INET
Lógica
Teórico 1
Lenguajes y Sistemas Formales

1 La idea de formalización

La intención de describir procedimientos exactos y precisos es lo que ha motivado la formalización. Tratamos de que todos los pasos y reglas empleadas en los procedimientos estén explícitos y absolutamente especificados. Esto trae como consecuencia que la corrección del procedimiento puede ser controlada y revisada.

La formalización ha sido estudiada en matemáticas. También hay casos de formalización en otras disciplinas científicas y ha sido fundamental para el desarrollo de la computación en el siglo pasado. Sin embargo, el caso paradigmático es la lógica. Se formalizan los procedimientos de deducción. La formalización implica la construcción de lenguajes y sistemas formales.

Consideraremos lenguajes artificiales (distintos de los lenguajes que utilizamos para comunicarnos). Cuando definimos un lenguaje formal empezamos diciendo cual es el alfabeto que utilizamos para construir las palabras.

1.1 1er ejemplo. Definición en lenguaje natural

Consideraremos lenguajes artificiales (distinto de los lenguajes que utilizamos para comunicarnos), por ejemplo, consideremos el lenguaje formado por secuencias de caracteres tomados del conjunto $\{M, I, U\}$ (alfabeto) que se construyen aplicando las siguientes reglas:

1. MI es una palabra del lenguaje.
2. Si hay una palabra terminada en I se puede agregar una U al final y tener una nueva palabra.
3. Si hay una palabra de la forma Mx, entonces Mxx también es una palabra.
4. Si III aparece en una palabra se puede obtener una nueva palabra sustituyendo III por U

A esta descripción de que palabras pertenecen al lenguaje le podemos llamar gramática y es estípulada de antemano (antes de usar el lenguaje).

Aplicando la gramática podemos construir palabras del lenguaje (al cual llamaremos L), ejemplos son:

- por 1) $MI \in L$ (a)

- por 2) aplicada a (a) $MIU \in L$ (b)
- por 3) aplicada a (a) $MII \in L$ (c)
- por 3) aplicada a (b) $MIUIU \in L$ (d)
- por 3) aplicada a (c) $MIIII \in L$ (e)
- por 4) aplicada a (e) $MUI \in L$ (f)
- por 4) aplicada a (e) $MIU \in L$ (g)

En los lenguajes y sistemas formales tenemos **axiomas** y/o **reglas de inferencia** a partir de los cuales deducimos **teoremas**. Los lenguajes formales son casos particulares de sistemas formales.

Hay otros ejemplos de los cuales la lógica es un caso particular en los que tenemos sistemas formales que contienen lenguajes formales.

Volviendo al ejemplo, 1) es un axioma y 2),3),4) son reglas de inferencia (nos indican como construir palabras a partir de palabras construidas anteriormente). Las palabras que construimos son los teoremas que se corresponden con las palabras que pertenecen al lenguaje. A los pasos que seguimos para construir los teoremas se les llama **derivación**.

Los axiomas indican palabras que pertenecen al lenguaje y por lo tanto son teoremas. Cuando nos referimos a lenguajes, a los teoremas se les llama **formulas bien formadas** o **wffs** (well formed formulas).

1.2 2do ejemplo. Definición con reglas (con premisas y conclusiones

Podemos definir el lenguaje del ejemplo de arriba mediante un sistema formal que usa reglas del tipo de las que veremos en lógica más adelante.

Las reglas están formadas por una linea sobre la cual aparecen formulas que llamamos premisas y debajo de la cual aparece una fórmula que llamamos conclusión. Las fórmulas son de la forma $a \in A$ o sea pertenencia de una palabra a un conjunto.

Una derivación es un conjunto de reglas colocadas una sobre la otra de modo que las premisas de una regla son conclusiones de reglas que aparecen arriba.

El sistema es el siguiente:

Sean x e y palabras construidas con las letras $\{M, I, U\}$. Los siguientes axiomas y reglas definen que palabras pertenecen a L

1. axioma: $MI \in L$
2. regla 1:
   $\frac{xI \in L}{xIU \in L}$

3. regla 2:
$$\frac{Mx \in L}{Mxx \in L}$$

4. regla 3:
$$\frac{xIIIy \in L}{xUy \in L} \qquad x, y \text{ pueden ser vacios}$$

Un ejemplo (derivación de $MUI \in L$) es el siguiente:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{MI \in L(axioma)}{MII \in L}\ regla2}{MIIII \in L}\ regla2}{MUI \in L}\ regla3$$

El sistema formal de arriba es equivalente a la gramática definida en el ejemplo 1 (que son equivalentes quiere decir que los teoremas son exactamente los mismos).

En lógica tendremos lenguajes y sistemas formales. Tendremos también axiomas, reglas de inferencia, teoremas y derivaciones. Los teoremas en un lenguaje formal coinciden con las palabras del lenguaje.

1.3 Definición: Lenguaje objeto y metalenguaje

Lenguaje objeto es aquel que se construye mientras que el lenguaje que utilizamos para "hablar" del lenguaje objeto es el **metalenguaje**. En el primer ejemplo anterior el metalenguaje es el español.

En el segundo ejemplo anterior el metalenguaje es la teoría de conjuntos. Usamos fórmulas de la forma $a \in A$ donde a es la palabra y A es el conjunto (lenguaje cuyas palabras estamos formando).

En el 1er ejemplo, tenemos una **metavariable** que es la "x". Esta representa una **parte** de una palabra del lenguaje a la que le quitamos la primer letra que debe ser una M. En el 2do ejemplo tenemos metavariables x e y.

Observar que para definir un lenguaje o sistema formal necesitamos usar un metalenguaje que ya conozcamos. Además el lenguaje objeto y el metalenguajes dependen del caso.

Por ejemplo si queremos definir la gramatica del ingles usando el español debo conocer el español (metalenguaje) y el lenguaje objeto es el ingles. Por otro lado si quiero definir la gramatica del español usando el ingles debo conocer el ingles (metalenguaje) y el lenguaje objeto es el español.

En la escuela cuando los alumnos estudian el español, este es tanto lenguaje como metalenguaje, y a medida que van aprendiendo parte del español pueden ir aplicando lo que van aprendiendo para seguir estudiándolo.

1.4 Sintaxis y semántica

Vimos la descripción de lenguajes mediante la definición de reglas de formación de sus palabras. Este es el plano de la **sintaxis**. La sintaxis indica que palabras son correctamente formadas. Se define el lenguaje completamente sin necesidad de dar interpretación alguna.

Se puede también examinar el **significado** que poseen los signos o expresiones de un lenguaje. Este es el plano de la **semántica**. En los lenguajes formales el significado de una expresión se establece de manera precisa y clara sin dejar lugar a ambiguedades. Esto es posterior a la sintaxis.

Podemos por ejemplo definir una función $f : L \to N$ donde N es el conjunto de los Naturales. Podemos considerar la función como dando *significado* a las palabras. Consideremos la siguiente definición de L:

$f(M) = 1$
$f(I) = 2$
$f(U) = 3$
$f(xp) = f(x) + f(p)$ donde $x \in \{M, I, U\}$ y p tiene al menos una letra.

Por ejemplo el significado de MUI es: $f(M) + f(UI) = 1 + f(U) + f(I) = 1 + 3 + 2 = 6$