

Санкт-Петербургский Политехнический университет имени Петра
Великого

Отчёт по лабораторной работе №1

Тема: Интерполяционные полиномы приближения табличных
функций.

Студент : Алексеева Мария Сергеевна

Группа : 5030103/00003

Преподаватель : Козлов Константин Николаевич

Санкт-Петербург 2022

1 Формулировка задачи и её формализация

Задача: Построить полином в форме Лагранжа на Чебышевской и произвольной со сгущением на выбранном интервале сетке для двух функций: $y(x) = x - \sin(x)$ и $y(x) = 3\text{sign}(x)x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 6$ на интервале $[-1.3; -0.9; 0.14; 0.53; 0.8; 1.05]$. Исследовать влияние количества узлов сетки и гладкости функции на интерполяционную ошибку.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Зададим некоторую функцию и, выбрав некоторый интервал, вычисляем значения функций для уже заданного массива x . Интерполяционный полином в форме Лагранжа имеет общий вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \Phi_i(x) \sum, \text{ где } \Phi_i = \delta_i(x)_j$$

С помощью некоторых преобразований мы приходим к виду:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

2.2 Условия применимости

Функция, которую мы будем интерполировать должна быть непрерывна. Поэтому для того, чтобы реализовать интерполяцию полиномом Лагранжа возьмем подходящие функции. Интерполирование полинома может происходить лишь на упорядоченной сетке. Узлы должны быть попарно различными.

2.3 Виды сеток для массива x

Неравномерная: Такая сетка имеет лишь упорядоченность, то есть $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, в частном случае решения моей задачи была выбрана неравномерная сетка со сгущением в районе середины интервала. Сгущение получено путем добавления в середину равномерной сетки дополнительного разбиения. Т.е. создается массив из n равноотстоящих узлов, в нем выбирается два элемента с номерами $\text{round}(n/2)$ и $\text{round}(n/2) - 1$. Эти элементы объявляются границами нового массива, в котором также будет n элементов. В конечном итоге, сетка со сгущением будет получена путем "склеивания упорядочивания и удаления повторяющихся элементов из двух этих массивов.

Чебышевская сетка: Сетка строится по принципу того, что ее узлами являются корни полинома Чебышева

3 Предварительный анализ задачи

Интерполяционный полином Лагранжа имеет степень на 1 меньше, чем размер рассматриваемого нами массива x и y . И требуется выполнение условий интерполяции:

$$\phi(x_i) = y_i$$

4 Тестовый пример с расчётами

В качестве примера можем рассмотреть некоторый массив с равномерной сеткой $x_0 = 1$ на отрезке $[1, 3]$.

Тогда зададим шаг $h = 1$. Таким образом массив x :

$$x_i = [1, 2, 3, 4]$$

Пусть функция будет задаваться формулой: $y = x + \ln(x) + 0.5$. Таким образом массив для y :

$$y_i = [1.5, 3.2, 4.6, 5.9]$$

А теперь найдем полином Лагранжа для заданной функции.

$$L_3(x) = 1.5 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3.2 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 4.6 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 5.9 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{30}x^3 - \frac{7}{20}x^2 + \frac{151}{60}x - \frac{7}{10}$$

Рассмотрим значение функции и значение полинома в выбранной точке

$$x = 1.5$$

$y(x) = 2,40547$ - для функции, $L_3(x) = 2.4$ - для полинома. Погрешность равна 0,00547, т.о. видим, что полином построен корректно.

5 Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Для примера будут реализованы графики одной функции с разными сетками: произвольной со сгущением на интервале в середине отрезка и Чебышевской. Гладкая функция $y(x) = x - \sin(x)$ и функция с разрывом $y(x) = 3\text{sign}(x)x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 6$ будут построены на интервале $[-1.3; -0.9; 0.14; 0.53; 0.8; 1.05]$, также будут построены полиномы Лагранжа для этих функций в заданных из отрезка узлах. Далее будут проведены исследования, чтобы проверить зависимость ошибки интерполяции в узлах Чебышевской и произвольной сетки со сгущением. Сетки будут построены с концами отрезков $[-1.3; 1.05]$.

6 Модульная структура программы

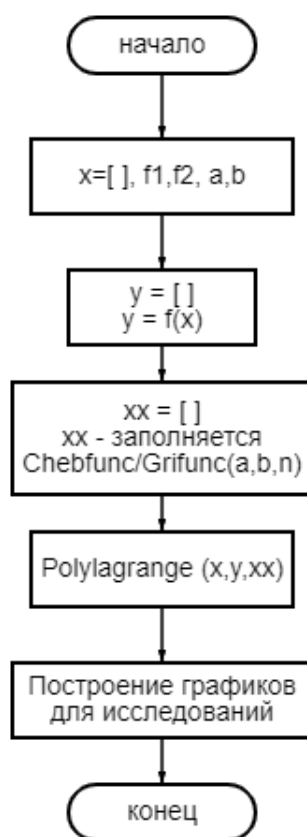


Рис. 1: Блок-схема кода программы

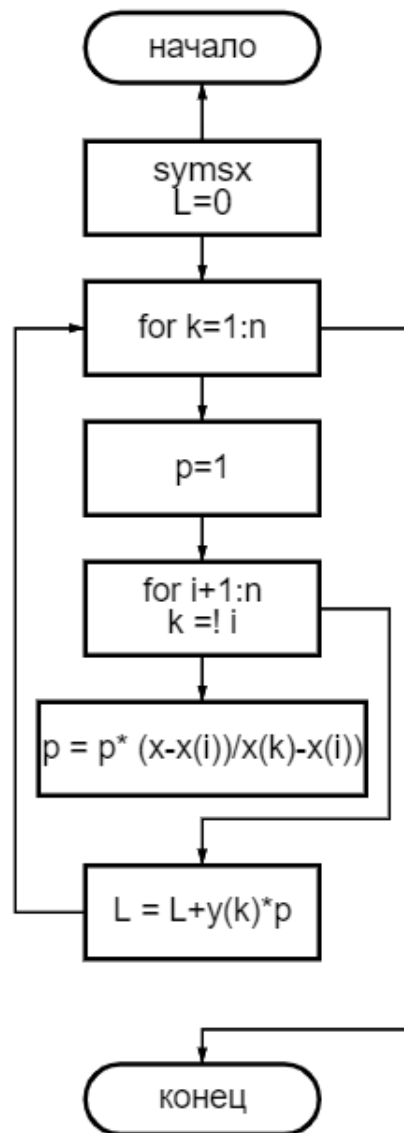


Рис. 2: Блок-схема кода полинома Лагранжа

7 Численный анализ решения задачи

7.1 Задание функции и массивов

По условию заданы функции $y = x + \sin(x)$ и $y(x) = 3\text{sign}(x)x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 6$, рассмотрим их на отрезке $[-1.3; -0.9; 0.14; 0.53; 0.8; 1.05]$. Тогда для заданной функции строим полином Лагранжа с неравномерной сеткой, таким образом, получаем график на рисунке 3.

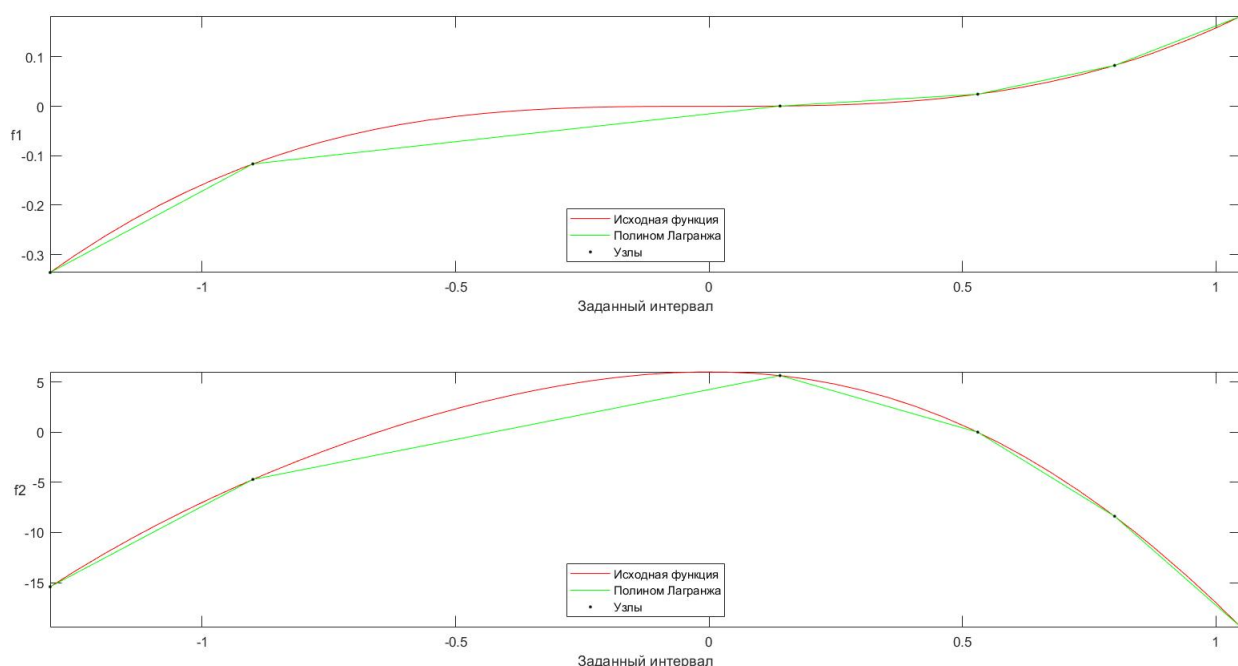


Рис. 3: график полинома Лагранжа и исходной функции на заданном интервале

8 Исследование влияния количества узлов на интерполяционную сходимость

На рисунке 4 мы видим, что максимальная погрешность при увеличении узлов сетки возрастает, причем монотонно, как для гладкой, так и не для гладкой функций. На графике отображается максимальная ошибка интерполяции для заданного количества узлов. Можно заметить, что погрешность принимает достаточно большое значение даже при маленьком количестве узлов. Это происходит потому что интерполяция ведется на равномерной сетке со сгущением (сгущение также равномерно), а как мы знаем, на концах отрезков проявляется недостаток интерполяции на равномерной сетке - большое значение ошибки интерполяции. Так как мы делаем сгущение в равномерной сетке по центру, то нехватка узлов по краям никак не компенсируется и ошибка на концах все равно является большой. Можно сделать вывод, что для равномерной сетки неэффективно использовать сгущение в центре.

Исходя из теоретической части, чтобы получить меньшую ошибку, следует использовать другую сетку, а именно Чебышевскую.

На рисунке 5 мы видим, что при увеличении узлов Чебышевской сетки погрешность уменьшается, однако в определенном значении количества узлов наблюдается ее резкое возрастание. Видно, что погрешность действительно меньше, чем при построении полинома на сетке со сгущением.

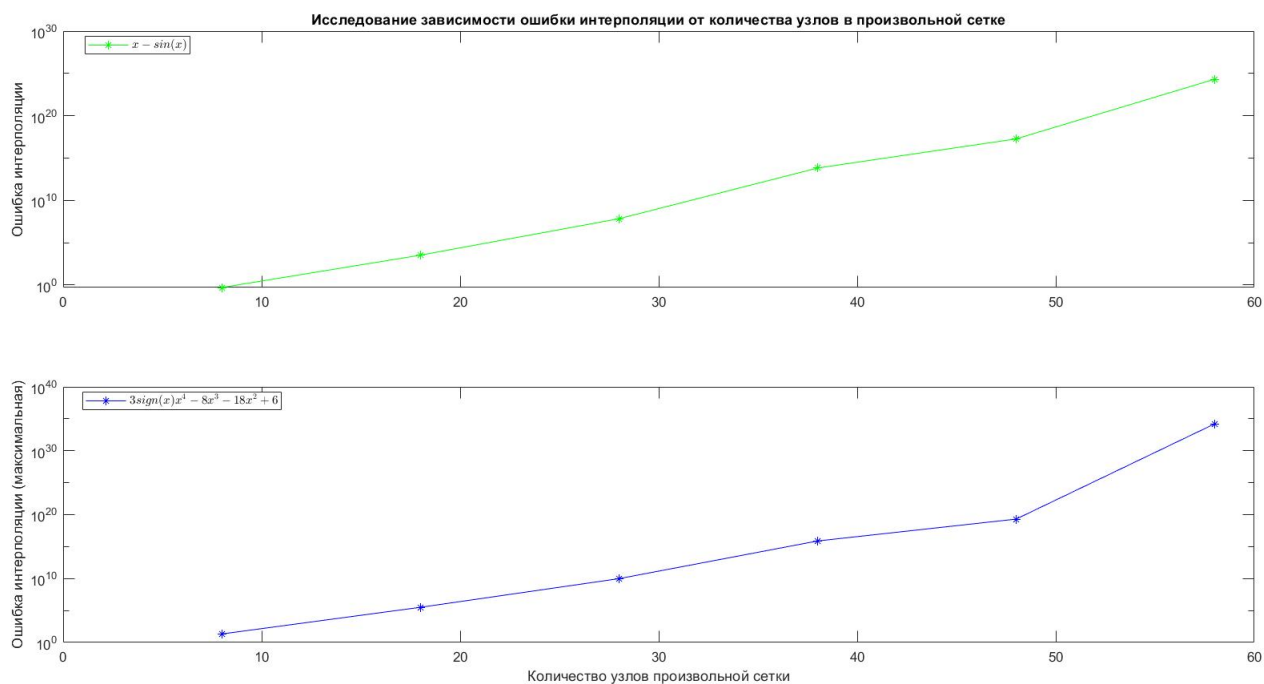


Рис. 4: Кол-во узлов, произвольная сетка

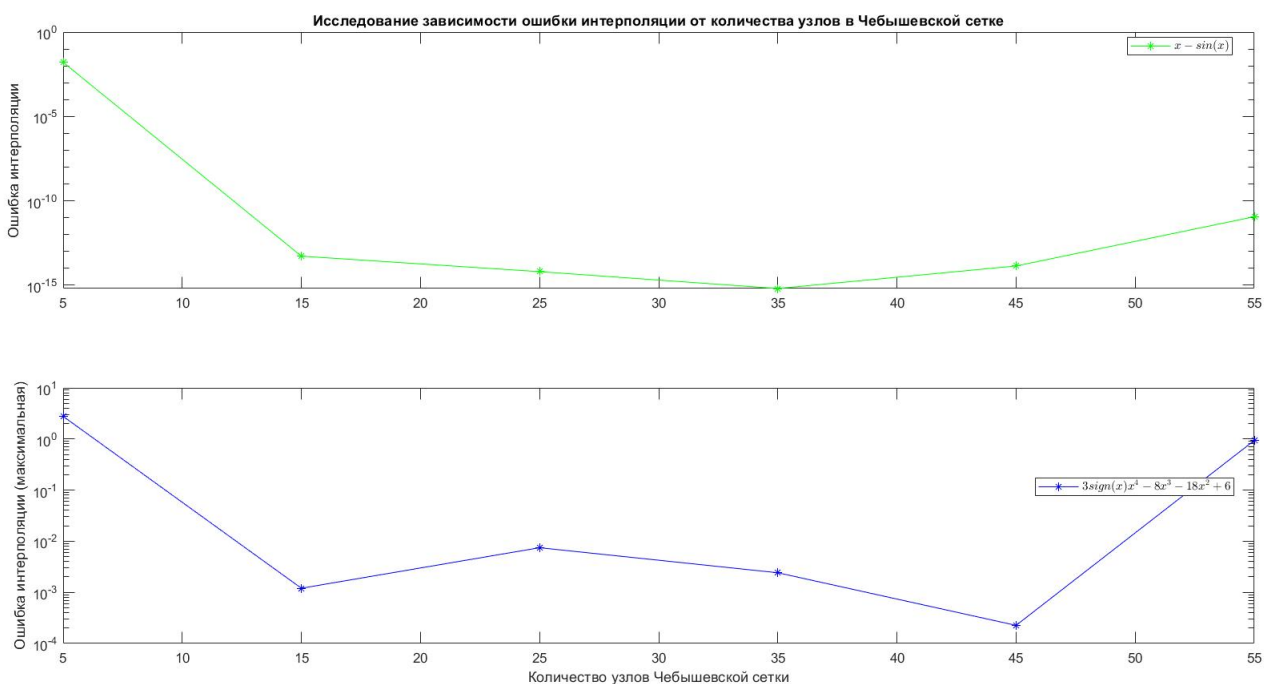


Рис. 5: Кол-во узлов, Чебышевская сетка

9 Исследование влияния гладкости на интерполяционную сходимость

Возьмем гладкую функцию и функцию, которая имеет разрыв производной.

$y = x + \sin(x)$ - гладкая функция
 $y(x) = 3\text{sign}(x)x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 6$ - негладкая функция

Чебышевская сетка

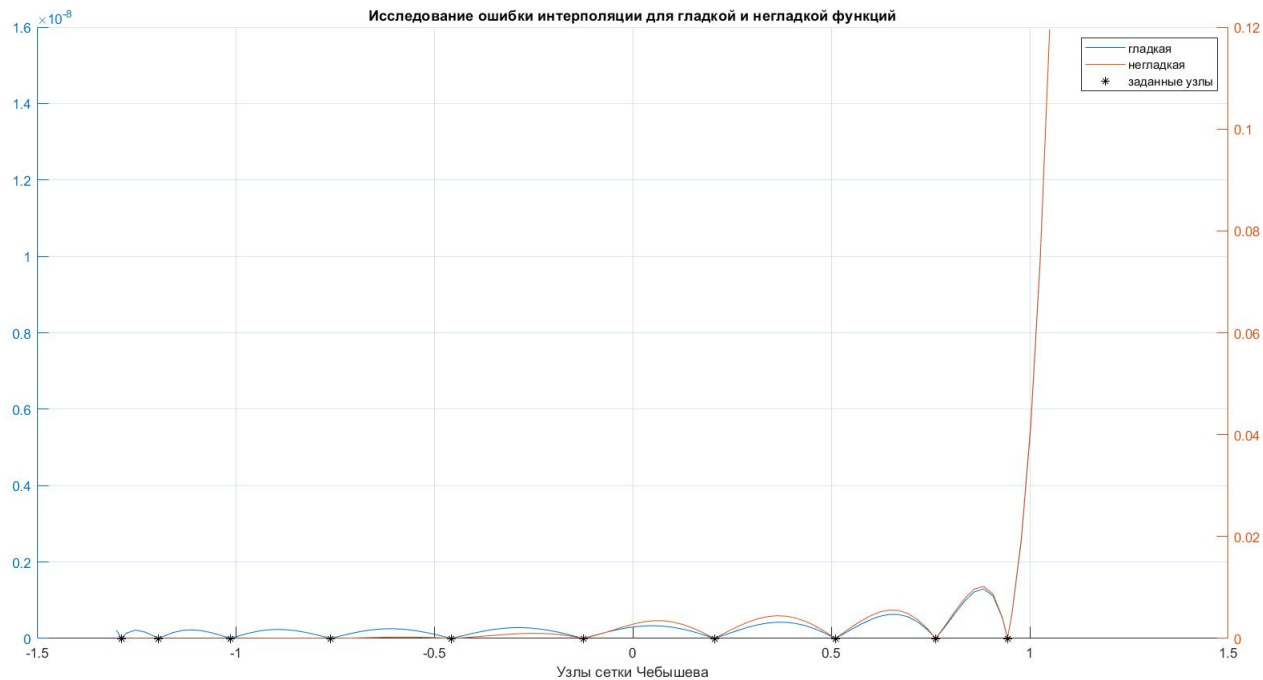


Рис. 6: Гладкая и негладкая на Чебышевской сетке

Произвольная сетка

Как видно из графиков рисунки 6 и 7 ошибка интерполяции на гладкой функции меньше, чем на функции с разрывом. На произвольной сетке на концах видно возрастание ошибки, что было освещено в предыдущих пунктах.

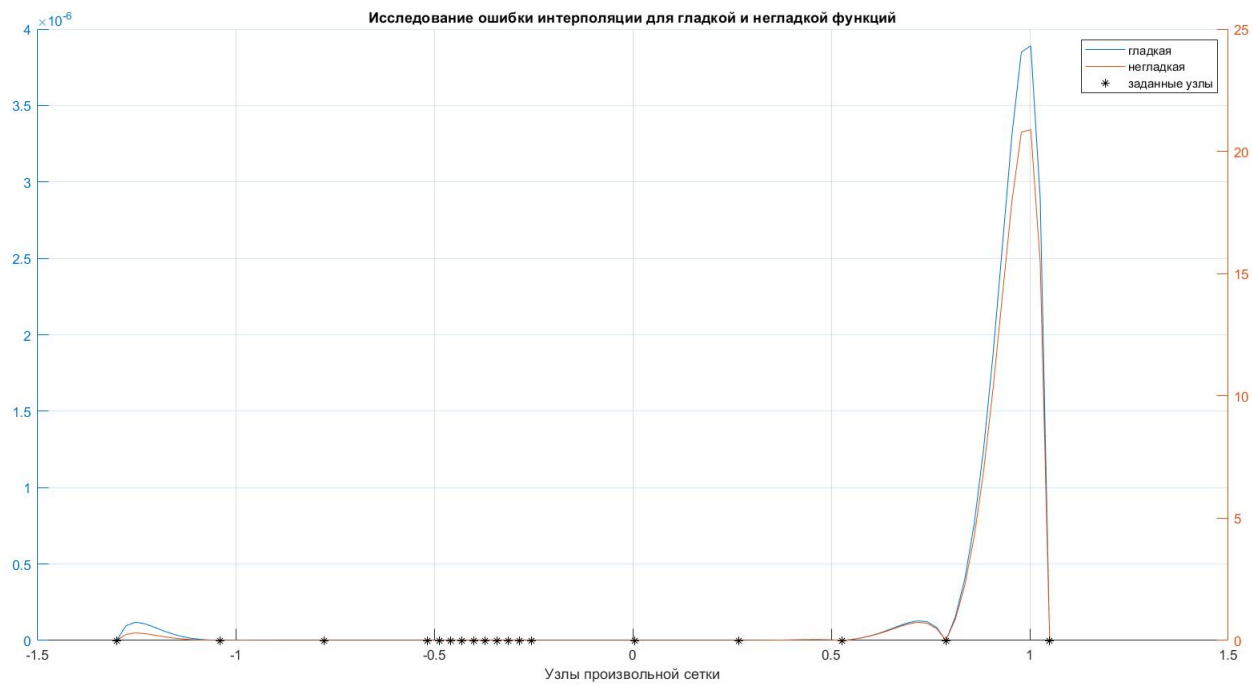


Рис. 7: Гладкая и негладкая на произвольной сетке

10 Краткие выводы

- Интерполяционный полином Лагранжа дает хорошее приближение к исходному графику, если подобрать верную сетку
- На равномерной сетке можно заметить большое отклонение от заданной функции на концах отрезка, но во-первых это можно исправить, построив полином на более "хорошей" сетке, во-вторых максимальная ошибка далека от остальных значений ошибки (которые являются достаточно малыми) \Rightarrow построение можно считать достаточно корректным. Однако построение на сетке со сгущением в середине отрезка все же не является достаточно эффективным.
- При сравнении гладкой функции и функции с разрывом в производной было понято, что интерполяцию лучше проводить для гладкой функции, т.к. она даст лучший результат с меньшим значением ошибки.
- Также мною было замечено то, что при построении достаточно большого количества узлов программа выполняется медленно, что обусловлено тем, что полином Лагранжа каждый раз считается "с нуля" и все предыдущие вычисления с меньшим количеством узлов не запоминаются.