# **Лабораторная работа №3**

**«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОММИВОЯЖЕРЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ»**

**Условие:**

Найти оптимальный маршрут для коммивояжера, если известно, что кол-во городов равно 5, а расстояние между городами задается следующей матрицей d:

где *n* – номер варианта;

n=3.

Задачу следует решить с использованием метода ветвей и границ.

**Ход решения:**

Имеем 5 городов, построим матрицу расстояний между городами:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 6 | 24 | INF | 3 |
| 2 | 3 | INF | 18 | 65 | 81 |
| 3 | 5 | 9 | INF | 86 | 52 |
| 4 | 20 | 55 | 12 | INF | 9 |
| 5 | 90 | 69 | 52 | 16 | INF |

Находим минимальное значение в каждой строке (di) и выписываем его в отдельный столбец:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 6 | 24 | INF | 3 | 3 |
| 2 | 3 | INF | 18 | 65 | 81 | 3 |
| 3 | 5 | 9 | INF | 86 | 52 | 5 |
| 4 | 20 | 55 | 12 | INF | 9 | 9 |
| 5 | 90 | 69 | 52 | 16 | INF | 16 |
|  |  |  |  |  |  | 36 |

Производим приведение строк – из каждого элемента в строке вычитаем соответствующее значение найденного минимума (di).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 3 | 21 | INF | 0 | 3 |
| 2 | 0 | INF | 15 | 62 | 78 | 3 |
| 3 | 0 | 4 | INF | 81 | 47 | 5 |
| 4 | 11 | 46 | 3 | INF | 0 | 9 |
| 5 | 74 | 53 | 36 | 0 | INF | 16 |
|  |  |  |  |  |  | 36 |

Находим минимальные значения в каждом столбце (dj). Эти минимумы выписываем в отдельную строку.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 3 | 21 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 15 | 62 | 78 |
| 3 | 0 | 4 | INF | 81 | 47 |
| 4 | 11 | 46 | 3 | INF | 0 |
| 5 | 74 | 53 | 36 | 0 | INF |
|  | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 | 6 |

Вычитаем из каждого элемента матрицы соответствующее ему минимальные значения в каждом столбце dj.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 0 | 18 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 12 | 62 | 78 |
| 3 | 0 | 1 | INF | 81 | 47 |
| 4 | 11 | 43 | 0 | INF | 0 |
| 5 | 74 | 50 | 33 | 0 | INF |
|  | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 | 6 |

Тогда корневой вершиной будет

**f=36+6=42.**

Для каждой нулевой клетки получившейся преобразованной матрицы находим «оценку». Полученную оценку записываем рядом с нулем, в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 0(0) | 18 | INF | 0(0) |
| 2 | 0(12) | INF | 12 | 62 | 78 |
| 3 | 0(1) | 1 | INF | 81 | 47 |
| 4 | 11 | 43 | 0(12) | INF | 0(0) |
| 5 | 74 | 50 | 33 | 0(95) | INF |

Выбираем нулевую клетку с наибольшей оценкой. Будем рассматривать дугу (5,4). Так как удаление дуги (5,4) позволяет получить саму большую константу приведения, т.е. увеличение нижней границы. Для этого заменим вес дуги (5,4) на знак “INF.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 0(0) | 18 | INF | 0(0) |
| 2 | 0(12) | INF | 12 | 62 | 78 |
| 3 | 0(1) | 1 | INF | 81 | 47 |
| 4 | 11 | 43 | 0(12) | INF | 0 |
| 5 | 74 | 50 | 33 | 0(95) | INF |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** | INF | 0 | 18 | 0 |
| **2** | 0 | INF | 12 | 78 |
| **3** | 0 | 1 | INF | 47 |
| **4** | 11 | 43 | 0 | INF |

Видим, что матрица уже является приведенной.

Значит снова для каждой нулевой клетки получившейся преобразованной матрицы находим «оценку». Полученную оценку записываем рядом с нулем, в скобках.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** | INF | 0(1) | 18 | 0(47) |
| **2** | 0(12) | INF | 12 | 78 |
| **3** | 0(1) | 1 | INF | 47 |
| **4** | 11 | 43 | 0(23) | INF |

Далее будем рассматривать дугу (1,5). Так как удаление дуги (1,5) позволяет получить самую большую константу приведения, т.е. увеличение нижней границы. Для этого заменим вес дуги (1,5) на знак “INF.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** | INF | 0(1) | 18 | 0(47) |
| **2** | 0(12) | INF | 12 | 78 |
| **3** | 0(1) | 1 | INF | 47 |
| **4** | 11 | 43 | 0(23) | INF |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0 | INF | 12 |
| **3** | 0 | 0 | INF |
| **4** | INF | 42 | 0 |

В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

Cнова для каждой нулевой клетки получившейся преобразованной матрицы находим «оценку». Полученную оценку записываем рядом с нулем, в скобках.

Для того, чтобы кольцо не замкнулось раньше времени, ставим INF в позиции (4,1).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(12) | INF | 12 |
| **3** | 0(0) | 0(42) | INF |
| **4** | INF | 42 | 0(54) |

Далее будем рассматривать дугу (4,3). Так как удаление дуги (4,3) позволяет получить самую большую константу приведения, т.е. увеличение нижней границы. Для этого заменим вес дуги (3,2) на знак “INF.

Ту строку и тот столбец, где образовалось два знака «INF», полностью вычеркиваем.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(12) | INF | 12 |
| **3** | 0(0) | 0(42) | INF |
| **4** | INF | 42 | 0(54) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** |
| **2** | 0 | INF |
| **3** | INF | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 0  
Нижняя граница подмножества (4,3) равна:  
H(4,3) = 43 + 0 = 43 ≤ 97  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (4,3) меньше, чем подмножества (4\*,3\*), то ребро (4,3) включаем в маршрут с новой границей H = 43  
В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (2,1) и (3,2).  
В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:  
(5,4), (4,3), (3,2), (2,1), (1,5),  
Длина маршрута равна F(Mk) = 43

У нас остаются два маршрута (2,1) и (3,2).

**Решение: (1,5), (5,4), (4,3), (3,2), (2,1)**

**Длина оптимального маршрута: φ=43**

