Вариант 11

1. ② Утверждение неверно, например, внутренняя точка. Обратное утверждение неверно, например, изолированная точка

---

1. ② Не является.

---

2. ⑥ 1) Функция непрерывна при $\alpha \leqslant 0$, поскольку для любой точки $(x,\, y)$, где $y \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, выполняется $|f(x,\, y)| = \left|\sin\bigl(|y|^{-\alpha}\cdot x\bigr)\right| \leqslant |y|^{-\alpha}\cdot|x| \leqslant \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1-\alpha} < \delta^{1-\alpha} = \varepsilon$. При $\alpha > 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,\, y)$ не существует. См., например, предел по множеству $x = |y|^\alpha$.

2) При $\alpha \leqslant 0$ верно $f(x,\, 0) = f(0,\, y) = f(0,\, 0) = 0$. Следовательно, $f'_x(0,\, 0) = f'_y(0,\, 0) = 0$.

3) При $\alpha < 0$ для любой точки $(x,\, y)$, где $y \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, выполняется $|F(x,\, y)| = \left|\dfrac{\sin\bigl(|y|^{-\alpha}\cdot x\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \dfrac{|y|^{-\alpha}\cdot|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-\alpha} < \delta^{-\alpha} = \varepsilon$.

4) При $\alpha = 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} F(x,y)$ не существует (по разным направлениям — разные пределы).

Ответ. Функция дифференцируема в точке $(0,\, 0)$ при $\alpha < 0$.

3. ④ $L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \arccos\frac{\varphi}{\pi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4. ⑥ $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^\alpha}{x^2\ln(1+x)}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = J_1 + J_2$.

$\boxed{J_1}$: 1) при $\alpha > 0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^3} = \dfrac{1}{x^{3-\alpha}}$ при $x \to +0$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha > 2$;

2) при $\alpha \leqslant 0$ выполняется $f(x) \geqslant \dfrac{\pi/4}{x^2\ln(1+x)}$; поэтому $J_1 = \infty$ при $\alpha \leqslant 0$.

$\boxed{J_2}$: при любом α выполняется $f(x) \leqslant \dfrac{\pi/2}{x^2\ln(1+x)}$; поэтому $J_2 < \infty$ при любом α.

Ответ. Интеграл J сходится при $\alpha > 2$.

5. ② Нет, например, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, $b_n = (-1)^n$; $a_n\cdot b_n = \dfrac{1}{n}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ расходится.

6. ④ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(0)$, $f(x) \equiv g(0)$, для всех $x \in [0,\, 1]$.

Функция g непрерывна в нуле справа: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall\, x:\ 0 < x < \delta\ \longmapsto\ |g(x) - g(0)| < \varepsilon$ и для любой последовательности $x_n = \dfrac{x}{n} \to 0$, $n \to \infty$, верно $\left|g\left(\dfrac{x}{n}\right) - g(0)\right| = |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

Для найденного $\delta = \delta(\varepsilon)$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N$ и для всех $x \in [0,\, 1]$ выполняется $0 \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N} < \delta$.

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N\ \&\ \forall\, x \in [0,\, 1]\ \longmapsto\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[0,\, 1]$ к предельной функции $f(x) \equiv g(0)$.

7. ⑥ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1-\cos(x/n)}{n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2\sin^2\bigl(x/(2n)\bigr)}{n}$.

1) для любого $x_0 \in E_1 \cup E_2$ верно $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{x_0^2/2}{n^3}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^\infty \frac{x_0^2/2}{n^3}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения и в силу произвольности точки x_0, на $E_1 \cup E_2$ есть поточечная сходимость.

2) На множестве E_1 выполняется $f_n(x) \leqslant \dfrac{x^2/2}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{2\cdot n^3}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$ сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса на E_1 есть равномерная сходимость функционального ряда.

3) Для любого $n > 1$ точки $x_n = n$ принадлежат E_2, для этого же n найдется такое $p = n$, что выполняется $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) = \frac{2\sin^2\bigl(n/(2n+2)\bigr)}{n+1} + \ldots + \frac{2\sin^2\bigl(n/(4n)\bigr)}{2n} \geqslant n\cdot\frac{2\sin^2(n/(4n))}{2n} = \sin^2\frac{1}{4} = \varepsilon_0$.

8. ② $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{n}} = 0$, следовательно, найден радиус сходимости ряда $R = +\infty$. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда имеет производную любого порядка, поэтому функция F дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Вариант 12

1. ② Утверждение верно. Обратное неверно, например, внутренняя точка.

1. ② Является.

2. ⑥ 1) Функция непрерывна при $\alpha \geqslant 0$, поскольку для любой точки $(x,\, y)$, где $x \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, выполняется $|f(x,\, y)| = \bigl|\ln\bigl(1+|x|^\alpha\cdot|y|\bigr)\bigr| \leqslant |x|^\alpha\cdot|y| \leqslant \bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)^{1+\alpha} < \delta^{1+\alpha} = \varepsilon$. При $\alpha < 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,\, y)$ не существует. См., например, предел по множеству $|y| = |x|^{-\alpha}$.

2) При $\alpha \geqslant 0$ верно $f(x,\, 0) = f(0,\, y) = f(0,\, 0) = 0$. Следовательно, $f'_x(0,\, 0) = f'_y(0,\, 0) = 0$.

3) При $\alpha > 0$ для любой точки $(x,\, y)$, где $x \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, выполняется $|F(x,\, y)| = \left|\dfrac{\ln\bigl(1+|x|^\alpha\cdot|y|\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \dfrac{|x|^\alpha\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)^{\alpha} < \delta^\alpha = \varepsilon$.

4) При $\alpha = 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} F(x,y)$ не существует (по разным направлениям — разные пределы).

<u>Ответ</u>. Функция дифференцируема в точке $(0,\, 0)$ при $\alpha > 0$.

3. ④ $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

4. ⑥ $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(x^\alpha + x)}{x^{5/4}}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = J_1 + J_2$

$\boxed{J_1}$: 1) при $\alpha \geqslant 1$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{Cx}{x^{5/4}} = \dfrac{C}{x^{1/4}}$ при $x \to +0$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha \geqslant 1$;

2) при $0 < \alpha < 1$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{5/4}} = \dfrac{1}{x^{5/4-\alpha}}$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha > 1/4$;

3) при $\alpha \leqslant 0$ выполняется $f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{th} 1}{x^{5/4}}$; поэтому $J_1 = \infty$.

$\boxed{J_2}$: при любом α выполняется $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{5/4}}$; поэтому $J_2 < \infty$ при любом α.

<u>Ответ</u>. Интеграл J сходится при $\alpha > 1/4$.

5. ② Да, например, $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty a_n = \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ сходится условно, ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty na_n = \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится.

6. ④ Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} g(0), & 0 \leqslant x < 1; \\ g(1), & x = 1; \end{cases}$ разрывна, поскольку $g(0) \neq g(1)$ (в силу строгой монотонности функции g). Функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0,\, 1]$, поскольку это суперпозиция непрерывных функций. Если бы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на отрезке $[0,\, 1]$ к предельной функции $f(x)$, то $f(x)$ должна быть непрерывной на этом отрезке.

7. ⑥ 1) для любого $x_0 \in E_1 \cup E_2$ верно $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{1}{x_0\, n^{3/2}}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^\infty \frac{1}{x_0\, n^{3/2}}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения и в силу произвольности точки x_0, на $E_1 \cup E_2$ есть поточечная сходимость.

2) На множестве E_2 выполняется $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x_0\, n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса на E_2 есть равномерная сходимость функционального ряда.

3) Для любого $n > 1$ точки $x_n = \dfrac{1}{n}$ принадлежат E_1, для этого же произвольного n найдется такое $p = n$, что выполняется

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) = \frac{\operatorname{arctg}(n/(n+1))}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}(n/(2n))}{\sqrt{2n}} \geqslant n\cdot\frac{\operatorname{arctg}(n/(2n))}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

8. ② $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{2\cdot\sqrt[n]{n^2+1}}} = 1/\sqrt{2}$, следовательно, найден радиус сходимости ряда $R = \sqrt{2}$. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда имеет производную любого порядка, поэтому функция F дифференцируема на интервале $(-\sqrt{2},\, \sqrt{2})$.

Вариант 13

1. ② Да. Примером может служить сходящаяся последовательность.

1. ② Не является.

2. ⑥ Функция непрерывна при $\alpha \leqslant 0$, поскольку для любой точки $(x,\,y)$, где $y \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, верно $|f(x,\,y)-1| = \left|\cos\bigl(|y|^{-\alpha}\cdot x\bigr)-1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|y|^{-2\alpha}\cdot|x|^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2(1-\alpha)} < \delta^{2(1-\alpha)} = \varepsilon$. При $\alpha > 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,\,y)$ не существует. См., например, предел по множеству $x = |y|^{\alpha}$.

2) При $\alpha \leqslant 0$ верно $f(x,\,0) = f(0,\,y) = f(0,\,0) = 1$. Следовательно, $f'_x(0,\,0) = f'_y(0,\,0) = 0$.

3) При $\alpha \leqslant 0$ для любой точки $(x,\,y)$, где $y \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, выполняется $|F(x,\,y)| = \left|\dfrac{\cos\bigl(|y|^{-\alpha}\cdot x\bigr)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{2\sin^2\bigl(|y|^{-\alpha}\cdot x/2\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\,\dfrac{|y|^{-2\alpha}\cdot|x|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1-2\alpha} < \dfrac{1}{2}\,\delta^{1-2\alpha} = \varepsilon$.

Ответ. Функция дифференцируема в точке $(0,\,0)$ при $\alpha \leqslant 0$.

3. ④ $L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \arcsin\dfrac{\varphi}{\pi}\,d\varphi = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}$.

4. ⑥ $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{th} x^{\alpha}}{x^{3/2}\ln(1+x)}\,dx = \int_0^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = J_1 + J_2$.

$\boxed{J_1}$: 1) при $\alpha > 0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{x^{\alpha}}{x^{5/2}} = \dfrac{1}{x^{5/2-\alpha}}$ при $x \to +0$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha > 3/2$;

2) при $\alpha \leqslant 0$ выполняется $f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{th} 1}{x^{3/2}\ln(1+x)}$; поэтому $J_1 = \infty$ при $\alpha \leqslant 0$.

$\boxed{J_2}$: при любом α выполняется $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)}$; поэтому $J_2 < \infty$ при любом α.

Ответ. Интеграл J сходится при $\alpha > 3/2$.

5. ② Да. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда по признаку Абеля ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ будет сходится.

6. ④ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$, $f(x) = g(x)$, для всех $x \in [0,\,1]$.

Функция g непрерывна на отрезке $[0,\,1]$, поэтому, она равномерно непрерывна на $[0,\,1]$: $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall\,x, y \in [0,\,1]:\ |y-x| < \delta \ \longmapsto\ |g(y)-g(x)| < \varepsilon$.

Для найденного $\delta = \delta(\varepsilon)$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N$ и для всех $x \in [0,\,1]$ выполняется $\left|\dfrac{xn}{n+1} - x\right| = \dfrac{x}{n+1} < \dfrac{1}{N+1} < \delta$.

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,N = N(\varepsilon)$ $\forall n \geqslant N$ & $\forall\,x \in [0,\,1]$ $\longmapsto$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Последовательность$\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[0,\,1]$ к предельной функции $f(x) = g(x)$.

7. ⑥ 1) для любого $x_0 \in E_1 \cup E_2$ найдется номер $n_0 = n_0(x_0)$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $\sin(x_0/n) \geqslant 0$, поэтому для всех $n \geqslant n_0$ верно $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{x_0}{n^2}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{x_0}{n^2}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения и в силу произвольности точки x_0, на $E_1 \cup E_2$ есть поточечная сходимость.

2) На множестве E_1 выполняется $f_n(x) \leqslant \dfrac{x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса на E_1 есть равномерная сходимость функционального ряда.

3) Для любого $n > 1$ точки $x_n = n$ принадлежат E_2, для этого же произвольного n найдется такое $p = n$, что выполняется $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) = \dfrac{\sin(n/(n+1))}{n+1} + \ldots + \dfrac{\sin(n/(2n))}{2n} \geqslant n\cdot\dfrac{\sin(n/(2n))}{2n} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2} = \varepsilon_0$.

8. ② $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\ln n}} = 0$, следовательно, найден радиус сходимости ряда $R = +\infty$. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда имеет производную любого порядка, поэтому функция F дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Вариант 14

1. ② Да. Примером может служить множество рациональных точек на отрезке $[0,\,1]$.

1. ② Является.

2. ⑥ 1) Функция непрерывна при $\alpha \geqslant 0$, поскольку для любой точки $(x,\,y)$, где $x \neq 0$, такой, что $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, верно $|f(x,\,y)-1| = \left|\sqrt{1+|x|^\alpha \cdot |y|}-1\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|x|^\alpha \cdot |y| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1+\alpha} < \frac{1}{2}\,\delta^{1+\alpha} = \varepsilon$. При $\alpha < 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,\,y)$ не существует. См., например, предел по множеству $|y| = |x|^{-\alpha}$.

2) При $\alpha \geqslant 0$ верно $f(x,\,0) = f(0,\,y) = f(0,\,0) = 1$. Следовательно, $f'_x(0,\,0) = f'_y(0,\,0) = 0$.

3) При $\alpha > 0$ для любой точки $(x,\,y)$, где $x \neq 0$, такой, что верно $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, верно $|F(x,\,y)| = \left|\dfrac{\sqrt{1+|x|^\alpha \cdot |y|}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{|x|^\alpha \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(1+\sqrt{1+|x|^\alpha\cdot|y|}\right)} \leqslant \dfrac{1}{2}\,\dfrac{|x|^\alpha\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha < \dfrac{1}{2}\,\delta^\alpha = \varepsilon$.

4) При $\alpha = 0$ предел $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} F(x,y)$ не существует (по разным направлениям — разные пределы).

<u>Ответ</u>. Функция дифференцируема в точке $(0,\,0)$ при $\alpha > 0$.

3. ④ $L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

4. ⑥ $J = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^\alpha + x)}{x^{3/2}}\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = J_1 + J_2$

$\boxed{J_1}$: 1) при $\alpha \geqslant 1$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{Cx}{x^{3/2}} = \dfrac{C}{x^{1/2}}$ при $x \to +0$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha \geqslant 1$;

2) при $0 < \alpha < 1$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{3/2}} = \dfrac{1}{x^{3/2-\alpha}}$; поэтому $J_1 < \infty$ при $\alpha > 1/2$;

3) при $\alpha \leqslant 0$ выполняется $f(x) \geqslant \dfrac{\pi/4}{x^{3/2}}$; поэтому $J_1 = \infty$.

$\boxed{J_2}$: при любом α выполняется $f(x) \leqslant \dfrac{\pi/2}{x^{3/2}}$; поэтому $J_2 < \infty$ при любом α.

<u>Ответ</u>. Интеграл J сходится при $\alpha > 1/2$.

5. ② $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} |a_n| < \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Найдется такой номер N_0, что для всех номеров $n \geqslant N_0$ выполняется $|a_n| < 1$. Поэтому $\forall\, n \geqslant N_0$ верно $a_n^2 \leqslant |a_n|$. Ряд $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

6. ④ Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} g(1), & 0 < x \leqslant 1; \\ g(0), & x = 0; \end{cases}$ разрывна, поскольку $g(0) \neq g(1)$ (в силу строгой монотонности функции g). Функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0,\,1]$, поскольку это суперпозиция непрерывных функций. Если бы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на отрезке $[0,\,1]$ к предельной функции $f(x)$, то $f(x)$ должна быть непрерывной на этом отрезке.

7. ⑥ 1) для любого $x_0 \in E_1 \cup E_2$ верно $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{1}{x_0\,n^{3/2}}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{x_0\,n^{3/2}}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения и в силу произвольности точки x_0, на $E_1 \cup E_2$ есть поточечная сходимость.

2) На множестве E_2 выполняется $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x_0\,n^{3/2}} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса на E_2 есть равномерная сходимость функционального ряда.

3) Для любого $n > 1$ точки $x_n = \dfrac{1}{n}$ принадлежат E_1, для этого же произвольного n найдется такое $p = n$, что выполняется $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) = \frac{\operatorname{th}(n/(n+1))}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{\operatorname{th}(n/(2n))}{\sqrt{2n}} \geqslant n \cdot \frac{\operatorname{th}(n/(2n))}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{th}\frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

8. ② $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{1+\ln n}}} = 2$, следовательно, найден радиус сходимости ряда $R = 1/2$. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда имеет производную любого порядка, поэтому функция F дифференцируема на интервале $(-1/2,\,1/2)$.