

Investigación De Operaciones

Volumen I

Tercera Edición

- **Introducción**
- **Formulación**
- **Método Gráfico**
- **Método Simplex**
- **Dualidad-Método simplex-dual, análisis postóptimo y análisis de sensibilidad.**
- **Transporte, transbordo y asignaciones.**
- **Programación Lineal Entera y Binaria**

Francisco Alfonso Chediak Pinzón
M sc. Investigación de Operaciones

Dedicatoria

“Así dijo Jehová: No se alabe el sabio en su sabiduría, ni en su valentía se alabe el valiente, ni el rico se alabe en sus riquezas.

Mas alábase en esto el que se hubiere de alabar: en entenderme y conocerme, que yo soy Jehová, que hago misericordia, juicio y justicia en la tierra; porque estas cosas quiero, dice Jehová.”

Jeremías 9: 23, 24

Francisco Alfonso Chediak Pinzón
M sc. Investigación de Operaciones

Prólogo

Consciente de la importancia asumida en los tiempos modernos por la Investigación de Operaciones como la ciencia del arte de la toma de decisiones, el presente libro está escrito bajo la óptica de facilitar el entendimiento, comprensión y aplicación en pregrado de los temas asignados a la cátedra de Investigación de Operaciones y Métodos Cuantitativos en las Facultades de Ingeniería y de Ciencias Económicas y Administrativas.

Durante el desarrollo de los temas se ilustrará el uso del software especializado para Investigación de Operaciones *WinQsb*¹, *INVOP*² y el SOLVER de Excel de Frontline Systems Inc. Es de vital importancia el aprendizaje, manejo e interpretación de la información suministrada por el software, en atención al impulso que el computador, trajo al desarrollo de la Investigación de Operaciones.

Se recomienda al lector enfocar su atención a la formulación de modelos, labor ésta primordial para la aplicación en la práctica de los métodos de solución, que sin una perfecta modelación acarrea un estruendoso fracaso y pérdida de recursos. Juicioso es tener como meta, estudiar todos los modelos posibles en los diferentes textos, revistas y trabajos de grado en donde se muestre la formulación de problemas de investigación de operaciones, la experiencia hará fluir la inventiva que enfrentará el reto de formular un nuevo problema de optimización que en el ejercicio de la profesión, con certeza nos brindará la oportunidad de resolverlo y tomar las mejores decisiones.

La introducción trata los temas de: La toma de decisiones, La Investigación de Operaciones, La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones y una breve reseña histórica. Se recomienda leer el apéndice 1 que recopila algunas lecturas interesantes sobre la Investigación de Operaciones, entre otras, una reseña del fundador de la programación Lineal George Bernard Dantzing. Estas lecturas tienen como finalidad, responder la pregunta: ¿para qué sirve la Investigación de Operaciones?

El primer capítulo está dedicado a la formulación de problemas de programación lineal (PL); es una colección de modelos clásicos, resueltos y explicados. Tiene como objetivo capacitar al lector para enfrentarse a nuevos problemas. Al inicio del capítulo se define matemáticamente la forma general de un problema de programación lineal (PL) y sus características, además, se incluyen las pautas y recomendaciones para la

¹ WinQsb del inglés Quantitative System Business de Yih-Long Chang del Georgia Institute of Technology, <http://www.softonic.com/s/winqsb>

² INVOP (Investigación de Operaciones), de Beatriz Loubet y Sandra Segura de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad del Cuyo en Argentina, <http://operativa.tripod.com/invop/Invop.html>

formulación de modelos de programación lineal. Se recomienda al lector, estudiar la mayor cantidad de modelos en los textos que se relacionan en la bibliografía.

Atendiendo a la pregunta de cómo solucionar los problemas formulados en el primer capítulo, el segundo capítulo ofrece la metodología para solucionar problemas de dos variables. Se muestra en este capítulo una colección de ejemplos resueltos y explicados, que ilustran todos los casos posibles que se pueden presentar. Se recomienda al lector resolver los problemas propuestos al final del capítulo, ello le dará la certeza del aprendizaje logrado y le preparará para comprender las técnicas de solución que se explican en los capítulos posteriores.

El tercer capítulo resuelve la pregunta: ¿cómo solucionar problemas de más de dos variables? Aquí se presenta el método algebraico, fundamental para la total comprensión del Método Simplex, el Dual Simplex y el Análisis Post óptimo. Se ilustra el tablero Simplex, que mitiga lo dispendioso de la aplicación del método algebraico, se explican modificaciones al tablero simplex para hacerlo más productivo, tal es el caso de la tabla de Garfinkel.

El Método Algebraico y el Método simplex, según las características del problema, hacen uso de variables artificiales que se acompañan en la función objetivo con un coeficiente de valor muy grande y que se conoce como la gran "M", ello hace que los cálculos sean dispendiosos, para evitar usarla se diseñó el Método de las dos Fases, cuyo objetivo es eliminar el uso de la gran "M" durante el proceso de solución.

El capítulo cuarto presenta la formulación del problema Dual, el Método Dual Simplex, y el análisis post óptimo y de sensibilidad, herramientas fundamentales para el tomador de decisiones, quien podrá analizar alternativas y generar estrategias posteriores a la solución del problema.

El capítulo quinto se dedica a presentar métodos específicos para la solución de problemas particulares de programación lineal como lo son el problema del transporte, transbordo y asignaciones.

Por último, el capítulo sexto presenta métodos de solución para atender aquellos problemas que por su naturaleza, exigen valores enteros para sus variables o variables de naturaleza binaria (0,1).

Se recomienda a los lectores el uso de las técnicas que ofrece la Investigación de Operaciones para la toma de decisiones en su vida profesional, el hacerlo beneficiará grandemente a la sociedad, tal como ha ocurrido en otros pueblos que lo han hecho, por entender que La Investigación de Operaciones no es optativa, es una necesidad.

Francisco Alfonso Chediak Pinzón
M sc. Investigación de Operaciones

Contenido

	Página
Introducción	
La toma de decisiones	1
La Investigación de Operaciones	1
La Ingeniería Industrial y la Investigación de operaciones	2
Breve reseña histórica de la Investigación de operaciones	3
Capítulo 1 - Formulación	
Objetivo	5
Problema general de programación lineal	5
Características de la programación lineal	7
Recomendaciones para la formulación de problemas	7
Problemas propuestos	64
Capítulo 2 – Método gráfico	
Conjunto convexo	73
Problema con solución única	73
Metodología para hacer una buena gráfica	75
Procedimiento para determinar la solución óptima y factible	75
Problema de múltiples soluciones	79
Problema de soluciones indeterminadas o no acotadas	80
Problema sin solución	81
Problema especial	85
Problemas propuestos	91
Capítulo 3 – Método Simplex	
Introducción	95
Método Simplex en forma algebraica	95
Método algebraico con representación gráfica	95
Uso de la gran M	102
Método simplex en forma tabular	108
Método simplex: Forma algebraica v.s. forma tabular	112
Método simplex con variables irrestrictas	114

	Página
Método de las dos fases	118
Tabla de Garfinkel	120
Problemas propuestos	125

Capítulo 4 El problema Dual, el método simplex dual, Análisis post óptimo y Análisis de sensibilidad.

Introducción	133
Características del problema dual	133
Relaciones entre el problema principal y el problema dual	138
Método simplex dual para maximizar	139
El análisis post óptimo y el análisis de sensibilidad	141
Cambio en C_j cuando X_j^* es variable no básica	142
• Interpretación gráfica y análisis de sensibilidad	144
Cambio en C_j cuando X_j^* es variable básica	145
• Análisis de sensibilidad	147
Cambio en b_i	147
• Análisis de sensibilidad para b_i	149
Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es variable no básica	151
• Análisis de sensibilidad	152
Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es variable básica	152
• Análisis de sensibilidad	153
Adición de una restricción	155
Adición de una variable	156
El WinQsb y el análisis de sensibilidad	158
Problemas propuestos	161

Capítulo 5 Transporte, transbordo y asignaciones

Introducción	169
Modelo general del problema clásico del transporte	169
Metodología general	171
Metodología de solución	172
Método de la esquina noroeste	174
Método del costo mínimo	176
Método de William R. Vogel	178
Método algebraico	181
Método heurístico	182
Método modificado de distribución (MODI)	184
El problema del transbordo	192
Software WinQsb	197
Software Invop	199
El problema de asignaciones	200

	Página
Algoritmo para minimizar	201
Algoritmo para maximizar	202
Software WinQsb	207
Software Invop	208
Problemas propuestos	209

Capítulo 6 Programación lineal entera y binaria

Método de bifurcación y acotación (Branch and Bound)	224
Método aditivo de Egon Balas	225
Aplicación del método de Egon Balas	226
Software WinQsb	230
Problemas propuestos	231

Introducción

La toma de decisiones

La Investigación de Operaciones

La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones

Breve reseña histórica de la Investigación de Operaciones

La toma de decisiones

La toma de decisiones estratégicas para la vida de una empresa, es la principal responsabilidad indelegable de un gerente. El inicio de la toma de una decisión, generalmente empieza cuando se detecta un problema. Conocido el problema, el gerente debe proceder a definirlo de manera clara y formular el objetivo a lograr, seguidamente identifica las restricciones, evalúa las alternativas y seguramente el mejor curso de acción que lo llevará a la solución óptima. Este proceso lo realiza de manera cualitativa o cuantitativa. Si lo hace bajo el enfoque cualitativo, el gerente está confiando en su juicio personal o en su experiencia pasada en situaciones similares. Si lo hace bajo el enfoque cuantitativo, no necesariamente debe tener experiencia en casos similares, pero si debe hacer un análisis exhaustivo, especialmente si la decisión involucra una gran cantidad de dinero, un conjunto de variables muy grande o se trata de un problema altamente repetitivo, en cuyo caso, el desarrollo de un procedimiento cuantitativo ahorrará tiempo valioso al gerente. La habilidad para resolver problemas mediante el análisis cuantitativo, es propio de cada gerente, pero puede adquirirse o aumentarse con **la experiencia**; Esta habilidad puede adquirirse mediante el estudio de las herramientas matemáticas que ofrece la investigación de operaciones, ellas le permitirán maximizar la efectividad en la toma de decisiones, pudiendo comparar y combinar información cualitativa y cuantitativa.

La Investigación de Operaciones (IO)

La Investigación de Operaciones ofrece a los gerentes herramientas cuantitativas para la toma de decisiones que resuelven los problemas diarios de un negocio ó sirven para tomar decisiones en la planeación a corto o largo plazo, sea el negocio de carácter gubernamental, de producción, de servicios, gremial o cooperativo. En el uso de la

investigación de operaciones se aplican los siguientes seis pasos metodológicos científicos a saber:

1. Análisis y definición del problema.
2. Establecer y desarrollar el modelo.
3. Selección de los datos de entrada y evaluación del modelo.
4. Obtención de una solución.
5. Limitaciones del modelo y la solución.
6. Utilización del modelo en la decisión y monitoreo.

La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones

La humanidad ha logrado muchos de sus progresos en los siglos más recientes, como consecuencia de la aplicación del método científico a la administración (Planeación, Organización y Control de Operaciones).

La Ingeniería Industrial nació cuando el hombre aplicó el método científico a los problemas administrativos. Ejemplo antiguo sobre organización, el que se narra en La Biblia en el libro del Éxodo, cuando Moisés, atendiendo el concejo de su suegro Jetro procede a nombrar los jueces que resolverán los problemas del pueblo de Israel en su permanencia durante 40 años en el desierto del Sinaí (más de 600.000 personas sin contar los niños). Otro ejemplo antiguo lo constituye la reparación de los antiguos barcos en Venecia, mediante una línea de ensamble sobre la que trabajadores expertos efectuaban trabajos especializados. Para 1832, Charles Babbage escribió sobre la economía de la maquinaria y los fabricantes, demostrando conocimientos propios en Ingeniería Industrial. Para finales del siglo XIX Frederick W. Taylor, convirtió la Ingeniería Industrial en una profesión, mereciéndole el título de padre de la administración científica, mediante su trabajo que le permitió maximizar la productividad de los mineros, determinando que la única variable realmente significativa era el peso combinado de la pala y su carga, diseñando diferentes palas para diferentes tipos de materiales. Otro hombre importante en los principios de la administración científica fue Henry L. Gantt quien trabajó en resolver el problema de la planeación de la producción (Diagrama Gantt). Mientras que Taylor se enfocaba en resolver un problema único, Gantt adoptó un punto de vista más amplio al observar los diferentes pasos en una operación completa. Éste cambio de enfoque, lo alejó de lo particular hacia aspectos más amplios y fue en realidad una transferencia de énfasis de la Ingeniería Industrial a la Investigación de Operaciones con un enfoque multidisciplinario a problemas complejos, reconociéndose la necesidad de tener especialistas, reunidos para trabajar en equipos de investigación con sistemas completos en vez de partes del sistema.

Breve reseña histórica de la Investigación de Operaciones

El concepto de Investigación de Operaciones nació durante la primera guerra mundial en Inglaterra entre los años 1914 – 1915, cuando F. W. Lanchester intentó tratar cuantitativamente las operaciones militares, obteniendo ecuaciones que relacionaban el resultado de una batalla en función de la fuerza numérica relativa de los combatientes y de su capacidad relativa de fuego. Lanchester modeló una situación que involucraba opciones estratégicas, y después probó ese modelo contra la situación real. Éste procedimiento es el que los Investigadores de Operaciones han venido practicando desde entonces.

Tomás Alva Edison en los Estados Unidos de América, estudió el proceso de la guerra antisubmarina. Efectuó un análisis estadístico para desarrollar maniobras mediante las cuales los barcos pudieran evadir y destruir a los submarinos.

En 1917, el matemático Danés A. K. Erlang, que trabajaba en la compañía telefónica de Copenhague, publicó el trabajo ***"Soluciones a algunos problemas en la teoría de probabilidades importantes en las centrales telefónicas automáticas"***, contenía fórmulas de tiempo de espera que más tardes fueron empleadas por la Oficina Postal Británica para calcular el número de circuitos necesarios.

En 1915 Ford W. Harris describió el primer modelo sobre el tamaño de lote económico de inventario, posteriormente contribuyeron al desarrollo de modelos de control de inventarios H. S. Owen (1925), Benjamín Cooper (1926), R.H. Wilson (1926) y W. A. Mueller (1927). Las técnicas matemáticas del control de inventarios son de las más antiguas herramientas de la Investigación de Operaciones.

El desarrollo de la Programación Lineal ocurrió hacia 1760 cuando los economistas empezaron a describir sistemas económicos en términos matemáticos. El profesor de Harvard Wassily Leontieff desarrolló un modelo de programación Lineal que representaba la totalidad de la economía de los Estados Unidos de Norte América.

Como consecuencia del ingreso de Inglaterra a la segunda guerra mundial dos años antes que Estados Unidos, en 1939 existía un núcleo de una organización Británica de Investigación de Operaciones y sus principales aportes fueron: El mejoramiento del sistema de radar, el cañoneo antiaéreo, en la guerra antisubmarina, en la defensa de la población civil, en el diseño del tamaño de los convoy y en la conducción de ataques de bombardeo sobre Alemania.

El grupo de Investigación de Operaciones con mayor publicidad fue el denominado ***El circo de blackett*** dirigido por el profesor P.M.S. Blackett de la Universidad de Manchester, ministro de la Royal Society, ex-oficial naval y laureado con el premio nobel. El grupo estaba conformado por 3 Fisiólogos, 2 Físicos matemáticos, 1 Astrofísico, 1 Oficial del ejército, 1 Topógrafo, 1 Físico general y 2 Matemáticos. El valor del enfoque del equipo Heterogéneo fue de éxito notorio.

Al ingresar los Estados Unidos a la segunda guerra mundial, creó grupos de análisis de operaciones en la fuerza aérea y en la armada, ésta última creó grupos de Investigación de Operaciones en el Laboratorio de municiones naval y en la décima flota.

Después de la segunda guerra mundial, tanto el ejército como la fuerza aérea de los Estados Unidos de Norte América, continuaron con los grupos de Investigación de Operaciones pero las técnicas desarrolladas empezaron a ser usadas en la planeación de los negocios. La industria debía renovar su organización y producción para servir rápidamente a las necesidades de la demanda en tiempos de paz. En 1950 se organizó la Operations Research Society of America (ORSA) y The Institute of Management Science (TIMS). Desde 1952 ORSA publica la revista Operations Research y desde 1953 TIMS publica su revista Management Science. Desde la década de los 70(s) las dos sociedades publican la revista trimestral ***Interfases*** con trabajos y artículos relacionados con los problemas operacionales del uso de la ciencia administrativa y la investigación de Operaciones. En Inglaterra se formó en 1948 el Operational Research Club quien cambió su nombre posteriormente a la Operational Research Society of the United Kingdom y para 1950 crearon la revista Operational Research Quarterly. Más recientemente se han formado sociedades de Investigación de Operaciones en Francia, Italia, Israel y Austria.

El desarrollo de los computadores permitió a la Investigación de Operaciones contar con una herramienta poderosa, debido a su velocidad para ejecutar algoritmos orientados a solucionar problemas en muchas disciplinas del conocimiento que por su tamaño eran dispendiosos de solucionar o imposible de hacerlo. Actualmente se dispone de software especializado para resolver problemas de más de 15.000 variables y se están desarrollando métodos que permiten obtener soluciones en tiempo real. Actualmente se dispone gratuitamente en la red de internet de un servidor de optimización las 24 horas del día en la dirección <http://www-neos.mcs.anl.gov/>

Hallar X tal que:

Maximice

o $Z = CX$

Minimice

c.s.r.

$AX \leq b$

$X \geq 0$

Objetivo

El presente capítulo es una recopilación de problemas representativos de la Programación Lineal, en donde se muestra al lector la solución a diferentes modelos, para desarrollar la capacidad inventiva en la formulación de problemas de optimización de recursos. Los problemas aquí contemplados, una vez formulados, se resuelven mediante el software WinQsb, con el objetivo de hacer un análisis de la solución al problema frente a su formulación. En los capítulos posteriores se abordará el tema de los métodos de solución.

Problema general de la Programación Lineal

La Programación Lineal resuelve un tipo muy especial de problema, en el cual todas las relaciones entre las variables son lineales, tanto en las restricciones como en la Función Objetivo.

Definición: Dado un conjunto de m inecuaciones lineales ó ecuaciones lineales, con n variables, se requiere hallar valores no negativos de éstas variables que satisfagan las restricciones y maximicen o minimicen alguna función lineal de las variables llamada Función Objetivo.

Matemáticamente: Hallar $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ tal que:

Maximice o Minimice $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_jX_j + \dots + C_nX_n$ Función Objetivo

c.s.r. (con las siguientes restricciones):

$a_{11}X_1 + \dots + a_{1j}X_j + \dots + a_{1n}X_n$	$\leq = \geq$	b_1	Primera restricción
\vdots		\vdots	
$a_{i1}X_1 + \dots + a_{ij}X_j + \dots + a_{in}X_n$	$\leq = \geq$	b_i	i-ésima restricción
\vdots		\vdots	
$a_{m1}X_1 + \dots + a_{mj}X_j + \dots + a_{mn}X_n$	$\leq = \geq$	b_m	m-ésima restricción

$X_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n$; Condición de *no negatividad*.

También es frecuente expresar la forma general con base en el empleo de las sumatorias:

Hallar X_j , $j = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$\text{Maximize o Minimize } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

c.s.r.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq = \geq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{Cada valor de } i \text{ genera una restricción.}$$

$$X_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Más aún, se puede expresar la forma general de un problema de programación lineal, usando la notación matricial.

Hallar X_j , $j = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$\text{Maximize o Minimize } Z = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

c.s.r.

$$\mathbf{A}\mathbf{X} \leq = \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

En donde:

$$\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Características de la Programación Lineal

1. Linealidad asume que no pueden haber términos así:

$$X_1X_2 \quad a_{14}X_3^2 \quad \log X_4 \quad e^x \quad \sin x \quad X_1/X_2$$

2. Asume las propiedades aditivas y multiplicativas.
 - Si una unidad tipo A necesita 3 horas en la máquina y una unidad tipo B necesita 2½ horas, entonces ambas necesitan 5½ horas.
 - Si una unidad tipo A necesita 2 hora en la máquina, entonces 10 unidades tipo A necesitan 20 horas.
3. La función que se va a optimizar (maximizar o minimizar) se llama Función Objetivo; fíjese que no aparece ningún término independiente o constante. Los valores de las X_j son independientes de cualquier constante.

Si la función objetivo tiene una constante como por ejemplo:

$Z = \underline{10} + 3X_1 + 2X_2$ (aquí la constante es 10), ella se ignora y se procede a optimizar: $W = 3X_1 + 2X_2$, una vez conocido el valor de W , entonces $Z = 10 + W$

4. Cuando se dice que el problema tiene m restricciones, el valor de m no incluye las restricciones de no negatividad.
5. Cualquier conjunto de X_j que satisface las m restricciones y la condición de no negatividad $X_j \geq 0; \forall_j$ se llama una solución factible al problema, de lo contrario es una solución no factible.
6. Una solución factible que optimiza la función objetivo se llama una solución factible óptima.
7. Usualmente hay un número infinito de soluciones factibles al problema, de todas estas, tiene que hallarse una óptima.

Recomendaciones para la formulación de modelos

En la construcción de modelos matemáticos, la conversión de una situación problema de la vida real a un modelo matemático se hace mediante la abstracción matemática; para ello se recomienda en primera instancia construir un modelo verbal que describa el problema dado, procediendo de la siguiente forma:

1. Identificar verbalmente las variables de decisión: Con frecuencia, una cuidadosa lectura del contenido del problema le revelará que las variables de decisión y el objetivo del problema se le dan de la forma exacta que se requiere. Es importante que estén definidas en forma correcta sus variables

de decisión. En ocasiones encontrará que hay varias elecciones posibles. Una guía útil es hacerse a sí mismo la pregunta: *¿Qué decisión debe tomarse para optimizar la función objetivo?* La respuesta a esta pregunta le ayudará a identificar correctamente las variables de decisión.

2. Exprese el objetivo del problema en palabras y después, mediante el lenguaje matemático, construya una función (Función Objetivo) en términos de las variables de decisión y, cuidando que las unidades sean homogéneas. Cada término debe tener las mismas unidades, por ejemplo, si los coeficientes de una Función Objetivo están dados en pesos por libra (\$/lb.), las variables de decisión que aparezcan en la Función Objetivo deben ser en libras (lb.), no en toneladas ni onzas. Es imperativo tener conciencia del significado de cada uno de los términos matemáticos de la función objetivo, ello dará claridad en el momento de analizar la solución del problema.
3. Exprese cada restricción en palabras. Al hacer esto, ponga cuidadosa atención en si la restricción es un requerimiento de la forma \geq (mayor o igual que, al menos, por lo menos, como mínimo), una limitación de la forma \leq (menor o igual que, no mayor que, como máximo), o $=$ (igual a, exactamente igual a). Todas las restricciones deben estar expresadas en función de las variables de decisión. No deben aparecer en las restricciones, variables no definidas. Compruebe que para cada restricción las unidades del lado derecho son las mismas que las del lado izquierdo. Por ejemplo, si una de las restricciones es una limitante de la forma \leq de horas de trabajo, el lado izquierdo y el lado derecho deben ser de horas de trabajo. Dicho de otra forma más simple, no se puede tener unidades de horas en el lado izquierdo de la restricción y en el lado derecho unidades de minutos ó segundos ó libras ó toneladas. las restricciones en programación lineal no pueden tener una desigualdad estricta, con los signos $<$ o $>$. La razón de esto es de naturaleza matemática para que asegure que un problema bien formulado tenga solución ya que cualquier situación del mundo real que uno pueda imaginar y que implique desigualdades de restricción es casi seguro que la representación con los signos \leq o \geq captará por completo el significado del mundo real, ya que el tope de la disponibilidad de los recursos siempre es conocido.
4. No se puede olvidar colocar la restricción de no negatividad $X_j \geq 0 \quad \forall j$ en atención a que en la mayoría de problemas de la vida real el valor de las variables de decisión debe ser por naturaleza un número real positivo o cero. No se debe esperar decidir producir -50 docenas de camisas o correr un proceso de producción durante el día -8 veces ($X_j \in \mathbf{R}^+ \cap 0$)

Este capítulo contiene ejemplos de formulación que le servirán para formar su habilidad al traducir problemas del mundo real a modelos matemáticos. Esta transición, o modo en que se ha de elaborar el modelo, la forma en que se definirá las variables y se escribirá la función objetivo y las restricciones es de primordial importancia. Intente resolver los siguientes problemas por sí mismo.

Formúlelos con la rapidez que le sea posible y no lea en un problema más de lo que se le da. Por ejemplo, no introduzca restricciones adicionales o matices lógicos o datos imaginarios que en su opinión podrían hacer más realista el modelo. No se preocupe por lo que ocurra la semana siguiente si el problema nunca se refiere a la semana siguiente. Los problemas que se muestran han sido escogidos para facilitar el desarrollo del aprendizaje de la formulación. Para lograr esto y que pueda comprobar su trabajo y calibrar su progreso dentro del contexto descrito, la formulación correcta, debe carecer por completo de ambigüedades. En otras palabras, que haya una respuesta correcta. Más tarde, cuando tenga experiencia, la amplitud de las dudas en la interpretación y las sutilezas del mundo real serán mayores. Debido a que el tema de la formulación es tan importante y como la práctica es el único camino para dominarlo, se recomienda hacer un número de problemas grande. Como último consejo: No lea simplemente el problema y después vaya de inmediato a la solución. Esa sería la mejor forma de engañarse a sí mismo sobre lo que ha comprendido. No lea la solución hasta que esté seguro de haber solucionado en forma correcta el problema por sí mismo o esté totalmente convencido que se encuentra en un callejón sin salida.

Ejemplo 1.1 Problema de producción

La empresa lechera El Trébol del Tolima produce dos productos: Leche entera y leche descremada, empacadas en bolsas de litro. Cada bolsa de leche entera contiene 3 centímetros cúbicos de materia prima 1 y 5 centímetros cúbicos de materia prima 2, la bolsa se vende a \$1.500 y tiene un costo de producción de \$1.300. Cada bolsa de leche descremada contiene 5 centímetros cúbicos de materia prima 1 y 3 centímetros cúbicos de materia prima 2, la bolsa se vende a \$1.800 y tiene un costo de producción de \$1.600. La fábrica dispone diariamente de 15.000 centímetros cúbicos de materia prima 1 y 15.000 centímetros cúbicos de materia prima 2 para producir leche entera y leche descremada. Debido a la capacidad instalada en la planta de producción, como máximo se pueden producir 1.000 bolsas diarias de leche entera. ¿Cuántas bolsas diarias se deben producir de cada tipo de leche para maximizar la utilidad diaria? Formule el problema de programación lineal, resuélvalo mediante el software WinQsb e interprete la solución.

Para tener una visión completa del problema, es conveniente tener la información ordenada como se muestra en la tabla 1.1:

Tabla 1.1 Datos relevantes del ejemplo 1.1

Productos	Materia prima 1 (c.c./bolsa)	Materia prima 2 (c.c./bolsa)	Costo de producción (\$/bolsa)	Precio de venta (\$/bolsa)
Leche entera	3	5	1.300	1.500
Leche descremada	5	3	1.600	1.800
Disponibilidad (c.c.)	15.000	15.000		

a) Definición de variables

Una manera clara de definir las variables de decisión es:

X_1 : Número de bolsas con leche entera por producir y vender diariamente.

X_2 : Número de bolsas con leche descremada por producir y vender diariamente.

Aunque la anterior manera de definir las variables es adecuada para el presente problema, para una empresa que tenga 10.000 productos deja de ser práctico nombrar cada una de las 10.000 variables con su significado. Se recomienda hacerlo de la siguiente forma:

X_j = Número de unidades a producir del producto j -ésimo ($j = 1, \dots, n$)

Para el presente problema:

X_j = Número de bolsas diarias a producir y vender del tipo de leche j -ésimo ($j = 1$ = Leche entera, $j = 2$ = Leche descremada).

b) Función objetivo

El texto del problema es muy directo y solicita de manera expresa maximizar la utilidad diaria, sabiendo que una bolsa de leche entera se vende en \$1.500 y que su costo de producción es de \$1.300, se deduce que la utilidad por bolsa de leche entera es de \$200. Similarmente se concluye que la utilidad por bolsa de leche descremada es de (\$1.800 - \$1.600) \$200

Maximizar $Z = (1.500 - 1.300) X_1 + (1.800 - 1.600) X_2$

Maximizar $Z = 200X_1 + 200X_2$

Observe que las unidades del primer término ($200X_1$) son \$:
(\$/bolsa)*bolsa = \$ = Contribución de la leche entera a la utilidad.
Similarmente $200X_2$ es la contribución de la leche descremada a la utilidad.

c) Restricciones

El problema habla de que la fábrica dispone de 15.000 centímetros cúbicos de cada tipo de materia prima, 1 y 2 para la elaboración de los dos tipos de leche, por lo tanto la producción está restringida a la cantidad diaria de materia prima disponible.

Cada vez que se produzca una bolsa de leche entera, se consumen 3 centímetros cúbicos de materia prima 1, matemáticamente: $3X_1$ son los centímetros cúbicos de materia prima 1 usados diariamente para producir leche entera. Similarmente $5X_2$ son los centímetros cúbicos de materia

prima 1 usados diariamente para producir leche descremada. Entonces la cantidad total de centímetros cúbicos de materia prima 1 usados diariamente es: $3X_1 + 5X_2$ y como la disponibilidad máxima diaria de materia prima 1 es de 15.000 centímetros cúbicos, los centímetros cúbicos usados de materia prima 1 deben ser menor o igual a los centímetros cúbicos de materia prima 1 disponibles diariamente, matemáticamente: $3X_1 + 5X_2 \leq 15.000$

Las unidades del primer término ($3X_1$) son:

3 (cc de materia prima 1/bolsa de leche entera) * X_1 (bolsa de leche entera)
= $3X_1$ (cc de materia prima 1 usada para hacer leche entera).

Similarmente ocurre con la disponibilidad de materia prima 2, generándose la restricción: $5X_1 + 3X_2 \leq 15.000$

También hay una restricción debida a la capacidad de producción, la cual restringe a 1.000 bolsas la cantidad máxima a producir diaria de leche entera, Matemáticamente: $X_1 \leq 1.000$

Resumiendo, las restricciones son:

$3X_1 + 5X_2 \leq 15.000$	Restricción debida a la disponibilidad de materia prima 1
$5X_1 + 3X_2 \leq 15.000$	Restricción debida a la disponibilidad de materia prima 2
$X_1 \leq 1.000$	Restricción debida a la capacidad de producción instalada.

d) Condición de no negatividad

Es natural que el número de bolsas con leche de cada tipo, deba ser un número positivo o cero. Matemáticamente:

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

e) Solución empleando el software WinQsb

El WinQsb de Yih-Long Chang, distribuido por John Wiley & Sons. Inc. N.Y. es un software educativo amigable que tiene 19 módulos para la ayuda a la toma de decisiones en Investigación de Operaciones.

El acceso al WinQsb se hace a través de **Inicio-Programas-WinQsb** del sistema operativo Windows.

En la figura 1.1 se ilustra el menú desplegable del WinQsb sobre el cual escogemos la opción de Programación Lineal y Entera.

Figura 1.1 Menú desplegable del software WinQsb.

	Acceptance Sampling Analysis	Análisis de muestreo de aceptación
	Aggregate Planning	Planeación agregada
	Decision Analysis	Análisis de decisiones
	Dynamic Programming	Programación dinámica
	Facility Location and Layout	Diseño y localización de plantas
	Forecasting	Pronósticos
	Goal Programming	Programación por objetivos
	Inventory Theory and System	Teoría y sistemas de inventarios
	Job Scheduling	Programación de jornadas de trabajo
	Linear and Integer Programming	Programación lineal y entera
	Markov Process	Procesos de Markov
	Material Requirements Planning	Planeación del requerimiento de materiales
	Network Modeling	Modelos de redes
	Nonlinear Programming	Programación no lineal
	PERT_CPM	PERT-CPM
	Quadratic Programming	Programación cuadrática
	Quality Control Chart	Cartas de control de calidad
	Queuing Analysis	Sistemas de cola
	Queuing System Simulation	Simulación de sistemas de cola

Fuente: Software WinQsb.

Una vez ejecutado el módulo de programación lineal y entera, se abre la ventana principal (Figura 1.2) y ejecutamos un clic izquierdo sobre el primer icono en la parte superior izquierda para acceder a la ventana de diálogo que captura los datos generales del problema (Figura 1.3).

Figura 1.2 Ventana principal del módulo de programación lineal y entera



Fuente: Software WinQsb.

Figura 1.3 Ventana para capturar los datos generales del problema.

Fuente: Software WinQsb.

Observe que hay que darle un nombre al problema, el cual, no necesariamente debe ser igual al nombre del archivo en el cual decidamos guardar los datos del problema. Se debe indicar el número de variables, que para nuestro caso, es de 2 variables (X_1 y X_2), el número de restricciones, que para nuestro caso, es de 3 restricciones, el criterio de optimización de la función objetivo (Maximización), el tipo de variable por defecto (continua no negativa), escoger el formato que deseemos para la captura de datos (se recomienda la forma matricial por ser la más amigable) y por último aceptar las elecciones registradas en la ventana de dialogo. (Clic sobre el botón ok).

Figura 1.4 Ventana de captura de datos del problema.

Variables	X1	X2	Dirección	Lado derecho
Maximizar	200	200		
Restricción 1	3	5	≤	15000
Restricción 2	5	3	≤	15000
Restricción 3	1		≤	1000
Valor Mínimo	0	0		
Valor Máximo	M	M		
Tipo de variable	Continua	Continua		

Fuente: Software WinQsb.

En la figura 1.4 se ilustra la manera de introducir los datos del ejemplo 1.1, fíjese que se puede cambiar el tipo de variable de forma individual, al igual que el sentido de la desigualdad o cambiarla por una igualdad.

Para obtener la solución al problema, de clic al icono enmarcado con borde de color rojo en la figura 1.4 (dibujo de un hombre en posición de correr). La solución se presenta en la tabla 1.2

Tabla 1.2 Solución en el software WinQsb al ejemplo 1.1

Variables de decisión	Valor de la Solución	Utilidad por unidad (Cj)	Contribución total	Costo reducido	Estado de la variable	Mínimo (Cj) permitido	Máximo (Cj) permitido
X_1	1.000	200	200.000	0	Básica	120	M
X_2	2.400	200	480.000	0	Básica	0	333,33
Función objetiva (Máxima) $Z^* =$			680.000				
Restricciones	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho	Superávit o Holgura	Precio Sombra	Mínimo bi	Máximo bi
Restricción 1	15.000	\leq	15.000	0	40.000	3.000	19.666,67
Restricción 2	12.200	\leq	15.000	2.800	0	12.200	M
Restricción 3	1.000	\leq	1.000	0	80.000	0	1.875

f) Interpretación de la Solución

Para obtener la máxima utilidad diaria de \$680.000, se deben producir diariamente: 1.000 bolsas de leche entera ($X_1^* = 1.000$) y 2.400 bolsas de leche descremada ($X_2^* = 2.400$). El símbolo de "*" como superíndice de la variable, indica que el valor asumido por ésta, es el que hace que la función objetivo se optimice.

En la primera restricción ($3X_1 + 5X_2 \leq 15.000$), debida a la disponibilidad de 15.000 centímetros cúbicos de materia prima 1, al remplazar la solución óptima: $3(1.000) + 5(2.400) \leq 15.000$, se obtiene que: $15.000 \leq 15.000$ indica que se usó la totalidad de la materia prima 1.

La segunda restricción ($5X_1 + 3X_2 \leq 15.000$), debida a la disponibilidad de 15.000 centímetros cúbicos de materia prima 2, al remplazar la solución óptima: $5(1.000) + 3(2.400) \leq 15.000$, se obtiene que: $12.200 \leq 15.000$ indica que se dejaron de usar 2.800 centímetros cúbicos de materia prima 2 ($15.000 - 12.200$).

En la tercera restricción ($X_1 \leq 1.000$), debida a la capacidad de producción de 1.000 bolsas diarias de leche entera, al remplazar la solución óptima se obtiene que $1.000 \leq 1.000$ lo que indica que se está usando toda la capacidad de producción.

La producción de leche diaria está restringida por la disponibilidad de materia prima 1 y por la capacidad de producción de leche entera.

El precio sombra, referente a la restricción 1 indica que por cada centímetro cúbico adicional de materia prima 1 la utilidad se incrementa en \$40.000 siempre y cuando la disponibilidad de materia prima 1 se encuentre entre 3.000 y 19.666,66 centímetros cúbicos, lo anterior nos permite concluir que lo máximo a pagar por un centímetro cúbico de materia prima 1 son \$40.000, pagar más ocasiona pérdidas y pagar menos genera utilidad.

El precio sombra, referente a la restricción 2 indica que la utilidad total no se incrementa si se adquieren centímetros cúbicos adicionales de materia prima 2, lo cual es comprensible en términos de que de dicho recurso tenemos capacidad sobrante, luego no es necesario comprar.

Para la tercera restricción, el precio sombra indica que aumentar la capacidad de producción en una bolsa de leche entera genera un incremento en la utilidad de \$80.000, esto es cierto, siempre y cuando la capacidad de producción diaria de leche entera, esté entre 0 y 1.875 bolsas, luego el máximo costo a pagar por aumentar la capacidad de producción de este producto es de \$80.000 por bolsa producida.

A continuación se presenta la formulación de una colección selecta de problemas de programación lineal, que el lector deberá revisar su solución mediante el software WinQsb.

Ejemplo 1.2 Problema de producción

Un taller tiene tres máquinas: A, B y C en las que puede fabricar dos productos: 1 y 2; Todos los productos deben ir a cada máquina y cada uno va en el mismo orden: Primero a la máquina A, luego a la máquina B y por último a la máquina C. En la tabla 1.3 se muestran los siguientes datos:

- Las horas requeridas en cada máquina, por unidad de producto.
- Las horas totales disponibles de cada máquina, por semana.
- La ganancia por unidad vendida de cada producto.

Tabla 1.3 Datos de producción del taller.

Tipo de máquina	Producto 1	Producto 2	Disponibilidad (Horas/Semana)
A	2	2	16
B	1	2	12
C	4	2	28
Ganancia (\$/unidad)	1	1,5	

¿Qué cantidad de cada producto (1, 2) se debe manufacturar cada semana, para obtener la máxima ganancia? ¿Cuántas horas por semana se deja de usar cada máquina? Formule el problema, resuélvalo empleando el software WinQsb e interprete la solución.

Formulación

a) Definir las variables:

X_j = Unidades a producir por semana del producto j-ésimo ($j=1$ =Producto 1, $j=2$ =Producto 2)

b) Función objetivo

Maximizar $Z = X_1 + 3/2 X_2$ Con las siguientes restricciones (c.s.r.):

c) Restricciones

$2X_1 + 2X_2 \leq 16$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ A

$X_1 + 2X_2 \leq 12$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ B

$4X_1 + 2X_2 \leq 28$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ C

d) Condición de no negatividad

$X_j \geq 0; j = 1, 2$

5. Solución Mediante el software WinQsb

Variables de decisión:

$X_1^* = 4$ Se deben producir semanalmente 4 unidades del producto 1

$X_2^* = 4$ Se deben producir semanalmente 4 unidades del producto 2

$Z^* = 10$ La ganancia máxima semanal es de \$10

Variables de Holgura:

$X_3^* = 0$ La máquina A se usa todas las 16 horas que está disponible durante la semana. No tiene tiempo ocioso.

$X_4^* = 0$ La máquina B se usa todas las 12 horas que está disponible durante la semana. No tiene tiempo ocioso.

$X_5^* = 4$ La máquina C se deja de usar 4 horas a la semana. Tiene un tiempo ocioso de 4 horas semanales.

Fíjese que el lado derecho de las restricciones representan la disponibilidad del recurso, que en el presente problema son las horas semanales que se puede utilizar cada tipo de máquina (16, 12 y 28 horas disponibles por semana de las máquinas A, B y C respectivamente). El lado izquierdo de las restricciones representa la cantidad del recurso que se decide usar. La máquina A se usa 16 horas a la semana: $2X_1 + 2X_2 \Rightarrow 2(4) + 2(4) = 16$ concluyendo que todo el recurso es usado y la máquina A no tiene tiempo ocioso. La máquina B se usa 12 horas a la semana: $X_1 + 2X_2 \Rightarrow 4 + 2(4) = 12$ concluyendo que todo el recurso

es usado y la máquina B no tiene tiempo ocioso. La máquina C se usa 24 horas a la semana: $4X_1 + 2X_2 = 24$ concluyendo que no todo el recurso es usado y la máquina C tiene un tiempo ocioso de 4 horas a la semana (28-24).

Debe quedar muy claro que para la máquina C:

$$\begin{array}{rcl}
 4X_1 & + & 2X_2 \leq 28 \\
 4(4) & + & 2(4) \leq 28 \\
 16 & + & 8 \leq 28
 \end{array}$$

Horas disponibles por semana de la máquina C.
 La máquina C se usa 8 horas a la semana haciendo producto 2.
 La máquina C se usa 16 horas a la semana haciendo producto 1.

$24 \leq 28$
 La máquina C, de las 28 horas disponibles, se usa 24 horas, tiempo ocioso 4 horas/ semana.

Tabla 1.4 Solución en el software WinQsb al ejemplo 1.2

Variables de decisión	Valor de la Solución	Utilidad por unidad (Cj)	Contribución total	Costo reducido	Estado de la variable	Mínimo (Cj) permitido	Máximo (Cj) permitido
X_1	4	1	4	0	Básica	0,75	1,5
X_2	4	1,5	6	0	Básica	1,00	2,0
Función objetiva (Máxima) $Z^* =$			10				
Restricciones	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho	Superávit o Holgura	Precio Sombra	Mínimo bi	Máximo bi
Restricción 1	16	\leq	16	0	0,25	12	17,33333
Restricción 2	12	\leq	12	0	0,50	10	16,00000
Restricción 3	24	\leq	28	4	0	24	M

Fuente: Software WinQsb.

Precio sombra de la restricción 1: Por una hora adicional a la semana de disponibilidad de la máquina A, la ganancia total máxima se incrementa en \$0,25 luego lo máximo a pagar por esa hora adicional es \$0,25 siempre y cuando las horas disponibles de la máquina A estén entre 12 y 17,33 horas por semana.

Precio sombra de la restricción 2: Por una hora adicional a la semana de disponibilidad de la máquina B, la ganancia total máxima se incrementa en \$0,50 luego lo máximo a pagar por esa hora adicional es \$0,50 siempre y cuando las horas disponibles de la máquina B estén entre 10 y 16 horas por semana.

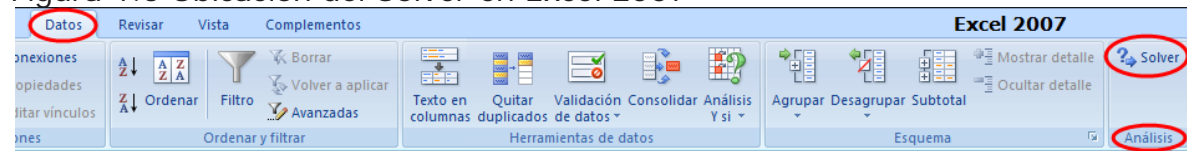
Precio sombra de la restricción 3: Por una hora adicional a la semana de disponibilidad de la máquina C, la ganancia total máxima no se incrementa, siempre y cuando las horas disponibles de la máquina C estén entre 24 e

infinito. No hay necesidad de comprar horas adicionales ya que la máquina C se está dejando de usar 4 horas a la semana.

Solución empleando la herramienta solver de Excel

Para utilizar el solver de Excel, primero se debe constatar que esté habilitado o disponible en el menú desplegable de herramientas en Excel 2003 ó en la pestaña de Datos, en el bloque de Análisis de Excel 2007 (Figura 1.5). Si no está instalado, en Excel 2003 se habilita en: Herramientas – Complementos – Solver y en Excel 2007 se habilita en Botón de Office – Opciones de Excel – Complementos – Ir (a complementos de Excel) y habilitar el complemento de Solver.

Figura 1.5 Ubicación del Solver en Excel 2007



Fuente: Software Excel.

Antes de introducir el modelo, es conveniente preparar la tabla 1.5 con los coeficientes de las variables.

Tabla 1.5 Tabla con los coeficientes de las variables.

Productos	Producto 1	Producto 2		
Ganancia marginal	1	1,5		
Restricciones				
Máquina A	2	2	≤	16
Máquina B	1	2	≤	12
Máquina C	4	2	≤	28

La restricción de no negatividad la tendremos muy en cuenta al usar el Solver. De otro modo, podríamos obtener soluciones absurdas.

A continuación se abre una nueva hoja de cálculo y se introducen los datos de la siguiente forma:

Figura 1.6 Introducción de datos en Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Productos	Producto 1	Producto 2	Z = Ganancia Total		
2	Ganancia Marginal	1	1,5			
3	Unidades a producir	0	0	0		
4	Restricciones			Valor	Límite	
5	Máquina A	2	2	0	≤	16
6	Máquina B	1	2	0	≤	12
7	Máquina C	4	2	0	≤	28

Ingrese en la celda D6
=SUMAPRODUCTO(\$B\$3:\$C\$3;B6:C6)

Copie la fórmula de la celda D6

Ingrese en la celda D3
=SUMAPRODUCTO(B2:C2;B3:C3)

Fuente: Software Excel.

Una vez introducidos los datos, podemos probar con distintas cantidades a producir de los productos 1 y 2, cambiando los valores de las celdas B3 y C3, observando si cumplen o no con las restricciones, y cuál es la ganancia total. Las soluciones que no cumplan con las restricciones se llaman SOLUCIONES NO FACTIBLES. Las soluciones que cumplan con las restricciones se llaman SOLUCIONES FACTIBLES. Fíjese que hay muchas soluciones factibles, de ellas hay que hallar la que maximice la ganancia total. No se deben introducir cantidades negativas para producir, ya que es una solución absurda que no cumple con la condición de no negatividad.

Así, por ejemplo, poniendo 1 en la celda B3 y 2 en la celda C3 se respetan todas las restricciones y se obtiene una ganancia total de \$4. Pruebe con otros valores.

Figura 1.7 Prueba en Excel con $X_1=1$ y $X_2=2$

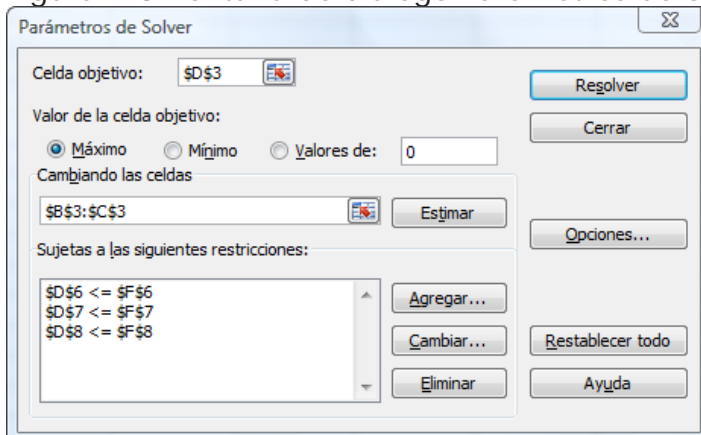
A	B	C	D	E	F
Productos	Producto 1	Producto 2	Z = Ganancia Total		
Ganancia Marginal	1	1,5			
Unidades a producir	1	2	4		
Restricciones			Valor		Límite
Máquina A	2	2	6	≤	16
Máquina B	1	2	5	≤	12
Máquina C	4	2	8	≤	28

Fuente: Software Excel.

Para ahorrar tiempo, antes de activar el Solver, situamos el cursor en la celda D3, que es la celda a optimizar, donde debe quedar el valor de Z^* .

Para activar el Solver, seleccione en Excel 2003 *Herramientas/Solver* o en Excel 2007 *Datos/Solver* y aparecerá la ventana de diálogo *Parámetros de Solver* en la que ingresamos los datos.

Figura 1.8 Ventana de diálogo *Parámetros de Solver*



Fuente: Software Excel.

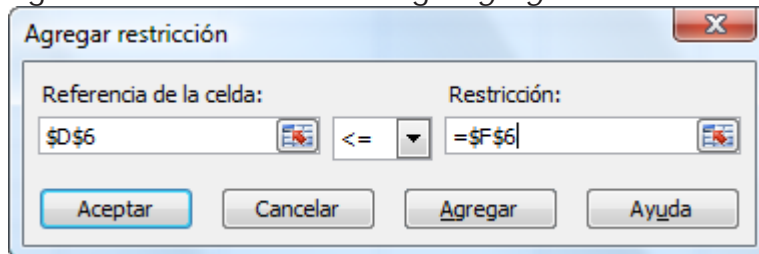
Cuando el dato sea una celda o un bloque de celdas, puede seleccionarlas haciendo clic en la hoja de cálculo.

Fíjese que como consecuencia de tener el cursor ubicado en la celda D3, automáticamente, dicha celda es registrada como la celda objetivo en la ventana de diálogo del Solver.

Para el presente problema, seleccionamos como valor de la celda objetivo: Máximo y en cambiando las celdas señalamos sobre la hoja de cálculo de Excel las celdas desde B3 a C3.

En Sujetas a las siguientes restricciones, activamos el botón agregar y aparecerá la ventana de diálogo *Agregar restricciones*.

Figura 1.9 Ventana de diálogo *Agregar Restricciones* del Solver de Excel.

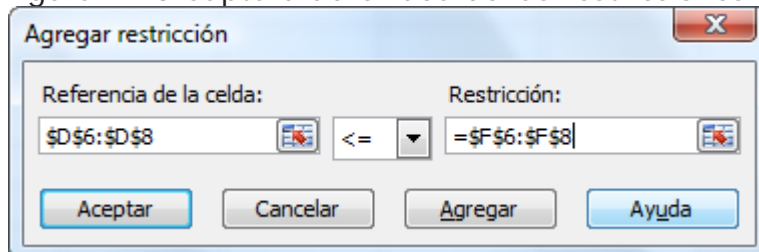


Fuente: Software Excel.

Use la caja debajo de Referencia de la celda para poner el lado izquierdo de la restricción, use la lista desplegable del centro para elegir un símbolo que represente el tipo de restricción y por último, en la caja de restricción agregue la celda que corresponde al lado derecho de la restricción. Haga clic en el botón agregar para introducir las demás restricciones. Cuando introduzca la última restricción, para finalizar, active el botón aceptar. Los datos deben quedar como se ilustra en la figura 1.8

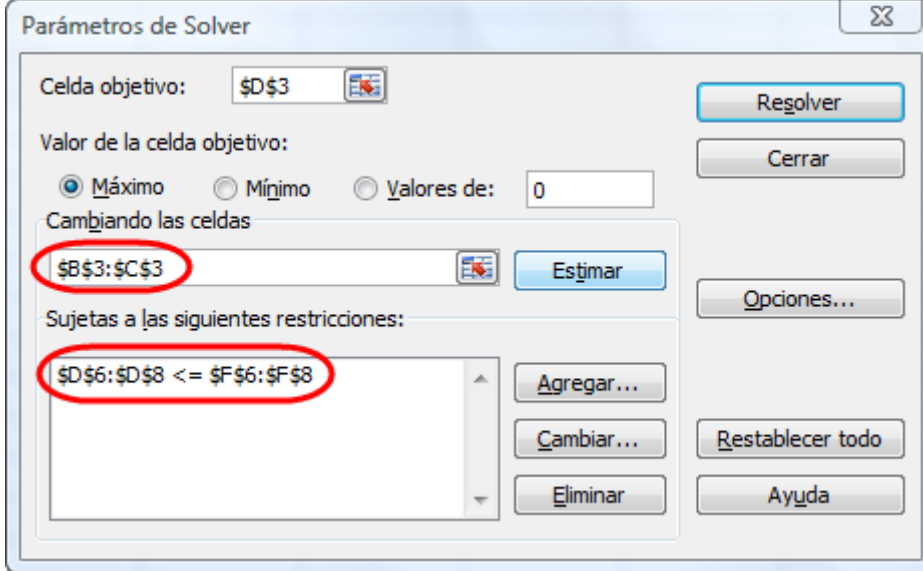
Otra manera de capturar los datos de las restricciones consiste introducir en referencia de la celda todos los lados izquierdos, haciendo un barrido de las celdas D6 A D8, igualmente en la caja de restricción se hace un barrido de las celdas F6 a F8, capturando los datos como se ilustra en la figura 1.10 y por último se da clic sobre el botón de Aceptar, quedando la ventana de parámetros de solver, como se ilustra en la figura 1.11.

Figura 1.10 Captura abreviada de las restricciones en Solver de Excel.



Fuente: Software Excel.

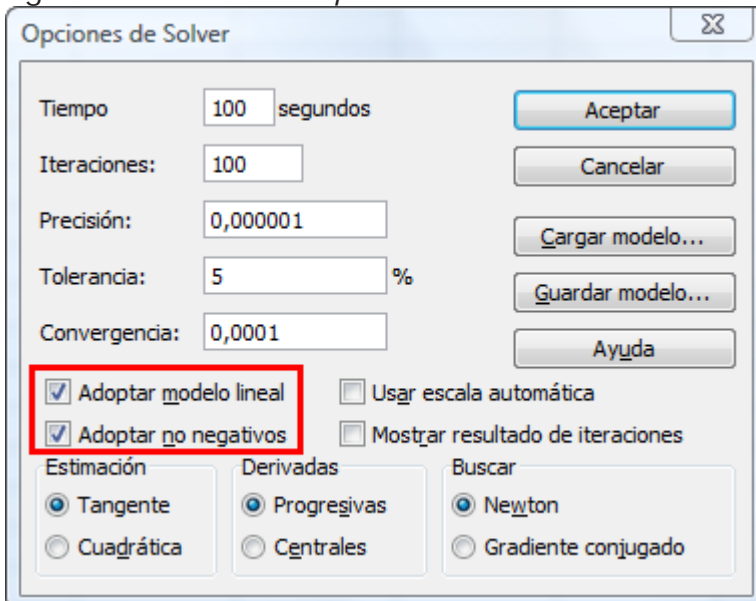
Figura 1.11 Ventana *Parámetros de Solver* de Excel, captura abreviada



Fuente: Software Excel.

Haga clic en el botón *opciones*, con lo que aparecerá la ventana de diálogo *Opciones de Solver*. Como el modelo es lineal, seleccione las casillas de verificación *Adoptar modelo lineal* y *Asumir no negativos*, y luego de clic en el botón *Aceptar*.

Figura 1.12 Ventana *Opciones de Solver*

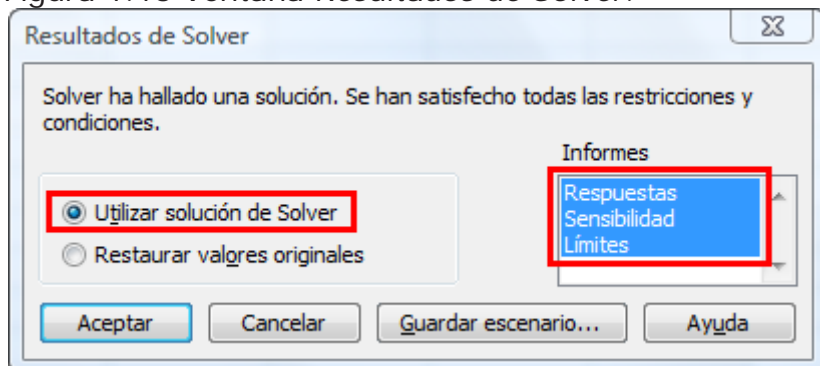


Fuente: Software Excel.

Una vez ingresados los datos, seleccione *Resolver* en la ventana *Parámetros de Solver* y se abrirá la ventana *Resultados de Solver* en donde seleccionamos la opción *Utilizar solución de Solver* y seleccionamos los tres tipos de informes

que se ofrecen: *Respuestas*, *Sensibilidad* y *Límites*. Al aceptar Solver agregará tres (3) hojas de cálculo en el libro, una por cada tipo de informe.

Figura 1.13 Ventana *Resultados de Solver*.



Fuente: Software Excel.

Solver encuentra la solución óptima de las variables $X_1^*=4$, $X_2^*=4$ y $Z^*=10$ en las celdas B3, C3 y D3, respectivamente.

Los informes del Solver son fácilmente entendibles y se explican por sí solos, además, toda la información es igual a la obtenida mediante el software WinQsb que ya hemos estudiado.

El informe de respuestas 1 es:

Figura 1.14 Informe de respuestas 1 del solver de Excel.

Microsoft Excel 12.0 Informe de respuestas

Hoja de cálculo: [Ejemplo 1.2.xlsx]Hoja1

Informe creado: 30/11/2009 14:49:32

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$D\$3	Z = Ganancia Total	0	10

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$3	Unidades a producir Producto 1	0	4
\$C\$3	Unidades a producir Producto 2	0	4

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$D\$6	Máquina A Valor	16	\$D\$6<=\$F\$6	Obligatorio	0
\$D\$7	Máquina B Valor	12	\$D\$7<=\$F\$7	Obligatorio	0
\$D\$8	Máquina C Valor	24	\$D\$8<=\$F\$8	Opcional	4

Fuente: Software WinQsb.

En la celda objetivo aparece la celda de la función objetivo, su nombre, el valor inicial y el valor óptimo o valor final. En celdas cambiantes aparecen las celdas de las variables de decisión, su nombre, su valor inicial y la solución óptima o valor final. En las restricciones el valor de la celda corresponde a las celdas donde se calcula el lado izquierdo de cada restricción, el nombre de cada restricción, el valor de la celda corresponde al cálculo del lado izquierdo de cada restricción (cantidad de unidades usadas del respectivo recurso), la fórmula nos recuerda las restricciones que se han considerado en el problema, el estado nos indica si la restricción se cumple exactamente con una igualdad, holgura cero, en otras palabras si la restricción es activa (obligatorio). La divergencia muestra la diferencia entre la disponibilidad del recurso y la cantidad usada del recurso, si la restricción es de menor o igual, entonces se resta el lado derecho del lado izquierdo, si la restricción es de mayor o igual, se resta el lado izquierdo menos el lado derecho. Si la restricción es activa, el margen será cero y se dice que dicha restricción es de estricto cumplimiento.

El informe de sensibilidad 1 es:

Figura 1.15 Informe de sensibilidad 1 del Solver de Excel.

Microsoft Excel 12.0 Informe de sensibilidad

Hoja de cálculo: [Ejemplo 1.2.xlsx]Hoja1

Informe creado: 30/11/2009 15:08:16

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coefficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$3	Unidades a producir Producto 1	4	0	1	0,5	0,25
\$C\$3	Unidades a producir Producto 2	4	0	1,5	0,5	0,50

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
\$D\$6	Máquina A Valor	16	0,25	16	1,33	4
\$D\$7	Máquina B Valor	12	0,50	12	4	2
\$D\$8	Máquina C Valor	24	0	28	1×10^{30}	4

Fuente: Software Excel.

En el reporte de celdas cambiantes, se nos recuerda la dirección de las celdas en donde se registra el valor de las variables de decisión (B3 y C3), el nombre de las variables, su valor óptimo, el costo reducido (gradiente reducido), el coeficiente actual de cada variable en la función objetivo, el aumento y disminución admisible en los coeficientes de la función objetiva sin que cambien los valores óptimos de las variables de decisión.

En el reporte de restricciones se muestran las direcciones de las celdas que contienen el cálculo de los lados izquierdos de las restricciones, el nombre de

cada restricción, el valor del lado izquierdo, el precio sombra, el valor del lado derecho de la cada restricción, el aumento y disminución permisibles sin que varíe el precio sombra.

El informe de límites 1 es:

Figura 1.16 Informe de límites 1 del Solver de Excel.

Hoja de cálculo: [Ejemplo 1.2.xlsx]Informe de límites 1

Informe creado: 30/07/2012 15:08:16

Celda objetivo						
Celda	Nombre	Igual				
\$D\$3	Z = Ganancia Total	10				

Celdas cambiantes			Límite	Celda	Límite	Celda
Celda	Nombre	Igual	inferior	objetivo	superior	objetivo
\$B\$3	Unidades a producir Producto 1	4	0	6	4	10
\$C\$3	Unidades a producir Producto 2	4	0	4	4	10

Fuente: Software Excel

El informe de celda objetiva nos recuerda que el valor óptimo de la función objetiva es de \$10. En el informe de celdas cambiantes, se nos recuerda la dirección de las celdas en donde se encuentra el valor de las variables de decisión, su nombre y valor óptimo. El límite inferior es el menor valor que puede tomar la variable y satisfacer todas las restricciones, suponiendo que las demás variables mantienen su valor óptimo. La celda objetivo (Resultado objetivo en Excel 2003) tiene el valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite inferior y las demás variables mantienen el valor óptimo encontrado. El límite superior es el mayor valor que puede tomar la variable, sin violar las restricciones y suponiendo que las demás variables mantienen su valor óptimo, para este límite superior, se tiene un valor en la celda objetivo que corresponde al valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite superior y las demás variables mantienen el valor óptimo.

Por último se explican, brevemente, las opciones del Solver que se ilustran en la siguiente ventana de diálogo.

Figura 1.17 Opciones de Solver de Excel



Fuente: Software Excel

Tiempo: Limita el tiempo de ejecución del proceso de solución a máximo 32.367 segundos (aproximadamente 9 horas), por defecto su valor es de 100 segundos.

Iteraciones: Limita el número de veces que se correrá un determinado procedimiento de solución (algoritmo) a máximo 32.767 veces, siendo el valor predeterminado de 100 veces, valor adecuado para la mayoría de problemas pequeños.

Precisión: Controla la exactitud de las soluciones mediante el número que se especifica para determinar si el valor de una restricción cumple un objetivo o satisface un tope o límite inferior o superior. Su valor debe estar entre 0 y 1.

Tolerancia: Es el porcentaje mediante el cual la función objetiva satisface las restricciones externas, puede diferir del valor óptimo verdadero y seguir considerándose aceptable. Esta opción sólo se aplica a los problemas que tienen restricciones enteras. Una tolerancia mayor acelerar el proceso de solución.

Convergencia: Si el valor del cambio relativo en la función objetivo es menor que la convergencia durante las últimas cinco iteraciones, Solver se detendrá. La convergencia se aplica únicamente a los problemas no lineales y debe indicarse mediante una fracción entre 0 y 1. Cuanto menor sea el valor de la convergencia, más tiempo se tardará en encontrar una solución.

Adoptar modelo lineal: Debe activarse para resolver problemas de programación lineal.

Adoptar no negativos: Debe activarse para resolver problemas en que todas las variables deben ser positivas, condición de no negatividad.

Usar escala automática: Seleccione esta opción para utilizar la escala automática cuando haya grandes diferencias de magnitud entre las entradas y los resultados; por ejemplo, cuando se maximiza el porcentaje de beneficios basándose en inversiones de millones de unidades monetarias.

Mostrar resultados de iteraciones: Seleccione esta opción para hacer que Solver muestre los resultados de cada iteración, esta opción es válida solo en problemas no lineales.

Las opciones siguientes son para modelos no lineales.

Estimación o cálculo: Especifica el enfoque que se utiliza para obtener los cálculos iniciales de las variables básicas en cada una de las búsquedas dimensionales.

Estimación – Tangente: Utiliza la extrapolación lineal de un vector tangente.

Estimación – cuadrática: Utiliza la extrapolación cuadrática que puede mejorar grandemente los resultados en problemas no lineales.

Derivadas: Determina el tipo de diferencia que se utiliza para estimar las derivadas parciales de la función objetivo y las restricciones.

Derivadas – progresivas: Se usa en aquellos problemas en que los valores de las restricciones cambian muy poco.

Derivadas – centrales: Se usa en problemas en donde las restricciones cambian rápidamente, especialmente cerca de los límites, esta opción puede ser útil cuando Solver indica que no puede mejorarse la solución.

Las opciones de búsqueda (bajo el título Buscar), especifican el algoritmo usado en cada iteración para determinar la dirección en que se hace la búsqueda de la solución óptima.

Buscar – Newton: Utiliza un método quasi-Newton que normalmente necesita más memoria pero menos iteraciones que el método de gradiente conjugado.

Buscar – gradiente conjugado: Necesita menos memoria que el método de Newton, pero necesita más iteraciones para alcanzar el nivel de precisión exigido. Se recomienda usar esta opción para problemas grandes o cuando el progreso a través de iteraciones es lento.

El botón *Cargar modelo...* muestra una ventana de diálogo donde se especifica la referencia del modelo que desee cargar y por último, el botón *Guardar modelo...* muestra una ventana de diálogo donde se especifica la ubicación en la que desee guardar el modelo. Haga clic únicamente cuando desee guardar más de un modelo con una hoja de cálculo; el primer modelo se guardará de forma automática.

A continuación se ilustran problemas tipo, para fortalecer el proceso de formulación, en cada problema se dará la solución encontrada mediante el software WinQsb, el lector debe constatar dichos resultados y hacer análisis con ellos. El enfoque y énfasis de los siguientes ejemplos está centrado en la formulación.

Ejemplo 1.3 El problema de las joyas

Una joyería produce dos tipos de joyas: La tipo 1 y la tipo 2. Cada joya tipo 1 contiene 2 rubíes y 4 diamantes y se vende a \$10/Unidad y tiene un costo de producción de \$5/Unidad. Cada joya tipo 2 contiene 1 rubí y 1 diamante, se vende a \$6/Unidad y tiene un costo de producción de \$4/Unidad. La joyería dispone de 30 rubíes y 40 diamantes para producir las joyas. Por la situación del mercado, se deben producir al menos 10 joyas del tipo 2.

- Formule el problema de programación lineal para maximizar la utilidad neta de la joyería (ventas-costos).
- ¿Cuántas joyas de cada tipo se deben producir, para maximizar la utilidad neta?
- ¿Cuál es la máxima utilidad neta?
- ¿Cuántos rubíes y diamantes sobran?

Solución

a. Formulación

X_j = Número de joyas a fabricar y vender, del tipo j-ésimo ($j=1$ =Joya tipo 1, $j=2$ =Joya tipo 2).

$$\text{Maximizar } Z = (10-5) X_1 + (6-4) X_2 = 5X_1 + 2X_2$$

c.s.r. (con las siguientes restricciones)

$$\begin{array}{llll} 2X_1 + X_2 \leq 30 & \text{Restricción debida a la cantidad de rubíes disponibles.} \\ 4X_1 + X_2 \leq 40 & \text{Restricción debida a la cantidad de diamantes disponibles.} \\ X_2 \geq 10 & \text{Restricción debida a las condiciones del mercado.} \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{array}$$

- Empleando el WinQsb $X_1^* = 5$ Joyas tipo 1 y $X_2^* = 20$ Joyas tipo 2
- La máxima utilidad neta es: $Z^* = \$65$
- Observando el informe de solución del WinQsb, no sobran ni rubíes ni diamantes y se producen 10 joyas tipo 2 por encima del mínimo requerido por el mercado.

$2X_1^* + X_2^* \leq 30$	$4X_1^* + X_2^* \leq 40$	$X_2^* \geq 10$
$2(5) + (20) \leq 30$	$4(5) + (20) \leq 40$	$20 \geq 10$
$30 \leq 30$	$40 \leq 40$	Se producen 10
No sobran rubíes	No sobran diamantes	Joyas tipo 2 de más

Ejemplo 1.4 El problema de las bodegas

Un barco de carga tiene tres bodegas: Proa, Popa y Centro, cuya capacidad máxima de peso a transportar en cada una de ellas es: 2.000, 1.500, y 3.000 toneladas, respectivamente. Cada bodega tiene un volumen de: 100.000, 300.000 y 135.000 pies cúbicos, respectivamente. Se ofrecen tres tipos de carga denominadas A, B y C en las siguientes cantidades: 6.000, 4.000 y 2.000 toneladas respectivamente; si cada tonelada de los productos A, B y C ocupa 60, 50 y 25 pies cúbicos y el capitán del barco tiene como política de seguridad, cargar el mismo porcentaje de toneladas en cada bodega, ¿Cuántas toneladas debe decidir cargar el capitán en cada bodega, de cada tipo de carga, de tal forma que maximice las utilidades, sabiendo que por cada

tonelada de los productos A, B y C obtiene una utilidad de \$6, \$8 y \$5 respectivamente?

Solución

Producto i-ésimo	Popa (j = 1)	Centro (j = 2)	Proa (j = 3)	Requerimiento de espacio (pies ³ / ton.)	Oferta de carga (Ton.)	Utilidad (\$ / Ton.)
A	X_{A1}	X_{A2}	X_{A3}	60	6.000	6
B	X_{B1}	X_{B2}	X_{B3}	50	4.000	8
C	X_{C1}	X_{C2}	X_{C3}	25	2.000	5
	1.500	3.000	2.000	Capacidad en toneladas		
	300.000	135.000	100.000	Volumen disponible (pies ³)		

Figura 1.18 Esquema general del problema 1.4

X_{ij} = Toneladas a transportar del producto i-ésimo ($i = A, B, C$) en la bodega j-ésima ($j = 1 = \text{Popa}, j = 2 = \text{Centro}, j = 3 = \text{Proa}$).

$$\text{Maximizar } Z = 6(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 8(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 5(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$

c.s.r.

$$\begin{aligned} X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} &\leq 1.500 \\ X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} &\leq 3.000 \\ X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} &\leq 2.000 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la capacidad en} \\ \text{toneladas de las bodegas 1, 2, 3} \\ \text{respectivamente.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 60X_{A1} + 50X_{B1} + 25X_{C1} &\leq 300.000 \\ 60X_{A2} + 50X_{B2} + 25X_{C2} &\leq 135.000 \\ 60X_{A3} + 50X_{B3} + 25X_{C3} &\leq 100.000 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la} \\ \text{capacidad en volumen de las} \\ \text{bodegas 1, 2, 3 respectivamente.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} &\leq 6.000 \\ X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} &\leq 4.000 \\ X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} &\leq 2.000 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la oferta en} \\ \text{toneladas del tipo de carga A, B, C} \\ \text{respectivamente.} \end{array}$$

$$\frac{X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}}{1.500} = \frac{X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}}{3.000} = \frac{X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}}{2.000}$$

Restricción debida a la política de seguridad del capitán de cargar el mismo porcentaje (%) de toneladas en cada bodega.

Reescribiendo la anterior restricción con base en el principio de que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí (si $A = B$ y $A = C \Rightarrow B = C$), se obtiene:

$$\frac{X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}}{1.500} = \frac{X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}}{3.000} \quad \text{Simplificando y ordenando:}$$

$$2X_{A1} + 2X_{B1} + 2X_{C1} - X_{A2} - X_{B2} - X_{C2} = 0$$

Igualmente:

$$\frac{X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}}{1.500} = \frac{X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}}{2.000} \quad \text{Simplificando y ordenando}$$

$$4X_{A1} + 4X_{B1} + 4X_{C1} - 3X_{A3} - 3X_{B3} - 3X_{C3} = 0$$

$$X_{ij} \geq 0; \quad i = A, B, C \quad y \quad j = 1, 2, 3$$

Empleando el WinQsb se obtiene que el problema tiene múltiples soluciones, caso que estudiaremos con mayor detalle en el capítulo de Método Gráfico. Dos de las soluciones son:

Solución 1 (Toneladas)

$$\begin{array}{l|l|l} X_{A1}^* = 1.500 & X_{A2}^* = 285,7143 & X_{A3}^* = 0 \\ X_{B1}^* = 0 & X_{B2}^* = 2.000 & X_{B3}^* = 2.000 \\ X_{C1}^* = 0 & X_{C2}^* = 714,2857 & X_{C3}^* = 0 \\ Z^* = \$46.285,71 \end{array}$$

Solución 2 (Toneladas)

$$\begin{array}{l|l|l} X_{A1}^* = 1.500 & X_{A2}^* = 0 & X_{A3}^* = 285,7143 \\ X_{B1}^* = 0 & X_{B2}^* = 2.400 & X_{B3}^* = 1.600 \\ X_{C1}^* = 0 & X_{C2}^* = 600 & X_{C3}^* = 114,2857 \\ Z^* = \$46.285,71 \end{array}$$

Ejemplo 1.5 El problema de corte

La empresa Metal Mecánica S.A. produce láminas de 180 x 40 cm. ha recibido los siguientes tres (3) pedidos: 5.000 láminas de 60 x 40 cm. 15.000 láminas de 70 x 40 cm. y 10.000 láminas de 50 x 40 cm. La empresa desea cumplir exactamente con los pedidos, no quiere tener existencias en inventario y desea saber cuál debe ser su programación de corte, de tal manera que minimice el desperdicio.

Solución

Para definir las variables, se debe considerar todas las formas posibles de cortar la lámina de 180x40 cm. Fijese que el ancho permanece constante en 40 cm. Lo variable corresponde al largo de la lámina, que sin cortar es de 180 cm.

1º Forma: 3 cortes de 60 cm

2º Forma: 2 cortes de 60 cm y 1 corte de 50 cm, 10 cm de desperdicio.

3º Forma: 3 cortes de 50 cm y 30 cm. de desperdicio.

4° Forma: 2 cortes de 70 cm y 40 cm de desperdicio.

5° Forma: 2 cortes de 50 cm, 1 corte de 70 cm y 10 cm de desperdicio.

6° Forma: 1 corte de 50 cm, 1 corte de 70 cm y 1 corte de 60 cm.

7° Forma: 2 cortes de 50 cm, 1 corte de 60 y 20 cm de desperdicio.

Gráficamente:

Figura 1.19 Esquema general del problema 1.5

Lámina de 180x40 cm.

60	60	60		X ₁ : Forma 1
60	60	50	10	X ₂ : Forma 2
50	50	50	30	X ₃ : Forma 3
70	70		40	X ₄ : Forma 4
50	50	70	10	X ₅ : Forma 5
50	70	60		X ₆ : Forma 6
50	50	60	20	X ₇ : Forma 7

Fuente: El autor.

Luego queda claro que la variable debe ser definida, así:

X_j = Número de láminas a cortar de la forma j-ésima ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$)

Minimizar el desperdicio: $Z = 10X_2 + 30X_3 + 40X_4 + 10X_5 + 20X_7$

c.s.r.

$$3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 = 5.000$$

$$2X_4 + X_5 + X_6 = 15.000$$

$$X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 = 10.000$$

$X_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y Entera.

Restricciones debidas a que se exige cumplir exactamente con los pedidos.

Fíjese que las variables deben ser estrictamente enteras.

Usando el WinQsb, la solución óptima entera, es:

$X_4^* = 3.750$ veces se debe cortar de la forma 4.

$X_5^* = 2.500$ veces se debe cortar de la forma 5.

$X_6^* = 5.000$ veces se debe cortar de la forma 6.

$Z^* = 175.000$ cm. de desperdicio mínimo.

Ejemplo 1.6 Corridas de producción

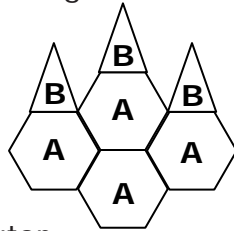
Una empresa produce un artículo cuya unidad está compuesta por 4 unidades de componente **A** y 3 unidades de componente **B** que se producen por corrida de producción a partir de las materias primas 1 y 2 y en tres diferentes departamentos. Las cantidades por corrida de producción se muestran en la tabla 1.6. Elabore un plan de producción para maximizar la cantidad de artículo para producir.

Tabla 1.6 Datos del problema 1.6

	Materia prima 1	Materia prima 2	Componente A	Componente B
Departamento 1	8	6	7	5
Departamento 2	5	9	6	9
Departamento 3	3	8	8	4
Disponibilidad	100	200		

Fuente: El autor.

Figura 1.20 Configuración de una unidad de producto final.



Fuente: El autor.

Una corrida de producción, llamada también lote de producción o bache, o producción intermitente, consiste en producir un número de unidades semejantes, generalmente grande, pero, determinado. Ejemplos de este método de producción lo constituyen la pintura, el teñido de la hilaza para fabricar hilo, fabricación del pan, fabricación de calzado deportivo, en la industria farmacéutica, elaboración de tintas, pegamentos y la producción de panela. En el presente problema se tienen tres (3) departamentos, con tecnología diferente, que emplean diferentes combinaciones de materia prima para producir diferentes cantidades de componentes **A** y **B** por lo tanto la cantidad producida depende de cuántas veces se ordene correr el proceso de producción en cada departamento. Si se decide correr el proceso de producción en el departamento 1, dos (2) veces, la producción de componente **A** en dicho departamento es: $7 \times 2 = 14$ unidades y la de componente **B** es: $5 \times 2 = 10$ unidades. Luego se define las variables, así:

X_j = Número de corridas de producción a ordenar en el departamento j -ésimo ($j=1, 2, 3$).

El número total de componentes **A** y **B** depende de las veces que se decida correr el proceso de producción en los departamentos 1, 2 y 3.

Matemáticamente:

Número de componentes **A** = $7X_1 + 6X_2 + 8X_3$

Número de componentes **B** = $5X_1 + 9X_2 + 4X_3$

Ahora, la cantidad total de componente **A** producida debe dividirse en grupos de 4 y la cantidad total de componente **B** producida debe dividirse en grupos de 3, para proceder al ensamble de unidades completas. Como consecuencia, el número de unidades completas de producto terminado, está restringido al menor número entero de grupos de componente (**A** o **B**) producidos.

Número de grupos de 4 unidades de componente **A**: $\frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}$

Número de grupos de 3 unidades de componente **B**: $\frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}$

Por lo tanto, la función objetivo, es:

$$\text{Maximizar} \left\{ \text{Mínimo entero entre} \left\{ \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}, \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3} \right\} \right\}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} 8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100 \\ 6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la disponibilidad de} \\ \text{materia prima 1 y 2, respectivamente.} \end{array} \\ X_j \geq 0; j = 1, 2, 3 \text{ Enteros} & \text{Restricción de no negatividad y enteros.} \end{array}$$

La función objetiva y las restricciones se deben modificar de la siguiente manera:

$$V = \text{Mínimo entero entre} \left\{ \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}, \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3} \right\}$$

Entonces:

Maximice $Z = V$; Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} 8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100 \\ 6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200 \\ \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4} \geq V \\ \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3} \geq V \end{array} & \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la disponibilidad de} \\ \text{materia prima 1 y 2, respectivamente.} \\ \text{Si } V \text{ es el menor de los dos términos,} \\ \text{entonces, cada término debe ser } \geq \text{ que } V. \end{array} \end{array}$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3 \text{ Enteros} \quad | \quad \text{Restricción de no negatividad y enteros.}$$

Reescribiendo:

Maximice $Z = V$; Con las siguientes restricciones:

$8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100$	Restricciones debidas a la disponibilidad de materia prima 1 y 2, respectivamente. Ordenando los términos de la tercera y cuarta restricción.
$6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200$	
$7X_1 + 6X_2 + 8X_3 - 4V \geq 0$	
$5X_1 + 9X_2 + 4X_3 - 3V \geq 0$	

$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$ Enteros	Restricción de no negatividad y enteros.
-----------------------------------	------------------------------------------

Empleando el WinQsb se obtiene la siguiente solución óptima entera:

X_1^*	=	0	No correr el proceso de producción en el departamento 1.
X_2^*	=	8	Correr 8 veces el proceso de producción en el departamento 2.
X_3^*	=	16	Correr 16 veces el proceso de producción en el departamento 3.
Z^*	=	44	Número máximo de producto completo producido.

Además:

Se producen $7X_1 + 6X_2 + 8X_3 = 7(0)+6(8)+8(16)=176$ Unidades de componente **A** y $5X_1 + 9X_2 + 4X_3 = 5(0)+9(8)+4(16)=136$ Unidades de componente **B**. Lo cual hace que se formen $176/4=44$ grupos de 4 unidades de componente **A** y $136/3=45,33$ grupos de 3 unidades de componente **B**, que sirven para formar en definitiva 44 unidades de producto completo y sobra $136-45(3)=1$ una (1) unidad de componente **B**. De la materia prima 1 sobran 12 unidades: $100 - (8X_1+5X_2+3X_3) = 100 - 8(0)-5(8)-3(16) = 12$ y de la materia prima 2 no sobran unidades: $200 - (6X_1+9X_2+8X_3) = 200 - 6(0)-9(8)-8(16) = 200 - 200 = 0$

Ejemplo 1.7 El problema de los paquetes de tuercas.

Una ferretería planea vender paquetes de tornillos. Cada paquete pesa por lo menos 2 libras. Tres tamaños de tornillos componen el paquete y se compran en lotes de 200 libras. Los tamaños 1, 2 y 3 cuestan respectivamente \$20, \$8 y \$12, además:

- El peso combinado de los tamaños 1 y 3 debe ser *al menos* la mitad del peso total del paquete.
- El peso de los tamaños 1 y 2 *no debe ser mayor* que 1,6 libras.
- Cualquier tamaño de tornillo *debe ser al menos* el 10% del paquete total.

¿Cuál será la composición del paquete que ocasionará un costo mínimo?

Nota: Los tornillos se compran por libras y no por unidades.



Se compran lotes (bultos) de 200 libras, de tamaño 1 a \$20, de tamaño 2 a \$8 y de tamaño 3 a \$12.

De acuerdo a lo anterior:

$20/200$ = Lo que cuesta una libra de tornillos tipo 1

$8/200$ = Lo que cuesta una libra de tornillos tipo 2

$12/200$ = Lo que cuesta una libra de tornillos tipo 3

Figura 1.21 Bulto de tornillos.

X_j = Libras de tornillos a meter en la bolsa, del tipo j-ésimo ($j=1$: Tornillos del tipo 1, $j=2$: Tornillos del tipo 2, $j=3$: Tornillos del tipo 3)

Minimizar $Z = 20/200X_1 + 8/200X_2 + 12/200X_3$ Con las siguientes restricciones:

$X_1 + X_3 \geq (X_1 + X_2 + X_3)/2$ Restricción debida a la exigencia de que el peso combinado de los tamaños 1 y 3 debe ser *al menos* la mitad del peso total del paquete.

$X_1 + X_2 \leq 1,6$ Restricción debida a la exigencia de que el peso de los tamaños 1 y 2 *no debe ser mayor* que 1,6 libras.

$X_1 \geq 0,1(X_1 + X_2 + X_3)$ Restricción debida a que el peso de los tornillos de tamaño 1 debe ser *al menos* el 10% del total del peso de la bolsa.

$X_2 \geq 0,1(X_1 + X_2 + X_3)$ Restricción debida a que el peso de los tornillos de tamaño 2 debe ser *al menos* el 10% del total del peso de la bolsa.

$X_3 \geq 0,1(X_1 + X_2 + X_3)$ Restricción debida a que el peso de los tornillos de tamaño 3 debe ser *al menos* el 10% del total del peso de la bolsa.

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 2$ Restricción debida a la exigencia de que la bolsa debe pesar al menos 2 libras.

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3$ Condición de no negatividad.

Para introducir el problema al software WinQsb se debe reescribir la formulación, así:

Minimizar $Z = 0,1X_1 + 0,04X_2 + 0,06X_3$ Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rclclcl}
 X_1 & - & X_2 & + & X_3 & \geq & 0 \\
 X_1 & + & X_2 & & & \leq & 1,6 \\
 0,9X_1 & - & 0,1X_2 & - & 0,1X_3 & \geq & 0 \\
 -0,1X_1 & + & 0,9X_2 & - & 0,1X_3 & \geq & 0 \\
 -0,1X_1 & - & 0,1X_2 & + & 0,9X_3 & \geq & 0 \\
 X_1 & + & X_2 & + & X_3 & \geq & 2 \\
 X_j \geq 0; & j = & 1, 2, 3
 \end{array}$$

Empleando el WinQsb, la solución óptima es:

$X_1^* = 0,2$ Introducir en la bolsa 0,2 libras de tornillos del tamaño tipo 1
 $X_2^* = 1,0$ Introducir en la bolsa 1,0 libras de tornillos del tamaño tipo 2
 $X_3^* = 0,8$ Introducir en la bolsa 0,8 libras de tornillos del tamaño tipo 3
 $Z^* = \$0,108$ Costo mínimo del paquete.

Ejemplo 1.8 El problema clásico de transporte.

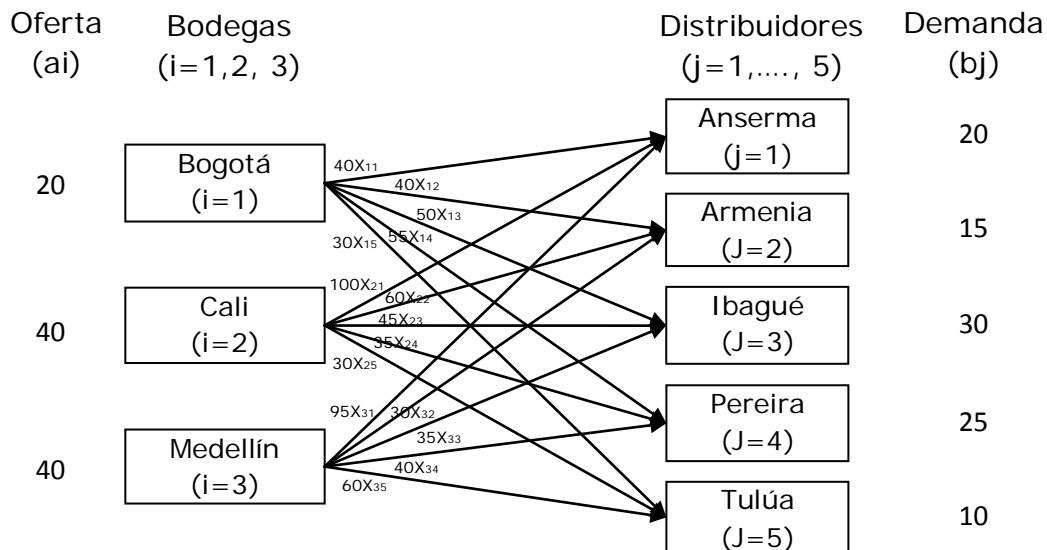
Un fabricante tiene tres (3) Bodegas de producto terminado ubicadas en: Bogotá, Cali y Medellín. Estos centros tienen una oferta de 20, 40 y 40 unidades respectivamente. Sus distribuidores demandan las siguientes cantidades: Anserma 20, Armenia 15, Ibagué 30, Pereira 25 y Tulúa 10. El costo de transporte por unidad en pesos entre cada bodega y las ciudades de los distribuidores se dan en la tabla 1.7:

Tabla 1.7 Datos del problema 1.8

		Distribuidores					Oferta
		Anserma	Armenia	Ibagué	Pereira	Tulúa	
Bodegas	Bogotá	40	40	50	55	30	20
	Cali	100	60	45	35	30	40
	Medellín	95	30	35	40	60	40
Demanda		20	15	30	25	10	100

¿Cuántas unidades debe mandar el fabricante desde cada bodega a cada distribuidor, de manera que los costos totales de transporte sean mínimos?

Figura 1.22 Ilustración gráfica del problema clásico del transporte.



Fuente: El autor.

La manera conveniente de definir las variables es:

X_{ij} = Unidades a enviar desde la bodega i -ésima ($i=1$: Bogotá, $i=2$: Cali, $i=3$: Medellín) al distribuidor j -ésimo ($j=1$: Anserma, $j=2$: Armenia, $j=3$: Ibagué, $j=4$: Pereira, $j=5$: Tulúa).

Fíjese que cada subíndice i se refiere a cada bodega de origen y cada subíndice j se refiere a cada distribuidor.

$$\text{Minimizar } Z = 40X_{11} + 40X_{12} + 50X_{13} + 55X_{14} + 30X_{15} + 100X_{21} + 60X_{22} + 45X_{23} + 35X_{24} + 30X_{25} + 95X_{31} + 30X_{32} + 35X_{33} + 40X_{34} + 60X_{35}$$

Con las siguientes restricciones:

El primer grupo de restricciones obedece a que no se pueden enviar más unidades de las disponibles en cada una de las bodegas de origen, dicho de otra manera, este grupo de restricciones obedece a la disponibilidad de la oferta.

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} & \leq & 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} & \leq & 40 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} & \leq & 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la} \\ \text{disponibilidad de unidades en las} \\ \text{bodegas 1, 2 y 3 respectivamente.} \end{array}$$

El segundo grupo de restricciones obedece a que cada uno de los distribuidores aspira al menos recibir lo requerido, dicho de otra manera, este grupo de restricciones obedece a al requerimiento de la demanda.

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{21} + X_{31} & \geq & 20 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} & \geq & 15 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} & \geq & 30 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} & \geq & 25 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} & \geq & 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la demanda de unidades} \\ \text{de los distribuidores 1, 2, 3, 4 y 5} \\ \text{respectivamente.} \end{array}$$

Fíjese que las columnas de las restricciones de la ofertan corresponden a las filas de las restricciones de la demanda.

$$X_{ij} \geq 0; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Empleando el WinQsb en su módulo *Network Modeling – Transportation Problem (Modelos de Redes – Problema de Transporte)*, la solución óptima es:

$X_{11}^* = 20$ Unidades a enviar desde Bogotá a Anserma.

$X_{23}^* = 5$ Unidades a enviar de Cali a Ibagué.

$X_{24}^* = 25$ Unidades a enviar desde Cali a Pereira.

$X_{25}^* = 10$ Unidades a enviar desde Cali a Tulúa.

$X_{32}^* = 15$ Unidades a enviar desde Medellín a Armenia.

$X_{33}^* = 25$ Unidades a enviar desde Medellín a Ibagué.

Las demás variables $X_{ij}^* = 0$

$Z^* = \$3.525$ Costo total mínimo de transporte.

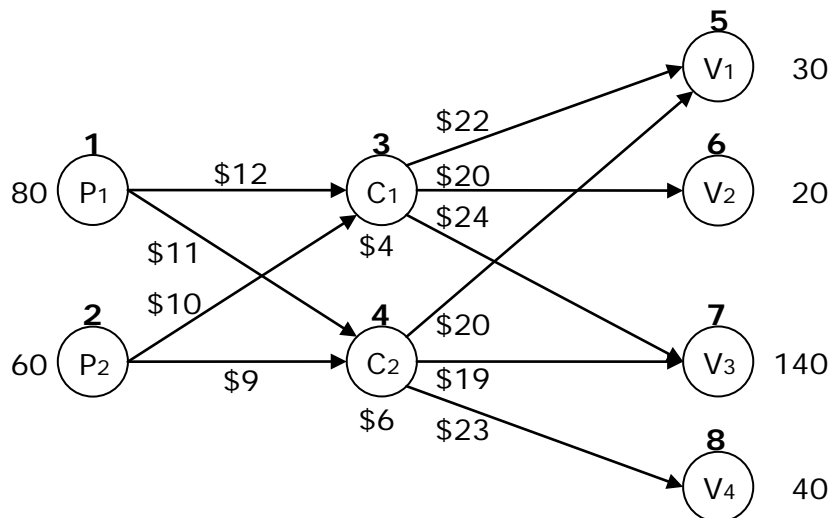
Ejemplo 1.9 El problema clásico de transbordo.

Una empresa fabrica monitores de alta resolución en dos plantas de producción P_1 y P_2 . Las capacidades de producción por semana son de 80 y 60 unidades, respectivamente. Los monitores se llevan a cuatro centros de ventas V_i , $i = 1, 2, 3$ Y 4 que solicitan para la próxima semana 30 unidades para V_1 , 20 para V_2 y 40 para V_4 . V_3 no ha cuantificado su demanda indicando que va a ser muy alta y aceptaría toda la producción disponible ($80+60=140$ unidades). La legislación vigente obliga a la empresa a transportar los monitores de las plantas a los puntos de venta a través de alguno de los dos centros de control de calidad existentes C_1 y C_2 en los que se revisan los monitores y cuya capacidad es muy grande. El costo de revisión por unidad en C_1 es de \$4.000 y en C_2 es de \$6.000. Los costos en miles de pesos del transporte unitario desde las plantas a los centros de revisión y de estos a los puntos de venta, aparecen en la tabla 1.8

Tabla 1.8 Costos de transporte, ofertas y demandas correspondientes al problema 1.9

		Plantas de producción		Centros de venta			
		P_1	P_2	V_1	V_2	V_3	V_4
Centros de revisión	C_1	12	10	22	20	24	-
	C_2	11	9	20	-	19	23
Ofertas y Demandas		80	60	30	20	140	40

Figura 1.23 Ilustración del problema clásico de transbordo.



Fuente: El autor.

La empresa desea distribuir toda la producción para la semana entrante, sin mostrar preferencia por la utilización de un determinado centro de revisión o punto de venta, pues su interés reside en minimizar el costo total de transporte. ¿Cuál debe ser la distribución desde las plantas a los puntos de venta?

X_{ij} : Unidades a enviar desde la planta i -ésima ($i=1$: Planta 1, $i=2$: Planta 2) al centro de revisión j -ésimo ($j=3$: Centro de revisión 1, $j=4$: Centro de revisión 2).

X_{jk} : Unidades a enviar desde el centro de revisión j -ésimo ($j=3$: Centro 1, $j=4$: Centro 2) al centro de venta k -ésimo ($k=5$: Centro de venta 1, $k=6$: Centro de venta 2, $k=7$: Centro de venta 3, $k=8$: Centro de venta 4).

$$\text{Maximizar } Z = 12X_{13} + 11X_{14} + 10X_{23} + 9X_{24} + 4(X_{13} + X_{23}) + 6(X_{14} + X_{24}) + 22X_{35} + 20X_{36} + 24X_{37} + 20X_{45} + 19X_{47} + 23X_{48}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{lcl} X_{13} + X_{14} & \leq & 80 \\ X_{23} + X_{24} & \leq & 60 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la disponibilidad de monitores en} \\ \text{las plantas 1 y 2 respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} X_{13} + X_{23} & = & X_{35} + X_{36} + X_{37} \\ X_{14} + X_{24} & = & X_{45} + X_{47} + X_{48} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a que la suma de} \\ \text{monitores que entran debe ser igual a} \\ \text{la suma de monitores que sale en cada} \\ \text{centro de revisión. Ecuaciones de} \\ \text{balance.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} X_{35} + X_{45} & \geq & 30 \\ & & X_{36} \geq 20 \\ X_{37} + X_{47} & \geq & 140 \\ & & X_{48} \geq 40 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la demanda de monitores en} \\ \text{cada centro de venta } V_1, V_2, V_3, V_4 \text{ respectivamente.} \end{array} \right.$$

$X_{ij} \geq 0$; $i=1, 2$; $j=3, 4$ y Enteros.

$X_{jk} \geq 0$, $j=3, 4$; $k=5, 6, 7, 8$ y enteros.

Otra manera de formularlo es, convirtiéndolo en un problema clásico de transporte, así: Construimos una tabla de costos mínimos, desde cada planta P_i a cada centro de venta V_k señalando el centro de revisión C_j , usado en dicha ruta de mínimo costo.

Tabla 1.9 Costo mínimo desde cada planta a cada centro de ventas.

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄
P ₁	37 (C ₂)	36 (C ₁)	36 (C ₂)	40 (C ₂)
P ₂	35 (C ₂)	34 (C ₁)	34 (C ₂)	38 (C ₂)

Explicación de los cálculos para la tabla 1.9: Para enviar monitores desde la planta P_1 al centro de ventas V_1 existen dos alternativas.

Alternativa 1: Enviar los monitores a través del centro de revisión C₁ con un costo total por unidad de $\$12 + \$4 + \$22 = \38

Alternativa 2: Enviar los monitores a través del centro de revisión C₂ con un costo total por unidad de $\$11 + \$6 + \$20 = \37

Inscribimos el menor costo de estas dos alternativas en la tabla 1.9, especificando que se hace a través del centro de investigación C₂

Las demás celdas de la tabla 1.9 se calculan de manera similar.

Construida la tabla 1.9 se tiene configurado un problema de transporte clásico, cuyos datos se muestran en la tabla 1.10

Tabla 1.10 Costos unitarios desde cada planta a cada centro de venta, ofertas y demandas.

	Centro de venta 1		Centro de venta 2		Centro de venta 3		Centro de venta 4		Ofertas
Planta 1	37	C ₂	36	C ₁	36	C ₂	40	C ₂	80
Planta 2	35	C ₂	34	C ₁	34	C ₂	38	C ₂	60
Demanda	30		20		140		40		

X_{ij}: Cantidad de monitores de alta resolución a enviar desde la planta i-ésima (i=1: Planta 1, i=2: Planta 2) al centro de venta j-ésimo (j=1: Centro de venta 1, j=2: Centro de venta 2, j=3: Centro de venta 3, j=4: Centro de venta 5).

$$\text{Minimizar } Z = 37X_{11} + 36X_{12} + 36X_{13} + 40X_{14} + 35X_{21} + 34X_{22} + 34X_{23} + 38X_{24}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} & \leq & 80 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & \leq & 60 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la disponibilidad} \\ \text{de monitores en las planta 1 y 2} \\ \text{respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{21} & \geq & 30 \\ X_{12} + X_{22} & \geq & 20 \\ X_{13} + X_{23} & \geq & 140 \\ X_{14} + X_{24} & \geq & 40 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones bebidas a la demanda de monitores en los} \\ \text{centros de venta 1, 2, 3 y 4 respectivamente.} \end{array} \right.$$

$X_{ij} \geq 0$; i=1, 2; j=1, 2, 3, 4 y Enteros.

Empleando el software WinQsb con cualquiera de las dos formulaciones se obtiene la siguiente solución óptima:

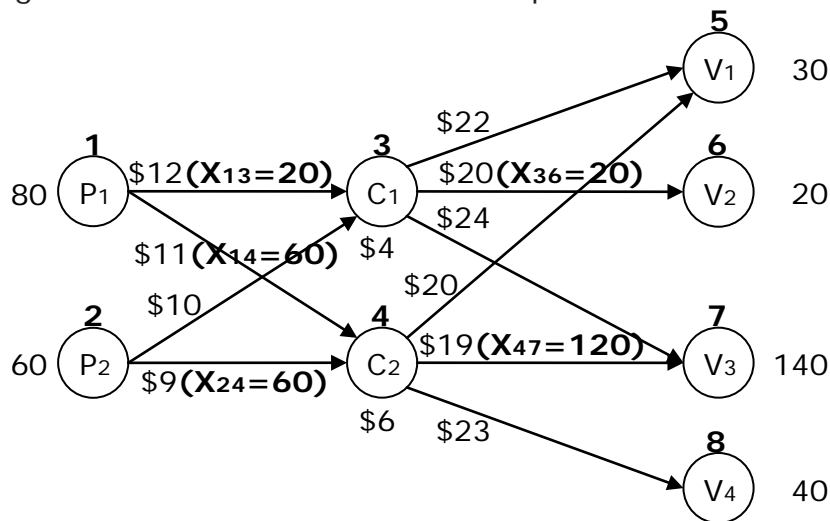
De la planta de producción P₁ enviar 20 monitores al centro de revisión C₁
De la planta de producción P₁ enviar 60 monitores al centro de revisión C₂

De la planta de producción P2 enviar 60 monitores al centro de revisión C2
 Del centro de revisión C1 enviar 20 monitores al centro de ventas V2
 Del centro de revisión C2 enviar 120 monitores al centro de ventas V3

Costo total mínimo del transporte y revisión: \$4.920

Aquí es interesante analizar que todas las unidades disponibles ($80+60=140$) son enviadas, pero, al centro de ventas V1 no le llega ninguna unidad de las 30 requeridas, al centro de ventas V2 le llegan las 20 unidades solicitadas, al centro de ventas V3 le llegan 120 unidades de las 140 unidades solicitadas quedándole un faltante de 20 unidades y al centro de ventas V4 no le llega ninguna de las 40 unidades solicitadas. Gráficamente:

Figura 1.24 Gráfica de la solución al problema de transbordo clásico 1.9



Fuente: El autor.

Ejemplo 1.10 Problema de localización de planta.

Una empresa del sector textil, que opera en todo el país, dispone de la siguiente configuración: Dos plantas de fabricación en Pereira e Ibagué, con capacidades de 900 y 1.500 unidades, respectivamente. Cuatro almacenes regionales de distribución que sirven a los clientes de sus respectivas zonas en: Neiva, Medellín, Cali y Bogotá, con demandas de 700, 800, 500 y 400 unidades, respectivamente. En el próximo año, la empresa espera un crecimiento de la demanda del orden del 25%, lo cual ha llevado a la dirección a plantearse la apertura de una nueva fábrica. A la vista de los criterios que la empresa estima importantes para la localización de la nueva planta, existen dos alternativas para considerar: Pasto (alternativa 1) y Villavicencio (Alternativa 2). La elección recaerá en aquella que provoque los menores costos de transporte entre las fábricas y los almacenes, dado que ambas parecen ser igualmente convenientes respecto a otros factores. La tabla 1.11 muestra los costos de transporte unitarios entre cada origen y destino.

Tabla 1.11 Costos unitarios de transporte.

Plantas de fabricación	Almacenes regionales de distribución			
	Neiva	Medellín	Cali	Bogotá
Pereira	6	4	2	6
Ibagué	2	3	7	5
Pasto	6	4	4	8
Villavicencio	6	3	4	2

a. Considerando establecer la nueva planta en Pasto.

X_{ij} : Unidades para enviar desde la planta i -ésima ($i=1$: Pereira, $i=2$: Ibagué, $i=3$: Pasto) al almacén regional de distribución j -ésimo ($j=1$: Neiva, $j=2$: Medellín, $j=3$: Cali, $j=4$: Bogotá).

$$\text{Minimizar } Z = 6X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 6X_{14} + 2X_{21} + 3X_{22} + 7X_{23} + 5X_{24} + 6X_{31} + 4X_{32} + 4X_{33} + 8X_{34}$$

Con las siguientes restricciones:

La oferta total actual es de: $700+800+500+400=2.400$ unidades.

La oferta total para el próximo año debe ser: $2.400*1,25=3.000$ unidades.

La nueva planta debe ofertar al menos: $3.000-2.400=600$ unidades.

La demanda por almacén regional para el próximo año es del 25% adicional:

Neiva: $700*1,25=875$ Unidades, Medellín: $800*1,25=1.000$ Unidades, Cali: $500*1,25=625$ Unidades y Bogotá: $400*1,25=500$ Unidades.

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} & = & 900 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & = & 1.500 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} & = & 600 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la} \\ \text{disponibilidad de unidades en las} \\ \text{plantas 1, 2 y 3, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} X_{11} + X_{21} + X_{31} & = & 875 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} & = & 1.000 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} & = & 625 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} & = & 500 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a los requerimientos de} \\ \text{unidades de los almacenes regionales de} \\ \text{distribución 1, 2, 3 y 4, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$X_{ij} \geq 0; i=1, 2 \text{ y } 3; j=1, 2, 3 \text{ y } 4$$

Observe que la oferta total es igual a la demanda total (3.000 Unidades), por lo tanto, todo lo disponible es enviado y todo lo enviado fue demandado, luego todas las restricciones son igualdades. Empleando el módulo "Network Modeling", opción "Transportation Problem", del software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{lcl} X_{13}^* = 625 & X_{21}^* = 875 & X_{24}^* = 225 \\ X_{14}^* = 275 & X_{22}^* = 400 & X_{32}^* = 600 \end{array} \left| Z^* = \$9.375 \right.$$

b. Considerando establecer la nueva planta en Villavicencio.

X_{ij} : Unidades para enviar desde la planta i -ésima ($i=1$: Pereira, $i=2$: Ibagué, $i=3$: Villavicencio) al almacén regional de distribución j -ésimo ($j=1$: Neiva, $j=2$: Medellín, $j=3$: Cali, $j=4$: Bogotá).

$$\text{Minimizar } Z = 6X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 6X_{14} + 2X_{21} + 3X_{22} + 7X_{23} + 5X_{24} + 6X_{31} + 3X_{32} + 4X_{33} + 2X_{34}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} & = & 900 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & = & 1.500 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} & = & 600 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la} \\ \text{disponibilidad de unidades en las} \\ \text{plantas 1, 2 y 3, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcll} X_{11} + X_{21} + X_{31} & = & 875 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} & = & 1.000 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} & = & 625 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} & = & 500 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a los requerimientos de} \\ \text{unidades de los almacenes regionales de} \\ \text{distribución 1, 2, 3 y 4, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$X_{ij} \geq 0; i=1, 2 \text{ y } 3; j=1, 2, 3 \text{ y } 4$$

Empleando el módulo "*Network Modeling*", opción "*Transportation Problem*", del software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{l} X_{12}^* = 275 \\ X_{13}^* = 625 \end{array} \left| \begin{array}{l} X_{21}^* = 875 \\ X_{22}^* = 625 \end{array} \right| \begin{array}{l} X_{32}^* = 100 \\ X_{34}^* = 500 \end{array} \left| Z^* = \$7.275 \right.$$

Decisión

Si se ubica la planta nueva en Pasto, los costos totales mínimos de transporte son de \$9.375, mientras que, si se hace la nueva planta en Villavicencio los costos totales mínimos son de \$7.275, luego, la nueva planta bajo el criterio exclusivo de los costos totales de transporte debe ser instalada en Villavicencio.

Ejemplo 1.11 Problema de asignaciones.

El gerente de una empresa tiene 4 trabajadores y 4 trabajos para ejecutar, por su experiencia y el nivel de dificultad de cada una de los trabajos, los tiempos de ejecución en horas, de cada trabajador en cada trabajo son diferentes y se muestran en la tabla 1.12

El gerente desea que cada trabajador ejecute un solo trabajo y que cada trabajo sea ejecutado por un solo trabajador. ¿Qué trabajador se debe asignar a cada trabajo, de tal manera que la duración total de todos los trabajos sea mínima?

Tabla 1.12 Duración en horas de los trabajos.

		Trabajos			
		A	B	C	D
Trabajador	1	8	13	38	19
	2	16	28	19	26
	3	17	4	18	24
	4	11	26	15	10

Fíjese que la decisión del gerente va enfocada a decidir si al trabajador i -ésimo ($i=1, 2, 3, 4$) debe asignársele o no asignársele el trabajo j -ésimo ($j=A, B, C, D$), por ello la variable a definir es del tipo binaria. Una variable binaria es aquella que solo puede tomar dos valores (si-no, verdad-falso, 0-1).

$X_{ij}=0$: No le asigne al trabajador i -ésimo ($i=1, \dots, 4$) el trabajo j -ésimo ($j=A, \dots, D$)

$X_{ij}=1$: Si le asigne al trabajador i -ésimo ($i=1, \dots, 4$) el trabajo j -ésimo ($j=A, \dots, D$)

$$\text{Minimizar } Z = 8X_{1A} + 13X_{1B} + 38X_{1C} + 19X_{1D} + 16X_{2A} + 28X_{2B} + 19X_{2C} + 26X_{2D} + 17X_{3A} + 4X_{3B} + 18X_{3C} + 24X_{3D} + 11X_{4A} + 26X_{4B} + 15X_{4C} + 10X_{4D}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{lcl} X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D} = 1 \\ X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D} = 1 \\ X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} + X_{3D} = 1 \\ X_{4A} + X_{4B} + X_{4C} + X_{4D} = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones que aseguran que a cada} \\ \text{trabajador se le asignará un solo} \\ \text{trabajo.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} + X_{4A} = 1 \\ X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} + X_{4B} = 1 \\ X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} + X_{4C} = 1 \\ X_{1D} + X_{2D} + X_{3D} + X_{4D} = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones que aseguran que a cada} \\ \text{trabajo se le asignará un solo} \\ \text{trabajador.} \end{array} \right.$$

$X_{ij}=0, 1$ para $i=1, 2, 3, 4$ y $j=A, B, C, D$

Empleando el módulo "*Network Modeling*", opción "*Assignment Problem*", del software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{l} X_{1A}^* = 1 \quad X_{3B}^* = 1 \quad Z^* = 41 \\ X_{2C}^* = 1 \quad X_{4D}^* = 1 \end{array}$$

Lo cual significa que la mejor decisión es:

Asignarle al trabajador 1 el trabajo A, con duración de 8 horas.

Asignarle al trabajador 2 el trabajo C, con duración de 19 horas.

Asignarle al trabajador 3 el trabajo B, con duración de 4 horas.

Asignarle al trabajador 4 el trabajo D, con duración de 10 horas.

Duración mínima total para realizar los 4 trabajos: 41 horas.

Ejemplo 1.12 Problema del financiero.

Un inversionista tiene la intención de hacer varias inversiones, las cuales se extenderán por un periodo de cinco años, al final del cual necesitará de todo el capital. Las inversiones se hacen el 1° de Enero de cada año y son:

Inversión A: Disponible el 1° de Enero de cada año y produce el 10% de interés al final de cada año.

Inversión B: Disponible en dos años a partir de ahora (comienzo del 3° año), produce un retorno del 20% al final del 3° año y lo máximo que el inversionista considerará en invertir son \$30.000

Inversión C: Disponible en un año a partir de ahora (comienzo del 2° año), y produce el 30% al final del cuarto año. Esta inversión será de \$40.000 como máximo.

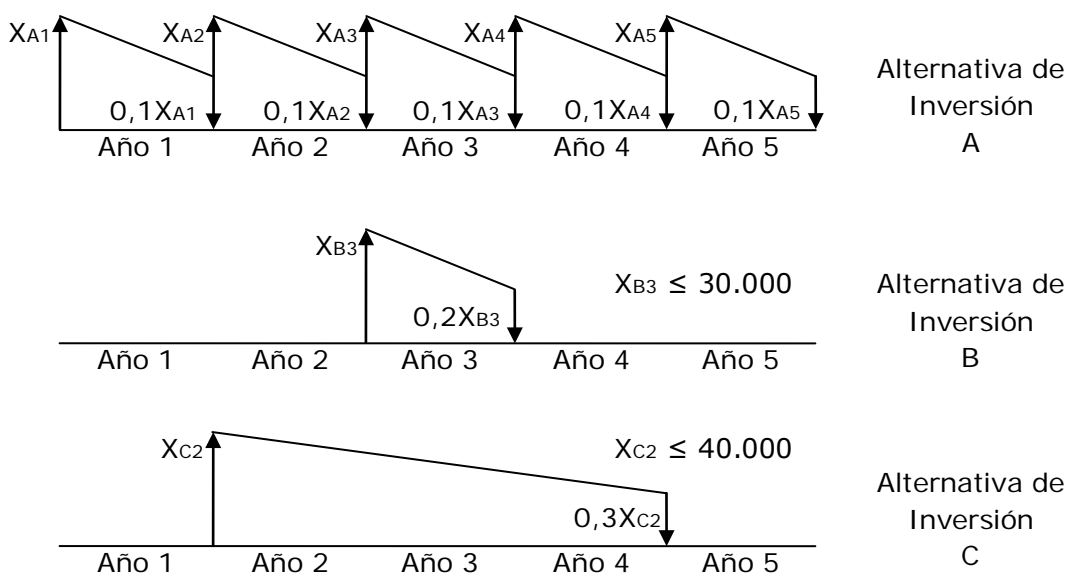
El inversionista tiene \$100.000 disponible para las inversiones. ¿Cuál debe ser el portafolio de inversión que le permita disponer de la máxima cantidad de dinero al final del año quinto?

Formulación:

Es evidente que el gerente desea saber cuánto dinero debe invertir en cada alternativa de inversión al principio de cada año, por lo tanto la variable es:

X_{ij} = Cantidad de dinero para invertir en la alternativa i -ésima ($i=A, B$ y C) al principio del año j -ésimo ($j = 1, 2, 3, 4, 5$)

Figura 1.25 Esquema de las diferentes opciones de inversión.



Fuente: El autor.

El problema tiene 7 variables de decisión y la función objetivo debe maximizar la cantidad de dinero disponible al final del año 5, principio del año 6

$$\text{Maximizar } Z = 100.000 + 0,1(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} + X_{A5}) + 0,2X_{B3} + 0,3X_{C2}$$

Para construir las restricciones, piense que al principio de cada año va a tener disponibles algunas alternativas de inversión para las que no podrá invertir más de lo que tenga disponible en ese momento. El lado izquierdo de las restricciones, representa la cantidad de dinero que el inversionista podría invertir en las alternativas disponibles al principio de cada año. El lado derecho representa la cantidad de dinero disponible para invertir, que es la suma del capital inicial + la suma de todos los intereses recibidos hasta la fecha - los capitales que están invertidos en ese momento y que no han retornado.

Con las siguientes restricciones:

$X_{A1} \leq 100.000$	Restricciones debidas a la disponibilidad de dinero al principio de cada uno de los cinco años, respectivamente.
$X_{A2} + X_{C2} \leq 100.000 + 0,1X_{A1}$	
$X_{A3} + X_{B3} \leq 100.000 + 0,1(X_{A1} + X_{A2}) - X_{C2}$	
$X_{A4} \leq 100.000 + 0,1(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 0,2X_{B3} - X_{C2}$	
$X_{A5} \leq 100.000 + 0,1(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}) + 0,2X_{B3} + 0,3X_{C2}$	
$X_{B3} \leq 30.000$	
$X_{C2} \leq 40.000$	

$$X_{ij} \geq 0; i=A, B, C; J=1, 2, 3, 4, 5$$

Fíjese que la función objetivo tiene una constante (\$100.000), que debe ignorarse al introducir los datos al software WinQsb, lo que se maximiza son los rendimientos. A la solución óptima ofrecida por el WinQsb se le debe sumar \$100.000 del capital para obtener el total de dinero disponible al final del quinto año.

Para introducir los datos en el software WinQsb se debe reescribir la formulación, quedando así:

$$\text{Maximizar } Z = 0,1X_{A1} + 0,1X_{A2} + 0,1X_{A3} + 0,1X_{A4} + 0,1X_{A5} + 0,2X_{B3} + 0,3X_{C2}$$

Con las siguientes restricciones:

X_{A1}	≤ 100.000
$-0,1X_{A1} + X_{A2} + X_{C2}$	≤ 100.000
$-0,1X_{A1} - 0,1X_{A2} + X_{A3} + X_{B3} + X_{C2}$	≤ 100.000
$-0,1X_{A1} - 0,1X_{A2} - 0,1X_{A3} + X_{A4} - 0,2X_{B3} + X_{C2}$	≤ 100.000
$-0,1X_{A1} - 0,1X_{A2} - 0,1X_{A3} - 0,1X_{A4} + X_{A5} - 0,2X_{B3} - 0,3X_{C2}$	≤ 100.000
X_{B3}	≤ 30.000
X_{C2}	≤ 40.000

$$X_{ij} \geq 0; i=A, B, C; J=1, 2, 3, 4, 5$$

Empleando el módulo "*Linear and Integer Programming*", del software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{llll} X_{A1}^* = \$100.000 & X_{A3}^* = \$91.000 & X_{A4}^* = \$136.100 & Z^* = \$64.681 \\ X_{A2}^* = \$110.000 & X_{B3}^* = \$30.000 & X_{A5}^* = \$149.710 & \end{array}$$

El dinero total disponible al final del año 5 es de:

$$\$64.681 + \$100.000 = \$164.681$$

El portafolio de inversiones es el siguiente:

Al principio del primer año se invierte \$100.000 en la alternativa A. Al final del primer año se recibe \$100.000 del capital invertido en la alternativa A más los intereses de \$10.000 para un total disponible al principio del año 2 de \$110.000.

Al principio del segundo año, se debe invertir \$110.000 en la alternativa A. Al final del segundo año se reciben \$121.000 discriminados en \$110.000 de capital y \$11.000 de intereses. Para el principio del tercer año se dispone de \$121.000 para invertir.

Al principio del tercer año, los \$121.000 se deben invertir así: \$91.000 en la alternativa A y \$30.000 en la alternativa B. Al final del tercer año se recibe \$121.000 de capital más \$15.100 de intereses, discriminados así: \$9.100 generados por los \$91.000 invertidos en la alternativa A al 10% anual ($\$91.000 \times 0,1 = \9.100) y \$6.000 generados por los \$30.000 invertidos en la alternativa B al 20% anual ($\$30.000 \times 0,2 = \6.000). Luego, el total recibido al final del tercer año y disponible para invertir al principio del año cuarto es de \$136.100

Al principio del cuarto año, se debe invertir \$136.100 en la alternativa A, para recibir al final del año ($\$136.100 \times 1,1$) \$149.710, los cuales se deben reinvertir al principio del año quinto en la alternativa A, para recibir al final del año quinto ($\$149.710 \times 1,1$) \$164.681

Ejemplo 1.13 Problema bancario

El banco de Ibagué asigna \$2.000'000.000 para atender su línea de crédito para vivienda y su línea de crédito para libre inversión. El interés anual sobre los créditos de vivienda es del 14% y para los créditos de libre inversión es del 12%. Ambos tipos de crédito se saldan en un periodo de un año. El monto de los créditos para vivienda debe ser tres veces mayor que el monto para los créditos de libre inversión. El banco de Ibagué estima que el 1% de todos los créditos para vivienda se pierden. El gerente desea saber cómo repartir los \$2.000'000.000 entre las dos líneas de crédito para maximizar el ingreso por concepto del rendimiento de estas dos líneas de crédito.

X_j = Dinero por asignar a la línea de crédito j -ésima ($j=1$: Línea de crédito para vivienda, $j=2$: Línea de crédito para libre inversión).

Nota: Es trivial pensar que el dinero que no se invierte no genera rendimiento, luego se debe invertir todo el dinero disponible, para maximizar el rendimiento.

El dinero asignado a la línea de crédito para vivienda, genera un rendimiento de: $0,14X_1$ y el dinero asignado a la línea de crédito para libre inversión, genera un rendimiento de: $0,12X_2$

Del monto asignado a la línea de crédito para vivienda, el 1% no retorna: $0,01X_1$ luego dicho monto tampoco genera interés en un 1%, equivalente a $0,01(0,14X_1)$, entonces, la función objetivo para maximizar el rendimiento, es:

Maximizar: $Z=0,14X_1+0,12X_2-0,01X_1-0,01(0,14X_1)$, simplificando, la función objetivo se reescribe, así:

Maximizar $Z=0,1286X_1+0,12X_2$

Con las siguientes restricciones:

$X_1 = 3X_2$ Restricción debida a la exigencia de que el monto asignado para la línea de crédito de vivienda, debe ser tres veces más grande que el monto asignado a la línea de crédito de libre inversión. Reescribiendo la ecuación:

$$X_1 - 3X_2 = 0$$

$X_1 + X_2 \leq 2.000'000.000$ Restricción debida a la cantidad de dinero disponible.

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Empleando el WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = \$1.500'000.000 \quad X_2^* = \$500'000.000 \quad Z^* = \$252'900.000$$

Se debe asignar \$1.500'000.000 a la línea de crédito para vivienda y \$500'000.000 a la línea de crédito para libre inversión, para obtener un rendimiento máximo de \$252'000.000 anuales.

El rendimiento que se genera es de \$270'000.000 ($0,14 \times \$1.500'000.000 + 0,12 \times \$500'000.000$)

El dinero que se pierde en la línea de crédito para vivienda es de \$15'000.000 ($\$1.500'000.000 \times 0,01$) y los interés que se dejan de percibir son \$2'100.000, ($\$15'000.000 \times 0,14$) luego el total de perdida asciende a \$17'100.000

El rendimiento total es de: $\$270'000.000 - \$17'100.000 = \$252'900.000$

Ejemplo 1.14 Problema de la dieta

Un dietista es el profesional que se encarga de estudiar, vigilar y recomendar los hábitos alimenticios de sus pacientes, con el objetivo de mejorar su salud. Un paciente debe consumir diariamente, como mínimo, los siguientes requerimientos nutricionales: 1.000 unidades del nutriente A, 2.000 unidades del nutriente B y 1.500 unidades del nutriente C. Cada onza de la fuente alimenticia número 1 contiene 100 unidades del nutriente A, 400 unidades del nutriente B y 200 unidades del nutriente C y cada onza de la fuente alimenticia número 2 contiene 200 unidades de nutriente A, 250 unidades del nutriente B y 200 unidades del nutriente C. La fuente número 1 cuesta \$6.000 por libra y la fuente número 2 cuesta \$8.000 por libra. El paciente desea determinar la combinación de las fuentes alimenticias 1 y 2 que arroje el menor costo y satisfaga todos los requerimientos nutritivos de la dieta. Nota: 1 libra = 16 Onzas.

Solución:

En nuestro medio la mayoría de fuentes alimenticias se compran por libras, luego es conveniente convertir los datos del problema que se encuentren en libras a onzas. La información pertinente se resume en la tabla 1.13

Tabla 1.13 Datos relevantes del problema 1.14

Tipo de Nutriente	Fuentes Alimenticias (Unidades/libra)		Requerimientos Diarios (Unidades)
	1	2	
A	1.600	3.200	1.000
B	6.400	4.000	2.000
C	3.200	3.200	1.500
Costo (\$/libra)	6.000	8.000	

Fíjese que las unidades por onza se han convertido en unidades por libra, multiplicando cada unidad por onza por 16, que es cantidad de onzas que contiene una libra.

X_j = Libras a comprar y consumir diariamente de la fuente alimenticia j-ésima
(j=1: Fuente alimenticia 1, j=2: Fuente alimenticia 2)

Minimizar $Z = 6.000X_1 + 8.000X_2$ Costo total diario de la compra de las fuentes alimenticias 1 y 2.

Con las siguientes restricciones:

$1.600X_1 + 3.200X_2 \geq 1.000$ Restricciones debidas a los requerimientos
 $6.400X_1 + 4.000X_2 \geq 2.000$ diarios de unidades de nutrientes A, B y C.
 $3.200X_1 + 3.200X_2 \geq 1.500$ respectivamente.

$X_j \geq 0; J = 1, 2$

Usando el WinQsb, la solución óptima, es: $X_1^* = 0,325$ $X_2^* = 0,1563$ $Z^* = \$3.125$

Se debe comprar y consumir diariamente 0,325 libras de la fuente alimenticia 1 y 0,1563 libras de la fuente alimenticia 2, para tener un costo mínimo de \$3.125 diariamente y cumplir con la dieta ordenada por el dietista.

Ejemplo 1.15 Problema de programación lineal binaria.

El centro de cómputo del Tolima tiene un departamento especializado en la elaboración de programas para computadora. Estos programas se escriben en uno de cuatro lenguajes de programación: Java (lenguaje de programación orientado a objetos), .NET, Phyton (lenguaje de programación interpretado) y Ruby (lenguaje de programación interpretado, reflexivo y orientado a objetos). El centro de cómputo del Tolima tiene un programador que realiza esta labor y tiene cinco trabajos de programación que debe terminar lo más pronto posible. La utilidad (en millones de pesos) de cada tarea se muestra en la tabla 1.14

Tabla 1.14 Utilidad (en millones de pesos), por trabajo.

Programador	Trabajos				
	1	2	3	4	5
José Olivares	100	150	200	100	50

En la tabla 1.15 se muestra el tiempo que necesita el programador para terminar cada trabajo y el tiempo del que dispone después de realizar sus demás tareas.

Tabla 1.15 Tiempo para realizar cada trabajo y el tiempo disponible para ello.

Programador	Trabajos					Tiempo disponible (horas)
	1	2	3	4	5	
José Olivares	40	15	20	10	5	35

El centro de cómputo del Tolima desea saber qué trabajos debe realizar José Olivares en las 35 horas disponibles, para maximizar la utilidad.

Solución:

$X_j = 0$: No realizar el trabajo j-ésimo ($J=1, 2, 3, 4, 5$).

$X_j = 1$: Si realizar el trabajo j-ésimo ($J=1, 2, 3, 4, 5$).

Maximizar $Z = 100X_1 + 150X_2 + 200X_3 + 100X_4 + 50X_5$

Con la siguiente restricción:

$40X_1 + 15X_2 + 20X_3 + 10X_4 + 5X_5 \leq 35$ Restricción debida a la cantidad de horas disponibles

$X_j = 0,1$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Usando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = 0 \quad X_2^* = 1 \quad X_3^* = 1 \quad X_4^* = 0 \quad X_5^* = 0 \quad Z^* = \$350$$

Se deben realizar en las 35 horas disponibles, los trabajos 2 y 3, para obtener la máxima utilidad de \$350'000.000

Ejemplo 1.16 Problema de programación de personal.

La biblioteca de la Universidad de Ibagué va a prestar el servicio 24 horas al día, por lo tanto, necesita contratar monitores para atención al cliente. Sin embargo, no tiene claro cuántos monitores debe contratar. La administración de la biblioteca reconoce que es necesario controlar el costo y al mismo tiempo proporcionar de manera consistente un nivel satisfactorio de servicio. El equipo de Investigación de Operaciones ha estudiado como programar a los monitores para proporcionar un nivel de servicio al cliente satisfactorio con el menor costo de personal. Con base en la nueva programación (24 horas al día), se ha realizado un análisis del número mínimo de monitores de servicio al cliente que deben contratarse en diferentes momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio. La columna de la derecha de la tabla 1.16 muestra el número de monitores necesarios para los periodos dados en la primera columna. Los otros datos de la tabla reflejan la política de la Universidad de Ibagué de que cada monitor trabaje un turno de 8 horas 5 días a la semana. Los turnos autorizados son: Turno 1: De 6 a.m. a 2 p.m. Turno 2: De 8 a.m. a 4 p.m. Turno 3: De 12 a.m. a 8 p.m. Turno 4: De 4 p.m. a 12 p.m. Turno 5: De 10 p.m. a 6 a.m.

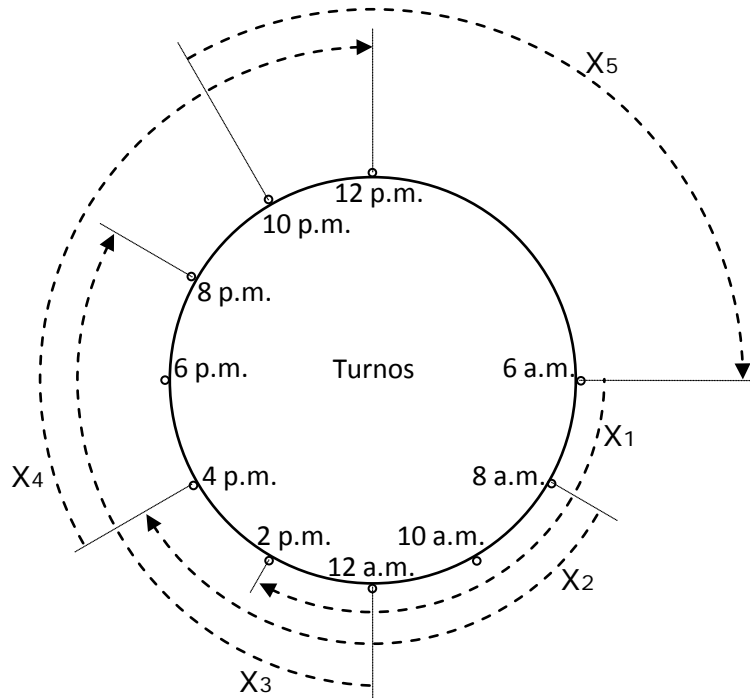
Tabla 1.16 Demanda de monitores, turnos permitidos y costo diario.

Periodo	Periodos cubiertos					Número Mínimo de monitores
	Turnos					
	1 6 a.m.-2 p.m.	2 8 a.m.-4 p.m.	3 12 a.m.-8 p.m.	4 4 p.m.-12 p.m.	5 10 p.m.-6 a.m.	
6 a.m. - 8 a.m.	✓					48
8 a.m. - 10 a.m.	✓	✓				79
10 a.m. - 12 a.m.	✓	✓				65
12 a.m. - 2 p.m.	✓	✓	✓			87
2 p.m. - 4 p.m.		✓	✓			64
4 p.m. - 6 p.m.			✓	✓		73
6 p.m. - 8 p.m.			✓	✓		82
8 p.m. - 10 p.m.				✓		43
10 p.m. - 12 p.m.				✓	✓	52
12 p.m. - 6 a.m.					✓	15
Costo diario por monitor	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195	

Las marcas en el cuerpo interno de la tabla 1.16 muestran las horas cubiertas por los turnos respectivos. Como algunos turnos son menos deseables que otros, la compensación difiere de un turno a otro. La compensación diaria (incluyendo las prestaciones sociales) se muestra en el último renglón, por

cada monitor para cada turno. El problema consiste en determinar cuántos monitores deben asignarse a los turnos respectivos, cada día, para minimizar el costo total de los monitores, al mismo tiempo que se cumplen los requisitos de servicio dados en la columna de la derecha de la tabla 1.16

Figura 1.26 Reloj de 24 horas con los 5 turnos y los 10 periodos de demanda.



Fuente: El autor.

X_j = Número monitores a asignar al turno j -ésimo ($j=1$: Turno de 6 a.m. a 2 p.m.; $j=2$: Turno de 8 a.m. a 4 p.m.; $j=3$: Turno de 12 a.m. a 8 p.m.; $j=4$: Turno de 4 p.m. a 12 p.m.; $j=5$: Turno de 10 p.m. a 6 a.m.).

Minimizar $Z = 170X_1 + 160X_2 + 175X_3 + 180X_4 + 195X_5$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll}
 X_1 & & \geq & 48 \\
 X_1 + X_2 & & \geq & 79 \\
 X_1 + X_2 & & \geq & 65 \quad \text{Restricción redundante.} \\
 X_1 + X_2 + X_3 & & \geq & 87 \\
 X_2 + X_3 & & \geq & 64 \\
 X_3 + X_4 & & \geq & 73 \quad \text{Restricción redundante.} \\
 X_3 + X_4 & & \geq & 82 \\
 X_4 & & \geq & 43 \\
 X_4 + X_5 & & \geq & 52 \\
 X_5 & & \geq & 15
 \end{array}$$

$X_j \geq 0$; $J = 1, 2, 3, 4, 5$ y X_j debe ser una variable entera.

Fíjese que hay 10 restricciones, una por cada periodo de demanda y que existen 2 restricciones redundantes, las cuales se pueden eliminar.

Usando el WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = 48$$

$$X_4^* = 43$$

$$X_2^* = 31$$

$$X_5^* = 15$$

$$X_3^* = 39$$

$$Z^* = \$30.610$$

Se deben contratar:

48 monitores para el turno 1: De 6 a.m. a 2 p.m.

31 monitores para el turno 2: De 8 a.m. a 4 p.m.

39 monitores para el turno 3: De 12 a.m. a 8 p.m.

43 monitores para el turno 4: De 4 p.m. a 12 p.m.

15 monitores para el turno 5: De 10 p.m. a 6 a.m.

Para incurrir en un costo mínimo de \$30.610

Ejemplo 1.17 Problema de reducción de la contaminación.

Hay tres fábricas a la orilla del río Combeima (1, 2, 3). Cada una vierte dos tipos de contaminante (1, 2) al río. Si se procesan los desechos de cada una de las fábricas, entonces, se reduciría la contaminación del río. Cuesta \$30.000 procesar una tonelada de desecho de la fábrica 1 y cada tonelada procesada reduce la cantidad de contaminante 1 en 0,1 tonelada y la cantidad de contaminante 2 en 0,45 toneladas. Cuesta \$20.000 procesar una tonelada de desecho de la fábrica 2 y cada tonelada procesada reduce la cantidad del contaminante 1 en 0,2 toneladas y la cantidad de contaminante 2 en 0,25 toneladas. Cuesta \$40.000 procesar una tonelada de desecho de la fábrica 3 y cada tonelada procesada reduce la cantidad del contaminante 1 en 0,4 toneladas y la cantidad de contaminante 2 en 0,3 toneladas. La Alcaldía de Ibagué, desea reducir la cantidad del contaminante 1 por lo menos en 30 toneladas y la cantidad de contaminante 2 en por lo menos 40 toneladas. ¿Cuántas toneladas se deben procesar en cada fábrica para disminuir la contaminación en las cantidades deseadas, a un costo mínimo?

En la tabla 1.17 se presenta un resumen de los datos relevantes del problema.

Tabla 1.17 Datos relevantes del problema.

Fábricas	Contaminantes (ton. de contaminante/ton. de desecho)		Costo (\$/ton.)
	1	2	
1	0,10	0,45	30.000
2	0,20	0,25	20.000
3	0,40	0,30	40.000
Requerimiento (ton.)	30	40	

X_j = Toneladas de desecho a procesar en la fábrica j-ésima ($j=1$: Fábrica 1, $j=2$: Fábrica 2, $j=3$: Fábrica 3).

$$\text{Minimizar } Z = 30.000X_1 + 20.000X_2 + 40.000X_3$$

Con las siguientes restricciones:

$0,10X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 \geq 30$ Restricciones debidas al requerimiento mínimo de
 $0,45X_1 + 0,25X_2 + 0,30X_3 \geq 40$ reducción de los contaminantes 1 y 2 respectivamente.

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Empleando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = 7,6923 \quad X_2^* = 146,1538 \quad X_3^* = 0 \quad Z^* = \$3'153.846$$

Para lograr un costo total mínimo de \$3'153.846 se deben procesar 7,6923 toneladas de desechos en la fábrica 1 y 146,1538 toneladas de desecho en la fábrica 2, cumpliendo con los topes mínimos deseados de eliminación de los contaminantes 1 y 2

Ejemplo 1.18 Problema del cargue

Se está cargando una tractomula (tractocamión) con 4 clases de artículos. La tractomula tiene una capacidad de 30 toneladas y un volumen disponible de 2.400 pies cúbicos, cada clase de artículo tiene un valor unitario. El objetivo consiste en maximizar el valor total de la mercancía cargada en la tractomula. Los datos del peso y volumen por unidad de artículo y su valor unitario se dan en la tabla 1.18

Tabla 1.18 Peso, volumen y Valor por unidad de cada tipo de artículo.

Artículo	Peso (Toneladas/Unidad)	Volumen (pies ³ /Unidad)	Valor (\$/Unidad)
1	0,02	2	4
2	0,03	1	6
3	0,04	4	8
4	0,05	3	9

Solución:

X_j = Unidades a cargar del artículo j-ésimo ($j=1, 2, 3, 4$)

$$\text{Maximizar } Z = 4X_1 + 6X_2 + 8X_3 + 9X_4$$

Con las siguientes restricciones:

$0,02X_1 + 0,03X_2 + 0,04X_3 + 0,05X_4 \leq 30$ Restricciones debidas al peso y
 $2X_1 + X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 2.400$ volumen disponible, respectivamente.
 $X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$ y X_j Enteros

Usando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = 0 \quad X_2^* = 300 \quad X_3^* = 525 \quad X_4^* = 0 \quad Z^* = \$6.000$$

Para lograr el valor máximo de la mercancía cargada de \$6.000 hay que cargar 300 unidades del producto 2 y 525 del producto 3.

Nota: Fíjese que el software WinQsb informa que el problema tiene múltiples soluciones.

Ejemplo 1.19 Problema de los textiles.

Una pequeña empresa textilera produce tres tipos de tela (1, 2, 3), para las cuales se dispone de los datos siguientes:

Tabla 1.19 Datos de los tres tipos de tela.

	Tela 1	Tela 2	Tela 3
Precio de venta (\$/metro)	2.700	2.500	3.300
Costo de la hilaza (\$/metro)	1.500	1.000	2.000
Químicos y otros (\$/metro)	300	700	100
Demanda esperada (metros)	1.600	3.000	1.400
Consumo de hilaza (kilos/metro)	0,30	0,20	0,40
Consumo de tiempo (horas/metro)	0,25	0,15	0,20
Costos fijos (\$/periodo)	1'000.000		
Capacidad de producción (horas/periodo)	1.200		

La empresa textilera tiene un cupo con su proveedor nacional de 1.000 kilos de hilaza por periodo a un precio de \$5.000/kilo.

- ¿Cuántos metros de cada tipo de tela se deben producir, para maximizar la utilidad?
- La empresa puede comprar hilaza importada a \$6.000 el kilo. ¿Compraría usted la hilaza importada? ¿Cuántos kilos compraría? ¿Cuál es la nueva producción?
- Suponga que el cupo por periodo con el proveedor nacional se incrementó en 1.000 kilos y además recibe un pedido adicional de otra ciudad de 2.000 metros de tela 3, pero deben ser vendidas al mismo precio (\$3.300/metro), además, se debe asumir el costo adicional de transporte, que asciende a \$300 por metro. ¿Aceptaría usted el pedido completo, parcial o no aceptaría? ¿Cuál será la nueva mezcla de producción?

Solución:

- a) ¿Cuántos metros de cada tipo de tela se deben producir, para maximizar la utilidad?

Utilidad por metro de tela = Precio de venta por metro – Costo por metro

Utilidad por metro de Tela 1 = $2.700 - (1.500 + 300) = \$ 900/\text{metro}$.

Utilidad por metro de Tela 2 = $2.500 - (1.000 + 700) = \$ 800/\text{metro}$.

Utilidad por metro de Tela 3 = $3.300 - (2.000 + 100) = \$ 1.200/\text{metro}$.

X_j = Metros de tela a producir por periodo del tipo j-ésimo ($j=1, 2, 3$).

Maximizar $Z = 900X_1 + 800X_2 + 1.200X_3 - 1'000.000$

Nota: Recuerde que inicialmente se debe ignorar la constante en la función objetivo (1'000.000). Después de optimizar restarlo al valor máximo de Z.

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} X_1 & & \leq 1.600 & \text{Restricciones debidas a la demanda esperada} \\ & X_2 & \leq 3.000 & \text{de las telas 1, 2, 3 respectivamente.} \\ & & X_3 \leq 1.400 & \\ 0,30X_1 + 0,20X_2 + 0,4X_3 & \leq & 1.000 & \text{Restricción debida a la disponibilidad de hilaza.} \\ 0,25X_1 + 0,15X_2 + 0,2X_3 & \leq & 1.200 & \text{Restricción debida al tiempo disponible del telar.} \end{array}$$

$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$

Empleando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$X_1^* = 0 \qquad X_2^* = 3.000 \qquad X_3^* = 1.000 \qquad Z^* = \$3'600.000$$

En el periodo se deben producir 3.000 metros de tela tipo 2 y 1.000 metros de tela tipo 3 para obtener la utilidad máxima de $(\$3'600.000 - \$1'000.000)$, \$2'600.000

Como no se produce tela tipo 1, queda insatisfecha la demanda de 1.600 metros de tela tipo 1 y como solo se producen 1.000 metros de tela 3, queda insatisfecha la demanda de $(1.400 - 1.000)$ 400 metros de tela 3. Lo anterior lleva a concluir que falta hilaza para producir la cantidad de tela necesaria para cubrir la totalidad de la demanda, lo cual nos lleva a estudiar la propuesta del enciso b) en el que se propone la compra de hilaza importada.

- b) La empresa puede comprar hilaza importada a \$6.000 el kilo. ¿Compraría Usted la hilaza importada? ¿Cuántos kilos compraría? ¿Cuál es la nueva producción?

Costo de la hilaza importada por metro de tela:

Para la tela tipo 1: 0,3 kilos/metro x \$6.000/kilo = \$1.800/metro.

Para la tela tipo 2: 0,2 kilos/metro x \$6.000/kilo = \$1.200/metro.

Para la tela tipo 3: 0,4 kilos/metro x \$6.000/kilo = \$2.400/metro.

Utilidad por metro de tela = Precio de venta por metro – Costo por metro

La utilidad por metro para cada tipo de tela, usando hilaza importada, es:

Utilidad por metro de Tela 1 = 2.700 – (1.800+300) = \$ 600/metro.

Utilidad por metro de Tela 2 = 2.500 – (1.200+700) = \$ 600/metro.

Utilidad por metro de Tela 3 = 3.300 – (2.400+100) = \$ 800/metro.

En la tabla 1.20 se presenta la utilidad por metro de tela dependiendo del tipo de hilaza usado.

Tabla 1.20 Utilidad por metro, según el tipo de hilaza (\$/metro)

Tipo de tela	Hilaza Nacional	Hilaza Importada
1	900	600
2	800	600
3	1.200	800

X_{ij} = Metros de tela a producir y vender del tipo i-ésimo (i=1: Tela 1, i=2: Tela 2, i=3: Tela 3) con el tipo de hilaza j-ésimo (j=1: Hilaza nacional, j=2: Hilaza importada).

Maximizar $Z = 900X_{11} + 600X_{12} + 800X_{21} + 600X_{22} + 1.200X_{31} + 800X_{32} - 1'000.000$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
 X_{11} + X_{12} &\leq 1.600 \\
 X_{21} + X_{22} &\leq 3.000 \\
 X_{31} + X_{32} &\leq 1.400 \\
 0,30X_{11} + 0,20X_{21} + 0,4X_{31} &\leq 1.000 \\
 0,25X_{11} + 0,25X_{12} + 0,15X_{21} + 0,15X_{22} + 0,2X_{31} + 0,2X_{32} &\leq 1.200
 \end{aligned}$$

$X_{ij} \geq 0$ para i=1, 2 y j=1, 2

Empleando el software WinQsb, la solución óptima, es:

$$\begin{array}{llll}
 X_{11}^* = 0 & X_{21}^* = 3.000 & X_{31}^* = 1.000 & Z^* = \$4'880.000 \\
 X_{12}^* = 1.600 & X_{22}^* = 0 & X_{32}^* = 400 & \text{Soluciones alternas}
 \end{array}$$

Para obtener la utilidad máxima de (\$4'880.000-\$1'000.000) \$3'880.000 se debe producir 1.600 metros de tela 1, toda con hilaza importada. 3.000 metros

de tela 2, toda con hilaza nacional. 1.400 metros de tela 3, discriminada en 1.000 metros con hilaza nacional y 400 metros con hilaza importada. Para hacer lo anterior se hace necesario comprar $(0,3 \text{ kilos/metro} \times 1.600 \text{ metros} + 0,4 \text{ kilos/metro} \times 400 \text{ metros})$ 640 kilos de hilaza importada. Comprando la hilaza importada, la utilidad aumenta de \$2'600.000 a \$3'880.000 con un incremento de \$1'280.000, con el beneficio adicional de satisfacer la totalidad de la demanda esperada.

- c) Suponga que el cupo por periodo con el proveedor se incrementó en 1.000 kilos y además recibe un pedido adicional de otra ciudad de 2.000 metros de tela 3, pero deben ser vendidas al mismo precio (\$3.300/metro), además, se debe asumir el costo adicional de transporte, que asciende a \$300 por metro. ¿Aceptaría usted el pedido completo, parcial o no aceptaría? ¿Cuál será la nueva mezcla de producción?

Para este inciso se consideran dos situaciones: Sin importar hilaza e importando hilaza.

Primera consideración: Sin importar hilaza.

Utilidad por metro de tela 3 con destino a otra ciudad.

$$\$3.300 - (\$2.000 + \$100 + \$300) = \$900/\text{metro}.$$

X_j = Metros de tela a producir por periodo del tipo j-ésimo ($j=1$: Tela 1, $j=2$: Tela 2, $j=3$: Tela 3, $j=4$: Tela 3 para otra ciudad)

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{ll} X_1 & \leq 1.600 \text{ Restricciones debidas a la demanda} \\ X_2 & \leq 3.000 \text{ de las telas tipo 1, 2, 3 y 4} \\ X_3 & \leq 1.400 \text{ respectivamente.} \\ X_4 & \leq 2.000 \end{array}$$

$$0,30X_1 + 0,20X_2 + 0,4X_3 + 0,4X_4 \leq 2.000 \text{ Debida a la disponibilidad de hilaza.}$$

$$0,25X_1 + 0,15X_2 + 0,2X_3 + 0,2X_4 \leq 1.200 \text{ Debida al tiempo disponible del telar.}$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Empleado el software WinQsb la solución óptima es:

$$\begin{array}{lll} X_1^* = 500 & X_3^* = 1.400 & Z^* = \$6'082.500 \\ X_2^* = 500 & X_4^* = 1.725 & \end{array}$$

Para obtener una utilidad máxima de $(\$6'082.500 - \$1'000.000)$ \$5'082.500 se deben producir y vender 500 metros de tela 1 dejando insatisfecha una demanda de $(1.600 - 500)$ 1.100 metros de éste tipo de tela. Del tipo de tela 2, se deben producir y vender 3.000 metros, cubriendo la totalidad de la demanda esperada. Del tipo de tela 3 se deben producir 1.400 metros,

cubriendo la totalidad de la demanda esperada. Del tipo de tela 3 para otra ciudad, se deben producir 1.725 metros, dejando una demanda insatisfecha de $(2.000 - 1.725)$ 275 metros. Lo anterior concluye que el nuevo pedido se debe tomar de forma parcial (1.725 metros de los 2.000 metros solicitados).

Segunda consideración: Importando hilaza.

Utilidad por metro de tela 3 para otra ciudad usando hilaza importada.

$$3.300 - (2.400 + 100 + 300) = \$500$$

X_{ij}: Metros de tela a producir y vender del tipo i-ésimo (i=1: Tela 1, i=2: Tela 2, i=3: Tela 3, i=4: Tela 3 para otra ciudad) con el tipo de hilaza j-ésima (j=1: Hilaza nacional, j=2: Hilaza importada).

$$\text{Maximizar } Z = 900X_{11} + 600X_{12} + 800X_{21} + 600X_{22} + 1.200X_{31} + 800X_{32} + 900X_{41} + 500X_{42} - 1'000.000$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} X_{11} + & X_{12} & & \leq 1.600 \\ & & X_{21} + & X_{22} & \leq 3.000 \\ & & & & X_{31} + & X_{32} & \leq 1.400 \\ & & & & & & X_{41} + & X_{42} & \leq 2.000 \\ 0,30X_{11} & & + 0,20X_{21} & & + 0,4X_{31} & & + 0,4X_{41} & & \leq 2.000 \\ 0,25X_{11} + 0,25X_{12} + 0,15X_{21} + 0,15X_{22} + 0,2X_{31} + 0,2X_{32} + 0,2X_{41} + 0,2X_{42} & & & & & & & & \leq 1.200 \end{array}$$

$$X_{ij} \geq 0; i=1, 2, 3, 4; j=1, 2$$

Empleando el software WinQsb, la solución óptima es:

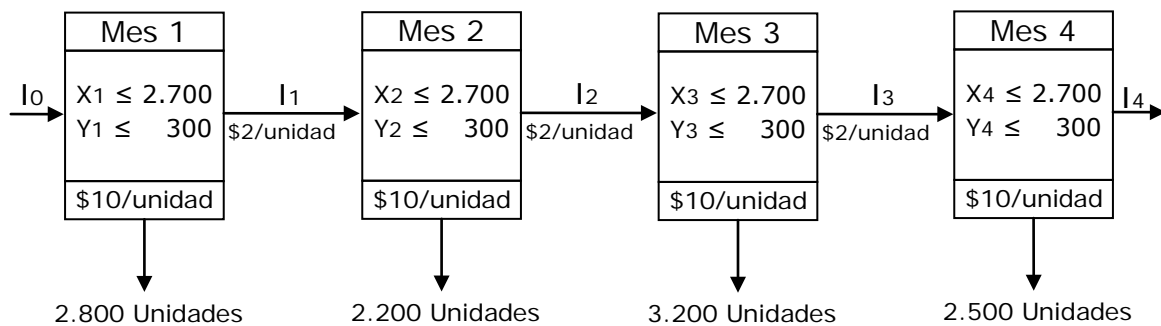
$$\begin{array}{lllll} X_{11}^* = 133,33 & X_{21}^* = 3.000 & X_{31}^* = 1.400 & X_{41}^* = 2.000 & Z^* = \$6'088.000 \\ X_{12}^* = 146,66 & X_{22}^* = 0 & X_{32}^* = 0 & X_{42}^* = 0 & \end{array}$$

Para obtener una utilidad máxima de $(\$6'088.000 - \$1'000.000)$ \$5'088.000 se debe producir 280 metros de tela 1 discriminada en 133,33 metros de tela 1 con hilaza nacional y 146,6 metros de tela 1 con hilaza importada, quedando una demanda insatisfecha de $(1.600 - 280)$ 1.320 metros de tela 1. De tela tipo 2 se debe producir 3.000 metros, todos con hilaza nacional, quedando satisfecha la demanda esperada. De tela tipo 3 se deben producir 1.400 metros, todos con hilaza nacional, quedando satisfecha la demanda esperada. De tela tipo 3 para atender el pedido de otra ciudad, se deben producir 2.000 metros de tela con hilaza nacional, quedando la demanda satisfecha. Luego, se deben comprar $(0,3 \times 146,6)$ 44 kilos de hilaza importada a un costo de $(44 \times \$6.000)$ \$264.000. Se debe tomar todo el pedido de tela 3 para otra ciudad.

Ejemplo 1.20 Problema de inventarios.

Un producto de la firma kaidehc tiene la siguiente demanda pronosticada para los cuatro primeros meses del siguiente año: enero: 2.800 unidades, febrero: 2.200 unidades, marzo: 3.200 unidades y abril: 2.500 unidades. La compañía puede producir 2.700 unidades del artículo por mes en sus turnos normales. Utilizando tiempo extra es posible fabricar 300 unidades adicionales. La producción en tiempo extra tiene un sobrecosto de \$10 por unidad. La administración ha estimado que se incurre en un costo de almacenamiento de \$2 por unidad que se produzca en un mes determinado y no se venda en el mismo. Se quiere determinar un programa óptimo de producción que minimice los costos totales de producción y almacenamiento. Supóngase que la cantidad en existencia es cero y se desea un inventario final del periodo igual a cero.

Figura 1.27 Ilustración del problema 1.20 problema de inventarios.



Fuente: El autor.

X_i : Unidades a producir en el mes i -ésimo ($i=1, 2, 3, 4$) en tiempo normal.

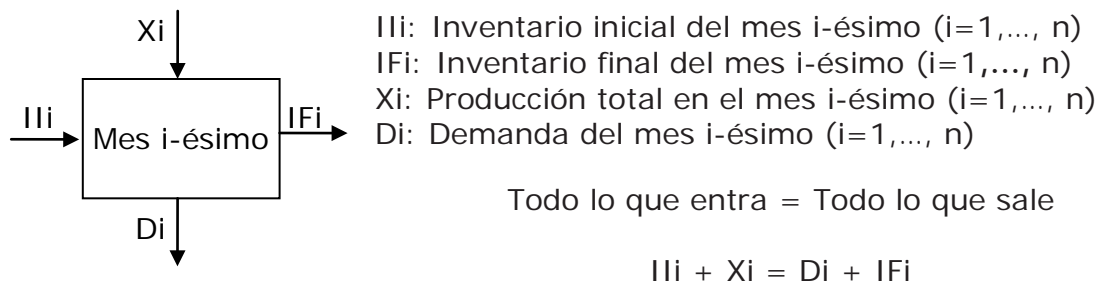
Y_i : Unidades a producir en el mes i -ésimo ($i=1, 2, 3, 4$) en tiempo extra.

I_i : Unidades a almacenar al final del mes i -ésimo.

$$\text{Minimizar } Z = 10Y_1 + 10Y_2 + 10Y_3 + 10Y_4 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3$$

En la figura 1.28 se ilustra la ecuación general de balance de los inventarios.

Figura 1.28 Ecuación de balance.



Fuente: El autor.

Con las siguientes restricciones:

$X_1 + Y_1 = 2.800 + I_1$ Ecuación de balance para el mes 1 en donde $I_0 = 0$
 $I_1 + X_2 + Y_2 = 2.200 + I_2$ Ecuación de balance para el mes 2
 $I_2 + X_3 + Y_3 = 3.200 + I_3$ Ecuación de balance para el mes 3
 $I_3 + X_4 + Y_4 = 2.500$ Ecuación de balance para el mes 4 en donde $I_4 = 0$
 $X_i \leq 2.700$ para $i = 1, 2, 3, 4$
 $Y_i \leq 300$ para $i = 1, 2, 3, 4$
 $X_i \geq 0; Y_i \geq 0; I_i \geq 0$; para $i = 1, 2, 3, 4$

Empleando el software WinQsb, la solución óptima es:

$X_1^* = 2.700$ $X_3^* = 2.700$ $Y_1^* = 100$ $Y_3^* = 0$ $I_1^* = 0$ $I_3^* = 0$
 $X_2^* = 2.700$ $X_4^* = 2.500$ $Y_2^* = 0$ $Y_4^* = 0$ $I_2^* = 500$ $Z^* = 2.000$

Durante el mes de enero se deben producir 2.700 unidades en tiempo normal y 100 unidades en tiempo extra, para cubrir la demanda de 2.800 unidades, llegando sin inventario inicial al mes de febrero. Durante el mes de febrero se deben producir 2.700 unidades en tiempo normal para atender una demanda de 2.200 unidades y llegar con un inventario inicial al mes de marzo de 500 unidades. Durante el mes de marzo se deben producir 2.700 unidades en tiempo normal, que junto con el inventario inicial de 500 unidades cubre la demanda de 3.200 unidades y se llega al mes de abril sin inventario inicial. Durante el mes de abril se deben producir 2.500 unidades para cubrir la demanda de 2.500 unidades y quedar sin inventario final en el periodo.

Ejemplo 1.21 Problema de los manteles.

Una empresa organizadora de eventos, tiene programados banquetes durante los siguientes cinco (5) días. Los requisitos de manteles por banquete son:

Tabla 1.21 Necesidad de manteles por banquete

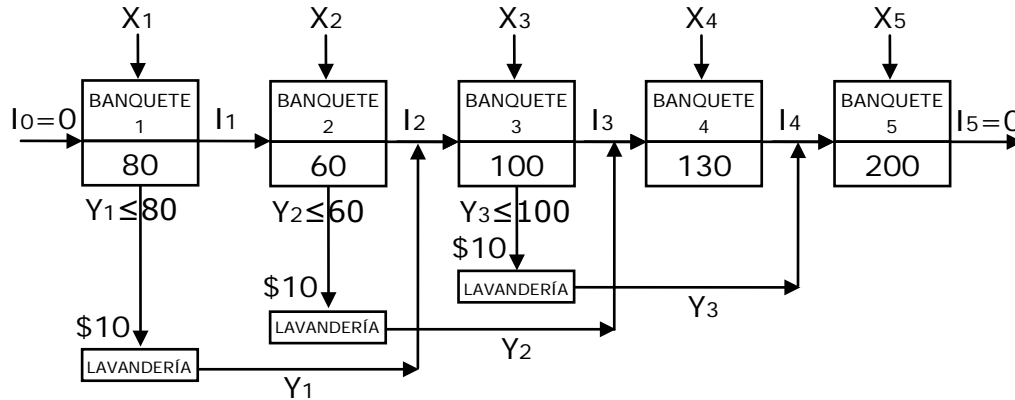
Banquete	1	2	3	4	5
Número de manteles	80	60	100	130	200

El problema del administrador de la empresa es que se necesitan manteles diferentes a los que comúnmente se vienen usando, por lo que, tendrá que comprar los manteles del tipo requerido. El costo por mantel es de \$40 y el costo de mandarlo a la lavandería bajo servicio urgente para tenerlo listo a los dos (2) días es de \$10 por mantel. ¿Cuál es el modelo que le permitirá al administrador cumplir con los requerimientos y además minimizar el costo total?

En la gráfica 1.22 se ilustra el problema 1.21 de acuerdo a las demandas de manteles limpios para cada banquete y a las condiciones y costos de la lavandería. Fijese que para el primer banquete, no se cuenta con manteles y que al final del último banquete debemos disponer de cero manteles limpios, si queremos minimizar los costos totales generados por la compra y servicio de lavandería.

X_i : Número de manteles a comprar para el banquete i -ésimo ($i=1, \dots, 5$).
 Y_i : Número de manteles a enviar a la lavandería después del banquete i -ésimo ($i=1, \dots, 5$).
 I_i : Número de manteles limpios al final del banquete i -ésimo ($i=1, \dots, 4$)

Gráfica 1.22 Ilustración del problema 1.21



Fuente: El autor.

$$\text{Minimizar } Z = 40(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) + 10(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcl} X_1 - I_1 & = & 80 \\ I_1 + X_2 - I_2 & = & 60 \\ I_2 + Y_1 + X_3 - I_3 & = & 100 \\ I_3 + Y_2 + X_4 - I_4 & = & 130 \\ I_4 + Y_3 + X_5 & = & 200 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de balance correspondientes a los} \\ \text{banquetes 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$Y_1 \leq 80; Y_2 \leq 60; Y_3 \leq 100; I_j, Y_j, X_j \geq 0; \forall j$$

Utilizando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{lllll} X_1^* = 80 & X_2^* = 20 & X_3^* = 100 & Y_1^* = 60 & I_j^* = 0; \forall j=1,2,3,4 \\ X_2^* = 60 & X_4^* = 70 & Y_1^* = 80 & Y_3^* = 100 & Z^* = \$15.600 \end{array}$$

Para lograr el mínimo costo, se deben inicialmente comprar 80 manteles, que una vez usados en el primer banquete, se envían todos a la lavandería. Para el segundo banquete se compran 60 manteles nuevos y se usa todos en el segundo banquete, enviándolos posteriormente a la lavandería. Para el tercer banquete se compra 20 manteles y se recibe 80 manteles limpios de la lavandería, completando los 100 manteles requeridos para atender el tercer banquete, luego del cual, los 100 manteles, son enviados a la lavandería. Para el cuarto banquete se compra 70 manteles nuevos y se recibe de la lavandería 60 manteles para cubrir los 130 manteles que se necesitan para el cuarto banquete. Para el quinto banquete, se compran 100 manteles nuevos y se reciben 100 manteles limpios de la lavandería, para cubrir el requerimiento de 200 manteles para el quinto banquete. Todo lo anterior acumula un costo total mínimo de \$15.600

Fíjese que quedan 330 manteles sucios, cuyo costo de lavado asciende a: $\$10/\text{mantel} \times 330 \text{ manteles} = \3.300 , valor, que finalmente se le agregarían a los $\$15.600$ para un total de $\$18.900$

Ejemplo 1.22 Sistema Operativo de Producción.

Una compañía que fabrica celulares estima la demanda trimestral para el siguiente año en 50.000, 150.000, 200.000 y 52.000 celulares, respectivamente. Conociendo los costos y el pronóstico por trimestre; formule un programa de programación lineal que minimice los costos y satisfaga la demanda. ¿Cuáles son los costos de ese plan?

Tabla 1.23 Costos y capacidad de producción.

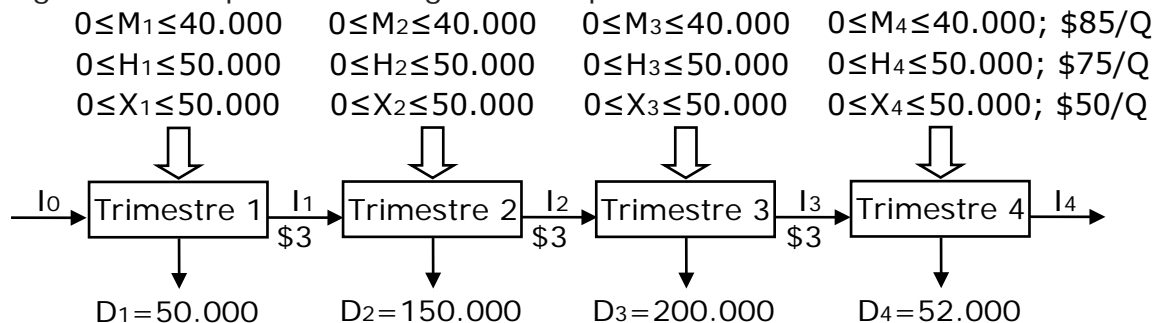
Costo de llevar inventario	\$3 por celular por trimestre
Producción por empleado	1.000 celulares por trimestre
Fuerza de trabajo regular	50 trabajadores por trimestre
Capacidad en horas extras	50.000 celulares por trimestre
Capacidad de subcontratar (maquila)	40.000 celulares por trimestre
Costo de producción regular	\$50 por celular
Costo de producción en horas extras	\$75 por celular
Costo de producción subcontratada	\$85 por celular

Solución

Producción máxima por trimestre con la fuerza de trabajo regular:

$1.000 \text{ celulares/empleado-trimestre} \times 50 \text{ empleados} = 50.000 \text{ celulares/trimestre.}$

Figura 1.29 Representación gráfica del problema 1.22



Fuente: El autor.

X_j : Celulares a fabricar en tiempo regular en el trimestre j -ésimo ($j=1, 2, 3, 4$)

H_j : Celulares a fabricar en horas extras en el trimestre j -ésimo ($j=1, 2, 3, 4$)

M_j : Celulares a fabricar con subcontratos en el trimestre j -ésimo ($j=1, 2, 3, 4$)

I_j : Celulares en inventario al final del trimestre j -ésimo ($j=1, 2, 3, 4$)

Es trivial pensar que I_0 e I_4 deben ser iguales a cero, para minimizar los costos.

$$\text{Minimizar } Z = 50(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 75(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + 85(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + 3(I_1 + I_2 + I_3)$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} X_1 + H_1 + M_1 - I_1 & = & 50.000 \\ I_1 + X_2 + H_2 + M_2 - I_2 & = & 150.000 \\ I_2 + X_3 + H_3 + M_3 - I_3 & = & 200.000 \\ I_3 + X_4 + H_4 + M_4 & = & 52.000 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones de balance} \\ \text{para los trimestre 1, 2, 3, 4,} \\ \text{respectivamente.} \end{array} \right.$$

$X_j \leq 50.000$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Restricción debida a la capacidad de producción en tiempo normal.

$H_j \leq 50.000$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Restricción debida a la capacidad de producción en tiempo extra.

$M_j \leq 40.000$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Restricción debida a la capacidad de producción mediante la subcontratación.

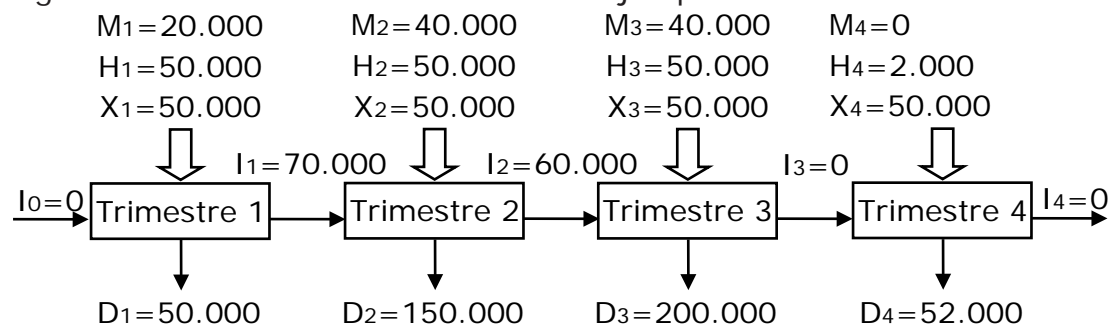
$X_j, H_j, M, I, \geq 0$; Para todo valor de j . Restricciones de no negatividad.

Usando el software WinQsb, la solución óptima es:

$$\begin{array}{l} X_1^* = 50.000 \\ X_2^* = 50.000 \\ X_3^* = 50.000 \\ X_4^* = 50.000 \end{array} \left| \begin{array}{l} H_1^* = 50.000 \\ H_2^* = 50.000 \\ H_3^* = 50.000 \\ H_4^* = 2.000 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} M_1^* = 20.000 \\ M_2^* = 40.000 \\ M_3^* = 40.000 \\ M_4^* = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} I_1^* = 70.000 \\ I_2^* = 60.000 \\ I_3^* = 0 \\ Z^* = \$30'290.000 \end{array} \right.$$

Para minimizar los costos totales de los cuatro trimestres, debemos producir en tiempo normal 50.000 celulares trimestralmente, 50.000 celulares en tiempo extra durante los primeros tres trimestres y 2.000 celulares en tiempo extra durante el cuarto trimestre, se debe subcontratar la producción de 20.000, 40.000 y 40.000 celulares en los trimestres 1, 2 y 3 respectivamente. Lo anterior genera un inventario final de 70.000 y 60.000 celulares durante los trimestres 1 y 2, respectivamente. Lo anterior se muestra en la figura 1.30

Figura 1.20 Ilustración de la solución al ejemplo 1.22



Fuente: El autor.

Con base en la solución se establece la información necesaria para el flujo de caja trimestral. Los costos de producción y de inventarios por trimestre se ilustran en la tabla 1.24

Tabla 1.24 Cálculo de los costos de producción + inventarios

Trimestre	Costos de producción + inventarios	Total (\$)
1	$50(50.000) + 75(50.000) + 85(20.000)$	7'950.000
2	$3(70.000) + 50(50.000) + 75(50.000) + 85(40.000)$	9'860.000
3	$3(60.000) + 50(50.000) + 75(50.000) + 85(40.000)$	9'830.000
4	$50(50.000) + 75(2.000)$	2'650.000
Total costos de producción e inventarios		\$30'290.000

Fíjese en la importancia de la información que aporta el precio sombra. Por cada celular adicional demandado durante el primer trimestre, los costos totales aumentan \$85 siempre y cuando la demanda este entre 30.000 y 70.000 celulares. Por cada celular adicional demandado durante el segundo trimestre, los costos totales aumentan en \$88 siempre y cuando la demanda este entre 130.000 y 170.000 celulares. Por cada celular adicional demandado durante el tercer trimestre, los costos totales aumentan \$91 siempre y cuando la demanda se encuentre entre 180.000 y 220.000 celulares y por cada celular adicional demandado durante el cuarto trimestre, los costos totales se incrementan en \$75 siempre y cuando la demanda este entre 50.000 y 100.000 celulares.

Problemas propuestos

Formule cada uno de los siguientes problemas de programación lineal y resuélvalos usando el software WinQsb o la herramienta solver de Excel.

1.1 Un frutero necesita al menos 16 cajas de naranja, como mínimo 5 cajas de banano y al menos 20 cajas de manzana. Dos mayoristas (A y B) le pueden suministrar sus necesidades, pero solo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranja, una de banano y 2 cajas de manzana. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranja, una de banano y 7 cajas de manzana. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 Km. de distancia y el mayorista B a 300 Km.

- Calcule cuántos contenedores habrá de comprar el frutero a cada mayorista, con el objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia recorrida.
- ¿Cuántas cajas compra de cada tipo de fruta?

Solución:

$X_1^* = 3$ contenedores al mayorista A, $X_2^* = 2$ contenedores al mayorista B, $Z^* = 1.050$ km.
Compra 28 cajas de naranja, 5 cajas de banano y 20 cajas de manzana.

1.2 El municipio de Ibagué tiene tres proyectos de pavimentación de vías denominados P₁, P₂ y P₃ y debe decidir cómo asignar los tres contratistas C₁,

C₂ y C₃ a cada proyecto. Los tres contratistas, participaron en una licitación pública y presentaron diligenciados sus pliegos. El costo de cada proyecto, según la propuesta de cada contratista, se presenta en la tabla 1.25 en millones de pesos. Para evitar descuentos de tipo político, se desea adjudicar un contrato a cada contratista. ¿Cómo deben ser asignados los contratistas si se quiere minimizar los costos totales de los tres proyectos?

Tabla 1.25 Tabla de costos por proyecto y por contratista.

Contratistas	Proyectos		
	P ₁	P ₂	P ₃
C ₁	28	32	36
C ₂	36	28	30
C ₃	38	34	40

Formule éste problema como un modelo de programación lineal binaria y resuélvalo empleando el software WinQsb.

Solución: Asignar al contratista C₁ el proyecto P₁, asignar al contratista C₂ el proyecto P₃, asignar al contratista C₃ el proyecto P₂, costo total mínimo \$92'000.000

1.3 Una cadena de almacenes dispone de \$1'500.000 para asignarlo a la compra de tres productos (1, 2, 3), que requieren para su almacenaje de 30, 3 y 15 pies cúbicos por unidad, respectivamente. Hay disponibles 300.000 pies cúbicos de bodega. El producto 1 cuesta \$12 por unidad, el producto 2 cuesta \$4,50 por unidad y el producto 3 cuesta \$15 por unidad. ¿Qué cantidad debe adquirirse de cada producto si los precios de venta por unidad de los productos 1, 2 y 3 son respectivamente \$15, \$6 y \$21?

Solución: Comprando solamente 100.000 unidades del producto 2, se logra una utilidad operacional máxima de \$150.000. Por cada pie cúbico adicional de bodega disponible, la utilidad se incrementa en 50 centavos, siempre y cuando el volumen de la bodega sea menor o igual a 1'000.000 de pies cúbicos.

1.4 Una compañía tiene dos fábricas, una en Manizales y otra en Bucaramanga. Las dos fábricas producen neveras y lavadoras. La capacidad instalada mensual en la fábrica de Manizales es de 6.000 neveras y 8.000 lavadoras y en Bucaramanga es de 9.000 neveras y 5.000 lavadoras. La compañía distribuye estos productos a tres distribuidores ubicados en las ciudades de Bogotá, Cali y Barranquilla, siendo las demandas las mostradas en la tabla 1.26. El transporte se hace por ferrocarril y la tabla 1.27 muestra los costos unitarios de transporte y las limitaciones para enviar cualquiera de los dos productos de cada fábrica a cada mayorista.

a. ¿Cuántas unidades de cada tipo de producto se deben enviar desde cada fábrica a cada distribuidor para minimizar los costos totales de transporte?

- b. De acuerdo al precio sombra, ¿qué estrategia de manejo de los recursos propone para disminuir el total de los costos obtenidos en el inciso a?

Tabla 1.26 Demanda por mayorista y producto.

Demanda / Mayorista	Bogotá	Cali	Barranquilla
Nevera	4.000	5.000	4.000
Lavadora	3.000	3.000	4.000

Tabla 1.27 Costos unitarios de transporte y limitaciones de envío.

		Bogotá	Cali	Barranquilla
Manizales	Costo unitario	6	14	7
	Máximo de unidades	6.000	3.000	7.500
Bucaramanga	Costo unitario	10	8	15
	Máximo de unidades	3.000	9.000	3.000

Solución:

- a. El costo total mínimo es de \$172.000

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} X_{11}^* = 2.500 & X_{21}^* = 1.500 & Y_{11}^* = 3.000 & Y_{21}^* = 0 & Z^* = \$172.000 \\ X_{12}^* = 0 & X_{22}^* = 5.000 & Y_{12}^* = 0 & Y_{22}^* = 3.000 & \\ X_{13}^* = 3.500 & X_{23}^* = 500 & Y_{13}^* = 4.000 & Y_{23}^* = 0 & \end{array}$$

Desde Manizales se deben enviar: 2.500 neveras a Bogotá y 3.500 neveras a Barranquilla, 3.000 lavadoras a Bogotá y 4.000 lavadoras a Barranquilla.

Desde Bucaramanga se deben enviar: 1.500 neveras a Bogotá, 5.000 neveras a Cali, 500 neveras a Barranquilla y 3.000 lavadoras a Cali.

- b. Se debe incrementar la disponibilidad de neveras en la fábrica de Manizales a 7.000 unidades y la capacidad de transporte de Manizales a Barranquilla a 8.000 unidades, lo cual producirá que los costos totales disminuyan a \$166.000

1.5 Un inversionista cuenta actualmente con \$200'000.000 los cuales manejará durante seis años, buscando obtener el máximo de efectivo al final del sexto año para realizar una inversión mayor, previamente determinada. Durante ese periodo de seis años, el inversionista tiene las siguientes alternativas de inversión: Las alternativas **A**, **B** y **C** están disponibles al principio de cada año. Cada peso invertido en **A** produce \$1,20 un año después (utilidad de \$0,20). Cada peso invertido en la alternativa de inversión **B** produce \$1,60 dos años después. Cada peso invertido en **C** produce \$2,10 tres años después. Las alternativas **D** y **E** están disponibles desde el principio del tercer y cuarto año respectivamente y producen \$3,20 y \$4,10 cada una, tres años después. ¿Cuál es el plan de inversión que maximiza la cantidad disponible de dinero al principio del séptimo año?

Solución: Invertir \$200'000.000 en la alternativa **C** al principio del primer año, para recibir al final del tercer año \$420'000.000 los cuales debe reinvertir de inmediato en la alternativa **E** al principio del cuarto año, para recibir al final del año seis, la suma total máxima de \$1.722'000.000

1.6 Una compañía multinacional tiene dos fábricas, una en Ibagué y otra en Pasto, que ensamblan televisores y computadores, desde los cuales abastece tres almacenes de distribución ubicados en Cali, Medellín y Cúcuta. Los costos de transporte de una unidad de cualquiera de los dos productos desde cada fábrica a cada almacén se dan en la tabla 1.28

Tabla 1.28 Costos unitarios de transporte de cualesquiera de los dos productos

Fábricas	Cali	Medellín	Cúcuta
Ibagué	4	6	15
Pasto	10	15	25

Los precios de venta por unidad de cada producto en cada almacén distribuidor se muestran en la tabla 1.29

Tabla 1.29 Precio de venta unitario, por producto y almacén distribuidor.

Producto	Cali	Medellín	Cúcuta
Televisor	500.000	550.000	600.000
computador	800.000	900.000	1'000.000

El tiempo, expresado en minutos, que se tarda en ensamblar un televisor o un computador en cada una de las fábricas, se muestra en la tabla 1.30

Tabla 1.30 tiempo de fabricación, en minutos, por tipo de producto y fabrica.

Fábricas	Duración de fabricación (minutos)	
	Televisor	Computador
Ibagué	10	15
Pasto	12	10

Los costos unitarios de ensamble de cada producto en cada fábrica, se muestran en la tabla 1.31

Tabla 1.31 Costos de ensamble por unidad y producto

Fábricas	Costos por unidad (\$/unidad)	
	Televisor	Computador
Ibagué	60.000	30.000
Pasto	50.000	40.000

En la fábrica de Ibagué, se trabajan 8 horas efectivas por día durante 24 días al mes y en la fábrica de Pasto se trabajan 8 horas efectivas por día durante 20 días al mes. Las demandas mínimas de televisores y computadores en cada almacén distribuidor, deben ser satisfechas y se ilustran en la tabla 1.32

Tabla 1.32 Demanda mensual de televisores y computadores por distribuidor

Productos	Demanda mensual (unidades)		
	Cali	Medellín	Cúcuta
Televisor	600	800	500
Computador	700	500	900

Elabore un modelo de programación lineal que proporcione el mejor programa de producción y distribución para maximizar el beneficio neto.

Solución:

$$\begin{array}{|l|l|l|} X_{13}^* = 492 & Y_{22}^* = 500 & Z^* = \$1.564'047.000 \\ Y_{13}^* = 440 & Y_{23}^* = 460 & \end{array}$$

1.7 Una compañía tiene dos minas. La mina A produce diariamente una tonelada de carbón de antracita de alta calidad (poco contaminante y de alto poder calorífico), dos toneladas de carbón de calidad media y cuatro toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce dos toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita al menos 70 toneladas de carbón de alta calidad (antracita), 130 toneladas de carbón de calidad media y 150 toneladas de carbón de baja calidad. Los gastos diarios son de 150 dólares en la mina A y 200 dólares en la mina B. ¿Cuántos días se deberán trabajar en cada mina para que los costos sean mínimos?

Solución: Se debe trabajar en la mina A 60 días y en la mina B 5 días, para incurrir en un costo total mínimo de 10.000 dólares.

1.8 Supongamos que las necesidades mínimas semanales de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente: 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima, mezclando dos alimentos A y B, cuyos contenidos por Kg. son los que se indican en la tabla 1.33:

Tabla 1.33 Contenido en unidades por kilogramo en cada tipo de alimento.

Alimentos	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo (\$/Kg)
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

- a. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de alimento deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo? Solución: Se deben comprar 3 kg del alimento A y 2 kg del alimento B, para tener un costo total mínimo de \$2.600 y cumplir con la dieta.
- b. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de alimento deberán comprarse semanalmente si el precio de A subiera a \$1.000/kilogramo? Solución: Se deben comprar 1 kg del alimento A y 6 kg del alimento B, para tener un costo total mínimo de \$3.400 y cumplir con la dieta.

1.9 En una encuesta realizada por la radio local, se ha detectado que un noticiero deportivo con 20 minutos de noticias deportivas y un minuto de publicidad capta 30.000 radio oyentes, mientras que un programa con noticias políticas, con 10 minutos de noticias políticas y un minuto de publicidad capta 20.000 radio oyentes. Para un determinado periodo, la dirección de la emisora decide dedicar como máximo 80 minutos de noticias y 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada noticiero con el objeto de captar el máximo número de audiencia? Solución: $X_1=2$, $X_2=4$, $Z^*=140.000$

1.10 Una empresa tiene dos fábricas A y B. En ellas elabora un mismo producto, a razón de 500 y 400 unidades por día, respectivamente. El producto debe ser distribuido al día siguiente a tres centros de distribución (1, 2, 3), que requieren, respectivamente, 200, 300 y 400 unidades. Los costos de transportar cada unidad del producto desde cada fábrica a cada distribuidor son los indicados en la tabla 1.34:

Tabla 1.34 Costos de transporte por unidad, disponibilidad y demanda.

Fábricas	D i s t r i b u i d o r e s			Disponibilidad
	1	2	3	
A	50	60	10	500
B	25	40	20	400
Demanda	200	300	400	

¿Cuántas unidades deben ser enviadas desde cada fábrica a cada distribuidor, para que los costos totales del transporte sean mínimos? Solución: $X_{12} = 100$, $X_{13} = 400$, $X_{21} = 200$, $X_{22} = 200$, $Z^* = \$23.000$

1.11 Una compañía tiene dos minas M_1 y M_2 desde las cuales transporta carbón a dos centrales térmicas CT_1 y CT_2 . De la mina 1 salen diariamente 800 toneladas de carbón y de la mina 2, 300 toneladas. De las 1.100 toneladas, 500 tienen que ir a la central térmica 1 y 600 toneladas hasta la central térmica 2. El costo de cada tonelada transportada de la mina 1 a la central térmica 1 es de \$60, el de la mina 1 a la central térmica 2 es de \$80, el de la mina 2 a la central térmica 1 es de \$40 y el de la mina 2 a la central térmica 2 es de \$50. ¿Cuántas toneladas de carbón hay que transportar desde cada mina hasta cada central térmica para que el costo total sea mínimo? Solución: $X_{11} = 500$, $X_{12} = 300$, $X_{21} = 0$, $X_{22} = 300$, $Z^* = \$69.000$

1.12 Una asociación agrícola tolimense tiene dos fincas: La finca 1 tiene 400 hectáreas de tierra utilizables para la siembra y dispone de 500 metros cúbicos de agua, mientras que la finca 2 tiene 900 hectáreas de tierra utilizables para la siembra y dispone de 1.200 metros cúbicos de agua. Los cultivos aconsejados son: Café y plátano. El café consume 3 metros cúbicos de agua por hectárea y tiene un beneficio por hectárea de \$700 y el plátano consume 2 metros cúbicos de agua por hectárea y tiene un beneficio por hectárea de \$500. Se ha establecido una cuota máxima de producción para cada cultivo: 800 hectáreas para el café y 600 hectáreas para el plátano, siendo el porcentaje de terreno cultivado el mismo en cada finca. ¿Cuántas hectáreas

hay que sembrar en cada finca de cada tipo de cosecha para que el beneficio sea máximo? Solución: $X_{11} = 28,2051$, $X_{12} = 207,6923$, $X_{21} = 138,4615$, $X_{22} = 392,3077$, $Z^* = \$416.666,66$

1.13 Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones C_1 y C_2 y quiere transportar 100 toneladas de arena a una obra. Dispone de 6 camiones tipo C_1 con capacidad para 15 toneladas y con un costo de \$4.000 por viaje y de 10 camiones tipo C_2 con una capacidad de 5 toneladas y con un costo de \$3.000 por viaje. ¿Cuál es el número de camiones de cada tipo que debe usar para minimizar los costos de transporte? Solución: $X_1 = 6$ camiones tipo C_1 , $X_2 = 2$ camiones tipo C_2 , $Z^* = \$30.000$

1.14 En un kiosco de prensa se venden bolígrafos a \$20 y cuadernos a \$30. Llevamos \$240 y pretendemos comprar al menos los mismos cuadernos que bolígrafos. ¿Cuál será el número máximo de piezas (bolígrafos + cuadernos) que podemos comprar? Solución: $X_1 = 3$ bolígrafos, $X_2 = 6$ cuadernos, $Z^* = 9$ piezas (Solución entera).

1.15 Una compañía aérea dispone de dos tipos de aviones A_1 y A_2 para cubrir un determinado trayecto. El avión A_1 debe hacer más veces el trayecto que el avión A_2 pero no debe sobrepasarlo en 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer por lo menos 60 vuelos, pero máximo 200 vuelos. En cada vuelo, el avión tipo A_1 consume 900 litros de combustible y el avión tipo A_2 consume 700 litros. En cada viaje del avión tipo A_1 la empresa gana \$30.000 y \$20.000 por cada viaje del avión tipo A_2 .

a. ¿Cuántos viajes debe hacer cada tipo de avión para obtener la máxima ganancia? Solución: $X_1 = 160$ vuelos, $X_2 = 40$ vuelos, $Z^* = \$5'600.000$

b. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada tipo de avión para que el consumo de combustible sea mínimo? Solución: $X_1 = 160$ vuelos, $X_2 = 40$ vuelos, $Z^* = 172.000$ litros.

1.16 Un joyero fabrica dos tipos de anillos. El anillo tipo 1 precisa 1 gramo de oro y 5 gramos de plata, vendiendo la unidad a \$40. Para el anillo tipo 2 emplea 1,5 gramos de oro y 1 gramo de plata y los vende a \$50 la unidad. El joyero dispone en su taller de 750 gramos de cada metal. ¿Cuántos anillos debe fabricar de cada clase para obtener la máxima venta? Solución: $X_1 = 57$, $X_2 = 462$, $Z^* = \$25.380$ (Solución entera).

1.17 Una empresa de bienes raíces, analiza 5 proyectos de desarrollo posibles. La tabla 1.35 muestra las ganancias estimadas a largo plazo (valor presente neto), que generaría cada proyecto y la inversión requerida para emprenderlo en millones de dólares.

Tabla 1.35 Capital requerido y ganancia estimada de los proyectos de desarrollo.

	Proyectos de desarrollo				
	1	2	3	4	5
Capital requerido	6	12	10	4	8
Ganancia estimada	1	1,8	1,6	0,8	1,4

Los propietarios de la empresa, reunieron \$20 millones de capital de inversión para estos proyectos. Ellos quieren elegir la combinación de proyectos que maximice la ganancia total estimada a largo plazo (valor presente neto) sin invertir más de \$20 millones. Formule un modelo de programación lineal entera binaria (PEB) para éste problema y resuélvalo empleando el WinQsb. Solución: $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$, $X_5 = 0$, $Z^* = \$3,4$ millones de dólares. Se eligen los contratos 1, 3 y 4.

1.18 Una empresa metalmecánica fabrica contenedores de varios tamaños. Ha recibido pedidos para producir diversas cantidades de contenedores de cuatro diferentes tamaños. Cada tamaño de contenedor puede producirse en cualquiera de cuatro máquinas. Debido a las distintas tecnologías, el número de horas, incluyendo el tiempo de preparación, necesario para producir cada tamaño de contenedor varía en cada máquina, como se muestra en la tabla 1.36

Tabla 1.36 Tiempo de producción en cada máquina de cada tipo de contenedor.

Tamaño del contenedor	M á q u i n a			
	1	2	3	4
3x5	25	40	28	30
3x6	22	32	25	30
6x8	25	30	28	23
8x10	38	22	26	25

El proceso de acondicionar una máquina para que cambie el tamaño de un contenedor es demorado y costoso, así que la gerencia ha decidido que cada máquina producirá contenedores de un solo tamaño. Como gerente de la empresa, se le ha pedido que implemente un plan de producción que minimice el tiempo de procesamiento total, para satisfacer los pedidos. Solución: El contenedor de 3x5 se debe fabricar en la máquina 1, el contenedor de 3x6 se debe producir en la máquina 3, el contenedor de 6x8 se debe producir en la máquina 4 y el contenedor de 8x10 se debe fabricar en la máquina 2, para obtener un tiempo total mínimo de fabricación de todos los pedidos de 95 horas.

1.19 Se tienen cuatro proyectos con sus respectivos costos durante un periodo de tres años, así, como su utilidad total por el periodo de tres años. Se desea maximizar la utilidad total si se dispone de \$30.000, \$28.000 y \$25.000, en el año 1, 2 y 3 respectivamente.

En la tabla 1.37 se muestra la utilidad total por proyecto, los costos anuales por proyecto y por año, y la disponibilidad de dinero por año, para cubrir los costos.

¿Cuál es el modelo que nos permite maximizar la utilidad total?

Tabla 1.37 Información detallada sobre cada proyecto.

Proyecto	Utilidad total (\$)	Costos (\$)		
		Año 1	Año 2	Año 3
1	95.000	7.000	10.000	5.000
2	50.000	3.000	13.000	7.000
3	130.000	16.000	12.000	16.000
4	100.000	12.000	8.000	15.000
Disponibilidad		30.000	28.000	25.000

Solución: Se debe invertir en los proyectos 1 y 3 para maximizar la utilidad a \$225.000

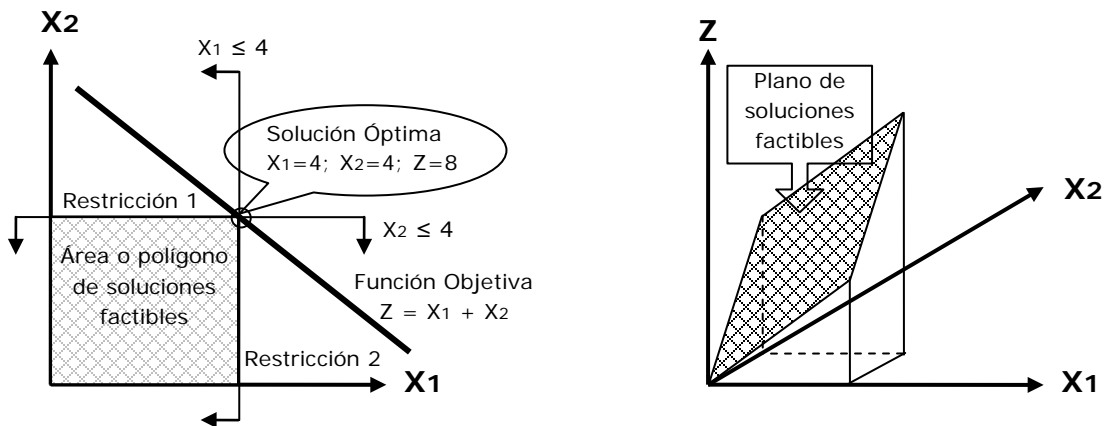
1.20 Una empresa que fabrica un solo producto tiene tres plantas y cuatro clientes. Las tres plantas podrán producir 6, 8 y 4 unidades, respectivamente, durante el siguiente periodo. La empresa se ha comprometido a vender 4 unidades al cliente 1, 6 unidades al cliente 2 y por lo menos 2 unidades al cliente 3. Tanto el cliente 3 como el 4 desean comprar tantas unidades como sea posible de las restantes. La utilidad neta asociada con el embarque de una unidad de la planta i para venderla al cliente j está dada en la tabla 1.38:

Tabla 1.38 Matriz de costos unitarios de transporte.

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Planta 1	6	3	2	4
Planta 2	7	5	4	6
Planta 3	9	8	6	3

El gerente desea saber cuántas unidades debe vender a los clientes 3 y 4, y cuántas unidades conviene mandar de cada planta a cada uno de los clientes, para maximizar las utilidades. Solución: Enviar: 4 unidades desde la planta 1 al cliente 1, 2 unidades desde la planta 1 al cliente 2, 2 unidades desde la planta 2 al cliente 3, 6 unidades desde la planta 2 al cliente 4 y 4 unidades desde la planta 3 al cliente 2, para obtener la máxima utilidad de \$106.

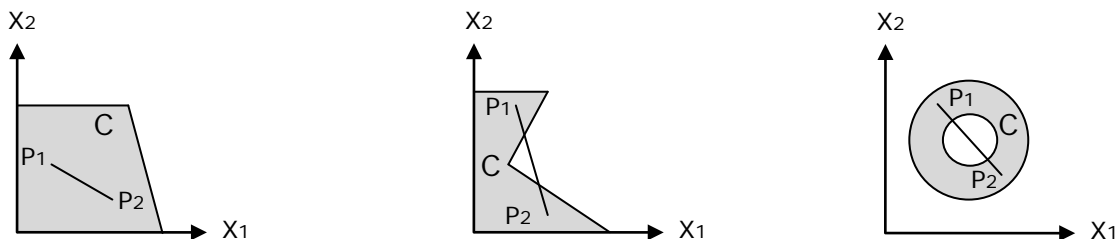
Capítulo 2 Método Gráfico



Este capítulo muestra la solución gráfica a varios tipos de problemas de Programación Lineal, que solamente, tienen dos variables en su formulación.

Conjunto convexo

Un conjunto C es un conjunto convexo, si y solo si, todos los puntos que pertenecen a un segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos que pertenecen a C , se encuentran en C .



a) Conjunto convexo

b) Conjunto no convexo

c) Conjunto no convexo

Gráfica 2.1 Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos.

Ejemplo 2.1 Problema con solución única, con gráfica en dos dimensiones.

Maximizar $Z = 2X_1 + X_2$
C.S.R.

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 &\leq 8 \\ X_1 - X_2 &\leq 3 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 14 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 24 \end{aligned}$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Fíjese que por tener solo dos (2) variables el conjunto de inecuaciones lineales se puede graficar sobre un plano cartesiano X_1 (X), X_2 (Y). La condición de no negatividad ($X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$) intersecta sus áreas de solución sobre el primer cuadrante del plano cartesiano, cuadrante en donde X_1 y X_2 son positivas.

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	4° Restricción
$2X_1 - X_2 \leq 8$	$X_1 - X_2 \leq 3$	$X_1 + 2X_2 \leq 14$	$X_1 + 4X_2 \leq 24$
$2X_1 - X_2 = 8$	$X_1 - X_2 = 3$	$X_1 + 2X_2 = 14$	$X_1 + 4X_2 = 24$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = -8 \mid X_1 = 4$	$X_2 = -3 \mid X_1 = 3$	$X_2 = 7 \mid X_1 = 14$	$X_2 = 6 \mid X_1 = 24$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 24$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad

Restricciones

Para cada inecuación, primero se supone que es una ecuación y luego se tabulan los interceptos, siempre y cuando el término independiente sea diferente de cero.

A continuación, con un punto de prueba cualquiera $P(X_1, X_2)$, que se encuentre al lado derecho o izquierdo de la recta, NO sobre ella, es decir, el punto de prueba NO debe pertenecer a la recta; aquí, como ya sabemos que las rectas no pasan por el origen de coordenadas (término independiente diferente de cero), se usa como punto de prueba $P(0,0)$, que facilita los cálculos cuando se remplaza en la inecuación. Se observa si el punto de prueba, satisface o no la inecuación, convirtiéndola en una verdad o en una falsedad.

Averiguar lo anterior permite conocer si el área solución de la inecuación está al lado izquierdo o derecho de la recta (incluyendo los puntos que pertenecen a la recta); Si el punto de prueba hace verdad la inecuación lineal, entonces, todos los puntos que se encuentran al mismo lado del punto de prueba la hacen verdad, si el punto de prueba no hace verdad la inecuación lineal, los puntos que la hacen verdad están al lado contrario en donde se encuentra el punto de prueba.

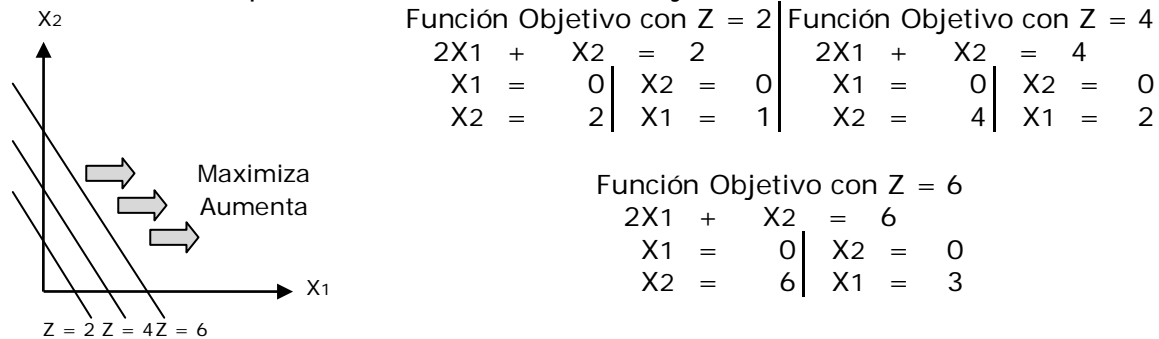
Si el punto de prueba se encuentra al lado izquierdo de la recta y hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para ésta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado izquierdo de ella. Si el punto de prueba situado a la izquierda de la recta, no hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para esta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado derecha de ella.

Función objetivo

La función objetivo $Z = 2X_1 + X_2$ expresada como $2X_1 + X_2 = Z$ tiene la estructura de una línea recta ($aX + bY = c$), solo que no conocemos su término independiente. La gráfica de la función objetivo, con diferentes valores para Z , representa una familia de rectas paralelas, que al aumentar el valor de Z la recta se desplaza hacia el lado derecho, por lo que concluye que Z aumenta cuando la recta se desplaza paralelamente hacia la derecha, esto se cumple siempre que la ecuación de la función objetiva tenga todos sus coeficientes positivos, de lo contrario, se recomienda dar al menos dos valores a Z y

graficar, para observar si al desplazarse a la derecha Z aumenta o por el contrario disminuye. Lo anterior se observa con claridad en la gráfica 2.2

Gráfica 2.2 Comportamiento de la función objetivo.



Fuente: El autor.

Metodología para hacer una buena gráfica.

1. En un plano cartesiano (X_1 , X_2) se grafican todas las restricciones, incluyendo la condición de no negatividad, la cual obliga a contemplar solamente los puntos que se encuentran en el primer cuadrante. Observe los valores máximos de X_1 y X_2 en la tabulación (interceptos), ellos determinan la escala adecuada para los ejes X_1 y X_2 .
2. Determinar el área de soluciones factible, llamada también, polígono de soluciones factibles. El área de soluciones factible está constituido por la intersección de las áreas de solución de todas las restricciones. Es el conjunto de puntos (X_1 , X_2) que satisfacen todas las restricciones. Al remplazar cualquier punto que pertenezca al área de soluciones factibles en todas las restricciones, las convierte en proposiciones verdaderas.
3. Dar un valor arbitrario a Z. Aquí se le ha dado a Z el valor arbitrario de 2, ya que solo necesitamos graficar una de las rectas que pertenece a la familia de rectas paralelas, para facilitar la tabulación de la función objetivo; se recomienda dar un valor arbitrario a Z, que sea múltiplo de los coeficientes de las variables (X_1 , X_2), dicho valor se consigue fácilmente, multiplicando el coeficiente de X_1 por el coeficiente de X_2 . Es conveniente fijarse en los valores de las coordenadas para graficar la función objetivo, observando que sean parecidos en magnitud a los hallados para graficar las restricciones, esto hará que la gráfica quede convenientemente presentada para el análisis.

Procedimiento para determinar la solución óptima y factible.

1. Evaluar la función objetivo Z en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles. La debilidad de este procedimiento se presenta cuando se tienen muchas restricciones que por supuesto generan un área con muchas esquinas, volviéndose dispendiosa la consecución de sus coordenadas, que implica la solución de muchos sistemas de ecuaciones lineales.

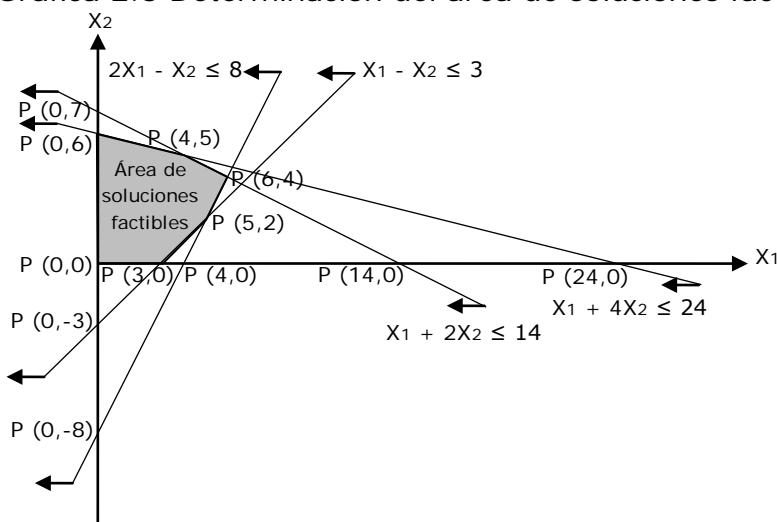
2. Usar la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza. La debilidad de este procedimiento se presenta cuando la función objetivo es aproximadamente paralela a uno de los lados del área de soluciones factible, originando la duda visual sobre la gráfica, de cuál de los dos extremos (esquinas) es el que hace que la función objetivo se optimice. En este caso, se evalúa la función objetivo en las dos esquinas.

Se recomienda usar el segundo procedimiento y en caso de dudas visuales sobre la gráfica, recurrir al primer procedimiento para dirimir la duda respecto al par de esquinas.

Primer procedimiento: Evaluar la función objetivo en las esquinas del área de soluciones factibles.

1º Restricción	2º Restricción	3º Restricción	4º Restricción
$2X_1 - X_2 \leq 8$	$X_1 - X_2 \leq 3$	$X_1 + 2X_2 \leq 14$	$X_1 + 4X_2 \leq 24$
$2X_1 - X_2 = 8$	$X_1 - X_2 = 3$	$X_1 + 2X_2 = 14$	$X_1 + 4X_2 = 24$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = -8 \mid X_1 = 4$	$X_2 = -3 \mid X_1 = 3$	$X_2 = 7 \mid X_1 = 14$	$X_2 = 6 \mid X_1 = 24$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 24$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad

Gráfica 2.3 Determinación del área de soluciones factibles



Fuente: El autor.

La coordenada de la esquina del área de soluciones factibles (4,5) se halla encontrando la intersección entre las rectas: $X_1 + 2X_2 = 14$ y $X_1 + 4X_2 = 24$ mediante la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones. La coordenada de la esquina del área de de soluciones factibles (6,4) se halla encontrando la intersección entre las rectas: $2X_1 - X_2 = 8$ y $X_1 + 2X_2 = 14$ mediante la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones. La coordenada de la esquina del área de de soluciones

factibles (5,2) se halla encontrando la intersección entre las rectas: $X_1 - X_2 = 3$ y $2X_1 - X_2 = 8$ mediante la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones.

El valor de la función objetivo, $Z(x,y) = 2X_1 + X_2$ en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles es:

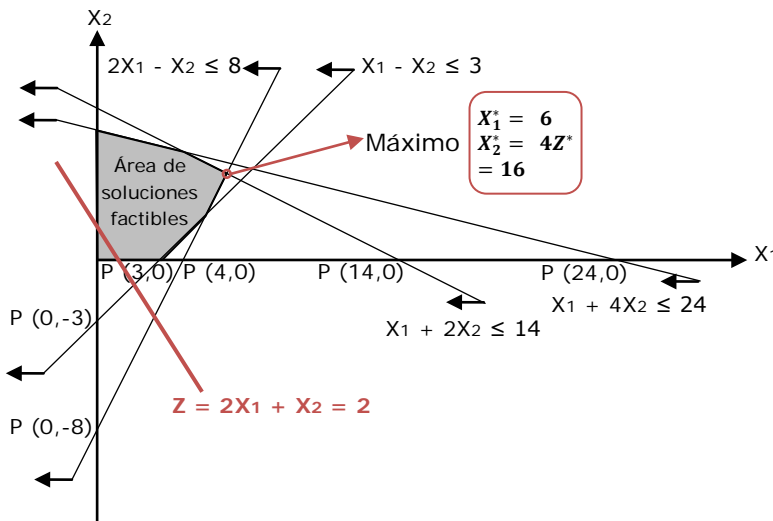
$Z(0,0) = 2(0) + 0 = 0$	La función objetivo se <i>maximiza</i> cuando $X_1=6$ y $X_2=4$, y se <i>minimiza</i> cuando $X_1=0$ y $X_2=0$
$Z(3,0) = 2(3) + 0 = 6$	
$Z(5,2) = 2(5) + 2 = 12$	Fíjese que un excesivo número de restricciones, genera un alto número de esquinas y por tanto hay que resolver muchos sistemas de ecuaciones.
$Z(6,4) = 2(6) + 4 = 16$	
$Z(4,5) = 2(4) + 5 = 13$	
$Z(0,6) = 2(0) + 6 = 6$	

Segundo procedimiento: Usar la función objetivo para ubicar la esquina del área de soluciones factible, que optimice (maximice o minimice) dicha función. Este procedimiento evita tener que encontrar todas las coordenadas de las esquinas del área de soluciones factibles. Se tabula y se grafica una de las rectas que pertenece a la familia de rectas de la función objetivo; en este caso, de manera arbitraria se hace $Z = 2$

Función Objetivo con $Z = 2$

$$\begin{array}{rcl} 2X_1 + X_2 & = & 2 \\ X_1 & = & 0 \quad \left| \quad X_2 = 0 \right. \\ X_2 & = & 2 \quad \left| \quad X_1 = 1 \right. \end{array}$$

Gráfica 2.4 Uso de la función objetivo para encontrar la esquina que optimiza dicha función.



Fuente: El autor.

Al desplazar de forma paralela la función objetivo hacia la derecha, el valor de Z aumenta, entonces, debemos desplazarla hacia la derecha, lo más que se pueda, pero que pierda el contacto con al área de soluciones factibles, el último punto a la derecha del área de soluciones factible que toca, tiene como

coordenada $X_1 = 6$, $X_2 = 4$. Para encontrar esta coordenada debemos interceptar las ecuaciones de las rectas $X_1 + 2X_2 = 14$ con $2X_1 - X_2 = 8$ Una manera de hacer esto, es empleando el método de los determinantes, que para un sistema de dos ecuaciones y dos variables es:

$$X_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-14 - 16}{-1 - 4} = \frac{-30}{-5} = 6$$

$$X_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 27}{-1 - 4} = \frac{-20}{-5} = 4$$

De ahora en adelante, se empleará el segundo procedimiento para encontrar la solución óptima.

Ejemplo 2.2 Problema de solución única con gráfica en tres dimensiones.

Maximizar $Z = X_1 + X_2$

Con las siguientes restricciones:

$$X_1 \leq 4$$

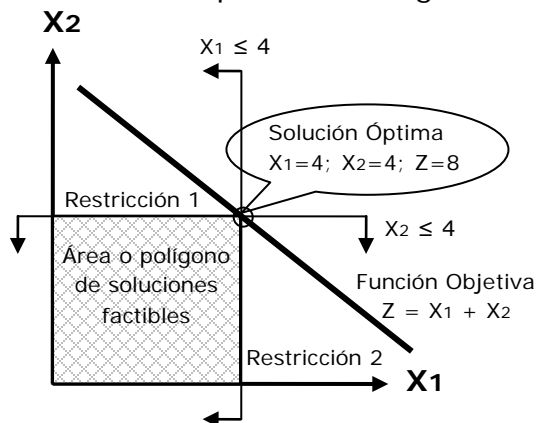
$$X_2 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; \forall j = 1, 2$$

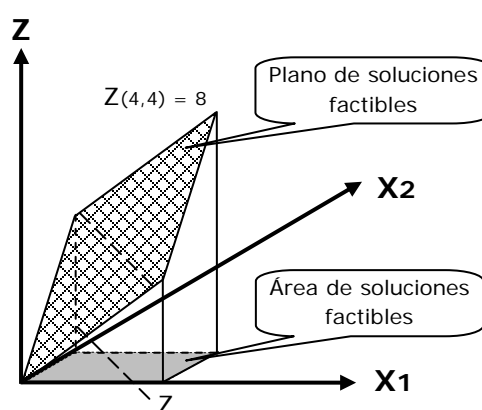
El problema tiene tres (3) restricciones: X_1 , X_2 y Z , luego se encuentra en R^3 , para cada punto (X_1, X_2) existe un valor para Z , gráficamente:

1º Restricción	2º Restricción	Función Objetivo
$X_1 \leq 4$	$X_2 \leq 4$	$X_1 + X_2 = Z$
$X_1 = 4$	$X_2 = 4$	$X_1 + X_2 = 8$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 4$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 4$	$X_1 = 0 \quad \quad X_2 = 0$
Verdad	Verdad	$X_2 = 8 \quad \quad X_1 = 8$

Gráfica 2.5 Representación gráfica en 2 y 3 dimensiones.

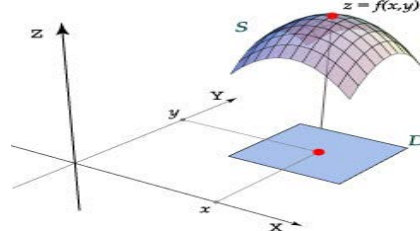
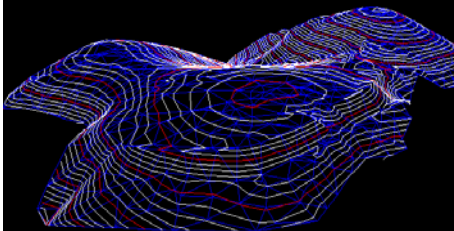


Fuente: El autor.



Este ejercicio permite ver que el área de soluciones factible (gráfica 3.5 lado izquierdo) es la proyección del plano de soluciones factibles (gráfica 3.5 lado derecho) sobre el plano X_1, X_2 esto se llama rectas de nivel, que cuando se trata de curvas se denominan curvas de nivel, usadas por la cartografía para mostrar el relieve del terreno representado sobre un plano.

Gráfica 2.6 Representación gráfica en 3D de las curvas de nivel.



Fuente: El autor.

Ejemplo 2.3 Problema de múltiples soluciones.

Cuando una de las restricciones es múltiplo de la función objetivo, *sospeche* que el problema tiene múltiples soluciones.

Maximizar $Z = 4X_1 + 2X_2$

c.s.r:

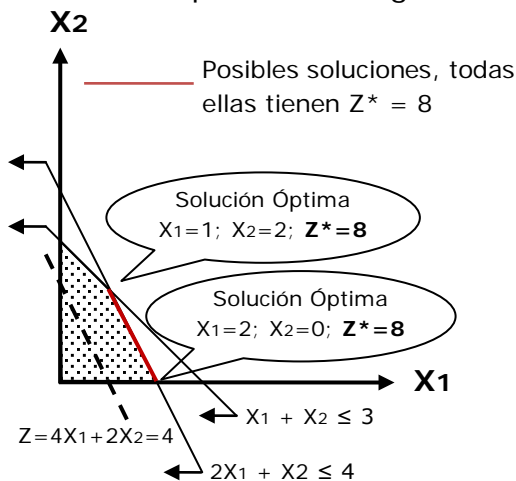
$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; \forall j=1, 2$$

1º Restricción	2º Restricción	Función Objetivo
$X_1 + X_2 \leq 3$	$2X_1 + X_2 \leq 4$	$4X_1 + 2X_2 = Z$
$X_1 + X_2 = 3$	$2X_1 + X_2 = 4$	$4X_1 + 2X_2 = 4$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = 3 \mid X_1 = 3$	$X_2 = 4 \mid X_1 = 2$	$X_2 = 2 \mid X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 4$	
Verdad	Verdad	

Gráfica 2.7 Representación gráfica de un problema de múltiples soluciones.



Z aumenta al desplazar paralelamente la función objetivo hacia la derecha, su valor máximo lo encuentra cuando se vuelve tangente a todo un lado del área de soluciones factibles, dicho lado corresponde a la ecuación $2X_1 + X_2 = 4$, el problema tiene múltiples soluciones, todos los puntos ordenados (X_1, X_2) que pertenecen a la recta $2X_1 + X_2 = 4$ entre los puntos $(2, 0)$ y $(1, 2)$. Cualquier punto (X_1, X_2) que pertenezca a dicho intervalo, hará que se cumplan todas las restricciones y Z^* valdrá 8

Fuente: El autor.

$$X_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 - 4}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad X_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 6}{1 - 2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\begin{aligned} Z^* &= 4X_1^* + 2X_2^* \\ Z^* &= 4(1) + 2(2) \\ Z^* &= 8 \end{aligned}$$

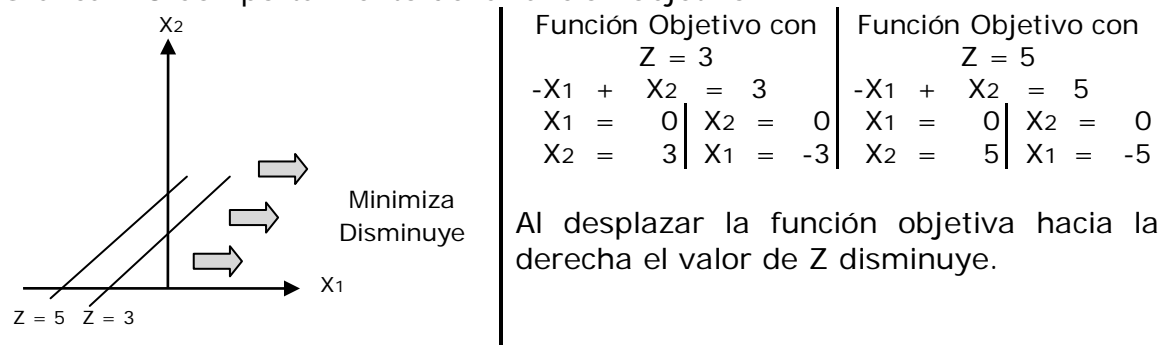
Ejemplo 2.4 Problema de soluciones indeterminadas o no acotadas.

Minimizar $Z = -X_1 + X_2$	1° Restricción	2° Restricción	Función Objetivo
c.s.r:	$X_1 - X_2 \geq 0$	$-1/2X_1 + X_2 \leq 1$	$-X_1 + X_2 = Z$
$X_1 \geq X_2$	$X_1 - X_2 = 0$	$-1/2X_1 + X_2 = 1$	$-X_1 + X_2 = 3$
$-0,5X_1 + X_2 \leq 1$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 5$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_j \geq 0; \forall j=1, 2$	$X_2 = 0 \mid X_1 = 5$	$X_2 = 1 \mid X_1 = -2$	$X_2 = 3 \mid X_1 = -3$
	$P(3,0) \Rightarrow 3 \geq 0$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 1$	
	Verdad	Verdad	

La primera restricción por tener el término independiente igual a cero (0) pasa por el origen de coordenadas $p(0,0)$, por lo tanto, corta la abscisa y la ordenada en el mismo punto; ello hace, que sea necesario tabular un segundo punto, de manera arbitraria, para el presente caso, se tabuló el punto (5,5), entonces la recta pasa por los puntos (0,0) y (5,5).

La función objetivo, por no tener todos los coeficientes de sus variables positivos, hace necesario su estudio detallado para determinar en qué sentido aumenta y en cuál disminuye; para ello, graficamos la función objetivo para dos valores diferentes de Z.

Gráfica 2.8 Comportamiento de la función objetivo $Z = -X_1 + X_2$

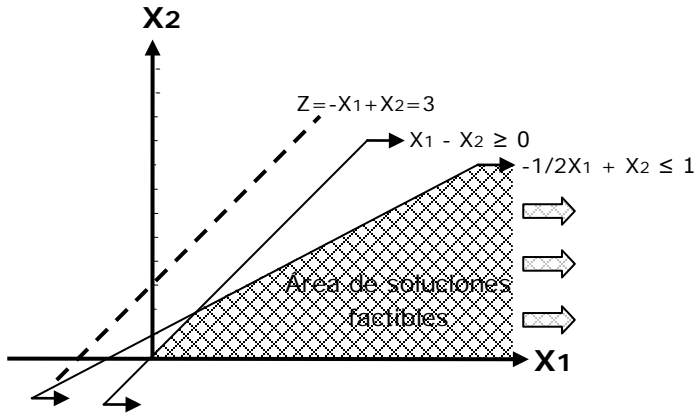


Fuente: El autor.

En la gráfica 2.9 se observa, que al desplazar la función objetivo hacia la derecha, siempre encontrará un punto más a la derecha del área de soluciones factible que la minimice. Entre más a la derecha se encuentre un punto (X_1, X_2) que pertenezca al área de soluciones factibles, más pequeño será el valor de la función objetivo, pero siempre habrá una alternativa de encontrar un punto (X_1, X_2) más a la derecha, por ser una área abierta o no acotada a la

derecha. Se dice entonces que el problema tiene solución indeterminada o no acotada.

Gráfica 2.9 Representación gráfica del problema de soluciones no acotadas.



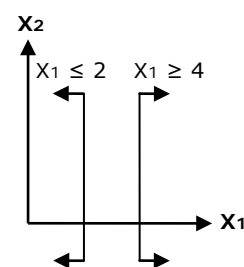
Fuente: El autor.

Si se está modelando sobre un problema real y ocurre esta situación, falta considerar una restricción, que justamente cierre el área de soluciones factibles por el lado derecho. Se ha dejado de considerar la restricción de algún recurso, ya que los valores de las variables en la realidad no pueden crecer de manera ilimitada, irrestrictamente. Dicho de otra manera, se está permitiendo que las variables crezcan de manera incontrolable y esto en la realidad nunca ocurre, las variables de decisión están limitadas por los recursos expresados en las restricciones.

Ejemplo 2.5 Problema sin solución

Este caso se presenta cuando entre las restricciones existen al menos dos de ellas que sean excluyentes, tal como: $X_1 \leq 2$ y $X_1 \geq 4$. Aquí nunca podremos encontrar un número que al mismo tiempo sea menor o igual a 2 y mayor o igual a 4, las dos restricciones son excluyentes y por lo tanto no existe área de soluciones factible. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

Gráfica 2.10 Ilustración gráfica de un problema sin solución.



Fuente: El autor.

Si esto ocurre al formular sobre un caso de la vida real, revise la lógica de las restricciones involucradas, en especial el sentido de las desigualdades. Nunca un par de variables de la vida real no tienen este comportamiento.

Ejemplo 2.6 Problema de única solución.

Para el siguiente problema de programación lineal:

$$Z = 3X_1 - 5X_2$$

c.s.r.

$$5X_1 - 4X_2 \geq -20$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_2 \leq 10$$

$$X_2 \geq 3$$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

- En un plano cartesiano (X_1 , X_2) grafique las restricciones y señale claramente el área de soluciones factibles.
- Determine en qué dirección aumenta la función objetivo y grafíquela sobre el plano cartesiano elaborado en el inciso a.
- Usando la función objetivo, determine los valores de X_1 y X_2 que maximizan y minimizan la función objetivo. Señálelos claramente en la gráfica.
- Calcule el valor máximo y el valor mínimo de la función objetivo Z .
- Compruebe qué tanto para el máximo como para el mínimo, todas las restricciones son satisfechas.
- Para el caso de Maximización, ¿cuáles son las restricciones de estricto cumplimiento?
- Para el caso de Minimización, ¿cuáles son las restricciones de estricto cumplimiento?

Nota: Restricciones de estricto cumplimiento, son aquellas que, al remplazar el valor óptimo de las variables, se convierten en igualdades. El lado izquierdo de la restricción se hace igual al lado derecho. Dichas restricciones se denominan activas.

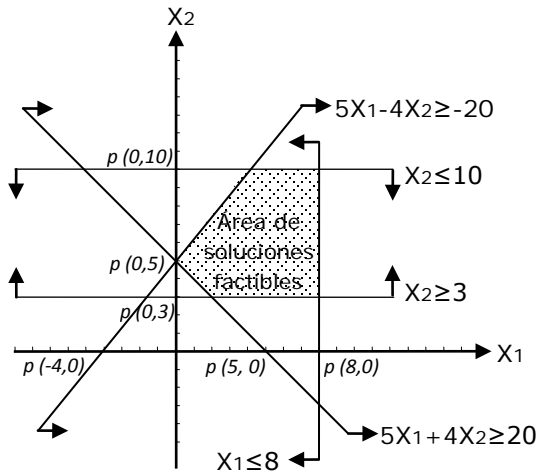
Solución:

- Tabulación de las restricciones y determinación en el plano cartesiano, del área de soluciones factibles.

$5X_1 - 4X_2 \geq -20$	$X_1 \leq 8$	$X_2 \leq 10$	$X_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$
$5X_1 - 4X_2 = -20$	$X_1 = 8$	$X_2 = 10$	$X_2 = 3$	$5X_1 + 4X_2 = 20$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 3$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = 5 \mid X_1 = -4$				$X_2 = 5 \mid X_1 = 4$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq -20$	Verdad.	Verdad.	Falso.	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 20$
Verdad.				Falso.

Fíjese que primero se debe identificar, de manera clara, el área de soluciones factibles.

Gráfica 2.11 Determinación del área de soluciones factibles.

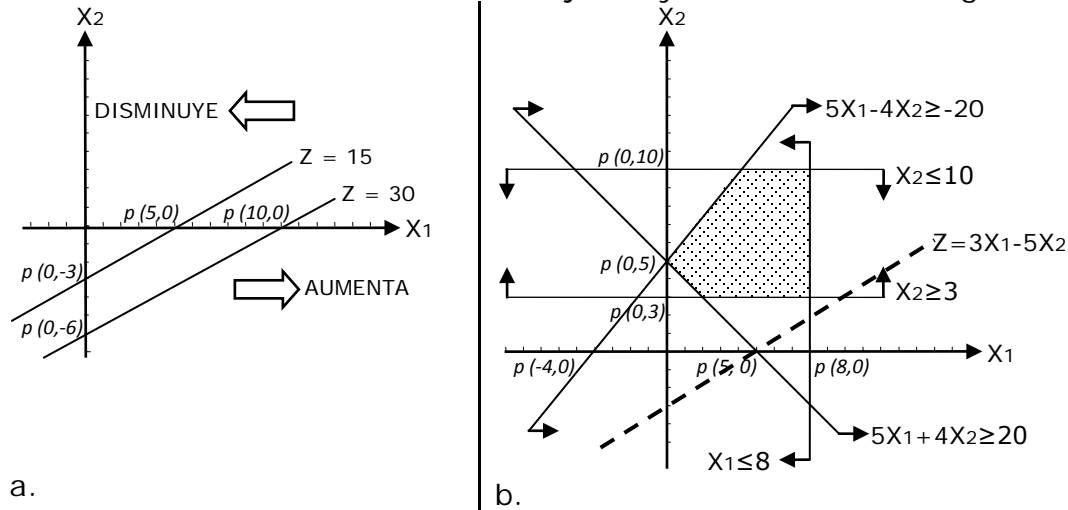


Fuente: El autor.

- b. Determinación de la dirección hacia donde crece la función objetivo y hacia donde decrece y su ubicación en la gráfica 2.11

Cuando $Z = 15$		Cuando $Z = 30$	
$3X_1 - 5X_2 = 15$	$3X_1 - 5X_2 = 30$	$3X_1 - 5X_2 = 15$	$3X_1 - 5X_2 = 30$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = -3 \mid X_1 = 5$	$X_2 = -6 \mid X_1 = 10$	$X_2 = -3 \mid X_1 = 5$	$X_2 = -6 \mid X_1 = 10$

Gráfica 2.12 Estudio de la Función Objetivo y su ubicación en la gráfica.



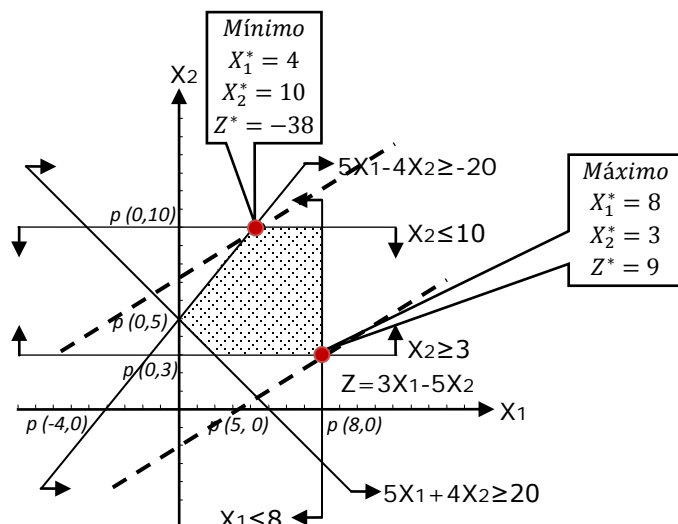
a.

Fuente: El autor.

b.

- c. En la gráfica 2.12-a se observa que: Al desplazar paralelamente la función objetivo a la derecha, su valor aumenta. Al desplazarla paralelamente hacia la izquierda, su valor disminuye. En la gráfica 2.12-b, para encontrar el punto (X_1, X_2) que maximiza la función objetivo, se debe desplazar paralelamente la función objetivo lo menos posible hacia la izquierda, hasta que se vuelva tangente con el área de soluciones factible, ello ocurre en la intersección de las rectas: $X_1=8$ y $X_2=3$, en este punto se encuentra el Z

máximo, que llamaremos Z^* y su valor es: $Z = 3X_1 - 5X_2 = 3(8) - 5(3) = 9$ el cual se ilustra en la gráfica 2.13. Para encontrar el punto (X_1, X_2) que minimiza la función objetivo, se debe desplazar paralelamente la función objetivo lo máximo posible hacia la izquierda, hasta que se vuelva tangente con el área de soluciones factibles, ello ocurre en la intersección de las rectas: $X_2 = 10$ y $5X_1 - 4X_2 = -20$; siendo el valor de $X_1 = (4X_2 - 20)/5 = [4(10) - 20]/5 = 4$ y el valor de Z mínimo de: $Z^* = 3X_1 - 5X_2 = 3(4) - 5(10) = -38$.



Gráfica 2.13 Ubicación del Z^* máximo y del Z^* mínimo.

d. Cálculo del valor máximo y mínimo de Z^*

$$Z^*_{\text{Máximo}} = 3X_1 - 5X_2 = 3(8) - 5(3) = 9$$

$$Z^*_{\text{Mínimo}} = 3X_1 - 5X_2 = 3(4) - 5(10) = -38$$

e. Remplazando tanto el máximo (8, 3) como el mínimo (4, 10) todas las restricciones se satisfacen.

En el caso de maximización: $X_1 = 8$ y $X_2 = 3$

$5X_1 - 4X_2 \geq -20$	$X_1 \leq 8$	$X_2 \leq 10$	$X_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$
$5(8) - 4(3) \geq -20$	$8 \leq 8$	$3 \leq 10$	$3 \geq 3$	$5(8) + 4(3) \geq 20$
$40 - 12 \geq -20$				$40 + 12 \geq 20$
$38 \geq -20$				$52 \geq 20$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	Verdad
Inactiva	Activa	Inactiva	Activa	Inactiva
De no estricto cumplimiento	De estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento	De estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento

En el caso de minimización: $X_1 = 4$ y $X_2 = 10$

$5X_1 - 4X_2 \geq -20$	$X_1 \leq 8$	$X_2 \leq 10$	$X_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$
$5(4) - 4(10) \geq -20$	$4 \leq 8$	$10 \leq 10$	$10 \geq 3$	$5(4) + 4(10) \geq 20$
$20 - 40 \geq -20$				$20 + 40 \geq 20$
$-20 \geq -20$				$60 \geq 20$
Verdad	Verdad	<u>Verdad</u>	Verdad	Verdad
<u>Activa</u>	Inactiva	<u>Activa</u>	Inactiva	Inactiva
<u>De estricto</u>	De no estricto	<u>De estricto</u>	De no estricto	De no estricto
<u>cumplimiento</u>	cumplimiento	<u>cumplimiento</u>	cumplimiento	cumplimiento

f. Restricciones de estricto cumplimiento para el caso de maximización.

$X_1 \leq 8$ es de estricto cumplimiento, ya que en la solución óptima (8, 3) se vuelve una igualdad, $8 \leq 8$. En la gráfica 3.13 se observa que esta restricción pasa por el punto óptimo, por esto se le llama restricción activa.

$X_2 \geq 3$ es de estricto cumplimiento, ya que en la solución óptima (8, 3) se vuelve una igualdad, $3 \geq 3$. En la gráfica 3.13 se observa que esta restricción pasa por el punto óptimo, por esto se le llama restricción activa.

g. Restricciones de estricto cumplimiento para el caso de minimización.

$X_2 \leq 10$ es de estricto cumplimiento, ya que en la solución óptima (4, 10) se vuelve una igualdad, $10 \leq 10$. En la gráfica 3.13 se observa que esta restricción pasa por el punto óptimo, por esto se le llama restricción activa.

$5X_1 - 4X_2 \geq -20$ es de estricto cumplimiento, ya que en la solución óptima (4, 10) se vuelve una igualdad, $-20 \geq -20$. En la gráfica 3.13 se observa que esta restricción pasa por el punto óptimo, por esto se le llama restricción activa.

Nota: Las restricciones que no pasan por el punto óptimo, son restricciones de no estricto cumplimiento y poseen holgura o exceso y se les denomina restricciones inactivas.

Ejemplo 2.7 Un caso especial.

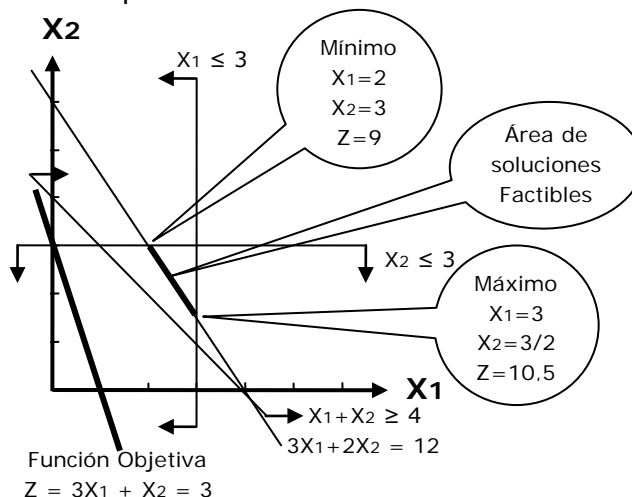
Usando el método gráfico, hallar el máximo y el mínimo del siguiente problema de programación lineal convexa.

$Z = 3X_1 + X_2$	Función Objetivo	
$X_1 \leq 3$	Restricción 1	Fíjese que una de las restricciones es una igualdad y no una inecuación.
$X_2 \leq 3$	Restricción 2	Recuerde que los puntos que hacen verdad una ecuación, son todos aquellos que pertenecen a la recta.
$X_1 + X_2 \geq 4$	Restricción 3	
$3X_1 + 2X_2 = 12$	Restricción 4	
$X_j \geq 0; j = 1, 2$		

Res. 1	Res. 2	Restricción 3		Restricción 4	Función Objetivo	
$X_1 \leq 3$	$X_2 \leq 3$	$X_1 + X_2 \geq 4$		$3X_1 + 2X_2 = 12$	$Z = 3X_1 + X_2$	
$X_1 = 3$	$X_2 = 3$	$X_1 + X_2 = 4$			$3X_1 + X_2 = 3$	
$p(0,0) \Rightarrow$	$p(0,0) \Rightarrow$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$
$0 \leq 3$	$0 \leq 3$	$X_2 = 4$	$X_1 = 4$	$X_2 = 6$	$X_1 = 4$	$X_2 = 3$
Verdad	Verdad	$p(0,0)=0 \Rightarrow 0 \geq 4$	Falso	Línea recta		$X_1 = 1$

Gráfica 2.14 Determinación gráfica de la solución óptima.

Fíjese que el área de soluciones factible La contiuyen, todos los puntos que pertenecen a la recta $3X_1 + 2X_2 = 12$ en el intervalo (2, 3) y (3, 3/2). Al desplazar paralelamente la función objetivo hacia la derecha, el primer punto que toca del área, es el mínimo, y el último punto del área que toca, constituye el máximo.



Fuente: El autor.

$$\begin{aligned}
 &\text{Mínimo} \\
 &\mathbf{X_2^* = 3} \\
 &3X_1 + 2X_2 = 12 \\
 &3X_1 + 2(3) = 12 \\
 &\mathbf{X_1^* = 2} \\
 &\text{Mínimo } Z(2, 3) = 3(2) + (3) = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Máximo} \\
 &\mathbf{X_1^* = 3} \\
 &3X_1 + 2X_2 = 12 \\
 &3(3) + 2X_2 = 12 \\
 &\mathbf{X_2^* = 3/2} \\
 &\text{Máximo } Z(3, 3/2) = 3(3) + (3/2) = 21/2 = 10,5
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 Un caso de producción

Una compañía ensambladora de vehículos, produce camiones y automóviles. Cada unidad de producción tiene que pasar por un taller de pintura y por un taller de montaje de la carrocería. Si el taller pintara solamente camiones, se podrían pintar 40 camiones al día, y si pintara solamente automóviles, se podrían pintar 60 automóviles. Si el taller de carrocerías ensamblara solamente camiones, podría ensamblar 50 camiones al día y si ensamblara solamente automóviles, podría ensamblar 50 automóviles al día. Cada camión aporta \$300 a la utilidad y cada automóvil, \$200. ¿Cuántos camiones y cuántos automóviles se deben producir, para maximizar la utilidad total diaria?

Solución: Fíjese que aquí nos han dado las coordenadas por donde cada restricción corta los ejes cartesianos abscisa y ordenada, por lo tanto debemos

conseguir las ecuaciones de cada restricción, conociendo dos puntos que pertenecen a cada una de las rectas.

X_j : Número de vehículos a producir del tipo j -ésimo ($j=1$: Camiones, $j=2$: Automóviles).

Para el taller de pintura:

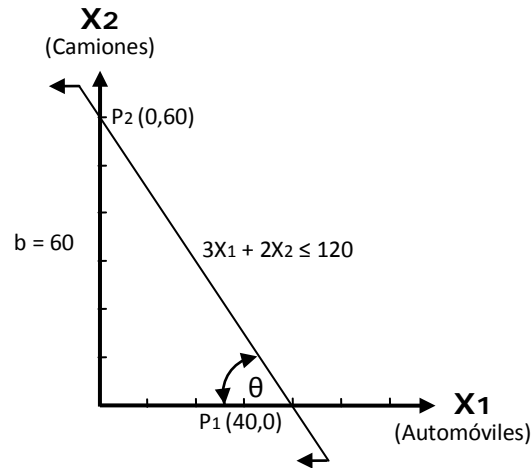
$$\begin{aligned} \text{Si } X_2 = 0 &\Rightarrow X_1 = 40 \\ \text{Si } X_1 = 0 &\Rightarrow X_2 = 60 \\ m &= (Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1) \\ m &= \tan(\theta) = -60/40 = -3/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= mX_1 + b = -3/2X_1 + 60 \\ 3/2X_1 + X_2 &= 60 \quad (2) \\ 3X_1 + 2X_2 &= 120 \end{aligned}$$

Luego la restricción es:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$

Gráfica 2.15 Restricción del taller de pintura.



Fuente: El autor.

Para el taller de carrocerías:

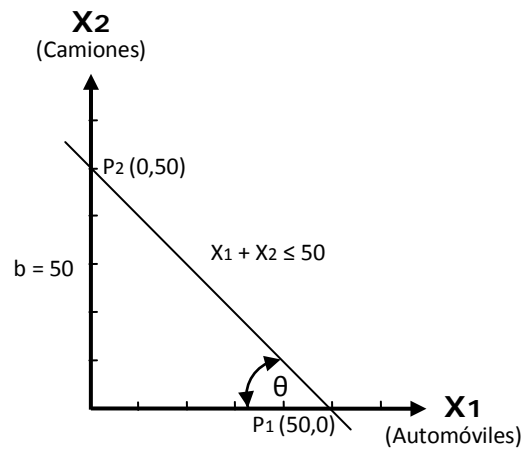
$$\begin{aligned} \text{Si } X_2 = 0 &\Rightarrow X_1 = 50 \\ \text{Si } X_1 = 0 &\Rightarrow X_2 = 50 \\ m &= (Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1) \\ m &= \tan(\theta) = -50/50 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= mX_1 + b = -X_1 + 50 \\ X_1 + X_2 &= 50 \end{aligned}$$

Luego la restricción es:

$$X_1 + X_2 \leq 50$$

Gráfica 2.16 Restricción del taller de carrocerías.



Fuente: El autor.

Max. $Z = 200X_1 + 300X_2$ | Maximización de la utilidad.

c.s.r.

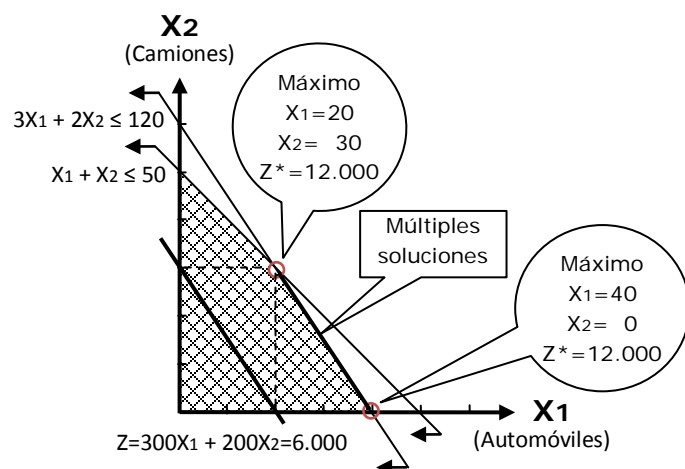
$3X_1 + 2X_2 \leq 120$ | Restricción debida a la capacidad de producción diaria del taller de pintura.

$X_1 + X_2 \leq 50$ | Restricción debida a la capacidad de producción diaria del taller de carrocerías.

$X_j \geq 0; j = 1, 2$

1° Restricción	2° Restricción	Función Objetiva
$3X_1 + 2X_2 \leq 120$	$X_1 + X_2 \leq 50$	$Z = 300X_1 + 200X_2$
$3X_1 + 2X_2 = 120$	$X_1 + X_2 = 50$	$300X_1 + 200X_2 = 6.000$
$X_1 = 0 \quad \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0 \quad \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0 \quad \quad X_2 = 0$
$X_2 = 60 \quad \quad X_1 = 40$	$X_2 = 50 \quad \quad X_1 = 50$	$X_2 = 30 \quad \quad X_1 = 20$
$p(0,0) = > 0 \leq 120$ Verdad	$p(0,0) = > 0 \leq 50$ Verdad	

Gráfica 2.17 Solución gráfica al problema 2.8



Fíjese que el problema tiene múltiples soluciones, ya que al desplazar paralelamente la función objetivo hacia la derecha, el último punto que toca del área de soluciones factibles, no es un punto (esquina, arista), si no, todo un lado del área de soluciones factibles. La solución la conforman, todas las parejas de puntos ordenados (X_1, X_2) que pertenecen a la recta $3X_1 + 2X_2 \leq 120$, en el intervalo entre los puntos $(40,0)$ y $(20,30)$.

Fuente: El autor.

$$X_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 2 \\ 50 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{120 - 100}{3 - 2} = \frac{20}{1} = 20$$

$$X_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 120 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{150 - 120}{3 - 2} = \frac{30}{1} = 30$$

Ejemplo 2.9 Regla de equivalencia y constante en la función objetivo

Una planta ensambladora de televisores produce los modelos K-1000 y K-2000. La línea de ensamble tiene tres (3) estaciones de trabajo. Los tiempos de trabajo de ensamble en las tres (3) estaciones, por unidad de modelo de producto, son:

Tabla 2.1 Duración de cada tipo de televisor en cada estación de trabajo.

Estación de trabajo	Minutos por televisor producido	
	Modelo K-1000	Modelo K-2000
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Cada estación de trabajo tiene una disponibilidad máxima de 480 minutos por día (8 horas/día X 60 minutos/hora). Sin embargo, las estaciones de trabajo

requieren mantenimiento diario, que constituyen el 10%, 14% y 12% de los 480 minutos totales de que disponen diariamente las estaciones 1, 2 y 3 respectivamente. La compañía desea determinar las unidades diarias que se ensamblarán de los modelos K-1000 y K-2000 a fin de minimizar la suma de tiempos inactivos en las tres estaciones.

Solución:

X_j = Cantidad de televisores a producir diariamente del modelo j-ésimo ($j = 1$: K-1000, $j = 2$: K-2000).

Tabla 2.2 Datos relevantes del ejemplo 2.9

Estación de trabajo	Disponibilidad Máxima en minutos diarios	Tiempo que se usará cada estación de trabajo en minutos diarios	Tiempo inactivo de Cada estación de Trabajo en minutos
1	$(1-0,10)480=432,0$	$6X_1 + 4X_2$	$432,0-(6X_1 + 4X_2)$
2	$(1-0,14)480=412,8$	$5X_1 + 5X_2$	$412,8-(5X_1 + 5X_2)$
3	$(1-0,12)480=422,4$	$4X_1 + 6X_2$	$422,4-(4X_1 + 6X_2)$

Minimizar $Z = 432,0-(6X_1 + 4X_2)+412,8-(5X_1 + 5X_2)+422,4-(4X_1 + 6X_2)$

Minimizar $Z = -15X_1 - 15X_2 + 1.267,2$

Para facilitar la solución del problema, hacemos los siguientes cambios:

Minimizar $Z = -15X_1 - 15X_2$ | Como el término independiente 1.267,2 es constante, se puede suprimir y al final lo sumamos a la solución óptima.

Maximizar $Z = 15X_1 + 15X_2$ | Multiplicar la función objetivo por (-1) y maximizar, al final, multiplicar el valor de Z por (-1); Esto se llama, la regla de equivalencia: Maximizar $Z =$ Minimizar $(-Z)$ ó Minimizar $Z =$ Maximizar $(-Z)$.

Maximizar $Z = 15X_1 + 15X_2$; Con las siguientes restricciones:

$6X_1 + 4X_2 \leq 432,0$ Restricciones debidas a la disponibilidad de minutos

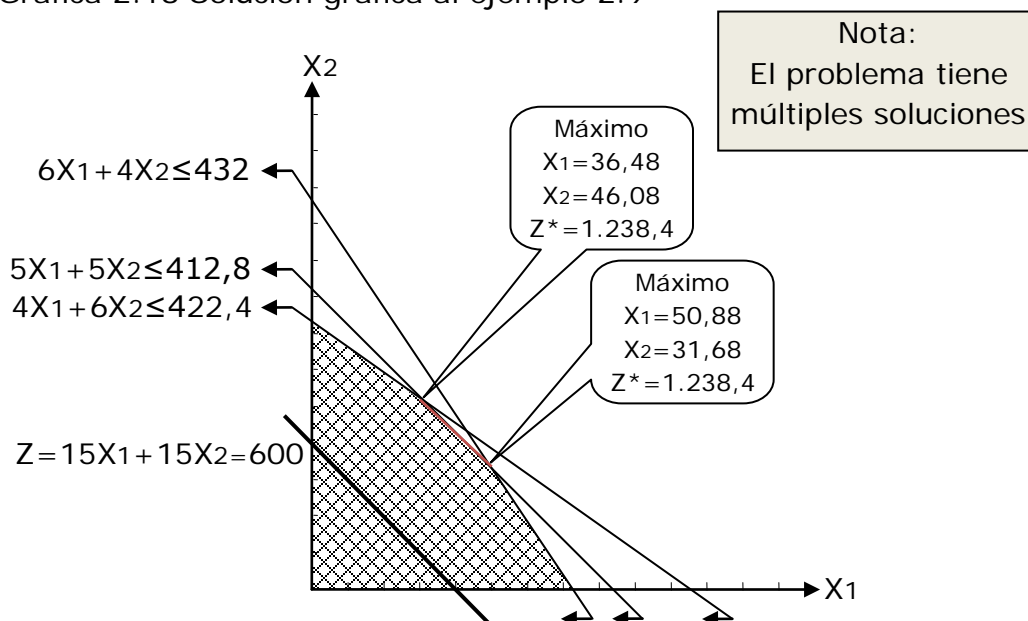
$5X_1 + 5X_2 \leq 412,8$ diarios en las estaciones de trabajo 1, 2 y 3

$4X_1 + 6X_2 \leq 422,4$ respectivamente.

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2$

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	Función Objetiva
$6X_1 + 4X_2 \leq 432$	$5X_1 + 5X_2 \leq 412,8$	$4X_1 + 6X_2 \leq 422,4$	$Z = 15X_1 + 15X_2$
$6X_1 + 4X_2 = 432$	$5X_1 + 5X_2 = 412,8$	$4X_1 + 6X_2 = 422,4$	$15X_1 + 15X_2 = 600$
$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$X_2 = 108 \mid X_1 = 72$	$X_2 = 82,56 \mid X_1 = 82,56$	$X_2 = 70,4 \mid X_1 = 105,6$	$X_2 = 40 \mid X_1 = 10$
$p(0,0) = >0 \leq 432$	$p(0,0) = >0 \leq 412,8$	$p(0,0) = >0 \leq 422,4$	La función Z aumenta al desplazarse a la derecha
Verdad	Verdad	Verdad	

Gráfica 2.18 Solución gráfica al ejemplo 2.9



Fuente: El autor.

$5X_1+5X_2=412,8$ $4X_1+6X_2=422,4$	$5X_1+5X_2=412,8$ $6X_1+4X_2=432,0$
$X_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 412,8 & 5 \\ 422,4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.476,8 - 2.112}{30 - 20} = \frac{364,8}{10} = 36,48$	$X_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 412,8 & 5 \\ 432,0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1.651,2 - 2.160}{20 - 30} = \frac{508,8}{10} = 50,88$
$X_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412,8 \\ 4 & 422,4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.112 - 1.651,2}{30 - 20} = \frac{460,8}{10} = 46,08$	$X_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412,8 \\ 6 & 432,0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2.160 - 2.476,8}{20 - 30} = \frac{316,8}{10} = 31,68$
$Z=15X_1+15X_2=15(36,48)+15(46,08)=1.238,4$	$Z=15X_1+15X_2=15(50,88)+15(31,68)=1.238,4$

Tiempo total inactivo diario, en minutos

$$Z^* = -15X_1 - 15X_2 + 1.267,2 = -1.238,4 + 1.267,2$$

$$Z^* = 28,8 \text{ minutos diarios.}$$

Bajo cada una de las dos soluciones ofrecidas, de las múltiples, se puede saber mediante las restricciones, el tiempo inactivo diario en minutos de cada estación de trabajo.

Bajo la solución $X_1^*=36,48$; $X_2^*=46,08$		
Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^*+4X_2^*\leq 432$	$5X_1^*+5X_2^*\leq 412,8$	$4X_1^*+6X_2^*\leq 422,4$
$6(36,48)+4(46,08)\leq 432$	$5(36,48)+5(46,08)\leq 412,8$	$4(36,48)+6(46,08)\leq 422,4$
$403,2\leq 432$	$412,8\leq 412,8$	$422,4\leq 422,4$
Tiempo inactivo	No estará inactiva	No estará inactiva
28,8 minutos		

Bajo la solución $X_1^*=50,88$; $X_2^*=31,68$

Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^* + 4X_2^* \leq 432$	$5X_1^* + 5X_2^* \leq 412,8$	$4X_1^* + 6X_2^* \leq 422,4$
$6(50,88) + 4(31,68) \leq 432$	$5(50,88) + 5(31,68) \leq 412,8$	$4(50,88) + 6(31,68) \leq 422,4$
$432 \leq 432$	$412,8 \leq 412,8$	$393,6 \leq 422,4$
No estará inactiva	No estará inactiva	Tiempo inactivo 28,8 minutos

Nota: La estación de trabajo 2, nunca tendrá tiempo inactivo, siempre estará trabajando todo su tiempo disponible de 412,8 minutos diarios.

Problemas propuestos

2.1 Identifique el área de soluciones factibles para cada una de las siguientes inecuaciones lineales. Suponga que todas las variables son positivas.

a. $-3X_1 + X_2 \leq 7$	b. $X_1 - 2X_2 \geq 5$	c. $2X_1 - 3X_2 \leq 8$
d. $X_1 - X_2 \leq 0$	e. $-X_1 + X_2 \geq 0$	f. $X_1 \leq 4$

2.2 Identifique en una gráfica, la dirección del crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones objetivo:

a. $Z = X_1 - X_2$	b. $Z = -3X_1 + X_2$
c. $Z = -X_1 - 2X_2$	d. $Z = -5X_1 - 6X_2$

2.3 Determine el área de soluciones factibles para el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$X_1 + X_2 \leq 4$	¿Cuáles restricciones son redundantes? Reduzca el sistema de inecuaciones al menor número de inecuaciones, que define, la misma área de soluciones factibles.
$4X_1 + 3X_2 \leq 12$	
$-X_1 + X_2 \geq 1$	
$X_1 + X_2 \leq 6$	
$X_1 \geq 0$	
$X_2 \geq 0$	

Solución: Restricciones redundantes: $X_1 + X_2 \leq 4$; $X_1 + X_2 \leq 6$

Sistema de ecuaciones equivalente: $4X_1 + 3X_2 \leq 12$; $-X_1 + X_2 \geq 1$; $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$

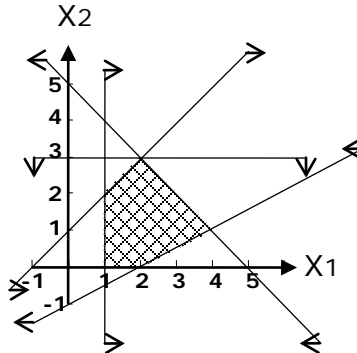
2.4 Considere el siguiente problema de programación lineal convexa.

Maximizar $Z = 6X_1 - 2X_2$ Demuestre de forma gráfica y analítica, que en la c.s.r.:

$X_1 - X_2 \leq 1$	incrementarse, en tanto que el valor de la función
$3X_1 - X_2 \leq 6$	objetiva Z se mantiene constante.
$X_j \geq 0 \quad j = 1, 2$	

2.5 Deduzca las inecuaciones que conforman el área de soluciones factibles que se presenta en la gráfica, e identifique todas las restricciones redundantes.

Gráfica 2.19 Área de soluciones factibles del problema propuesto 3.4



Fuente: El autor.

Solución: $X_1 + X_2 \leq 5$; $X_1 \geq 1$; $X_2 \leq 3$; $-X_1 + X_2 \leq 1$; $X_1 - 2X_2 \leq 2$

2.6 Resuelva gráficamente el siguiente problema de programación lineal convexa.

Maximizar $Z = 5X_1 + 6X_2$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l|l} X_1 - 2X_2 \geq 2 & X_1, X_2 \text{ irrestrictas en signo.} \\ -2X_1 + 3X_2 \geq 2 \end{array}$$

Solución: $X_1 = -10$; $X_2 = -6$; $Z^* = -86$

2.7 Resuelva gráficamente el siguiente problema de programación lineal convexa.

Maximizar $Z = 3X_1 + 2X_2$ Demuestre gráficamente que el problema no tiene c.s.r.: puntos extremos factibles. ¿Qué se puede concluir en relación con la solución al problema?

$$\begin{array}{lcl} 2X_1 & + & X_2 \leq 2 \\ 3X_1 & + & 4X_2 \geq 12 \end{array}$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

Solución: No hay área de soluciones factibles, por lo tanto, el problema no tiene solución.

2.8 Para el siguiente problema de programación lineal convexa, encuentre el máximo y el mínimo de la función objetivo:

$$\begin{array}{l|l} Z = 5X_1 + 2X_2 & \text{Solución: Máximo: } X_1=5; X_2=5; Z^*=35 \text{ Mínimo: } \\ \text{c.s.r.:} & X_1=5; X_2=0; Z^*=25 \\ X_1 + X_2 \leq 10 & \\ X_1 = 5 & \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, 2 & \end{array}$$

2.9 Considere el área convexa de soluciones factibles del problema propuesto número 2.5

a. Maximizar $Z=2X_1+6X_2$	b. Maximizar $Z=-3X_1+4X_2$	c. Minimizar $Z=3X_1+4X_2$
d. Minimizar $Z=X_1-2X_2$	e. Minimizar $Z=X_1$	f. Maximizar $Z=X_1$

Solución:

a. $X_1=2$; $X_2=3$; $Z^*=22$	b. $X_1=2$; $X_2=3$; $Z^*=6$	c. $X_1=1$; $X_2=0$; $Z^*=3$
d. $X_1=2$; $X_2=3$; $Z^*=-4$	e. $X_1=1$; $X_2=0$; $Z^*=1$	f. $X_1=4$; $X_2=1$; $Z^*=4$
Múltiples Soluciones		

2.10 Considere el siguiente problema de programación lineal convexa:

Maximizar	$Z = 3X_1 + 4X_2$	a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima: X_1 , X_2 , Z^*
c.s.r.	$-2X_1 + 4X_2 \leq 16$	
	$2X_1 + 4X_2 \leq 24$	
	$-6X_1 - 3X_2 \geq -48$	b) Encuentre los valores de holgura o excedente de cada restricción.
$X_j \geq 0$	$j = 1, 2$	

Solución: a) $X_1=20/3=6,6$; $X_2=8/3=2,6$; $Z^*=92/3=30,6$ b) Restricción 1: Holgura $56/3=18,6$; Restricción 2: Holgura=0; Restricción 3: Holgura=0

2.11 Considere el siguiente problema de programación lineal convexa:

Minimizar	$Z = 5X_1 + 2X_2$	a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima.
c.s.r.	$3X_1 + 6X_2 \geq 18$	b) ¿Cuáles son las restricciones activas?
	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$	c) ¿Cuáles son los valores de holgura o excedentes de cada restricción?
	$8X_1 + 2X_2 \geq 16$	d) ¿Cuántos y cuáles son los puntos extremos de la región factible?
	$7X_1 + 6X_2 \leq 42$	
$X_j \geq 0$	$j = 1, 2$	

Solución: a) $X_1=12/11=1,090$; $X_2=40/11=3,63$; $Z^*=140/11=12,72$ b) Restricciones activas: $8X_1+2X_2 \geq 16$; $5X_1+4X_2 \geq 20$ c) Restricción 1: Excedente= $78/11=7,090$ inactiva. Restricción 2: Excedente=0 activa. Restricción 3: Excedente=0 activa. Restricción 4: Holgura= $138/11=12,54$ inactiva. d) Cuatro (4) puntos extremos: $P_1=(6,0)$; $P_2=(6/17,112/17)$; $P_3^*=(12/11,40/11)$; $P_4=(8/3,5/3)$.

2.12 Empleando el método gráfico, encuentre dos soluciones óptimas para el siguiente problema de programación lineal convexa: Minimizar $Z=3X_1+5X_2$ con las siguientes restricciones: $3X_1+2X_2 \geq 36$; $3X_1+5X_2 \geq 45$; $X_1, X_2 \geq 0$

Solución: El problema tiene múltiples soluciones, dos de ellas son: Solución 1: $X_1=10$; $X_2=3$; $Z^*=45$; Solución 2: $X_1=15$; $X_2=0$; $Z^*=45$

2.13 Empleando el método gráfico, encuentre la solución óptima para el siguiente problema de programación lineal convexa: Maximizar $Z=3X_1+5X_2$ con las siguientes restricciones: $X_1 \leq 6$; $-3X_1-2X_2 \geq 18$; $X_1, X_2 \geq 0$

Solución: No hay área de soluciones factibles, luego, el problema no tiene solución. No existen parejas de puntos ordenados (X_1, X_2) positivos que satisfagan todas las restricciones.

2.14 Empleando el método gráfico, encuentre la solución óptima para el siguiente problema de programación lineal convexa: Maximizar $Z=X_1+5X_2$ con las siguientes restricciones: $3X_1+4X_2 \leq 6$; $X_1+3X_2 \geq 2$; $X_1, X_2 \geq 0$

Solución: $X_1=0$; $X_2=2$; $Z^*=10$

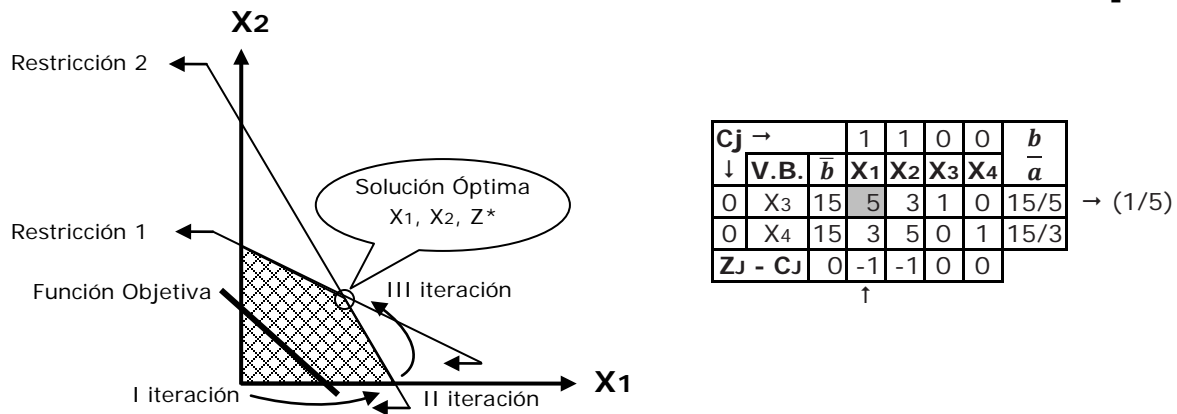
2.15 Una pequeña planta fabrica dos tipos de partes para automóvil. Compra piezas fundidas que se maquinan, taladran y pulen. Se dispone de los siguientes datos:

Tipo de parte	Maquinado (partes/hora)	Taladrado (partes/hora)	Pulido (partes/hora)
A	25	28	35
B	40	35	25

Las piezas fundidas para la parte A cuestan \$2 cada una; para la parte B cuestan \$3 cada una. Se venden a \$5 y \$6 por unidad, respectivamente. Los costos de operación por hora en maquinado, taladrado y pulido son: \$20, \$14 y \$ 17,50. Suponiendo que se pueden vender cualquier combinación de partes A y B, ¿Cuál es la mezcla de productos que maximiza la utilidad, si se trabajan 8 horas diarias?

Solución: $X_A=4.200/31=135,48$; $X_B=3.200/31=103,23$; $Z^*=9.520/31=307,09$

Capítulo 3 Método Simplex



Introducción

El presente capítulo ilustra el método simplex bajo dos presentaciones: Algebraico y tabular. Dentro de los métodos tabulares se ilustrara el tablero simplex, el método de las dos fases y por último una versión tabular simplificada del tablero simplex llamada, tabla de Garfinkel.

Método Simplex

En la necesidad de desarrollar un método general para resolver problemas de programación lineal convexa de más de dos variables, George Dantzing, en 1947, desarrolló el método simplex cuyo fundamento se explica mediante el método algebraico. El método usa como su principal herramienta, el álgebra, que ligado a un proceso de lógica matemática da como resultado el denominado método algebraico.

El siguiente ejemplo de solo dos variables, ilustra el método algebraico con el propósito de observar gráficamente lo que el método está realizando paso a paso.

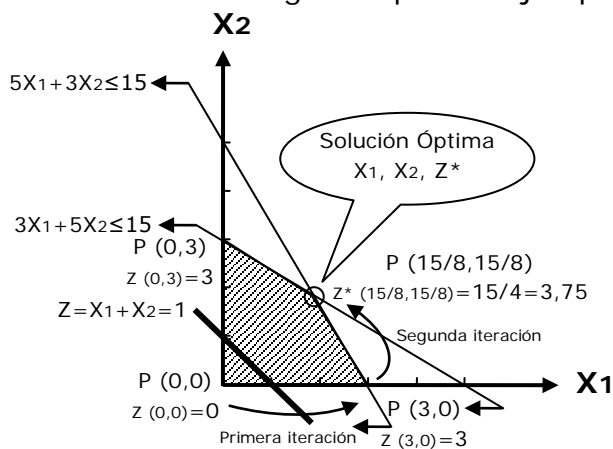
Ejemplo 3.1 Presentación algebraica con ilustración gráfica

<p>Maximizar $Z = X_1 + X_2$ c.s.r. $5X_1 + 3X_2 \leq 15$ $3X_1 + 5X_2 \leq 15$ $X_j \geq 0; j=1, 2$</p>	<p>Todo problema de programación lineal convexa que se formule de la forma: Maximice, con todas sus restricciones \leq y con la condición de no negatividad, recibe el nombre de forma <i>estándar</i> o forma <i>normal</i>.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

El área de soluciones factibles, las coordenadas en cada esquina y el valor de función objetivo Z en cada una de ellas, se muestra en la gráfica 3.1

$5X_1 + 3X_2 \leq 15$	$3X_1 + 5X_2 \leq 15$	$Z = X_1 + X_2 = 1$
$5X_1 + 3X_2 = 15$	$3X_1 + 5X_2 = 15$	$X_1 = 0$
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
$X_2 = 5$	$X_1 = 3$	$X_2 = 0$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$	$X_1 = 1$
Verdad.	Verdad.	

Gráfica 3.1 Método gráfico para el ejemplo 3.1



Fuente: El autor.

Algoritmo algebraico.

- 1) Convertir las inecuaciones lineales (restricciones) en ecuaciones lineales.
- 2) Hallar una solución básica y factible (solución inicial), establecer la base.
- 3) Organizar un sistema de ecuaciones.
- 4) Escoger la variable que entra a la base.
- 5) Escoger la variable que sale de la base.
- 6) Reorganizar el sistema de ecuaciones lineales (eliminación Gaussiana).
- 7) Repetir los pasos 4 a 6 hasta encontrar la solución óptima.

- 1) Convertir las inecuaciones lineales (restricciones) en ecuaciones lineales.

Expresar todas la inecuaciones como ecuaciones lineales, para ello y en este caso usamos variables de relleno, también llamadas de holgura, para igualar el lado izquierdo al lado derecho de la inecuación; así:

$$\begin{array}{rcl} 5X_1 + 3X_2 & \leq & 15 \\ 5X_1 + 3X_2 + X_3 & = & 15 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3X_1 + 5X_2 & \leq & 15 \\ 3X_1 + 5X_2 + X_4 & = & 15 \end{array}$$

Aquí X_3 y X_4 son las variables de holgura o relleno, que al adicionarlas al lado izquierdo, establecen la igualdad con el lado derecho de la inecuación lineal. Las variables X_1 y X_2 se denominan variables de decisión o variables reales, las variables de relleno u holgura se usan para convertir una inecuación en una ecuación, esto es, igualar el lado izquierdo al lado derecho. Las variables de

holgura o de relleno, se suman o restan al lado izquierdo de la inecuación, según convenga para establecer la igualdad.

2) Hallar una solución básica y factible (solución inicial), establecer la base.

Escoger en cada ecuación una variable que sirva como solución inicial al problema y que tome un valor positivo (≥ 0), NO son elegibles las variables de decisión o variables reales. Entonces, las variables de holgura o relleno (si las hay) son las primeras opcionadas a ser escogidas como variables básicas y factibles, lo que significa que deben tomar un valor mayor o igual a cero (≥ 0), dicho de otra forma, las variable básicas factibles, deben cumplir con la condición de no negatividad ($X_j \geq 0$; $j=1, \dots, n$). De no conseguirse una variable de holgura que sea factible, se utiliza el recurso de las variables de súper-avit o artificiales, pero de este caso se explicará en el segundo ejemplo, para el que se usa el denominado método de la gran M. Aquí tanto X_3 como X_4 , variables de holgura, son escogidas como variables básicas factibles, ya que ambas asumen valores positivos al ser X_1 y X_2 variables no básicas e iguales a cero (0), esto es:

$$\begin{array}{l} 5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15 \\ \text{Si } X_1 \text{ y } X_2 = 0, \text{ entonces:} \\ X_3 = 15, \text{ valor } \geq 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15 \\ \text{Si } X_1 \text{ y } X_2 = 0, \text{ entonces:} \\ X_4 = 15, \text{ valor } \geq 0 \end{array} \right.$$

3) Organizar un sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones se ordena de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} (0) \quad \mathbf{Z} - X_1 - X_2 = 0 \\ (1) \quad 5X_1 + 3X_2 + \mathbf{X_3} = 15 \\ (2) \quad 3X_1 + 5X_2 + \mathbf{X_4} = 15 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{En la ecuación cero (0),} \\ \text{siempre Z es la variable} \\ \text{básica.} \end{array} \right.$$

En cada ecuación existe una y solo una variable básica con coeficiente uno (1), lo que permite leer su valor de manera automática al lado derecho; esto es: $Z = 0$; $X_3 = 15$ y $X_4 = 15$; la cual es una SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE. Una lista clasificada de las variables es:

Tabla 3.1: Primera solución básica y factible.

Variables	Tipo de variable	Característica	Abreviatura
$X_1 = 0$	Variable de decisión	Variable no básica	VNB
$X_2 = 0$	Variable de decisión	Variable no básica	VNB
$X_3 = 15$	Variable de holgura	Variable básica	VB
$X_4 = 15$	Variable de holgura	Variable básica	VB
$Z = 0$	Variable objetivo	Variable básica*	VB

*La variable dependiente Z, siempre es variable básica en la fila cero (0)

La solución inicial al problema es: $X_1=0$, $X_2=0$, $Z=0$, luego estamos en el punto (0,0) en la gráfica 3.1

4) Escoger la variable que entra a la base – **Iteración**.

Ahora, analizamos si existe una solución mejor que la solución básica factible inicial, para ello, del sistema de ecuaciones inmediatamente anterior, despejamos a Z de la ecuación (0), note que la variable básica Z queda despejada en función de las dos variables no básica (X1, X2) y hacemos la siguiente pregunta:

¿CUÁL ES LA VARIABLE QUE AL CRECER HACE QUE Z CREZCA MÁS?

Aquí, la velocidad de crecimiento, tanto de X1 como de X2 es uno (1), coeficiente de las variables X1 y X2, luego se presenta un empate, el cual se dirime al azar, se escoge **variable para entrar a X1**. Como regla general, la variable que entra, es aquella que al crecer hace que Z crezca más, ya que el objetivo es Maximizar el valor de Z, Dicho de otra forma, entrará la variable que tenga el coeficiente más positivo, para problemas de minimización, se escoge la variable que al crecer, haga que Z disminuya más, o sea, la que tenga el coeficiente más negativo. Si no hubiese variable para entrar, ello indica que nos encontramos en la solución óptima.

5) Escoger la variable que sale de la base.

Despejamos de la ecuación (1) y (2) las variables básicas.

(1) $X_3 = 15 - 5X_1 - 3X_2$	Como de las variables no básicas X1 y X2 ya fue escogida X1 para entrar a la base, entonces X2 seguirá siendo variable no básica e igual a cero (0), esto simplifica las ecuaciones así:
(2) $X_4 = 15 - 3X_1 - 5X_2$	

(1) $X_3 = 15 - 5X_1$	Fíjese que para todos los casos, siempre quedarán despejadas las variables básicas en función de la variable escogida para entrar (X1).
(2) $X_4 = 15 - 3X_1$	

Aquí la pregunta es:

¿CUÁL ES LA VARIABLE BÁSICA QUE RESTRINGE MÁS EL CRECIMIENTO DE LA VARIABLE QUE ENTRA?

Para averiguarlo, hacemos que las variables básicas X3 y X4 asuman su menor valor factible o sea cero (0) y observamos el valor que asume la variable escogida para entrar (X1).

$X_3 = 15 - 5X_1 = 0$, entonces, $X_1=3$, luego X3 deja crecer a X1 como máximo hasta 3	$X_4 = 15 - 3X_1 = 0$, entonces, $X_1=5$, luego X4 deja crecer a X1 como máximo hasta 5
----------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------

Resumiendo:

$$\begin{array}{lcl} (1) & X_3 = 15 - 5X_1 - 3(0) & \left| \begin{array}{l} X_3 = 15 - 5X_1 \\ X_1 \leq 3 \end{array} \right. \\ (2) & X_4 = 15 - 3X_1 - 5(0) & \left| \begin{array}{l} X_4 = 15 - 3X_1 \\ X_1 \leq 5 \end{array} \right. \end{array}$$

La variable básica que debe salir es aquella que restrinja más el crecimiento de la variable que entra, en caso de empate, se dirime arbitrariamente. Aquí se está cuidando la factibilidad de las variables, esto es, que todas sean positivas (≥ 0). En el caso de ser un problema de minimización, la presente regla de selección es igual. Para nuestro problema, la variable que sale es X_3 ya que como máximo dejará crecer a X_1 hasta 3, mientras que X_4 la deja crecer como máximo hasta 5.

6) Reorganizar el sistema de ecuaciones lineales (eliminación Gaussiana).

Observe que al entrar X_1 y salir X_3 el sistema de ecuaciones ya no tendrá una sola variable básica en cada fila con coeficiente uno (1), esto es:

$$\begin{array}{lcl} (0) & \mathbf{Z} - \mathbf{X_1} - X_2 & = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Variables básicas: } Z \text{ y } X_1 \\ \text{Variable básica: } X_1 \end{array} \right. \\ (1) & \mathbf{5X_1} + 3X_2 + X_3 & = 15 \\ (2) & \mathbf{3X_1} + 5X_2 + \mathbf{X_4} & = 15 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Variables básicas: } X_1 \text{ y } X_4 \end{array} \right. \end{array}$$

Fíjese que en la ecuación (1) se encuentra la variable que entra X_1 y la variable que sale X_3 por ello en esta fila solo queda como variable básica X_1 , lo malo aquí, es que X_1 tiene coeficiente diferente de uno (1), por ello, multiplicamos toda la fila por el inverso del coeficiente de X_1 (1/5) y la ecuación resultante se denomina "Fila Pivote" ya que posteriormente servirá para eliminar a X_1 de las ecuaciones (0) y (2).

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15 & \left| (1/5) \right. \\ (1) & X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 & \rightarrow \text{Fila pivote} \end{array}$$

Para encontrar el nuevo sistema de ecuaciones en el que en cada fila figure una y solo una variable básica con coeficiente uno (1), de tal forma que se pueda leer automáticamente su valor en el lado derecho (término independiente) de cada ecuación, se multiplica la fila pivote por menos el coeficiente de X_1 de cada una de las otras ecuaciones, la ecuación resultante, se suma con cada una de las otras ecuaciones para encontrar las nuevas ecuaciones del sistema. Para nuestro problema, esto es:

Multiplicamos la fila pivote, fila (1) por uno (1) y le sumamos la fila (0). El resultado es la nueva fila (0).

$$\begin{array}{lcl} (0) & Z - X_1 - X_2 & = 0 \\ (1) & X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 & (1) \rightarrow \\ \hline \text{Nueva ecuación (0)} & \rightarrow (0) & Z - 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \end{array}$$

Fíjese que se ha eliminado X_1 de la ecuación (0)

Ahora, se multiplica la fila pivote, fila (1) por (-3) y se le suma la ecuación (2), el resultado es la nueva ecuación (2):

$$\begin{array}{rcl}
 (2) & 3X_1 & + \quad 5X_2 \quad \quad \quad + X_4 = 15 \\
 (1) & X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \quad (-3) \rightarrow & \underline{(1) \quad -3X_1 \quad - \quad 9/5X_2 \quad -3/5X_3 \quad \quad \quad -9} \\
 \text{Nueva ecuación (2)} \rightarrow & (2) & \quad \quad \quad 16/5X_2 \quad -3/5X_3 \quad + X_4 = 6
 \end{array}$$

Fíjese que se ha eliminado a X_1 de la ecuación (2)

El nuevo sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & \mathbf{Z} & - \quad 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\
 (1) & & \mathbf{X_1} + \quad 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\
 (2) & & \quad 16/5X_2 - 3/5X_3 + \mathbf{X_4} = 6
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Las variables básicas y la} \\ \text{solución es: } Z=3, X_1=3 \text{ y} \\ X_4=6 \end{array} \right.$$

Una lista clasificada de variables para esta iteración es:

Tabla 3.2: Segunda solución básica y factible.

Variables	Tipo de variable	Característica	Abreviatura
$X_1 = 3$	Variable de decisión	Variable básica	VB
$X_2 = 0$	Variable de decisión	Variable no básica	VNB
$X_3 = 0$	Variable de holgura	Variable no básica	VNB
$X_4 = 6$	Variable de holgura	Variable básica	VB
$Z = 3$	Variable objetivo	Variable básica*	VB

*La variable dependiente Z , siempre es variable básica en la fila cero (0)

El sistema de ecuaciones debe tener siempre, las siguientes características:

1. En cada fila (ecuación) hay una y solo una variable básica, con coeficiente uno (1).
2. En la fila cero (0) (ecuación de la función objetivo Z), la variable básica siempre es Z y estará acompañada por las variables NO BÁSICAS.
3. Los términos independientes (lados derechos de las ecuaciones), siempre son los valores de las variables básicas en cada ecuación.

En la gráfica 3.1 se observa que lo que ha hecho el método algebraico es empezar por la peor solución básica factible (0,0) y saltar a una esquina contigua (3,0), mejorando el valor de la función objetivo Z , de 0 a 3, lo que corrobora que el proceso está, efectivamente maximizando (incrementando el valor de Z).

Ahora la pregunta es:

¿ES ESTA LA SOLUCIÓN ÓPTIMA?

La respuesta la hallamos, si encontramos una variable que al entrar a la base, haga que la función objetivo crezca más, lo anterior significa que se deben

repetir los pasos 4, 5 y 6, hasta que no se encuentre una variable que al entrar a la base, haga que Z crezca, cuando ello ocurre, la solución es óptima.

4) Escoger la variable que entra a la base – **II Iteración.**

Del nuevo sistema de ecuaciones, se despeja Z, que queda en función de las variables no básicas: X₂ y X₃

Variable que entra: $Z = 2/5X_2 - 1/5X_3 + 3 = 0,4X_2 - 0,2X_3 + 3$

Variable que entra: X₂ (Aquella que tiene el coeficiente más positivo)

También se puede escoger la variable para entrar, sin despejar a Z, pero cambiando la regla de entrada, así:

Variable que entra: $Z - 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3$; $Z - 0,4X_2 + 0,2X_3 = 3$

Variable que entra: X₂ (Aquella que tiene el coeficiente más negativo)

El hacerlo de esta última manera, evita la actividad de despejar a Z.

5) Escoger la variable que sale de la base.

De las ecuaciones (1) y (2), se despeja la respectiva variable básica, en función de la variable escogida para entrar (X₂), ya que las demás variables son NO básicas con valor de cero (0). En cada ecuación resultante, se determina ¿Cuál es la variable que restringe más el crecimiento de la variable que entra (X₂)?

$$\begin{array}{lcl} X_1 & = & 3 - 3/5X_2 \\ X_4 & = & 6 - 16/5X_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline X_2 \leq 5 \\ X_2 \leq 15/8 = 1,875 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{Variable que sale } X_4 \end{array}$$

X₁ deja crecer a X₂ (variable que entra) hasta 5

X₄ deja crecer a X₂ (variable que entra) hasta 1,875

Luego la variable básica (X₁, X₄) que más restringe el crecimiento de la variable que entra (X₂) es X₄

6) Reorganizar el sistema de ecuaciones lineales (eliminación Gaussiana).

Último sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} (0) & \mathbf{Z} & - 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\ (1) & \mathbf{X_1} & + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\ (2) & & + 16/5X_2 - 3/5X_3 + \mathbf{X_4} = 6 \quad (5/16) \end{array}$$

Nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcl}
 (0) & \mathbf{Z} & & + & 1/8X_3 & + & 1/8X_4 & = & 15/4 \\
 (1) & & \mathbf{X_1} & & + & 5/16X_3 & - & 3/16X_4 & = & 15/8 \\
 (2) & & & \mathbf{X_2} & - & 3/16X_3 & + & 5/16X_4 & = & 15/8 \quad (2/5) \quad (-3/5)
 \end{array}$$

III Iteración

Variable que entra:

$$Z + 1/8X_3 + 1/8X_4 = 15/4, \text{ luego: } Z = -1/8X_3 - 1/8X_4 + 15/4$$

Ninguna variable al crecer hace que Z crezca, luego estamos en la solución óptima.

Solución óptima:

Variables de decisión o reales	Variables de holgura o de relleno
$X_1^* = \frac{15}{8} = 1,875$	$X_3^* = X_4^* = 0$
$X_2^* = \frac{15}{8} = 1,875$	
$Z^* = \frac{15}{4} = 3,75$	

Los valores óptimos de las variables de holgura $X_3 = X_4 = 0$ informan, que los recursos que representan las restricciones 1 y 2, se usan en su totalidad, ambas restricciones son activas y de estricto cumplimiento (el lado izquierdo es igual al lado derecho).

Ejemplo 3.2 Presentación algebraica, ilustrando el uso de la gran M

El presente ejemplo tiene las siguientes características:

1. El criterio de optimización en la función objetivo es de minimización.
2. El problema tiene 3 variables, para ilustrar que el método no está restringido a la cantidad de variables, como si lo está el método gráfico, a solo dos (2) variables.
3. Se consideran en las restricciones, las inecuaciones del tipo: Mayor o igual (\geq), igual ($=$) y menor o igual (\leq).
4. El problema nos enseña; cómo el método simplex en su presentación algebraica, nos indica que el problema tiene múltiples soluciones.

Hallar X_j ; $j = 1, 2, 3$ tal que:

$$\text{Minimice } Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$$

c.s.r.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$$

$$6X_1 + 4X_2 = 12$$

$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Iteración

El objetivo de la primera iteración es conseguir la solución básica factible y lograr el primer sistema de ecuaciones, para esto conseguiremos en cada una de las restricciones una variable básica factible, así:

Primera restricción: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$

Aquí para establecer la igualdad, se hace necesario restar una variable al lado izquierdo en atención a que es mayor o igual al lado derecho, para ello empleamos la variable X_4 , resultando la siguiente igualdad: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 = 6$. Ahora escogemos una variable en esta ecuación para ser variable básica factible, la candidata es X_4 , pero ella toma el valor de $X_4 = -6$ ($X_1 = X_2 = X_3$ son Variables de decisión o reales, no básicas e iguales a cero (0)), en atención a que X_4 asume un valor no factible (negativo, no cumple con la condición de no negatividad), se hace necesario emplear una nueva variable, que adicionada convenientemente asuma un valor factible y nos sirva como variable básica, esta variable la llamamos X_5 y se denomina variable de Súper-avit o variable artificial, quedando la ecuación de la siguiente manera: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6$. Aquí escogemos como variable básica a X_5 quien asume el valor de $X_5 = 6$, las demás variables son no básicas iguales a cero (0). Lo único malo es que al adicionar X_5 al lado izquierdo de la ecuación, la hemos desbalanceado, a no ser que X_5 al final valga cero (0), esto se logra, castigando o adicionando a X_5 en la función objetivo con un coeficiente muy grande en comparación con el resto de coeficientes de las demás variables, de tal forma que nunca sea escogida para entrar a la base y termine siendo variable no básica igual a cero (0), este artificio matemático es conocido como método de la gran M. Aquí como nuestra función objetivo tiene como criterio de optimización minimizar, la variable que entra es aquella que tenga el coeficiente más negativo, por ello debemos adicionar a X_5 como $+MX_5$, de ésta manera jamás será escogida para entrar a la base. La función objetivo queda de la siguiente manera: Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5$

Segunda restricción: $6X_1 + 4X_2 = 12$

Aquí la igualdad ya está hecha, luego no se necesita variable de holgura o relleno, pero al escoger variable básica, se tiene el inconveniente de no encontrar ninguna variable como candidata ya que inicialmente $X_1 = X_2 = X_3$ son Variables de decisión o reales, no básicas e iguales a cero (0). Se debe, entonces, hacer uso de la variable artificial o Súper-avit X_6 adicionándola convenientemente en la igualdad de tal manera que asuma un valor factible (≥ 0), quedando así: $6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12$, por supuesto, se adiciona a la función objetivo como $+MX_6$, quedando la función objetivo así: Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + MX_6$

Siempre que se adicione en una restricción una variable artificial, se debe adicionar en la función objetiva. Si la función objetivo es de

maximización; se adiciona como $-MX_j$. Si la función objetivo es de minimización; se adiciona como $+MX_j$

Tercera restricción: $2X_1 - 2X_2 \leq 2$

Para esta restricción solo se necesita una variable de holgura o relleno X_7 que asume como variable básica factible en razón a que toma un valor de $X_7 = 2$. La restricción queda, así: $2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2$

El problema queda expresado de la siguiente manera, llamada la FORMA ESTANDAR:

Minimice $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + MX_6$ Todas las variables adicionadas, c.s.r. también deben cumplir con la condición de no negatividad.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6$$

$$6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12$$

$$2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2$$

$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

El sistema de ecuaciones es:

$$(0) \quad Z - 6X_1 - 4X_2 - 2X_3 - MX_5 - MX_6 = 0$$

$$(1) \quad 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6$$

$$(2) \quad 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12$$

$$(3) \quad 2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2$$

Antes de iterar, se debe asegurar, que en cada ecuación exista una y solo una variable básica con coeficiente uno (1) y que en la ecuación (0), la variable básica sea Z. Como en la ecuación (0) existen adicionalmente a Z dos variables básicas X_5 y X_6 , debemos tratar la ecuación (0) con las ecuaciones (1) y (2) para eliminar a X_5 y X_6 de la ecuación (0), ello se logra sumándole a la ecuación (0) el resultado de multiplicar las ecuaciones (1) y (2) por M. La nueva ecuación (0) resultante, solo tendrá como variable básica a Z.

$$(0) \quad Z - 6X_1 - 4X_2 - 2X_3 - MX_5 - MX_6 = 0$$

$$(1) \quad 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6 \quad (M)$$

$$(2) \quad 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12 \quad (M)$$

La nueva ecuación (0) es:

$$(0) \quad Z - 6X_1 - 4X_2 - 2X_3 - MX_5 - MX_6 = 0$$

$$(1) \quad 6MX_1 + 2MX_2 + 6MX_3 - MX_4 + MX_5 = 6M$$

$$(2) \quad 6MX_1 + 4MX_2 + MX_6 = 12M$$

$$(0) \quad Z + (12M-6)X_1 + (6M-4)X_2 + (6M-2)X_3 - MX_4 = 18M$$

Ahora, la nueva ecuación (0), solo tiene como variable básica a Z.

El nuevo sistema inicial de ecuaciones es:

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & Z & + (12M-6)X_1 + (6M-4)X_2 + (6M-2)X_3 - MX_4 = 18M \\
 (1) & & 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6 \\
 (2) & & 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12 \\
 (3) & & 2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2
 \end{array}$$

En esta primera iteración el valor de las variables es:

Variables reales	Variables de holgura	Variables artificiales
X1 = 0 No Básica	X4 = 0 No Básica	X5 = 6 Básica
X2 = 0 No Básica	X7 = 2 Básica	X6 = 12 Básica
X3 = 0 No Básica		
Z = 18M Básica		

II Iteración

Variable que entra: X1, por tener el coeficiente más positivo en la ecuación (0)

Variable que sale: X5, por restringir más el crecimiento de X1

		X1	
X5 = 6 - 6X1	X1 ≤ 1	Se presenta un empate entre X5 y X7, arbitrariamente se elige como variable para salir a X5	
X6 = 12 - 6X1	X1 ≤ 2		
X7 = 2 - 2X1	X1 ≤ 1		

Luego, se debe convertir en uno (1) el coeficiente de X1 en la ecuación (1), y eliminar a X1 de las demás ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & Z & + (12M-6)X_1 + (6M-4)X_2 + (6M-2)X_3 - MX_4 = 18M \\
 (1) & & 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6 \quad (1/6) \\
 (2) & & 6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12 \\
 (3) & & 2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2
 \end{array}$$

La nueva ecuación (1) se multiplica por $-(12M-6)$ y se le suma la ecuación (0) vieja, para generar la ecuación (0) nueva.

La nueva ecuación (1) se multiplica por (-6) y se le suma la ecuación (2) antigua, para generar la ecuación nueva (2).

La ecuación nueva (1) se multiplica por (-2) y se le suma la antigua ecuación (3), para generar la nueva ecuación (3).

El nuevo sistema de ecuaciones queda así:

$$\begin{array}{rcl}
 (0) & Z & + (2M-2)X_2 - (6M-4)X_3 + (M-1)X_4 - (2M-1)X_5 = 6M+6 \\
 (1) & X_1 & + 1/3X_2 + X_3 - 1/6X_4 + 1/6X_5 = 1 \quad [-(12M-6), (-6), (-2)] \\
 (2) & & 2X_2 - 6X_3 + X_4 - X_5 + X_6 = 6 \\
 (3) & & - 8/3X_2 - 2X_3 + 1/3X_4 - 1/3X_5 + X_7 = 0
 \end{array}$$

En esta segunda iteración el valor de las variables es:

Variables reales	Variables de holgura	Variables artificiales
$X_1 = 1$ Básica	$X_4 = 0$ No Básica	$X_5 = 0$ No Básica
$X_2 = 0$ No Básica	$X_7 = 0$ Básica	$X_6 = 6$ Básica
$X_3 = 0$ No Básica		
$Z = 6M+6$ Básica		

III Iteración

Variable que entra: X_2 , por tener el coeficiente más positivo en la ecuación (0)

Variable que sale: X_6 , por restringir más el crecimiento X_2

		X_2	
$X_1 = 1$	$- 1/3X_2$	$X_2 \leq 3$	Se presenta un empate entre X_1 y X_6 , arbitrariamente se elige como variable para salir a X_6
$X_6 = 6$	$- 2X_2$	$X_2 \leq 3$	
$X_7 =$	$8/3X_2$	$X_2 \leq NR^*$	

NR^* : No restringe. En la ecuación $X_7 = 8/3X_2$ a medida que X_2 crece X_7 crece, luego X_7 no restringe el crecimiento de X_2

(0) Z	$+$	$(2M-2)X_2$	$- (6M-4)X_3$	$+ (M-1)X_4$	$- (2M-1)X_5$	$= 6M+6$
(1) X_1	$+$	$1/3X_2$	$+ X_3$	$- 1/6X_4$	$+ 1/6X_5$	$= 1$
(2)		$2X_2$	$- 6X_3$	$+ X_4$	$- X_5$	$+ X_6 = 6$
(3)	$-$	$8/3X_2$	$- 2X_3$	$+ 1/3X_4$	$- 1/3X_5$	$+ X_7 = 0$
(0) Z	$-$	$2X_3$	$- MX_5$	$- (M-1)X_6$	$= 12$	
(1) X_1	$+$	$2X_3$	$- 1/3X_4$	$+ 1/3X_5$	$- 1/6X_6$	$= 0$
(2) X_2	$-$	$3X_3$	$+ 1/2X_4$	$- 1/2X_5$	$+ 1/2X_6$	$= 3$
(3)	$-$	$10X_3$	$+ 5/3X_4$	$- 5/3X_5$	$+ 4/3X_6$	$+ X_7 = 8$

En esta tercera iteración el valor de las variables es:

Variables reales	Variables de holgura	Variables artificiales
$X_1 = 0$ Básica	$X_4 = 0$ No Básica	$X_5 = 0$ No Básica
$X_2 = 3$ Básica	$X_7 = 8$ Básica	$X_6 = 0$ No Básica
$X_3 = 0$ No Básica		
$Z = 12$ Básica		

IV Iteración

Variable que entra: Al lado izquierdo de la ecuación (0), del último sistema de ecuaciones, no existe ninguna variable que tenga coeficiente positivo (+), luego no hay ninguna variable No Básica para entrar a la base, entonces, la última solución es la óptima. Visto de otra manera, si despejamos de la ecuación (0), del último sistema de ecuaciones, la función $Z = 2X_3 + MX_5 + (M-1)X_6 + 12$ se observa que ninguna variable al crecer hace que Z disminuya, en atención a que todas las variables tienen su coeficiente positivo (+), luego

no hay una variable que al crecer haga que Z disminuya, lo anterior nos asegura que estamos en la solución óptima.

El método algebraico da una señal de que el problema tiene múltiples soluciones, cuando el coeficiente en la función objetivo (ecuación (0) del último sistema de ecuaciones) de una variable No Básica es cero (0). Aquí, el coeficiente de la variable X_4 en la función objetivo es cero (0).

Solución óptima al problema: El problema tiene múltiples soluciones, una de ellas es:

Variables de decisión	Variables de holgura	Variables artificiales
$X_1 = 0$ Básica	$X_4 = 0$ No Básica	$X_5 = 0$ No Básica
$X_2 = 3$ Básica	$X_7 = 8$ Básica	$X_6 = 0$ No Básica
$X_3 = 0$ No Básica		
$Z = 12$ Básica		

Observe que las variables artificiales X_5 y X_6 terminaron siendo No Básicas e iguales a cero (0), de acuerdo con el artificio matemático inicial llamado método de la gran M .

Notas Importantes:

1. Cuando en la solución óptima, al menos una de las variables artificiales es variable básica, con valor diferente de cero (0), significa que el problema no tiene solución, ya que el artificio de la gran M falla.
2. Cuando al decidir cuál es la variable que entra en la base, todas las variables básicas no restringen el crecimiento de la variable que entra (la dejan crecer de manera indiscriminada), el problema es de soluciones indeterminadas o soluciones no acotadas.
3. Cuando en la solución óptima, en la ecuación de la función objetivo (ecuación (0)), al menos una de las variables no básicas tiene coeficiente cero (0), indica que el problema tiene múltiples soluciones o soluciones alternas.
4. Cuando en una iteración se escoge una variable para entrar y otra para salir y en la siguiente iteración se escoge como variable para entrar la que salió y como variable para salir la que entro, se dice que el problema se ha degenerado. En términos geométricos, la degeneración ocurre cuando un vértice está definido por más de dos restricciones, este caso puede ocurrir cuando hay un empate al escoger la variable para salir de la base y el algoritmo simplex entra en un ciclo infinito.

En resumen, las reglas de decisión del método algebraico son:

Tabla 3.3 Reglas de decisión para el método simplex.

Criterio para decidir	Para maximizar	Para minimizar
Gran M en la función objetivo	$-MX_j$	$+MX_j$
Variable que entra	Aquella que tenga el coeficiente más negativo en la función objetivo, <u>estando todas las variables al lado izquierdo de la ecuación.</u>	Aquella que tenga el coeficiente más positivo en la función objetivo, <u>estando todas las variables al lado izquierdo de la ecuación.</u>
Variable que sale	Aquella que restrinja más el crecimiento de la variable que entra.	Aquella que restrinja más el crecimiento de la variable que entra.
Criterio de parada (óptimo)	Cuando no halla variable para entrar a la base.	Cuando no halla variable para entrar a la base.

Ejemplo 3.3 Método simplex, forma tabular.

El método algebraico es dispendioso, en razón a que trabaja con todos los datos de las ecuaciones, para mejorar este aspecto se creó el método simplex en forma tabular (tablero simplex) cuya gran virtud es su sencillez, método muy práctico, ya que solo trabaja con los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones.

Se ilustra su funcionamiento mediante ejemplos, pero previamente se muestran sus reglas de decisión para determinar la variable que entra, la variable que sale, la gran M, y cómo determinar que se está en la solución óptima.

Todas estas reglas de decisión fueron deducidas del método algebraico, solamente que aquí se han acomodado para ser usadas en el tipo de tablero simplex que se empleará.

Existen varios modelos de tablero simplex, que únicamente varían en su presentación, el tablero simplex que se ilustra en el presente libro, presenta algunas ventajas que lo hacen práctico en el análisis post-óptimo, tema que se presenta en un posterior capítulo.

Tabla 3.4 Reglas de decisión para el tablero simplex.

Criterio para decidir	Para maximizar	Para minimizar
Gran M en la función objetivo	$-MX_j$	$+MX_j$
Variable que entra	La variable que tenga el $(Z_j - C_j)$ más negativo.	La variable que tenga el $(Z_j - C_j)$ más positivo.
Variable que sale	La menos positiva de los b/a , siendo $a > 0$, de lo contrario No Restringe.	La menos positiva de los b/a , siendo $a > 0$, de lo contrario No Restringe.
Solución óptima	Cuando todos los $Z_j - C_j \geq 0$	Cuando todos los $Z_j - C_j \leq 0$

1. Si en el tablero simplex de la solución óptima queda al menos una variable artificial dentro de las variables básicas, con un valor mayor a cero (0), el problema no tiene solución, esto quiere decir que al menos existen dos restricciones excluyentes, por lo tanto no existe área de soluciones factible y menos una solución, en este caso se debe revisar la formulación del problema.
2. Si al escoger la variable que sale, ninguna de las variables básicas restringe el crecimiento de la variable no básica escogida para entrar, el problema tiene solución indeterminada o solución no acotada, se debe revisar la formulación en busca de una nueva restricción que no se tuvo en cuenta en la formulación inicial.
3. Si en el tablero simplex del óptimo, al menos una de las variables no básicas tiene coeficiente cero en la función objetivo, esto es, su $Z_j - C_j = 0$, el problema tiene múltiples soluciones y se nos está ofreciendo una de ellas.

Maximizar $Z = X_1 + X_2$
c.s.r.
 $5X_1 + 3X_2 \leq 15$
 $3X_1 + 5X_2 \leq 15$
 $X_j \geq 0; j = 1,2$

Todo problema de programación lineal que se formule de la forma Maximice, con todas sus restricciones \leq y con la condición de no negatividad, le llamaremos Forma Estándar ó Forma Normal.

Aquí, al igual que en el método algebraico, debemos conseguir una solución básica factible, empleando las variables de holgura y/o artificiales, quedando el sistema de ecuaciones así:

Maximizar $Z = X_1 + X_2$
c.s.r.
 $5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15$
 $3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15$
 $X_j \geq 0; j = 1,2$

Las variables básicas son X_3 y X_4 en la función objetivo Z . Fíjese que en cada ecuación hay solamente una variable básica con coeficiente uno (1).

A continuación construimos la siguiente tabla:

$C_j \rightarrow$			1	1	0	0	b
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	\bar{a}
0	X_3	15	5	3	1	0	
0	X_4	15	3	5	0	1	
$Z_j - C_j$		0	-1	-1	0	0	

En la figura 3.1 se ilustra cada una de las partes que conforman el tablero simplex.

Figura 3.1 Ilustración del tablero simplex.

$C_j \rightarrow$			1	1	0	0	b
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	\bar{a}
0	X_3	15	5	3	1	0	
0	X_4	15	3	5	0	1	
$Z_j - C_j$		0	-1	-1	0	0	

Z

$Z_j - C_j$

Fuente: El autor.

El valor de la función objetiva Z , se encuentra frente a la casilla de $Z_j - C_j$, en este caso su valor es cero (0) y se calcula multiplicando el vector columna transpuesto (la primera columna de la tabla simplex en la figura 3.1), que contiene los coeficientes de las variables básicas en la función objetiva original, multiplicado por el vector columna de los términos independientes \bar{b}

$$Z = C_B^T \bar{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = (0)(15) + (0)(15) = 0$$

C_B^T = Vector transpuesto de los coeficientes en la función objetivo original (inicial) de las variables básicas actuales; sus valores se encuentran en la primera columna del tablero simplex.

\bar{b} = Vector columna de los términos independientes de las restricciones, que al mismo tiempo son los valores de las variables básicas actuales, sus valores se encuentran bajo la columna denominada \bar{b}

El valor de los $Z_j - C_j$ se calcula multiplicado el vector columna transpuesto C_B^T por el vector apuntador \bar{a}_j de la columna de la variable j -ésima, menos el C_j , respectivo, esto es:

$$Z_j - C_j = C_B^T \bar{a}_j - C_j$$

$$\begin{aligned}
 Z_1 - C_1 &= C_B^T \bar{a}_1 - C_1 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 = (0)(5) + (0)(3) - 1 = -1 \\
 Z_2 - C_2 &= C_B^T \bar{a}_2 - C_2 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 = (0)(3) + (0)(5) - 1 = -1 \\
 Z_3 - C_3 &= C_B^T \bar{a}_3 - C_3 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (0)(1) + (0)(0) - 0 = 0 \\
 Z_4 - C_4 &= C_B^T \bar{a}_4 - C_4 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = (0)(0) + (0)(1) - 0 = 0
 \end{aligned}$$

La variable que entra, en el caso de maximización de la función objetiva, es la que tenga el valor de $Z_j - C_j$ más negativo. En el presente ejemplo, ocurre un empate entre $(Z_1 - C_1)$ y $(Z_2 - C_2)$ que corresponden a las columnas de las variables X_1 y X_2 . De manera arbitraria se eligió a X_1 como variable para entrar a la base. Escoger el valor más negativo, significa, que entre los valores negativos se escoge el más negativo, si no hay negativos, estamos en la solución óptima.

La variable que sale de la base, se escoge eligiendo el valor menos positivo de los b/a , siendo $a > 0$, de lo contrario "*No restringe*". Los valores de " a " corresponden a la columna de la variable que entra, para el presente ejemplo, los elementos de la columna \bar{a}_1 que corresponden a **X_1**

$C_j \rightarrow$			1	1	0	0	b
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	$\frac{b}{a}, a > 0$
0	X_3	15	5	3	1	0	15/5=3
0	X_4	15	3	5	0	1	15/3=5
$Z_j - C_j$		0	-1	-1	0	0	

↑

→ (1/5)

Variable que entre: **X_1**

Variable que sale: **X_3**

Recuerde que la columna de b/a se calcula, siempre y cuando el denominador sea $a > 0$; de lo contrario la variable básica respectiva no restringe el valor de la variable escogida para entrar, los valores de " a ", están en el respectivo vector apuntador de la variable j -ésima escogida para entrar, en esta iteración son 5 y 3 y el cálculo respectivo es: $15/5 = 3$ y $15/3 = 5$; lo que significa que la variable básica X_3 restringe el crecimiento de la variable que entra X_1 hasta 3 (no la deja tomar valores superiores a 3) y la variable básica X_4 restringe el crecimiento de la variable que entra X_1 hasta 5 (no la deja tomar valores superiores a 5). Por supuesto la variable básica que restringe más el crecimiento de la variable que entra (X_1) es X_3 , por lo tanto es la variable básica escogida para salir.

La fila de la variable básica escogida para salir se divide por el elemento que se encuentra en la intersección de dicha fila con la columna de la variable que entra, la fila resultante es la fila pivote y se coloca en un nuevo tablero, desde el que se suman múltiplos de la fila pivote a las demás filas del tablero anterior de tal forma que se eliminen de cada una de ellas la variable escogida para entrar, en nuestro caso X_1 , este procedimiento consiste en "*hacer un uno (1) en la intersección y el resto de la columna ceros (0)*", por lo tanto en dicha

columna aparecerá un vector unitario, el procedimiento se repite en cada iteración, hasta que todos los $Z_j - C_j$ sean mayores o iguales a cero en el caso de maximizar o menores o iguales a cero en el caso de minimizar.

A continuación, se muestran todas las iteraciones y en cada fila los valores por los cuales fueron multiplicadas para ser sumadas a otras filas, ello se expresa como sumar múltiplos de una fila a otra. Fíjese que se suman múltiplos de las restricciones a la función objetivo para eliminar las variables básicas de ella.

$C_j \rightarrow$		1	1	0	0	$\frac{b}{a}, a > 0$	
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	X_1	3	1	3/5	1/5	0	5
0	X_4	6	0	16/5	-3/5	1	15/8=1,875
ZJ - CJ		3	0	-2/5	1/5	0	

↑

(-3) → (5/16)

Variable entre: X_2 que
Variable sale: X_4 que

$C_j \rightarrow$		1	1	0	0	
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
1	X_1	15/8	1	0	5/16	-3/16
1	X_2	15/8	0	1	-3/16	5/16
ZJ - CJ		15/4	0	0	1/8	1/8

(-3/5)

Solución óptima

$X_1^* = \frac{15}{8}, X_2^* = \frac{15}{8}, Z^* = \frac{15}{4}$

$X_3^* = X_4^* = 0$

Conclusiones:

1. El problema tiene una única solución: $X_1=15/8, X_2=15/8, Z^*=15/4$
2. La presentación tabular del método simplex es más práctica que la presentación algebraica.

A continuación se presenta un paralelo del ejercicio anterior, para observar que el método es el mismo y que lo único que cambia es la forma de presentación.

Método Simplex, Forma Algebraica Método Simplex, Forma Tabular

Iteración I

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Z - X_1 - X_2 = 0 \\
 (1) \quad & 5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15 \\
 (2) \quad & 3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15
 \end{aligned}$$

$C_j \rightarrow$		1	1	0	0	$\frac{b}{a}$
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	15	5	3	1	0
0	X_4	15	3	5	0	1
ZJ - CJ		0	-1	-1	0	0

↑

→ (1/5)

Iteración II

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Z - 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\
 (1) \quad & X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3 \\
 (2) \quad & 16/5X_2 - 3/5X_3 + X_4 = 6
 \end{aligned}$$

$C_j \rightarrow$		1	1	0	0	$\frac{b}{a}$
\downarrow	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
1	X_1	3	1	3/5	1/5	0
0	X_4	6	0	16/5	-3/5	1
ZJ - CJ		3	0	-2/5	1/5	0

↑

(-3) → (5/16)

Método Simplex, Forma Algebraica Método Simplex, Forma Tabular
Iteración III

$$\begin{aligned} (0) \quad & \mathbf{Z} \quad + 1/8X_3 + 1/8X_4 = 15/4 \\ (1) \quad & \mathbf{X_1} \quad + 5/16X_3 - 3/16X_4 = 15/8 \\ (2) \quad & \mathbf{X_2} \quad - 3/16X_3 + 5/16X_4 = 15/8 \end{aligned}$$

Cj →			1	1	0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4
1	X1	15/8	1	0	5/16	-3/16
1	X2	15/8	0	1	-3/16	5/16
Zj - Cj		15/4	0	0	1/8	1/8

(-3/5)

Ejemplo 3.4 Método Simplex, Forma Tabular con la gran M y múltiples soluciones

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$
 Con las siguientes restricciones:
 $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$
 $6X_1 + 4X_2 = 12$
 $2X_1 - 2X_2 \leq 2$
 $X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$

Es un problema de tres (3) variables, difícil de graficar, es de minimizar y tiene restricciones de $\geq, =$ y \leq

Expresamos todas las restricciones como igualdades, usando variables de holgura y variables artificiales que castigan la función objetiva.

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + MX_6$
 Con las siguientes restricciones:
 $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + \mathbf{X_5} = 6$
 $6X_1 + 4X_2 + \mathbf{X_6} = 12$
 $2X_1 - 2X_2 + \mathbf{X_7} = 2$
 $X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Introduciendo los datos al tablero simplex y aplicando las reglas estipuladas en la tabla 3.1, tenemos que:

Cj →			6	4	2	0	M	M	0	b
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	$\frac{b}{a}$
M	X5	6	6	2	6	-1	1	0	0	1
M	X6	12	6	4	0	0	0	1	0	2
0	X7	2	2	-2	0	0	0	0	1	1
Zj - Cj		18M	12M-6	6M-4	6M-2	-M	0	0	0	

→ (1/6)

Cj →			6	4	2	0	M	M	0	b
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	$\frac{b}{a}$
6	X1	1	1	1/3	1	-1/6	1/6	0	0	3
M	X6	6	0	2	-6	1	-1	1	0	3
0	X7	0	0	-8/3	-2	1/3	-1/3	0	1	NR
Zj - Cj		6M+6	0	2M-2	-6M+4	M-1	-2M+1	0	0	

(-6)(-2)

→ (1/2)

Cj →			6	4	2	0	M	M	0
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
6	X1	0	1	0	2	-1/3	1/3	-1/6	0
4	X2	3	0	1	-3	1/2	-1/2	1/2	0
0	X7	8	0	0	-10	5/3	-5/3	4/3	1
Zj - Cj		12	0	0	-2	0	-M	-M+1	0

El problema tiene múltiples soluciones: La variable no básica X4 en la solución óptima, tiene su $Z_4 - C_4 = 0$

Una de las soluciones es:

Variables Reales	Variables de Holgura	Variables Artificiales
$X_1^* = 0$	$X_4^* = 0$	$X_5^* = 0$
$X_2^* = 3$	$X_7^* = 8$	$X_6^* = 0$
$X_3^* = 0$		
$Z^* = 12$		

Ejemplo 3.5 Método Simplex, Forma Tabular con variables irrestrictas

El método simplex está diseñado solo para problemas donde todas las variables deben ser positivas, es decir, todas las variables deben cumplir con la condición de no negatividad; sin embargo, existen casos en los cuales algunas de las variables de un problema pueden asumir valores negativos. En este ejemplo se muestra cómo resolver un problema en donde no todas las variables deben cumplir la condición de no negatividad, dicho de otra manera, con variables irrestrictas. Aquí el secreto consiste en remplazar cada una de las variables irrestrictas por la diferencia de dos variables que si deban cumplir la condición de no negatividad.

Maximizar $Z = 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 - X_4$

Con las siguientes restricciones:

$$X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 \geq 1$$

$$2X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 \leq 3$$

$$X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 5$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2, 4$$

Aquí, X_3 tiene libertad en el signo, esto es, puede tomar valores positivos o negativos. Hacemos $X_3 = K - W$, en donde K y W deben ser positivos, $K \geq 0$ y $W \geq 0$

Lo que se hace es cambiar una variable irrestricta (X_3) por la diferencia de dos variables restringidas en su signo ($K - W$).

Fíjese que siendo $K \geq 0$ y $W \geq 0$ la variable X_3 puede asumir cualquier valor dentro de los números reales, desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Si $K > W$ entonces $X_3 > 0$; positivo

Si $K = W$ entonces $X_3 = 0$

Si $K < W$ entonces $X_3 < 0$; negativo

Lo que hemos conseguido es convertir un problema que es irrestricto en su variable X_3 en uno que es restringido en todas sus variables, el problema queda así:

Maximizar $Z=4X_1+5X_2+2K-2W-X_4$
Con las siguientes restricciones:

$$X_1 + X_2 + 2K - 2W - X_4 \geq 1$$

$$2X_1 + 2X_2 - 3K + 3W + X_4 \leq 3$$

$$X_1 + 4X_2 + 3K - 3W + 2X_4 \leq 5$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2, 4; K \geq 0 \text{ y } W \geq 0$$

Ahora, el problema es uno clásico de programación lineal. Se procede a resolverlo empleando el método simplex, Adicionando las variables de holgura y artificiales que sean necesarias para conseguir la solución básica factible.

Maximizar $Z=4X_1+5X_2+2K-2W-X_4-MX_6$

Con las siguientes restricciones:

$$X_1 + X_2 + 2K - 2W - X_4 - X_5 + X_6 = 1$$

$$2X_1 + 2X_2 - 3K + 3W + X_4 + X_7 = 3$$

$$X_1 + 4X_2 + 3K - 3W + 2X_4 + X_8 = 5$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2, 4; K \geq 0 \text{ y } W \geq 0$$

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8		
-M	X6	1	1	1	2	-2	-1	-1	1	0	0	1/2	→(1/2)
0	X7	3	2	2	-3	3	1	0	0	1	0	NR	
0	X8	5	1	4	3	-3	2	0	0	0	1	5/3	
Zj - Cj		-M	-M-4	-M-5	-2M-2	2M+2	M+1	M	0	0	0		
↑													
Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8		
2	K	1/2	1/2	1/2	1	-1	-1/2	-1/2	1/2	0	0	1	(3)(-3)→(2)
0	X7	9/2	7/2	7/2	0	0	-1/2	-3/2	3/2	1	0	9/7	
0	X8	7/2	-1/2	5/2	0	0	7/2	3/2	-3/2	0	1	7/5	
Zj - Cj		1	-3	-4	0	0	0	-1	M+1	0	0		
↑													
Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8		
5	X2	1	1	1	2	-2	-1	-1	1	0	0	NR	(-7/2)(-5/2)
0	X7	1	0	0	-7	7	3	2	-2	1	0	1/7	→(-1/7)
0	X8	1	-3	0	-5	5	6	4	-4	0	1	1/5	
Zj - Cj		5	1	0	8	-8	-4	-5	M+5	0	0		
↑													
Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8		
5	X2	9/7	1	1	0	0	-1/7	-3/7	3/7	2/7	0	NR	
-2	W	1/7	0	0	-1	1	3/7	2/7	-2/7	1/7	0	1/2	(2)(-5)
0	X8	2/7	-3	0	0	0	27/7	18/7	-18/7	-5/7	1	1/9	→(7/18)
Zj - Cj		43/7	1	0	0	0	-4/7	-19/7	M+19/7	8/7	0		
↑													

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8	
5	X2	4/3	1/2	1	0	0	1/2	0	0	1/6	1/6	8/3
-2	W	1/9	1/3	0	-1	1	0	0	0	2/9	-1/9	1/3
0	X5	1/9	-7/6	0	0	0	3/2	1	-1	-5/18	7/18	NR
Zj - Cj		58/9	-13/6	0	0	0	7/2	0	M	7/18	19/18	

↑

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8	
5	X2	7/6	0	1	3/2	-3/2	1/2	0	0	-1/6	-1/3	7/9
4	X1	1/3	1	0	-3	3	0	0	0	2/3	-1/3	NR
0	X5	1/2	0	0	-7/2	7/2	3/2	1	-1	1/2	0	NR
Zj - Cj		43/6	0	0	-13/2	13/2	7/2	0	M	11/6	1/3	

↑

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	K	W	X4	X5	X6	X7	X8	
2	K	7/9	0	2/3	1	-1	1/3	0	0	-1/9	2/9	(3)(7/2)
4	X1	8/3	1	2	0	0	1	0	0	1/3	1/3	
0	X5	29/9	0	7/3	0	0	8/3	1	-1	1/9	7/9	
Zj - Cj		110/9	0	13/3	0	0	17/3	0	M	10/9	16/9	

En el último tablero, Todos los $Z_j - C_j$ son mayores o iguales a cero, entonces, estamos en la solución óptima.

$$X_1^* = 8/3$$

$$W^* = 0$$

$$X_6^* = 0$$

$$Z^* = 110/9$$

$$X_2^* = 0$$

$$X_4^* = 0$$

$$X_7^* = 0$$

$$K^* = 7/9$$

$$X_5^* = 29/9$$

$$X_8^* = 0$$

$$X_3^* = \frac{7}{9} - 0 = \frac{7}{9}$$

Ejemplo 3.6 Método Simplex, forma tabular, Número de variables v.s. Número de restricciones.

En este ejemplo se observa que a pesar de que el sistema tiene 4 variables, el número de iteraciones es apenas de 2. La dificultad del método simplex para encontrar la solución óptima radica en el número de restricciones y no en el número de variables, ya que se mueve por las esquinas del área de soluciones factibles, que a su vez son formadas por la intersección de las restricciones, dicho de otra manera, entre más restricciones tenga el problema, se espera que el área de soluciones factibles tenga más esquinas, que el método simplex debe visitar.

$$\text{Minimizar } Z = 3X_1 - 9X_2 - 5X_3 - 4X_4$$

c.s.r.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Minimizar } Z = 3X_1 - 9X_2 - 5X_3 - 4X_4$$

c.s.r.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 + \mathbf{X_5} \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 + \mathbf{X_6} \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Cj	→		3	-9	-5	-4	0	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
0	X5	8	1	4	5	8	1	0	2
0	X6	4	1	2	6	4	0	1	2
Zj - Cj		0	-3	9	5	4	0	0	

→ (1/4)

↑

Cj	→		3	-9	-5	-4	0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6
-9	X2	2	1/4	1	5/4	2	1/4	0
0	X6	0	1/2	0	7/2	0	-1/2	1
Zj - Cj		-18	-21/4	0	-25/4	-14	-9/4	0

Fíjese que el valor de Z puede ser negativo, la condición de no negatividad es para las variables X_j , no aplica para el valor de la función objetiva.

Solución:

$$\begin{array}{llll} X_1^* = 0 & X_3^* = 0 & X_5^* = 0 & Z^* = -18 \\ X_2^* = 2 & X_4^* = 0 & X_6^* = 0 & \end{array}$$

Conclusión:

El método simplex es más práctico que el método algebraico, pero para problemas de un mediano número de variables y restricciones, fácilmente se vuelve dispendioso por el número de iteraciones y demorado para obtener la solución óptima, es aquí donde el uso del computador se hace indispensable y útil en términos de eficiencia, para ello existe el software adecuado, los más conocidos son:

WinQsb de Yih-Long Chang, distribuido por John Wiley & Sons. Inc N.Y. Se puede descargar una versión gratuita de: <http://www.softonic.com/s/winqsb>

Solver de Frontline Systems Inc., que viene integrado con el Excel de Microsoft.

Se sugiere consultar las siguientes páginas web:

<http://www.unibague.edu.co/~francisco.chediak>
<http://www.freewebtown.com/kchediak/>
<http://operativa.tripod.com/index.html>
www.lindo.com

Método de las dos fases

Introducción

En el computador se usa para la gran M, "Un número muy grande, ej.: 999.999.999.999", existe un efecto de error en los cálculos, ya que la gran M tiende a infinito, para evitar usar la gran M, se diseñó el Método de las dos fases, que consiste, en eludir el uso de la gran M, en problemas donde se utilizan las variables artificiales.

Fase I

Minimizar la sumatoria de las variables Artificiales, usadas en el problema.

Si $Z = 0$, proceder con la fase II

Si Z es diferente de cero, el problema no tiene solución.

Fase II

Use la solución de la fase I como solución inicial factible de la fase II, teniendo en cuenta que todas las variables artificiales son iguales a cero.

Ejemplo 3.7 Método de las dos fases

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2 + MX_3 + MX_5$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_6 = 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Fase I

Minimizar $Z = X_3 + X_5$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_6 = 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

La fase I siempre será Minimizar la sumatoria de todas las variables artificiales que tenga el problema.

A continuación procedemos a solucionar el problema planteado, usando el método simplex, ya sea manualmente o mediante el software WinQsb. De forma manual, los resultados son los siguientes:

C _j →			0	0	1	0	1	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
1	X ₃	3	3	1	1	0	0	0	1	→(1/3)
1	X ₅	6	4	3	0	-1	1	0	3/2	
0	X ₆	4	1	2	0	0	0	1	4	
Z _j - C _j		9	7	4	0	-1	0	0		

↑

C _j →			0	0	1	0	1	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		
0	X ₁	1	1	1/3	1/3	0	0	0	3	(-4)(-1)
1	X ₅	2	0	5/3	-4/3	-1	1	0	6/5	→(3/5)
0	X ₆	3	0	5/3	-1/3	0	0	1	9/5	
Z _j - C _j		2	0	5/3	-7/3	-1	0	0		

↑

C _j →			0	0	1	0	1	0	
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	
0	X ₁	3/5	1	0	3/5	1/5	-1/5	0	
0	X ₂	6/5	0	1	-4/5	-3/5	3/5	0	(-1/3)(-5/3)
0	X ₆	1	0	0	1	1	-1	1	
Z _j - C _j		0	0	0	-1	0	-1	0	

En esta solución óptima de la primera fase, todas las variables artificiales son iguales a cero ($X_3 = X_5 = 0$) y $Z^* = 0$, luego procedemos a la segunda fase.

Fase II

En el tablero óptimo de la fase I, se estableció que las variables artificiales X_3 y X_5 son iguales a cero y son variables no básicas, que no pueden volver a entrar a la base, esto quiere decir que sus respectivas columnas pueden ser eliminadas del tablero óptimo de la fase I, siendo el problema a resolver en la segunda fase el siguiente:

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

Con las siguientes restricciones:

$$\mathbf{X_1} + \frac{1}{5}X_4 = \frac{3}{5}$$

$$\mathbf{X_2} - \frac{3}{5}X_4 = \frac{6}{5}$$

$$X_4 + \mathbf{X_6} = 1$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 4, 6$$

En la fase II, la función objetivo es la original del problema. El nuevo problema a resolver, no tiene la gran M, ya que han dejado de figurar las variables artificiales, en atención a que en la fase I se estableció que son iguales a cero y por ser artificiales, nunca serán

escogidas para entrar a la base. La solución al nuevo problema se halla mediante el método simplex. Así:

Cj →			4	1	0	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X4	X6	
4	X1	3/5	1	0	1/5	0	3
1	X2	6/5	0	1	-3/5	0	NR
0	X6	1	0	0	1	1	1 →
Zj - Cj		18/5	0	0	1/5	0	

Cj →			4	1	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X4	X6	
4	X1	2/5	1	0	0	-1/5	
1	X2	9/5	0	1	0	3/5	
0	X4	1	0	0	1	1	(-1/5)(3/5)
Zj - Cj		17/5	0	0	0	-1/5	

Solución:

$X_1^* = 2/5$ $X_4^* = 1$ En la siguiente página se presenta un paralelo
 $X_2^* = 9/5$ $X_6^* = 0$ entre el tablero simplex con la gran M y el método
 $Z^* = 17/5$ $X_3^* = X_5^* = 0$ de las dos fases.

Tabla de Garfinkel

La tabla de Garfinkel se basa en las siguientes aseveraciones:

Si las columnas de las variables básicas, siempre son vectores unitarios, ¿para qué escribirlas en el tablero? Lo anterior lleva a eliminar del tablero simplex, las columnas de las variables básicas, de tal forma que el tablero estará conformado en sus filas por las variables básicas y en sus columnas por las variables no básicas.

Si las variables artificiales, al salir de la base nunca serán escogidas para entrar de nuevo, ¿para qué escribir su columna en el tablero? Lo anterior lleva a eliminar las columnas de las variables artificiales que abandonen la base.

Propiedades

1. Maneja solo las columnas de las variables no básicas.
2. Todos los cálculos están en función del elemento pivote³
3. Cuando de la base, sale una variable artificial, se elimina la columna que ella ocupará.

³ El elemento pivote se encuentra en la intersección de la fila de la variable básica escogida para salir y la columna de la variable no básica escogida para entrar.

Paralelo entre el tablero simplex y el método de las dos fases, observe que el método de las dos fases evita los tableros donde figura la gran M, ello le cuesta una iteración adicional.

Tablero Simplex con la gran M

Cj →			4	1	M	0	M	0	$\frac{b}{a}$
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
M	X3	3	3	1	1	0	0	0	1
M	X5	6	4	3	0	-1	1	0	3/2
0	X6	4	1	2	0	0	0	1	4
Zj - Cj	9M	7M-4	4M-1	0	-M	0	0		

→(1/3)

Cj →			4	1	M	0	M	0	$\frac{b}{a}$
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
4	X1	1	1	1/3	1/3	0	0	0	3
M	X5	2	0	5/3	-4/3	-1	1	0	6/5
0	X6	3	0	5/3	-1/3	0	0	1	9/5
Zj - Cj	2M+4	0	5/3M+1/3	-7/3M+4/3	-M	0	0		

→(3/5)

Cj →			4	1	M	0	M	0	$\frac{b}{a}$
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
4	X1	3/5	1	0	3/5	1/5	-1/5	0	3
1	X2	6/5	0	1	-4/5	-3/5	3/5	0	NR
0	X6	1	0	0	1	1	-1	1	1
Zj - Cj	18/5	0	0	-M+8/5	1/5	-M-1/5	0		

→(-1/3)(-5/3)

Cj →			4	1	M	0	M	0	
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
4	X1	2/5	1	0	2/5	0	0	-1/5	
1	X2	9/5	0	1	-1/5	0	0	3/5	
0	X4	1	0	0	1	1	-1	1	
Zj - Cj	17/5	0	0	-M+7/5	0	-M	-1/5		

→(-1/5)(3/5)

Solución:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 2/5 & X_4^* &= 1 \\ X_2^* &= 9/5 & X_6^* &= 0 \\ Z^* &= 17/5 & X_3^* &= X_5^* = 0 \end{aligned}$$

Método de las dos fases

Cj →			0	0	1	0	1	0	$\frac{b}{a}$
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
1	X3	3	3	1	1	0	0	0	1
1	X5	6	4	3	0	-1	1	0	3/2
0	X6	4	1	2	0	0	0	1	4
Zj - Cj	9	7	4	0	-1	0	0		

→(1/3)

Cj →			0	0	1	0	1	0	$\frac{b}{a}$
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
0	X1	1	1	1/3	1/3	0	0	0	3
1	X5	2	0	5/3	-4/3	-1	1	0	6/5
0	X6	3	0	5/3	-1/3	0	0	1	9/5
Zj - Cj	2	0	5/3	-7/3	-1	0	0		

→(3/5)

Cj →			0	0	1	0	1	0	
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
0	X1	3/5	1	0	3/5	1/5	-1/5	0	
0	X2	6/5	0	1	-4/5	-3/5	3/5	0	
0	X6	1	0	0	1	1	-1	1	
Zj - Cj	0	0	0	-1	0	-1	0		

→(-1/3)(-5/3)

Cj →			4	1	0	0		$\frac{b}{a}$	
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X4	X6				
4	X1	3/5	1	0	1/5	0	3		
1	X2	6/5	0	1	-3/5	0	NR		
0	X6	1	0	0	1	1	1		
Zj - Cj	18/5	0	0	1/5	0				

→

Cj →			4	1	0	0			
↓ V.B.	\bar{b}	X1	X2	X4	X6				
4	X1	2/5	1	0	0	-1/5		(3/5)	
1	X2	9/5	0	1	0	3/5			
0	X4	1	0	0	1	1		(-1/5)(3/5)	
Zj - Cj	17/5	0	0	0	-1/5				

Algoritmo para la tabla de Garfinkel

1. Escoja variable para entrar y variable para salir, de igual forma que en el tablero simplex.
2. Invierta el elemento pivote (elemento donde se cruza la fila k-ésima de la variable que sale, con la columna l-ésima de la variable que entra, el inverso, colóquelo en la misma posición, pero en la tabla de la siguiente iteración.

$$a_{kl}(\text{nueva}) = \frac{1}{a_{kl}(\text{vieja})}$$

- Dividir todos los elementos de la fila k-ésima, (exceptuando la casilla del elemento pivote a_{kl}) por el valor del elemento pivote a_{kl} , los resultados, son los elementos de la fila k-ésima en la nueva tabla.
- Dividir todos los elementos de la columna l-ésima (exceptuando la casilla del elemento pivote a_{kl} por menos (-) el elemento pivote ($-a_{kl}$), los resultados, son los elementos de la columna l-ésima en la nueva tabla.
- Calcular el resto de los elementos de la tabla nueva, así:

A_{kl} =Elemento pivote, en donde, k=Fila donde se encuentra el elemento pivote,
l=Columna donde se encuentra el elemento pivote.

$$a_{ij}(\text{nuevo}) = a_{ij}(\text{viejo}) - \frac{a_{il} * a_{kj}}{a_{kl}}$$

- Si hay variable para entrar, regrese al punto 1, de lo contrario, parar y esa es la solución óptima factible.

Ejemplo 3.8 Método simplex, Tabla de Garfinkel, sin la gran M

Maximizar $Z = X_1 + 3/2X_2$

c.s.r.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 16$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 28$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Maximizar $Z = X_1 + 3/2X_2$

c.s.r.

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 = 16$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 12$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_5 = 28$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Cj	→		1	3/2	b
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	$\frac{b}{a}$
0	X3	16	2	2	8
0	X4	12	1	2	6
0	X5	28	4	2	14
Zj - Cj		0	-1	-3/2	

↑

El elemento pivote es: $a_{22}=2$, luego en la tabla nueva, el elemento a_{22} es: $1/2$

→ Toda la fila 2 actual, se divide por el elemento pivote (2), dando origen a la nueva fila 2: $12/2=6$; $1/2=1/2$

Todos los elementos de la columna 2 se dividen por el menos pivote (-2), dando origen a la nueva columna 2: $2/-2=-1$; $2/-2=-1$. Hechas estas operaciones, la nueva tabla queda así:

Cj	→		1	0	b
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X4	$\frac{b}{a}$
0	X3			-1	
3/2	X2	6	1/2	1/2	
0	X5			-1	
Zj - Cj					

Los demás elementos del nuevo tablero, se calculan empleando la siguiente formula:

$$a_{ij}(\text{nuevo}) = a_{ij}(\text{viejo}) - \frac{a_{il} * a_{kj}}{a_{kl}}$$

Enunciada en el punto 5 del algoritmo, los cálculos son los siguientes:

$$a_{11}(\text{nuevo}) = 2 - \frac{2 * 1}{2} = 1$$

$$a_{31}(\text{nuevo}) = 4 - \frac{2 * 1}{2} = 3$$

$$b_{1}(\text{nuevo}) = 16 - \frac{2 * 12}{2} = 4$$

$$b_{3}(\text{nuevo}) = 28 - \frac{2 * 12}{2} = 16$$

La segunda tabla completa es:

Cj	→		1	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X4	
0	X3	4	1	-1	4
3/2	X2	6	1/2	1/2	12
0	X5	16	3	-1	16/3
Zj - Cj		9	-1/4	3/4	

→

Una vez terminada la segunda tabla, se procede a determinar la variable que entra y la variable que sale, nuevamente se ejecutan los pasos descritos en el algoritmo y el resultado de la tercera tabla es:

Cj	→		0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X3	X4
1	X1	4	1	-1
3/2	X2	4	-1/2	1
0	X5	4	-3	2
Zj - Cj		10	1/4	1/2

Solución:

$$X_1^* = 4$$

$$X_2^* = 4$$

$$X_3^* = X_4^* = 0$$

$$X_5^* = 4$$

$$Z^* = 10$$

Ejemplo 3.9 Método simplex, Tabla de Garfinkel, con la gran M

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

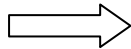
c.s.r.

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$



Minimizar $Z = 4X_1 + X_2 + MX_3 + MX_5$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 + \mathbf{X_3} = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_4 + \mathbf{X_5} = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + \mathbf{X_6} = 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Cj	→		4	1	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X1	X2	X4	
M	X3	3	3	1	0	1
M	X5	6	4	3	-1	3/2
0	X6	4	1	2	0	4
Zj - Cj		9M	7M-4	4M-1	-M	

→

Fíjese que aquí no aparecen las columnas de las variables básicas: X3, X5 y X6, ya que se sabe que son vectores unitarios⁴.

⁴ Vector unitario es aquel que tiene uno de sus elementos igual a uno (1) y el resto igual a cero (0).

Cj →			1	0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X2	X4	
4	X1	1	1/3	0	3
M	X5	2	5/3	-1	6/5
0	X6	3	5/3	0	9/5
Zj - Cj	2M+4	5/3M+1/3	-M		

↑

Fíjese que al salir de la base la variable artificial X3 su columna desaparece, ya por ser variable artificial, no puede ser escogida para entrar, luego es inoficioso operar con ella.

Cj →			0	$\frac{b}{a}$
↓	V.B.	\bar{b}	X4	
4	X1	3/5	1/5	3
1	X2	6/5	-3/5	NR
0	X6	1	1	1
Zj - Cj	18/5	1/5		

↑

Aquí, la variable básica que salió de la base fue X5 y como es artificial, su columna se elimina.

Cj →			0
↓	V.B.	\bar{b}	X6
4	X1	2/5	-1/5
1	X2	9/5	3/5
0	X4	1	1
Zj - Cj	17/5	-1/5	

Solución óptima:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 2/5 & X_4^* &= 1 & X_3^* &= 0 \\ X_2^* &= 9/5 & X_6^* &= 0 & X_5^* &= 0 \\ Z^* &= 17/5 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10 Método simplex, Tabla de Garfinkel, método de las dos fases

Minimizar
Z=4X1+X2

c.s.r.

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_j &\geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$$

Minimizar

Z=4X1+X2+MX3+MX5

c.s.r.

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 + \mathbf{X_3} &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - X_4 + \mathbf{X_5} &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + \mathbf{X_6} &= 4 \\ X_j &\geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Minimizar

Z=X3+X5

c.s.r.

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 + \mathbf{X_3} &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - X_4 + \mathbf{X_5} &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + \mathbf{X_6} &= 4 \\ X_j &\geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Cj2F	→			4	1	0
↓	Cj1F	→		0	0	0
	↓		RHS ⁵	X1	X2	X4
		Z2F	0	-4	-1	0
		Z1F	9	7	4	-1
0	1	X3	3	3	1	0
0	1	X5	6	4	3	-1
0	0	X6	4	1	2	0

El Z1F corresponde al Zj-Cj de la primera fase. El Z2F corresponde al Zj-Cj de la segunda fase. Todos los elementos de la tabla se calculan con la fórmula:

$$a_{ij}(\text{nuevo}) = a_{ij}(\text{viejo}) - \frac{a_{il} * a_{kj}}{a_{kl}}$$

⁵ RHS: Del inglés "Right-Hand Side" = Lado derecho. Son los bi de las restricciones.

A manera de ejemplo se muestra el cálculo de toda la fila correspondiente al Z1F, así:

$$(1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 \quad (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 7 \quad (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 4 \quad (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

El cálculo correspondiente a la fila del Z2F es el siguiente:

$$(0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -4 \quad (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -1 \quad (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

	RHS	X2	X4
Z2F	4	1/3	0
Z1F	2	5/3	-1
X1	1	1/3	0
X5	2	5/3	-1
X6	3	5/3	0

	RHS	X4
Z2F	18/5	1/5
Z1F	0	0
X1	3/5	1/5
X2	6/5	-3/5
X6	1	1

	RHS	X6
Z2F	17/5	-1/5
X1	2/5	-1/5
X2	9/5	3/5
X4	1	1

Solución óptima:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 2/5 & X_4^* &= 1 & X_3^* &= 0 \\ X_2^* &= 9/5 & X_6^* &= 0 & X_5^* &= 0 \\ Z^* &= 17/5 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

Resolver los siguientes problemas mediante el método simplex en su presentación: Algebraica (método algebraico), tabular (tablero del simplex, usando la gran M, cuando sea necesario), método de las dos fases (si tienen variables artificiales) y tabla de garfinkel. Para los problemas que solo tengan dos (2) variables, aplicar también el método gráfico. Todas las respuestas deben ser corroboradas con el software WinQsb.

3.1 Maximizar $Z=3X_1+5X_2$

c.s.r.

$$X_1 \leq 4$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 0$$

$$X_2^* = 9$$

$$Z^* = 45$$

3.2 Maximizar $Z=3X_1+5X_2$

c.s.r.

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 2$$

$$X_2^* = 6$$

$$Z^* = 36$$

3.3 Maximizar $Z=4X_1+X_2$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 3/5 = 0,6$$

$$X_2^* = 6/5 = 1,2$$

$$Z^* = 18/5 = 3,6$$

3.4 Minimizar $Z=X_1+2X_2$

c.s.r.

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 3/2 = 1,5$$

$$X_2^* = 0$$

$$Z^* = 3/2 = 1,5$$

3.5 Maximizar $Z=X_1+X_2$

c.s.r.

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + X_2 \geq 9$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 6$$

$$X_2^* = 0$$

$$Z^* = 6$$

3.6 Maximizar $Z=2X_1+3X_2$

c.s.r.

$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 6/7 = 0,8571428571$$

$$X_2^* = 12/7 = 1,714285714$$

$$Z^* = 48/7 = 6,857142857$$

3.7 Maximizar $Z=6X_1+4X_2+2X_3$

c.s.r.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \leq 6$$

$$6X_1 + 4X_2 = 12$$

$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Solución

$$X_1^* = 0$$

$$X_2^* = 3$$

$$X_3^* = 0$$

$$Z^* = 12$$

3.8 Maximizar $Z=4X_1-2X_2+2X_3$

c.s.r.

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 16$$

$$4X_2 - 2X_3 \leq 8$$

$$4X_1 - 2X_2 - X_4 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Solución

$$X_1^* = 1$$

$$X_2^* = 0$$

$$X_3^* = 7$$

$$X_4^* = 0$$

$$Z^* = 18$$

3.9 Maximizar $Z=5X_1-2X_2+3X_3$

c.s.r.

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2$$

$$3X_1 - 4X_2 \leq 3$$

$$X_2 + 3X_3 \leq 5$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Solución

$$X_1^* = 23/3 = 7, \bar{6}$$

$$X_2^* = 5$$

$$X_3^* = 0$$

$$Z^* = 85/3 = 28, \bar{3}$$

3.10 Maximizar $Z=6X_1-2X_2$

c.s.r.

$$X_1 - X_2 \leq 1$$

$$3X_1 - X_2 \leq 6$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Solución

$$X_1^* = 5/2 = 2,5$$

$$X_2^* = 3/2 = 1,5$$

$$Z^* = 12$$

Soluciones alternas.

3.11 Minimizar $Z=3X_1-9X_2-5X_3+4X_4$

c.s.r.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 \leq 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Solución

$$X_1^* = 0 \quad Z^* = -18$$

$$X_2^* = 2$$

$$X_3^* = 0$$

$$X_4^* = 0$$

3.12 Minimizar $Z=2X_1+9X_2+6X_3+8X_4$

c.s.r.

$$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 1$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 + 2X_4 = 0$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Solución

$$X_1^* = 1/2 = 0,5$$

$$X_2^* = 0 \quad Z^* = 4$$

$$X_3^* = 1/2 = 0,5$$

$$X_4^* = 0$$

3.13 Minimizar $Z=0,5X_1+1,5X_2-0,5X_3$

c.s.r.

$$-0,5X_1 - 0,5X_2 + X_3 \leq 2,5$$

$$X_1 - 0,5X_2 + 0,5X_3 \leq 3,0$$

$$0,5X_1 - 1,5X_2 + 2,5X_3 \geq 10,0$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Solución

$$X_1^* = 4$$

$$X_2^* = 13$$

$$X_3^* = 11$$

$$Z^* = 16$$

3.14 Maximizar $Z=X_1+2X_2-X_3+4X_4$

c.s.r.

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 = 4$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 = 4$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Solución

$$X_1^* = 0 \quad Z^* = 4$$

$$X_2^* = 2$$

$$X_3^* = 0$$

$$X_4^* = 0$$

3.15 Una persona dispone de \$6.000 para invertirlos. Al oír esta noticia, dos amigos distintos le ofrecen la oportunidad de participar como socio en dos negocios durante el verano, cada negocio planteado por cada amigo. En ambos casos, la inversión significa dedicar un poco de tiempo, al igual que invertir efectivo. Con el primer amigo, al convertirse en socio completo, tendrá que invertir \$5.000 y 400 horas, y la ganancia estimada (ignorando el valor del dinero en el tiempo) es de \$4.500. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son \$4.000 y 500 horas, con una ganancia estimada de \$4.500. Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirían entrar en el negocio con cualquier fracción de la sociedad; la participación en las utilidades sería proporcional a esa fracción. Como de todas maneras, esta persona está buscando un trabajo interesante para el verano (600 horas como máximo), ha decidido participar en una o ambas propuestas, con la proporción que maximice la ganancia total estimada. Formule y resuelva el problema.

Solución: Participar en cada negocio con $2/3$ (66,66%) para obtener un máximo de \$6.000 de utilidad.

3.16 Una compañía discontinuó la producción de cierta línea de producto no redituable. Esto creó un exceso considerable en la capacidad de producción. La gerencia quiere dedicar esta capacidad a uno o más de tres productos, denominándolos productos 1, 2 y 3. En la tabla siguiente se ilustra el número de horas disponible por semana, por cada tipo de máquina, que limita la producción.

Tabla 3.5 Disponibilidad de recursos.

Tipo de máquina	Tiempo disponible (horas/semana)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas-máquina que se requiere por unidad de cada producto es:

Tabla 3.6 Horas máquina por unidad de producto.

Tipo de máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	2

El departamento de ventas ha indicado que las ventas potenciales del producto 3 son de al menos 20 unidades por semana. La ganancia unitaria se estima en \$50, \$20 y \$25 para los productos 1, 2 y 3 respectivamente. El objetivo es determinar cuántas unidades de cada producto producir para maximizar la ganancia.

Solución:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 0 & X_3^* &= 47,5 \\ X_2^* &= 87,5 & Z^* &= \$2.937,50 \end{aligned}$$

3.17 Se ha concedido permiso a una empresa de turismo para realizar vuelos entre Ibagué y las islas de San Andrés e interinsulares. Para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Ibagué y las islas, así como aviones de hélice y/o helicópteros con los que atender los vuelos interinsulares. El presupuesto de compra es de 2.800 millones de pesos. Las características de los aparatos que puede comprar se resumen en la tabla.

Tabla 3.7 Costos de adquisición y de mantenimiento, requerimiento de personal y capacidad.

Tipo de avión	Costo/Unid. (x10 ⁶ \$)	Mant./Unid. (\$/día)	Tripulación			Capacidad (pas/mes)
			Pilotos	Copilotos	Azafatas	
Turborreactor	300	120.000	2	---	2	4.000
Avión a Hélice	100	60.000	1	1	1	300
Helicóptero	50	30.000	1	---	---	100

Se pueden contratar hasta 20 pilotos y 16 azafatas. Se desea emplear al menos a 3 copilotos. El tráfico entre Ibagué y San Andrés se estima en 8.000 pasajeros por mes y el interinsular en 500 pasajeros por mes. El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea 15. La compañía desea operar con costo de mantenimiento mínimo. Determine el plan óptimo de compra.

Solución: Se deben comprar 2 turborreactores, 3 aviones de hélice y 10 helicópteros, para incurrir en unos costos mínimos de mantenimiento de \$720.000

3.18 Un empresario pretende fabricar dos tipos de congeladores denominados A y B. Cada uno de ellos debe pasar por tres operaciones antes de su comercialización: Ensamblaje, pintado y control de calidad. Los congeladores requieren, respectivamente, 2,5 y 3 horas de ensamblaje, 3 y 6 Kg. de esmalte para su pintado y 14 y 10 horas de control de calidad. Los costos totales de fabricación por unidad son, respectivamente, 30 y 28, y los precios de venta 52 y 48, todos ellos en miles de pesos. El empresario dispone semanalmente de 4.500 horas para ensamblaje, 8.400 Kg. de esmalte y 20.000 horas para control de calidad. Los estudios de mercado muestran que la demanda semanal de congeladores no supera las 1.700 unidades y que, en particular, la de tipo A es de, al menos, 600 unidades. Se desea:

- Formular un modelo de programación lineal que indique cuántos congeladores deben fabricarse de cada tipo para que el beneficio sea máximo, teniendo en cuenta el estudio de demanda. Suponga que las variables son continuas.
- Resolverlo mediante el método simplex. Interpretar la solución óptima incluyendo las variables de holgura.
- Determinar los precios sombra de las horas de ensamblaje y control de calidad. Al fabricante le ofrecen disponer de 200 horas más para ensamblaje con un costo adicional total de \$750.000 pesos. ¿Debería aceptar la oferta?

Solución: Se deben fabricar 882,3530 congeladores tipo A y 764,7059 congeladores tipo B para obtener una utilidad máxima de \$34.705,88

3.19 En un laboratorio se fabrican 4 productos P1, P2, P3, P4 que consumen un día por unidad en su proceso completo de producción, aunque se pueden producir varias unidades simultáneamente. El espacio (en metros cuadrados) en el almacén y la mano de obra (número de trabajadores) disponibles limitan la producción. La siguiente tabla contiene los datos relevantes del proceso de producción, así como los costos de fabricación y precios de venta (en miles de pesos).

Tabla 3.8 Requerimientos, disponibilidad, costos y precio de venta.

Producto	P1	P2	P3	P4	Disponibilidad
Área (m ² /unidad)	10	30	80	40	900
Trabajadores/unidad	2	1	1	3	80
Costo/unidad	20	30	45	58	
Precio de venta/unidad	30	50	85	90	

- Encontrar el plan de producción de beneficio máximo.
- Interpretar los valores de los precios sombra.
- ¿Cuál es el rango de los recursos del programa construido para el que se mantiene la optimalidad de tales valores?
- La firma podría alquilar 150 m² más de superficie de almacén a un costo de \$70.000 por día. ¿Debería alquilar este espacio? Si es así, ¿Cuál es el nuevo plan de producción?

Solución: Se deben producir 10 unidades del producto 1 y 20 unidades del producto 2 para obtener un beneficio máximo de \$740.000

3.20 Un fabricante de telas en Ibagué se puso en contacto con los estudiantes de Investigación de Operaciones de la Universidad de Ibagué en busca de ayuda en una situación donde picos estacionales en la demanda excedían la capacidad de producción corriente. El fabricante sabe que para satisfacer la demanda estacional, tiene que programar la producción anticipadamente y después almacenarla. Además tiene la opción, tanto de tiempo normal como de tiempo extra, con un costo de mano de obra más alto para el tiempo extra. En la tabla siguiente se muestra la demanda pronosticada (en horas de la planta) y la capacidad disponible (en horas de la planta) tanto para la temporada de demanda alta (Los últimos 6 meses del año) y la temporada baja (Los primeros 6 meses del año).

Tabla 3.9 Datos correspondientes al problema propuesto 3.20

Periodo de tiempo (trimestres)	Demanda Pronosticada (horas)	Capacidad de la planta (horas)	
		Tiempo regular	Tiempo extra
1	24	28	12
2	29	28	12
3	34	28	14
4	48	28	14
Total	135	112	52

Tomando en cuenta el costo por hora de la mano de obra para producción en tiempo normal o tiempo extra y el costo de almacenar una hora de producción por duraciones variables de tiempo, los contadores de costos de la compañía llegaron a la cifras de costos aplicables siguientes:

Tabla 3.10 Datos correspondientes al problema propuesto 3.20

Una hora de producción en:		Para vender en:			
		1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre
1° Trimestre	Tiempo normal	8	9	10	11
	Tiempo extra	12	13	14	15
2° Trimestre	Tiempo normal		8	9	10
	Tiempo extra		12	13	14
3° Trimestre	Tiempo normal			8	9
	Tiempo extra			12	13
4° Trimestre	Tiempo normal				8
	Tiempo extra				12

Formule el problema como uno de programación lineal y resuélvalo empleando el método simplex.

Sugerencia: Defina las variables como la cantidad de horas de producto a producir durante el trimestre i-ésimo en el tipo de tiempo j-ésimo para ser vendida durante el trimestre k-ésimo.

Solución: Costo Mínimo: \$1.185

Tabla 3.11 Solución al problema 3.20

Producir en:		Para vender en:			
		1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre
1° Trimestre	Tiempo normal	24	1	0	3
	Tiempo extra	0	0	0	0
2° Trimestre	Tiempo normal		28	0	0
	Tiempo extra		0	0	0
3° Trimestre	Tiempo normal			25	3
	Tiempo extra			9	0
4° Trimestre	Tiempo normal				28
	Tiempo extra				14

Maximizar $Z = CX$
c.s.r.

$AX \leq b$
 $X \geq 0$



Minimizar $Z = B^T X$
c.s.r.

$A^T Y \geq C^T$
 $Y \geq 0$

Capítulo 4
El Problema Dual
El Método Simplex Dual
Análisis Postóptimo
Análisis de Sensibilidad

Cambio en C_j cuando X_j^* es variable no básica

Cambio en C_j cuando X_j^* es variable básica

Cambio en b_i

Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es variable no básica

Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es variable básica

Adición de una restricción

Adición de una variable

El Problema Dual

Introducción

En el desarrollo de la programación Lineal, se descubrió la existencia de un problema que se encuentra estrechamente relacionado con un problema de Programación Lineal dado: Dicho problema se denominó **PROBLEMA DUAL**. Cada problema dado (Problema primal), de programación lineal, se encuentra en dualidad con otro problema que tiene las siguientes características.

Características del Problema Dual

1. En problemas de un gran número de restricciones, resolver el problema dual en la computadora es más eficiente que resolver el problema principal.
2. En algunas ocasiones resulta más sencilla la resolución del problema dual que la del problema principal, en términos de menor número de iteraciones.
3. Los valores óptimos de las variables del dual, proporcionan una interpretación económica del problema principal, interesante.
4. Algunas veces se puede evitar el uso de las variables artificiales (Super-Avit), mediante la aplicación del método de solución denominado Simplex Dual, sobre el problema principal o problema dado.
5. Facilita el estudio del impacto sobre la optimalidad por cambios en el problema original.

La presente sección tiene como objetivo principal ilustrar cómo se formula el problema dual y enseñar el método Dual-Simplex, para problemas de maximización, ya que, por medio de la regla de equivalencia todo problema de

PL¹ se puede expresar como maximizando **[Min(z) = Max(-z)]**; por lo tanto, el primer paso consiste en expresar el problema primal de la forma estandar de maximización, o sea, con su función objetiva maximizando y todas las restricciones con \leq ó $=$

En términos generales el problema se plantea de la siguiente manera:

Maximizar $Z = CX$	\Rightarrow	Minimizar $Z = b^T X$	En donde cada uno de los vectores y matrices, tienen los elementos siguiente:
c.s.r.		c.s.r.	
$AX \leq b$		$A^T Y \geq C^T$	
$X \geq 0$		$Y \geq 0$	

NOTA: Recuerde que A^T es la transpuesta de A, en donde las filas se cambian por las columnas, lo mismo para b^T y C^T

Problema Principal

Problema Dual

$$C = (c_1 \cdots c_j \cdots c_n)$$

$$b^T = (b_1 \cdots b_i \cdots b_m)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{i1} \cdots a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1j} \cdots a_{ij} \cdots a_{mj} \\ \vdots \\ a_{1n} \cdots a_{in} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$X \geq 0$$

$$Y \geq 0$$

Cada restricción del problema principal está representada por una variable en el dual. Si el problema principal tiene 4 restricciones, entonces, el problema dual tendrá 4 variables.

Entre el problema principal y el problema dual existen las siguientes relaciones:

¹ PL: Programación lineal.

1. El dual del dual, tiene como resultado el problema principal.
2. Una restricción que es una igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual sin restricción en el signo (variable libre o irrestricta, que puede asumir valores entre $-\infty \leq Y_i \leq +\infty$)
3. Una variable del problema principal, sin restricción en el signo, genera una restricción de igualdad en el problema dual.
4. El número de restricciones del problema principal es igual al número de variables en el problema dual.
5. El número de variables del problema principal es igual al número de restricciones en el problema dual.

Ejemplo 4.1

Formular el problema dual del problema principal dado.

<p>Problema Principal</p> <p>Maximizar $Z_{(x)} = 4X_1 + 3X_2$</p> <p>c.s.r.</p> $\begin{array}{rclcl} X_1 & + & 2X_2 & \leq & 7 \\ 3X_1 & + & 2X_2 & \leq & 15 \\ X_j & \geq & 0 & & \end{array}$	<p>→</p>	<p>Vectores y matriz del problema principal</p> $C = (4 \quad 3) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$
<p>↓</p>		
<p>Problema dual</p> <p>Minimizar $Z_{(y)} = 7Y_1 + 15Y_2$</p> <p>c.s.r.</p> $\begin{array}{rclcl} y_1 & + & 3y_2 & \geq & 4 \\ 2y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 \\ Y_j & \geq & 0 & & \end{array}$	<p>←</p>	<p>Vectores y matriz del problema dual</p> $C^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b^T = (7 \quad 15)$

En el siguiente ejemplo, se hará de forma automática la formulación del problema dual, siguiendo los siguientes pasos: a) Asociamos una variable dual a cada restricción del problema principal. b) Construimos la función objetiva, multiplicando cada una de las variables duales asociadas a cada restricción del problema, por cada uno de los términos independientes. c) Construimos las restricciones multiplicando cada variable dual por el coeficiente de cada una de las variables en cada una de las restricciones y para cada restricción, el término independiente, es el coeficiente de cada una de las variables en la función objetiva del problema principal. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

1. Para problemas principales de maximización que están estandarizados con todas sus restricciones \leq ó $=$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}Y_i \begin{cases} \geq C_j & \text{si } X_j \geq 0 \\ = C_j & \text{si } X_j \text{ es irrestricta} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, m$$

Una restricción de igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual, sin restricción en el signo.

2. Para problemas principales de minimización que estén estandarizados con todas sus restricciones \geq

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}Y_i \begin{cases} \leq C_j & \text{si } X_j \geq 0 \\ = C_j & \text{si } X_j \text{ es irrestricta} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, m$$

Una restricción de igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual, sin restricción en el signo.

Ejemplo 4.2

Formular el problema dual del problema principal dado. Una vez formulado el dual, halle el dual del dual y saque una conclusión.

En la figura 4.1 se ilustra el cálculo de la función objetivo del dual, que se consigue, multiplicando cada una de las variables duales asociadas a cada restricción, por el término independiente de cada una de las restricciones del problema principal.

Figura 4.1 Cálculo de la función objetivo

Maximizar $Z(x) = 3X_1 - 2X_2$					
c.s.r.					
X_1	\leq	4	$\leftarrow -X_1(Y_1)$	Minimize $Z(Y) =$	$4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$
X_2	\leq	6	$\leftarrow -X_2(Y_2)$	c.s.r.	
$X_1 + X_2$	\leq	5	$\leftarrow -X_3(Y_3)$	$Y_1 + Y_3$	≥ 3
$-X_2$	\leq	-1	$\leftarrow -X_4(Y_4)$	$Y_2 + Y_3 - Y_4$	≥ -2
$X_j \geq 0$	$j=1,2$			$Y_j \geq 0$	$j = 1, 2, 3, 4$

Fuente: El autor.

En la figura 4.2 se ilustra el cálculo de la primera restricción del dual, que se consigue, multiplicando cada una de las variables duales asociadas a cada restricción, por el coeficiente de X_1 de cada una de las restricciones del problema principal.

Figura 4.2 Cálculo de la primera restricción.

Maximizar $Z(x) = 3X_1 - 2X_2$

c.s.r.

$$X_1 - X_2 \leq 4 \quad (Y_1)$$

$$-X_2 \leq 6 \quad (Y_2)$$

$$X_1 - X_2 \leq 5 \quad (Y_3)$$

$$-X_2 \leq -1 \quad (Y_4)$$

$$X_j \geq 0; j=1,2$$

Minimice $Z(y) = 4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$

c.s.r.

$$Y_1 + Y_3 \geq 3$$

$$Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -2$$

$$Y_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Fuente: El autor.

En la figura 4.3 se ilustra el cálculo de la segunda restricción del dual, que se consigue, multiplicando cada una de las variables duales asociadas a cada restricción, por el coeficiente de X_2 de cada una de las restricciones del problema principal.

Figura 4.3 Cálculo de la segunda restricción.

Maximizar $Z(x) = 3X_1 - 2X_2$

c.s.r.

$$X_1 - X_2 \leq 4 \quad (Y_1)$$

$$-X_2 \leq 6 \quad (Y_2)$$

$$X_1 - X_2 \leq 5 \quad (Y_3)$$

$$-X_2 \leq -1 \quad (Y_4)$$

$$X_j \geq 0; j=1,2$$

Minimice $Z(y) = 4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$

c.s.r.

$$Y_1 + Y_3 \geq 3$$

$$Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -2$$

$$Y_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Fuente: El autor.

Figura 4.4 Cálculo del dual del dual.

Minimice $Z(y) = 4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$

c.s.r.

$$Y_1 + Y_3 \geq 3 \quad (X_1)$$

$$Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -2 \quad (X_2)$$

$$Y_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

Maximizar $Z(x) = 3X_1 - 2X_2$

c.s.r.

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$-X_2 \leq -1$$

$$X_j \geq 0; j=1,2$$

Fuente: El autor.

Como se puede observar el dual del dual es el principal.

Ejemplo 4.3 Formular el problema dual del problema principal dado.

Problema principal
Minimizar $Z(x) = 4X_1 + X_2$
c.s.r.
$3X_1 + X_2 = 3$
$4X_1 + 3X_2 \geq 6$
$X_1 + 2X_2 \leq 4$
$X_j \geq 0; j = 1, 2$



Problema principal estandarizado
Minimizar $Z(x) = 4X_1 + X_2$
c.s.r.
$3X_1 + X_2 = 3 \quad (Y_1)$
$4X_1 + 3X_2 \geq 6 \quad (Y_2)$
$-X_1 - 2X_2 \geq -4 \quad (Y_3)$
$X_j \geq 0; j = 1, 2$

Problema dual	
Maximizar $Z(y) = 3Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3$	Fíjese que Y_1 es una variable sin restricción en el signo.
c.s.r.	
$3Y_1 + 4Y_2 - Y_3 \leq 4$	
$Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \leq 1$	
$Y_j \geq 0; j = 2, 3; Y_1$ irrestricta.	

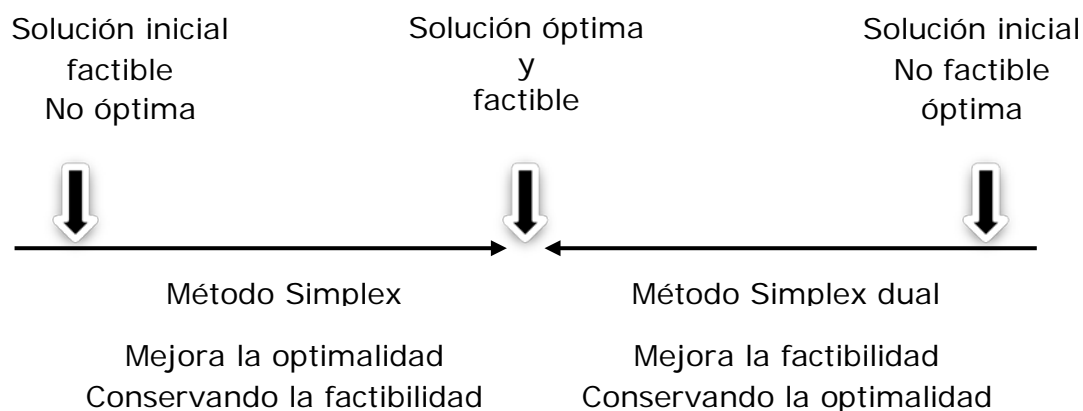
Relaciones entre el problema principal y el problema dual.

Entre el problema principal y el problema dual existen las siguientes relaciones:

1. El dual del dual, tiene como resultado el problema principal.
2. Una restricción que es una igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual sin restricción en el signo.
3. Una variable del problema principal, sin restricción en el signo, genera una restricción de igualdad en el problema dual.
4. El número de restricciones del problema principal es igual al número de variables en el problema dual.
5. El número de variables del problema principal es igual al número de restricciones en el problema dual.

Una vez formulado el problema dual, debemos encontrar su solución, el método para emplear será el denominado Método Simplex dual el cual empieza con una solución óptima o mejor que óptima ($Z_j - C_j \geq 0$; para todo j), pero no factible (Algunos b_i son < 0), y se mueve hacia el óptimo mediante iteraciones que mejoran su factibilidad conservando su optimalidad. Fíjese que es lo contrario al método Simplex, en donde se empieza mediante una solución factible pero no óptima y mediante iteraciones se mejora la optimalidad, conservando la factibilidad. Esto se ilustra en la siguiente figura:

Figura 4.5 Gráfica del método simplex v.s. el método dual simplex.



Fuente: El autor.

Método simplex dual para maximizar

Se requiere que el problema esté expresado en términos de Maximizar la Función objetivo y todas sus restricciones con menor ó igual (\leq).

La Variable que sale de la Base es aquella que tenga el valor menos factible, ó sea, la más negativa, lo cual implica que la solución es NO factible.

La variable que entra a la Base es aquella variable que tenga el valor menos negativo en la expresión: $(Z_j - C_j) / a_{r,j}$ siendo $a_{r,j} < 0$

El siguiente ejemplo ilustra un paralelo entre el Método Simplex y el Método Simplex dual en donde se resalta para cada iteración, la relación entre los dos (2) Métodos.

Ejemplo 4.4 Para el siguiente problema de programación lineal convexa, hallar la solución óptima, empleando los métodos: Simplex y Simplex dual, estableciendo todas las relaciones entre los dos métodos, para cada una de las iteraciones.

Problema principal	Problema dual
$\begin{aligned} \text{Max } Z(x) &= 3X_1 + 5X_2 \\ \text{c.s.r.} \\ X_1 &\leq 4 \quad (Y_1) \\ X_2 &\leq 6 \quad (Y_2) \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \quad (Y_3) \\ X_j &\geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } Z(y) &= 4Y_1 + 6Y_2 + 18Y_3 \\ \text{c.s.r.} \\ Y_1 &+ 3Y_3 \geq 3 \\ Y_2 &+ 2Y_3 \geq 5 \\ Y_j &\geq 0; j = 1, 2, 3 \end{aligned}$
Adición de variables de holgura	Problema estándar (Max, \leq)
$\begin{aligned} \text{Max } Z(x) &= 3X_1 + 5X_2 \\ \text{c.s.r.} \\ X_1 &+ X_3 = 4 \\ X_2 &+ X_4 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &+ X_5 = 18 \\ X_j &\geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } Z(y) &= -4Y_1 - 6Y_2 - 18Y_3 \\ \text{c.s.r.} \\ -Y_1 &- 3Y_3 \leq -3 \\ -Y_2 &- 2Y_3 \leq -5 \\ Y_j &\geq 0; j = 1, 2, 3 \end{aligned}$
Variables básicas: X_3, X_4, X_5	Adición de variables de holgura
	$\begin{aligned} \text{Max } Z(y) &= -4Y_1 - 6Y_2 - 18Y_3 \\ \text{c.s.r.} \\ -Y_1 &- 3Y_3 + Y_4 = -3 \\ -Y_2 &- 2Y_3 + Y_5 = -5 \\ Y_j &\geq 0; j = 1, 2, 3 \end{aligned}$
	Variables básicas: Y_4, Y_5

**Problema principal
Método simplex**

C _j	→		3	5	0	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	b/a
0	X ₃	4	1	0	1	0	0	NO
0	X ₄	6	0	1	0	1	0	6
0	X ₅	18	3	2	0	0	1	9
Z _j - C _j		0	-3	-5	0	0	0	

↑
Y₄ Y₅ Y₁ Y₂ Y₃

$$\begin{array}{l|l|l|l} X_1 = 0 & X_4 = 6 & Y_1 = 0 & Y_4 = -3 \\ X_2 = 0 & X_5 = 18 & Y_2 = 0 & Y_5 = -5 \\ X_3 = 4 & Z_x = 0 & Y_3 = 0 & Z_y = 0 \end{array}$$

C _j	→		3	5	0	0	0	b/a
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	
0	X ₃	4	1	0	1	0	0	4
5	X ₂	6	0	1	0	1	0	NO
0	X ₅	6	3	0	0	-2	1	2
Z _j - C _j		30	-3	0	0	5	0	

↑
Y₄ Y₅ Y₁ Y₂ Y₃

$$\begin{array}{l|l|l|l} X_1 = 0 & X_4 = 0 & Y_1 = 0 & Y_4 = -3 \\ X_2 = 6 & X_5 = 6 & Y_2 = 5 & Y_5 = 0 \\ X_3 = 4 & Z_x = 30 & Y_3 = 0 & Z_y = 30 \end{array}$$

C _j	→		3	5	0	0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
0	X ₃	2	0	0	1	2/3	-1/3
5	X ₂	6	0	1	0	1	0
3	X ₁	2	1	0	0	-2/3	1/3
Z _j - C _j		36	0	0	0	3	1

Y₄

Y₅

Y₁

Y₂

Y₃

$$\begin{array}{l|l|l|l} X_1 = 2 & X_4 = 0 & Y_1 = 0 & Y_4 = 0 \\ X_2 = 6 & X_5 = 0 & Y_2 = 3 & Y_5 = 0 \\ X_3 = 2 & Z_x = 36 & Y_3 = 1 & Z_y = 36 \end{array}$$

**Problema dual
Método simplex dual**

C _j	→		-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	
0	Y ₄	-3	-1	0	-3	1	0	
0	Y ₅	-5	0	-1	-2	0	1	→(-1)
(Z _j - C _j)		0	4	6	18	0	0	
(Z _j - C _j)/a _{rj}		NO	-6	-9	NO	NO		

↑
X₃ X₄ X₅ X₁ X₂

$$\begin{array}{l|l|l|l} Y_1 = 0 & Y_4 = -3 & X_1 = 0 & X_4 = 6 \\ Y_2 = 0 & Y_5 = -5 & X_2 = 0 & X_5 = 18 \\ Y_3 = 0 & Z_y = 0 & X_3 = 4 & Z_x = 0 \end{array}$$

C _j →			-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	
0	Y ₄	-3	-1	0	-3	1	0	→(-1/3)
-6	Y ₂	5	0	1	2	0	-1	
(Z _j - C _j)		-30	4	0	6	0	6	
(Z _j - C _j)/a _{rj}		-4	NO	-2	NO	NO	NO	

↑

X₃ X₄ X₅ X₁ X₂

$$\begin{array}{l|l|l|l} Y_1 = 0 & Y_4 = -3 & X_1 = 0 & X_4 = 6 \\ Y_2 = 0 & Y_5 = -5 & X_2 = 0 & X_5 = 18 \\ Y_3 = 0 & Z_y = 0 & X_3 = 4 & Z_x = 0 \end{array}$$

C _j	→		-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	\bar{b}	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	
-18	Y ₃	1	1/3	0	1	-1/3	0	(-2)
-6	Y ₂	3	-2/3	1	0	2/3	-1	
(Z _j - C _j)		-36	2	0	0	2	6	
			X ₃	X ₄	X ₅	X ₁	X ₂	

$$\begin{array}{l|l|l|l} Y_1 = 0 & Y_4 = 0 & X_1 = 2 & X_4 = 0 \\ Y_2 = 3 & Y_5 = 0 & X_2 = 6 & X_5 = 0 \\ Y_3 = 1 & Z_y = 36 & X_3 = 2 & Z_x = 36 \end{array}$$

Fíjese que el valor de Z_y se multiplicó por (-1), dado que al principio Z_y fue multiplicada por (-1).

En cada iteración del Método Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura X_3, X_4, X_5 ($Z_3 - C_3, Z_4 - C_4, Z_5 - C_5$) son los valores de las variables reales del Dual Y_1, Y_2, Y_3 , el precio sombra.
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales X_1, X_2 ($Z_1 - C_1, Z_2 - C_2$) son los valores de las variables de holgura del Dual (Y_4, Y_5), el costo reducido.

En cada iteración del Método Dual – Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura Y_4, Y_5 ($Z_4 - C_4, Z_5 - C_5$) son los valores de las variables reales del problema principal (X_1, X_2).
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales Y_1, Y_2, Y_3 ($Z_1 - C_1, Z_2 - C_2, Z_3 - C_3$) son los valores de las variables de holgura del problema principal (X_3, X_4, X_5).

El análisis post óptimo y el análisis de sensibilidad.

En todo modelo cuantitativo los distintos coeficientes pueden estar sujetos a cambios, fluctuaciones o errores. Por ello, su conocimiento no siempre es preciso y pueden cambiar en muchas ocasiones. Un uso típico es el caso en el que hemos obtenido la solución óptima y deseamos encontrar la nueva solución óptima cuando hayan cambiado, por ejemplo, las disponibilidades de los recursos (b_i), los precios ó costos unitarios por unidad (C_j), cambio en los coeficientes tecnológicos (a_{ij}), incorporación de una nueva variable (Nuevo producto X_j) y adición de una nueva restricción. Necesario para el tomador de decisiones conocer en que rango se pueden mover los distintos coeficientes mencionados, manteniéndose la presente solución óptima; ello le da una ventaja competitiva frente a otro tomador de decisiones, de incalculable valor en dependencia con la situación ó problema particular.

En este capítulo se consideran siete (7) posibles cambios, uno a la vez, en las condiciones iniciales del problema, con su respectivo análisis de sensibilidad, presentando los argumentos para cada caso y una metodología práctica y rápida en su aplicación; para ello se usa el siguiente ejemplo, al que inicialmente encontramos la solución óptima mediante el método simplex, colocando al frente de cada tablero su respectivo sistema de ecuaciones del método algebraico.

Problema principal Método simplex

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Z_x = 3X_1 + 5X_2 \\ &\text{c.s.r.} \\ &\quad X_1 \leq 4 \\ &\quad 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ &\quad X_j \geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$$

Problema principal Ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Z_x = 3X_1 + 5X_2 \\ &\text{c.s.r.} \\ &\quad X_1 + X_3 = 4 \\ &\quad 3X_1 + 2X_2 + X_4 = 18 \\ &\quad X_j \geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$$

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0	
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	b/a
0	X_3	4	1	0	1	0	NR
0	X_4	18	3	2	0	1	9
$Z_j - C_j$	0	-3	-5	0	0	0	

↑

$$\begin{aligned}
 Z_x - 3X_1 - 5X_2 &= 0 \\
 X_1 + X_3 &= 4 \\
 3X_1 + 2X_2 + X_4 &= 18 \\
 X_1 = 0 \quad X_3 = 4 \quad Z_x = 0 \\
 X_2 = 0 \quad X_4 = 18
 \end{aligned}$$

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_j - C_j$	45	9/2	0	0	5/2	

$$\begin{aligned}
 Z_x - 9/2X_1 + 5/2X_4 &= 45 \\
 X_1 + X_3 &= 4 \\
 3/2X_1 + X_2 + 1/2X_4 &= 9 \\
 X_1 = 0 \quad X_3 = 4 \quad Z_x = 45 \\
 X_2 = 9 \quad X_4 = 0
 \end{aligned}$$

Solución óptima y factible Problema principal

$$\begin{aligned}
 X_1^* &= 0 & X_3^* &= 4 & Z_x^* &= 45 \\
 X_2^* &= 9 & X_4^* &= 0
 \end{aligned}$$

Solución óptima y factible Problema dual

$$\begin{aligned}
 Y_1^* &= 0 & Y_3^* &= 9/2 & Z_y^* &= 45 \\
 Y_2^* &= 5/2 & Y_4^* &= 0
 \end{aligned}$$

Sobre la presente solución óptima, consideraremos los siguientes cambios, uno a la vez para cada caso, con su respectivo análisis de sensibilidad y metodología abreviada.

1. Cambio en C_j cuando X_j^* es no básica.
2. Cambio en C_j cuando X_j^* es básica.
3. Cambio en b_i .
4. Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es no básica.
5. Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es básica.
6. Adición de una restricción.
7. Adición de una variable.

a) Cambio en C_j cuando X_j^* es no básica

Aquí se propone que la función objetivo original sea cambiada de la siguiente manera:

$Z_x = 3X_1 + 5X_2$ por $Z_x \text{ (nuevo)} = 6X_1 + 5X_2$; se ha modificado el valor de $C_1 = 3$ por $C_1 \text{ (nuevo)} = 6$; Siendo C_1 el coeficiente de X_1 variable que en el óptimo es NO-Básica.

Este cambio tiene un efecto sobre el valor de $Z_1 - C_1$ en el óptimo actual, que tiene un valor de $9/2$, valor que ahora podría tener las siguientes opciones:

- Si el $(Z_1 - C_1) \text{ (nuevo)}$ es > 0 ; entonces la solución óptima se mantiene igual en el problema principal y en el dual solo cambia el valor de la variable de holgura Y_3^*

- Si el $(Z_1 - C_1)_{\text{(nuevo)}} = 0$; entonces la solución óptima se mantiene igual en el problema principal, pero, se generan soluciones múltiples y en el dual solo cambia el valor de la variable de holgura Y_3 el cual será cero (0).
- Si el $(Z_1 - C_1)_{\text{(nuevo)}} < 0$; La solución deja de ser óptima, haciéndose necesario el empleo del método simplex y escogiendo a X_1 como la variable que entra a la base.

El problema aquí, es encontrar el nuevo valor de $(Z_1 - C_1)_{\text{(nuevo)}}$, que en términos generales se calcula así:

$(Z_j - C_j)_{\text{(Nuevo)}} = (Z_j - C_j)_{\text{(nuevo)}} + C_j - C_j = (Z_j - C_j) - (C_j_{\text{(nuevo)}} - C_j)$; quedando en definitiva que el nuevo valor es igual a el valor actual de $(Z_j - C_j)$ restándole la diferencia entre el nuevo valor y el actual valor de C_j .

$$(Z_j - C_j)_{\text{(nuevo)}} = (Z_j - C_j)_{\text{(actual)}} - (C_j_{\text{(nuevo)}} - C_j_{\text{(actual)}})$$

Para el problema presente, $(Z_1 - C_1) = 9/2 - (6-3) = 3/2$; valor este mayor que cero, por lo tanto la solución actual sigue siendo óptima y se mantiene para todos los valores de X_j y de Z_x cambiando solo el valor de la variable del dual Y_3 que ahora toma el valor de $3/2$.

Una manera abreviada de efectuar este procedimiento consiste en realizar los cambios directamente sobre el tablero simplex de la solución óptima y recalculer el valor de $Z_1 - C_1$ que nos indicará si la solución presente conserva su optimalidad ó por el contrario la pierde, quedando en este caso el tablero listo para efectuar la iteración siguiente.

En el tablero óptimo se remplacea el valor de $C_1=3$ por su nuevo valor $C_1=6$ y se recalcula el valor de $Z_1 - C_1$ así:

$$(Z_1 - C_1)_{\text{(nuevo)}} = (5)(3/2) + (0)(1) - 6 = 3/2$$

$C_j \rightarrow$			6	5	0	0	
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	4	1	0	1	0	
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2	
$Z_j - C_j$	45	3/2	0	0	0	5/2	

$X_1^* = 0$
 $X_2^* = 9$
 $X_3^* = 4$
 $X_4^* = 0$
 $Z_x^* = 45$

$Y_1^* = 0$
 $Y_2^* = 5/2$
 $Y_3^* = 3/2$
 $Y_4^* = 0$
 $Z_y^* = 45$

¡¡Lo único que cambió!!

El anterior procedimiento se expresa matricialmente de la siguiente forma:

$$(Z_j - C_j)_{\text{(nuevo)}} = C_B^T a_j - C_j_{\text{(nuevo)}}$$

En donde:

$(Z_j - C_j)$ (Nuevo) : Nuevo coeficiente de la variable X_j en la función objetiva que determina si el tablero pierde o no su optimalidad.

C_B^T : Matriz transpuesta (fila) que contiene los coeficientes de las variables básicas actuales.

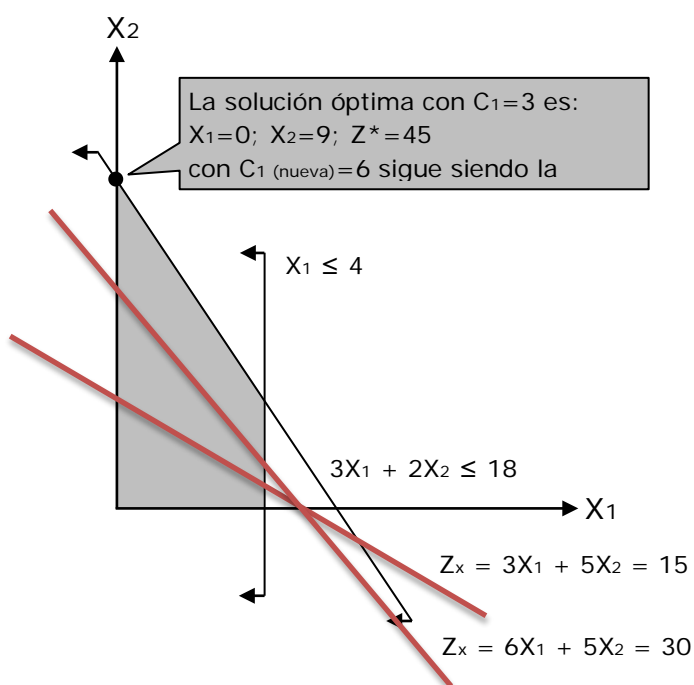
a_j : Matriz columna que contiene los coeficientes de la variable X_j en el tablero óptimo.

C_j (nuevo) : Coeficiente nuevo de la variable X_j

Interpretación gráfica

Max. $Z_x = 3X_1 + 5X_2$	$X_1 \leq 4$	$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$Z_x = 3X_1 + 5X_2 = 15$
c.s.r.	$X_1 = 4$	$3X_1 + 2X_2 = 18$	$3X_1 + 5X_2 = 15$
$X_1 \leq 4$	$P(0,0)$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$0 \leq 4$	$X_2 = 9 \mid X_1 = 6$	$X_2 = 3 \mid X_1 = 5$
$X_j \geq 0; j = 1, 2$	Verdad	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 18$	
		Verdad	

Gráfica 4.1 Solución gráfica con las dos funciones objetivo.



$$Z_x \text{ (Nueva)} = 6X_1 + 5X_2 = 30$$

$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 6$	$X_1 = 5$

Observe que a medida que el valor de C_1 cambia, la función objetiva pivota sobre el intercepto $(5, 0)$, pero el nuevo valor de $C_1 = 6$ no es suficiente para cambiar el punto óptimo $(0, 9)$. Una buena pregunta es: ¿A partir de que valor C_1 hace que la solución óptima cambie? El análisis de sensibilidad responde esta pregunta a continuación, demostrando que cuando $C_1 > 7,5$ el punto $(0, 9)$ deja de ser óptimo.

Fuente: El autor.

Análisis de sensibilidad

Ahora la pregunta es: ¿Entre qué valores puede variar C_1 , de tal forma que el tablero simplex óptimo actual se mantenga óptimo y factible?

Para contestar esta pregunta basta con reescribir la ecuación que recalcula el valor de $(Z_1 - C_1)$ (nuevo), colocando en el tablero óptimo como valor para C_1 , un valor cualquiera que cumpla con la condición de que su $(Z_1 - C_1)$ (nuevo) debe ser ≥ 0 para mantener la respuesta actual óptima y factible.

$C_j \rightarrow$			C_1	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_j - C_j$	45	3/2	0	0	0	5/2

El $(Z_1 - C_1)$ (nuevo) = $5(3/2) + (0)(1) - C_1 \geq 0$
 Entonces $C_1 \leq 15/2$, para mantener el tablero óptimo actual, el valor de C_1 debe ser un valor que se encuentre en el siguiente rango:

$$-\infty \leq C_1 \leq 15/2$$

Si C_j es el precio unitario de venta del artículo uno (1), entonces su precio de venta puede estar entre cero (0) y \$7,50 sin alterar la solución óptima actual, fíjese que en la solución actual $X_1^* = 0$, no se producen ni venden unidades del producto uno (1)

Tan pronto C_1 tome un valor mayor de \$7,50 la solución actual no se mantendrá y habrá que efectuar nuevas iteraciones empleando el método simplex para encontrar la nueva solución óptima, un ejemplo de ello es el caso de $C_1 = 8$, para el que $Z_1 - C_1$ valdrá:

$$(Z_1 - C_1) \text{ (nuevo)} = (5)(3/2) + (0)(1) - 8 = -1/2 = -0,5$$

La consecución de la nueva solución óptima para cuando C_1 (nuevo) = 8, se deja al lector, quien debe efectuar la iteración sobre el tablero óptimo, escogiendo como variable que entra a X_1

b) Cambio en C_j cuando X_j^* es básica

Para este caso se propone que la función objetivo sea cambiada de la siguiente manera:

$Z_x = 3X_1 + 5X_2$ por Z_x (nuevo) = $3X_1 + X_2$; Se ha modificado el valor de $C_2 = 5$ por C_2 (nuevo) = 1; Siendo C_2 el coeficiente de X_2 , variable que en el óptimo es variable Básica.

Aquí el valor de $(Z_j - C_j)$ nuevo es:

$(Z_j - C_j)_{\text{nuevo}} = Z_j - C_{j(\text{nuevo})} + C_{j(\text{viejo})} - C_{j(\text{viejo})} = (Z_j - C_j)_{\text{viejo}} - (C_{j(\text{nuevo})} - C_{j(\text{viejo})})$; Como el $(Z_j - C_j)_{\text{nuevo}}$ pertenece a una variable básica, su valor siempre será igual a cero (0), quedando la expresión simplificada así:

$(Z_j - C_j)_{\text{nuevo}} = - (C_j(\text{nuevo}) - C_j)$; quedando en definitiva que el nuevo valor es igual a menos la diferencia entre el nuevo valor y el actual valor de C_j , así:

$(Z_2 - C_2)_{\text{nuevo}} = - (1 - 5) = 4$; esto implica que en la ecuación (0) del método algebraico aparecerá la variable básica X_2 con el coeficiente 4, evento que obliga a modificar el sistema de ecuaciones, eliminando a X_2 de la ecuación (0) ya que en ella solo puede figurar como variable básica Z . El sistema de ecuaciones queda así:

$$\begin{array}{lcl}
 (0) & Zx + 9/2X_1 + \mathbf{4X_2} & + 5/2X_4 = 45 \\
 (1) & X_1 & + X_3 = 4 \\
 (2) & 3/2X_1 + X_2 & + 1/2X_4 = 9
 \end{array}$$

Multiplicando la ecuación (2) por (- 4) y sumándole la ecuación (0), eliminamos a X_2 de la función objetivo, quedando el sistema así:

$$\begin{array}{lcl}
 (0) & Zx - \mathbf{3/2X_1} & + 1/2X_4 = 9 \\
 (1) & X_1 & + X_3 = 4 \\
 (2) & 3/2X_1 + X_2 & + 1/2X_4 = 9
 \end{array}$$

Observe que en la ecuación (0) el coeficiente de X_1 es negativo, lo que indica que la solución no es óptima y que hay que iterar empleando el método simplex.

Introducimos los datos a un tablero simplex e iteramos.

C _j →			3	1	0	0	b
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	\bar{a}
0	X ₃	4	1	0	1	0	4
1	X ₂	9	3/2	1	0	1/2	6
Z _j - C _j		9	-3/2	0	0	1/2	

↑

C _j →			3	1	0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
3	X ₁	4	1	0	1	0
1	X ₂	3	0	1	-3/2	1/2
Z _j - C _j		15	0	0	3/2	1/2

(-3/2)

La nueva solución óptima es:

$$\begin{array}{llll}
 X_1^* = 4 & X_4^* = 0 & Y_1^* = 3/2 & Y_4^* = 0 \\
 X_2^* = 3 & Zx^* = 15 & Y_2^* = 1/2 & Zy^* = 15 \\
 X_3^* = 0 & & Y_3^* = 0 &
 \end{array}$$

Una manera abreviada de efectuar este procedimiento, consiste en realizar los cambios directamente sobre el tablero simplex de la solución óptima y recalcular todos los valores de los $Z_j - C_j$ que nos indicará si la solución presente conserva su optimalidad o por el contrario la pierde, quedando en este caso el tablero listo para efectuar la iteración siguiente, si ello es necesario.

C _j →			3	1	0	0
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
0	X ₃	4	1	0	1	0
1	X ₂	9	3/2	1	0	1/2
Z _j - C _j		9	-3/2	0	0	1/2

$Z = (1)(9) + (0)(4) = \mathbf{9}$
 $Z_1 - C_1 = (1)(3/2) + (0)(1) - 3 = \mathbf{-3/2}$
 $Z_2 - C_2 = (1)(1) + (0)(0) - 1 = \mathbf{0}$
 $Z_3 - C_3 = (1)(0) + (0)(1) - 0 = \mathbf{0}$
 $Z_4 - C_4 = (1)(1/2) + (0)(0) - 0 = \mathbf{1/2}$

Fíjese que aquí, el tablero simplex ha quedado automáticamente listo para iterar, ya que se observa en él, que su solución es factible ($b_i \geq 0$) pero no

óptima, en atención a que el valor de $(Z_1 - C_1) < 0$ ó sea $-3/2$; los valores del tablero simplex para la siguiente iteración son los mismos que se hallaron anteriormente.

Observe que el cambio en C_j cuando X_j^* es una variable básica afecta exclusivamente los valores de $Z_j - C_j$ de las variables NO BÁSICAS y el valor de Z^* .

En términos generales, un cambio en C_j afecta la optimalidad del tablero simplex.

Análisis de sensibilidad

Ahora la pregunta es: ¿entre que valores puede cambiar C_2 , de tal forma que se mantenga el tablero actual óptimo?

Para contestar esta pregunta, basta con plantear las ecuaciones que recalculan los valores de $(Z_j - C_j)$ de cada una de las variables no básicas, colocando en el tablero óptimo como coeficiente de X_2 un valor cualquiera C_2 . Para mantener el actual tablero óptimo, los nuevos valores de $Z_j - C_j$ de las variables no básicas deben cumplir con la condición de ser mayores o iguales a cero (0).

$C_j \rightarrow$			3	C_2	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
C_2	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_j - C_j$	$9C_2$	$Z_1 - C_1$	0	0	$Z_4 - C_4$	

El $Z_1 - C_1$ y el $Z_4 - C_4$ deben ser ≥ 0 para que el tablero óptimo actual siga siendo óptimo.

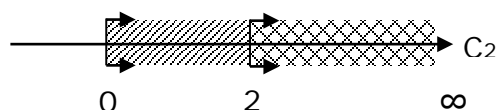
Lo anterior implica que:

$$\begin{aligned} \text{Para } Z_1 - C_1 &\geq 0 \\ 3/2C_2 + (1)(0) - 3 &\geq 0 \\ 3/2C_2 &\geq 3 \\ C_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } Z_4 - C_4 &\geq 0 \\ 1/2C_2 + (0)(0) - 0 &\geq 0 \\ 1/2C_2 &\geq 0 \\ C_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para que el tablero óptimo actual conserve su optimalidad, C_2 debe cumplir las dos condiciones anteriores: Debe ser mayor o igual a 2 y debe ser mayor o igual a 0, entonces, el conjunto de números reales que cumplen ambas condiciones, se observan en la gráfica 4.2 son:

Gráfica 4.2 Intervalo para C_2



De la gráfica 4.2 se concluye que los valores de C_2 deben estar en el intervalo: $2 \leq C_2 \leq \infty$ para que el tablero óptimo actual se mantenga.

Fuente: El autor.

3. Cambio en b_i

El análisis de este caso nos revelará el significado de las variables del dual, que dan origen a dos conceptos de interpretación económica denominados el precio sombra y el costo reducido. En la práctica, es muy usado, ya que se trata de cambios efectuados sobre la disponibilidad de los recursos.

Un cambio en un b_i afecta los valores de las variables básicas en la solución óptima, haciendo que esta siga factible o no, pudiendo afectar la factibilidad del problema. Si al efectuar el cambio, al menos un b_i se hace < 0 , entonces se hace necesario aplicar el método dual-simplex.

El coeficiente de la variable de holgura de la ecuación donde ocurre el cambio, nos indica el número de veces que cada ecuación ha sido sumada ó restada de las demás ecuaciones o sea el número de veces que ocurre el cambio, siendo el cambio la diferencia entre el nuevo y el actual valor de b_i

Para este caso se propone cambiar la segunda restricción de la siguiente forma: $3X_1 + 2X_2 \leq 18$ a $3X_1 + 2X_2 \leq 14$. Restricción donde ocurre el cambio es la segunda.

Variable que inicia con coeficiente uno (1) en la restricción dos: La variable artificial X_4 , entonces:

Los coeficientes de X_4 en cada fila del tablero simplex óptimo actual, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila, sobre el término independiente.

Se define como el cambio, la diferencia entre el nuevo y el actual valor de b_i en el tablero óptimo actual del simplex.

El cambio es: $\Delta = b_i(\text{nuevo}) - b_i(\text{actual})$

para el ejemplo actual, el cambio es: $\Delta = (14-18)$

Los nuevos valores de las variables básicas, vector \bar{b} , son:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b} & \text{Coeficientes de } X_4 & \Delta \\ \text{(actual)} & \text{en el tablero simplex} & \text{El cambio} \\ & \text{óptimo actual.} & \\ 4 + & 0 & (14-18) \\ 9 + & 1/2 & (14-18) \\ 45 + & 5/2 & (14-18) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Número de veces
que ocurre el cambio
en cada fila

Como los b_i nuevos son ≥ 0 (4, 7), el tablero simplex óptimo actual se mantiene factible. Si al menos un b_i nuevo fuese < 0 (negativo, NO factible). Entonces, se modifica el tablero simplex óptimo con los nuevos b_i y

se itera empleando el método Dual-Simplex.

$$\begin{array}{llll} X_1^* = 0 & X_4^* = 0 & Y_1^* = 0 & Y_4^* = 0 \\ X_2^* = 7 & Z_x^* = 35 & Y_2^* = 5/2 & Z_y^* = 35 \\ X_3^* = 4 & & Y_3^* = 9/2 & \end{array}$$

Una manera de demostrar lo anterior, consiste en repetir el ejercicio, pero expresando el nuevo valor

de b_2 en función del valor presente de b_2 ; esto es: $18 + (14 - 18)$ que es equivalente a: $b_2 = 14$, lo anterior, para observar que cambios se producen sobre la solución óptima y que elementos los producen.

Maximizar $Z_x = 3X_1 + 5X_2$

c.s.r.

$$X_1 \leq 4 \quad \Rightarrow$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18 + (14 - 18)$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

Maximizar $Z_x = 3X_1 + 5X_2$

c.s.r.

$$X_1 + X_3 = 4$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_4 = 18 + (14 - 18)$$

$$X_j \geq 0; j = 1, 2$$

C _j →			3	5	0	0	
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	b/a
0	X ₃	4	1	0	1	0	NR
0	X ₄	18+(14-18)	3	2	0	1	7 → (1/2)
Z _j - C _j		0	-3	-5	0	0	



C _j →			3	5	0	0
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
0	X ₃	4	1	0	1	0
5	X ₂	9+1/2(14-18)	3/2	1	0	1/2
Z _j - C _j		45+5/2(14-18)	9/2	0	0	5/2

Fíjese que los elementos de \bar{b} son exactamente idénticos a los calculados anteriormente.

C _j →			3	5	0	0
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
0	X ₃	4	1	0	1	0
5	X ₂	7	3/2	1	0	1/2
Z _j - C _j		35	9/2	0	0	5/2

Tablero simplex óptimo y factible, en donde $X_1^*=0$; $X_2^*=7$; $X_3^*=4$; $X_4^*=0$; $Z_x^*=35$ los valores de las variables duales (precio sombra y costo reducido), quedan iguales. $Y_1^*=0$; $Y_2^*=5/2$; $Y_3^*=9/2$; $Y_4^*=0$; $Z_y^*=35$

Fíjese que si el incremento en b_2 es de solo una unidad (de 18 a 19), entonces el $\Delta=19-18=1$ y el incremento en Z es de $45+1(5/2)$ y siendo $5/2$ el valor de Y_2^* , luego el valor de $Y_2^*=5/2$ es lo que Z^* se incrementa por una unidad adicional de recurso b_2 ; lo anterior es la interpretación del PRECIO SOMBRA o VALOR MÁXIMO A PAGAR POR UNA UNIDAD ADICIONAL DE RECURSO b_2

Análisis de sensibilidad para b_i

Ahora la pregunta es: ¿Entre que valores pueden cambiar los b_i (Recursos) , de tal forma que se mantenga el tablero óptimo actual factible?

Para contestar esta pregunta, basta con plantear las ecuaciones que calculan los valores de los b_i nuevos, reemplazando el nuevo b_i , por un valor cualquiera que cumpla con la condición de que el nuevo valor de las variables básicas sea ≥ 0 que mantenga la respuesta actual factible.

Análisis de sensibilidad para b_1

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_j - C_j$		45	9/2	0	0	5/2

Solución óptima actual: La variable de holgura de la fila uno, donde ocurre el cambio es X_3 , luego, los coeficientes de X_3 en el tablero óptimo, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila, siendo el cambio: $(b_1 - 4)$, entonces, los nuevos b_i son:

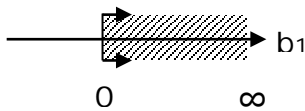
$$4 + 1(b_1 - 4) \geq 0 \\ b_1 \geq 0$$

$$9 + 0(b_1 - 4) \geq 0 \\ 9 \geq 0$$

No informa nada sobre el comportamiento de b_1

Luego b_1 debe tomar valores entre $0 \leq b_1 \leq \infty$ para que el tablero simplex óptimo actual se mantenga factible.

Gráfica 4.3 Intervalo para b_1



Fuente: El autor.

Análisis de sensibilidad para b_2

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_j - C_j$		45	9/2	0	0	5/2

Solución óptima actual: La variable de holgura de la fila dos, donde ocurre el cambio es X_4 , luego, los coeficientes de X_4 en el tablero óptimo, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila, siendo el cambio: $(b_2 - 18)$, entonces, los nuevos b_i son:

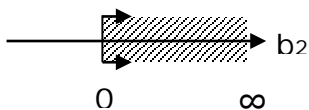
$$4 + 0(b_2 - 18) \geq 0 \\ 4 \geq 0$$

No informa nada sobre el comportamiento de b_2

$$9 + 1/2(b_2 - 18) \geq 0 \\ 9 + 1/2b_2 - 9 \geq 0 \\ 1/2b_2 \geq 0 \\ b_2 \geq 0$$

Luego b_2 debe tomar valores entre $0 \leq b_2 \leq \infty$ para que el tablero simplex óptimo actual se mantenga factible.

Gráfica 4.4 Intervalo para b_2



Fuente: El autor.

Es interesante observar que le sucede al valor actual de Z^* cuando se hace un cambio de una unidad en b_i

Cambio en b_1 de 4 a 5

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} (0) \ 45 + 0(5-4) = 45 + 0(1) = 45 \\ (1) \ 4 + 1(5-4) = 4 + 1(1) = 5 \\ (2) \ 9 + 0(5-4) = 9 + 0(1) = 9 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Aquí, } Z^*=45 \text{ no aumentó. Observe que} \\ \text{la primera variable del dual } Y_1 \text{ vale cero} \\ (0) \end{array} \end{array}$$

Cambio en b_2 de 18 a 19

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} (0) \ 45 + 5/2(19-18) = 45 + 5/2(1) = 95/2 \\ (1) \ 4 + 0(19-18) = 4 + 0(1) = 4 \\ (2) \ 9 + 1/2(19-18) = 9 + 1/2(1) = 19/2 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Aquí, } Z^*=95/2 \text{ aumentó en } 5/2 \\ \text{Observe que la segunda variable} \\ \text{del dual } Y_2 \text{ vale } 5/2 \end{array} \end{array}$$

Lo anterior significa que las variables reales del dual (Y_1^* , Y_2^*) son el incremento de Z^* por unidad de recurso aumentado, siempre y cuando este aumento de los recursos se mantenga dentro del rango de sensibilidad ($0 < b_1 < \infty$) y ($0 < b_2 < \infty$). Por ello, el valor de las variables reales del dual es llamado el precio sombra.

De manera similar, las variables de holgura del dual (Y_3^* , Y_4^*) indican lo que Z^* disminuye por cada unidad que se decida hacer crecer a una variable NO básica, esto se llama el costo reducido.

4. Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es NO básica

Aquí se efectúa el cambio sobre el coeficiente tecnológico de las variables, para muchos problemas este coeficiente tecnológico a_{ij} es el valor inverso de la productividad, concepto este de vital importancia para el tomador de decisiones.

$$\begin{array}{lll} \text{Productividad} & \text{Coeficiente tecnológico} & \text{En donde: } Q = \text{Unidades y} \\ P = Q/t & a_{ij} = t/Q & t = \text{Tiempo} \end{array}$$

Para este cambio y los siguientes, de nuevo se aplica el principio de que el coeficiente de la variable de holgura de la ecuación donde ocurre el cambio, nos indica el número de veces que cada ecuación ha sido sumada o restada de las demás ecuaciones o sea el número de veces que ocurre el cambio en cada fila, siendo el cambio la diferencia entre el nuevo y el actual valor de a_{ij}

Se propone hacer el cambio en la segunda restricción de la siguiente forma:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ por $X_1 + 2X_2 \leq 18$; El a_{21} a cambiado de 3 a 1 y es el coeficiente de X_1 que en el óptimo es variable NO básica.

El cambio ocurre en la ecuación (2), que tiene la variable de holgura X_4 que inició con coeficiente uno (1), luego su coeficiente en cada ecuación del tablero óptimo, indica el número de veces que ocurre el cambio en cada ecuación.

Matemáticamente, en la solución óptimo:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	$1+0(1-3)$	0	1	0
5	X_2	9	$3/2+1/2(1-3)$	1	0	$1/2$
$Z_j - C_j$	45		$9/2+5/2(1-3)$	0	0	$5/2$

La variable de holgura de la fila dos, donde ocurre el cambio es X_4 , luego, los coeficientes de X_4 en el tablero óptimo, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila, siendo el cambio: $(1-3)$, entonces, los nuevos a_{i2} son:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0	
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	b/a
0	X_3	4	1	0	1	0	4
5	X_2	9	$1/2$	1	0	$1/2$	18
$Z_j - C_j$	45		$-1/2$	0	0	$5/2$	

El tablero simplex se vuelve no óptimo, entonces, hay que aplicar el método simplex. Variable que entra en la base: X_1 Variable que sale de la base: X_3

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
3	X_1	4	1	0	1	0
5	X_2	7	0	1	$-1/2$	$1/2$
$Z_j - C_j$	47		0	0	$1/2$	$5/2$

Fíjese que el nuevo tablero simplex es óptimo y factible. La nueva solución óptima del problema principal es: $X_1^*=4$, $X_2^*=7$, $X_3^*=X_4^*=0$, $Z_x^*=47$
La nueva solución óptima del problema dual es: $Y_1^*=1/2$, $Y_2^*=5/2$, $Y_3^*=Y_4^*=0$, $Z_y^*=47$

Análisis de sensibilidad

Aquí, la pregunta es: ¿Entre que valores puede variar a_{21} (Coeficiente tecnológico de la variable de decisión X_1 en la segunda restricción) , de tal forma que el tablero se mantenga óptimo y factible?

Para contestar esta pregunta, basta con replantear la ecuación que recalcula el valor de $(Z_1 - C_1)$, reemplazando el nuevo a_{21} , por un valor cualquiera que cumpla con la condición de que el nuevo valor de $(Z_1 - C_1)$ sea ≥ 0 , que mantenga la respuesta actual óptima.

$9/2 + 5/2 (a_{21} - 3) \geq 0$; despejando a_{21} se encuentra que $a_{21} \geq 6/5$; Luego el rango de sensibilidad para a_{21} es: $6/5 \leq a_{21} \leq \infty$

5. Cambio en a_{ij} cuando X_j^* es variable básica

Como el cambio se efectúa sobre el coeficiente de una variable que en el óptimo es básica, ello hará que aparezca dicha variable con coeficiente diferente de cero (0) en la función objetivo, teniendo que ser eliminada. Este proceso ocasionará cambios en los $Z_j - C_j$ de las variables NO – básicas que en caso de tomar valores menores que cero (0), no mantienen la optimalidad y

habrá que iterar empleando el método simplex; También pueden ocurrir cambios en los b_i convirtiendo la solución en NO factible, en cuyo caso debe emplearse el método Dual – Simplex.

A manera de ejemplo, se propone cambiar el a_{22} de 2 a 4 , coeficiente de X_2 en la segunda restricción, variable que en el óptimo actual es variable básica.

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18 \text{ cambiar por } 3X_1 + 4X_2 \leq 18$$

La ecuación en donde ocurre el cambio es la segunda, y en ella la variable de holgura que empezó con coeficiente uno (1) es X_4 , luego los coeficientes de X_4 en cada ecuación del tablero óptimo, indican las veces que ocurre al cambio en cada ecuación, matemáticamente:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	$0+0(4-2)$	1	0
5	X_2	9	3/2	$1+1/2(4-2)$	0	1/2
$Z_j - C_j$	45	9/2	$0+5/2(4-2)$	0	0	5/2

Solución óptima actual: La variable de holgura de la fila dos, donde ocurre el cambio es X_4 , luego, los coeficientes de X_4 en el tablero óptimo, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila, siendo el cambio (4-2), entonces, los nuevos a_{12} y el nuevo Z_2-C_2 es:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	2	0	1/2
$Z_j - C_j$	45	9/2	5	0	0	5/2

Fíjese que siendo X_2 variable básica, ha perdido su vector unitario, el cual hay que recuperar, para ello, multiplicamos toda la fila (2) por (1/2), obteniendo los siguientes valores:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9/2	3/4	1	0	1/4
$Z_j - C_j$	45/2	3/4	0	0	0	5/4

Ya recuperado el vector unitario de X_2 , recalculamos los valores de $Z_j - C_j$, que de ser alguno de ellos negativo, daña la optimalidad y obliga al uso del método simplex para recuperarla. La nueva solución óptima es:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 0 & X_4^* &= 0 & Y_1^* &= 0 & Y_4^* &= 0 \\ X_2^* &= 9/2 & Z_x^* &= 45/2 & Y_2^* &= 5/4 & Z_y^* &= 45/2 \\ X_3^* &= 4 & & & Y_3^* &= 3/4 & & \end{aligned}$$

Observe que en este caso, se hubiera podido afectar la factibilidad, si alguno de los b_i se volviese negativo, ello hubiera podido ocurrir, si el calculo de: $1 + 1/2 (4-2)$ hubiese tenido un resultado negativo. Esta observación es importante para el siguiente análisis de sensibilidad.

Análisis de sensibilidad

Aquí, la pregunta es: ¿Entre que valores puede cambia a_{22} (Coeficiente tecnológico de X_2 en la segunda restricción), de tal forma que el tablero actual óptimo del simplex no pierda ni su factibilidad ni su optimalidad?

Para este caso el análisis es más complejo ya que ocurren cambios tanto en los $(Z_j - C_j)$, como en los b_i poniendo en peligro tanto la optimalidad como la factibilidad de la solución actual. Como en todos los casos anteriores, se reconstruyen las ecuaciones que dan origen a los cambios tanto de los $(Z_j - C_j)$, como de los b_i

Para conservar la factibilidad, debemos asegurar que el nuevo a_{22} del tablero óptimo sea un valor positivo, de lo contrario, se tiene que multiplicar toda la fila dos (2) por menos (-) el inverso del nuevo valor de a_{22} , para lograr el elemento uno (1) del vector unitario, convirtiendo al elemento b_2 en un valor negativo (-) lo cual convierte la solución en NO-factible. Matemáticamente:

$$1 + 1/2(a_{22} - 2) > 0$$

$$1 + 1/2a_{22} - 1 > 0$$

$a_{22} > 0$; a_{22} debe cumplir con esta condición para mantener la factibilidad.

Ahora, se debe asegurar que los nuevos $Z_j - C_j$ de las variables NO-básicas, sean valores mayores o iguales a cero (≥ 0).

Para $(Z_1 - C_1)_{\text{Nuevo}}$

$$5\left(\frac{3}{4}\right) + (0)(1) - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5\left(\frac{3}{2 * 2^*}\right) \geq 3 \quad \text{en donde } 2^* = 1 + \frac{1}{2}(a_{22} - 2)$$

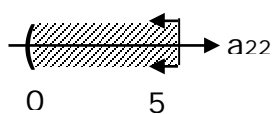
$$\left(\frac{15}{2\left(1 + \frac{1}{2}(a_{22} - 2)\right)}\right) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{15}{2\left(1 + \frac{1}{2}a_{22} - 1\right)}\right) \geq 3$$

$$\frac{15}{a_{22}} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 3a_{22} \leq 15 \quad \Rightarrow \quad a_{22} \leq 5; \quad a_{22} \text{ debe cumplir esta condición}$$

Para $(Z_4 - C_4)_{\text{Nuevo}}$

$$5\left(\frac{1}{4}\right) + (0)(0) - 0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5\left(\frac{1}{2 * 2^*}\right) \geq 0 \quad \text{en donde } 2^* = 1 + \frac{1}{2}(a_{22} - 2)$$

$$\left(\frac{5}{2\left(1 + \frac{1}{2}(a_{22} - 2)\right)}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \geq 0; \quad \text{No indica nada sobre el comportamiento de } a_{22}$$



Concluyendo: El valor de a_{22} debe estar en el intervalo $0 < a_{22} \leq 5$ para que el tablero óptimo actual se mantenga factible y óptimo. Lo relevante aquí, es que, este caso, puede atentar en contra de la optimalidad y en contra de la factibilidad al mismo tiempo, en caso de afectarse ambas, se

debe, primero, reparar la factibilidad mediante el método simplex-dual y en el tablero resultante arreglar la optimalidad, si ello fuera necesario, mediante el método simplex; también, de preferirse, se puede optar, por arreglar primero la optimalidad y después la factibilidad.

6. Adición de una restricción

Este caso plantea la posibilidad de añadir una restricción que se haya olvidado en la formulación inicial del problema, como en el caso de los problemas de solución indeterminada, en los que se presume el no haber tenido en cuenta la restricción de un recurso que afecta la solución del problema.

Supongamos que se ha olvidado tener en cuenta la siguiente tercera (3) restricción: $X_2 \leq 6$.

Observe si la nueva restricción se satisface con la solución óptima actual, Si lo hace, la nueva restricción es redundante, el área de soluciones factibles sigue siendo igual, la solución actual se mantiene, si no, se procede a añadir la nueva restricción.

La solución actual es: $X_1^* = 0$; $X_2^* = 9$; Reemplazando en la nueva restricción $X_2 \leq 6$ entonces $9 \leq 6$ Aseveración ésta que es falsa, luego debemos proceder a añadir la nueva restricción, así:

(3) $X_2 \leq 6$

(3) $X_2 + X_5 = 6$; siendo X_5 la nueva variable de holgura y variable básica de esta ecuación, luego, se debe insertar la nueva ecuación en el tablero óptimo de la siguiente manera:

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	4	1	0	1	0	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2	0
0	X_5	6	0	1	0	0	1
$Z_j - C_j$	45	9/2	0	0	0	5/2	0

Solución óptima actual: Al insertar la nueva restricción en el tablero óptimo actual se daña el vector unitario de la variable básica X_2 , para recuperarlo, multiplicamos la segunda fila por (-1) y le sumamos la tercera fila, obteniendo como resultado la nueva tercera fila.

$C_j \rightarrow$			3	5	0	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	4	1	0	1	0	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2	0
0	X_5	-3	-3/2	0	0	-1/2	1
$Z_j - C_j$	45	9/2	0	0	0	5/2	0

Fíjese que los valores de $(Z_j - C_j)$ no cambian. Aquí, el tablero de volvió infactible, ya que la variable básica X_5 es negativa ($X_5 = -3$). Para corregir la infactibilidad usamos el método simplex-dual.

C _j →			3	5	0	0	0
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
0	X ₃	4	1	0	1	0	0
5	X ₂	9	3/2	1	0	1/2	0
0	X ₅	-3	-3/2	0	0	-1/2	1
	Z _j - C _j	45	9/2	0	0	5/2	0
	(Z _j - C _j)/a _{ij}		-3	NO	NO	-5	NO

↑

Variable que entra: X₁
Variable que sale : X₅

→(-2/3)

C _j →			3	5	0	0	0
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
0	X ₃	2	0	0	1	-1/3	2/3
5	X ₂	6	0	1	0	0	1
3	X ₁	2	1	0	0	1/3	-2/3
	Z _j - C _j	36	0	0	0	1	3

La nueva solución óptima factible es:
 $X_1^* = 2$; $X_2^* = 6$; $X_3^* = 2$; $X_4^* = X_5^* = 0$;
 $Z_x^* = 36$
 $Y_1^* = 0$; $Y_2^* = 1$; $Y_3^* = 3$; $Y_4^* = Y_5^* = 0$;
 $Z_y^* = 36$

7. Adición de una variable

Aquí se considera la adición de una variable, que en la vida real puede ser un producto nuevo, modificación del portafolio de productos que ofrece la organización, entonces estamos midiendo los efectos de ésta decisión y sus implicaciones sobre la solución óptima actual.

El cambio que se propone es el siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max. } Z_x = 3X_1 + 5X_2 & \text{Max. } Z_x = 3X_1 + 5X_2 + \mathbf{7X_5} \\
 \text{c.s.r.} & \text{c.s.r.} \\
 X_1 \leq 4 & \Rightarrow X_1 + \mathbf{X_5} \leq 4 \\
 3X_1 + 2X_2 \leq 18 & 3X_1 + 2X_2 + \mathbf{2X_5} \leq 18 \\
 X_j \geq 0; j = 1, 2 & X_j \geq 0; j = 1, 2, 5
 \end{array}$$

Fíjese que este caso, es el cambio simultaneo de un C_j y de varios a_{ij}.

El C₅ ha cambiado de (0) a (7) en la función objetivo.

El coeficiente de X₅ en la primera restricción cambió de (0) a (1). El cambio fue de ($\Delta = 1 - 0$) = 1.

El coeficiente de X₅ en la segunda restricción cambió de (0) a (2). El cambio fue de ($\Delta = 2 - 0$) = 2.

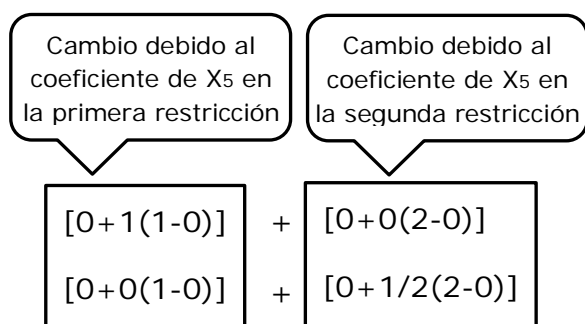
El objetivo se reduce a reconstruir toda la columna de la nueva variable X₅ en cada una de las ecuaciones del tablero simplex óptimo actual, aplicando nuevamente el concepto de que el coeficiente en el tablero óptimo de la variable que inicia con coeficiente uno (1) (generalmente las variables de holgura), indica el número de veces que ocurrió el cambio en cada ecuación,

por lo tanto, se inserta en el tablero óptimo actual, la columna correspondiente a la nueva variable X_5 , teniendo en cuenta que es la tercera variable de decisión del problema (variables de decisión: X_1, X_2, X_5). Lo anterior para que el orden de las variables duales en el tablero óptimo del simplex, no pierdan su orden.

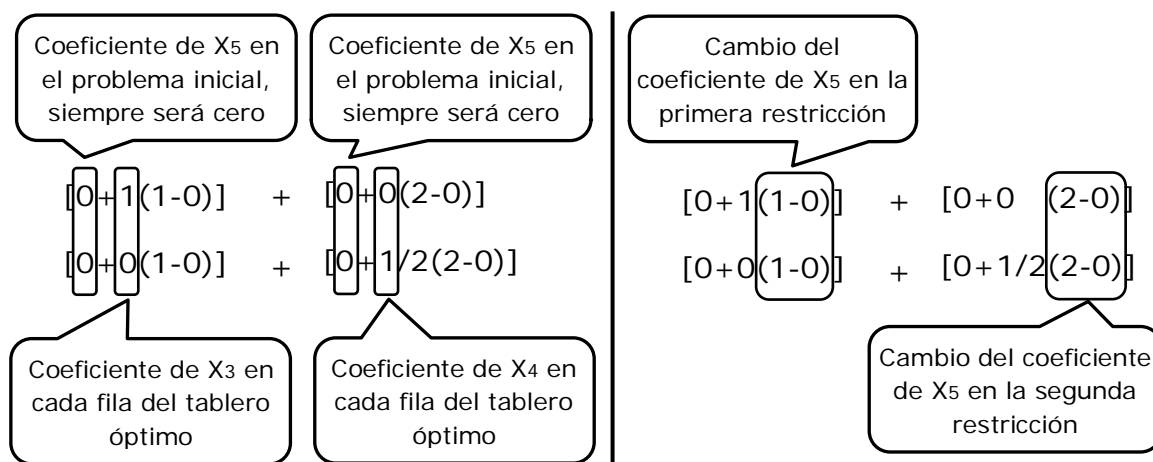
$C_j \rightarrow$			3	5	7	0	0
\downarrow	VB	\bar{b}	X_1	X_2	X_5	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	$[0+1(1-0)]+[0+0(2-0)]$	1	0
5	X_2	9	3/2	1	$[0+0(1-0)]+[0+1/2(2-0)]$	0	1/2
$Z_j - C_j$		45	9/2	0		0	5/2

Solución óptima actual: Se inserta la nueva columna correspondiente a la nueva variable X_5 y se calcula su coeficiente en cada una de las filas como si se tratara de un cambio en a_{ij}

La explicación detallada del calculo del coeficiente de X_5 es la siguiente:



Para el cálculo de cada a_{ij} existiran tantos términos como restricciones tenga el problema. Para el presente ejemplo, cada a_{ij} tiene dos (2) términos.



Una vez calculados los a_{ij} se calcula el $Z_j - C_j$ de X_5 que de ser negativo obliga al uso del método simplex, para calcular la nueva solución óptima factible.

Cj →		3	5	7	0	0	
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₅	X ₃	X ₄
0	X ₃	4	1	0	1	1	0
5	X ₂	9	3/2	1	1	0	1/2
Z _j - C _j	45	9/2	0	-2	0	5/2	

Variable que entra a la base: X₅

Variable que sale de la base: X₃

Cj →		3	5	7	0	0	
↓	VB	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₅	X ₃	X ₄
7	X ₅	4	1	0	1	1	0
5	X ₂	5	1/2	1	0	-1	1/2
Z _j - C _j	53	13/2	0	0	2	5/2	

La nueva solución óptima y factible es:

X₁*=0; X₂*=5; X₃*=X₄*=0; X₅*=4; Z_x*=53

Y₁*=2; Y₂*=5/2; Y₃*=13/2; Y₄*=Y₅*=0; Z_y*=53

El WinQsb y el Análisis de Sensibilidad

Por último, nos ocuparemos de ilustrar el uso del Software WinQsb en lo que se relaciona con la solución de problemas de programación lineal y el análisis de Sensibilidad.

A continuación ilustraremos la ventana inicial, en donde introducimos los datos generales del problema, luego, la ventana de captura de los datos correspondientes a la función objetivo y las restricciones y por último la ventana que nos muestra los resultados de la solución óptima; el problema que se usa, es el mismo que se ha utilizado como ejemplo durante todo el capítulo.

Maximizar $Z_x = 3X_1 + 5X_2$

c.s.r.

$X_1 \leq 4$

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_j \geq 0; j = 1, 2$

Figura 4.6 Interfaz del WinQsb.

Fíjese que el problema debe tener un nombre, el cual será usado en los informes escritos y de pantalla.

El número de restricciones no incluye las restricciones de no negatividad. El software le ofrece cuatro (4) tipos de variables: Continua positiva, Entera positiva, Binaria (0,1) e irrestricta (Que puede tomar cualquier valor dentro de los números reales).

Se recomienda el formato de matriz de hoja de cálculo por ser la más didáctica.

Fuente: Software WinQsb.

Con doble clic del ratón sobre la casilla de “DIRECCIÓN” se puede cambiar el sentido de la desigualdad ó convertirla en igualdad, y el tipo de variable se puede cambiar de manera individual con doble click sobre la casilla de “TIPO DE VARIABLE”.

Figura 4.7 Interfaz del WinQsb

VARIABLES ->	X1	X2	DIRECCION	RECURSO
MAXIMIZAR	3	5		
RESTRICCION 1	1		<=	4
RESTRICCION 2	3	2	<=	18
V/R INFERIOR	0	0		
V/R SUPERIOR	M	M		
TIPO VARIABLE	CONTINUA	CONTINUA		

Fuente: Software WinQsb.

Para solucionar el problema se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior y que se señala en la gráfica siguiente:

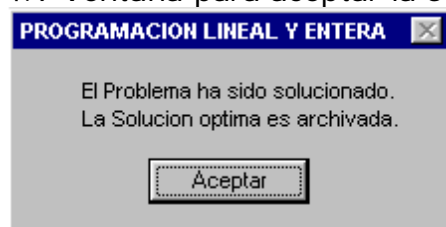
Figura 4.8 Cinta de iconos de la interfaz del WinQsb



Fuente: Software WinQsb.

El programa anuncia, mediante una ventana de dialogo, que el problema ha sido solucionado y que la solución óptima ha sido archivada, se acepta dando clic sobre el botón de “Aceptar”

Figura 4.9 Ventana para aceptar la solución.



Fuente: Software WinQsb.

En la siguiente ventana se nos ofrece la solución óptima y algunos datos del análisis de sensibilidad, cuyo significado, entramos a explicar.

Para efectos de una interpretación que guarde mayor relación con la realidad, supondremos que las variables de decisión X_1 y X_2 representan las cantidades a producir de los artículos 1 y 2. Las restricciones representan la cantidad de recursos disponibles del tipo A y B y la función objetiva son las utilidades logradas.

En el encabezado de esta ventana se muestra la hora y la fecha en que se logró la presente solución.

La ventana está dividida en dos, mediante una línea de color rojo, en la parte superior de dicha línea, se encuentra la información relacionada con las variables de decisión, y la función objetivo. En esta área el significado para la fila 1, de los datos de izquierda a derecha es:

Del artículo 1 (X_1) debemos producir cero (0) unidades. Su utilidad por unidad (C_1) es de \$3 y su contribución a la utilidad total es de cero (0) pesos $(0)(3)=0$. Si decidiéramos producir unidades del producto 1, entonces, por cada unidad producida, perderíamos \$4,50 de nuestras utilidades, esto se denomina el costo reducido del producto 1. En la siguiente casilla a la derecha, se nos informa que esta variable está en su valor límite posible ($X_1 \geq 0$). Por último, en las dos últimas casillas de esta fila, se muestra el análisis de sensibilidad para C_1 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 1 debe estar en el rango de: $-\infty \leq C_1 \leq 15/2$ para que la solución actual se mantenga óptima.

El significado para la fila 2, de los datos de izquierda a derecha es:

Del artículo 2 (X_2) debemos producir 9 unidades. Su utilidad por unidad (C_2) es de \$5 y su contribución a la utilidad total es de \$45 $[(5)(9)=45]$. Aquí el costo reducido es de \$0 en atención a que sí se van a producir unidades del artículo 2. En la siguiente casilla a la derecha, se nos informa que esta variable es básica. En las dos últimas casillas de ésta fila, se muestra el análisis de sensibilidad para C_2 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 2 debe estar en el rango de: $2 \leq C_2 \leq +\infty$ para que la solución actual se mantenga óptima.

En la siguiente fila se muestra el valor total de la contribución o valor máximo de la función objetivo $Z^* = \$45$

Figura 4.10 Solución óptima en el software WinQsb

	18:36:16		Tuesday	June	19	2001		
	Variables de Decisión	Solución	Costo ó Beneficio Por Unidad Cj	Contribucion Total	Costo Reducido	Estado de la variable Básica	Mínimo Cj Admisible	Máximo Cj Admisible
1	X1	0	3.0000	0	-4.5000	En el Limite	-M	7.5000
2	X2	9.0000	5.0000	45.0000	0	Básica	2.0000	M
	Función	Objetivo	(Max.) =	45.0000				
	Restricciones	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho Recurso bi	Holgura ó Excedente	Precio Sombra	Mínimo Recurso bi	Máximo Recurso bi
1	C1	0	<=	4.0000	4.0000	0	0	M
2	C2	18.0000	<=	18.0000	0	2.5000	0	M

Fuente: Software WinQsb.

En la parte inferior de la línea roja, se encuentra la información referente a cada una de las restricciones y su interpretación es la siguiente:

La fila 1 corresponde a la restricción 1, referente a la disponibilidad del recurso A , para el que se muestra el valor del lado izquierdo, evaluado con la solución optima y que indica que del recurso A no se utilizará ninguna unidad, de las 4 disponibles, por ello la holgura o sobrante de dicho recurso es de 4 unidades. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso A, ello ocasionará un incremento en la utilidad de \$0 ; Siempre y cuando el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 \leq b_1 \leq \infty$; que son los valores que hacen que la solución actual permanezca factible.

La fila 2 corresponde a la restricción 2, referente a la disponibilidad del recurso B , para el que se muestra el valor del lado izquierdo, evaluado con la solución optima y que indica que del recurso B se utilizan 18 unidades, de las 18 disponibles, por ello la holgura o sobrante de dicho recurso es de 0 unidades. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso B, ello ocasionará un incremento en la utilidad de \$2,50 siempre y cuando el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 \leq b_2 \leq \infty$; que son los valores que hacen que la solución actual permanezca factible. También se puede asegurar que, lo máximo a pagar por una unidad adicional del recurso B es \$2,50; si pagamos más de \$2,50 se perderá utilidad en una cantidad igual a la diferencia entre el precio de compra y \$2,50, si pagamos menos de \$2,50 obtendremos un incremento en la utilidad igual a la diferencia entre \$2,50 y el valor pagado por la unidad adicional de recurso B; si pagamos justamente \$2,50 no incrementamos ni disminuimos el beneficio total.

Problemas propuestos

4.1 Considere el siguiente problema de programación lineal convexa:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Zx = -X_1 + 3X_2 - 2X_3 \\ &\text{c.s.r.} \\ &3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7 \quad \text{Recurso A} \\ &-2X_1 + 4X_2 \leq 12 \quad \text{Recurso B} \\ &-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10 \quad \text{Recurso C} \\ &X_j \geq 0; j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Si su tablero óptimo mediante el método simplex es:

Cj	→		-1	3	-2	0	0	0
↓	V.B.	\bar{b}	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
-1	X ₁	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
3	X ₂	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
0	X ₆	11	0	0	10	1	-1/2	1
Zj - Cj		11	0	0	12/5	1/5	4/5	0

Nota: No son necesarios cálculos largos para ninguno de los encisos del problema. Use el análisis post óptimo y el análisis de sensibilidad.

- a) ¿Cuál es la solución óptima al problema principal?
- b) Formule el problema dual.
- c) ¿Cuál es la solución óptima al problema dual?
- d) Si Z es la ganancia en pesos (\$), ¿Cuál es la contribución a la ganancia si hubiera una unidad más de recurso A?, lo mismo para B, lo mismo para C.
- e) Haga un análisis de sensibilidad para cada uno de los C_j de las variables de decisión.
- f) Si datos más recientes, establecen que la función objetivo es: $Zx = -X_1 + 3X_2 + X_3$ ¿Es la solución actual todavía óptima? Si no, encuentre la nueva solución óptima.
- g) Suponga que queremos investigar el efecto de cambiar la función objetivo a: $Zx = -X_1 + X_2 - 2X_3$ ¿Aún será óptima la solución actual? Si no, encuentre la nueva solución óptima.
- h) Haga un análisis de sensibilidad para cada uno de los b_i
- i) Si solo hay disponibles 10 unidades del recurso B, ¿El óptimo será el mismo? Si no, encuentre la nueva solución óptima.
- j) ¿Cambia la solución óptima si añadimos la restricción: $X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$? Si cambia, ¿Cuál es la nueva solución óptima?
- k) Suponga que se desea activar una cuarta actividad (X_7), y que el nuevo modelo matemático es:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } Zx = -X_1 + 3X_2 - 2X_3 + X_7 \\
 &\text{c.s.r.} \\
 &3X_1 - X_2 + 2X_3 + X_7 \leq 7 \quad \text{Recurso A} \\
 &-2X_1 + 4X_2 - 2X_7 \leq 12 \quad \text{Recurso B} \\
 &-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 - X_7 \leq 10 \quad \text{Recurso C} \\
 &X_j \geq 0; j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

¿Es la solución actual con $X_7 = 0$ aún óptima? Si no, encuentre la nueva solución óptima.

Solución:

- a) $X_1^* = 4; X_2^* = 5; X_3^* = X_4^* = X_5^* = 0; X_6^* = 11; Zx^* = 11$
- b) Minimizar $Zy = 7Y_1 + 12Y_2 + 10Y_3$
c.s.r.

$$\begin{aligned}
 3Y_1 - 2Y_2 - 4Y_3 &\geq -1 \\
 -Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 &\geq 3 \\
 2Y_1 + 8Y_3 &\geq -2
 \end{aligned}$$

$$Y_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$
- c) $Y_1^* = 1/5; Y_2^* = 4/5; Y_3^* = Y_4^* = Y_5^* = 0; Y_6^* = 12/5; Zy^* = 11$
- d) $Y_1^* = 1/5; Y_2^* = 4/5; Y_3^* = 0$
- e) $-1,5 \leq C_1 \leq \infty; 2 \leq C_2 \leq \infty; -\infty \leq C_3 \leq 0,4$
- f) $X_1^* = 3,12; X_2^* = 4,56; X_3^* = 1,10; X_4^* = X_5^* = X_6^* = 0; Zx^* = 11,66$
 $Y_1^* = 0,26; Y_2^* = 0,77; Y_3^* = 0,06; Y_4^* = Y_5^* = Y_6^* = 0; Zy^* = 11,66$

- g) $X_1^*=0$; $X_2^*=3$; $X_3^*=0$; $X_4^*=10$; $X_5^*=0$; $X_6^*=1$; $Zx^*=3$
 $Y_1^*=0$; $Y_2^*=0,25$; $Y_3^*=0$; $Y_4^*=0,5$; $Y_5^*=0$; $Y_6^*=2$; $Zy^*=3$
- h) $-3 \leq b_1 \leq \infty$; $-4, \bar{6} \leq b_2 \leq 34$; $-1 \leq b_3 \leq \infty$
- i) $X_1^*=3,8$; $X_2^*=4,4$; $X_3^*=X_4^*=X_5^*=0$; $X_6^*=12$; $Zx^*=9,4$
 $Y_1^*=0,2$; $Y_2^*=0,8$; $Y_3^*=Y_4^*=Y_5^*=0$; $Y_6^*=2,4$; $Zy^*=9,4$
- j) $X_1^*=3, \bar{3}$; $X_2^*=4, \bar{6}$; $X_3^*=0$; $X_4^*=1, \bar{6}$; $X_5^*=0$; $X_6^*=9, \bar{3}$; $X_7^*=0$; $Zx^*=10, \bar{6}$
 $Y_1^*=0$; $Y_2^*=0, \bar{6}$; $Y_3^*=0$; $Y_4^*=0, \bar{3}$; $Y_5^*=0$; $Y_6^*=0$; $Y_7^*=2, \bar{3}$; $Zy^*=10, \bar{6}$
- k) $X_1^*=0$; $X_2^*=8,5$; $X_3^*=0$; $X_7^*=15,5$; $X_4^*=0$; $X_5^*=9$; $X_6^*=0$; $Zx^*=41$
 $Y_1^*=3$; $Y_2^*=0$; $Y_3^*=2$; $Y_4^*=2$; $Y_5^*=0$; $Y_6^*=24$; $Y_7^*=0$; $Zy^*=41$

4.2 Se ha concedido licencia a una nueva empresa de turismo para realizar vuelos entre Bogotá y las Islas de San Andrés y Providencia e Interinsulares (Vuelos entre las islas del archipiélago). Para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Bogotá y las Islas, así como Aviones de Hélice y/o helicópteros con los que servir los vuelos interinsulares. El presupuesto de compra es de \$2.800'000.000. Las características de los aparatos que puede comprar la empresa de turismo son:

Tipo de aparato	Costo por unidad (en millones de \$)	Mantenimiento por unidad (\$/día)	Requerimientos de tripulación			Capacidad Pasajeros/mes
			Pilotos	Copilotos	Azafatas	
Turborreactores	300	120.000	2	-	2	4.000
Aviones de Hélice	100	60.000	1	1	1	300
Helicópteros	50	30.000	1	-	-	100

Se pueden contratar como máximo 10 pilotos y 16 azafatas. Se desea contratar al menos 3 copilotos. El tráfico entre Bogotá y las Islas de San Andrés se estima en 8.000 pasajeros por mes; y el interinsular en 500 pasajeros por mes. El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea de 15. La empresa de turismo desea operar con costos de mantenimiento mínimos.

- a) Formular un modelo de programación Lineal que proporcione el plan óptimo de compra que minimice el costo del mantenimiento diario.
- b) Resolver e interpretar la solución, manualmente y con el Software WinQsb.
- c) Si existe la posibilidad de contratar 10 pilotos más, ¿Cuál será la nueva solución?
- d) Adicionalmente, un cambio en el contrato reduce el número mínimo de aparatos a 14, ¿Cuál es el efecto económico a esta modificación?

Solución

- b) No tiene solución
- c) $X_1^*=2$ Turborreactores; $X_2^*=3$ Aviones de hélice; $X_3^*=10$ Helicópteros;
 $X_4^*=1.400$; $X_5^*=3$; $X_6^*=9$; $X_7^*=X_8^*=0$; $X_9^*=1.400$; $X_{10}^*=0$;
 $Zx^*=\$720.000$
 $Y_1^*=Y_2^*=Y_3^*=0$; $Y_4^*=30.000$; $Y_5^*=22,5$; $Y_6^*=0$; $Y_7^*=30.000$;
 $Y_8^*=Y_9^*=Y_{10}^*=0$; $Zy^*=\$720.000$

- d) $X_1^*=2$ Turborreactores; $X_2^*=3$ Aviones de hélice; $X_3^*=9$ Helicópteros; $X_4^*=1.450$; $X_5^*=4$; $X_6^*=9$; $X_7^*=X_8^*=0$; $X_9^*=1.300$; $X_{10}^*=0$; $Zx^*=\$690.000$
 $Y_1^*=Y_2^*=Y_3^*=0$; $Y_4^*=30.000$; $Y_5^*=22,5$; $Y_6^*=0$; $Y_7^*=30.000$;
 $Y_8^*=Y_9^*=Y_{10}^*=0$; $Zy^*=\$690.000$. Disminuyen los costos totales de mantenimiento diarios a \$690.000; una disminución de: \$30.000 por día.

4.3 Una editorial dispone para impresión de 4.500 horas y para encuadernación de 4.000 horas. La tabla que sigue suministra los tiempos, en horas, empleados en ambas tareas para cuatro libros L_i ; $i = 1,2,3,4$ así como su beneficio por unidad en miles de pesos.

Tipo de libro	L_1	L_2	L_3	L_4
Impresión (horas/unidad)	0,1	0,3	0,8	0,4
Encuadernación (horas/unidad)	0,2	0,1	0,1	0,3
Beneficio por unidad (en miles de pesos)	1	1	4	3

- Formule un modelo de programación lineal que proporcione el máximo beneficio y resuélvalo empleando el software WinQsb.
- Suponga que el departamento comercial de la editorial no encuentra la solución razonable, y cree que, a lo sumo, se podrá vender 5.000 copias del libro L_4 a ese precio. Para vender 10.000, su beneficio deberá bajar en \$2.000 por copia. ¿Qué consecuencias tiene ésta hipótesis?. Obtener la mejor solución.
- Al director de la editorial le gustaría imprimir el libro L_2 . Desearía saber las consecuencias sobre el beneficio, así como la producción de los libros L_1 y L_4 si se producen 2.000 copias de L_2 .

Nota: Asuma que las variables son del tipo enteras.

Solución:

- $X_1^*=5.000$; $X_2^*=X_3^*=X_5^*=X_6^*=0$; $X_4^*=10.000$; $Zx^*=\$35'000.000$
 $Y_1^*=6.000$; $Y_2^*=2.000$; $Y_3^*=Y_6^*=0$; $Y_4^*=Y_5^*=1.000$; $Zy^*=35'000.000$
- Lo mejor es asumir una venta máxima de 5.000 libros tipo L_4 con un beneficio de \$3.000 por unidad, para un beneficio total es \$33'333.000
- Por cada unidad de L_2 que produzca, el beneficio disminuye en \$1.000, luego, si produce 2.000 unidades de L_2 el beneficio disminuye en \$2'000.000; la nueva solución es: $X_1^*=7.000$; $X_2^*=2.000$; $X_3^*=0$;
 $X_4^*=8.000$; $X_5^*=X_6^*=X_7^*=0$; $Zx^*=33'000.000$

4.4 Del problema principal, sabemos que una unidad de X_1 contribuye con \$6 por unidad a la utilidad, requiere 2 horas en el departamento A y 1 hora en el departamento B. Una unidad de X_2 contribuye con \$7 por unidad a la utilidad y requiere 1 hora en el departamento A y 3 horas en el departamento B. La capacidad máxima para cada departamento es de 40 horas.

Formule el dual e indique el valor que se incrementa la utilidad por cada hora adicional, en cada departamento.

Solución: \$2,20 y \$1,60 por hora adicional en los departamentos A y B respectivamente.

4.5 Un taller de artesanías fabrica dos productos en dos departamentos. El producto X_1 contribuye con \$6 por unidad a la utilidad y toma 6 horas en el departamento 1 y 6 horas en el departamento 2. El producto X_2 contribuye con \$14 por unidad a la utilidad y toma 8 horas en el departamento 1 y 2 horas en el departamento 2. Los departamentos 1 y 2 tiene capacidad de producción durante 38 y 42 horas por semana, respectivamente. Indique el número máximo de producción en unidades para maximizar la utilidad y muestre la diferencia en la contribución a la utilidad por cada hora adicional en los departamentos 1 y 2 respectivamente.

Solución: $X_1^*=0$; $X_2^*=4,75$; $Zx^*=\$66,50$; $Y_1^*=\$1,75$; $Y_2^*=\$0$

4.6 He aquí la función objetivo de beneficio, las restricciones por departamento y la tabla simplex óptima para un problema de mezcla de productos de programación lineal convexa:

$$\text{Maximizar } Zx = 2X_1 + 5X_2 + 8X_3$$

c.s.r.

$$6X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 96 \text{ Departamento 1}$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 40 \text{ Departamento 2}$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 60 \text{ Departamento 3}$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2, 3$$

Cj ↓	→		2	5	8	0	0	0
	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
5	X_2	8/3	1/3	1	0	1/6	-1/3	0
8	X_3	56/3	5/6	0	1	-1/12	2/3	0
0	X_6	44/3	7/3	0	0	-1/3	-1/3	1
$Z_j - C_j$		488/3	19/3	0	0	1/6	11/3	0

- Comente sobre el beneficio adicional para la compañía al añadir capacidad adicional en cada uno de los tres departamentos.
- Determine el rango para los recursos de cada departamento, sobre el cual los precios marginales (precio sombra) son válidos.
- Determine el rango sobre el cual los coeficientes de X_2 y X_3 pueden variar sin afectar la solución óptima.
- ¿Cuál tendría que ser la contribución por unidad (C_1) de X_1 para que fuera variable básica en el tablero de la solución óptima?

Solución:

a) $Y_1^*=1/6$; $Y_2^*=11/3$; $Y_3^*=0$

b) $80 \leq b_1 \leq 140$; $12 \leq b_2 \leq 48$; $45, \bar{3} \leq b_3 \leq \infty$

c) $4 \leq C_2 \leq 16$; $2,5 \leq C_3 \leq 10$

d) $8, \bar{3} < C_1 \leq \infty$

4.7 Del problema principal sabemos que una unidad del producto uno contribuye a la utilidad con \$7 y que requiere 3 unidades de entrada 1 (1 ingrediente) y 2 horas de mano de obra. Una unidad del producto 2 contribuye a la utilidad con \$5 y requiere 1 unidad de entrada 1 y 1 hora de mano de obra. La capacidad de las entradas es actualmente de 48 unidades y hay 40 horas de mano de obra. Formule el dual de este problema e indique el valor para la firma de otra unidad de entrada 1 y otra hora de mano de obra.

Solución: $Y_1^* = \$0$; $Y_2^* = \$5$

4.8 He aquí la función objetivo, las restricciones, y la tabla simplex óptima de un problema de programación lineal convexa de mezclas que involucra 4 productos y 3 departamentos.

$$\text{Maximizar } Zx = 2X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4$$

c.s.r.

$$X_1 + 3X_2 + X_4 \leq 4 \quad \text{Departamento 1}$$

$$2X_1 + X_2 \leq 3 \quad \text{Departamento 2}$$

$$X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 3 \quad \text{Departamento 3}$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2, 3, 4$$

C_j ↓	→		2	4	1	1	0	0	0
	V.B.	\bar{b}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
4	X_2	1	0	1	0	2/5	2/5	-1/5	0
2	X_1	1	1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0
1	X_3	1/2	0	0	1	3/20	-1/10	1/20	1/4
$Z_j - C_j$		13/2	0	0	0	7/20	11/10	9/20	1/4

- Comente sobre el valor que tiene para esta compañía el añadir capacidad adicional en cada uno de los tres departamentos.
- Determine el rango para los recursos de cada departamento, sobre el cual los precios marginales (precio sombra) son válidos.
- Determine el rango sobre el cual cada uno de los coeficientes de X_1 , X_2 , X_3 y X_4 puede variar sin afectar la solución óptima.
- ¿Cuál tendría que ser la contribución (C_4) de X_4 para que fuera variable básica en el tablero de la solución óptima?

Solución:

a) $Y_1^* = 11/10$; $Y_2^* = 9/20$; $Y_3^* = 1/4$

b) $1,5 \leq b_1 \leq 9$; $1, \bar{3} \leq b_2 \leq 8$; $1 \leq b_3 \leq \infty$

c) $1,25 \leq C_1 \leq 3,75$; $3,125 \leq C_2 \leq 6,25$; $0 \leq C_3 \leq 12$; $-\infty \leq C_4 \leq 1,35$

d) $1,35 < C_4 \leq \infty$

4.9 Considere el siguiente problema de programación lineal convexa:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Zx = C_1X_1 + C_2X_2 \\ &\text{c.s.r.} \\ &2X_1 - X_2 \leq b_1 \quad \text{Recurso A} \\ &X_1 - X_2 \leq b_2 \quad \text{Recurso B} \\ &X_j \geq 0; j = 1, 2 \end{aligned}$$

Sean X_3 y X_4 las variables de holgura para las restricciones correspondientes a los recursos A y B, respectivamente. Cuando $C_1=3$, $C_2=-2$, $b_1=30$ y $b_2=10$, el método simplex llevó a la siguiente tabla óptima:

C_j ↓	→ V.B.	\bar{b}	3 X_1	-2 X_2	0 X_3	0 X_4
-2	X_2	10	0	1	1	-2
3	X_1	20	1	0	1	-1
$Z_j - C_j$		40	0	0	1	1

- Formule el problema dual.
- Escriba la solución al problema principal.
- Escriba la solución al problema dual.
- ¿En cuánto se incrementa Z por unidad adicional de recurso A? ¿En cuánto se incrementa Z por unidad adicional de recurso B?
- ¿En cuánto se reduce Z por unidad adicional del producto X_1 ? ¿En cuánto se reduce Z por unidad adicional del producto X_2 ?
- Haga un análisis de sensibilidad para la disponibilidad del recurso A (b_1). Haga un análisis de sensibilidad para la disponibilidad del recurso B (b_2).
- Haga un análisis de sensibilidad para C_1 y C_2
- Si se ofrecen 5 unidades adicionales del recurso A por un valor total de 25 unidades monetarias. ¿Usted las compraría? Explique la respuesta claramente.
- ¿Hasta cuánto pagaría Usted como máximo por una unidad adicional de recurso b?
- Si el recurso B se incrementa en 10 unidades, ¿El tablero óptimo actual se mantiene? Si no, encuentre la nueva solución óptima.

Solución:

a) Minimizar $Zy = 30Y_1 + 10Y_2$

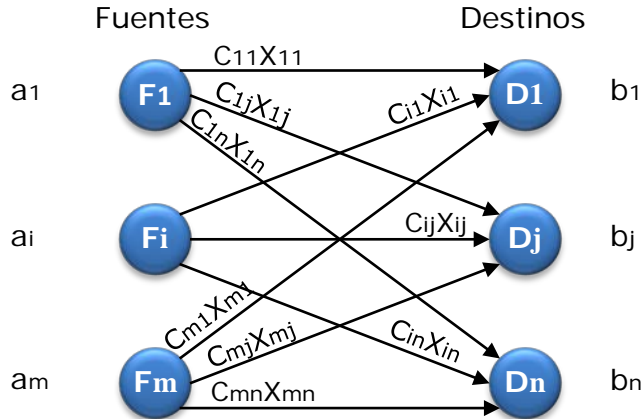
c.s.r.

$$\begin{aligned} 2Y_1 + Y_2 &\geq 3 \\ -Y_1 - Y_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

$$Y_i \geq 0; i = 1, 2$$

- $X_1^*=20$; $X_2^*=10$; $X_3^*=X_4^*=0$; $Zx^*=40$
- $Y_1^*=1$; $Y_2^*=1$; $Y_3^*=Y_4^*=0$; $Zy^*=40$
- $Y_1^*=1$; $Y_2^*=1$
- $Y_3^*=Y_4^*=0$

- f) $20 \leq b_1 \leq \infty$; $-\infty \leq b_2 \leq 15$
- g) $2 \leq C_1 \leq 4$; $-3 \leq C_2 \leq -1,5$
- h) No, porque se pierden 20 unidades monetarias.
- i) Hasta 1 unidad monetaria.
- j) $X_1^* = 15$; $X_2^* = 0$; $X_3^* = 0$; $X_4^* = 5$; $Zx^* = 45$; $Y_1^* = 1,5$; $Y_2^* = 0$; $Y_3^* = 0$; $Y_4^* = 0,5$; $Zy^* = 45$



Capítulo 5

Transporte

Transbordo

Asignaciones

Introducción

En este capítulo se estudia un modelo particular de problema de programación lineal, uno en el cual su resolución a través del método simplex es dispendioso, pero que debido a sus características especiales ha permitido desarrollar un método más práctico de solución.

El modelo de transporte clásico, se define como una técnica que determina la logística del envío de productos o mercancías desde unas fuentes hasta unos destinos, al menor costo posible.

También se estudiará el problema del transbordo en el que entre fuentes y destinos, existen estaciones intermedias.

Por último, se analiza el problema de asignaciones, que es un caso especial del problema del transporte, uno en el cual, todas las variables son de carácter binario (0,1) y a cada fuente se le debe asignar uno y solo un destino, y a cada destino una y solo una fuente.

Dentro del capítulo, se ilustra el uso del software WinQsb e Invop para resolver éstos tipos de modelos.

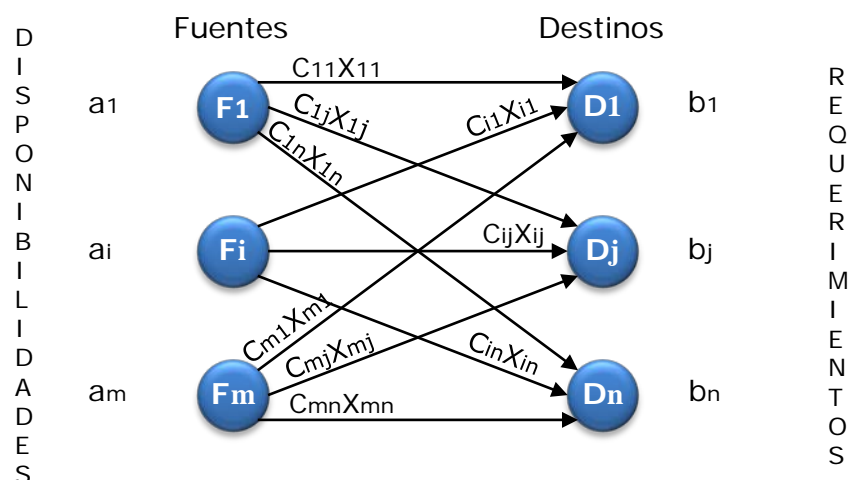
Modelo general del problema clásico del transporte

Es un caso especial de problema de programación Lineal convexa, en el que todas las variables en las restricciones tienen coeficiente uno (1), esto es:

$a_{ij} = 1; \forall i, \forall j$; Se lee: *Para todo valor de i, para todo valor de j*

Gráficamente:

Gráfica 5.1 Ilustración del modelo clásico de transporte



Fuente: El autor.

En donde:

X_{ij} : Unidades para transportar desde la fuente i -ésima ($i=1, \dots, m$) al destino j -ésimo ($j=1, \dots, n$)

C_{ij} : Costo del transporte de una unidad desde la fuente i -ésima ($i=1, \dots, m$) al destino j -ésimo ($j=1, \dots, n$)

a_i = Disponibilidad (oferta) en unidades, de la fuente i -ésima ($i=1, \dots, m$)

b_j = Requerimiento (demanda) en unidades, del destino j -ésimo ($j=1, \dots, n$)

El algoritmo que se ilustrará, exige que el modelo cumpla con:

Lo disponible=Lo requerido \rightarrow Oferta=Demanda \rightarrow Mercado perfecto

Matemáticamente:

Minimizar $Z = C_{11}X_{11} + \dots + C_{1j}X_{1j} + \dots + C_{1n}X_{1n} + \dots + C_{i1}X_{i1} + \dots + C_{ij}X_{ij} + \dots + C_{in}X_{in} + \dots + C_{m1}X_{m1} + \dots + C_{mj}X_{mj} + \dots + C_{mn}X_{mn}$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l} X_{11} + \dots + X_{1j} + \dots + X_{1n} = a_1 \\ \vdots \\ X_{i1} + \dots + X_{ij} + \dots + X_{in} = a_i \\ \vdots \\ X_{m1} + \dots + X_{mj} + \dots + X_{mn} = a_m \end{array} \quad \left| \right.$$

Restricciones que aseguran que todo lo disponible en cada fuente, es enviado.

$$\left. \begin{array}{l} X_{11} + \dots + X_{i1} + \dots + X_{m1} = b_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ X_{1j} + \dots + X_{ij} + \dots + X_{mj} = b_j \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ X_{1n} + \dots + X_{in} + \dots + X_{mn} = b_n \end{array} \right\}$$

Restricciones que aseguran que todo lo enviado, fue requerido en cada destino.

$$X_{ij} \geq 0; \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n$$

Lo anterior implica que:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Esto se llama: Un problema balanceado, en donde, la oferta es igual a la demanda, También se conoce como un problema de mercado perfecto.

Otra manera de formularlo es:

Hallar X_{ij} tal que:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

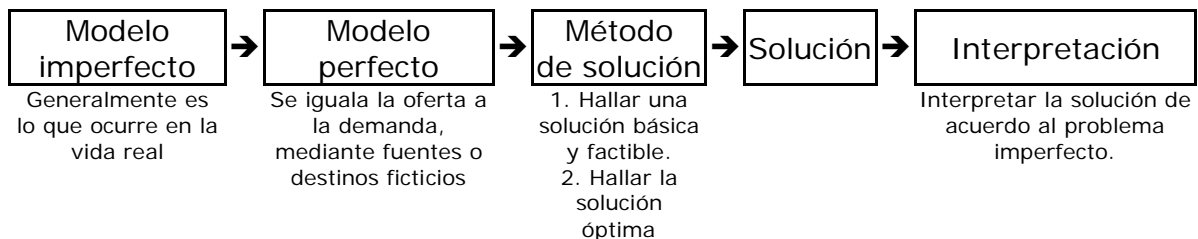
Con las siguientes restricciones:

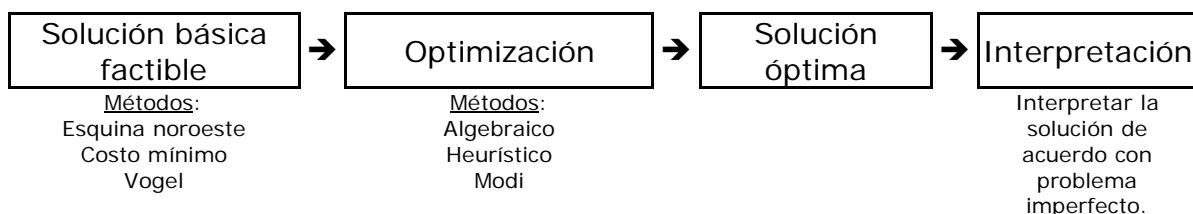
$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad ; i = 1, \dots, m \quad \text{Todo lo disponible es enviado.}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad ; j = 1, \dots, n \quad \text{Todo lo enviado fue requerido.}$$

$$X_{ij} \geq 0; \quad \forall i; \forall j \quad \text{Condición de no negatividad.}$$

Metodología general



Metodología de solución**Ejemplo 5.1**

Tres (3) fábricas envían su producto a cinco (5) distribuidores. Las disponibilidades, los requerimientos y costos unitarios de transporte se relacionan en la siguiente tabla:

Fábricas	Distribuidores					Disponibilidades
	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	X	70
Requerimientos	30	40	50	40	60	

Nota: La casilla con "X" significa que desde la fábrica 3 al distribuidor 5 es imposible enviar unidades de producto.

¿Qué cantidad del producto se debe enviar desde cada fábrica a cada distribuidor para minimizar los costos totales del transporte?

Solución

Observe que el modelo no es de mercado perfecto, la oferta total (170 unidades) es diferente a la demanda total (220 unidades). Para balancear el problema se adiciona una fábrica ficticia (fábrica 4) con costos de transporte igual a cero (0) y que ofrezca justo lo que le hace falta a la oferta para ser igual a la demanda, matemáticamente:

a_i	Fábricas	Distribuidores	b_j
40	1	1	30
60	2	2	40
70	3	3	50
170		4	40
50	4	5	60
220			220

Se adiciona la cuarta fábrica con una oferta, tal que, iguale la oferta con la demanda, ello es, con una disponibilidad de 50 unidades; dicha fábrica es ficticia y permite aplicar al algoritmo para solucionar el problema.

Formulación

X_{ij} : Unidades a enviar desde la fábrica i -ésima ($i=1,2,3,4$) al distribuidor j -ésimo ($j=1, 2, 3, 4, 5$).

$$\text{Minimizar } Z = 20X_{11} + 19X_{12} + 14X_{13} + 21X_{14} + 16X_{15} + 15X_{21} + 20X_{22} + 13X_{23} + 19X_{24} + 16X_{25} + 18X_{31} + 15X_{32} + 18X_{33} + 20X_{34} + MX_{35}$$

En donde M es un número muy grande en comparación con los demás C_{ij} .

A X_{35} se le asigna un coeficiente muy grande "La gran M " ya que Z nunca se minimizará mientras $X_{35} > 0$, lo hará, cuando X_{35} sea igual a cero (0), lograndolo cuando sea una variable no básica.

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 40 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 60 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 70 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 50 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Primer paquete de restricciones.} \\ \text{Todo lo disponible es enviado.} \\ \text{Fíjese que va por filas.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 30 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 40 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 50 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 40 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 60 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Segundo paquete de restricciones.} \\ \text{Todo lo requerido fue enviado.} \\ \text{Fíjese que va por columnas.} \end{array} \right.$$

$$X_{ij} \geq 0; i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5$$

Solución básica factible

Para generar una solución que sea básica y factible, se ilustran tres métodos a saber:

1. El método de la esquina noroeste.
2. El método del costo mínimo.
3. El método de Vogel.

Cada uno de estos métodos nos garantiza una solución factible, halla valores para las X_{ij} que satisfacen todas las restricciones, incluyendo la de no negatividad. Ello implica satisfacer la oferta y la demanda con valores que pertenecen a los números reales positivos.

Como cada variable figura dos (2) veces en el sistema de ecuaciones, entonces, el sistema tiene $m+n-1$ grados de libertad y el número de variables

básicas debe ser igual al número de grados de libertad del sistema. Lo anterior nos asegura una solución básica factible no degenerada.

$$\text{Número de variables básicas} = m + n - 1$$

Método de la esquina noroeste

Características

- Sencillo y fácil de hacer las asignaciones.
- No tiene en cuenta los costos para hacer las asignaciones.
- Generalmente nos deja lejos de la solución óptima.

Algoritmo

1. Construya una tabla de ofertas (disponibilidades) y demandas (requerimientos).
2. Empiece por la esquina noroeste.
3. Asigne lo máximo posible (lo menor entre la oferta y la demanda).
4. Actualice la oferta y la demanda y rellene con ceros el resto de casillas (filas o columnas) en donde la oferta ó la demanda halla quedado satisfecha.
5. Muévase a la derecha o hacia abajo, según halla quedado disponibilidad para asignar.
6. Repita los pasos del 3 al 5 sucesivamente hasta llegar a la esquina inferior derecha en la que se elimina fila y columna al mismo tiempo.

Para el ejemplo 5.1:

30					40
0					60
0					70
0					50
30	40	50	40	60	220

0

Aquí asignamos en la fila 1, columna 1 (esquina noroeste) lo máximo posible entre 40 y 30 o sea 30 unidades; $X_{11}=30$ variable básica. Actualizamos la oferta y la demanda, quedando éstas en: 10 y 0 y rellenamos con cero el resto de la columna 1, ya que la demanda de 30 unidades quedó satisfecha. Luego, nos movemos hacia la fila 1, columna 2 (X_{12}), le asignamos lo máximo posible (entre 10 y 40) y actualizamos la oferta y la demanda de dicha fila y columna, quedando satisfecha la fila 1, el tablero queda así:

30	10	0	0	0	40
0					60
0					70
0					50
30	40	50	40	60	220
0	30				

Después de repetir el algoritmo, el tablero final queda de las siguientes asignaciones:

30	10	0	0	0	40
0	30	30	0	0	60
0	0	20	40	10	70
0	0	0	0	50	50
30	40	50	40	60	220
0	30	20	0	50	
	0	0		0	

Fíjese que la única vez que se elimina fila y columna simultáneamente es en la última casilla ($X_{45}=50$). El número de variables básicas es: $m+n-1=4+5-1=8$; Aquí, las variables básicas son: $X_{11}=30$; $X_{12}=10$; $X_{22}=30$; $X_{23}=30$; $X_{33}=20$; $X_{34}=40$; $X_{35}=10$; $X_{45}=50$; estos valores satisfacen todas las restricciones, por eso se denomina, solución

factible. Remplazando el valor de las variables en la función objetiva, tenemos que el valor de Z es muy grande, ello ocurre debido a que la variable X_{35} es variable básica con valor diferente a cero (0).

$$Z = 20(30) + 19(10) + 14(0) + 21(0) + 16(0) + 15(0) + 20(30) + 13(30) + 19(0) + 16(0) + 18(0) + 15(0) + 18(20) + 20(40) + M(10) + 0(0) + 0(0) + 0(0) + 0(0) + 0(50) = 3.130 + 10M = M$$

Prohibición: No se debe eliminar fila y columna al mismo tiempo, a no ser que sea la última casilla en asignar. El romper esta regla ocasionará una solución en donde el número de variables básicas es menor a $m+n-1$, produciendo una solución básica factible degenerada.

Ahora, resolveremos la siguiente pregunta: ¿Cómo evitar eliminar fila y columna simultáneamente, sin estar en la última casilla a asignar? Uso de ϵ

Supongamos que nuestro problema es:

30	0	0	0	0	30
					70
					70
					50
30	40	50	40	60	220
ϵ					

El $a_1 = 40$ y $a_2 = 60$ se han cambiado por $a_1 = 30$ y $a_2 = 70$ produciendo un empate entre la oferta y la demanda de la casilla X_{11} de 30 unidades. Para este ejemplo, se procede así: Escoger satisfacer la fila o la columna (oferta o demanda), aquí se escogió satisfacer la oferta, entonces decidimos que a la demanda de 30 unidades le queda una cantidad muy

pequeña por satisfacer, llamada ϵ (epsilon) cuyo valor es igual a cero (0), $\epsilon \approx 0$, Ahora, al asignar la casilla correspondiente a X_{21} se debe escoger el menor valor entre la oferta y la demanda $\{\epsilon, 70\}$, por supuesto el valor para asignar a $X_{21}=\epsilon=0$, quedando la asignación de la siguiente forma:

30	0	0	0	0	30
ε					70
0					70
0					50
30	40	50	40	60	220

ε
0

tablero queda de la siguiente forma:

Lo que se ha hecho es asignarle a una variable básica el valor de cero (0) y para no confundirla con las variables no básicas, que también valen cero (0), en lugar de usar la representación clásica del cero "0" se usa otro símbolo "ε" para que las dos tipos de variables se identifiquen fácilmente, por ejemplo: $X_{21}=\epsilon=0$ =Variable básica, $X_{12}=0$ =Variable no básica. Prosiguiendo con las asignaciones, el

30	0	0	0	0	30
ε	40	30	0	0	70
0	0	20	40	10	70
0	0	0	0	50	50
30	40	50	40	60	220
ε	0	20	0	50	
0		0		0	

El número de variables básicas se mantiene en: $m+n-1=4+5-1=8$ y sus valores son: $X_{11}=30$; $X_{21}=\epsilon=0$; $X_{22}=40$; $X_{23}=30$; $X_{33}=20$; $X_{34}=40$; $X_{35}=10$; $X_{45}=50$. Fíjese que la suma por filas satisface la oferta y la suma por columnas satisface la demanda, luego es una solución factible.

Por último, si el problema fuera de maximización, el procedimiento es igual, ya que este método no tiene en cuenta los costos (beneficios) para hacer las asignaciones, hace las asignaciones solamente teniendo en cuenta las ofertas y las demandas.

Método del costo mínimo

Características

- Es más elaborado que el método de la esquina noroeste.
- Tiene en cuenta los costos para hacer las asignaciones.
- Generalmente nos deja alejados del óptimo.

Algoritmo para minimizar

1. Construya una tabla de disponibilidades, requerimientos y costos
2. Empiece en la casilla que tenga el menor costo de toda la tabla, si hay empate, escoja arbitrariamente (cualquiera de los empatados).
3. Asigne lo máximo posible entre la disponibilidad y el requerimiento (el menor de los dos).
4. Rellene con ceros (0) la fila o columna satisfecha y actualice la disponibilidad y el requerimiento, restándoles lo asignado.
5. Muévase a la casilla con el costo mínimo de la tabla resultante (sin tener en cuenta la fila o columna satisfecha).

6. Ejecute los puntos 3,4,5 sucesivamente, hasta que todas las casillas queden asignadas.

Algoritmo para maximizar

Para maximizar, el procedimiento es el mismo, lo único que cambia es que, las asignaciones se hacen sobre las casillas que tengan el mayor beneficio.

Recuerde que no debe eliminar ó satisfacer fila y columna al mismo tiempo, cuando la oferta sea igual a la demanda, en tal caso use ϵ (Epsilon). Siempre, el número de variables básicas debe ser: $m+n-1$

Para el ejemplo 5.1

	20		19		14		21		16	40
	15		20		13		19		16	60
	18		15		18		20		M	70
	0		0		0		0		0	50
0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	50
			ϵ							

Aquí, hay cinco (5) casillas que tienen un mínimo costo de cero (0), arbitrariamente se escogió la casilla correspondiente a la variable X_{43} y se le asignó 50 unidades, se eligió satisfacer la fila 4 y dejar un residuo de ϵ en la columna 3. Ahora, se asigna en la casilla de X_{23} por tener el mínimo costo de 13

unidades monetarias, la tabla, queda así:

	20		19		14		21		16	40
	15		20		13		19		16	60
	18		15		18		20		M	70
	0		0		0		0		0	50
0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	50
			ϵ							
			0							
			ϵ							
			0							

En X_{23} se asigna ϵ unidades, el menor entre $\{60, \epsilon\}$, Ahora, queda satisfecha la columna 3 y en la fila 2 queda un residuo de 60 unidades ($60 - \epsilon = 60$). Se continúa aplicando el algoritmo y la tabla final queda con las siguientes asignaciones:

20	19	14	21	16	
0	0	0	0	40	40 0
15	20	13	19	16	
30	0	ε	10	20	60 60 30 10 0
18	15	18	20	M	
0	40	0	30	0	70 30 0
0	0	0	0	0	
0	0	50	0	0	50 0
30	40	50	40	60	
0	0	ε	0	20	
		0		0	

Observe que el número de variables básicas es: $m+n-1=4+5-1=8$

La solución factible encontrada por el método del costo mínimo es: $X_{16}=40$; $X_{21}=30$; $X_{23}=\epsilon=0$; $X_{24}=10$; $X_{25}=20$; $X_{32}=40$; $X_{34}=30$; $X_{43}=50$

Con esta solución factible, la función objetivo vale:

$$Z = 20(0) + 19(0) + 14(0) + 21(0) + 16(40) + 15(30) + 20(0) + 13(0) + 19(10) + 16(20) + 18(0) + 15(40) + 18(0) + 20(30) + M(0) + 0(0) + 0(0) + 0(50) + 0(0) + 0(0) = 2.800$$

Es un valor de la función objetivo Z menor que el obtenido por el método de la esquina noroeste, luego ésta es una mejor solución al problema, pero, no podemos asegurar que sea la mejor.

Método de William R. Vogel (15 Noviembre De 1941-26 Agosto de 2010)

Características

- Es más elaborado que los anteriores, más técnico y dispendioso.
- Tiene en cuenta los costos, las ofertas y las demandas para hacer las asignaciones.
- Generalmente nos deja cerca al óptimo.

Algoritmo para minimizar

1. Construya una tabla de disponibilidades (ofertas), requerimientos (demanda) y costos.
2. Calcule la diferencia entre el costo mas pequeño y el segundo costo más pequeño, para cada fila y para cada columna.

3. Escoja entre las filas y columnas, la que tenga la mayor diferencia (en caso de empate, decida arbitrariamente).
4. Asigne lo máximo posible en la casilla con menor costo en la fila o columna escogida en el punto 3.
5. Asigne cero (0) a las otras casillas de la fila o columna donde la disponibilidad ó el requerimiento quede satisfecho.
6. Repita los pasos del 2 al 5, sin tener en cuenta la(s) fila(s) y/o columna(s) satisfechas, hasta que todas las casillas queden asignadas.

Algoritmo para maximizar

1. Construya una tabla de disponibilidades (ofertas), requerimientos (demanda) y costos.
2. Calcule la diferencia entre el beneficio mas grande y el segundo beneficio más grande, para cada fila y para cada columna.
3. Escoja entre las filas y columnas, la que tenga la mayor diferencia (en caso de empate, decida arbitrariamente).
4. Asigne lo máximo posible en la casilla con mayor beneficio en la fila o columna escogida en el punto 3.
5. Asigne cero (0) a las otras casillas de la fila o columna donde la disponibilidad ó el requerimiento quede satisfecho.

Repita los pasos del 2 al 5, sin tener en cuenta la(s) fila(s) y/o columna(s) satisfechas, hasta que todas las casillas queden asignadas.

Recuerde que no debe satisfacer filas y columnas al mismo tiempo; caso en que la disponibilidad sea igual al requerimiento; en tal caso use el ϵ (epsilon).

Como el ejercicio de ejemplo que se viene tratando es de naturaleza de minimización, se aplica el algoritmo para minimizar.

Para el ejemplo 5.1 la aplicación del algoritmo es el siguiente:

Una vez construida la tabla de ofertas, demandas, costos y diferencias entre columnas para cada fila y entre filas para cada columna, asignamos lo máximo posible en la celda de menor costo en la fila o columna que tenga la mayor diferencia. Mayor diferencia: 19, menor costo en la columna cuatro (4): cero (0), máximo a asignar entre {50, 40}: 40; se satisface la columna y el tablero queda de la siguiente manera:

	DISTRIBUIDORES					ai	Diferencias entre columnas
FÁBRICAS	20	19	14	21	16	40	2
				0			
	15	20	13	19	16	60	2
				0			
	18	15	18	20	M	70	3
				0			
	0	0	0	0	0	50	0
				40		10	
bj	30	40	50	40	60	220	
Diferencias entre filas	15	15	13	19	16		

Ahora, sin tener en cuenta la columna satisfecha (columna 4), recalculamos las diferencias que pueden haber cambiado, diferencias entre columnas y aplicamos nuevamente el algoritmo, el tablero queda, así:

	DISTRIBUIDORES					ai	Diferencias entre columnas
FÁBRICAS	20	19	14	21	16	40	2
				0			
	15	20	13	19	16	60	2
				0			
	18	15	18	20	M	70	3
				0			
	0	0	0	0	0	50	0
	0	0	0	40	10	10	
bj	30	40	50	40	60	220	
Diferencias entre filas	15	15	13	19	16		

La fábrica 4 queda satisfecha y no se tiene en cuenta para los calculos siguientes. Cada vez que un origen (fila, fábrica) o un destino (columna, distribuidor) queda satisfecho es como si se retirara de la tabla.

Ahora, se recalculan las diferencias entre filas, que son las que pudieron haber cambiado, al no tener en cuenta la fila cuatro (4).

El algoritmo se aplica de nuevo y su tablero final es:

Variables básicas $m+n-1=8$		DISTRIBUIDORES					ai	Diferencias entre columnas
		1	2	3	4	5		
F Á B R I C A S	1	<div>20</div> <div>0</div>	<div>19</div> <div>0</div>	<div>14</div> <div>0</div>	<div>21</div> <div>0</div>	<div>16</div> <div>40</div>	40 0	2
	2	<div>15</div> <div>30</div>	<div>20</div> <div>0</div>	<div>13</div> <div>20</div>	<div>19</div> <div>0</div>	<div>16</div> <div>10</div>	60 30 10 0	2 3
	3	<div>18</div> <div>0</div>	<div>15</div> <div>40</div>	<div>18</div> <div>30</div>	<div>20</div> <div>0</div>	<div>M</div> <div>0</div>	70 30 0	3 0 (M-18)
	4	<div>0</div> <div>0</div>	<div>0</div> <div>0</div>	<div>0</div> <div>0</div>	<div>0</div> <div>40</div>	<div>0</div> <div>10</div>	50 10 0	0
bj		30 0	40 0	50 20 0	40 0	60 50 0	220	
Diferencias entre filas		15 3	15 4	13 1	19	16 0		

La solución básica factible lograda por el método de Vogel es: $X_{15}=40$; $X_{21}=30$; $X_{23}=20$; $X_{25}=10$; $X_{32}=40$; $X_{33}=30$; $X_{44}=40$; $X_{45}=10$

El valor de la función objetiva es:

$$Z=40(16)+30(15)+20(13)+10(16)+40(15)+30(18)+40(0)+10(0)=$2.650,00$$

Que es un costo total menor que el obtenido por los otros dos métodos.

Conclusión: Hemos conseguido tres (3) soluciones básicas factibles no degeneradas (# de variables básicas = $m+n-1=8$) por medio de tres (3) métodos: El de la esquina noroeste, el del costo mínimo y el de Vogel. Pero ninguna de ellas nos garantiza que la solución encontrada es la óptima. Para saberlo, debemos estar seguros que ninguna de las variables no básicas pueda entrar a la base haciendo que la función objetivo disminuya. Para discernir un método que nos evalúe el efecto de introducir una unidad de cada variable no básica, recurrimos al método algebraico que posteriormente se convertirá en el método MODI.

Importante: A partir de cualquiera de estas tres soluciones básicas no degeneradas se puede comenzar a iterar para encontrar la solución óptima.

Método algebraico

El sistema de ecuaciones iniciales con las variables básicas factibles establecidas con el método de Vogel, es:

$$(0) \underline{Z} - 20X_{11} - 19X_{12} - 14X_{13} - 21X_{14} - 16\underline{X_{15}} - 15\underline{X_{21}} - 20X_{22} - 13\underline{X_{23}} - 19X_{24} - 16\underline{X_{25}} - 18X_{31} - 15\underline{X_{32}} - 18\underline{X_{33}} - 20X_{34} - MX_{35} - 0X_{41} - 0X_{42} - 0X_{43} - 0\underline{X_{44}} - 0\underline{X_{45}} = 0$$

- | | |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| (1) $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 40$ | (0) En la ecuación (0) Z es la Variable básica, |
| (2) $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 60$ | (0) acompañada de todas las variables básicas |
| (3) $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 70$ | (5) asignadas mediante el método de Vogel. Se |
| (4) $X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 50$ | (-16) deben sumar múltiplos de las restricciones |
| | a la función objetivo, de tal forma que se |
| (5) $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 30$ | eliminen $X_{15}, X_{21}, X_{23}, X_{25}, X_{32}, X_{33}, X_{44}, X_{45}$. |
| (6) $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 40$ | (15) Una forma de lograr esto, es multiplicar |
| (7) $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 50$ | (10) cada restricción por las constantes que |
| (8) $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 40$ | (13) aparecen entre paréntesis, frente a cada |
| (9) $X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 60$ | (16) restricción. El resultado de tal operación es |
| | (16) el siguiente: |

$$\underline{Z} + (0+15-20)X_{11} + (0+10-19)X_{12} + (0+13-14)X_{13} + (0+16-21)X_{14} + (0+16-16)\underline{X_{15}} + (0+15-15)\underline{X_{21}} + (0+10-20)X_{22} + (0+13-13)\underline{X_{23}} + (0+16-19)X_{24} + (0+16-16)\underline{X_{25}} + (5+15-18)X_{31} + (5+10-15)\underline{X_{32}} + (5+13-18)\underline{X_{33}} + (5+16-20)X_{34} + (5+16-M)X_{35} + (-16+15-0)X_{41} + (-16+10-0)X_{42} + (-16+13-0)X_{43} + (-16+16-0)\underline{X_{44}} + 16+16-0)\underline{X_{45}} = 40(0)+60(0)+70(5)+50(-16)+30(15)+40(10)+50(13)+40(16)+60(16)$$

Reescribiendo tenemos que:

$$Z = 5X_{11} + 9X_{12} + X_{13} + 5X_{14} + 10X_{22} + 3X_{24} - 2X_{31} - X_{34} + (M-21)X_{35} + X_{41} + 6X_{42} + 3X_{43} + 2.650$$

Fíjese que se han eliminado todas las variables básicas de la función objetivo, siendo solamente Z la variable básica con un valor de \$2.650,00

Si nos preguntamos: ¿Cuál es la variable que al aumentar hace que Z disminuya más? la respuesta es X_{31} (Tiene el coeficiente más negativo), luego es la candidata para ser la variable que entra ya que por cada unidad que aumente, los costos totales del transporte se disminuyen en 2 unidades monetarias.

Otra manera de establecer que la solución básica factible encontrada mediante el método de Vogel no es la óptima, y que existe una variable (X_{31}) que al entrar a la base hace que Z disminuya, es mediante una búsqueda heurística, la cual consiste en calcular ¿Cuál es el efecto sobre Z, de enviar una unidad, desde cada fuente a cada destino en las casillas de las variables básicas?

Método heurístico

Partiendo de la solución básica factible obtenida mediante el método de Vogel, se analiza el efecto sobre Z, de decidir enviar una unidad, desde la fuente uno (1), al destino uno (1), matemáticamente, hacemos $X_{11} = 1$, el cuadro de ofertas y demandas luciría, así:

1 ⁺	-----	-----	-----	40 ⁻
30 ⁻	-----	20 ⁻	-----	10 ⁺
	40	30		
			40	10

30 40 50 40 60 220

Al decidir enviar una unidad, desde la fuente 1 al destino 1 ($X_{11}=1$), se afecta la factibilidad de la solución, en atención a que la sumatoria de la fila uno (1) ya no es igual a 40 (es 41) y la sumatoria de la columna uno (1) ya no es igual a 30 (es 31), la solución se vuelve infactible, ya que no cumple con las restricciones (1) y (5). Para recobrar la factibilidad, se resta una unidad en la casilla de X_{15} , se suma una unidad en la casilla X_{25} y se resta una unidad en la casilla X_{21} , como resultado, se obtiene la siguiente solución básica y factible.

1				39
29		20		11
	40	30		
			40	10

30 40 50 40 60 220

Aquí, el valor de Z es:
 $1(20) + 39(16) + 29(15) + 20(13) + 11(16) + 40(15) + 30(18) + 40(0) + 10(0) = \$2.655,00$ El valor de Z se incrementó en: $\$2.655,00 - \$2.650 = \$5,00$
 Se observa que 5 es el coeficiente de X_{11} en la nueva ecuación de Z obtenida mediante el método algebraico.

Se concluye que decidir enviar una unidad desde la fuente 1 al destino 1, incrementa los costos totales del transporte \$5

Mediante este método podemos analizar todos los efectos, de considerar enviar una unidad desde las fábricas a los distribuidores, en las casillas de las variables no-básicas ($X_{ij} = 0$), para observar si existen variables no-básicas que al entrar a la base, hagan que Z disminuya; por supuesto, los resultados coincidirán con los coeficientes de la función objetivo (Z) lograda mediante el método algebraico. El lector debe realizar esta comprobación, ejercicio que le será útil en el desarrollo del método modificado de distribución (Modi), que se ilustra a continuación y que en la práctica es el más aplicado.

Los resultados que se obtienen de aplicar esta heurística son:

5	9	1	5	
			3	
-2			-1	M-21
1	6	3		

Aquí, al igual que en el método algebraico la variable a escoger para entrar a la base es: X_{31} ya que por cada unidad que crece, Z disminuye 2 unidades monetarias.

Ahora, se describe un método práctico para encontrar este último tablero en donde se puede escoger la variable que entra de forma rápida. Primero, se muestra la deducción matemática del método y después su aplicación. El procedimiento recibe el nombre del Método Modificado de distribución (Modi), ya que lleva a escoger la variable que entra, la variable que sale y la nueva solución mejorada en donde Z disminuye su valor.

Método modificado de distribución (Modi)

El problema general es:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimice } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} & \text{Minimice } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\
 \text{Con las siguientes restricciones:} & \text{Con las siguientes restricciones:} \\
 \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i ; i = 1, \dots, m & \Rightarrow a_i - \sum_{j=1}^n X_{ij} = 0 ; i = 1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j ; j = 1, \dots, n & b_j - \sum_{i=1}^m X_{ij} = 0 ; j = 1, \dots, n \\
 X_{ij} \geq 0 ; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n & X_{ij} \geq 0 ; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n
 \end{array}$$

Al haber calculado una solución básica factible (con cualquiera de los tres (3) métodos estudiados: Esquina noroeste, costo mínimo o Vogel), aparecen en la función objetivo todas las variables básicas, y cualquier múltiplo de las restricciones puede sumarse a la función objetivo para eliminarlas, llamamos estos múltiplos u_i y v_j ; matemáticamente:

$$\begin{array}{l}
 Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\
 \text{Con las siguientes restricciones:} \\
 \left[a_i - \sum_{j=1}^n X_{ij} = 0 \right] u_i ; i = 1, \dots, m \\
 \left[b_j - \sum_{i=1}^m X_{ij} = 0 \right] v_j ; j = 1, \dots, n \\
 X_{ij} \geq 0 ; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n
 \end{array}$$

El objetivo es: Encontrar los valores para las constantes u_i y v_j , de tal manera que al sumar los múltiplos de las restricciones a la función objetivo, se eliminen las variables básicas.

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + u_i \left[a_i - \sum_{j=1}^n X_{ij} \right] + v_j \left[b_j - \sum_{i=1}^m X_{ij} \right] \\
 Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i a_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i X_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j b_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_j X_{ij} \\
 Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (C_{ij} - u_i - v_j) X_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i a_i + \sum_{j=1}^n v_j b_j
 \end{aligned}$$

Aquí, fácilmente se deduce que:

1. Para las variables básicas, se debe cumplir que: $C_{ij} - u_i - v_j = 0$
2. Los nuevos coeficientes de las variables no básicas son: $C_{ij} - u_i - v_j$

Partiendo de la solución básica factible encontrada por el método de vogel, se aplica el método de modi, para averiguar cual es la variable no básica que debe entrar y cual la variable básica que debe salir. Para ello, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Construimos una tabla resumen con las asignaciones básicas factibles encontrada, con cualquiera de los tres métodos estudiados (esquina noroeste, costo mínimo, vogel).
2. Construimos una tabla de costos para las variables básicas y en ella calculamos los u_i y los v_j que cumplan $C_{ij} - u_i - v_j = 0$
3. Construimos una tabla de costos, coeficientes en la función objetiva para las variables no básicas cuyo valor es $C_{ij} - u_i - v_j$

				40
30		20		10
	40	30		
			40	10
30	40	50	40	60
220				

Tabla de asignaciones $Z=2.650$

Solución básica factible no degenerada lograda mediante el método de vogel, con $m+n-1=8$ variables básicas.

	1	2	3	4	5	u_i
1					16	
2	15		13		16	0
3		15	18			
4				0	0	
v_j						

Tabla de costos para las variables básicas.

Se asigna el primer valor de u_i o de v_j arbitrariamente, Preferentemente 0 (Puede ser cualquier valor) en la fila o columna, que tenga la mayor cantidad de asignaciones (Variables Básicas), para este caso, fila 2 o columna 5, ambos con 3 asignaciones. Aquí, se escogió la fila 2. Con base en este primer valor, calculamos todos los u_i y v_j , aplicando $C_{ij} - u_i - v_j = 0$, para $u_i = C_{ij} - v_j$ o para $v_j = C_{ij} - u_i$, así:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
 C_{21} - u_2 - v_1 = 0 & C_{23} - u_2 - v_3 = 0 & C_{25} - u_2 - v_5 = 0 & \text{La tabla, queda de la siguiente manera:} \\
 v_1 = C_{21} - u_2 & v_3 = C_{23} - u_2 & v_5 = C_{25} - u_2 & \\
 v_1 = 15 - 0 & v_3 = 13 - 0 & v_5 = 16 - 0 & \\
 v_1 = 15 & v_3 = 13 & v_5 = 16 &
 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	u_i
1					16	
2	15		13		16	0
3		15	18			
4				0	0	
v_j	15		13		16	

Con los valores de $v_1=15$, $v_3=13$ y $v_5=16$, se calculan los valores para u_1 , u_3 y u_4 , de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l|l|l}
 C_{15} - u_1 - v_5 = 0 & C_{33} - u_3 - v_3 = 0 & C_{45} - u_4 - v_5 = 0 \\
 u_1 = C_{15} - v_5 & u_3 = C_{33} - v_3 & u_4 = C_{45} - v_5 \\
 u_1 = 16 - 16 & u_3 = 18 - 13 & u_4 = 0 - 16 \\
 u_1 = 0 & u_3 = 5 & u_4 = -16
 \end{array}$$

La tabla, queda de la siguiente manera:

	1	2	3	4	5	u_i	
1					16	0	
2	15		13		16	0	
3		15	18			5	
4				0	0	-16	
v_j	15		13		16		

Con los valores de $u_3=5$ y de $u_4=-16$ se calculan los valores para v_2 y v_4 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l}
 C_{32} - u_3 - v_2 = 0 & C_{44} - u_4 - v_4 = 0 \\
 v_2 = C_{32} - u_3 & v_4 = C_{44} - u_4 \\
 v_2 = 15 - 5 & v_4 = 0 - (-16) \\
 v_2 = 10 & v_4 = 16
 \end{array}$$

La tabla, queda de la siguiente manera:

	1	2	3	4	5	u_i	
1					16	0	
2	15		13		16	0	
3		15	18			5	
4				0	0	-16	
v_j	15	10	13	16	16		

Observe que los valores encontrados para los u_i y los v_j , son las constantes por las cuales se multiplica cada una de las restricciones, para que al ser sumadas en la función objetivo, se eliminen todas las variables básicas a excepción de Z.

El cálculo para cualquier u_i , es el costo menos su respectivo v_j y para cualquier v_j , es el costo menos el respectivo u_i

Ahora, se construye la tabla de costos para las variables no básicas, empleando la condición de que su valor es: $C_{ij} - u_i - v_j$

	1	2	3	4	5	u_i	
1	20	19	14	21		0	
2		20		19		0	
3	18			20	M	5	
4	0	0	0			-16	
v_j	15	10	13	16	16		

En la parte superior derecha de cada celda correspondiente a las variables básicas, se ha colocado su respectivo C_{ij} para proceder al cálculo de la tabla de costos de las variables no básicas. Los cálculos son los siguientes:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
 C_{11} - u_1 - v_1 & C_{12} - u_1 - v_2 & C_{13} - u_1 - v_3 & C_{14} - u_1 - v_4 & C_{22} - u_2 - v_2 \\
 20 - 0 - 15 & 19 - 0 - 10 & 14 - 0 - 13 & 21 - 0 - 16 & 20 - 0 - 10 \\
 5 & 9 & 1 & 5 & 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
 C_{24} - u_2 - v_4 & C_{31} - u_3 - v_1 & C_{34} - u_3 - v_4 & C_{41} - u_4 - v_1 & C_{42} - u_4 - v_2 \\
 19 - 0 - 16 & 18 - 5 - 15 & 20 - 5 - 16 & 0 - (-16) - 15 & 0 - (-16) - 10 \\
 3 & -2 & -1 & 1 & 6
 \end{array}$$

Los valores encontrados son los coeficientes de las variables no básicas en función objetivo, después de haberle sumado múltiplos de las restricciones. La tabla queda así:

	1	2	3	4	5
1	5	9	1	5	
2		10		3	
3	-2			-1	M-21
4	1	6	3		

Esta es la tabla de costos de las variables no básicas, dicho de otra forma, son los coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo, después de haberle sumado múltiplos de las restricciones para eliminar las variables básicas, a excepción de Z.

$$Z = 5X_{11} + 9X_{12} + X_{13} + 5X_{14} + 10X_{22} + 3X_{24} - 2X_{31} - X_{34} + (M-21)X_{35} + X_{41} + 6X_{42} + 3X_{43} + 2.650$$

Observe que en la tabla de costos para las variables no básicas se encuentran los valores en que aumenta ó disminuye Z por cada unidad de crecimiento de las variables no básicas.

La variable que al crecer hace que Z disminuya más es X_{31} , luego escogemos esta variable para entrar a la base.

En el caso de un problema de maximización, la variable que entra es aquella que al crecer haga que Z crezca más; dicho de otra manera, aquella variable no básica que tenga el coeficiente más positivo.

Identificada la variable para entrar (X_{31}), debemos determinar la variable para salir, que debe ser aquella que primero se vuelva cero (0) a medida que la variable que entra crezca, para ello, en la tabla de asignaciones, construimos un circuito cerrado de (+) y (-) con trayectorias horizontales y verticales, empezando, sumando en la casilla de la variable que entra X_{31} . Observe que el circuito de (+) y (-) tiene como objetivo preservar la suma de las filas y de las columnas, esto es, seguir satisfaciendo la oferta y la demanda, conservando la factibilidad del problema.

				40
30 ⁻	-----	20 ⁺		10
⁺	-40	30 ⁻		
			40	10

30 40 50 40 60 220

40 La variable que sale, es aquella que primero
60 llegue a cero (0) a medida que la variable que
70 entra (X_{31}) crece.

50

Se observa que a medida que X_{31} crece, X_{21} y X_{33} decrecen en la misma cantidad. Aquí X_{21} y X_{33} llegan a cero al mismo tiempo. Escogemos arbitrariamente a X_{33} como variable que sale y a X_{21} al restarle 30 quedará con un valor de $\epsilon = 0$.

Lo máximo que puede crecer la variable que entra (X_{31}) es 30 unidades, crecer por encima de esta cifra vuelve negativas las variables que decrecen X_{21} y X_{33} volviendo la solución infactible al no cumplir con la condición de no negatividad.

Al efectuar las operaciones de suma y resta en cada casilla, los nuevos valores, para las variables involucradas son:

$$X_{31}(\text{nueva}) = 0 + 30 = 30$$

$$X_{21}(\text{nueva}) = 30 - 30 = \varepsilon$$

$$X_{23}(\text{nueva}) = 20 + 30 = 50$$

$$X_{33}(\text{nueva}) = 30 - 30 = 0$$

La nueva solución factible es:

				40	40
ε		50		10	60
30	40				70
			40	10	50
30	40	50	40	60	220

Aquí, $X_{21} = \varepsilon = 0$ es variable básica. El nuevo valor de la función objetivo debe haber disminuido el 2 unidades por unidad adicional de variable X_{31} , esto es: $2(30) = 60$ unidades monetarias, lo anterior se puede comprobar recalculando el valor de Z con la nueva propuesta de asignación, de la siguiente forma:

$$Z = 40(16) + 0(15) + 50(13) + 10(16) + 30(18) + 40(15) + 40(0) + 10(0) = \$2.590,00$$

$$\text{Una disminución de: } \$2.650,00 - \$2.590,00 = \$60$$

Se tiene una solución factible mejor a la inicial.

El algoritmo se debe repetir, hasta cuando en la tabla de costos para las variables no básicas todos sus valores sean mayores o iguales a cero. En caso de que el problema sea de maximización, el algoritmo se detiene cuando todos los valores en la tabla de costos para las variables no básicas sean menores o iguales a cero.

La pregunta aquí es: ¿Esta es la solución óptima? La respuesta la conoceremos cuando se calcule la nueva tabla de costos para las variables no básicas.

	1	2	3	4	5	u_i
1					16	0
2	15		13		16	0
3	18	15				3
4				0	0	-16
v_j	15	12	13	16	16	

Tabla de costos para las variables básicas en donde se debe cumplir: $C_{ij} - u_i - v_j = 0$

	1	2	3	4	5
1	5	7	1	5	
2		8		3	
3			2	1	M-19
4	1	4	3		

Tabla de costos para las variables no básicas en donde se debe cumplir: $C_{ij} - u_i - v_j$

Aquí la tabla indica que la solución es óptima ya que todos los coeficientes de las variables no básicas son mayores o iguales a cero. No hay una variable no básica que al crecer haga que Z disminuya.

La solución óptima es:

$$\begin{array}{llll} X_{15}^* = 40 & X_{23}^* = 50 & X_{31}^* = 30 & X_{44}^* = 40 & Z^* = \$2.590,00 \\ X_{21}^* = 0 & X_{25}^* = 10 & X_{32}^* = 40 & X_{45}^* = 10 & \text{Las demás } X_{ij} = 0 \end{array}$$

Interpretación de la solución óptima:

La forma óptima de hacer los envíos desde las fábricas (1,2,3) a los distribuidores (1,2,3,4,5) para que los costos totales del transporte sean mínimos es:

- Desde la fábrica 1 al distribuidor 5 enviar 40 unidades, a un costo de: \$ 640
- Desde la fábrica 2 al distribuidor 3 enviar 50 unidades, a un costo de: \$ 650
- Desde la fábrica 2 al distribuidor 5 enviar 100 unidades, a un costo de: \$ 160
- Desde la fábrica 3 al distribuidor 1 enviar 30 unidades, a un costo de: \$ 540
- Desde la fábrica 3 al distribuidor 2 enviar 40 unidades, a un costo de: \$ 600

Total de unidades enviadas 170, a un costo total de \$2.590

Se observa que el distribuidor 4 se quedará sin sus 40 unidades y que el distribuidor 5 sin sus 10 unidades, en total quedará una demanda insatisfecha de 50 unidades (información que conocimos desde el principio). Lo relevante aquí, es que ahora sabemos a quien no enviarle las 50 unidades que no tienen los distribuidores y que podemos tomar decisiones administrativas referentes a la demanda no cubierta, tales como:

1. Conseguir las 50 unidades a través de la competencia agremiada, como consecuencia de acuerdos previamente establecidos.
2. Acordar con el distribuidor 4 y 5 cubrir dicha demanda en el periodo de producción siguiente.

Ejemplo 5.2

Una compañía tiene 4 fábricas (F₁ , F₂ , F₃ , F₄), que envían su producción a 4 almacenes (A₁ , A₂ , A₃ , A₄). Los costos y capacidades de producción, en cada una de las 4 fábricas son:

Fábricas	Costo de producir una unidad (\$/unidad)	Capacidad máxima de producción (unidades/mes)
F1	40	140
F2	43	260
F3	39	360
F4	45	220

La demanda mensual del producto en cada uno de los 4 puntos de distribución es:

Almacén	Demanda mensual (en unidades)
A ₁	180
A ₂	280
A ₃	150
A ₄	200

Los costos del transporte, en \$/Unidad, entre las diversas combinaciones de fábricas y almacenes son:

Fábrica	Almacenes			
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
F ₁	48	60	56	58
F ₂	47	57	53	59
F ₃	51	63	61	63
F ₄	51	63	55	61

Formule un problema de programación lineal para minimizar los costos de transporte y producción, y encuentre la solución óptima.

Solución:

X_{ij} = Unidades de producto a enviar desde la fábrica i -ésima ($i=1,2,3,4$), al almacén j -ésimo ($j=1,2,3,4$)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & 40(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) + 43(X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) + \\ & 39(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) + 45(X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) + \\ & 48X_{11} + 60X_{12} + 56X_{13} + 58X_{14} + 47X_{21} + 57X_{22} + 53X_{23} + \\ & 59X_{24} + 51X_{31} + 63X_{32} + 61X_{33} + 63X_{34} + 51X_{41} + 63X_{42} + \\ & 55X_{43} + 61X_{44} \end{aligned}$$

Reescribiendo la función objetivo se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & 88X_{11} + 100X_{12} + 96X_{13} + 98X_{14} + 90X_{21} + 100X_{22} + 96X_{23} \\ & + 102X_{24} + 90X_{31} + 102X_{32} + 100X_{33} + 102X_{34} + 96X_{41} + \\ & 108X_{42} + 100X_{43} + 106X_{44} \end{aligned}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{l|l|l} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \leq 140 & X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41} \geq 180 & X_{ij} \geq 0 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \leq 260 & X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42} \geq 280 & i = 1,2,3,4 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} \leq 360 & X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43} \geq 150 & j = 1,2,3,4 \\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \leq 220 & X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44} \geq 200 & \end{array}$$

Balanceo del problema:

a_i	Fábricas	Almacenes	b_j
140	F ₁	A ₁	180
260	F ₂	A ₂	280
360	F ₃	A ₃	150
<u>220</u>	F ₄	A ₄	<u>200</u>
980			810
		A ₅	<u>170</u>
			980

Se adiciona el quinto almacén con una demanda, tal que, iguale la oferta con la demanda, ello es, con un requerimiento de 170 unidades. Dicho almacén es ficticio y permite aplicar el algoritmo para solucionar el problema.

Solución básica factible, empleando el método de Vogel.

Variables básicas $m+n-1=8$		A L M A C E N E S					ai	Diferencias entre columnas
		1	2	3	4	5		
F Á B R I C A S	1	88 0	100 0	96 0	98 140	0 0	140 0	96 8 2
	2	90 0	100 160	96 100	102 0	0 0	260 160 0	90 6 4
	3	90 180	102 120	100 0	102 60	0 0	360 180 0	90 10 2
	4	96 0	108 0	100 50	106 0	0 170	220 50 0	96 4 6
bj		180 0	280 120 0	150 100 0	200 60 0	170 0	980	
Diferencias entre filas		2	0 2	0 4	4 0	0		

Partiendo de esta solución básica factible no degenerada encontrada por el método de aproximación de vogel, aplicamos el método modi, para encontrar la solución óptima.

			140	
	160	100		
180	120		60	
		50		170

Tabla de asignaciones con un costo total de: \$78.880,00

			98		ui	Tabla de costos para las variables básicas.
		100	96		-4	
90	102		102		-2	$C_{ij} - u_i - v_j = 0$
		100		0	0	
				0	2	
vj	90	102	98	102	-2	

2	2	2		6
2			2	4
		2		2
4	4		2	

Tabla de costos para las variables no básicas: $C_{ij} - u_i - v_j$

Solución óptima, ya que todos los $C_{ij} - u_i - v_j \geq 0$

Solución óptima:

$X_{14}^* = 140$ $X_{23}^* = 100$ $X_{32}^* = 120$ $X_{43}^* = 50$ $Z^* = \$78.880,00$
 $X_{22}^* = 160$ $X_{31}^* = 180$ $X_{34}^* = 60$ $X_{45}^* = 170$ Las demás $X_{ij} = 0$

Interpretación de la solución

De la fábrica 1 al almacén 4 enviar 140 unidades, a un costo de: \$560
 De la fábrica 2 al almacén 2 enviar 160 unidades, a un costo de: \$16.000
 De la fábrica 2 al almacén 3 enviar 100 unidades, a un costo de: \$9.600
 De la fábrica 3 al almacén 1 enviar 180 unidades, a un costo de: \$16.200
 De la fábrica 3 al almacén 2 enviar 120 unidades, a un costo de: \$12.200
 De la fábrica 3 al almacén 4 enviar 60 unidades, a un costo de: \$6.120
 De la fábrica 4 al almacén 3 enviar 50 unidades, a un costo de: \$5.000

De la fábrica 4 al almacén ficticio 5 enviar 170 unidades. Realmente, lo que se determina aquí, es que la fábrica 4 no debe enviar 170 unidades, dicho de otra forma, en la fábrica 4 quedan en inventario 170 unidades, que desde el principio del problema ya se había determinado esta cantidad de unidades sobrantes.

Ejemplo 5.3 Problema de transbordo

Una empresa que produce monitores para computadoras, tiene dos (2) plantas ubicadas en La Pola y Belén. Cada monitor debe ir a uno de dos centros de control de calidad ubicados en Interlaken y Cádiz. Los distribuidores se encuentran en El Jordán, El Jardín y El Salado. Las capacidades de las plantas y la demanda de los distribuidores para el siguiente mes son las siguientes:

Planta	Capacidad (unidades/mes)
La Pola	300
Belén	100

Distribuidor	Demanda (unidades/mes)
El Jordán	150
El Jardín	100
El Salado	150

A continuación se muestran los costos unitarios de transporte para los envíos que se hacen desde las dos plantas a los dos centros de control de calidad, y desde los dos centros de control de calidad a los tres distribuidores:

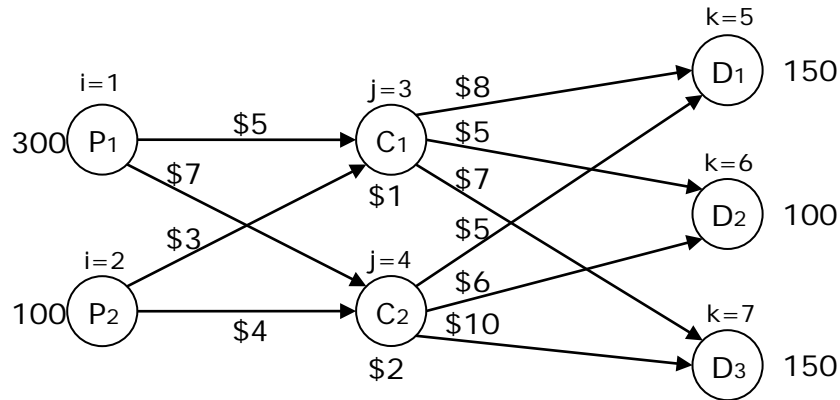
Planta	Centro de control de calidad	
	Interlaken	Cádiz
La Pola	5	7
Belén	3	4

Centro de control de calidad	Distribuidores		
	El Jordán	El Jardín	El Salado
Interlaken	8	5	7
Cádiz	5	6	10

El costo de revisar un monitor en el centro de control de calidad de Interlaken o de Cádiz es de \$1 y \$2 respectivamente.

Determinar el programa de embarque de costo mínimo para el problema.

Solución: Una representación gráfica del problema es:



Observe que la oferta es igual a la demanda, el problema está balanceado.

X_{ij} : Unidades a enviar desde la planta i -ésima ($i=1$: Planta 1, $i=2$: Planta 2) al centro de revisión j -ésimo ($j=3$: Centro de revisión 1, $j=4$: Centro de revisión 2).

X_{jk} : Unidades a enviar desde el centro de revisión j -ésimo ($j=3$: Centro 1, $j=4$: Centro 2) al distribuidor k -ésimo ($k=5$: Distribuidor 1, $k=6$: Distribuidor 2, $k=7$: Distribuidor 3).

$$\text{Minimizar } Z = 5X_{13} + 7X_{14} + 3X_{23} + 4X_{24} + (X_{13}+X_{23}) + 2(X_{14}+X_{24}) + 8X_{35} + 5X_{36} + 7X_{37} + 5X_{45} + 6X_{46} + 10X_{47}$$

Reescribiendo:

$$\text{Minimizar } Z = 6X_{13} + 9X_{14} + 4X_{23} + 6X_{24} + 8X_{35} + 5X_{36} + 7X_{37} + 5X_{45} + 6X_{46} + 10X_{47}$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcl} X_{13} + X_{14} & = & 300 \\ X_{23} + X_{24} & = & 100 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la capacidad de producción semanal} \\ \text{de monitores en las plantas 1 y 2, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} X_{13} + X_{23} & = & X_{35} + X_{36} + X_{37} \\ X_{14} + X_{24} & = & X_{45} + X_{46} + X_{47} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a que la suma de} \\ \text{monitores que entran debe ser igual a la} \\ \text{suma de monitores que sale en cada} \\ \text{centro de revisión. Ecuaciones de balance.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} X_{35} + X_{45} & = & 150 \\ X_{36} + X_{46} & = & 100 \\ X_{37} + X_{47} & = & 150 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Restricciones debidas a la demanda de monitores en cada} \\ \text{centro de distribución D1, D2 y D3, respectivamente.} \end{array} \right.$$

$$X_{ij} \geq 0; i=1, 2; j=3, 4 \text{ y enteros.}$$

$$X_{jk} \geq 0, j=3, 4; k=5, 6, 7 \text{ y enteros.}$$

Para convertir el problema en uno clásico de transporte, se construye una tabla de costos mínimos, desde cada planta P_i a cada distribuidor D_k señalando el centro de revisión C_j , usado en dicha ruta de mínimo costo.

	D1	D2	D3
P1	14 (C_1, C_2)	11 (C_1)	13 (C_1)
P2	11 (C_2)	9 (C_1)	11 (C_1)

Esta tabla es el insumo para alimentar la tabla de ofertas, demandas y costos del método de Vogel.

$m+n-1=4$	D1	D2	D3	a_i	Diferencia entre columnas
P1	<div>14 50</div>	<div>11 100</div>	<div>13 150</div>	300 0	2
P2	<div>11 100</div>	<div>9 0</div>	<div>11 0</div>	100 0	2
b_j	150 50 0	100 0	150 0	400	
Diferencia entre filas	3	2	2		

50	100	150
100		

Tabla de asignación básica y factible de envío de monitores.
 $Z = 50(14) + 100(11) + 150(13) + 100(11) = \$4.850,00$

14	11	13
11		

14 11 13

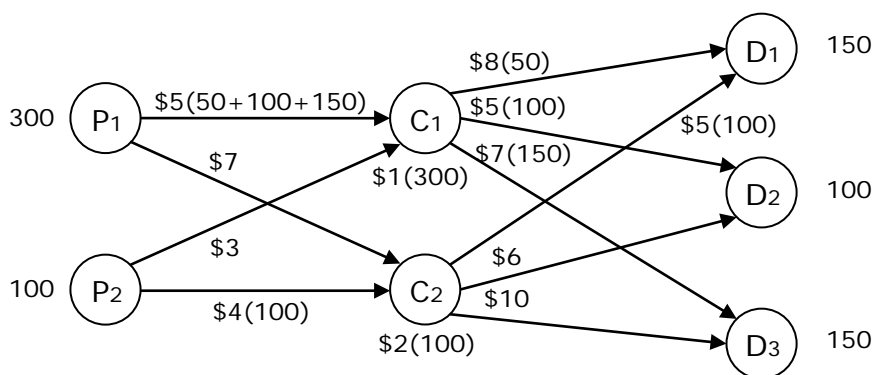
0 Tabla de costos para las variables básicas.

-3

	1	1

Tabla de costos de las variables no básicas que indica que la asignación de envíos actual es óptima.

Interpretación gráfica de la solución.



- De la planta de La Pola se deben enviar 300 monitores al centro de control de calidad de Interlaken, con un costo de transporte de \$1.500,00.

- De la planta de Belén se deben enviar 100 monitores al centro de control de calidad de Cádiz, con un costo de transporte de \$400,00.
- Los 300 monitores que son revisados en el centro de control de calidad ubicado en Interlaken generan un costo de \$300,00.
- Los 100 monitores que son revisados en el centro de control de calidad ubicado en Cádiz generan un costo de \$200,00.
- Del centro de control de calidad de Interlaken se deben enviar 50 monitores al distribuidor del Jordán, con un costo de transporte de \$400,00.
- Del centro de control de calidad de Interlaken se deben enviar 100 monitores al distribuidor del Jardín, con un costo de transporte de \$500,00.
- Del centro de control de calidad de Interlaken se deben enviar 150 monitores al distribuidor del Salado, con un costo de transporte de \$1.050,00.
- Del centro de control de calidad de Cádiz se deben enviar 100 monitores al distribuidor del Jordán, con un costo de transporte de \$500,00.

Ejemplo 5.4 Problema de las vacunas – Manipulación de la gran M

Dos compañías farmacéuticas tienen inventarios de 1'100.000 y 900.000 dosis de cierta vacuna contra la gripe H1N1 y se considera inminente una epidemia de gripe en tres ciudades. Ya que la gripe podría ser fatal para los ciudadanos de edad avanzada, a ellos se les debe vacunar primero; a los demás se les vacunará, según se presenten, mientras duren los suministros de vacuna. Las cantidades de dosis que cada ciudad estima debe administrar son:

Tipo de paciente	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Ancianos	325.000	260.000	195.000
Otros	750.000	800.000	650.000

Los costos de embarque (en centavos por dosis) entre las compañías farmacéuticas y las ciudades son los siguientes:

Compañía Farmacéutica	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
A	3	3	6
B	1	4	7

Se quiere encontrar un programa de embarque de costo mínimo que provea a cada ciudad de vacunas suficientes para atender prioritariamente a los ciudadanos de edad avanzada.

Solución:

Como se observa, este problema no está balanceado, por lo que hay que replantear los orígenes (compañías farmacéuticas) de tal manera que los ancianos no se queden sin vacunas (Oferta: 2'000.000; Demanda: 2'980.000; Déficit: 980.000 dosis de vacunas).

Disponibilidad ai	Compañías farmacéuticas	Ciudades	bj	Se adiciona una tercera compañía farmacéutica ficticia, con una disponibilidad de 980.000 dosis de vacunas, para igualar la oferta con la demanda.
1'100.000	CF ₁	C ₁	1'075.000	
900.000	CF ₂	C ₂	1'060.000	
2'000.000		C ₃	845.000	
980.000	CF ₃		2'980.000	
2'980.000				

Cada ciudad se divide en dos (2) destinos diferentes, uno para considerar la población de ancianos (Cja: Ciudad j-ésima, ancianos) y otro donde se considere a los demás destinatarios (Cjo: Ciudad j-ésima, otros) de las vacunas.

Para evitar que a los ancianos les lleguen vacunas desde la compañía farmacéutica ficticia, a estos destinos se les asigna un costo muy grande (M); lo que en el modelo de transporte se conoce como una ruta prohibida; de esta manera se asegura que la población de ancianos quede vacunada en su totalidad. El tablero inicial para aplicar el método de Vogel, es el siguiente:

Variables básicas m+n-1 =8		C i u d a d e s						ai Oferta	Diferencias entre columnas
		C1a	C1o	C2a	C2o	C3a	C3o		
Compañía farmacéutica	1	3 0	3 175.000	3 260.000	3 470.000	6 195.000	6 0	1'100.000 0	0
	2	1 325.000	1 575.000	4 0	4 0	7 0	7 0	900.000 575.000 0	0 3
	3	M 0	0 0	M 0	0 330.000	M 0	0 650.000	980.000 330.000 0	0
bj Demanda		325.000 0	750.000 175.000 0	260.000 0	800.000 470.000 0	195.000 0	650.000 0	2'980.000	
Diferencias entre filas		2	4 2	1	3 1	1	6		

	175.000	260.000	470.000	195.000	
325.000		575.000			
			330.000		650.000

Tabla de asignación
básica factible,
mediante Vogel.

	3	3	3	6		0	Tabla de costos de las variables básicas
1	1					-2	
			0		0	-3	$C_{ij} - u_i - v_j = 0$
3	3	3	3	6	3		

0						3	Tabla de costos de las variables no básicas, indica que la asignación es óptima, ya que cumple con:
		3	3	3		6	
M	0	M		M-3			$C_{ij} - u_i - v_j \geq 0$

Interpretación de la solución:

- La compañía farmacéutica 1 debe enviar 175.000 dosis de vacunas a la ciudad 1, con destino a la población de otros, con un costo de transporte de: \$5.250,00.
- La compañía farmacéutica 1 debe enviar 730.000 dosis de vacunas a la ciudad 2, discriminadas así: 260.000 destinadas a los ancianos y 470.000 con destino al resto de la población, con un costo de transporte de: \$21.900,00.
- La compañía farmacéutica 1 debe enviar 195.000 dosis de vacunas a la ciudad 3, todas con destino a la población de ancianos con un costo de transporte de: \$11.700,00.
- La compañía farmacéutica 2 debe enviar 900.000 dosis de vacunas a la ciudad 1, discriminadas así: 325.000 destinadas a los ancianos y 575.000 con destino al resto de la población, con un costo de transporte de: \$9.000,00.
- El número de personas que no forman parte de la población de ancianos y que quedan sin vacunar en las ciudades 2 y 3 son 330.000 y 650.000 respectivamente. El total de habitantes sin vacunar asciende a 980.000 personas, valor este que corresponde al déficit de vacunas existente.
- Fíjese que todos los ancianos de las tres (3) ciudades quedaron vacunados.
- El costo total mínimo del transporte es de: \$47.850,00.



Software WinQsb

El WinQsb maneja el problema del transporte en su módulo de Modelos de Redes (Network Modeling), el cual en su inicio nos muestra la siguiente ventana de diálogo, que se debe diligenciar así:

Figura 5.1 Interfaz del WinQsb.

Especificaciones del Problema

Tipo de Problema

- ☐ Flujo de Redes
- ☒ Problema del Transporte
- ☐ Problema de Asignaciones
- ☐ Problema de la Ruta más Corta
- ☐ Problema del Flujo Máximo
- ☐ Árbol de Mínimo Recorrido
- ☐ El problema del Agente Viajero

Criterio de Optimización

- ☒ Minimización
- ☐ Maximización

Formato de Entrada de Datos

- ☒ Forma de Matriz
- ☐ Forma Gráfica
- ☐ Arcos Simétricos

Título del Problema

Número de Fuentes **Número de Destinos**

Este módulo también resuelve otros modelos de redes, que se especifican en la parte izquierda de la ventana de diálogo.

Los datos se pueden ingresar de dos formas: En un tablero de doble entrada o de forma gráfica.

A continuación se ilustra el ingreso de datos en la tabla de doble entrada.

Fuente: Software WinQsb.

Figura 5.2 Interfaz del WinQsb.

Desde\Hasta	Pereira	Tuluá	Anserma	Ibagué	Armenia	Oferta
Bogotá	55	30	40	50	40	20
Medellín	35	30	100	45	60	40
Cali	40	60	95	35	30	40
Demanda	25	10	20	30	15	

Fuente: Software WinQsb.

El modo de edición del menú principal permite cambiar los rótulos de las fuentes y los destinos. No es necesario que la oferta sea igual a la demanda, el software se encarga de agregar fuentes ó destinos ficticios, según sea la necesidad. Para solucionar el problema, se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior y que se ilustra en la figura siguiente:



El WinQsb ofrecerá una ventana con la respuesta óptima del problema, indicando cuántas unidades enviar desde cada origen a cada destino, con su costo por envío y el costo total de la operación.



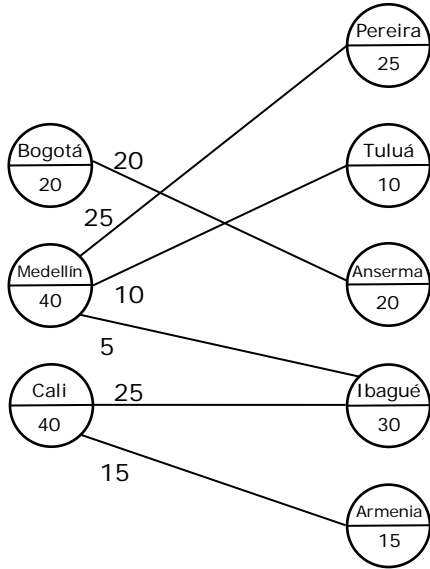
Si se usa este icono, el WinQsb nos ilustrará mediante una red la respectiva respuesta óptima al problema.

Figura 5.3 Interfaz del WinQsb.

	Desde	Hasta	despacho	Costo Unitario	Costo Total	Costo Reducido
1	Bogotá	Anserma	20	40	800	0
2	Medellín	Pereira	25	35	875	0
3	Medellín	Tuluá	10	30	300	0
4	Medellín	Ibagué	5	45	225	0
5	Cali	Ibagué	25	35	875	0
6	Cali	Armenia	15	30	450	0
Valor Total de la Función Objetivo = 3.525						

Fuente: Software WinQsb.

Figura 5.4 Interfaz del WinQsb.



Observe que en este problema la oferta de los Centros de distribución es igual a los requerimientos de los detallistas, por lo tanto no hubo necesidad de adicionar ni fuentes, ni destinos ficticios y se trata de un problema de mercado perfecto.

A continuación, se ilustra el mismo problema pero bajo el software del INVOP (Investigación de Operaciones), software creado por Beatriz Loubet y Sandra Segura, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad del Cuyo en Argentina. El software está hecho en lenguaje Delphi y puede ser adquirido gratuitamente de la siguiente dirección en internet: <http://operativa.tripod.com>

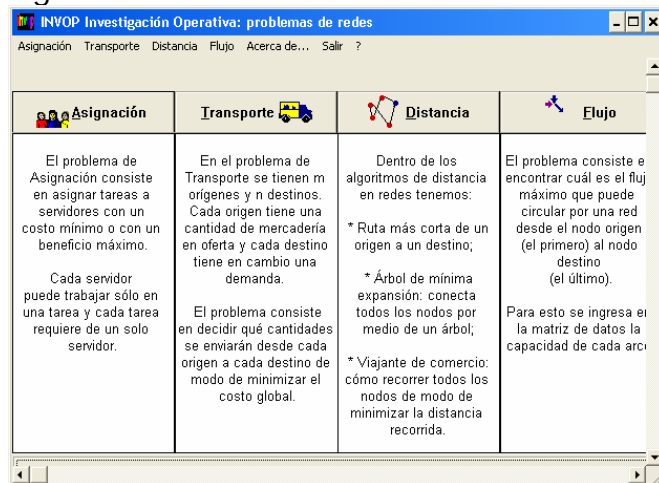
Fuente: Software WinQsb.



Software INVOP

Este software maneja las siguientes aplicaciones: Asignaciones, Transporte, Distancias en redes (Ruta más corta, Árbol de mínimo recorrido, Agente viajero), Flujo de redes. El invop está en español y su metodología está dirigida a la enseñanza, ofreciendo al usuario tanto la parte teórica del fundamento matemático como la parte práctica de solución de problemas con sus respectivos ejemplos. El Invop presenta una ventana principal, en la que hace una breve y útil reseña de sus aplicaciones, de ellas seleccionamos la de transporte, como se muestra en la figura siguiente:

Figura 5.5 Interfaz inicial del INVOP.



Fuente: Software INVOP.

Al seleccionar la opción de transporte, el INVOP ofrece una ventana de diálogo en donde captura los datos del problema y en un recuadro situado en la parte inferior derecha, donde nos ofrece la solución óptima. Colocando el cursor sobre algunos sitios de interés de ésta ventana, se ofrece un rótulo en fondo amarillo con la respectiva instrucción de ayuda. En la parte inferior izquierda de la ventana se especifica el criterio de optimización y la cantidad de fuentes y destinos para considerar; en la parte superior derecha se introducen los costos por unidad para transportar y habilitando el cuadro de control, se editan los encabezados de fila y columna, al igual que las ofertas y las demandas de fuentes y destinos.


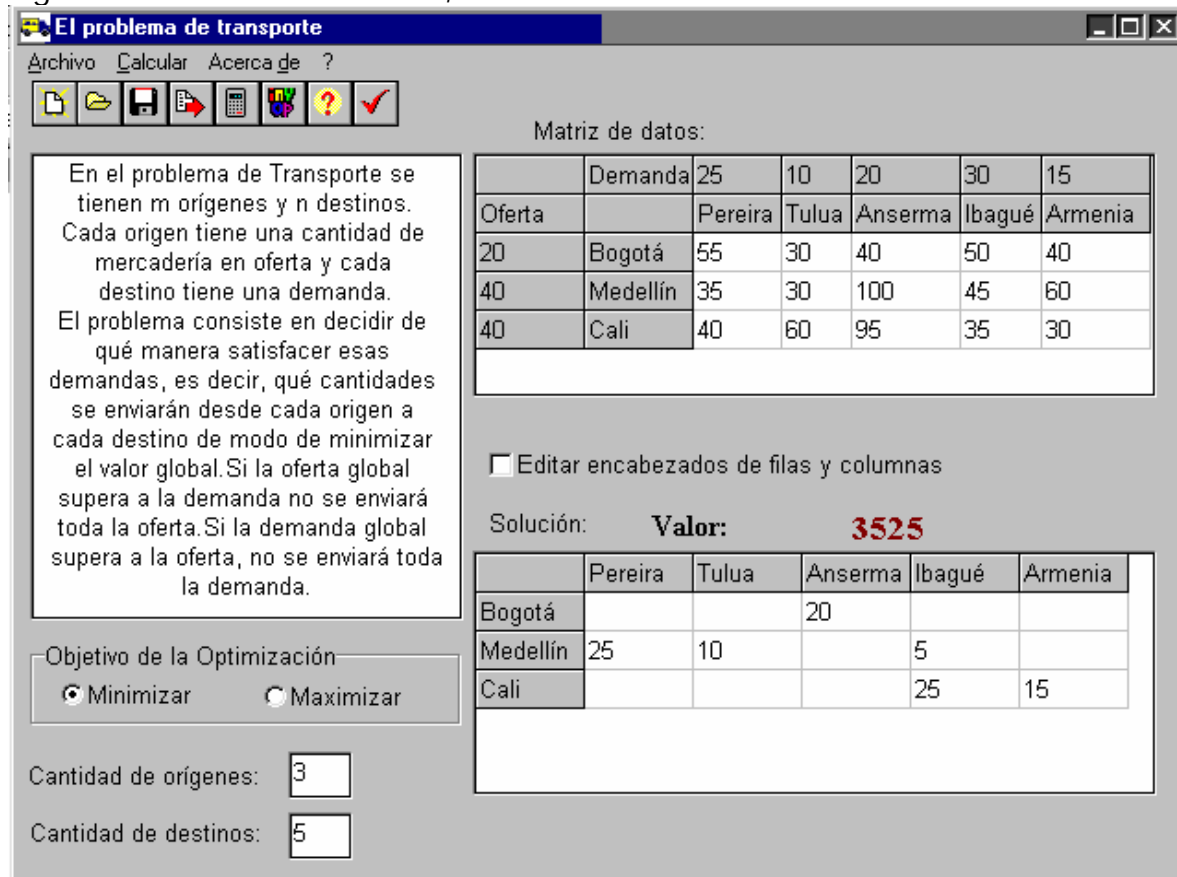
 Cuando la información del problema está capturada, se procede a solucionar el problema, haciendo clic sobre el icono del menú superior, que tiene la figura de una calculadora, entonces se llena el cuadro en la parte inferior derecha con la solución óptima. En la figura siguiente se ilustra esta ventana.

Figura 5.6 Interfaz del INVOP, ventana de resultados.



El problema de transporte

Archivo Calcular Acerca de ?

En el problema de Transporte se tienen m orígenes y n destinos. Cada origen tiene una cantidad de mercadería en oferta y cada destino tiene una demanda. El problema consiste en decidir de qué manera satisfacer esas demandas, es decir, qué cantidades se enviarán desde cada origen a cada destino de modo de minimizar el valor global. Si la oferta global supera a la demanda no se enviará toda la oferta. Si la demanda global supera a la oferta, no se enviará toda la demanda.

Objetivo de la Optimización

☒ Minimizar ☐ Maximizar

Cantidad de orígenes:

Cantidad de destinos:

Matriz de datos:

		Demanda	25	10	20	30	15
Oferta		Pereira	Tulua	Anserma	Ibagué	Armenia	
20	Bogotá	55	30	40	50	40	
40	Medellín	35	30	100	45	60	
40	Cali	40	60	95	35	30	

☐ Editar encabezados de filas y columnas

Solución: **Valor: 3525**

	Pereira	Tulua	Anserma	Ibagué	Armenia
Bogotá			20		
Medellín	25	10		5	
Cali				25	15

Fuente: Software INVOP.

Se recomienda al usuario del Software leer la ayuda (help), en la que se explica toda la parte conceptual y matemática del algoritmo del transporte al igual que se ilustran varios ejemplos de muy buena calidad.

El Problema de Asignaciones

Introducción

El problema de asignaciones es un caso especial del problema del transporte, uno en el cual, todas las variables son de carácter binario (0,1) y a cada fuente se le debe asignar uno y solo un destino, y a cada destino una y solo una fuente.

Características del modelo

Las variables son de tipo binario y su definición es la siguiente:

$X_{ij} = 0$ = No asigne la fuente i -ésima al destino j -ésimo

$X_{ij} = 1$ = Si asigne la fuente i -ésima al destino j -ésimo

$a_i = 1$, $i = 1, \dots, m$

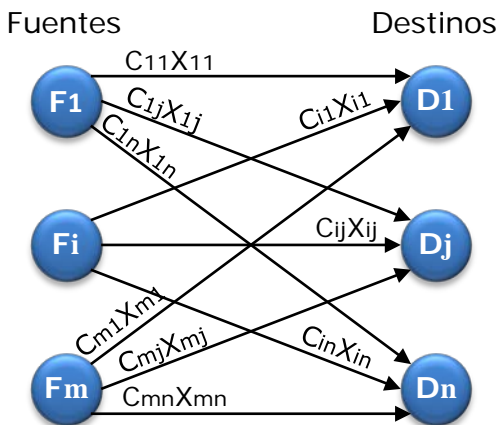
$a_{ij} = 1$, para todo i y para todo j

$b_j = 1$, $j = 1, \dots, n$

$m = n$, Número de fuentes igual a número de destinos

C_{ij} = Costo de asignar la fuente i -ésima al destino j -ésimo

Gráficamente:



El presente modelo de asignación, se puede resolver mediante el método simplex, pero al resultar dispendiosa su solución, los matemáticos húngaros desarrollaron un método más efectivo y práctico, el cual se ilustra a continuación.

Para iniciar la aplicación del algoritmo se debe igualar el número de fuentes al número de destinos, con fuentes o destinos ficticios, si ello es necesario.

Figura 5.7 Ilustración del problema de asignaciones

Algoritmo para minimizar

1. Construya una tabla de costos en la que el número de filas sea igual al número de columnas y en cada casilla figure el costo de asignar cada fuente (filas) a cada destino (columnas).

2. Reste el valor del elemento mínimo (costo mínimo) de cada fila a cada elemento de la fila. Con la tabla resultante, haga lo mismo pero para cada columna.
3. Examinar las filas y las columnas sucesivamente. Para cada fila (columna) que tenga exactamente uno y solo un cero, resérvelo para asignarlo (enciérrelo en un cuadrado), y tache, los otros elementos cero de la correspondiente columna (fila). Este proceso se debe repetir hasta que todos los elementos cero estén reservados o eliminados (tachados). En caso de que sistemáticamente queden ceros no reservados ni tachados, después de recorrer repetitivamente las filas y las columnas, elija un cero al azar y resérvelo y tache todos los ceros de la respectiva fila y columna, proceda con el resto de los ceros, reservándolos ó tachándolos.

Si los elementos reservados para asignar, representan una asignación completa (a cada fuente le corresponde un destino y a cada destino le corresponde una fuente), se ha encontrado la solución óptima; de lo contrario pase al punto cuatro (4).

4. Cubrir todos los ceros (reservados o tachados), con un número de líneas horizontales y verticales, igual al número de ceros reservados para asignar.
5. Examinar todos los elementos no cubiertos por una línea, escoger el mínimo de éstos y restarlo de todos los elementos no cubiertos; luego sumarlo a cada elemento que se encuentre en la intersección (si la hay) de dos (2) líneas.
6. Ir al punto tres (3), para tratar de encontrar una solución completa.

Algoritmo para maximizar

Restar del mayor de toda la tabla, todos los elementos de la tabla y proceda a minimizar con la tabla resultante.

Ejemplo 5.5

Un taller ha comprado 3 máquinas nuevas de usos distintos. Hay 4 sitios posibles para estas máquinas, pero algunos de éstos sitios son más preferibles que otros, por razón de costo de manejo de materiales, el objetivo es asignar las máquinas en los sitios, para minimizar el costo total de manejo de materiales.

Los costos de manejo de materiales, según se ubique cada máquina en cada sitio, son:

		Sitios			
		1	2	3	4
Máquinas	A	13	10	12	11
	B	15	X	13	20
	C	5	7	10	6

X = La máquina B no cabe en el sitio 2, esto se denomina, sitio prohibido para asignar.

Número de máquinas = 3. Número de sitios = 4, luego, $m \neq n$

Por lo anterior, debemos adicionar una máquina ficticia, para poder aplicar al algoritmo.

Solución:

13	10	12	11
15	M	13	20
5	7	10	6
0	0	0	0

Como $m \neq n$, adicionamos una máquina ficticia, con coeficiente cero (0) en la función objetiva. Para evitar que la máquina B sea asignada al sitio 2, castigamos en la función objetiva con un costo muy alto (M) a la variable X_{22} , variable artificial.

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

El menor elemento de cada fila ha sido restado de todos los elementos de cada fila, en la fila 1 el menor costo es 10, luego los nuevos elementos de la fila 1 son: $13 - 10 = 3$; $10 - 10 = 0$; $12 - 10 = 2$; $11 - 10 = 1$; Al menos en cada fila debe quedar un cero (0), el del elemento más pequeño.

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

Teniendo como referencia la tabla anterior, el menor elemento de cada columna ha sido restado de todos los elementos de cada columna. Como en cada columna hay un cero, la tabla queda igual a la anterior.

Ahora, intentamos hacer una asignación completa, para ello hacemos la siguiente pregunta clave para cada fila.

¿HAY UN SOLO CERO (0) EN LA FILA?, SI SÍ, RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA COLUMNA RESPECTIVA, SI NO, SALTE A LA SIGUIENTE FILA, SI ES LA ÚLTIMA FILA, SALTE A LA PRIMERA COLUMNA.

Una vez recorridas todas la filas, hacemos la misma pregunta para cada columna.

¿HAY UN SOLO CERO (0) EN LA COLUMNA ?, SI SÍ, RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA FILA RESPECTIVA, SI NO, SALTE A LA SIGUIENTE COLUMNA, SI ES LA ÚLTIMA COLUMNA, SALTE A LA PRIMERA FILA.

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	∅	0	0

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	∅	∅	0

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
∅	∅	∅	0

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
∅	∅	∅	0

¿Hay un solo cero en la fila 1?: Si, en la columna 2, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 2.

¿Hay un solo cero en la fila 2?: Si, en la columna 3, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 3.

¿Hay un solo cero en la fila 3?: Si, en la columna 1, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 1.

¿Hay un solo cero en la fila 4?: Si, en la columna 4, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 4.

Fíjese que en el último tablero, todos los ceros han quedado, O reservados ó tachados, no se hizo necesario recorrer las columnas.

Aquí existe una asignación completa, en atención a que a cada máquina le a sido asignado un sitio (en cada fila hay un cero reservado) y a cada sitio le hemos asignado una máquina (en cada columna hay un cero reservado), los sitios reservados los señalizamos con ceros encerrados en un cuadro.

Solución óptima:

- La máquina A se asigna al sitio 2, con un costo de \$10
- La máquina B se asigna al sitio 3, con un costo de \$13
- La máquina C se asigna al sitio 1, con un costo de \$ 5
- La máquina D se asigna al sitio 4, con un costo de \$ 0

La última asignación corresponde a la máquina ficticia D, colocada para hacer igual el número de máquinas al número de sitios; lo anterior significa que el sitio 4 quedará vacío y por el momento no se usará, al menos para colocar alguna de las máquinas disponibles de que trata el problema.

El costo óptimo de manejo de materiales es de \$28; que se logra asignando las máquinas a los sitios señalados.

Ejemplo 5.6

El jefe de un departamento, tiene 5 trabajadores y 5 trabajos para hacer, los trabajadores difieren en su eficiencia y los trabajos difieren en su dificultad intrínseca. El tiempo en horas que cada trabajador tomará para hacer cada trabajo, está dado en la siguiente tabla.

		Trabajadores				
		1	2	3	4	5
Trabajos	A	11	17	8	16	20
	B	9	7	12	6	15
	C	13	16	15	12	16
	D	21	24	17	28	26
	E	14	10	12	11	15

¿Cómo deben asignar los trabajos a los trabajadores para minimizar el tiempo total de elaboración?

Cada trabajo debe ser ejecutado por uno y solo un trabajador y a cada trabajador solo le debe ser asignado uno y solo un trabajo.

Solución:

Aquí, el número de fuentes es igual al número de destinos (el número de filas es igual al número de columnas, $m = n$) o dicho de otra forma, el número de trabajos es igual al número de trabajadores, luego no se hace necesario ninguna variable artificial.

Se empieza aplicando el punto 2 del algoritmo para minimizar, ya que la naturaleza del problema es de minimización.

11	17	8	16	20
9	7	12	6	15
13	16	15	12	16
21	24	17	28	26
14	10	12	11	15

Se resta el elemento más pequeño de cada fila a todos los elementos de cada fila.

Al menos debe quedar un cero en cada fila

3	9	0	8	12
3	1	6	0	9
1	4	3	0	4
4	7	0	11	9
4	0	2	1	5

Se resta el elemento más pequeño de cada columna a todos los elementos de cada columna.

Al menos debe quedar un cero en cada columna.

2	9	0	8	8
2	1	6	0	5
0	4	3	0	0
3	7	0	11	5
3	0	2	1	1

No se logra una asignación completa, ya que al trabajador 5, no le fue asignado ningún trabajo. Entonces, con un número de líneas, horizontales y / o verticales iguales al número de ceros reservados , tachamos todos los ceros.

Número de líneas = Número de ceros reservados = 4

2	9	0	8	8
2	1	6	0	5
0	4	3	0	0
3	7	0	11	5
3	0	2	1	1

De los elementos no tachados, se escoge el menor (2), se resta de todos los elementos no tachados y se suma en las intersecciones que forman las líneas horizontales con las verticales. Si no hay intersecciones, no se suma. Con la tabla resultante, se intenta nuevamente hacer una asignación completa.

0	7	0	6	6
2	1	8	0	5
0	4	5	0	0
1	5	0	9	3
3	0	4	1	1

Aquí, se ha logrado una asignación completa, a cada trabajo le corresponde un trabajador y a cada trabajador le corresponde un trabajo. En cada fila hay un cero asignado y en cada columna hay un cero asignado.

Solución: $X_{11}^* = X_{24}^* = X_{35}^* = X_{43}^* = X_{52}^* = 1$; las demas $X_{ij} = 0$

- Al trabajo A, se le asigna el trabajador 1, quien empleará 11 horas.
- Al trabajo B, se le asigna el trabajador 4, quien empleará 6 horas.
- Al trabajo C, se le asigna el trabajador 5, quien empleará 16 horas.
- Al trabajo D, se le asigna el trabajador 3, quien empleará 17 horas.
- Al trabajo E, se le asigna el trabajador 2, quien empleará 10 horas.

El tiempo total para ejecutar los 5 trabajos es de 60 horas.

Ahora, supongase que en lugar de duración en horas, los datos de la tabla inicial son la utilidad en millones de pesos que deja cada trabajo al ser ejecutado por cada trabajador, el problema cambia su naturaleza a un problema de maximización.

11	17	8	16	20
9	7	12	6	15
13	16	15	12	16
21	24	17	28	26
14	10	12	11	15

Restar del mayor de toda la tabla, todos los elementos de la tabla y proceda a minimizar con la tabla resultante.

El mayor de toda la tabla es 28

17	11	20	12	8
19	21	16	22	13
15	12	13	16	12
7	4	11	0	2
14	18	16	17	13

Con ésta tabla se procede a minimizar. Se resta el elemento mas pequeño de cada fila a todos los elementos de la fila.

El resultado es el siguiente:

9	3	12	4	0
6	8	3	9	0
3	0	1	4	0
7	4	11	0	2
1	5	3	4	0

Se resta el elemento mas pequeño de cada columna de todos los elementos de la columna.

El resultado es el siguiente:

8	3	11	4	0
5	8	2	9	8
2	0	8	4	8
6	4	10	0	2
0	5	2	4	8

En esta tabla se intenta hacer una asignación completa.

Al no lograrse una asignación completa, se procede a tachar todos los ceros con número de líneas igual al número de ceros reservados, para este caso 4 líneas.

8	3	11	4	0
5	8	2	9	0
2	0	0	4	0
6	4	10	0	2
0	5	2	4	0

El menor de los elementos no tachados (2) se resta de todos los elementos no tachados y se suma en las intersecciones. Los demas elementos quedan iguales.

La tabla resultante es la siguiente:

6	1	9	4	0
3	6	0	9	8
2	0	8	6	2
4	2	8	0	2
0	5	2	6	2

Nuevamente se intenta conseguir una asignación completa.

Con solo recorrer las filas, se consiguió una asignación completa. A cada trabajo se le asigna un trabajador y a cada trabajador se le asigna un trabajo.

Solución: $X_{15}^* = X_{23}^* = X_{32}^* = X_{44}^* = X_{51}^* = 1$; las demás $X_{ij} = 0$

- Al trabajo A, se le asigna el trabajador 5, para una utilidad de \$20 millones.
- Al trabajo B, se le asigna el trabajador 3, para una utilidad de \$12 millones.
- Al trabajo C, se le asigna el trabajador 2, para una utilidad de \$16 millones.
- Al trabajo D, se le asigna el trabajador 4, para una utilidad de \$28 millones.
- Al trabajo E, se le asigna el trabajador 1, para una utilidad de \$14 millones.

La utilidad máxima total asciende a \$90 millones.



Software WinQsb

El problema de asignaciones en el WinQsb forma parte del módulo de redes y el ingreso de datos se efectúa mediante la siguiente ventana:

Figura 5.8 Interfaz del WinQsb.

Los datos requeridos son los mismos que para el problema del transporte. Los datos se pueden ingresar de dos formas: En una matriz o tablero de doble entrada o de forma gráfica. A continuación, se ilustra el ingreso de datos en la matriz o tabla de doble entrada. Fíjese que la siguiente tabla en comparación con la ofrecida en el problema del transporte, carece de disponibilidades y requerimientos.

Fuente: Software WinQsb.

Figura 5.9 Interfaz del WinQsb, ventana de introducción de datos.

Desde\Hasta	Trabajador 1	Trabajador 2	Trabajador 3	Trabajador 4	Trabajador 5
Trabajo A	11	17	8	16	20
Trabajo B	9	7	12	6	15
Trabajo C	13	16	15	12	16
Trabajo D	21	24	17	28	26
Trabajo E	14	10	12	11	15

Fuente: Software WinQsb.



Para solucionar el problema, se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior, hacia el centro de la ventana; entonces el WinQsb le ofrecerá una ventana con la respuesta óptima del problema, mostrando en ella, que trabajador se debe asignar a cada uno de los cinco trabajos, las horas que empleará cada trabajador y el tiempo total de realización de todos los trabajos.

Figura 5.10 Interfaz del WinQsb, Ventana con la solución al problema.

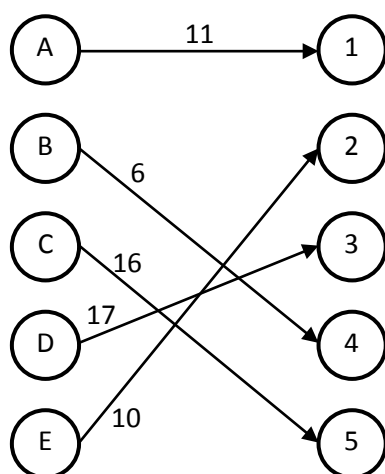
	Desde	Hasta	Asignación	Horas	Horas Totales	Costo Reducido
1	Trabajo A	Trabajador 1	1	11	11	0
2	Trabajo B	Trabajador 2	1	6	6	0
3	Trabajo C	Trabajador 3	1	16	16	0
4	Trabajo D	Trabajador 4	1	17	17	0
5	Trabajo E	Trabajador 5	1	10	10	0
Valor Total de la Función Objetivo					60	

Fuente: Software WinQsb.



Si se usa este icono, el WinQsb ilustra mediante una red la respectiva respuesta óptima al problema.

Figura 5.11 WinQsb, ilustración gráfica de la solución



Fuente: Software WinQsb.



Software INVOP

En la ventana principal del INVOP se elige la opción de asignaciones y el programa ofrece una ventana en la que en la parte inferior izquierda se selecciona el criterio de optimización, en la parte superior derecha se introducen los datos, teniendo la opción de cambiar los rótulos de las filas y las columnas. A continuación, damos clic sobre el icono que representa una calculadora y en la misma ventana, en la parte inferior derecha el programa nos ofrece la solución óptima.

Figura 5.12 Interfaz del INVOP.

El problema de Asignación

El problema de Asignación consiste en asignar tareas a servidores con un costo mínimo o con un beneficio máximo.

Como cada servidor puede trabajar sólo en una tarea y cada tarea requiere de un solo servidor, si hay más tareas que servidores, quedará una tarea sin realizar.

Si, en cambio, hay más servidores que tareas, quedará un servidor sin asignar.

Objetivo de la Optimización:
☒ Minimizar ☐ Maximizar

Cantidad de tareas:

Cantidad de servidores:

Matriz de datos:

	1	2	3	4	5
A	11	17	8	16	20
B	9	7	12	6	15
C	13	16	15	12	16
D	21	24	17	28	26
E	14	10	12	11	15

☐ Editar rótulos de filas y columnas

Solución: **Valor: 60**

	1	2	3	4	5
A	1	0	0	0	0
B	0	0	0	1	0
C	0	0	0	0	1
D	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	0

Fuente: Software INVOP.

Se recomienda leer todo el tutorial de este programa, en ella se ofrecen ejemplos prácticos y todo el respaldo matemático del algoritmo del problema.

Problemas propuestos

5.1 Formular, Resolver manualmente, e interpretar la solución, de todos los problemas de ejemplo de la Ayuda del Software INVOP en los módulos de transporte y asignaciones .

5.2 Una cadena de cinco (5) almacenes, ubicados en diferentes partes del país, requieren cierta mercancía para cada uno de sus almacenes. Las empresas abastecedoras han informado que disponen de la mercancía solicitada, pero en tres (3) diferentes fábricas.

La escasez del producto hace que la cadena de almacenes deba transportar la mercancía.

Con base en los costos del transporte por unidad, a los requerimientos de los almacenes y a la disponibilidad de las fábricas, que se muestra en el siguiente cuadro, formule el problema de programación lineal que minimice los costos totales del transporte y resuélvalo.

Fábricas	Almacenes					Disponibilidad
	1	2	3	4	5	
A	10	20	40	30	50	1.000
B	20	30	50	40	10	1.000
C	30	40	10	50	20	1.500
Requerimientos	1.000	800	600	800	300	3.500

Solución: $X_{11}^* = 1.000$; $X_{22}^* = 700$; $X_{25}^* = 300$; $X_{32}^* = 100$; $X_{33}^* = 600$; $X_{34}^* = 800$; $Z^* = \$84.000$

5.3 Una compañía desea saber qué política de distribución minimizará sus costos totales; se cuenta con tres (3) fábricas y cuatro (4) clientes, la producción de las fábricas es de: 550, 300 y 260 unidades respectivamente; y las necesidades de los cuatro (4) clientes son: 250, 300, 200, y 160 unidades respectivamente. Los costos (en pesos) de enviar una (1) unidad desde cada fábrica a cada clientes se relacionan a continuación:

Fábricas	Clientes				Oferta
	1	2	3	4	
A	8	3	4	5	550
B	7	6	5	2	300
C	2	4	3	3	260
Demanda	250	300	200	160	

Solución: $X_{12}^* = 300$; $X_{13}^* = 190$; $X_{24}^* = 160$; $X_{31}^* = 250$; $X_{33}^* = 10$; $Z^* = \$2.510$

5.4 Considere el problema de transporte que tiene la siguiente tabla de costos (en pesos) y requerimientos.

Fuentes	Destinos					Oferta
	1	2	3	4	5	
1	21	12	28	17	9	50
2	15	13	20	M	12	60
3	18	17	22	10	8	40
4	M	2	10	5	0	70
5	33	29	35	27	23	30
Demanda	40	30	50	60	50	

- Use el método de la esquina noroeste para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Use el método del costo mínimo para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Use el método de Vogel para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Obtenga la solución óptima, partiendo de la solución básica obtenida por el método de Vogel.

Solución: $X_{15}^* = 50$; $X_{21}^* = 40$; $X_{23}^* = 20$; $X_{34}^* = 40$; $X_{42}^* = 30$; $X_{44}^* = 10$; $X_{54}^* = 10$; $X_{56}^* = 20$; $Z^* = \$2.530$

5.5 Considere el problema del transporte que tiene la siguiente tabla de costos (en pesos) y requerimientos:

Fuentes	Destinos						Ofertas
	1	2	3	4	5	6	
1	2	1	3	3	2	5	50
2	3	2	2	4	3	4	40
3	3	5	4	2	4	1	60
4	4	2	2	1	2	2	31
Demanda	30	50	20	40	30	11	181

- Use el método de la esquina noroeste para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Use el método del costo mínimo para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Use el método de Vogel para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Obtenga la solución óptima empleando el método MODI, partiendo de la solución básica obtenida por el método de Vogel.

Solución: $X_{12}^* = 50$; $X_{21}^* = 20$; $X_{23}^* = 20$; $X_{31}^* = 10$; $X_{34}^* = 39$; $X_{36}^* = 11$; $X_{44}^* = 1$; $X_{45}^* = 30$; $Z^* = \$330$

5.6 Una compañía tiene un programa de embarque. La empresa tiene 3 fábricas y 4 bodegas. A continuación se relacionan los datos necesarios en términos de costo del transporte (en pesos), capacidad de cada fábrica y los requerimientos de cada bodega. Busque un programa óptimo de embarque de tal manera que los costos totales sean mínimos.

Fábricas	Bodegas				Disponibilidad
	1	2	3	4	
A	10	16	14	12	1.600
B	8	14	16	14	1.200
C	16	8	12	12	600
Requerimientos	1.600	400	400	1.000	3.400

Solución: $X_{11}^*=400$; $X_{13}^*=200$; $X_{14}^*=1.000$; $X_{21}^*=1.200$; $X_{32}^*=400$; $X_{33}^*=200$; $Z^*=\$34.000$

5.7 Una compañía tiene 4 almacenes y 6 tiendas. Los almacenes tienen un exceso de 5, 6, 2, 9 unidades de un producto dado, respectivamente. Las 6 tiendas 4, 4, 6, 2, 4, 2 unidades del producto, respectivamente. Los costos (en pesos) de enviar una unidad del producto del almacén i -ésimo a la tienda j -ésima son:

Almacenes	Tiendas					
	1	2	3	4	5	6
1	9	12	9	6	9	10
2	7	3	7	7	5	5
3	6	5	9	11	3	11
4	6	8	11	2	2	10

¿Cuántas unidades se deben enviar de cada almacén a cada tienda, para minimizar los costos totales? ¿Cuál es el costo total mínimo?

Solución: $X_{13}^*=5$; $X_{22}^*=3$; $X_{23}^*=1$; $X_{26}^*=2$; $X_{31}^*=1$; $X_{32}^*=1$; $X_{41}^*=3$; $X_{44}^*=2$; $X_{45}^*=4$; $Z^*=\$112$

5.8 Se tiene que distribuir un producto desde 3 fábricas (A, B, C), hasta 5 almacenes (D, E, F, G, H), la siguiente tabla muestra: Costos (en pesos), demandas y ofertas (en unidades).

Fábricas	Almacenes					Oferta
	D	E	F	G	H	
A	42	42	44	40	44	19
B	34	42	40	46	48	28
C	46	44	42	48	46	25
Demanda	11	13	7	17	24	

¿Qué cantidad de producto se debe enviar de cada fábrica a cada almacén, si se quiere minimizar los costos totales de transporte?

Solución: $X_{12}^*=2$; $X_{14}^*=17$; $X_{21}^*=11$; $X_{22}^*=10$; $X_{23}^*=7$; $X_{32}^*=1$; $X_{35}^*=24$; $Z^*=\$2.986$

5.9 Se envían automóviles en camión desde 3 centros de distribución a 5 distribuidores. El costo de envío está basado en la distancia recorrida entre las fuentes y destinos. El costo es independiente de si el camión hace el recorrido con una carga parcial o completa.

La tabla que sigue, presenta un resumen de las distancias por recorrer (en kilómetros) entre los centros de distribución y los distribuidores y también las cifras mensuales de oferta y demanda calculadas en número de automóviles.

Cada camión puede transportar un máximo de 18 vehículos. Dado que el costo (en pesos) de transporte por kilómetro recorrido es de \$10, formule el problema como un modelo de transporte, resuélvalo e interprete la solución.

Centros de distribución	Distribuidores					Oferta
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	400
2	50	70	60	65	80	200
3	40	90	100	150	130	150
Demanda	100	200	150	160	140	

Solución: $X_{11}^*=6$; $X_{14}^*=9$; $X_{15}^*=8$; $X_{22}^*=3$; $X_{23}^*=9$; $X_{32}^*=9$; $Z^*=\$37.000 = 3.700 \text{ km}$

5.10 "FIBRATOLIMA" ha transportado desde su planta en Ibagué, 400 toneladas de tela al puerto de Santa Marta, 200 toneladas al puerto de Cartagena y 150 toneladas al puerto de Barranquilla; para atender sus pedidos de exportación así: Panamá requiere 200 toneladas que pagará a \$120.000 tonelada; Honduras requiere 300 toneladas que pagará a \$110.000 tonelada y Venezuela desea 250 toneladas que pagará a \$100.000 tonelada. A Fibratolima le cuesta \$50.000 llevar cada tonelada desde su planta en Ibagué hasta Santa Marta, \$40.000 tonelada a Cartagena y \$30.000 tonelada a Barranquilla. La siguiente tabla muestra el costo de transportar la tela desde cada puerto de embarque al sitio de pedido.

Desde	Hasta		
	Panamá	Honduras	Venezuela
Santa Marta	25.000	25.000	20.000
Cartagena	25.000	20.000	20.000
Barranquilla	20.000	15.000	15.000

Se requiere:

- Formular el problema.
- Use el método de Vogel para obtener una solución básica factible no degenerada.
- Obtenga la solución óptima.

Solución: $X_{11}^*=150$; $X_{13}^*=250$; $X_{22}^*=200$; $X_{31}^*=50$; $X_{32}^*=100$; para un beneficio máximo de: $Z^*=\$34'250.000,00$

5.11 Tres plantas generadoras de energía eléctrica, con capacidades de 25, 40 y 30 millones de kilowatts-hora (KWH), suministran electricidad a 3 ciudades cuyas demandas máximas son: 30, 35 y 25 millones de KWH. El costo en unidades monetarias (u.m.) de la venta de corriente eléctrica a las diferentes ciudades se muestra en la tabla. Durante el siguiente mes, se incrementa un 20% la demanda en cada una de las tres ciudades. para satisfacer el exceso de

demanda, la compañía eléctrica debe comprar electricidad adicional de otra red a 100 unidades monetarias por millón de KWH.

Plantas	Ciudades		
	1	2	3
1	60	70	40
2	32	30	35
3	50	48	45

- Formule el problema como uno de transporte, con el fin de establecer el plan de distribución más económico, desde el punto de vista de la compañía eléctrica.
- Utilizando el método de vogel encuentre una solución básica factible no degenerada.
- Empleando el método MODI encuentre la solución óptima e interprete la solución.

Solución: $X_{13}^* = 25$; $X_{22}^* = 40$; $X_{31}^* = 23$; $X_{32}^* = 2$; $X_{33}^* = 5$; $X_{41}^* = 13$
 $Z^* = \$4.971,00$

5.12 Una compañía produce motores eléctricos pequeños en cada una de sus tres plantas, para 4 fabricantes de instrumentos. Los costos de producción por unidad varían según las ubicaciones, debido a diferencias en el equipo de producción y en el rendimiento de los trabajadores. Los costos de producción por unidad y la capacidad mensual (oferta) se presentan en la siguiente tabla:

Planta	Costo de producción por unidad	Capacidad de producción mensual
A	17	800
B	20	600
C	24	700

Planta	Fabricantes			
	1	2	3	4
A	3	2	5	7
B	6	4	8	3
C	9	1	5	4

Tabla de costos por unidad transportada desde cada planta a cada fabricante

Los pedidos de los fabricantes 1, 2, 3, 4 para el siguiente mes son: 300, 500, 400, 600 unidades, respectivamente.

La empresa debe decidir cuántas unidades se producirán en cada planta y qué porción de la demanda de cada fabricante se surtirá desde cada una de ellas. Se desea minimizar la producción total y los costos de transporte. Formule el problema como uno de transporte y resuélvalo, indicando claramente cuántas unidades se deben enviar y producir desde cada planta a cada fabricante y cuál es el costo mínimo.

Solución: $X_{11}^* = 300$; $X_{12}^* = 100$; $X_{13}^* = 400$; $X_{24}^* = 600$; $X_{32}^* = 400$;
 $Z^* = \$40.500,00$

5.13 Una empresa tiene 3 centros de distribución: Bogotá, Barranquilla y Medellín, con una capacidad de despacho de 9.000, 11.000 y 5.000 unidades

por semana. Los clientes están clasificados por zonas: Occidente, Costa, Oriente y Viejo Caldas; cuyas demandas por semana son: 6.000, 5.000, 8.500 y 4.500 unidades respectivamente. En la tabla se muestran los costos de despachar 100 unidades desde cualquier centro de distribución a cualquier zona.

¿Cuál es la cantidad de unidades que hay que despachar desde cada centro de distribución a cada cliente, con el fin de que los costos totales del transporte sean mínimos y todos los clientes queden satisfechos?

Centros de distribución	Clientes			
	Occidente	Costa	Oriente	Viejo Caldas
Bogotá	420	395	400	432
Barranquilla	460	305	380	345
Medellín	300	375	455	405

Solución: $X_{11}^* = 1.000$; $X_{13}^* = 7.000$; $X_{15}^* = 1.500$; $X_{22}^* = 5.000$; $X_{23}^* = 1.500$; $X_{24}^* = 4.500$; $X_{31}^* = 5.000$; $Z^* = \$8'367.500,00$

5.14 Una firma dedicada al alquiler de automóviles tiene escasez de coches en una serie de ciudades ubicadas en Colombia. Las ciudades de Bogotá, Medellín, Cali y Barranquilla disponen de 20,35,15 y 10 coches menos de los que se necesitan para los alquileres esperados. El director de la firma se entera de que en Ibagué, Armenia y Pereira tienen 40,25 y 30 coches de más respectivamente. Los costos en pesos, del transporte de un coche entre las distintas ciudades esta reflejado en la siguiente tabla:

Ciudades de origen	Ciudades de destino			
	Bogotá	Medellín	Cali	Barranquilla
Ibagué	22	20	23	24
Armenia	18	15	19	20
Pereira	18	15	22	30

El problema consiste en minimizar el costo total de transporte para solucionar el problema de escasez.

Solución: $X_{11}^* = 15$; $X_{14}^* = 10$; $X_{21}^* = 5$; $X_{22}^* = 5$; $X_{23}^* = 15$; $X_{32}^* = 30$; $Z^* = \$1.470,00$

5.15 El gerente de una empresa tiene 4 trabajadores y 4 trabajos para ejecutar, por su experiencia y el nivel de dificultad de cada uno de los trabajos, los tiempos (en horas) de ejecución de cada trabajador, se muestran en la tabla. El gerente desea que cada trabajo sea ejecutado por un solo trabajador y a cada trabajador solo se le asigne un trabajo.

¿Qué trabajador se debe asignar a cada trabajo, de tal manera que la duración total en horas de todos ellos sea la mínima?

Trabajos	Trabajadores			
	1	2	3	4
A	8	16	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	10

Solución: $X_{11}^* = X_{23}^* = X_{32}^* = X_{44}^* = 1$; $Z^* = 41$ horas.

5.16 Considere el problema de asignación, cuya matriz de costos es la siguiente:

	1	2	3	4
A	94	1	54	68
B	74	10	88	82
C	62	88	8	76
D	11	74	81	21

Solución: $X_{14}^* = X_{22}^* = X_{33}^* = X_{41}^* = 1$; $Z^* = 97$ unidades de costo.

5.17 El entrenador de un equipo de natación debe asignar competidores para la prueba de 200 metros combinados por equipos, para enviarlos a las olimpiadas juveniles. Como muchos de sus nadadores son rápidos en más de un estilo, no le es fácil decidir a que estilo asignar a cada uno. Los cuatro mejores nadadores y sus mejores tiempos (en segundos), en cada estilo son:

Tipo de nado	Nadadores			
	Carlos	Jose	David	Francisco
Espalda	37,7	32,9	33,8	37,0
Pecho	43,4	33,1	42,2	34,7
Mariposa	33,3	28,5	38,9	30,4
Libre	29,2	26,4	29,6	28,5

El entrenador quiere determinar cómo asignar los cuatro nadadores a los cuatro tipos de nado, para minimizar la suma de los tiempos.

Solución: $X_{13}^* = X_{24}^* = X_{32}^* = X_{41}^* = 1$; $Z^* = 126,2$ segundos.

5.18 Un corredor de bienes raíces, planea la venta de 5 lotes de terreno y ha recibido ofertas individuales de cuatro clientes. Debido a la cantidad de capital que se requiere, estas ofertas se han hecho en el entendimiento de que ninguno de los cuatro clientes comprará más de un lote y que ningún lote será comprado por mas de un cliente. Las ofertas se muestran en la tabla. El corredor de bienes raíces quiere maximizar su ingreso total a partir de esas ofertas. Resuelva este problema mediante el método Húngaro.

Compradores	Lotes				
	1	2	3	4	5
A	16	15	25	19	20
B	19	17	24	15	25
C	15	15	18	0	16
D	19	0	15	17	18

Solución: $X_{13}^* = X_{25}^* = X_{32}^* = X_{41}^* = 1$; $Z^* = \$84$; el lote 4 queda sin vender.

5.19 Una empresa va a decidir cuál de cuatro vendedores debe asignar a cada uno de sus cuatro distritos de ventas. Cada vendedor está en condiciones de lograr ventas diferentes en cada distrito. En la tabla siguiente se muestran las estimaciones de ventas (en millones de pesos) para diferentes combinaciones de vendedor y distrito.

Vendedores	Distritos			
	1	2	3	4
A	65	73	55	58
B	90	67	87	75
C	106	86	96	89
D	84	69	79	77

A la empresa le gustaría maximizar el volumen de ventas total. Sin embargo, es imposible asignar al vendedor B para el distrito 1 o al vendedor A para el distrito 2, ya que esas decisiones violarían las políticas de rotación de personal. Formule el problema como uno de programación lineal. Use el método Húngaro para resolverlo y establezca el valor óptimo de la función objetivo.

Solución: $X_{14}^* = X_{23}^* = X_{31}^* = X_{42}^* = 1$; $Z^* = \$320$ millones.

5.20 Una compañía de contadores tiene tres nuevos clientes. Se asignarán a los tres clientes, tres jefes de proyecto. Con base en los distintos antecedentes y experiencia de los citados, las diversas asignaciones entre jefes de proyecto y clientes, varía en función de los tiempos esperados de terminación. Se muestra a continuación las posibles asignaciones y los tiempos esperados en días de terminación.

Jefes de proyecto	Clientes		
	1	2	3
Juan	10	16	32
Pablo	14	22	40
Benjamín	22	24	34

Formule el problema como uno de programación lineal binaria, resuélvalo empleando el método Húngaro y determine qué jefe de proyecto se le asigna a cada cliente.

Solución: $X_{12}^* = X_{21}^* = X_{33}^* = 1$; $Z^* = 64$ días.

5.21 Se tienen 4 trabajadores que deben ser asignados a 4 trabajos, con base en las horas empleadas por cada uno de ellos en cada trabajo, ¿cuál es la asignación óptima que permite obtener el tiempo mínimo de realización de los cuatro trabajos?.

Trabajador	Trabajo			
	A	B	C	D
1	2	8	12	6
2	18	14	20	18
3	8	10	22	14
4	16	14	16	10

Solución: $X_{11}^* = X_{23}^* = X_{32}^* = X_{44}^* = 1$; $Z^* = 42$ horas.

5.22 Cuatro personas acaban de terminar el curso de ventas de la compañía y se les va a asignar a cuatro distritos diferentes. Basándose en su experiencia, actuación en el curso, conocimiento del proyecto y los clientes potenciales, la administración a hecho estimaciones del éxito esperado de cada uno en cada distrito. Las estimaciones en la escala de 1 (bajo) al 10 (alto), son:

Persona	Distrito			
	Norte	Oriente	Sur	Occidente
A	7	9	10	9
B	8	7	9	9
C	7	10	9	8
D	6	8	8	7

Solución: $X_{13}^* = X_{24}^* = X_{32}^* = X_{41}^* = 1$; $Z^* = 35$ puntos.

5.23 El gerente de una agencia de publicidad, debe decidir, cuál de cuatro ejecutivos de contabilidad debe asignar a cada uno de sus cuatro clientes principales. En la tabla se presentan los costos estimados (en millones de pesos) de la asignación de cada ejecutivo. Formule el problema como uno de programación lineal, use el método Húngaro para encontrar la solución óptima del problema y establezca el valor de la función objetivo.

Ejecutivo	Cliente			
	1	2	3	4
A	15	19	20	18
B	14	15	17	14
C	11	15	15	14
D	21	24	26	24

Solución: $X_{11}^* = X_{24}^* = X_{33}^* = X_{42}^* = 1$; $Z^* = 68$ Millones.

5.24 La Universidad de Ibagué ha recibe ofertas para las 4 rutas de buses escolares de la ciudad. Cuatro compañías presentaron las ofertas que se muestran en la tabla siguiente:

Compañía	Ruta			
	1	2	3	4
1	4.000	5.000	-----	-----
2	-----	4.000	-----	4.000
3	3.000	-----	2.000	-----
4	-----	-----	4.000	5.000

Es política de la Universidad de Ibagué, asignar solo una ruta a cada compañía y cada ruta debe ser atendida por una sola compañía. Utilice el método de asignación, para minimizar el costo de la Universidad de Ibagué para operar las cuatro rutas de buses.

Solución: $X_{11}^* = X_{22}^* = X_{33}^* = X_{44}^* = 1$; $Z^* = \$15.000,00$

5.25 Container, Inc., fabrica contenedores de muchos tamaños y formas. Recientemente ha recibido pedidos para producir diversas cantidades de contenedores de cocina de 5 diferentes tamaños. Cada tamaño de contenedor puede producirse en cualquiera de cuatro máquinas. Debido a las distintas tecnologías y tiempos de disposición, el número total de horas, incluyendo el tiempo de disposición, necesarias para procesar cada tamaño de contenedor en cada máquina varía, como se muestra en la siguiente tabla:

Tamaño del contenedor	Máquina			
	1	2	3	4
3 x 4	25	20	28	30
4 x 6	24	22	25	23
6 x 8	30	30	28	25
8 x 12	38	32	30	30
12 x 8	40	40	28	30

Adecuar una máquina para que cambie el tamaño de un contenedor toma largo tiempo, así que la gerencia ha decidido que cada máquina producirá contenedores de un solo tamaño. Por tanto, solo se producirán 4 de los 5 tamaños en las 4 máquinas disponibles dentro de la fecha límite asignada. Como los ingresos por cada tamaño de contenedor son aproximadamente iguales, la gerencia de Container, Inc., es indiferente en cuanto a cual de los 5 pedidos no satisfacer. Como gerente del departamento de producción, se le ha pedido determinar cuáles 4 de los 5 pedidos aceptar y desarrollar un plan de producción que minimice el tiempo de procesamiento total para satisfacer esos pedidos.

Solución: $X_{12}^* = X_{21}^* = X_{34}^* = X_{53}^* = 1$; $Z^* = 98$ horas; El container de 8x12 no se produce.

5.26 La empresa Cauchos del Tolima, necesita realizar 4 proyectos, por falta de personal se va a subcontratar a 4 empresas para que cada una realice un proyecto. Todas las empresas están en condiciones de realizar cualquiera de los proyectos. El gerente general no sabe como distribuir los proyectos. Usted, como la mano derecha del gerente, ¿Qué le aconsejaría? En la siguiente tabla se registra el valor en millones de pesos que cobra cada una de las empresas por realizar cada uno de los proyectos.

Empresa	Proyecto			
	1	2	3	4
1	10	15	22	19
2	20	18	15	14
3	16	17	12	20
4	11	18	16	15

Solución: $X_{12}^* = X_{24}^* = X_{33}^* = X_{41}^* = 1$; $Z^* = \$52$ Millones.

5.27 Se cuenta con 4 aviones que deben fumigar 4 campos sembrados. Por las características de los aviones y de los sembrados, cada avión emplea tiempos distintos en la fumigación de cada campo, como se ve en el siguiente cuadro:

Aviones	Campos			
	1	2	3	4
1	2	4	2	1
2	1	2	3	2
3	4	6	2	4
4	4	4	1	3

Se trata de determinar que avión debe fumigar cada uno de los campos, de tal manera que las horas de vuelo sean las mínimas posibles. Hallar dos soluciones.

Solución 1: $X_{14}^* = X_{21}^* = X_{33}^* = X_{42}^* = 1$; $Z^* = 8$ horas.

5.28 En la Universidad, cuatro contratistas diferentes, proponen construir cuatro edificios. Cada contratista ha remitido propuestas para la construcción de los cuatro edificios. El problema consiste en determinar que edificio debe adjudicarse a cada contratista para lograr el mínimo costo de la construcción de los cuatro edificios. En la tabla siguiente se muestran los costos de cada propuesta en millones de pesos.

Edificio	Contratista			
	1	2	3	4
A	48	48	50	44
B	56	60	60	68
C	96	94	90	85
D	42	44	54	46

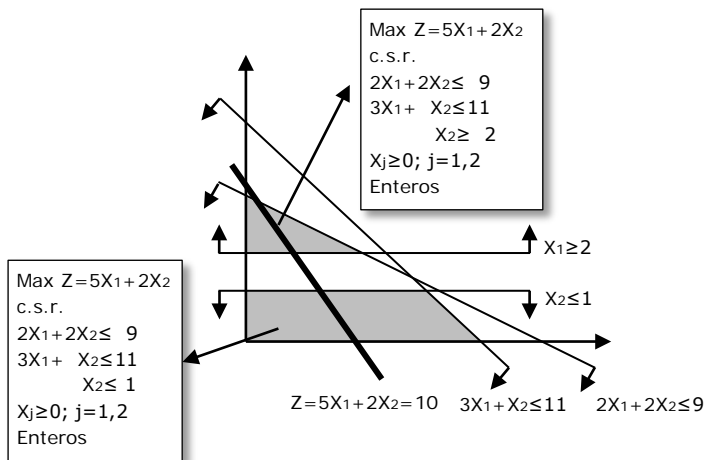
Solución 1: $X_{14}^* = X_{21}^* = X_{33}^* = X_{42}^* = 1$; $Z^* = \$234$ Millones.

5.29 Una compañía transportadora dispone de cinco camiones situados en las ciudades A, B, C, D, E. Se requiere un camión en las ciudades 1, 2, 3, 4, 5, 6. En la tabla siguiente se muestra el kilometraje entre las ciudades. El problema consiste en determinar la asignación de camiones que minimiza el kilometraje recorrido por los camiones.

Ciudad de origen	Ciudad de destino					
	1	2	3	4	5	6
A	20	15	26	40	32	12
B	15	32	46	26	28	20
C	18	15	2	12	6	14
D	8	24	12	22	22	20
E	12	20	18	10	22	15

Solución 1: $X_{12}^* = X_{26}^* = X_{33}^* = X_{41}^* = X_{54}^* = 1$; $Z^* = 55$ Kilometros.

Capítulo 6 Programación Lineal Entera y Binaria



Introducción

Muchos de los problemas de la vida real exigen soluciones con números enteros, por lo tanto las variables de dicho problema deben ser definidas como variables enteras. Los métodos de solución que contemplaremos en este capítulo son: El método gráfico y Método de Bifurcación y Acotación (Branch And Bound). También se ilustra el método de Egon Balas en donde las variables son de carácter binario (0,1) y por último se ilustra el uso del software WinQsb para atender este tipo de problemas.

Método gráfico

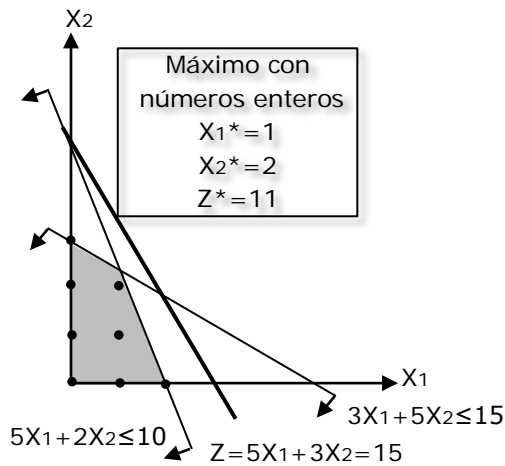
Es idéntico al método gráfico de programación lineal continua, solo que aquí, se seleccionan solo las soluciones enteras dentro del área de soluciones factibles.

Ejemplo 6.1

Max $Z = 5X_1 + 3X_2$	$3X_1 + 5X_2 \leq 15$	$5X_1 + 2X_2 \leq 10$	$Z = 5X_1 + 3X_2 = 15$
c.s.r.	$3X_1 + 5X_2 = 15$	$5X_1 + 2X_2 = 10$	
$3X_1 + 5X_2 \leq 15$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$	$X_1 = 0 \mid X_2 = 0$
$5X_1 + 2X_2 \leq 10$	$X_2 = 3 \mid X_1 = 5$	$X_2 = 5 \mid X_1 = 2$	$X_2 = 5 \mid X_1 = 3$
$X_j \geq 0; j = 1, 2$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$	
	Verdad	Verdad	

La representación gráfica es la siguiente:

Gráfica 6.1 Método gráfico.



Las intersecciones de la cuadrícula, contenida en el área sombreada, conforma las soluciones factibles.

El punto más a la derecha del área, que se intercepte con el barrido de la función objetivo, es la solución óptima.

Este método es eficaz sólo para problemas de dos (2) variables o menos. para problemas de más de 2 variables, se ilustrará el Método de de Bifurcación y acotación, denominado en inglés Branch And Bound.

Fuente: El autor.

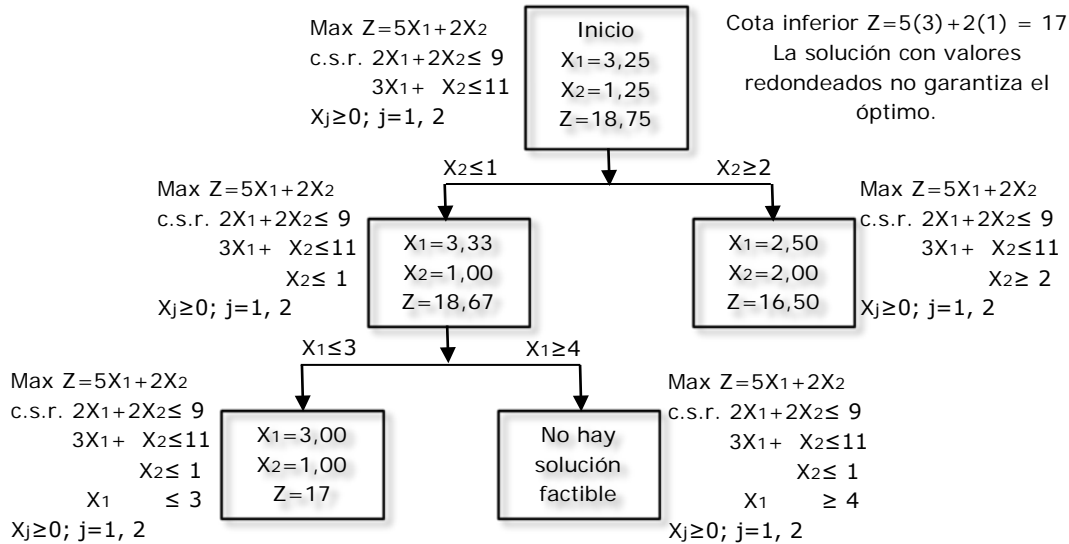
Llama la atención el hecho, que el problema teniendo un número de soluciones factibles contables (en el ejemplo hay 8 soluciones enteras factibles), los métodos para hallar la solución óptima son considerados ineficientes, mientras que en los problemas con variables continuas, el número de soluciones factibles es infinito y el método simplex ha demostrado ser muy eficiente en la búsqueda de la solución óptima.

Método de bifurcación y acotación (Branch and Bound)

Es una estrategia sistemática, que reduce mucho el número de combinaciones que se deben examinar.

Algoritmo:

1. Encontrar la solución mediante el Método Simplex. Si la solución no es entera, se continua con el segundo punto.
2. Comienza con la solución óptima del simplex en donde se ignoran las restricciones de variables enteras.
3. Se selecciona una variable con valor no cero y se crean dos ramas mutuamente excluyentes, esto da lugar a dos (2) nuevos problemas de Programación Lineal; que se deben resolver.
4. Si ninguna solución es entera, con la rama de mayor valor de Z , se crean nuevas ramas y se resuelven nuevos problemas por programación lineal (Método Simplex).
5. Se repite el punto 4), Hasta encontrar la solución entera óptima.



La primera acotación se realizó sobre la variable X_2 , pero pudo haber sido sobre X_1 , de todas formas el método es dispendioso, en especial si se hace manualmente, por ello es calificado como ineficiente.

Método aditivo de egon balas

No confundir este método para solucionar problemas de asignaciones, aquí el problema de programación lineal tiene la forma general y lo diferente es que las variables solo pueden tomar valores binarios (0,1). La filosofía del método se basa en pensar que si se tiene una función objetivo minimizando y todos sus términos son positivos, entonces, entre menos variables tomen el valor de uno (1), la función objetivo será mínima.

Algoritmo

1. La función objetivo debe ser de minimización, en caso de maximización, use la regla de equivalencia: Maximizar (Z) = Minimizar ($-Z$)
2. Se requiere que para toda j , $C_j > 0$. En caso de que $C_j < 0$, entonces X_j se sustituye por: $X_j = 1 - X_j'$; es decir X_j' es el complemento de X_j

Ejemplo: Min $Z = 3X_1 - 2X_2 \Rightarrow X_2 = 1 - X_2'$

Remplazando: $Z = 3X_1 - 2(1-X_2') \Rightarrow$

$Z = 3X_1 + 2X_2' - 2$; que para el caso del método simplex, se ignoran las constantes en la función objetivo, quedando esta como: Min $Z = 3X_1 + 2X_2'$ (todas las variables con coeficiente positivo).

Nota: El cambio de variable se debe aplicar en todas las restricciones.

Para apreciar la utilidad del método, se presenta el siguiente ejemplo, primero, contemplando todas las posibles soluciones y a continuación aplicando el método aditivo de Egon Balas, que reduce el número de soluciones posibles para contemplar.

Ejemplo 6.1

$$\text{Minimizar } Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$$

c.s.r.

$$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 \leq -3$$

$$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 \leq -7$$

$$X_j = 0, 1 ; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

El número posible de soluciones es de 2^n , en donde n es el número de variables. En el ejemplo, el número posible de soluciones es $2^5 = 32$. En el siguiente diagrama se muestran todas las 32 posibles soluciones.

	32 posibles soluciones																															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
X ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X ₃	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X ₄	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X ₅	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Algunas de estas soluciones no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones. Aquellas que satisfagan las restricciones, deberán ser remplazadas en la función objetivo y la que la haga más pequeña, será la solución óptima. Este procedimiento es dispendioso, tanto en la consecución de todas las soluciones como en su evaluación para todas las restricciones y en su evaluación final sobre la función objetivo.

Aplicación del método de Egon Balas

Evaluamos cada restricción, primero suponiendo que todas las variables valgan cero, y después, alternativamente a cada variable le asignamos el valor de uno (1) y al resto de variables el valor de cero (0). Cada vez que una solución no satisfaga una restricción, el que tan lejos está de satisfacerla, de denomina valor de la infactibilidad.

Ejemplo: Si $X_1 = 1$ y $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$

Remplazando en la restricción uno (1), se establece que: $-3 \leq 0$, luego aquí la infactibilidad es cero (0), ya que la solución evaluada, satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación verdadera.

Remplazando en la restricción dos (2), se establece que: $3 \leq 0$, luego aquí la infactibilidad es de tres (3) unidades, ya que la solución evaluada, no satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación falsa. El que tan lejos está de ser una verdad, es lo que se denomina infactibilidad.

En total, la solución evaluada tiene una infactibilidad de $0 + 3 = 3$ unidades.

Si en ésta primera iteración, se encuentra una solución cuya infactibilidad sea cero (0), se ha encontrado la solución factible y óptima. Si se encuentra que varias soluciones tienen la infactibilidad igual a cero (0), remplazamos todas éstas soluciones en la función objetivo y la solución óptima será aquella que haga que Z sea mínima.

Si no hay ninguna solución con su infactibilidad igual a cero (0), se escoge la solución que menor infactibilidad tenga y de ella la variable que esté valiendo uno (1). Se remplace en las restricciones dicha variable y sobre dichas restricciones se inicia la segunda iteración. Este procedimiento se repite hasta encontrar la solución óptima factible.

En la siguiente página se ilustra el procedimiento descrito.

Primera iteración	Segunda iteración ($X_2=1$)
$-6X_1-3X_2+2X_3-4X_4-X_5+3\leq 0$ $-4X_1-5X_2-4X_3-3X_4+3X_5+7\leq 0$ $X_1=X_2=X_3=X_4=X_5=0$ $3\leq 0$ $7\leq 0$; Infactibilidad = 10 $X_1=1; X_2=X_3=X_4=X_5=0$ $-3\leq 0$ $3\leq 0$; Infactibilidad = 3 $X_2=1; X_1=X_3=X_4=X_5=0$ $0\leq 0$ $2\leq 0$; Infactibilidad = 2; La menor $X_3=1; X_1=X_2=X_4=X_5=0$ $5\leq 0$ $3\leq 0$; Infactibilidad = 8 $X_4=1; X_1=X_2=X_3=X_5=0$ $-1\leq 0$ $4\leq 0$; Infactibilidad = 4 $X_5=1; X_1=X_2=X_3=X_4=0$ $2\leq 0$ $10\leq 0$; Infactibilidad = 12 <p>Aquí se concluye que lo más favorable es fijar la primera variable con valor de uno (1) a X_2 ya que presenta la menor infactibilidad, remplazamos a $X_2=1$ en las dos restricciones e iniciamos la 2ª iteración.</p>	$-6X_1+2X_3-4X_4-X_5\leq 0$ $-4X_1-4X_3-3X_4+3X_5+2\leq 0$ $X_1=1; X_3=X_4=X_5=0$ $-6\leq 0$ $-2\leq 0$; Infactibilidad = 0; Z=15 $X_3=1; X_1=X_4=X_5=0$ $2\leq 0$ $-2\leq 0$; Infactibilidad = 2 $X_4=1; X_1=X_3=X_5=0$ $-4\leq 0$ $-1\leq 0$; Infactibilidad = 0; Z*=12 $X_5=1; X_1=X_3=X_4=0$ $-1\leq 0$ $5\leq 0$; Infactibilidad = 5 <p>En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontrando el óptimo cuando $Z = 12$</p> <p>Solución: $X_1^*=0; X_2^*=1; X_3^*=0; X_4^*=1; X_5^*=0; Z^* = 12$</p> <p>Solamente se hizo necesario escudriñar 10 de las 32 soluciones posibles. Podemos asegurar que el método hace una búsqueda sistemática que evita probar todas las combinaciones posibles.</p>

Ejemplo 6.2

Una empresa de bienes raíces, analiza cinco proyectos de desarrollo posibles. La siguiente tabla muestra las siguientes ganancias estimadas a largo plazo (Valor presente neto: VPN), que generaría cada proyecto y la inversión requerida para emprenderlo, en millones de dólares.

	Proyectos de desarrollo				
	1	2	3	4	5
Ganancia estimada	1	1,8	1,6	0,8	1,4
Capital requerido	6	12	10	4	8

Los propietarios de la empresa, reunieron \$20 millones de capital de inversión para estos proyectos. Ellos quieren elegir la combinación de proyectos que maximice la ganancia total estimada a largo plazo (Valor presente neto: VPN), sin invertir más de \$20 millones.

Formule el problema como uno de programación entera binaria (PEB) y resuélvalo empleando el método aditivo de Egon Balas.

Solución:

$X_j = 0$; No elegir el proyecto j-ésimo ($j = 1, 2, 3, 4, 5$)

$X_j = 1$; Si elegir el proyecto j-ésimo ($j = 1, 2, 3, 4, 5$)

Maximizar $Z = X_1 + 1,8X_2 + 1,6X_3 + 0,8X_4 + 1,4X_5$

c.s.r.

$6X_1 + 12X_2 + 10X_3 + 4X_4 + 8X_5 \leq 20$

$X_j = 0, 1 ; j = 1, 2, 3, 4, 5$

Minimizar $Z = -X_1 - 1,8X_2 - 1,6X_3 - 0,8X_4 - 1,4X_5 \rightarrow$

Regla de equivalencia:
Max Z = Min (-Z)

$X_1 = 1 - X_1'; X_2 = 1 - X_2'; X_3 = 1 - X_3'; X_4 = 1 - X_4'; X_5 = 1 - X_5'$

Minimizar $Z = -(1 - X_1') - 1,8(1 - X_2') - 1,6(1 - X_3') - 0,8(1 - X_4') - 1,4(1 - X_5')$

Minimizar $Z = X_1' + 1,8X_2' + 1,6X_3' + 0,8X_4' + 1,4X_5' - 6,6$

Con la siguiente restricción:

$6(1 - X_1') + 12(1 - X_2') + 10(1 - X_3') + 4(1 - X_4') + 8(1 - X_5') \leq 20$

$-6X_1' - 12X_2' - 10X_3' - 4X_4' - 8X_5' + 20 \leq 0$

Reescribiendo:

Minimizar $Z = X_1' + 1,8X_2' + 1,6X_3' + 0,8X_4' + 1,4X_5'$

c.s.r.

$-6X_1' - 12X_2' - 10X_3' - 4X_4' - 8X_5' + 20 \leq 0$

$X_j' = 0, 1 ; j = 1, 2, 3, 4, 5$

Primera iteración

$$-6X_1' - 12X_2' - 10X_3' - 4X_4' - 8X_5' + 20 \leq 0$$

$$X_1' = X_2' = X_3' = X_4' = X_5' = 0$$

$$20 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 20$$

$$X_1' = 1; X_2' = X_3' = X_4' = X_5' = 0$$

$$14 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 14$$

$$X_2' = 1; X_1' = X_3' = X_4' = X_5' = 0$$

$$8 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 8; \text{ La mejor}$$

$$X_3' = 1; X_1' = X_2' = X_4' = X_5' = 0$$

$$10 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 10$$

$$X_4' = 1; X_1' = X_2' = X_3' = X_5' = 0$$

$$16 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 16$$

$$X_5' = 1; X_1' = X_2' = X_3' = X_4' = 0$$

$$12 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 12$$

Lo mejor es: $X_2' = 1$

Segunda iteración ($X_2' = 1$)

$$-6X_1' - 10X_3' - 4X_4' - 8X_5' + 8 \leq 0$$

$$X_1' = 1; X_3' = X_4' = X_5' = 0$$

$$2 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 2$$

$$X_3' = 1; X_1' = X_4' = X_5' = 0$$

$$-2 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 0$$

Solución factible; $Z = 3,2$ no óptima.

$$X_4' = 1; X_1' = X_3' = X_5' = 0$$

$$4 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 4$$

$$X_5' = 1; X_1' = X_3' = X_4' = 0$$

$$0 \leq 0; \text{ Infactibilidad} = 0$$

Solución factible; $Z = 3,4$ óptimo.

Solución: $X_1^* = 1; X_2^* = 0; X_3^* = 1;$
 $X_4^* = 1; X_5^* = 0; Z^* = 3,4$

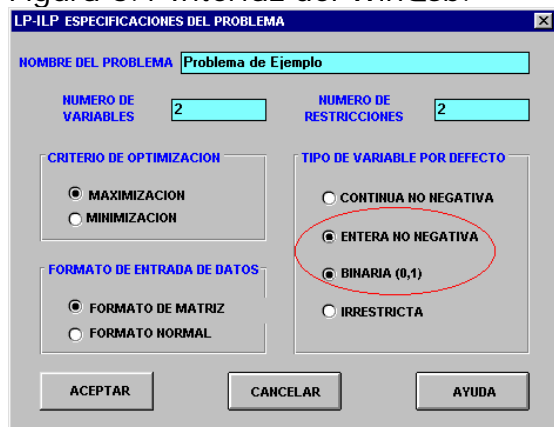
Se eligen los contratos: 1, 3 y 4 para obtener la mayor ganancia esperada de 3,4 millones de dólares.



Software WinQsb

El software WinQsb en su módulo de programación lineal y entera, presenta en su ventana inicial las opciones respectivas, incluyendo la de programación lineal binaria, de la siguiente manera:

Figura 6.1 Interfaz del WinQsb.



En esta ventana se selecciona una de las opciones encerradas en la elipse de color rojo. El resto de las ventanas se tramita de igual manera que para un problema de programación lineal continua. En la siguiente ventana, el WinQsb permite establecer el tipo de variable de manera individual; de ahí que podemos tener un problema de programación lineal con variables mezcladas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Fuente: Software WinQsb.

Figura 6.2 Ventana de captura de datos del Software WinQsb.

Variables	X ₁	X ₂	Dirección	Recurso
Maximizar	3	5	≤	4
Restricción 1	1		≤	18
Restricción 2	3	2	≤	10
V/r Inferior	3	-8		
V/r Superior	50	10		
Tipo de variable	Entera	Binaria		

Fuente: Software WinQsb.

Dando doble clic sobre la casilla de tipo de variable, se ofrece consecutivamente las variables tipo continua, entera, binaria e irrestricta, este último tipo de variable es la que no tiene restricción en el signo y puede tomar valores tanto negativos como positivos o el cero. También podemos fijar límites para los valores de las variables, siendo un problema de programación lineal restringido, en la figura 6.2 se exige que X₁ debe tomar valores enteros entre 3 y 50.

La solución se muestra en ventanas idénticas a las ya explicadas en programación lineal continua y se ofrece el mismo tipo de información.

Una conclusión relevante es la utilidad del computador y del software para la solución de problemas de programación lineal, que sin dicha herramienta es supremamente dispendiosa la consecución de la solución óptima para problemas de tamaño mediano y grande, que son los que en la vida real se presentan.

Problemas propuestos

6.1 Resolver gráficamente los siguientes ejercicios de programación lineal entera.

a) Max. $Z = X_1 + 5X_2$

c.s.r.

$$X_1 + 10X_2 \leq 20$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2 \text{ Enteros}$$

Solución:

$$X_1^* = 0; X_2^* = 2$$

$$Z^* = 10$$

b) Max. $Z = 3X_1 + X_2$

c.s.r.

$$X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$3X_1 - 4X_2 \leq 12$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2 \text{ Enteros}$$

Solución:

$$X_1^* = 5; X_2^* = 1$$

$$Z^* = 16$$

c) Max. $Z = 5/2X_1 + X_2$

c.s.r.

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_j \geq 0; j=1, 2 \text{ Enteros}$$

Solución:

$$X_1^* = 2; X_2^* = 0$$

$$Z^* = 5$$

6.2 Resolver manualmente empleando el método de Brach and Bound y mediante el software WinQsb los siguientes ejercicios de programación lineal entera.

- a) Max. $Z = 5X_1 + 2X_2$
c.s.r.
 $2X_1 + 2X_2 \leq 9$
 $3X_1 + X_2 \leq 11$
 $X_j \geq 0; j=1, 2$ Enteros
- Solución:
 $X_1^* = 3; X_2^* = 1$
 $Z^* = 17$
- b) Max. $Z = 60X_1 + 50X_2$
c.s.r.
 $2X_1 + 2X_2 \leq 80$
 $3X_1 + 2X_2 \leq 55$
 $X_1 \leq 16$
 $X_2 \leq 18$
 $X_j \geq 0; j=1, 2$ Enteros
- Solución:
 $X_1^* = 9; X_2^* = 14$
 $Z^* = 1.240$
- c) Max. $Z = X_1 + 5X_2$
c.s.r.
 $X_1 + 10X_2 \leq 20$
 $X_1 \leq 2$
 $X_j \geq 0; j=1, 2$ Enteros
- Solución:
 $X_1^* = 0; X_2^* = 2$
 $Z^* = 10$

6.3 Resolver manualmente empleando el método aditivo de Egon Balas y mediante el software WinQsb los siguientes ejercicios de programación lineal binaria.

- a) Min. $Z = 5X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 3X_4 + X_5$
c.s.r.
 $-X_1 + 3X_2 - 5X_3 - X_4 + 4X_5 \leq -2$
 $2X_1 - 6X_2 + 3X_3 + 2X_4 - 2X_5 \leq 0$
 $X_2 - 2X_3 + X_4 + X_5 \leq -1$
 $X_j = 0, 1; j=1, 2, 3, 4, 5$
- Solución:
 $X_2^* = X_3^* = 1$
 $X_1^* = X_4^* = X_5^* = 0$
 $Z^* = 17$
- b) Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 - 2X_4 + 3X_5$
c.s.r.
 $X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 \leq 4$
 $7X_1 + 3X_3 - 4X_4 + 3X_5 \leq 8$
 $11X_1 - 6X_2 + 3X_4 - 3X_5 \geq 3$
 $X_j = 0, 1; j=1, 2, 3, 4, 5$
- Solución:
 $X_1^* = X_2^* = 1$
 $X_3^* = X_4^* = X_5^* = 0$
 $Z^* = 5$

6.4 Una Compañía se especializa en la preparación de programas de computadora para el gobierno y la industria. Estos programas se escriben en uno de cuatro lenguajes de programación: Fortran, assambler, cobol o apl. La compañía tiene un programador que realiza esta labor y existen cinco trabajos de programación que deben terminarse lo más pronto posible. La utilidad de cada tarea se muestra en la siguiente tabla.

Programador	Trabajo				
	1	2	3	4	5
José	100	150	200	100	50

En la siguiente tabla se muestra el tiempo que necesita el programador para terminar cada trabajo y el tiempo de que dispone después de realizar sus demás tareas.

	Trabajo					Tiempo disponible (horas)
Programador	1	2	3	4	5	
José	40	15	20	10	5	35

¿Qué trabajos debe aceptar realizar la compañía para maximizar la utilidad?

Formule el problema como uno de programación lineal binaria, emplee el método manual de Egon balas y el software WinQsb para solucionarlo.

Solución: Aceptar los trabajos 3, 4 y 5 para una utilidad máxima de \$350,00

Bibliografía

BAZARAA, Mokhtar S., JARVIS, John J., SHERALI, Hanif D., *Programación Lineal y flujo de redes*. Editorial Limusa S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores, Balderas 95, México D. F. Segunda edición. 1.998

CHANG, Yih-Long. *WinQsb*, Soporte para el software. John Wiley & Sons, Inc. 1.998

EPPEN D. G., GOULD F. J., SCHMIDT C. P. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa.*, Editorial Prentice -Hall Hispanoamericana S.A., México. Tercera edición 1.992

GALLEGHER Charles A., HUNG, J. Watson. *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en la administración.* Editorial McGraw-Hill Interamericana, México. Primera edición 1.982

GONZALEZ ARIZA, Angel León. *Manual práctico de investigación de operaciones.* Segunda edición 1.998. Ediciones Uninorte.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. *Introducción a la investigación de operaciones.* Sexta edición. Editorial McGraw-Hill Interamericana, México. 1.997

LEVIN, Richard., KIRKPATRICK, Charles A., *Enfoques cuantitativos a la administración.* Compañía editorial continental, S. A. México. Novena reimpresión 1.997

MATHUR, Kamlesh., SOLOW Daniel., *Investigación de Operaciones : El arte de la toma de decisiones.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. 1.996

SASIENI, Maurice., YASPAN, Arthur., FRIEDMAN, Lawrence. *Investigación de Operaciones, Métodos y problemas.* Editorial Limusa, México, 1.978

MOSKOWITZ, Herbert; WRIGHT, Gordon P., *Investigación de operaciones.* Editorial Prentice Hall Internacional, Londres. Primera edición 1.982

NAMAKFOROOSH, Mamad Naghi. *Investigación de operaciones*. Editorial Limusa

PRAWDA WITENBERG, Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*. Volumen 1. Editorial Limusa 1.995

RÍOS INSUA, Sixto; RÍOS INSUA David; MATEOS, Alfonso; MARTÍN, Jacinto. *Programación lineal y aplicaciones*. Editorial Alfaomega S.A. 1.997

SHAMBLIN, James E.; STEVENS Jr. G. T. *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental*. Editorial McGraw-Hill Interamericana, México.

SOLOW, Daniel; KAMLESH, Mathur. *Investigación de operaciones*. Editorial Prentice - Hall Hispanoamericana S.A., México.

STEPHEN B. Bergen. *Apuntes de los cursos de investigación de operaciones de la Universidad de Stanford*. Universidad Tecnológica de Pereira .

TAHA, Handy A. *Investigación de operaciones: Una introducción*. Editorial Prentice Hall, México. Sexta edición 1.998

VARELA, Jaime Enrique. *Introducción a la investigación de operaciones*. Editorial Fondo Educativo Interamericano S.A., Colombia. Primera edición 1.982

WINSTON, Wayne L. *Operations Research, Applications And Algorithms*. Duxbury Press And Imprint of Wadsworth Publishing Company, Belmont, California. Tercera edición 1.994

Software

A continuación damos una lista de programas informáticos con la dirección Web, en las que el lector podrá obtener información reciente y detallada del software, incluyendo en muchos casos una versión de evaluación.

ARSHAM, Hossein Dr. www.brave.as/arsham

AIMMS, Paragon Decisión Technology, Haarlem, Holanda, <http://www.paragon.nl>

BOĞAZIÇI UNIVERSITY ISTANBUL-TURKEY, Departamento de sistemas., <http://mis.boun.edu.tr/erdem/wingsb.html>

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA DE IBAGUÉ, Programa de Ingeniería Industrial., www.cui.edu.co/industrial/SOF01.html ; www.cui.edu.co/industrial/io.html

CPLEX for AMPL, MINOS for AMPL, Compass Modeling Solutions, Reno, Nevada, <http://www.modeling.com>

FORT MP, Numerical Algorithms Group., <http://www.nag.com>

GAMS, Gams Development Corporation, Washington, <http://www.gams.com>
INVESTIGACIÓN OPERATIVA., <http://members.tripod.com/~operativa>

LINDO, LINGO, WHAT'S BEST, Lindo Systems, Chicago, <http://www.lindo.com>

LP/MIPsSolvers, PREMIUM SOLVER for EXCEL, frontline Systems, <http://www.frontsys.com>

LPS-867, Applied Automated Engineering Corporation, Pennington, N. J., <http://www.aae.com>

MPL Modeling System, Maximal Software, Arlington, Va., <http://www.maximal-usa.com>

SAS Software, SAS Institute, Cary N.C., <http://www.sas.com>

DSPims, Aspen Technology, <http://www.aspentech.com>

XPRESS-MP, Dash Associates Ltd., Blisworth, UK, <http://www.Dash.co.uk>