INET
Lógica
Teórico 2
Definición de Conjuntos Inductivos

1 Conjuntos Inductivos

1.1 Formas de definir conjuntos

Hay tres formas de definir conjuntos:

- Por extensión: damos cada uno de los elementos del conjunto. El conjunto tiene que ser finito.

  Por ejemplo : $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- Por comprensión: damos una propiedad que deben satisfacer los elementos del conjunto.

  Por ejemplo : $A = \{x \in N/1 \leq x \leq 4\}$ (observar este conjunto A es el mismo que definimos en el caso anterior). Podemos definir conjuntos infinitos, por ejemplo: $B = \{x \in N/$ el resto de dividir x entre 2 es 0 $\}$

- Por inducción (es lo que veremos en este capítulo). Decimos cómo podemos construir los elementos del conjunto.

1.2 Definición Inductiva de Conjuntos

La idea de la definición inductiva de conjuntos es:

- Decimos que ciertos elementos concretos pertenecen al conjunto (llamamos a esto pasos base).

- Decimos como construir nuevos elementos a partir de elementos ya construidos (llamamos a esto pasos inductivos).

Ántes de definir conjuntos inductivamente, veamos que elementos constituyen los conjuntos matemáticos más usados.

Naturales (los denotamos por N).
estan formados por los elementos: $0, 1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots$

Enteros (los denotamos por Z).
estan formados por los elementos: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Racionales (los denotamos por Q).
estan formados por pares de enteros, el segundo elemento del par distinto de 0. Los enteros se corresponden con el numerador y el denominador.

Reales (los denotamos por R).
es la union de los racionales y los irracionales.
Por ejemplo $1/3$ es racional y $\sqrt{2}$ es irracional.
Un numero a es irracional si no existen numeros enteros b y c tal que $a = b/c$.
Observar que los irracionales tienen parte fraccionaria
(a la derecha del punto decimal) infinita.

Ejemplo: Cómo definir los Naturales?

Decimos

paso base i) $0 \in N$
paso inductivo ii) Si $n \in N$ entonces $n + 1 \in N$

Observar que hay muchos conjuntos que satisfacen las clausulas ya que tanto los enteros (Z) como los racionales (Q), como los reales (R) las cumplen. Por ejemplo, los racionales cumplen lo siguiente:

paso base i) $0 \in Q$
paso inductivo ii) Si $n \in Q$ entonces $n + 1 \in Q$

o sea los racionales satisfacen las clausulas aunque tienen además otros elementos.

Resolvemos la ambiguedad diciendo que el conjunto que estamos definiendo (N en este caso) es el menor conjunto que satisface las clausulas.

Observe que para construir elementos del conjunto comenzamos siempre por los pasos base. Por ejemplo para demostrar que $2 \in N$, seguimos los siguientes pasos:

por 1) $0 \in N$
por 2) tomando $x = 0$ obtenemos $1 \in N$
por 2) tomando $x = 1$ obtenemos $2 \in N$

de ahora en más no diremos que valor asignamos a x, simplemente aplicaremos una clausula al elemento construido en el paso anterior. El ejemplo anterior quedará como sigue:

por 1) $0 \in N$
por 2) $1 \in N$
por 2) $2 \in N$

Ejemplo: Cómo definir los Naturales Pares?

Decimos

1. $0 \in P$
2. Si $n \in P$ entonces $n + 2 \in P$

otra forma de definir el mismo conjunto:

1. $0 \in P$
2. $2 \in P$
3. Si $n \in P$ entonces $n + 4 \in P$

Ejemplo: Cómo definir los Naturales Impares?

Decimos

1. $1 \in I$
2. Si $n \in I$ entonces $n + 2 \in I$

1.3 Definición Inductiva de Lenguajes

Se llama Lenguaje a un conjunto de palabras construidas utilizando un conjunto dado de símbolos. Al conjunto de símbolos se le llama alfabeto. En la definición inductiva damos las reglas de formación de elementos del lenguaje.

Si Σ es un alfabeto, definimos Σ^* como el conjunto de todas las palabras que podemos formar con los símbolos en Σ, incluyendo la palabra vacia que denotamos por ϵ (la palabra vacia es la palabra que NO TIENE letras). Cuando decimos el conjunto de todas las palabras que podemos formar nos referimos a todas las combinaciones de las letras en Σ con posibles repeticiones y sin necesidad de usar todas las letras y de cualquier largo.

Definimos $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\epsilon\}$.

Ejemplo:

Sea $A = \{a, b\}$ el alfabeto. Denotamos por A^* (o sea $\{a, b\}^*$) el conjunto de todas las posibles palabras formadas utilizando los símbolos a y b incluyendo la palabra vacia (que denotamos ϵ). Podemos definir A^* inductivamente utilizando las clausulas:

1. $\epsilon \in A^*$
2. Si $w \in A^*$ entonces $aw \in A^*$
3. Si $w \in A^*$ entonces $bw \in A^*$

Definimos el conjunto $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$. Podemos definir A^+ inductivamente utilizando las clausulas:

1. $a \in A^+$
2. $b \in A^+$
3. Si $w \in A^+$ entonces $aw \in A^+$
4. Si $w \in A^+$ entonces $bw \in A^+$

Caso general:

Consideremos el caso de un alfabeto arbitrario Σ. Definimos Σ^* inductivamente por las siguientes clausulas:

1. $\epsilon \in \Sigma^*$
2. Si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $xw \in \Sigma^*$

Ejemplo: Lenguajes específicos:

Sea $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ el conjunto cuyas palabras son de la forma $b^n a b^n$ para todo $n \in N$. Definimos este lenguaje inductivamente por:

1. $a \in L_1$
2. Si $w \in L_1$ entonces $bwb \in L_1$

Podemos definir el lenguaje L_1 diciendo: L_1 es el conjunto de las palabras que tienen una sola a y la misma cantidad de b antes y despues de la a.

Sea $L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$ el lenguaje cuyas palabras son de la forma $a^n b c^n$ para todo $n \in N$. La definición inductiva es:

1. $b \in L_2$
2. Si $w \in L_2$ entonces $awc \in L_2$

Podemos definir el lenguaje L_2 diciendo: L_2 es el conjunto de la palabras que tienen una sola b y la misma cantidad de a que de c, las a a la izquierda de la b y las c a la derecha de la b.

En general definiremos los lenguajes como los anteriores en cualquiera de las dos formas (dependiendo de un n que es la cantidad de apariciones de una letra en una palabra o en lenguaje natural o sea en español).

1.4 Definición Inductiva de $N \times N$

Dados dos conjuntos A y B definimos el producto cartesiano de A y B que escribimos $A \times B$ del siguiente modo:

$A \times B = \{(a, b)/a \in A \; y \; b \in B\}$

Veremos como formar el producto cartesiano de N por si mismo. La definición es la siguiente:

1. $(0, 0) \in N \times N$
2. Si $(n, 0) \in N \times N$ entonces $(n + 1, 0) \in N \times N$
3. Si $(n, m) \in N \times N$ entonces $(n, m + 1) \in N \times N$

Para construir un elemento (a, b) del conjunto comenzamos por el paso base, luego aplicamos el paso 2) a veces y luego el paso 3) b veces. Por ejemplo para construir el $(3, 2)$:

por 1) $(0, 0) \in N \times N$
por 2) $(1, 0) \in N \times N$
por 2) $(2, 0) \in N \times N$
por 2) $(3, 0) \in N \times N$
por 3) $(3, 1) \in N \times N$
por 3) $(3, 2) \in N \times N$