

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 9 июня 2018 г.**

**1А.** (Смирнова О.И., Попов П.В.)  $\Delta f = \frac{c}{2L}$ ,  $c^2 = \gamma \frac{RT}{\mu}$ ,  $\gamma = \frac{\mu(2L\Delta f)^2}{RT} \approx 1,295$ ,  $C_V = \frac{R}{\gamma-1} \approx \boxed{3,4R}$ .

**2А.** (Савров М.А., Прут Э.В.)  $E = NC_V T$ ,  $\sigma_E^2 = kT^2 \frac{dE}{dT}$ ,  $\frac{\sigma_E}{E} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_V}{k} N}} = \sqrt{\frac{2}{5N}}$ ,  $N = \frac{2}{5} \left( \frac{E}{\sigma_E} \right)^2 = 4 \cdot 10^7$ ,

$P = \frac{NkT}{V} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 308}{10^{-6}} = \boxed{1,7 \cdot 10^{-7} \text{ Па}}$ . Оценку  $\frac{\sigma_E}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , и  $P \sim 4 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$  не считать ошибкой.

**3А.** (Кузьмичёв С.Д., Попов П.В.) (см. также зад. 7.18) Распределение по скоростям

$$f(v) = \frac{4\pi v^2}{(2\pi kT/m)^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0^3} e^{-v^2/v_0^2},$$

где  $v_0^2 = 2kT/m$ . За интервал  $[t; t + dt]$  о сферу ударятся частицы, имеющие скорость  $v \in [\frac{R}{t} - \frac{Rdt}{t^2}; \frac{R}{t}]$ . Количество таких частиц  $dN = Nf(\frac{R}{t}) \frac{Rdt}{t^2}$ . Момент  $t = R/v_0$  соответствует  $v = v_0$ , поэтому

$dN = Nf(v_0) \frac{v_0^2 dt}{R}$ . Давление есть плотность потока импульса:  $P = \frac{dN}{4\pi R^2 \cdot dt} \cdot mv_0 = \boxed{\frac{1}{\pi^{3/2}e} \frac{Nm v_0^2}{R^3}}$ .

**4А.** (Аникин Ю.А.) Закон сохранения энергии:  $C_V T_0 + \frac{1}{2} \alpha V_0^2 = C_V T_1 + \frac{1}{2} \alpha V_1^2$ , где  $\alpha$  — константа, пропорциональная жесткости пружины,  $C_V = \frac{3}{2}R$ . В начальном и конечном состояниях имеем  $\alpha V_0 = nP_0$ ,  $\alpha V_1 = P_1$ ,  $P_0 V_0 = \nu RT_0$ ,  $P_1 V_1 = \nu RT_1$ . Решая систему, находим  $T_1 = T_0 \frac{2C_V + nR}{2C_V + R} = \frac{5}{4}T_0$ , и

$\frac{V_0}{V_1} = \sqrt{n \frac{T_0}{T_1}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$ . Изменение энтропии:  $\Delta S = C_V \ln \frac{T_1}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{V_0} = \boxed{R \left( \frac{3}{2} \ln \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} \right) \approx 0,1R}$ .

**5А.** (Желтоухов А.А.) Избыточное давление паров в сосуде находим из уравнения Клапейрона–Клаузиуса:  $\Delta P \approx \lambda \rho_0 \frac{\Delta T}{T_0} \approx 3,6 \text{ кПа}$ , где плотность газа  $\rho_0 = \frac{P_0 \mu}{RT_0} \approx 0,58 \text{ кг/м}^3$ . Расход из формулы Пуазейля  $Q = \frac{\pi}{8} \rho \frac{\Delta P}{\eta \ell} r^4 \approx 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/с}$  (скорость потока  $v \sim 30 \text{ м/с}$ , Рейнольдс  $Re \sim 500$ ). Мощность, необходимая для испарения данного количества жидкости:  $W = \lambda Q = \frac{\pi \lambda^2 P_0^2 \mu^2 r^4 \Delta T}{8 \eta \ell R^2 T_0^3} \approx \boxed{13 \text{ Вт}}$ .

**6А.** (Прут Э.В., Попов П.В.) В равновесии  $n(x) = n_0 e^{-mgx/kT}$ , откуда

$$m = \frac{kT}{gh} \ln \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \approx \frac{kT}{gh} \frac{\Delta n}{n} = \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}{9,8 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \cdot 0,1 \approx 8,5 \cdot 10^{-22} \text{ кг}$$

— эффективная масса частицы с учётом силы Архимеда. Радиус  $r = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{m}{\rho - \rho_0} \right)^{1/3} \approx 4,0 \text{ нм}$ . Подвижность  $b = \frac{1}{6\pi\eta r} \approx 1,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}}$ . Дрейфовая скорость  $u = bmg \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ м/с}$ . Время осаждения за счёт дрейфа  $t_{\text{др}} = h/u \approx 4,6 \cdot 10^8 \text{ с}$ . Время блужданий за счёт диффузии  $t_{\text{диф}} \sim \frac{h^2}{2kTb} \approx \frac{h}{2u} \frac{\Delta n}{n} \ll t_{\text{др}}$ . Таким образом,  $t_{\text{диф}} \ll t_{\text{др}}$  и осаждение определяется временем диффузии  $t \sim \frac{h^2}{2kTb} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 1,3 \cdot 10^{10}} \approx \boxed{2,3 \cdot 10^7 \text{ с}} \approx 9 \text{ мес.}$

**1Б.** (Смирнова О.И.)  $\mu = \frac{\gamma RT}{(2fL)^2} = 5,6 \text{ г/моль}$ ,  $\mu = 4\alpha + 20(1 - \alpha) = 20 - 16\alpha$ ,  $\alpha_{\text{He}} = \frac{14,6}{16} = \boxed{0,9}$ ,  $\alpha_{\text{Ne}} = \boxed{0,1}$ .

**2Б.** (Попов П.В.)  $N = \frac{1}{4} n \bar{v} \cdot 4\pi r^2 \cdot t = N_A P r^2 t \sqrt{\frac{8\pi}{\mu RT}} \approx 3,8 \cdot 10^{13}$ ,  $\sigma_N = \sqrt{N} = \boxed{6,2 \cdot 10^6}$ .

**3Б.** (Кузьмичёв С.Д., Попов П.В.) Аналогично 3А: распределение по скоростям

$$f(v) = \frac{4\pi v^2}{(2\pi kT/m)^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \frac{v^2}{u^3} e^{-3v^2/2u^2},$$

где  $u^2 = 3kT/m$ . Число частиц  $dN = Nf(u) \frac{u^2 dt}{R}$ . Плотность потока энергии

$$q = \frac{dN}{4\pi R^2 \cdot dt} \cdot \frac{mu^2}{2} = \frac{Nm u^3}{R^3} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2\pi e} \right)^{3/2} \approx \boxed{0,037 \frac{Nm u^3}{R^3}}.$$

**4Б.** (Шеронов А.А.) Закон сохранения энергии  $C_V T_0 = C_V T_1 + \alpha \frac{\Delta V^2}{2}$ ,  $C_V = \frac{5}{2}R$ . В начальном и конечном состояниях имеем  $P_1 = \alpha \Delta V = P_0/n$ ,  $P_1(V_0 + \Delta V) = RT_1$ ,  $P_0 V_0 = RT_0$ . Решая систему, находим

$T_1 = T_0 \frac{2C_V + R/n}{2C_V + R} = \frac{19}{21} T_0$ . Изменение энтропии  $\Delta S = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{P_1}{P_0} = \boxed{R \left( \frac{7}{2} \ln \frac{19}{21} + \ln 3 \right) \approx 0,75R}$ .

**5Б.** (Попов П.В.) Давление внутри сосуда из уравнения Клапейрона–Клаузиуса:  $P_1 = P_0 e^{\frac{\lambda}{R} \frac{T_1 - T_0}{T_1 T_0}} \approx P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{RT_0} \frac{T_1 - T_0}{T_0}\right) \approx 111$  кПа. Из уравнения Бернулли для адиабатического истечения из отверстия имеем  $C_P(T_1 - T_2) = \frac{\mu v^2}{2}$ , где  $C_P = 4R$ , а  $T_2$  — температура на выходе из отверстия (она не равна  $T_0$ !). Из условия адиабатичности (постоянства энтропии) имеем:  $T_1 - T_2 \approx \frac{R}{C_P} T_1 \frac{P_1 - P_0}{P_1} \approx 7$  К (или  $T_2 = T_1 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{R/C_P} \approx 369$  К). Тогда  $v = \sqrt{\frac{2C_P \Delta T}{\mu}} \approx 1,6 \cdot 10^2$  м/с. Расход  $Q = \pi r^2 \rho_2 v = \pi r^2 \frac{P_0 \mu}{RT_2} v \approx \frac{3,1 \cdot 5^2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 3,7 \cdot 10^2} 1,6 \cdot 10^2 \approx 7,4 \cdot 10^{-5}$  кг/с. Мощность, необходимая для испарения  $N = \frac{\lambda Q}{\mu} \approx \boxed{1,7 \cdot 10^2 \text{ Вт}}$ .

**6Б.** (Быков А.А., Попов П.В.) Плотность потока тепла по оси  $x$  (направлена вправо):  $q = -\kappa \frac{dT}{dx} + CTv$ . В стационаре  $q = \text{const}$ . Из условий на левом конце трубки ( $x \rightarrow -\infty$ ) имеем  $q = CT_0 v$ . Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{v dx}{\chi} \rightarrow t(x) = t_0 + A e^{vx/\chi}.$$

Здесь  $\chi = \frac{\kappa}{C} = 0,04$  см<sup>2</sup>/с — температуропроводность жидкости. Подставим  $t = t_1$  при  $x = 0$ , откуда  $t(x) = t_0 + (t_1 - t_0)e^{vx/\chi}$ . В точке  $x = -L$  находим  $\frac{vL}{\chi} = \frac{0,04 \cdot 1}{0,04} = 1,0$  и  $t = t_0 + (t_1 - t_0)e^{-vL/\chi} = 0 + 27 \cdot e^{-1} \approx \boxed{10^\circ \text{C}}$ .

### Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется целое число баллов согласно стоимости задачи ( $x$ ) и следующим критериям:

$x$	+	Задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
$x - 0,5$	$\pm$	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках.
$x - 1$	$\mp$	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
$x - 1,5$	—	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена.
0	—	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

**Оценка за письменную работу ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в большую сторону (но не более 10 и не менее 1).**

Итоговая  $\Sigma$  баллов = оценка за письм. работу + баллы за задания: «отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

Итоговая сумма  $\Sigma$  определяет максимальную оценку на устном экзамене.

Примеры заполнения:

1А	2А	3А	4А	5А	6А	Оценка
1,5	1,5	1	2	0	1,5	отл(8)
1,5	1,5	1,5	1	0	0	хор(6)
1,5	1	0	0	0	0	удовл(3)

1 зад.	2 зад.	$\Sigma$ баллов
отл(8) +2	отл(9) +2	12
хор(5) +1	нет -3	4
удовл(3) 0	нет -3	0

Комментарий

Оценка на устном может быть повышена до **отл(10)**

Оценка на устном не может превышать **удовл(4)**

Оценка на устном не может превышать **удовл(3)** при условии решения 3 задач из задания

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. [popov.pv@mipt.ru](mailto:popov.pv@mipt.ru). Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры [board.physics.mipt.ru](http://board.physics.mipt.ru).

**Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов состоится 14 июня в 8:40 в Главной физической ауд.**