В этом разделе приведены расчеты, необходимые для определения направления на одиночный источник звука. Направление на источник звука определяется на основании разности хода фазового фронта до микрофонов решетки. В простейшем случае решетка может содержать два микрофона.

Чертеж приведен на рисунке рис. . Одиночный источник звука расположен в точке D на расстоянии L от центра плоскости микрофонной решетки. Микрофоны заркплены в точках A и B, расстояние между микрофонами - S.

$$\Delta l = l_1 - l_2$$

$$l_1 = \sqrt{AC^2 + CD^2}, \quad l_2 = \sqrt{BC^2 + CD^2}$$

$$CD = L \cdot \sin\alpha$$

$$AC = \frac{S}{2} + KC = \frac{S}{2} + L\cos\alpha$$

$$BC = \frac{S}{2} - KC = \frac{S}{2} - L\cos\alpha$$

$$\Delta l = l_1 - l_2 = \sqrt{AC^2 + CD^2} - \sqrt{BC^2 + CD^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2} + L\cos\alpha\right)^2 + L^2 \cdot \sin^2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{S}{2} - L\cos\alpha\right)^2 + L^2 \cdot \sin^2\alpha} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + S \cdot L \cdot \cos\alpha + L^2 \cdot \cos^2\alpha + L^2 \cdot \sin^2\alpha\right)} - \sqrt{\left(\frac{S^2}{4} - S \cdot L \cdot \cos\alpha + L^2 \cdot \cos^2\alpha + L^2 \cdot \sin^2\alpha\right)}$$

$$\boxed{\Delta l = \sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + S \cdot L \cdot \cos\alpha + L^2\right)} - \sqrt{\left(\frac{S^2}{4} - S \cdot L \cdot \cos\alpha + L^2\right)}} \qquad (1)$$

Выполняем замену

$$a = \frac{S^2}{4} + L^2, \quad x = S \cdot L \cdot \cos\alpha$$

$$\Delta l = \sqrt{(a+x)} - \sqrt{(a-x)}$$

Решаем относительно x

$$\Delta l^2 = a + x - 2\sqrt{(a+x)} \cdot \sqrt{(a-x)} + a - x = 2a - 2\sqrt{(a+x)} \cdot \sqrt{(a-x)} =$$

$$2a - 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$a^2 - x^2 = \left(a - \frac{\Delta l^2}{2}\right)^2$$

$$x = \sqrt{a^2 - \left(a - \frac{\Delta l^2}{2}\right)^2}$$

Подставляем a и x

$$S \cdot L \cdot \cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + L^2\right)^2 - \left(\frac{S^2}{4} + L^2 - \frac{\Delta l^2}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + L^2\right)^2 - \left(\frac{S^2}{4} + L^2 - \frac{\Delta l^2}{2}\right)^2}}{S \cdot L}} \qquad (2)$$

Формула (2) позволяет рассчитать направление на источник звука на основании разности хода фазового фронта Δl и расстояния до источника L. В реальных условиях расстояние L неизвестно, поэтому точное определение направления также невозможно. При расчетах по формуле (2) рекомендуется принять допущение, что $L \geq 50 \cdot S$. При этом погрешность в определении направления зависит от величины $\Delta L = L - L_0$, где L - расстояние до источника, используемое при рассчетах, L_0 - истинное расстояние до источника. Очевидно, что погрешность возрастает при увеличении значения ΔL.

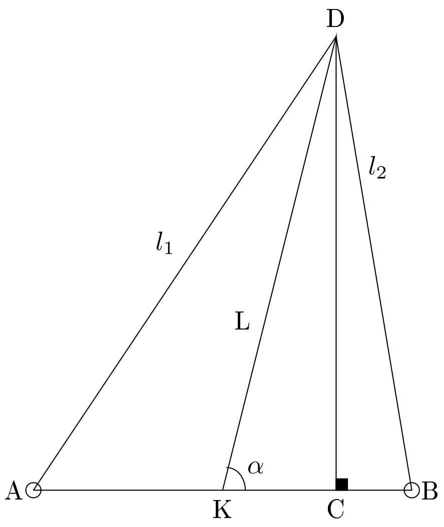

Рис. 1: Прием сигнала от одиночного источника

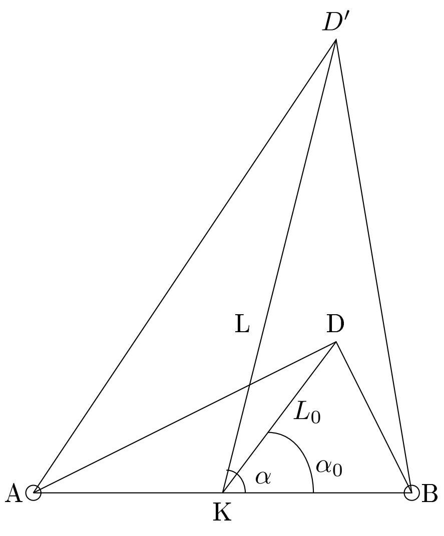

Рис. 2: Погрешность в определении направления при неизвестном L_0

На рисунке приведен пояняющий чертеж. На чертеже α — направление, определенное по формуле (2) на мнимый источник D', α_0 — истинное направление на источник звука D.

Введем неравенство, связывающее между собой углы α и α_0 максимальной погрешностью определения направления $\Delta\alpha$

$$|\alpha - \alpha_0| < \Delta\alpha$$

$$\begin{cases} \alpha < \alpha_0 + \Delta\alpha \ , \ \alpha > \alpha_0 \\ \alpha > \alpha_0 - \Delta\alpha \ , \ \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

Чертежу соответствует первое неравенство системы.

$$\alpha < \alpha_0 + \Delta\alpha$$

$$\alpha_0 > \alpha - \Delta\alpha$$

Необходимо наложить такое ограничение на L_0, чтобы выполнялись условия этого неравенства.

$$\cos\alpha_0 < \cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right)$$

Изменение знака неравенства обусловленно свойствами $\cos\alpha$. Значение α получается на основе $\cos\alpha$ и должно рассчитываться по формуле (2). Для удобства будет выполнена замена $\Delta l = \Delta l_0$. Расчет Δl_0 должен производиться для реального направления α_0 и реального расстояния L_0 по формуле 1. Для расчета $\cos\alpha_0$ также должна применяться формула (2).

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2\right)^2 - \left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^2}{2}\right)^2}}{S \cdot L_0} < \cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2\right)^2 - \left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^2}{2}\right)^2} < S \cdot L_0 \cdot \cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right)$$

Упрощаем подкоренное выражение

$$\left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2\right)^2 - \left(\frac{S^2}{4} + {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^2}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{{\Delta l_0}^2}{2} \cdot \left(2\frac{S^2}{4} + 2{L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^2}{2}\right) =$$
$$\frac{{\Delta l_0}^2 S^2}{4} + {\Delta l_0}^2 {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^4}{4}$$

Подставляем в неравенство

$$\sqrt{\frac{{\Delta l_0}^2 S^2}{4} + {\Delta l_0}^2 {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^4}{4}} < S \cdot L_0 \cdot \cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right)$$

$$\frac{{\Delta l_0}^2 S^2}{4} + {\Delta l_0}^2 {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^4}{4} < S^2 \cdot {L_0}^2 \cdot \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right),$$

при этом должно выполняться условие $\frac{{\Delta l_0}^2 S^2}{4} + {\Delta l_0}^2 {L_0}^2 - \frac{{\Delta l_0}^4}{4} \geq 0$. Т.к $S^2 \cdot {L_0}^2 \cdot \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right) \geq 0$, дополнительную проверку на неотрицательное значение подкоренного выражения можно не выполнять.

$${\Delta l_0}^2 {L_0}^2 - S^2 \cdot {L_0}^2 \cdot \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right) < \frac{{\Delta l_0}^4}{4} - \frac{{\Delta l_0}^2 S^2}{4}$$

$${L_0}^2 \left({\Delta l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right)\right) < \frac{{\Delta l_0}^4 - {\Delta l_0}^2 S^2}{4}$$

$$\begin{cases} {L_0}^2 < \dfrac{{\Delta l_0}^4 - {\Delta l_0}^2 S^2}{4\left({\Delta l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right)\right)}, \ {\Delta l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right) > 0 \\ {L_0}^2 > \dfrac{{\Delta l_0}^4 - {\Delta l_0}^2 S^2}{4\left({\Delta l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right)\right)}, \ {\Delta l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right) < 0 \end{cases}$$

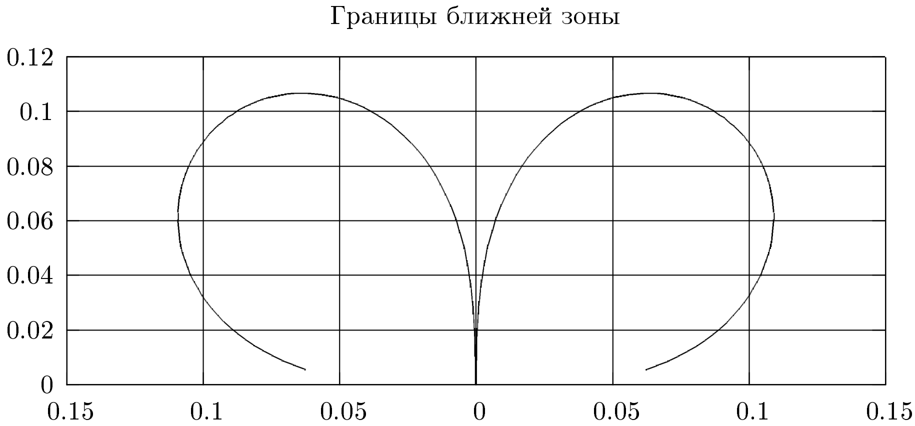

Рис. 3: Граница ближней зоны при погрешности определения угла 2°

Проанализируем систему неравенств. Левые части неравенств представлены положительным числом. Первое неравенство может выполняться только при условии, что его правая сторона также положительное число. Ограничение на знаменатель задано в условиях неравенства. Это означает, что числитель должен быть положительным. Проверим это условие.

$$\Delta {l_0}^4 - \Delta {l_0}^2 S^2 = \Delta {l_0}^2 \cdot \left(\Delta {l_0}^2 - S^2\right)$$

$S > \Delta l_0$ т.к. разность хода звуковых колебаний между двумя точками не может превышать расстояния между этими точками. Отсюда

$$\boxed{\Delta {l_0}^4 - \Delta {l_0}^2 S^2 < 0} \tag{3}$$

Это означает, что первое неравенство системы невыполнимо.

Второе неравенство имеет отрицательный знаменатель в соответствии с условиями этого неравенства и отрицательный числитель, как показано в (3). Это означает, что правая часть этого неравенства строго неотрицательна, а значит, существует множество значений L_0, для которых оно не выполняется и множество значений L_0, для которых оно выполняется.

$$\boxed{L_0 > \sqrt{\frac{\Delta {l_0}^4 - \Delta {l_0}^2 S^2}{4\left(\Delta {l_0}^2 - S^2 \cos^2\left(\alpha - \Delta\alpha\right)\right)}}} \tag{4}$$

Определим условия, при которых знаменатель в подкоренном выражении формулы (4) принимает отрицательные значения.

Алгоритм определения размера ближней зоны.
1. Выбрать базовое значение L_0 из диапазона $5 \ldots 10S$;
2. Выбрать максимальную погрешность $\Delta\alpha$;
3. Выбрать угол α_0 для которого необходимо определить минимальное расстояние;
4. Расчитать Δ_0 по формуле (1);
5. Рассчитать $\cos\alpha$ по формуле (2), подставив $\Delta = \Delta_0$, определить α;
6. Рассчитать уточненное значение L_0 по формуле (4);
7. Пункты 3. . . 6 необходимо выполнить для всех интересующих углов.

Результат расчета размера ближней зоны, за пределами которой погрешность опредления направления не превышает 2° приведен на рисунке .

Определение направления на одиночный источник звука

Физическая основа определения направления на источник звука — разность хода фазового фронта от источника к нескольким микрофонам. Определив разность хода можно рассчитать направление на источник. В этой работе рассматривается два способа:

— Корреляция между сигналами с микрофонов

— Искажения спектра при суммировании сигналов.

Рассмотрим искажения спектра подробнее. Пусть в системе установлено два микрофона на расстоянии S друг от друга. Источник смещен относительно нормали к плоскости микрофонов. Для начала будем считать, что источник формирует звук на одной единственной частоте ω.

Сигналы на каждом из микрофонов:

$$s_1(t) = \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$s_2(t) = \sin(\omega t + \phi_2)$$

Просуммируем эти сигналы (как это происходит в антенной решетке)

$$\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= \sin(\omega t + \phi_1) + \sin(\omega t + \phi_2) \\
&= 2\sin\frac{\omega t + \phi_1 + \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos\frac{\omega t + \phi_1 - \omega t - \phi_2}{2} = \\
&= 2\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \\
&= 2\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\Delta\phi}{2}
\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta l \cdot \omega}{C} = 2\pi\Delta l\frac{f}{C}$$

$$s_1(t) + s_2(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\Delta l \cdot \omega}{2C}$$

При построении спектра сигнала составляющая $\sin\left(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$ является копией оригинального сигнала, сдинутого по фазе. При любых значений ϕ_1 и ϕ_2 спектр этого сдвинутого сигнала совпадает с исходным. Другая составляющая — $\cos\frac{\Delta\phi}{2}$ — зависит только от разности фаз. А разность фаз в свою очередь является функцией частоты исходного сигнала. Поэтому при расчете спектра эта составляющая также превращается в функцию частоты.

Определим спектры сигналов на частоте $\omega = 2\pi f$:

$$\begin{aligned}
F_{s_1(t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t + i\phi_1} - e^{-i\omega t - i\phi_1}\right)\cdot e^{-i\omega t}dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t + i\phi_1}\cdot e^{-i\omega t} - e^{-i\omega t - i\phi_1}\cdot e^{-i\omega t}\right)dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t + i\phi_1 - i\omega t} - e^{-i\omega t - i\phi_1 - i\omega t}\right)dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i}\left(e^{i\phi_1} - e^{-i(2\omega t + \phi_1)}\right)dt = \\
&= \frac{1}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\phi_1}dt - \frac{1}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(2\omega t + \phi_1)}dt = \\
&= \frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt - \frac{e^{-i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\omega t}dt
\end{aligned}$$

$$F_{s_2(t)} = \frac{e^{i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt - \frac{e^{-i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\omega t}dt$$

$$F_{s_1(t)+s_2(t)} = \frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt - \frac{e^{-i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega t} dt + \frac{e^{i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt - \frac{e^{-i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega t} dt =$$

$$= \left(\frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} + \frac{e^{i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt - \left(\frac{e^{-i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} + \frac{e^{-i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega t} dt =$$

$$= \frac{e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt - \frac{e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega t} dt =$$

Выразим $\phi_2 = \phi_1 - \Delta\phi$ и упростим числители дробей:

$$e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_1 - i\Delta\phi} = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_1} e^{-i\Delta\phi} = e^{i\phi_1} \left(1 + e^{-i\Delta\phi}\right)$$

$$e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2} = e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_1 + i\Delta\phi} = e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_1} e^{i\Delta\phi} = e^{-i\phi_1} \left(1 + e^{i\Delta\phi}\right)$$

Проанализируем составные части выражений (интегралы). Значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt$ стремится к бесконечности, тогда как абсолютное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega t} dt$ не превышает 2 (сумма синуса и косинуса). Таким образом, при определении спектральной плотности мощности (делении на диапазон $[-\infty \dots \infty]$) значение первого интеграла сойдется к действительному числу, а второго - к нулю. Поэтому вторыми интегралами можно пренебречь и переписать формулы в следующем виде:

$$F_{s_1(t)} \approx \frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt$$

$$F_{s_1(t)+s_2(t)} \approx \frac{e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt = \frac{e^{i\phi_1}\left(1 + e^{-i\Delta\phi}\right)}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt = \left(1 + e^{-i\Delta\phi}\right) \frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt =$$

$$= (1 + \cos\Delta\phi - i\sin\Delta\phi) \frac{e^{i\phi_1}}{i\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt$$

Видно, что спектры отличаются единственным множителем

$$K^*(\Delta\phi) = 1 + \cos\Delta\phi - i\sin\Delta\phi$$

Этот множитель выражает изменения в амлитуде и фазе суммарного сигнала относительно одного из исходных.

$$\boxed{K = 1 + \cos\frac{2\pi f \cdot \Delta l}{C} - i\sin\frac{2\pi f \cdot \Delta l}{C} = 1 + e^{-i\frac{2\pi f \cdot \Delta l}{C}}} \quad (5)$$

Формула 5 связывет амплитуды оригинального и суммарного сигналов. Эта формула может применяться для сравнения сигналов и определения направления на источник. Абсолютное значение разности фаз определяет частоту колебаний в спектра разностного сигнала. Для определения модуля Δl достаточно проанализировать действительную часть формулы 5. Построим спектр $H(\Delta l_v)$, где Δl_v — изменяемое значение разности фаз

$$H(\Delta l_v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 + e^{-i\frac{2\pi \cdot \Delta l}{C} f}\right) e^{-i\frac{2\pi \cdot \Delta l_v}{C} f} df$$

В этой формуле $\frac{2\pi \cdot \Delta l}{C}$ выступают в роли круговой частоты $\omega_K(\Delta l)$. При работе с спектром, полученным из дискретного сигнала с использованием БПФ формула должна быть преобразована на основании следующих рассуждений.

1. Частота сигнала ограничена значениями $[-F_d/2 \dots F_d/2]$
2. Операция интегрирования должна быть заменена сумированием.

3. Комплексный множитель формируется из частоты колебаний $f_K\left(\Delta l_v\right)$ амплитуды отношения спектров и частоты дискретизации сигнала.

$$H(\Delta l_v)=\sum_{f=-F_d/2}^{F_d/2}\left(1+e^{-i\frac{2\pi\cdot\Delta l}{C}f}\right)e^{-i\cdot 2\pi\frac{f_K(\Delta l_v)}{F_d}f}$$

Спектр будет принимать максимальные значения при совпадении круговых частот колебания отношения спектров и комплексного множителя. Это выполняется при выполнении условия $\frac{f_K(\Delta l_v)}{F_d}=\frac{\Delta l}{C}$, откуда

$$f_K\left(\Delta l_v\right)=f_K\left(\Delta l\right)=\frac{\Delta l\cdot F_d}{C}$$

Определим пределы, в которых достаточно изменять значение F_K. Очевидно, что при правильной работе аппаратуры разность хода фазового фронта не может превысить расстояние между микрофонами, т.е. $\Delta l\leq S$. Отсюда

$$0\leq f_K\leq\frac{S\cdot F_d}{C}$$

Для пересчета частоты колебания отношения спектров в разность хода фазового фронта можно использовать формулу

$$\Delta l=\frac{f_K\cdot C}{F_d}$$

Используя формулу (2) можно рассчитать направление на предполагаемый источник звука.