ФИО ____________________

группа ____________________

| 1А | 2А | 3А | 4А | 5А | 6А | **Оценка** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

| 1 зад. | 2 зад. | Σ |
|---|---|---|
| | | |

Подпись преп. ____________________

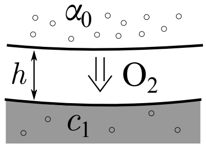
# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

7 июня 2019 г.

Вариант **А**

**1А.** (1,5) Энергия ионизации молекулярного кислорода равна $I = 12{,}1$ эВ. Оценить долю молекул при температуре $T = 10^4$ К, имеющих поступательную энергию, превосходящую $I$.
*Указание*: при $\alpha \gg 1$ справедлива оценка $\int\limits_{\alpha}^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx \approx \sqrt{\alpha} e^{-\alpha}$.

**2А.** (1,5) В процессе дыхания организм человека извлекает кислород из воздуха и использует его для получения энергии при окислении органических молекул. Считая, что на один моль $O_2$ выделяется энергия $E = 470$ кДж/моль, а мощность, вырабатываемая человеком при активной физической нагрузке, составляет $W = 1$ кВт, оценить рабочую площадь поверхности его легких $S$. Мольную долю кислорода в воздухе внутри лёгких принять постоянной и равной $\alpha_0 = 0{,}14$, а концентрацию $O_2$ в крови — $c_1 = 2$ моль/м$^3$. Толщина барьера между воздухом и кровью $h = 1$ мкм, коэффициент диффузии в нём $D = 10^{-7}$ см$^2$/с.




**3А.** (2) Два одинаковых сосуда, заполненные гелием общим количеством $\nu = 1$ моль, сообщаются отверстием, диаметр которого меньше длины свободного пробега. Температуры в сосудах исходно поддерживаются равными $T_1$ и $T_2 = 4T_1$. Найти температуру $T$, которая установится в системе в состоянии равновесия, если перестать поддерживать температуры сосудов и изолировать их от окружающей среды. Вычислить также результирующее изменение энтропии системы $\Delta S$.

**4А.** (2) Закрытый сосуд с жёсткими стенками полностью заполнен водой при нормальных условиях. После помещения сосуда в морозильную камеру и установления равновесия 10% воды превратилось в лёд. Найти температуру $t$ в камере. Теплота плавления льда $q = 330$ Дж/г, начальная плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1{,}0$ г/см$^3$, сжимаемость воды $\beta_{\text{в}} = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ атм$^{-1}$, плотность образовавшегося льда $\rho_{\text{л}} = 0{,}92$ г/см$^3$. Деформацией стенок пренебречь.

**5А.** (2) При низких температурах ($T \to 0$) свободная энергия «электронного газа» в металлах в объёме $V$ при температуре $T$ даётся зависимостью $F = F_0 - \beta V^{2/3} T^2$, где $F_0$ и $\beta$ — постоянные величины. Найти разность теплоёмкостей $C_P - C_V$ электронного газа как функцию $V$ и $T$.

**6А.** (3) Оценить, с какой относительной погрешностью $\varepsilon = \Delta c / c_0$ нужно измерять скорость звука в углекислом газе $CO_2$, чтобы заметить отклонение от расчёта по модели идеального газа? Постоянные Ван-дер-Ваальса равны $a = 0{,}4$ Па $\cdot$ м$^6$/моль$^2$ и $b = 4 \cdot 10^{-5}$ м$^3$/моль. При температуре в лаборатории $t = 22{,}0$ °C плотность газа $\rho = 1{,}80$ кг/м$^3$. Молярная масса $\mu = 44{,}0$ г/моль. Теплоёмкость $CO_2$ при постоянном объёме $C_V = 3{,}45R$.

*Просим студентов пройти опрос о качестве работы преподавателей кафедры —*
*— сайт МФТИ, раздел Кафедры общей физики*

ФИО ____________________

группа ____________________

| 1Б | 2Б | 3Б | 4Б | 5Б | 6Б | **Оценка** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

| 1 зад. | 2 зад. | Σ |
|---|---|---|
| | | |

Подпись преп. ____________________

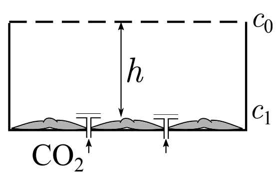
# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

7 июня 2019 г.

Вариант **Б**

**1Б.** (1,5) Энергия ионизации молекулярного азота равна $I = 15{,}6$ эВ. Оценить долю молекул при температуре $T = 10^4$ К, имеющих поступательную энергию, превосходящую $I$.
*Указание*: при $\alpha \gg 1$ справедлива оценка $\int\limits_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha^2}$.

**2Б.** (1,5) Для поддержания процессов фотосинтеза растения в теплицах “подкармливают” углекислым газом. Газ подаётся на уровне почвы, где расположены листья растений, потребляющие его с интенсивностью $J = 5$ мг/(дм$^2 \cdot$ час). Массовая доля $CO_2$ над листьями поддерживается равной $c_1 = 0{,}4\%$. В воздухе над теплицей при открытых в её крыше форточках эта доля равна $c_0 = 0{,}04\%$. Оценить суточный расход $Q$ [кг/сут] подаваемого в теплицу $CO_2$. Высота теплицы $h = 2$ м, площадь $S = 100$ м$^2$, суммарная площадь листьев $S_л = 1{,}5S$. Коэффициент диффузии $CO_2$ в воздухе $D = 0{,}2$ см$^2$/с. Молярная масса воздуха $\mu_в = 29$ г/моль. Температура $t = 27$ °C постоянна по высоте. Конвекция отсутствует.




**3Б.** (2) В сосуде объёмом $V = 1$ л находится азот $N_2$ под давлением $P = 1$ мбар. Сосуд имеет отверстие диаметром $d = 50$ мкм, выходящее в вакуум. Температура сосуда $T = 300$ К поддерживается постоянной. Какое количество теплоты $Q$ будет подведено к содержимому сосуда к моменту, когда его покинет половина молекул? Какое время $\tau$ на это потребуется?

**4Б.** (2) В закрытой колбе объемом $V = 1$ л находится влажный воздух при температуре $t_0 = 27$ °C и относительной влажности $\varphi = 70\%$. Колбу охлаждают на $\Delta t = 15$ °C. Найти массу $\Delta m$ сконденсировавшейся воды. Теплоту испарения принять равной $\Lambda = 44$ кДж/моль, давление в тройной точке воды $P_{тр} = 610$ Па.

**5Б.** (2) При измерении скорости звука в углекислом газе $CO_2$ в сосуде, находящемся в атмосфере при комнатной температуре, имеется течь. Найдите минимальную мольную долю примеси воздуха $\alpha$, присутствие которой в сосуде можно обнаружить экспериментально, если относительная погрешность измерений $\varepsilon = 1\%$. Воздух считать смесью двухатомных газов с молярной массой $\mu_в = 29$ г/моль. Показатель адиабаты для углекислого газа принять равным $\gamma_{CO_2} = 9/7$. Молярная масса $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль.

**6Б.** (3) В одной из моделей теплоёмкость $C_V$ кристалла при низких температурах $(T \to 0)$ равна $C_V = aVT^3$, где $V$ — объём кристалла, $a$ — постоянная величина. Изотермический модуль всестороннего сжатия равен $K$. Найти разность $C_P - C_V$ теплоёмкостей кристалла как функцию его объёма и температуры.

*Просим студентов пройти опрос о качестве работы преподавателей кафедры — — сайт МФТИ, раздел Кафедры общей физики*

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 7 июня 2019 г.

**1А.** (*Попов П.В.*)
$$x=\int\limits_I^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}}\sqrt{\varepsilon}e^{-\varepsilon/kT}d\varepsilon=\int\limits_{I/kT}^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\xi}e^{-\xi}d\xi\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{I}{kT}}e^{-I/kT}\approx\underline{4{,}2e^{-14}}\approx\underline{3{,}5\cdot10^{-6}}.$$

**2А.** (*Гавриков А.В.*) $J=SD\dfrac{\alpha P_0/kT-cN_A}{h}=\dfrac{N_AW}{E}$, $S=\dfrac{hW}{ED(\frac{\alpha P_0}{RT}-c)}=\frac{10^{-6}\cdot10^3}{4{,}7\cdot10^5\cdot10^{-11}\cdot(\frac{0{,}14\cdot10^5}{8{,}3\cdot300}-2)}\approx\underline{60\text{ м}^2}$.

**3А.** (*Попов П.В.*) В начальном состоянии имеем $n_1\bar v_1=n_2\bar v_2$, то есть $N_1\sqrt{T_1}=N_2\sqrt{T_2}$, $N_1+N_2=N$, откуда $N_1=\frac{2}{3}N$, $N_2=\frac13 N$. Из закона сохранения энергии $N_1T_1+N_2T_2=NT$ находим $T=(\frac23+\frac13 4)T_1=\underline{2T_1}$ (1 балл).

Изменение энтропии (с учётом тождественности газов в сосудах):
$$\Delta S/k=\frac32 N\ln T+N\ln\frac{2V}{N}-\left(\frac32 N_1\ln T_1+N_1\ln\frac{V}{N_1}\right)-\left(\frac32 N_2\ln T_2+N_2\ln\frac{V}{N_2}\right)$$
Подставляя полученные выше значения, находим $\Delta S=\underline{\nu R\left(\frac{13}{6}\ln2-\ln3\right)}\approx0{,}4\nu R=\underline{3{,}35\text{ Дж/К}}$ (1 балл).

**4А.** (*Аникин Ю.А.*) Начальный объём незамерзшей порции воды $V_0=0{,}9m/\rho_\text{в}$. Её объём изменится из-за расширения льда в закрытом сосуде на $\Delta V=0{,}1m(1/\rho_\text{в}-1/\rho_\text{л})$. Тогда $\Delta V/V_0=\frac{0{,}1m(1/\rho_\text{в}-1/\rho_\text{л})}{0{,}9m/\rho_\text{в}}=$ $=\frac19(1-\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{л}})\approx-9{,}7\cdot10^{-3}$. Приращение давления воды $\Delta P=-\frac{1}{\beta_\text{в}}\Delta V/V_0=\frac{1}{9\beta_\text{в}}(1-\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{л}})\approx201$ атм. Из уравнения Клапейрона–Клаузиуса $\Delta T\approx\Delta P\frac{T}{q}\left(\frac{1}{\rho_\text{в}}-\frac{1}{\rho_\text{л}}\right)\approx\underline{-1{,}5\,^\circ\text{C}}$.

**5А.** (*Крымский К.М.*) Из свободной энергии находим уравнение состояния $P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac23\beta V^{-1/3}T^2$ или $V=(\frac23\beta)^3T^6/P^3$. Пользуясь известной формулой для разности теплоёмкостей
$$C_P-C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$$
найдём $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=16\beta^3T^5/9P^3=6V/T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-8\beta^3T^6/9P^4=-9V^{4/3}/(2\beta T^2)$ и окончательно $C_P-C_V=\underline{8\beta V^{2/3}T}$.

*Альтернативно*, находим энтропию $S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=2\beta V^{2/3}T$ и выражаем теплоёмкости явно: $C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V=2\beta V^{2/3}T$. Энтропия через $(P,T)$: $S=8\beta^3T^5/9P^2$, откуда $C_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P=$ $=40\beta^3T^5/9P^2=5C_V$, и $C_P-C_V=4C_V=\underline{8\beta V^{2/3}T}$.

**6А.** (*Бабинцев В.А., ред. Попов П.В.*) Адиабата для газа Ван-дер-Ваальса: $dS=C_V\frac{dT}{T}+R\frac{dV}{V-b}=0$ или $T(V-b)^{R/C_V}=\text{const}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\frac{RT}{C_V(V-b)}$. Скорость звука $c^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S=-\frac{V^2}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S$, где $V=\mu/\rho$ — молярный объём. С учётом уравнения состояния $P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$ находим
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S=\frac{R}{(V-b)}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S-\frac{RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}=-\frac{\gamma_0RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}$$
где $\gamma_0=1+\frac{R}{C_V}=1{,}29$ — показатель адиабаты идеального газа (заметим, что для газа Ван-дер-Ваальса $\frac{R}{C_V}+1\neq\frac{C_P}{C_V}$). Пользуясь малостью поправок, получим
$$c=\sqrt{\frac{c_0^2}{(1-b/V)^2}-\frac{2a}{V\mu}}\approx c_0\left[1+\frac{b}{V}-\frac{a}{\gamma_0RTV}\right],$$
где $c_0=\sqrt{\gamma_0RT/\mu}=268$ м/с — скорость звука в модели идеального газа. Вычисляем поправки: $b/V=\rho b/\mu\approx1{,}8\cdot10^{-3}$, $a/(\gamma VRT)\approx4{,}9\cdot10^{-3}$. Итого $\underline{\varepsilon\approx3\cdot10^{-3}}$.

---

**1Б.** (*Попов П.В.*) $x=\int\limits_{\sqrt{2I/m}}^\infty\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi v^2e^{-mv^2/2kT}dv=\int\limits_{\sqrt{I/kT}}^\infty\frac{4}{\sqrt\pi}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\frac{4I}{\pi kT}}e^{-I/kT}\approx\underline{4{,}8e^{-18}\approx7\cdot10^{-8}}.$

**2Б.** (*Крымский К.М.*) $Q=t(JS_\text{л}+D\frac{\Delta\rho}{h}S)$, где $\Delta\rho=(c_1-c_0)\rho_\text{в}$ — перепад плотности $CO_2$ на высоте теплицы, $\rho_\text{в}=\frac{P\mu_\text{в}}{RT}\approx1{,}16$ кг/м$^3$ — плотность воздуха. Тогда $Q=24\frac{5\cdot10^{-6}}{10^{-2}}\cdot150+$ $+24\cdot3600\left(0{,}2\cdot10^{-4}\frac{100}{2}\cdot0{,}0036\cdot1{,}16\right)\approx1{,}80+0{,}36=\underline{2{,}16\text{ кг/сут}}$.

**3Б.** (*Веревочкин Ю.Г., ред. Попов П.В.*) Средняя энергия вылетающей частицы на $\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}kT$ превышает среднюю энергию в сосуде $\bar{\varepsilon} = \frac{5}{2}kT$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = -\Delta N\bar{\varepsilon} = Q - Q_{\text{выл}}$, где $Q_{\text{выл}} = \Delta N(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon)$, откуда полученное газом тепло $Q = \Delta N\Delta\varepsilon = \frac{1}{4}PV \approx \underline{25\ \text{мДж}}$ (1 балл).
Время истечения находим из уравнения $dN/dt = -\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\frac{1}{4}\pi d^2$, откуда $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi\mu} \approx 476$ м/с, $\tau = \frac{16V}{\pi d^2\bar{v}} \approx 4{,}3\cdot 10^3$ с, $t_{1/2} = \tau\ln 2 \approx \underline{3\cdot 10^3\ \text{с} \approx 50\ \text{мин}}$ (1 балл).

**4Б.** (*Удалова А.Г., ред. Попов П.В.*) Из уравнения Клапейрона–Клаузиуса, пренебрегая молярным объёмом воды, $\frac{dP}{dT} = \frac{\Lambda P}{RT^2}$, находим давление насыщенного пара $P_{\text{н}}(T) = P_{\text{тр}}\exp\left(\frac{\Lambda}{R}\left(\frac{1}{T_{\text{тр}}} - \frac{1}{T}\right)\right)$. $P_{\text{н}}(300) = 610\cdot\exp\frac{4{,}4\cdot 10^4}{8{,}31}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{300}\right) \approx 3{,}5$ кПа, $P_{\text{н}}(285) \approx 1{,}38$ кПа. Начальное давление пара $P_1 = \varphi P_{\text{н}}(300) = 2{,}45$ кПа. В конечном состоянии $P_1\frac{T_2}{T_1} = 2{,}32$ кПа $> P_{\text{н}}(285)$, поэтому пар будет насыщенным: $P_2 = P_{\text{н}}(285)$. Масса сконденсировавшейся воды $\Delta m = \mu\frac{V}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) \approx \underline{7{,}2\ \text{мг}}$.

**5Б.** (*Лилиенберг И.В., ред. Попов П.В.*) Из $\gamma = 1 + R/C_V$ находим для углекислого газа $C_V = \frac{7}{2}R$. Для показателя адиабаты смеси имеем $\bar{\gamma} = \frac{\alpha\frac{7}{2} + (1-\alpha)\frac{9}{2}}{\alpha\frac{5}{2} + (1-\alpha)\frac{7}{2}} = \frac{\frac{9}{2} - \alpha}{\frac{7}{2} - \alpha} \approx \frac{9}{7} + \frac{4}{49}\alpha$. Молярная масса смеси $\bar{\mu} = \alpha\mu_{\text{в}} + (1-\alpha)\mu_{\text{CO2}} = (44 - 15\alpha)$ г/моль. Относительная поправка к скорости звука $c = \sqrt{\bar{\gamma}RT/\bar{\mu}}$: $\varepsilon = \frac{\Delta c}{c} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} - \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{4/49}{9/7} + \frac{15}{44}\right) \approx 0{,}20\alpha$, откуда $\underline{\alpha \approx 5\%}$.

**6Б.** (*Крымский К.М.*) Интегрируя $C_V = aVT^3 = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, находим энтропию $S = \int\frac{C_V dT}{T} = \frac{1}{3}aVT^3 + S_0(T)$ (поскольку при $T \to 0$ должно выполняться $S \to \text{const}$, можно положить $S_0 \equiv 0$). Пользуясь соотношением Максвелла $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ и известным соотношением для разности теплоёмкостей, получим

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} = -T\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

Подставляя $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}aT^3$, $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -K/V$, находим $\underline{C_P - C_V = a^2VT^7/9K}$.

---

### Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется число баллов, кратное 0,5, исходя из стоимости задачи ($x$):

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $+$ | Задача решена верно: приведено *обоснованное* решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины. |
| $x - 0{,}5$ | $\pm$ | Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках. |
| $x - 1$ | $+/2$ | Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения. |
| $x - 1{,}5$ | $\mp$ | Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена. |
| 0 | $-$ | Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было. |

**Оценка за письменную работу** ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в *большую* сторону, но не более 10 и не менее 1.

*Максимальная оценка за устный экзамен*: $\Sigma$ = [оценка за письм. работу] + [баллы за задания].
«отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. popov.pv@mipt.ru.
Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru.

**Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов состоится 13 июня в 8:40 в Главной физической ауд.**