ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Многомерный анализ, интегралы и ряды

Курс 1 **Семестр** 2 **2018–2019 учебный год**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Эта задача для всех факультетов, кроме ФОПФ и ФИВТ.

1. ④ Построить график функции $y = \sqrt[3]{|x| \cdot (x+6)^2}$.

2. ④ Найти первый и второй дифференциалы в точке $M(1,\,0)$ следующей функции: $f(x,\,y) = \exp(x + 2\cos y - 3)$. Разложить эту функцию в точке M по формуле Тейлора до $o\big((x-1)^2 + y^2\big)$ при $x \to 1$ и $y \to 0$.

3. ② Вычислить длину дуги кривой $\Gamma\,:\,x(t) = \sin^3 e^t,\ y(t) = \cos^3 e^t$ при $\ln\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \ln\frac{\pi}{2}$.

4. ⑥ Исследовать функцию $w = f(x,y)$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0,\,0)$, если $f(x,\,y) = \begin{cases} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{|y|^\alpha}\right), & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

5. ④ Исследовать несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\big[(1+\sqrt[3]{x})^\alpha - 1\big]\ln \operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x - \sin x)^\alpha}\,dx$ на сходимость.

6. ③ Исследовать ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \alpha^n$ на сходимость.

7. На множествах $E_1 = (0,\,1)$ и $E_2 = (1,\,+\infty)$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность и функциональный ряд:

а) ④ $f_n(x) = \dfrac{n^2}{x}\sin\dfrac{x}{n^2}$; б) ④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{n^3}} - \cos\frac{x}{\sqrt{n^3}}\right)$.

8. ③ Разложить функцию $f(x) = x^3 \arccos\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

Эта задача для студентов ФОПФ и ФИВТ.

9. ③ Докажите, что функция $f(x) = 2^{[-\log_3 x]}$ интегрируема на $(0,\,1]$ и вычислите $\displaystyle\int\limits_{(0,\,1]} f(x)\,dx$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a).

Эта задача для студентов ФОПФ и ФИВТ.

10. ① Пусть последовательность интегрируемых по Лебегу функций $f_n\,:\,[1,\,+\infty) \to \mathbb{R}$ при всех $x \geqslant 1$ удовлетворяет условиям: $\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\right]$ и $\left[\exists N : \forall n \geqslant N \mapsto f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)\right]$.

Верно ли, что $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$?

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: ______________________ (Фамилия студента)

2018–2019 учебный год, 2 семестр

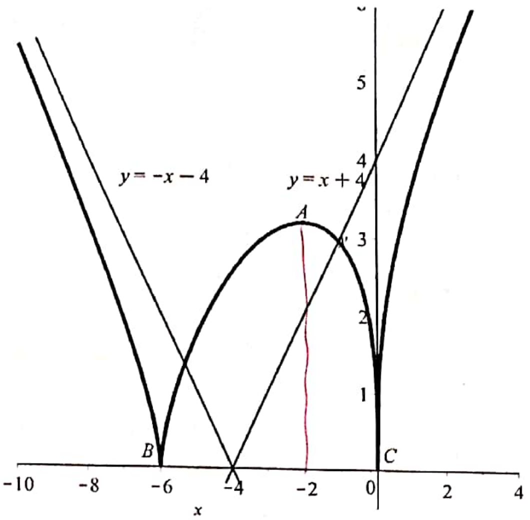
$y' = \operatorname{sign} x \dfrac{(x+2)}{|x|^{2/3}(x+6)^{1/3}}$

Вариант 91

1. ④ Асимптоты: $y = x + 4$ при $x \to +\infty$; $\quad y = -x - 4$ при $x \to -\infty$.

$y' = \dfrac{x(x+2)(x+6)}{|x|^{5/3}(x+6)^{4/3}}$; $\quad y'' = -\dfrac{8}{|x|^{5/3}(x+6)^{4/3}}$; $\quad y'(\pm 0) = \pm\infty$; $\quad y'(-6 \pm 0) = \pm\infty$.

$A(-2,\, 2^{5/3})$ — точка локального максимума; $C(0,\,0)$ — точки локального минимума с вертикальной касательной; $B(-6,\,0)$ — точка локального минимума с вертикальной касательной.



2. ④ $df(M) = dx$; $d^2 f(M) = dx^2 - 2dy^2$.

$f(x,\,y) = 1 + (x-1) + \dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 2y^2\right] + o\big((x-1)^2 + y^2\big),\ x \to 1,\ y \to 0.$

3. ② $L = \displaystyle\int\limits_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi/2)} \frac{3}{2} e^t \sin(2e^t)\, dt = \frac{3}{4}.$ $\quad = \int 3\, e^t \sin(e^t)\cos(e^t)\, dt$

4. ⑥ При $\alpha \leqslant 0$ выполняется $0 \leqslant \ln\big(1 + x^2|y|^{-\alpha}\big) \leqslant x^2|y|^{-\alpha} \leqslant \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{2-\alpha} < \delta^{2-\alpha} = \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \varepsilon^{1/(2-\alpha)} > 0 \quad \forall (x,\,y) \ :\ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \to \quad 0 \leqslant f(x,\,y) < \varepsilon$. Функция $w = f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,\,0)$ при этом значении α.

Если $\alpha > 0$, то обозначим $A = \big\{(x,\,y)\ :\ x = |y|^{\alpha/2}\big\}$. Тогда $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}} f(x,\,y) = \ln 2 \neq 0$ и функция $w = f(x,\,y)$ разрывна в точке $(0,\,0)$ при $\alpha > 0$.

При $\alpha \leqslant 0$ выполняется $f_x(0,\,0) = f_y(0,\,0) = 0$;

$0 \leqslant F(x,\,y) = \dfrac{f(x,\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{1-\alpha} < \delta^{1-\alpha} = \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \varepsilon^{1/(1-\alpha)} > 0 \quad \forall (x,\,y)\ :\ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \to \quad 0 \leqslant F(x,\,y) < \varepsilon$ — функция дифференцируема в точке $(0,\,0)$ при $\alpha \leqslant 0$.

$\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{x^2}}$

5. ④ $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$; $I = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2;$

$x \to 0 \quad \int_0^1 \dfrac{\left((1+\sqrt[3]{x})^\alpha - 1\right)\ln\operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x - \sin x)^\alpha} \sim \dfrac{\left(1 + \alpha x^{\frac13} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^{\frac23} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^{\frac33} - 1\right)\ln\operatorname{ch} x}{\left(\frac{x^3}{3}\right)^\alpha} \sim \dfrac{x^{\frac13}\cdot x^2}{x^{3\alpha}} +$

$\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{2x^3}{6} + \bar{o}(x^3)$

$(e^x)^\alpha$

I_1: при $x \to 0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C_1}{x^{3\alpha - 7/3}}$; поэтому I_1 сходится при $\alpha < 10/9$.

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C_2 \cdot x^{1+\alpha/3}}{e^{\alpha x}}$; поэтому I_2 сходится при $\alpha > 0$.

Интеграл I сходится при $\alpha \in \left(0, \dfrac{10}{9}\right)$.

6.③ $c_n = \alpha^n \dfrac{(2n+1)^n}{(3n+1)^n} = \left(\dfrac{2}{3}\alpha\right)^n b_n$, $\quad b_n \to e^{1/6} = C$ при $n \to \infty$.

Если $|\alpha| < \dfrac{3}{2}$, то $q = \dfrac{2}{3}|\alpha| < 1$ и $|c_n| \sim Cq^n$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ при $|\alpha| < \dfrac{3}{2}$ (признак сравнения) ряд сх. абс.

Если $|\alpha| \geqslant \dfrac{3}{2}$, то $c_n \not\to 0$ при $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$ (не выполнен необходимый признак сходимости ряда).

7 а).④ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $x \in E_1 \cup E_2$; $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|1 - \dfrac{n^2}{x} \sin \dfrac{x}{n^2}\right|$.

<u>На E_1:</u> Пусть $t = x/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, формула Тейлора: $\left|1 - \dfrac{\sin t}{t}\right| = \dfrac{t}{2} \sin \xi$, где $0 < \xi < \dfrac{x}{n^2} < \dfrac{1}{n^2} \leqslant 1$. Поэтому $g_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2n^2} \to 0$, $\quad \sup\limits_{E_1} g_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2n^2} \to 0$ при $n \to \infty$. На E_1 есть равномерная сходимость.

<u>На E_2:</u> Пусть $x_n = n^2 \in E_2$ при $n > 1$, тогда $g_n(x_n) = 1 - \sin 1 > \dfrac{1 - \sin 1}{2} = \varepsilon_0 > 0$. На E_2 нет равномерной сходимости.

7 б).④ $x_0 \in E_1 \cup E_2$; $f_n(x_0) \sim \dfrac{x_0^2}{n^3} = \dfrac{C(x_0)}{n^3}$ при $n \to \infty$, из интегрального признака и признака сравнения следует поточечная сходимость на $E_1 \cup E_2$.

$\operatorname{ch}\frac{1}{n^{3/2}} - \cos\frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)^2 + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$

<u>На E_1:</u> $f_n'(x) = \left(\operatorname{sh} \dfrac{x}{\sqrt{n^3}} + \sin \dfrac{x}{\sqrt{n^3}}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} \geqslant 0$, поэтому $f_n(x) \leqslant \left(\operatorname{ch} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} - \cos \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right) \sim \dfrac{1}{n^3}$ при $n \to \infty$, из интегрального признака и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость на E_1.

<u>На E_2:</u> $x_n = \sqrt{n^3} \in E_2$, $n > 1$; $\quad f_n(x_n) = \operatorname{ch}1 - \cos 1 > \dfrac{\operatorname{ch}1 - \cos 1}{2} = \varepsilon_0$. По отрицанию условия критерия Коши на E_2 нет равномерной сходимости.

8.③ $f(x) = x^3 \cdot g(x)$, $g'(x) = -\dfrac{2}{1+4x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^{2k+1} x^{2k}$; $\quad g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{2^{2k+1}}{2k+1} x^{2k+1}$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} x^3 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k+1}}{2k+1} x^{2k+4}, \qquad R = 1/2.$$

9. ③ Пусть $0 < a < b$, $1 < b$. На промежутке $(b^{-(k+1)}, b^{-k}]$ функция $f(x) = a^{[-\log_b x]}$ принимает значения a^k, $k \in \mathbb{N}$, т.е. является ступенчатой. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k (b^{-k} - b^{-(k+1)}) = \dfrac{b-1}{b-a}$ сходится абсолютно, поэтому f интегрируема и $\displaystyle\int\limits_{(0,1]} f(x)\,dx = \frac{b-1}{b-a}$. Здесь $a = 2$, $b = 3$.

10.① Неверно.

Инструкция по проверке экзаменационной работы по «многомерному анализу, интегралам и рядам», весенний семестр 2018–2019 учебного года

1. На работе должна быть четко выписана фамилия проверяющего, сумма набранных очков и количество очков за каждую задачу.

2. Сбор преподавателей с проверенными работами — 1 июня в 8-30 в 431 ауд.

3. В случае возникновения проблем с поиском работы и идентификации проверяющего (по вине последнего) он несет дисциплинарную ответственность.

4. К 20-00 часам 31 мая итоги проверки работ: «количество работ — количество очков» необходимо сообщить Знаменской Л.Н. по e-mail: **znamenskaia.ln@mipt.ru**

5. За арифметическую ошибку, не имеющую существенного значения, снимать **0.5 очка**.

6. В итоговой сумме дробные значения округлять до целого «в пользу студента». **Значения итоговой суммы большие 30 очков заменять в сводной ведомости 30 очками.**

Оценка отдельных задач

---

1. ④ Найдена и исследована $y'(x)$ .... **1 очко**
Найдена и исследована $y''(x)$ .... **1 очко**
Найдены асимптоты .... **1 очко**
Построен график и описаны характерные точки .... **1 очко**
При отсутствии графика в задаче ставить не более **2 очков за задачу**
При отсутствии описания характерных точек снять **0.5 очка**

---

2. ④ Найден первый дифференциал в точке .... **1 очко**
Найден второй дифференциал в точке .... **2.5 очка**
Выписана формула Тейлора .... **0.5 очка**

---

3. ② Правильно обоснована и выписана формула .... **1 очко**
Вычислен полученный интеграл .... **1 очко**

---

4. ⑥ Доказана непрерывность функции при соответствующих значениях α .... **2 очка**
Доказана, что при других α непрерывности нет .... **1 очко**
Найдены частные производные при соответствующих значениях α .... **1 очко**
Доказана дифференцируемость функции при соответствующих значениях α ... **2 очка**
Доказано лишь то, что предел по каждому направлению равен 0
.... **не более 1 очка за соответствующую часть задачи**

---

5. ④ За исследование каждой особенности .... **по 2 очка**

---

6. ③ Доказана абсолютная сходимость ряда при $|\alpha| < R$ .... **1 очко**
Доказана расходимость ряда при $|\alpha| > R$ и $|\alpha| = R$ .... **по 1 очку**
По умолчанию считается,что $\alpha > 0$ .... **не более 1 очка за всю задачу**

---

7 а). ④ Исследована поточечная сходимость .... **1 очко**
Доказана неравномерная сходимость на одном из множеств .... **1 очко**
Доказана равномерная сходимость на одном из множеств .... **2 очка**

---

7 б). ④ Установлена поточечная сходимость .... **1 очко**
Доказана неравномерная сходимость на одном из множеств........ **1 очко**
Доказана равномерная сходимость на одном из множеств .... **2 очка**

---

8. ③ Для функции g', где $f = x^k \cdot g$ или f', найден ряд Тейлора .... **1.5 очка**
Найден ряд Тейлора функции f .... **1 очко**
Найден радиус сходимости полученного ряда .... **0.5 очка**
Не учтено значение $g(0)$ или $f(0)$ .... **снять 0.5 очка**
