se usa la funcion limite para ver el resultado de limite donde a = 1, y L=1

```
> limit(f5(x),x=1);
```

$$1 \quad (3.2)$$

```
> plot(f5(x),x=-3..3,
  title      ="Grafico 5",
  titlefont  =["Dubai",bold,15],
  color      ="blue",
  legend     =typeset(f5(x)),
  gridlines= true,
  legendstyle=[font=["Courant",roman, 14]]);
```

Grafico 5



$f5(x) = x^2$, para cualquier intervalo abierto que contenga a x=1, la funcion esta definida. El objetivo es demostrar que para cualquier ε>0 existe un δ>0 tal que:

$$si\ ,0 < |x-a| < \delta,\ entonces\ |f(x)-L| < \varepsilon:$$

$$si\ ,0 < |x-1| < \delta,\ entonces\ |x^2-1| < \varepsilon:$$

Aplicando el algebra en la inecuacion referida a ε, se tiene:

> $|x^2-1| < \varepsilon$

$$|x^2-1| < \varepsilon \tag{3.3}$$

> $factor(|x^2-1|) < \varepsilon;$

$$|(x-1)\ (x+1)| < \varepsilon \tag{3.4}$$

Usando la factorizacion del polinomio y propiedades del valor absoluto, se llega a esta expresion.

```
> abs(x-1)*abs(x+1) < varepsilon;
```

$$|x-1|\ |x+1| < \varepsilon \tag{3.5}$$

```
> # simplify abs(x-1)*abs(x+1)
  simplify(abs(x-1)*abs(x+1)) < varepsilon;
```

$$|(x-1)\ (x+1)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

$$si\ ,0 < |x-1| < \delta,\ entonces\ |x-1|\cdot|x+1| < \varepsilon;$$

Se debe colocar una rectriccion adicional a δ, para conseguir una desigualdad que contenga $|x+1|$. Esto se logra al escoger un intervalo abierto, que implique que $\delta \leq 1$.

$$0 < |x-1| < \delta,\ y\ \ \delta \leq 1.$$

$$0 < |x-1| < 1$$
$$-1 < x-1 < 1$$
$$-1+2 < x-1+2 < 1+2$$
$$1 < x+1 < 3$$

$|x+1| < 3$. La relacion entre δ *y* ε nos queda:

$0 < |x-1| < \delta$, *y* $\delta \leq 1$. Es decir:

$0 < |x-1| < \delta$, *entonces* $|x+1| < 3$.

Tomando las dos expresiones anteriores se puede afirmar:

$$|x-1| \cdot |x+1| < 3\,\delta;$$

El objetivo del limite por deficion, es colocar δ en terminos de ε. En este caso:

$$3\,\delta \leq \varepsilon$$

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Se tienen dos restricciones, $\delta \leq 1$ *y* $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Para que ambas se cumplan , se debe tomar el menor de los dos valores.
Como esta en funcion de ε, las restricciones se puden escrbir como:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

De esta forma, para cualquier valor de ε, la eleccion de $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, hace verdadera la expresion:

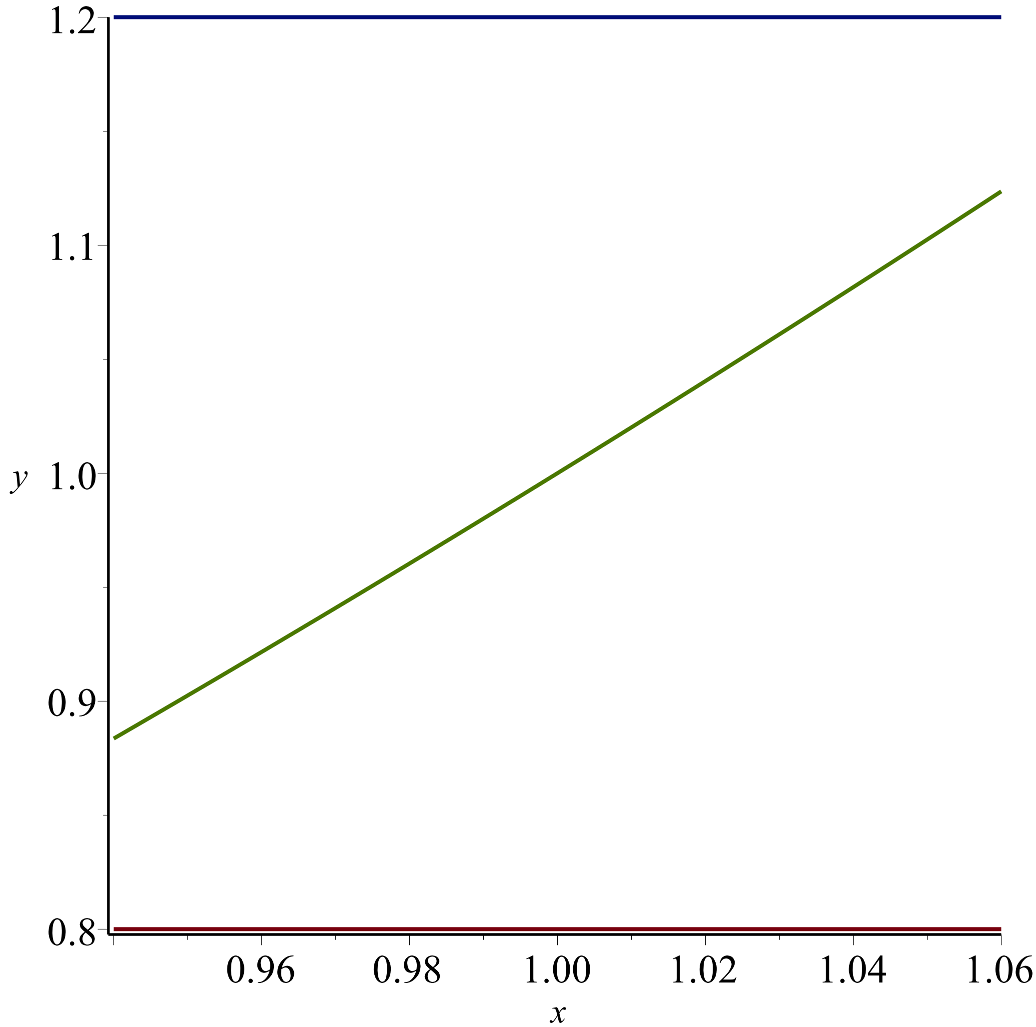
$$si,\ 0 < |x-1| < \delta,\ entonces\ \left|x^2-1\right| < \varepsilon:$$

Esto demuestra que:

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

Ejemplo: Al escoger un valor de $\varepsilon = 0.2$, δ seria igual al min($\delta = 0.66$, $\delta \leq 1$). El menor valor de las restriciones seria $\delta = 0.66$. El siguiente grafico muestran los entornos ε y δ,alrededor de x=1, $f5(x) = 1$.

```
> plot([1-0.2,1+0.2,f5(x)],x=1-0.06..1+0.06,y=1-0.2..1+0.2);
```



1.2
1.1
y
1.0
0.9
0.8
0.96
0.98
1.00
1.02
1.04
1.06
x