1A	2A	3A	4A	5A	6A	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ

ФИО ____________________

группа ____________________

Подпись преп. ____________________

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

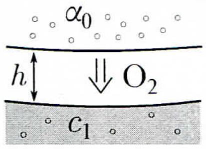
7 июня 2019 г.

Вариант **A**

1A. (1,5) Энергия ионизации молекулярного кислорода равна $I = 12{,}1$ эВ. Оценить долю молекул при температуре $T = 10^4$ К, имеющих поступательную энергию, превосходящую I.

Указание: при $\alpha \gg 1$ справедлива оценка $\int\limits_{\alpha}^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx \approx \sqrt{\alpha}e^{-\alpha}$.

2A. (1,5) В процессе дыхания организм человека извлекает кислород из воздуха и использует его для получения энергии при окислении органических молекул. Считая, что на один моль O_2 выделяется энергия $E = 470$ кДж/моль, а мощность, вырабатываемая человеком при активной физической нагрузке, составляет $W = 1$ кВт, оценить рабочую площадь поверхности его легких S. Мольную долю кислорода в воздухе внутри лёгких принять постоянной и равной $\alpha_0 = 0{,}14$, а концентрацию O_2 в крови — $c_1 = 2$ моль/м^3. Толщина барьера между воздухом и кровью $h = 1$ мкм, коэффициент диффузии в нём $D = 10^{-7}$ см^2/с.



3A. (2) Два одинаковых сосуда, заполненные гелием общим количеством $\nu = 1$ моль, сообщаются отверстием, диаметр которого меньше длины свободного пробега. Температуры в сосудах исходно поддерживаются равными T_1 и $T_2 = 4T_1$. Найти температуру T, которая установится в системе в состоянии равновесия, если перестать поддерживать температуры сосудов и изолировать их от окружающей среды. Вычислить также результирующее изменение энтропии системы ΔS.

4A. (2) Закрытый сосуд с жёсткими стенками полностью заполнен водой при нормальных условиях. После помещения сосуда в морозильную камеру и установления равновесия 10% воды превратилось в лёд. Найти температуру t в камере. Теплота плавления льда $q = 330$ Дж/г, начальная плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3, сжимаемость воды $\beta_в = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ атм$^{-1}$, плотность образовавшегося льда $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3. Деформацией стенок пренебречь.

5A. (2) При низких температурах ($T \to 0$) свободная энергия «электронного газа» в металлах в объёме V при температуре T даётся зависимостью $F = F_0 - \beta V^{2/3}T^2$, где F_0 и β — постоянные величины. Найти разность теплоёмкостей $C_P - C_V$ электронного газа как функцию V и T.

6A. (3) Оценить, с какой относительной погрешностью $\varepsilon = \Delta c/c_0$ нужно измерять скорость звука в углекислом газе CO_2, чтобы заметить отклонение от расчёта по модели идеального газа? Постоянные Ван-дер-Ваальса равны $a = 0{,}4$ Па $\cdot$ м^6/моль^2 и $b = 4 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. При температуре в лаборатории $t = 22{,}0$ °C плотность газа $\rho = 1{,}80$ кг/м^3. Молярная масса $\mu = 44{,}0$ г/моль. Теплоёмкость CO_2 при постоянном объёме $C_V = 3{,}45R$.

Просим студентов пройти опрос о качестве работы преподавателей кафедры — — сайт МФТИ, раздел Кафедры общей физики

ФИО ______________________

группа ______________________

1Б	2Б	3Б	4Б	5Б	6Б	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ

Подпись преп. ______________________

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

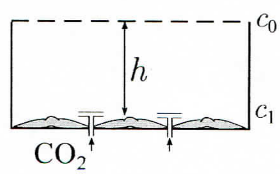
7 июня 2019 г.

Вариант **Б**

1Б. (1,5) Энергия ионизации молекулярного азота равна $I = 15{,}6$ эВ. Оценить долю молекул при температуре $T = 10^4$ К, имеющих поступательную энергию, превосходящую I.

Указание: при $\alpha \gg 1$ справедлива оценка $\int\limits_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha^2}$.

2Б. (1,5) Для поддержания процессов фотосинтеза растения в теплицах “подкармливают” углекислым газом. Газ подаётся на уровне почвы, где расположены листья растений, потребляющие его с интенсивностью $J = 5$ мг/(дм^2 · час). Массовая доля CO_2 над листьями поддерживается равной $c_1 = 0{,}4\%$. В воздухе над теплицей при открытых в её крыше форточках эта доля равна $c_0 = 0{,}04\%$. Оценить суточный расход Q [кг/сут] подаваемого в теплицу CO_2. Высота теплицы $h = 2$ м, площадь $S = 100$ м^2, суммарная площадь листьев $S_л = 1{,}5S$. Коэффициент диффузии CO_2 в воздухе $D = 0{,}2$ см^2/с. Молярная масса воздуха $\mu_в = 29$ г/моль. Температура $t = 27$ °C постоянна по высоте. Конвекция отсутствует.



3Б. (2) В сосуде объёмом $V = 1$ л находится азот N_2 под давлением $P = 1$ мбар. Сосуд имеет отверстие диаметром $d = 50$ мкм, выходящее в вакуум. Температура сосуда $T = 300$ К поддерживается постоянной. Какое количество теплоты Q будет подведено к содержимому сосуда к моменту, когда его покинет половина молекул? Какое время τ на это потребуется?

4Б. (2) В закрытой колбе объемом $V = 1$ л находится влажный воздух при температуре $t_0 = 27$ °C и относительной влажности $\varphi = 70\%$. Колбу охлаждают на $\Delta t = 15$ °C. Найти массу Δm сконденсировавшейся воды. Теплоту испарения принять равной $\Lambda = 44$ кДж/моль, давление в тройной точке воды $P_{тр} = 610$ Па.

5Б. (2) При измерении скорости звука в углекислом газе CO_2 в сосуде, находящемся в атмосфере при комнатной температуре, имеется течь. Найдите минимальную мольную долю примеси воздуха α, присутствие которой в сосуде можно обнаружить экспериментально, если относительная погрешность измерений $\varepsilon = 1\%$. Воздух считать смесью двухатомных газов с молярной массой $\mu_в = 29$ г/моль. Показатель адиабаты для углекислого газа принять равным $\gamma_{CO_2} = 9/7$. Молярная масса $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль.

6Б. (3) В одной из моделей теплоёмкость C_V кристалла при низких температурах ($T \to 0$) равна $C_V = aVT^3$, где V — объём кристалла, a — постоянная величина. Изотермический модуль всестороннего сжатия равен K. Найти разность $C_P - C_V$ теплоёмкостей кристалла как функцию его объёма и температуры.

Просим студентов пройти опрос о качестве работы преподавателей кафедры — — сайт МФТИ, раздел Кафедры общей физики

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 7 июня 2019 г.

1А. (*Попов П.В.*)
$$x = \int\limits_I^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}}\sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = \int\limits_{I/kT}^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\xi} e^{-\xi} d\xi \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{I}{kT}} e^{-I/kT} \approx \underline{4{,}2 e^{-14}} \approx \underline{3{,}5\cdot 10^{-6}}.$$

2А. (*Гавриков А.В.*) $J = SD\dfrac{\alpha P_0/kT - cN_A}{h} = \dfrac{N_A W}{E}$, $S = \dfrac{hW}{ED(\frac{\alpha P_0}{RT} - c)} = \dfrac{10^{-6}\cdot 10^3}{4{,}7\cdot 10^5\cdot 10^{-11}\cdot(\frac{0{,}14\cdot 10^5}{8{,}3\cdot 300} - 2)} \approx \underline{60\ \text{м}^2}$.

3А. (*Попов П.В.*) В начальном состоянии имеем $n_1\bar v_1 = n_2 \bar v_2$, то есть $N_1\sqrt{T_1} = N_2\sqrt{T_2}$, $N_1 + N_2 = N$, откуда $N_1 = \frac{2}{3}N$, $N_2 = \frac{1}{3}N$. Из закона сохранения энергии $N_1T_1 + N_2T_2 = NT$ находим $T = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}4)T_1 = \underline{2T_1}$ (1 балл).

Изменение энтропии (с учётом тождественности газов в сосудах):
$$\Delta S/k = \frac{3}{2}N\ln T + N\ln\frac{2V}{N} - \left(\frac{3}{2}N_1 \ln T_1 + N_1\ln\frac{V}{N_1}\right) - \left(\frac{3}{2}N_2\ln T_2 + N_2\ln\frac{V}{N_2}\right)$$
Подставляя полученные выше значения, находим $\Delta S = \underline{\nu R\left(\frac{13}{6}\ln 2 - \ln 3\right)} \approx 0{,}4\nu R = \underline{3{,}35\ \text{Дж/К}}$ (1 балл).

4А. (*Аникин Ю.А.*) Начальный объём незамерзшей порции воды $V_0 = 0{,}9m/\rho_\text{в}$. Её объём изменится из-за расширения льда в закрытом сосуде на $\Delta V = 0{,}1m(1/\rho_\text{в} - 1/\rho_\text{л})$. Тогда $\Delta V/V_0 = \frac{0{,}1m(1/\rho_\text{в} - 1/\rho_\text{л})}{0{,}9m/\rho_\text{в}} = \frac{1}{9}(1 - \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{л}}) \approx -9{,}7\cdot 10^{-3}$. Приращение давления воды $\Delta P = -\frac{1}{\beta_\text{в}}\Delta V/V_0 = \frac{1}{9\beta_\text{в}}(1 - \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{л}}) \approx 201$ атм. Из уравнения Клапейрона–Клаузиуса $\Delta T \approx \Delta P\frac{T}{q}\left(\frac{1}{\rho_\text{в}} - \frac{1}{\rho_\text{л}}\right) \approx \underline{-1{,}5\ ^\circ\text{C}}$.

5А. (*Крымский К.М.*) Из свободной энергии находим уравнение состояния $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{2}{3}\beta V^{-1/3}T^2$ или $V = (\frac{2}{3}\beta)^3 T^6/P^3$. Пользуясь известной формулой для разности теплоёмкостей
$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$$
найдём $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 16\beta^3T^5/9P^3 = 6V/T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -8\beta^3T^6/9P^4 = -9V^{4/3}/(2\beta T^2)$ и окончательно $C_P - C_V = \underline{8\beta V^{2/3}T}$.

Альтернативно, находим энтропию $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = 2\beta V^{2/3}T$ и выражаем теплоёмкости явно: $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 2\beta V^{2/3}T$. Энтропия через (P, T): $S = 8\beta^3T^5/9P^2$, откуда $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = 40\beta^3T^5/9P^2 = 5C_V$, и $C_P - C_V = 4C_V = \underline{8\beta V^{2/3}T}$.

6А. (*Бабинцев В.А., ред. Попов П.В.*) Адиабата для газа Ван-дер-Ваальса: $dS = C_V\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V-b} = 0$ или $T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{RT}{C_V(V-b)}$. Скорость звука $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = -\frac{V^2}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S$, где $V = \mu/\rho$ — молярный объём. С учётом уравнения состояния $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ находим
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{R}{(V-b)}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - \frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = -\frac{\gamma_0 RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$
где $\gamma_0 = 1 + \frac{R}{C_V} = 1{,}29$ — показатель адиабаты идеального газа (заметим, что для газа Ван-дер-Ваальса $\frac{R}{C_V} + 1 \neq \frac{C_P}{C_V}$). Пользуясь малостью поправок, получим
$$c = \sqrt{\frac{c_0^2}{(1 - b/V)^2} - \frac{2a}{V\mu}} \approx c_0\left[1 + \frac{b}{V} - \frac{a}{\gamma_0 RTV}\right],$$
где $c_0 = \sqrt{\gamma_0 RT/\mu} = 268$ м/с — скорость звука в модели идеального газа. Вычисляем поправки: $b/V = \rho b/\mu \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}$, $a/(\gamma VRT) \approx 4{,}9\cdot 10^{-3}$. Итого $\underline{\varepsilon \approx 3\cdot 10^{-3}}$.

1Б. (*Попов П.В.*) $x = \int\limits_{\sqrt{2I/m}}^\infty \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT} dv = \int\limits_{\sqrt{I/kT}}^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}}\xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{4I}{\pi kT}} e^{-I/kT} \approx \underline{4{,}8 e^{-18} \approx 7\cdot 10^{-8}}$.

2Б. (*Крымский К.М.*) $Q = t(JS_\text{л} + D\frac{\Delta\rho}{h}S)$, где $\Delta\rho = (c_1 - c_0)\rho_\text{в}$ — перепад плотности CO_2 на высоте теплицы, $\rho_\text{в} = \frac{P\mu_\text{в}}{RT} \approx 1{,}16$ кг/м^3 — плотность воздуха. Тогда $Q = 24\frac{5\cdot 10^{-6}}{10^{-2}}\cdot 150 + 24\cdot 3600\left(0{,}2\cdot 10^{-4}\frac{100}{2}\cdot 0{,}0036\cdot 1{,}16\right) \approx 1{,}80 + 0{,}36 = \underline{2{,}16\ \text{кг/сут}}$.

3Б. (*Веревочкин Ю.Г., ред. Попов П.В.*) Средняя энергия вылетающей частицы на $\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}kT$ превышает среднюю энергию в сосуде $\bar{\varepsilon} = \frac{5}{2}kT$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = -\Delta N\bar{\varepsilon} = Q - Q_{\text{выл}}$, где $Q_{\text{выл}} = \Delta N(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon)$, откуда полученное газом тепло $Q = \Delta N\Delta\varepsilon = \frac{1}{4}PV \approx \underline{25\ \text{мДж}}$ (1 балл).
Время истечения находим из уравнения $dN/dt = -\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\frac{1}{4}\pi d^2$, откуда $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi\mu} \approx 476$ м/с, $\tau = \frac{16V}{\pi d^2\bar{v}} \approx 4{,}3\cdot 10^3$ с, $t_{1/2} = \tau\ln 2 \approx \underline{3\cdot 10^3\ \text{с} \approx 50\ \text{мин}}$ (1 балл).

4Б. (*Удалова А.Г., ред. Попов П.В.*) Из уравнения Клапейрона–Клаузиуса, пренебрегая молярным объёмом воды, $\frac{dP}{dT} = \frac{\Lambda P}{RT^2}$, находим давление насыщенного пара $P_{\text{н}}(T) = P_{\text{тр}}\exp\left(\frac{\Lambda}{R}\left(\frac{1}{T_{\text{тр}}} - \frac{1}{T}\right)\right)$. $P_{\text{н}}(300) = 610\cdot\exp\frac{4{,}4\cdot 10^4}{8{,}31}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{300}\right) \approx 3{,}5$ кПа, $P_{\text{н}}(285) \approx 1{,}38$ кПа. Начальное давление пара $P_1 = \varphi P_{\text{н}}(300) = 2{,}45$ кПа. В конечном состоянии $P_1\frac{T_2}{T_1} = 2{,}32$ кПа $> P_{\text{н}}(285)$, поэтому пар будет насыщенным: $P_2 = P_{\text{н}}(285)$. Масса сконденсировавшейся воды $\Delta m = \mu\frac{V}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) \approx \underline{7{,}2\ \text{мг}}$.

5Б. (*Лилиенберг И.В., ред. Попов П.В.*) Из $\gamma = 1 + R/C_V$ находим для углекислого газа $C_V = \frac{7}{2}R$. Для показателя адиабаты смеси имеем $\bar{\gamma} = \frac{\alpha\frac{7}{2} + (1-\alpha)\frac{9}{2}}{\alpha\frac{5}{2} + (1-\alpha)\frac{7}{2}} = \frac{\frac{9}{2} - \alpha}{\frac{7}{2} - \alpha} \approx \frac{9}{7} + \frac{4}{49}\alpha$. Молярная масса смеси $\bar{\mu} = \alpha\mu_{\text{в}} + (1-\alpha)\mu_{CO_2} = (44 - 15\alpha)$ г/моль. Относительная поправка к скорости звука $c = \sqrt{\bar{\gamma}RT/\bar{\mu}}$: $\varepsilon = \frac{\Delta c}{c} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} - \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{4/49}{9/7} + \frac{15}{44}\right) \approx 0{,}20\alpha$, откуда $\underline{\alpha \approx 5\%}$.

6Б. (*Крымский К.М.*) Интегрируя $C_V = aVT^3 = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, находим энтропию $S = \int\frac{C_V dT}{T} = \frac{1}{3}aVT^3 + S_0(T)$ (поскольку при $T\to 0$ должно выполняться $S\to\text{const}$, можно положить $S_0\equiv 0$). Пользуясь соотношением Максвелла $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ и известным соотношением для разности теплоёмкостей, получим

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} = -T\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

Подставляя $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}aT^3$, $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -K/V$, находим $\underline{C_P - C_V = a^2VT^7/9K}$.

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется число баллов, кратное 0,5, исходя из стоимости задачи (x):

x	+	Задача решена верно: приведено *обоснованное* решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
$x - 0{,}5$	±	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках.
$x - 1$	+/2	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
$x - 1{,}5$	∓	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена.
0	−	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

Оценка за письменную работу ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в *большую* сторону, но не более 10 и не менее 1.

Максимальная оценка за устный экзамен: Σ = [оценка за письм. работу] + [баллы за задания]. «отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. popov.pv@mipt.ru.
Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru.

Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов состоится 13 июня в 8:40 в Главной физической ауд.