

# **Отчёт по лабораторной работе №5**

**Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту**

Александр Дмитриев

# Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Цель работы</b>                              | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Теоретические сведения</b>                   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Тест Ферма . . . . .                            | 6         |
| 2.2      | Тест Соловья-Штрассена . . . . .                | 6         |
| 2.3      | Тест Миллера-Рабина. . . . .                    | 6         |
| <b>3</b> | <b>Выполнение работы</b>                        | <b>8</b>  |
| 3.1      | Реализация алгоритмов на языке Python . . . . . | 8         |
| 3.2      | Контрольный пример . . . . .                    | 12        |
| <b>4</b> | <b>Выводы</b>                                   | <b>13</b> |
|          | <b>Список литературы</b>                        | <b>14</b> |

# List of Figures

|     |                             |    |
|-----|-----------------------------|----|
| 3.1 | Работа алгоритмов . . . . . | 12 |
|-----|-----------------------------|----|

# 1 Цель работы

Изучение алгоритмов Ферма, Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина.

## 2 Теоретические сведения

Для построения многих систем защиты информации требуются простые числа большой разрядности. В связи с этим актуальной является задача тестирования на простоту натуральных чисел.

Существует два типа критериев простоты: детерминированные и вероятностные. Детерминированные тесты позволяют доказать, что тестируемое число – простое. Практически применимые детерминированные тесты способны дать положительный ответ не для каждого простого числа, поскольку используют лишь достаточные условия простоты. Детерминированные тесты более полезны, когда необходимо построить большое простое число, а не проверить простоту, скажем, некоторого единственного числа. В отличие от детерминированных, вероятностные тесты можно эффективно использовать для тестирования отдельных чисел, однако их результаты, с некоторой вероятностью, могут быть неверными. К счастью, ценой количества повторений теста с модифицированными исходными данными вероятность ошибки можно сделать как угодно малой. На сегодня известно достаточно много алгоритмов проверки чисел на простоту. Несмотря на то, что большинство из таких алгоритмов имеет субэкспоненциальную оценку сложности, на практике они показывают вполне приемлемую скорость работы. На практике рассмотренные алгоритмы чаще всего по отдельности не применяются. Для проверки числа на простоту используют либо их комбинации, либо детерминированные тесты на простоту. Детерминированный алгоритм всегда действует по одной и той же схеме и гарантированно решает поставленную задачу. Вероятностный алгоритм использует генератор случайных чисел и дает

не гарантированно точный ответ. Вероятностные алгоритмы в общем случае не менее эффективны, чем детерминированные (если используемый генератор случайных чисел всегда дает набор одних и тех же чисел, возможно, зависящих от входных данных, то вероятностный алгоритм становится детерминированным).

## 2.1 Тест Ферма

- Вход. Нечетное целое число  $n \geq 5$ .
  - Выход. «Число  $n$ , вероятно, простое» или «Число  $n$  составное».
1. Выбрать случайное целое число  $a, 2 \leq a \leq n - 2$ .
  2. Вычислить  $r = a^{n-1} \pmod{n}$
  3. При  $r = 1$  результат: «Число  $n$ , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число  $n$  составное».

## 2.2 Тест Соловья-Штрассена

- Вход. Нечетное целое число  $n \geq 5$ .
  - Выход. «Число  $n$ , вероятно, простое» или «Число  $n$  составное».
1. Выбрать случайное целое число  $a, 2 \leq a \leq n - 2$ .
  2. Вычислить  $r = a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \pmod{n}$
  3. При  $r \neq 1$  и  $r \neq n - 1$  результат: «Число  $n$  составное».
  4. Вычислить символ Якоби  $s = \left(\frac{a}{n}\right)$
  5. При  $r = s \pmod{n}$  результат: «Число  $n$ , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число  $n$  составное».

## 2.3 Тест Миллера-Рабина.

- Вход. Нечетное целое число  $n \geq 5$ .

- Выход. «Число  $n$ , вероятно, простое» или «Число  $n$  составное».
1. Представить  $n - 1$  в виде  $n - 1 = 2^s r$ , где  $r$  - нечетное число
  2. Выбрать случайное целое число  $a$ ,  $2 \leq a \leq n - 2$ .
  3. Вычислить  $y = a^r \pmod n$
  4. При  $y \neq 1$  и  $y \neq n - 1$  выполнить действия
    - Положить  $j = 1$
    - Если  $j \leq s - 1$  и  $y \neq n - 1$  то
      - Положить  $y = y^2 \pmod n$
      - При  $y = 1$  результат: «Число  $n$  составное».
      - Положить  $j = j + 1$
    - При  $y \neq n - 1$  результат: «Число  $n$  составное».
  5. Результат: «Число  $n$ , вероятно, простое».

## 3 Выполнение работы

### 3.1 Реализация алгоритмов на языке Python

```
import random
```

```
def Ferma(n, test_count):  
    for i in range(test_count):  
        a = random.randint(2, n-1)  
        if ( a**(n-1)%n != 1):  
            print("Complex")  
            return False  
    print("Simple")  
    return True
```

```
def modulo(base, exponent, mod):  
    x = 1  
    y = base  
    while (exponent > 0):  
        if (exponent%2 == 1):  
            x = (x*y)%mod  
        y = (y*y)%mod  
        exponent = exponent//2
```



```
return x%mod
```

```
def calculateJacobian(a, n):  
    if (a == 0):  
        return 0  
    ans = 1  
    if (a < 0):  
        a = -a  
        if (n%4 == 3):  
            ans = -ans  
    if (a == 1):  
        return ans  
    while (a):  
        if (a < 0):  
            a = -a  
            if (n%4 == 3):  
                ans = -ans  
        while (a%2 == 0):  
            a = a//2  
            if (n%8 == 3 or n%8 == 5):  
                ans = -ans  
        a, n = n, a  
        if (a%4 == 3 and n%4 == 3):  
            ans = -ans  
        a = a%n  
        if (a > n//2):  
            a = a - n  
    if (n == 1):
```

```
        return ans
    return 0
```

```
def SoloveiStrassen(p, iterations):
    if (p < 2):
        print("Complex")
        return False
    if (p != 2 and p%2 == 0):
        print("Complex")
        return False
    for i in range(iterations):
        a = random.randrange(p - 1) + 1
        jacobian = (p + calculateJacobian(a, p))%p
        mod = modulo(a, (p - 1)/2, p)
        if (jacobian == 0 or mod != jacobian):
            print("Complex")
            return False
    print("Simple")
    return True
```

```
def MillerRabbin(n):
    if n != int(n):
        print("Complex")
        return False
    n = int(n)
    if n == 0 or n == 1 or n == 4 or n == 6 or n == 8 or n == 9:
        print("Complex")
        return False
```

```

if n == 2 or n == 3 or n == 5 or n == 7:
    print("Simple")
    return True
s = 0
d = n - 1
while (d%2 == 0):
    d >>= 1
    s += 1
assert(2**s*d == n-1)

def trial_compose(a):
    if pow(a, d, n) == 1:
        print("Complex")
        return False
    for i in range(s):
        if (pow(a, 2**i*d, n) == n - 1):
            print("Complex")
            return False
    print("Simple")
    return True

for i in range(8):
    a = random.randrange(2, n)
    if trial_compose(a):
        print("Complex")
        return False
    print("Simple")
    return True

```

## 3.2 Контрольный пример

|          |   |                         |
|----------|---|-------------------------|
| In [12]: | 1 | n = 10799               |
| In [13]: | 1 | Ferma(n, 400)           |
|          |   | Simple                  |
| Out[13]: |   | True                    |
| In [14]: | 1 | SoloveiStrassen(n, 300) |
|          |   | Simple                  |
| Out[14]: |   | True                    |
| In [15]: | 1 | MillerRabbin(n)         |
|          |   | Complex                 |
|          |   | Simple                  |
| Out[15]: |   | True                    |
| In [16]: | 1 | n = 10798               |
| In [17]: | 1 | Ferma(n, 400)           |
|          |   | Complex                 |
| Out[17]: |   | False                   |
| In [18]: | 1 | SoloveiStrassen(n, 300) |
|          |   | Complex                 |
| Out[18]: |   | False                   |
| In [19]: | 1 | MillerRabbin(n)         |
|          |   | Simple                  |
|          |   | Complex                 |
| Out[19]: |   | False                   |

Figure 3.1: Работа алгоритмов

## 4 Выводы

Изучили алгоритмы Ферма, Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина.

# Список литературы

1. Алгоритмы тестирования на простоту и факторизации
2. Алгоритм проверки на простоту