Вариант 1

1. ④ $dz(M) = 3dy$, $d^2z(M) = -dx^2 + 6dy^2$;
$z(x,\,y) = 2 + 3(y-1) - \dfrac{x^2}{2} + 3(y-1)^2 + o\big(x^2 + (y-1)^2\big)$, $x \to 0$, $y \to 1$.

2. ③ $\displaystyle\int_\Gamma \big(\overline{F},\, d\overline{r}\big) = \int_1^2 x(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)\,dx = e^2.$

3. ④ $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, $v = y$; $f(u,\,v) = \begin{cases} |v|^{5/4}\,\dfrac{\sin u}{u}, & u \neq 0; \\ \operatorname{arctg} v - v, & u = 0; \end{cases}$

$f(0,\,0) = f(u,\,0) = 0$, $f(0,v) = \operatorname{arctg} v - v$; $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,\,0) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,\,0) = \lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} v}{v} - 1 = 0$;

$\big|F(u,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(u,\,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = \dfrac{|v|^{5/4}|\sin u|}{|u|\sqrt{u^2+v^2}} \leqslant \dfrac{\rho^{5/4}}{\rho} = \rho^{1/4} < \delta^{1/4} = \varepsilon$, где $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$.

$\big|F(0,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(0,\,v)}{v}\right| = \left|\dfrac{\operatorname{arctg} v}{v} - 1\right| \to 0$ при $v \to 0$.

Функция $f(x,\,y)$ дифференцируема в точке M_0.

4. ④ $f' = 2\sqrt{2}\,x\,\dfrac{1}{1+x^4/2}$; $f(x) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)\,2^k}$; $R = \sqrt[4]{2}$.

5. ③ При $n \to \infty$ выполняется $\sqrt[n]{a_n} \sim \left(1 - \dfrac{11}{6}\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{-11/6} < 1$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по предельному признаку Коши.

6 а). ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2;$

I_1: при $x \to +0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^{\alpha-1}}$, I_1 сходится при $\alpha < 2$;

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^2 e^{\alpha x}}$; I_2 сходится при $\alpha \geqslant 0$.

6 б). ⑥ При $\alpha \geqslant 1$ — абсолютно сходится; при $0 \leqslant \alpha < 1$ — условно сходится; при $\alpha < 0$ — расходится.

7 а). ⑤ $f(x) = x$; на E_1: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant C\,\dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{C}{n} \to 0$ при $n \to \infty$; есть равномерная сходимость;

на E_2: $x_n = n \in E_2$ при $n > 1$; $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n(e-2) \geqslant (e-2) = \varepsilon_0$; нет равномерной сходимости.

7 б). ⑤ $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{x_0 \ln n}{n^{3/2}}$; есть поточечная сходимость при $x_0 \in E_1 \cup E_2$;

на E_1: $f_n(x) \leqslant \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$ по признаку Вейерштрасса есть равномерная сходимость;

на E_2: для $x_n = n \in E_2$ используем отрицание условия критерия Коши $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) \geqslant \varepsilon_0$, нет равномерной сходимости.

8. ④ $x_n' = 2\pi n + \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$, $x_n'' = 2\pi n$; $\big|f(x_n') - f(x_n'')\big| \to \sqrt{2\pi}$ при $n \to \infty$.

Вариант 2

1. ④ $dz(M) = 2dx + dy$, $d^2z(M) = 2dx^2 + 2dxdy + dy^2$;

$z(x,\,y) = 1 + 2(x-1) + y + (x-1)^2 + (x-1)\,y + \dfrac{y^2}{2} + o\big((x-1)^2 + y^2\big)$, $x \to 1$, $y \to 0$.

2. ③ $\displaystyle\int\limits_\Gamma \rho\,ds = \int\limits_0^1 (x + \operatorname{ch} x)\operatorname{ch} x\,dx = \frac{3}{2} + \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + \frac{\operatorname{sh} 2}{4}.$

3. ④ $u = x + \pi$, $v = y$; $f(u,\,v) = \begin{cases} -|v|^{3/2}\dfrac{\sin u}{u}, & u \neq 0; \\ v - \operatorname{th} v, & u = 0; \end{cases}$

$f(0,\,0) = f(u,\,0) = 0$, $f(0,v) = v - \operatorname{th} v$; $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,\,0) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,\,0) = \lim\limits_{v\to 0} 1 - \dfrac{\operatorname{th} v}{v} = 0$;

$\big|F(u,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(u,\,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = \dfrac{|v|^{3/2}|\sin u|}{|u|\sqrt{u^2+v^2}} \leqslant \dfrac{\rho^{3/2}}{\rho} = \rho^{1/2} < \delta^{1/2} = \varepsilon$, где $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$.

$\big|F(0,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(0,\,v)}{v}\right| = \left|1 - \dfrac{\operatorname{th} v}{v}\right| \to 0$ при $v \to 0$.

Функция $f(x,\,y)$ дифференцируема в точке M_0.

4. ④ $f' = -\dfrac{2}{5}\,x\left(1 - \dfrac{x^4}{25}\right)^{-1/2}$; $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{5}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}C_{-1/2}^{k}\,\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)\,(25)^k}$; $R = \sqrt{5}$.

5. ③ При $n \to \infty$ выполняется $\sqrt[n]{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{1/3} > 1$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по предельному признаку Коши.

6 а). ④ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2;$

I_1: при $x \to +0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^{2\alpha-3}}$, I_1 сходится при $\alpha < 2$;

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^\alpha \ln^2(1+x)}$; I_2 сходится при $\alpha \geqslant 1$.

6 б). ⑥ При $\alpha > 0$ — абсолютно сходится; при $\alpha = 0$ — условно сходится; при $\alpha < 0$ — расходится.

7 а). ⑤ $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$; на E_2: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x^2}\dfrac{C}{xn} \leqslant \dfrac{C}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$; есть равномерная сходимость;

на E_1: $x_n = 1/n \in E_1$ при $n > 1$; $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n^2\left(\operatorname{ch} 1 - \dfrac{3}{2}\right) \geqslant \left(\operatorname{ch} 1 - \dfrac{3}{2}\right) = \varepsilon_0$; нет равномерной сходимости.

7 б). ⑤ $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{1}{2x_0^2n^2\big(1 + \ln^2 n\big)} \leqslant \dfrac{1}{2x_0^2n^2}$; есть поточечная сходимость при $x_0 \in E_1 \cup E_2$;

на E_2: $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2n^2\big(1 + \ln^2 n\big)} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$ по признаку Вейерштрасса есть равномерная сходимость;

на E_1: для $x_n = 1/n \in E_1$ используем отрицание условия критерия Коши $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) \geqslant \varepsilon_0$, нет равномерной сходимости.

8. ④ $x_n' = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n'' = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\big|f(x_n') - f(x_n'')\big| \to 2\pi$ при $n \to \infty$.

2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 3

1. ④ $dz(M) = -3\,dy$, $d^2z(M) = dx^2 - 6\,dy^2$;

$z(x,\,y) = -3(y-1) + \dfrac{x^2}{2} - 3(y-1)^2 + o\big(x^2 + (y-1)^2\big)$, $x \to 0$, $y \to 1$.

2. ③ $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \big(\overline{F},\,d\overline{r}\big) = \int\limits_0^1 (e^{2x} + xe^x)\,dx = \frac{1+e^2}{2}.$

3. ④ $u = x + \dfrac{\pi}{2}$, $v = y$; $f(u,\,v) = \begin{cases} |v|^{7/6}\dfrac{\sin u}{u}, & u \neq 0; \\ \operatorname{tg} v - v, & u = 0; \end{cases}$

$f(0,\,0) = f(u,\,0) = 0$, $f(0,v) = \operatorname{tg} v - v$; $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,\,0) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,\,0) = \lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} v}{v} - 1 = 0$;

$\big|F(u,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(u,\,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = \dfrac{|v|^{7/6}|\sin u|}{|u|\sqrt{u^2+v^2}} \leqslant \dfrac{\rho^{7/6}}{\rho} = \rho^{1/6} < \delta^{1/6} = \varepsilon$, где $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$.

$\big|F(0,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(0,\,v)}{v}\right| = \left|\dfrac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right| \to 0$ при $v \to 0$.

Функция $f(x,\,y)$ дифференцируема в точке M_0.

4. ④ $f' = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x \cdot \dfrac{1}{1 + x^4/3}$; $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)\,3^k}$; $R = \sqrt[4]{3}$.

5. ③ При $n \to \infty$ выполняется $\sqrt[n]{a_n} \sim \left(1 - \dfrac{1}{3n^2}\right)^{n^2} \to e^{-1/3} < 1$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по предельному признаку Коши.

6 а). ④ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2;$

I_1: при $x \to +0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^{2\alpha-3}}$, I_1 сходится при $\alpha < 2$;

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^{\alpha}\,e^x}$; I_2 сходится при любом α.

6 б). ⑥ При $\alpha > 1$ — абсолютно сходится; при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ — условно сходится; при $\alpha < 0$ — расходится.

7 а). ⑤ $f(x) = \dfrac{\pi x}{6}$; на E_1: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\pi x}{6} \cdot C\dfrac{\pi x}{6n} = \dfrac{C_1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$; есть равномерная сходимость;

на E_2: $x_n = \dfrac{6n}{\pi} \in E_2$; $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n(\operatorname{tg} 1 - 1) \geqslant \operatorname{tg} 1 - 1 = \varepsilon_0$; нет равномерной сходимости.

7 б). ⑤ При $n \to \infty$ верно $f_n(x_0) \sim \dfrac{x_0}{n^{3/2}}$; есть поточечная сходимость при $x_0 \in E_1 \cup E_2$;

на E_1: $f_n(x) \leqslant \operatorname{tg}\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$; по признаку Вейерштрасса есть равномерная сходимость;

на E_2: для $x_n = n \in E_1$ используем отрицание условия критерия Коши $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) \geqslant \varepsilon_0$, нет равномерной сходимости.

8. ④ $x_n' = 2\pi n + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $x_n'' = 2\pi n$; $\big|f(x_n') - f(x_n'')\big| \to 2\pi$ при $n \to \infty$.

2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 4

1. ④ $dz(M) = -2\,dx + 2\,dy$, $d^2z(M) = -2\,dx^2 + 4dxdy - 2\,dy^2$;
$z(x,\,y) = 1 - 2(x-1) + 2y - (x-1)^2 + 2y(x-1) - y^2 + o\big((x-1)^2 + y^2\big)$, $x \to 1$, $y \to 0$.

2. ③ $\displaystyle\int\limits_\Gamma \rho\,ds = -\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x \cdot \ln\cos x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = 2 - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2.$

3. ④ $u = x - \pi$, $v = y$; $f(u,\,v) = \begin{cases} -|v|^{4/3}\dfrac{\sin u}{u}, & u \neq 0; \\ \sin v - v, & u = 0; \end{cases}$

$f(0,\,0) = f(u,\,0) = 0$, $f(0,v) = \sin v - v$; $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,\,0) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,\,0) = \lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\sin v}{v} - 1 = 0$;

$\big|F(u,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(u,\,v)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = \dfrac{|v|^{4/3}|\sin u|}{|u|\sqrt{u^2+v^2}} \leqslant \dfrac{\rho^{4/3}}{\rho} = \rho^{1/3} < \delta^{1/3} = \varepsilon$, где $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$.

$\big|F(0,\,v)\big| = \left|\dfrac{f(0,\,v)}{v}\right| = \left|\dfrac{\sin v}{v} - 1\right| \to 0$ при $v \to 0$.

Функция $f(x,\,y)$ дифференцируема в точке M_0.

4. ④ $f' = x \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{x^4}{4}}$; $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)\,4^k}$; $R = \sqrt{2}$.

5. ③ При $n \to \infty$ выполняется $\sqrt[n]{a_n} \sim \left(1 - \dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{-2} < 1$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по предельному признаку Коши.

6 а). ④ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2;$

I_1: при $x \to +0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x^{\alpha-2}}$, I_1 сходится при $\alpha < 3$;

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C}{x\ln^\alpha(1+x)}$; I_2 сходится при $\alpha > 1$.

6 б). ⑥ При $\alpha > 0$ — абсолютно сходится; при $\alpha = 0$ — условно сходится; при $\alpha < 0$ — расходится.

7 а). ⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$; на E_2: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}\dfrac{C}{xn} \leqslant \dfrac{C}{n} \to 0$ при $n \to \infty$; есть равномерная сходимость;

на E_1: $x_n = 1/n \in E_1$ при $n > 1$; $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n\,(\operatorname{sh}1 - 1) \geqslant (\operatorname{sh}1 - 1) = \varepsilon_0$; нет равномерной сходимости.

7 б). ⑤ $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{1}{x_0 n\ln^3 n}$; есть поточечная сходимость при $x_0 \in E_1 \cup E_2$;

на E_2: $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n\ln^3 n}$ по признаку Вейерштрасса есть равномерная сходимость;

на E_1: для $x_n = 1/n \in E_1$ используем отрицание условия критерия Коши $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n) \geqslant \varepsilon_0$, нет равномерной сходимости.

8. ④ $x_n' = 2\pi n + \dfrac{1}{\ln n}$, $x_n'' = 2\pi n$; $\big|f(x_n') - f(x_n'')\big| \to 1$ при $n \to \infty$.