A Independência do Caminho na Integral do Trabalho

Trabalho 1 - Grupo 16

Alex Campbell e Souza - Engenharia de Sistemas
Caio Lucas Gomes Silva - Matemática
Pedro Mansur Gamarano - Matemática

UFMG
Universidade Federal de Minas Gerais
Fundamentos de Eletromagnetismo

25 de Agosto de 2020

O Trabalho (W)

O trabalho é a grandeza física associada a mudança de energia. Ele acontece quando aplicamos uma força sobre um corpo e este sofre um deslocamento. O trabalho de uma força constante pode ser escrito como:

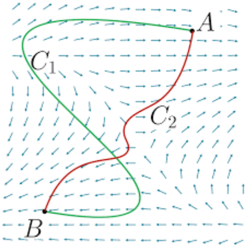
$$W = F * d * cos(\theta) \tag{1}$$

Já o trabalho de uma força não constante pode ser escrito como:

$$W = \int_a^b \vec{F} d\vec{r} \tag{2}$$

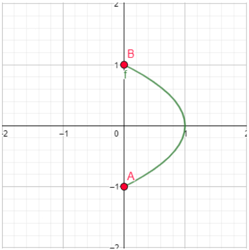
O **método da idependência do caminho** é possivel apenas em campos conservativos. Um campo é conservativo quando ele é obtido atraves do cálculo do vetor gradiente de uma função. O campo elétrico é um exemplo de campo conservativo.

A **independencia do caminho** diz que, em campos conservativos, quaisquer integrais de linha que possuem os mesmos pontos inicial e final resultam em um mesmo valor, independente da curva entre eles. Utilizando o trabalho como exemplo:



$$W = \int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = f(b) - f(a)$$
$$W = \int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = f(b) - f(a)$$

Dado o campo conservativo $F(x,y) = (x^2, \cos(y))$, calcule o trabalho de deslocamento sobre a curva $c_1(t) = (1 - t^2, t)$ que tem ponto inicial $A(0,-1)$ e final $B(0,1)$:



$$\int \vec{F} d\vec{r} = \begin{cases} F(x,y) = (x^2, \cos(y)), & \\ c_1 = (1 - t^2, t) & \textit{sendo } t \in [-1,1] \textit{ e} \\ c_1 = (0, t) & \textit{sendo } t \in [-1,1] \end{cases}$$

Resolução - Exemplo

Usando c_1:
$F(x,y) = (x^2, \cos(y)) = ((1-t^2), \cos(t))$
$d\vec{r}$
$c(t) = (1-t^2, t) = (1-(-1)^2, 1) = (0,1)$

$$\int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^{1} ((1-t^2)^2, \cos(t)) \cdot (0,1) dt$$

$$\int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \cos(t) dt$$

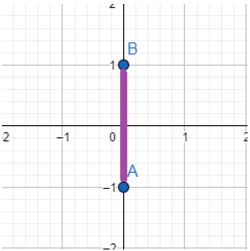
$$\int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = \sin(t)|_{-1}^{1}$$

$$\int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = \sin(1) - \sin(-1)$$

$$\int_{c_1} \vec{F} d\vec{r} = 2 * \sin(1)$$

Exemplo

Utilizando a independencia do caminho podemos calcular a mesma integral utilizando a reta $c_2(t) = (0, t)$, que liga os pontos A e B.



Usando c_2:
$F(x,y) = (x^2, \cos(y)) = (0, \cos(t))$
$d\vec{r}$
$c(t) = (0,t) = (0,1)$

$$\int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (0, \cos(t)) \cdot (0,1) dt$$
$$\int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \cos(t) dt$$
$$\int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = \sin(t)|_{-1}^{1}$$
$$\int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = \sin(1) - \sin(-1)$$
$$\int_{c_2} \vec{F} d\vec{r} = 2 * \sin(1)$$

Esta técnica pode ser muito útil para resolver problemas complexos envolvendo forças conservativas. Uma ferramenta importante dentro do estudo do eletromagnetismo.

O código fonte deste documento pode ser encontrado em:
https://tinyurl.com/yya8nuau

Referências I

[Física III - Eletromagnetismo, 2015] YOUNG - FREEDMAN.
9788543018157,
Pearson.

[Campos vetoriais conservativos]
https://pt.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals-in-vector-fields-articles/a/conservative-fields

[Integrais de Linha - Independência do Caminho]
Responde Aí.
https://www.youtube.com/watch?v=ONpa0kJ5TAs

[Integral de Linha de Função Vetorial (VETORIAL)]
Toda a Matemática
https://www.youtube.com/watch?v=r_NwdXff0Ok

Referências II

[Campo Conservativo (VETORIAL)]
Toda a Matemática
https://www.youtube.com/watch?v=R1xmPwTq7Q0