Санкт-Петербургский Политехнический университет имени Петра Великого

Отчёт по лабораторной работе №2

Тема: Численное интегрирование

Студент	:	Алексеева Мария Сергеевна
Группа	:	5030103/00003
Преподаватель	:	Козлов Константин Николаевич

Санкт-Петербург 2022

1 Формулировка задачи и её формализация

Задача: Вычислить значение интеграла функции $y = x^4 - 6.2x^3 + 3.5x^2 - 7x - 2.1$ с помощью квадратурной формулы "трех восьмых". Исследовать для данного метода зависимость погрешности от измельчения шага, сравнить теоретическую и фактическую погрешности и исследовать влияние заданной точности на количество вычислений.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл с помощью метода 3/8 необходимо задать границы интегрирования, т.е. интервал $[a, b]$. В данном методе количество узлов n=4, а шаг между ними задается формулой $h = \dfrac{b-a}{3}$. Построив узлы $x_1 ... x_4$ по формуле $x_k = a + (k-1) * h$, вычислим значение интеграла: $\int\limits_a^b f(x)dx = \dfrac{3h}{8}(f(a) + 3f(a+2h) + 3f(a+3h) + f(b))$.

2.2 Условия применимости

Интегрируемая функция должна быть непрерывной

3 Предварительный анализ задачи

Для построения интеграла берется непрерывная функция => можно ожидать точного вычисления интеграла. Ожидается, что в первом исследование погрешность будет уменьшаться с увеличением количества точек, во втором фактическая погрешность должна быть меньше теоретической, в третьем при высокой точности необходимо большое количество вычислений.

4 Тестовый пример с расчётами

В качестве примера рассмотрит простую функцию y = x на интервале [0;1].

1) $h = \dfrac{1-0}{3} = \dfrac{1}{3}$

2) $x_1 = 0 x_2 = \dfrac{1}{3} x_3 = \dfrac{2}{3} x_4 = 1$

3) $\int\limits_0^1 x dx = \dfrac{3\frac{1}{3}}{8}(0 + 3 * \dfrac{1}{3} + 3 * \dfrac{2}{3} + 1) = \dfrac{1}{8} * 4 = \dfrac{1}{2}$

4) $\int\limits_0^1 x dx = \dfrac{x^2}{2}|_0^1 = \dfrac{1}{2}$

Видим, что значения при аналитическом и численном вычислении интеграла совпали.

5 Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Интегрирование будет проводиться на отрезке [-1;1]. В качестве первого исследования будем дробить заданный интервал на более мелкие разибения и рассматривать погрешность в каждом случае. Для лучшего отслеживания зависимости кол-во точек в интервале каждый раз будет увеличиваться в два раза. Функция будет принимать интервал [a,b] и количество точек в нем, по эти данным будет строиться массив "разибения"с помощью linspace. С помощью цикла пройдемся по всем "мини-интервалам образовавшимся внутри [a,b] и для каждого будем считать значение интеграла, а затем суммировать. Далее будет проведено исследование для сравнения точностей. Здесь будет использоваться правило Рунге: $\frac{|I_{2n} - I_n|}{15} < \epsilon$. Т.е. будут рассматриваться погрешности для разибений, который отличаются друг от друга по количеству точек в два раза. Найдя фактическую точность сравним ее с теоретической. Последнее исследование покажет как мелко нужно разбивать интервал для получения заданной точности.

6 Модульная структура программы

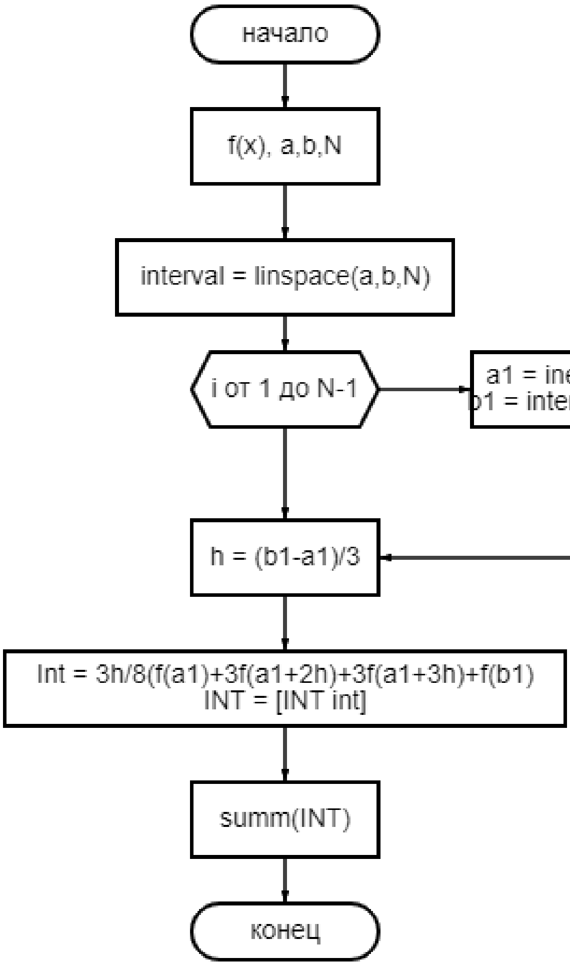

Рис. 1: Блок-схема метода 3/8 с учетом разбиения отрезка

7 Численный анализ решения задачи

7.1 Исследование зависимости погрешности от разбиения

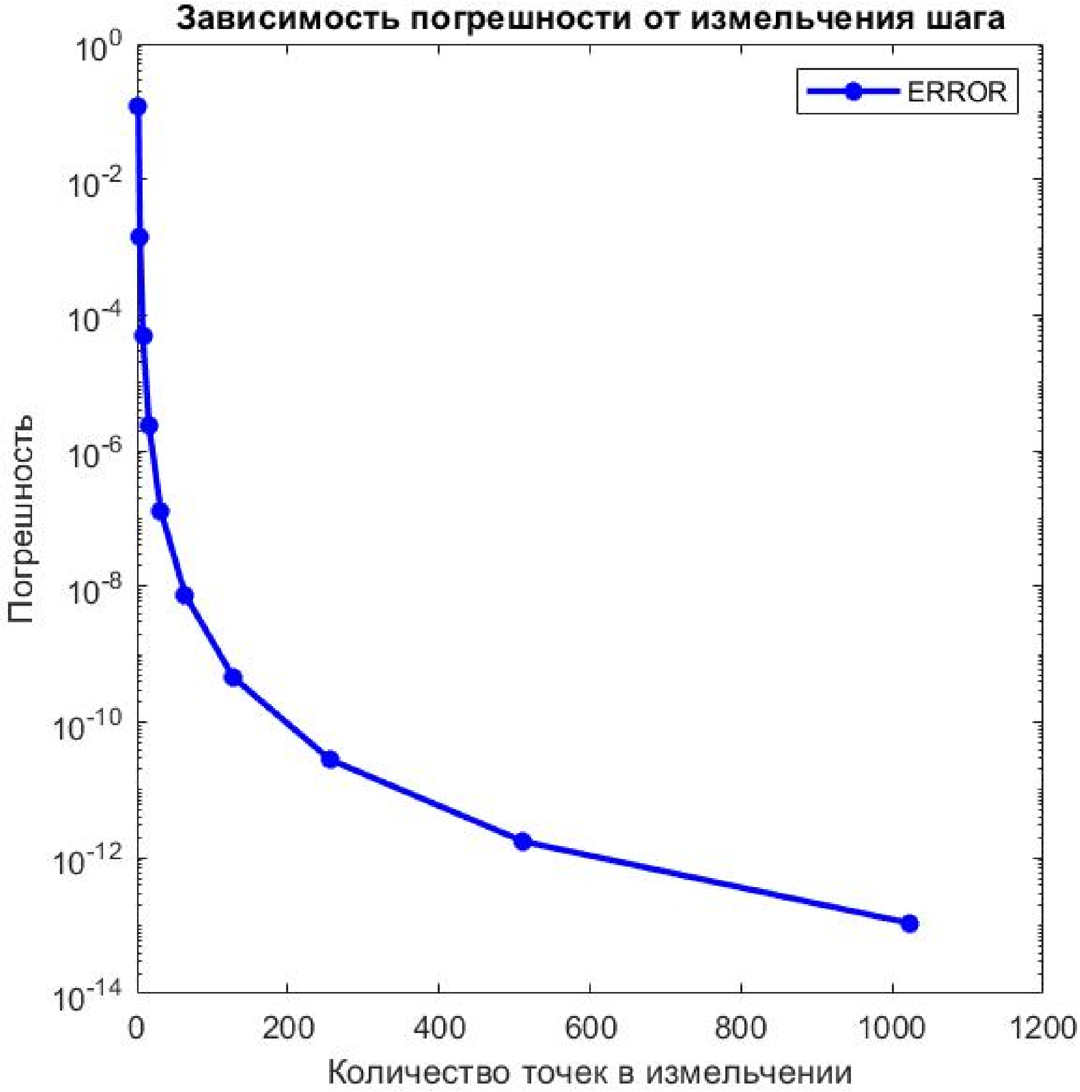

Рис. 2: Зависимость погрешности от измельчения шага

На рисунке 2 мы наблюдаем, что при увеличении измельчения исходного интервала погрешность уменьшается, что и ожидалось.

7.2 Сравнение теоретической и фактической точности

На рисунке 3 с радостью можно отметить, что фактическая точность не превышает теоретической, что и ожидалось.

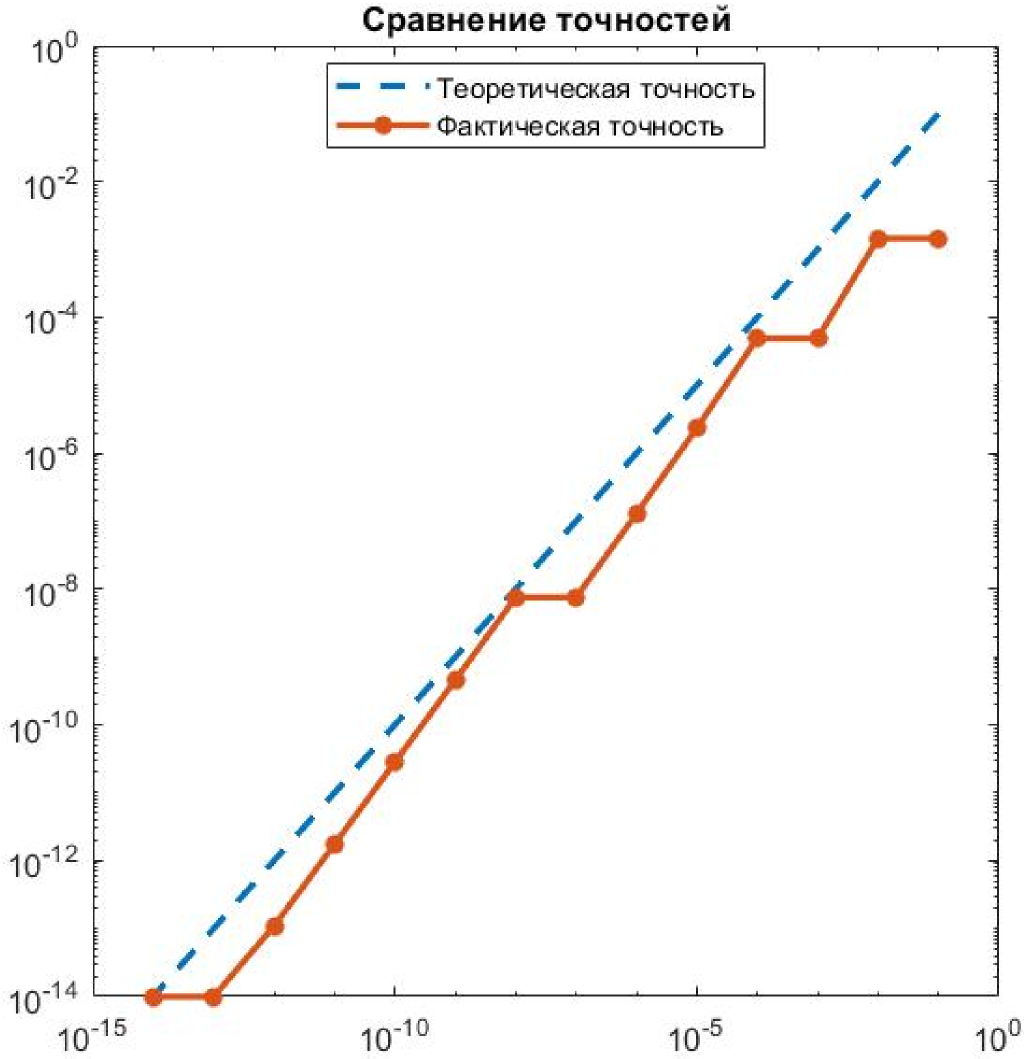

Рис. 3: Сравнение теоретической и фактической точности

7.3 Исследование влияния заданной точности на количество вычислений

На рисунке 4 изображен график, по оси икс на котором отмечается точность, по оси игрек - степень измельчения, то есть не количество точек, а степень двойки, т.к. иcследования проводились для постоянно увеличивающегося в два раза разбиения. Из исследования видно, что для лучше точности требуется большее количество разбиений отрезка.
На рисунке 5 изображени график, на котором мы видим значение алгебраического порядка точности. Для метода 3/8 этот порядок равен 4. Как видно из графика исследования порядок точности фактический совпадает с теоретическим.

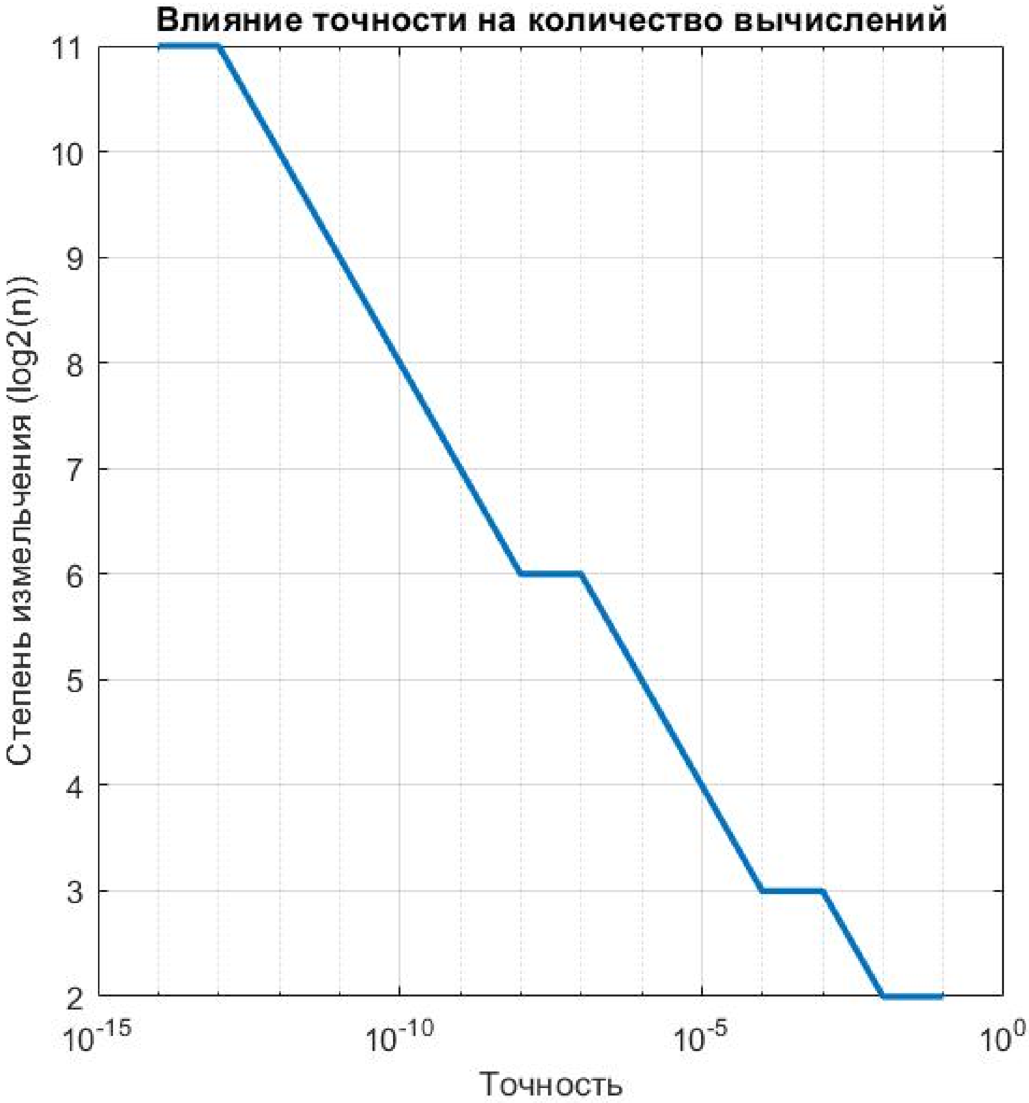

Рис. 4: Исследование влияния заданной точности на количество вычислений

8 Краткие выводы

- Метод 3/8 позволяет вычислить интеграл с достаточно высокой точностью, если правильно подобрать разбиение отрезка.
- Все исследования удовлетворили предварительному анализу.
- Исследования показали, что для того, чтобы вычислять интеграл с минимальной погрешностью необходимо брать как можно большее разбиение.

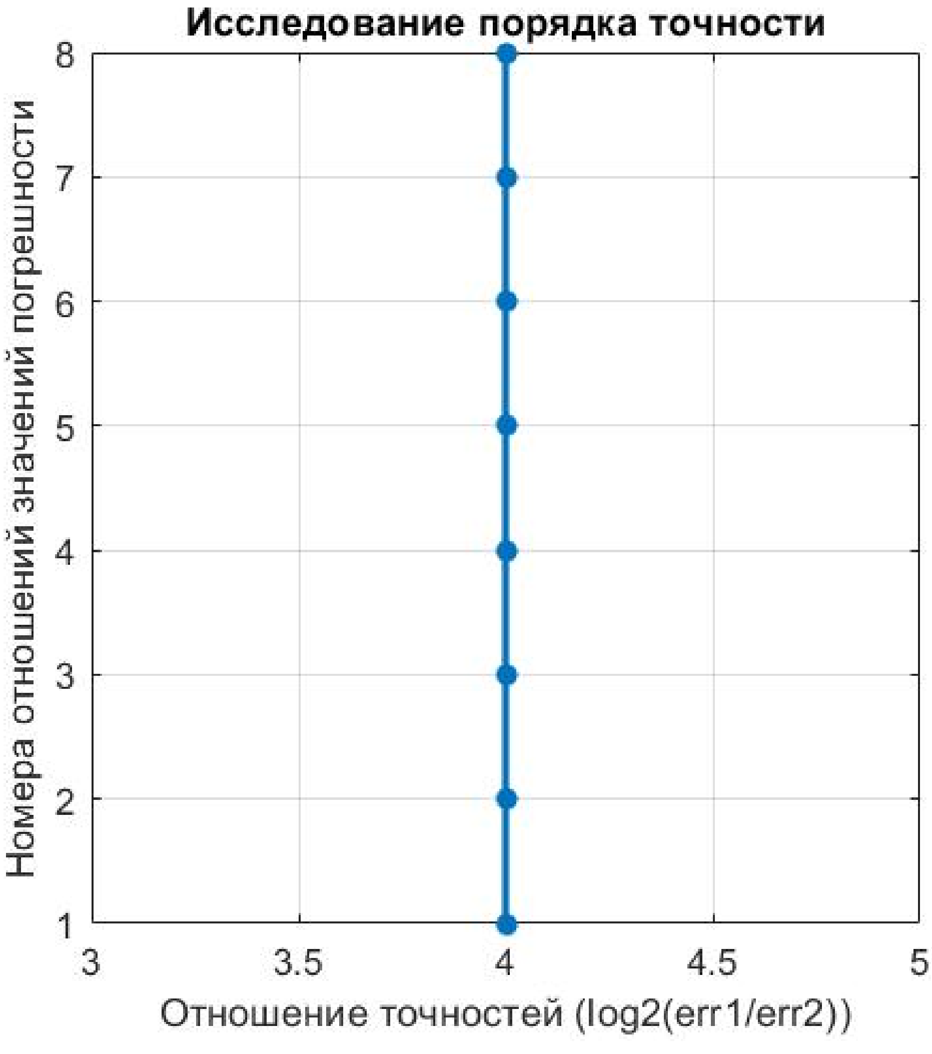

Рис. 5: Исследование влияния заданной точности на количество вычислений