Lógica - INET

Soluciones Práctico 2 - Definición inductiva de conjuntos

Ejercicio 1

- 1. Conjuntos que satisfecen las clausulas: N (naturales), Z (enteros), Q (racionales), R (reales).
  2. Mínimo conjunto : N
  3. (a) por (a) $0 \in N$
     (b) por (b) $1 \in N$
     (c) por (b) $2 \in N$
- 1. Conjuntos que satisfecen las clausulas: Par (naturales pares mayores que 0),N (naturales), Z (enteros), Q (racionales), R (reales).
  2. Mínimo conjunto : Par
  3. (a) por (a) $2 \in Par$
     (b) por (b) $4 \in Par$
     (c) por (b) $6 \in Par$
- 1. Conjuntos que satisfecen las clausulas: Z (enteros), Q (racionales), R (reales).
  2. Mínimo conjunto : Z
  3. (a) por (a) $3 \in Z$
     (b) por (b) $4 \in Z$
     (c) por (c) aplicada dos veces $2 \in Z$

Ejercicio 2

1. naturales múltiplos de 3. Llamamos $Mult$ al conjunto.
   (a) $0 \in Mult$
   (b) Si $n \in Mult$ entonces $n + 3 \in Mult$
2. enteros múltiplos de 3. Llamamos$Mult_Z$ al conjunto.
   (a) $0 \in Mult_Z$
   (b) Si $n \in Mult_Z$ entonces $n + 3 \in Mult_Z$
   (c) Si $n \in Mult_Z$ entonces $n - 3 \in Mult_Z$

3. naturales potencias de 2. Llamamos$Pot2$ al conjunto.
   (a) $1 \in Pot2$
   (b) Si $n \in Pot2$ entonces $2.n \in Pot2$

Ejercicio 3

1. $\epsilon \in \Sigma^*$
2. Si $\alpha \in \Sigma^*$ entonces $a\alpha \in \Sigma^*$
3. Si $\alpha \in \Sigma^*$ entonces $b\alpha \in \Sigma^*$
4. Si $\alpha \in \Sigma^*$ entonces $c\alpha \in \Sigma^*$

Ejercicio 4

1. Palabras en Δ:
   (a) por 1) $\epsilon \in \Delta$
   (b) por 2) $bbc \in \Delta$ tomando $\alpha = \epsilon$
   (c) por 3) $bba \in \Delta$ tomando $\alpha = \epsilon$
2. Palabras no en Δ:

   Como excepto ϵ que no tiene letras, las palabras empiezan en b, no puedo formar palabras que empiecen en a o en c. Luego las siguientes palabras no pertenecen a Δ:

   (a) $a \notin \Delta$
   (b) $c \notin \Delta$
   (c) $ab \notin \Delta$

Ejercicio 5

1. Por clausula 3 tomando $\alpha = \epsilon$ y $\beta = \epsilon$ tenemos que $bcb \in \Gamma$.
2. Por clausula 2 $a \in \Gamma$. Por clausula 3 tomando $\alpha = a$ y $\beta = a$ tenemos que $bacab \in \Gamma$.

3. Para formar $bccb$ tiene que ser:

   (a) $\alpha = c$ y $\beta = \epsilon$ o
   (b) $\alpha = \epsilon$ y $\beta = c$

   Observar que si tomo α y β ambos distintos de ϵ la palabra tendría largo mayor a 4. Entonces tiene que ser uno de ellos ϵ y el otro igual a c. Pero c no pertenece al lenguaje luego no puedo construir $bccb$.

4. Tomo $\alpha = a$ y $\beta = bcb$ y obtengo $bacbcbb \in \Gamma$

Ejercicio 6

- 1. $\epsilon \in A$
  2. si $w \in A$ entonces $wa \in A$
- 1. $\epsilon \in B$
  2. si $w \in B$ entonces $wb \in B$
- 1. $\epsilon \in AB$
  2. si $w \in AB$ entonces $awb \in AB$
- 1. $\epsilon \in Cap$
  2. $1 \in Cap$
  3. $2 \in Cap$
  4. $3 \in Cap$
  5. si $w \in Cap$ entonces $1w1 \in AB$
  6. si $w \in Cap$ entonces $2w2 \in AB$
  7. si $w \in Cap$ entonces $3w3 \in AB$

Ejercicio 7

a) 1. Por clausula 2 tomando $\alpha = \epsilon$ tenemos que $b \in \Delta$.
   2. Por clausula 3 tomando $\alpha = \epsilon$ tenemos que $a \in \Delta$.
   3. c no pertenece al lenguaje. No hay ninguna clausula que introduzca c en una palabra.

4. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 3) tengo que $a \in \Delta$. Considero clausula 2) con $\alpha = a$ obtengo $ab \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = ab$ obtengo $aba \in \Delta$.
5. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 2) tengo que $b \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = b$ obtengo $ba \in \Delta$. Considero clausula 2) con $\alpha = ba$ obtengo $bab \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = bab$ obtengo $baba \in \Delta$. Considero clausula 2) con $\alpha = baba$ obtengo $babab \in \Delta$.
6. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 3) tengo que $a \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = a$ obtengo $aa \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = aa$ obtengo $aaa \in \Delta$. Considero clausula 3) con $\alpha = aaa$ obtengo $aaaa \in \Delta$.

b)
1. Por clausula 2 tomando $\alpha = \epsilon$ tenemos que $b \in \Gamma$.
2. Por clausula 3 tomando $\alpha = \epsilon$ tenemos que $a \in \Gamma$.
3. c no pertenece al lenguaje. No hay ninguna clausula que introduzca c en una palabra.
4. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 3) tengo que $a \in \Gamma$. Considero clausula 2) con $\alpha = a$ obtengo $ba \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = ba$ obtengo $aba \in \Gamma$.
5. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 2) tengo que $b \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = b$ obtengo $ab \in \Gamma$. Considero clausula 2) con $\alpha = ab$ obtengo $bab \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = bab$ obtengo $abab \in \Gamma$. Considero clausula 2) con $\alpha = abab$ obtengo $babab \in \Gamma$.
6. Tomo $\alpha = \epsilon$ en 3) tengo que $a \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = a$ obtengo $aa \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = aa$ obtengo $aaa \in \Gamma$. Considero clausula 3) con $\alpha = aaa$ obtengo $aaaa \in \Gamma$.

c) son el mismo conjunto por lo cual se cumplen los tres:

$\Delta \subseteq \Gamma \quad \Gamma \subseteq \Delta \quad \Delta = \Gamma$

Ejercicio 8

a)
1. Por clausula 1 tomando $n = 0$ tenemos que $(0, 0) \in S$.
2. Los elementos en S son pares de naturales, luego $0 \notin S$.
3. Los elementos en S son pares de naturales luego $(\pi, \pi) \notin S$
4. Por clausula 1 tomando $n = 2$ tenemos que $(2, 2) \in S$. Por clausula 2 aplicada a $(n, m) = (2, 2)$ tenemos $(2, 3) \in S$.
5. Por aplicación de clausula 1) pertenecen los objetos de la forma (n, n). Entonces, como $3 > 2$ para formar este elemento tengo que aplicar la clausula 2). Supongamos $(3, 2)$ fue formado aplicando la clausula 2), entonces tiene que ser $(n, m) = (3, 1)$. Por igual razonamiento tratemos de formar el elemento $(3, 1)$ aplicando la clausula 2), tiene que ser $(n, m) = (3, 0)$. Como la conclusión de la clausula 2) es de la forma $(n, m + 1)$ y no es posible tomar un m tal que $m + 1 = 0$ no tengo como construir el elemento $(3, 0)$ aplicando las clausulas.

b) Definición por comprensión de S:

$S = \{(n, m) \in (N \times N)/n \leq m\}$

Ejercicio 9

a)
1. Por clausula 1 tomando $n = 0$ tenemos que $(0, 0) \in Q$.
2. Los elementos en Q son pares de naturales, luego $0 \notin Q$.
3. Los elementos en Q son pares de naturales luego $(\pi, \pi) \notin Q$
4. Por clausula 1 tomando $n = 1$ tenemos que $(0, 1) \in Q$. Por clausula 2 aplicada a $(n, m) = (0, 1)$ tenemos $(1, 2) \in Q$. Por clausula 2 aplicada a $(n, m) = (1, 2)$ tenemos $(2, 3) \in Q$.
5. Por aplicación de clausula 1) pertenecen los objetos de la forma $(0, n)$. Entonces, como $3 \neq 0$ para formar este elemento tengo que aplicar la clausula 2). Supongamos $(3, 2)$ fue formado aplicando la clausula 2), entonces tiene que ser $(n, m) = (2, 1)$. Por igual razonamiento tratemos de formar el elemento $(2, 1)$ aplicando la clausula 2), tiene que ser $(n, m) = (1, 0)$. Como la conclusión de la clausula 2) es de la forma $(n + 1, m + 1)$ y no es posible tomar un m talque $m + 1 = 0$ no tengo como construir el elemento $(1, 0)$ aplicando las clausulas.

b) Definición por comprensión de Q:

$Q = \{(n, m) \in (N \times N)/n \leq m\}$