ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

DEBER 03

Fecha entrega: 2015/07/14

EJERCICIOS

1. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias $i.i.d.$ con función de densidad:

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} a(\theta_1,\theta_2)h(x), & \text{si}\, \theta_1 \le x \le \theta_2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

donde $h(x) > 0$ es una función continua, conocida, definida en los reales.

a. Muestre que $X_{(1)}, X_{(n)}$ son MLEs de θ_1, θ_2 respectivamente.

b. Sean $\hat{\theta}_{1n}$ y $\hat{\theta}_{2n}$ MLEs de θ_1 y θ_2, suponga que $h(\theta_1)\lambda_1 > 0$ y $h(\theta_2) = \lambda_2 > 0$. Muestre que:

$$n \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1n} - \theta_1 \\ \theta_2 - \hat{\theta}_{2n} \end{pmatrix} \underset{d}{\rightarrow} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

donde Z_1 y Z_2 son variables independientes exponenciales de parámetros $\lambda_1 a(\theta_1,\theta_2)$ y $\lambda_2 a(\theta_1,\theta_2)$ respectivamente.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias $i.i.d.$ con función de densidad dependiente de un parámetro $\theta > 0$ desconocido:

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} \qquad\qquad x > 0$$

a. Encuentre el MLEs de θ basado en X_i y en $X_1, \ldots, X_n$.

b. Encuentre el MLEs de $k\theta$ basado en $X_1, \ldots, X_n$, para k una constante conocida.

c. Encuentre la distribución asintótica del MLEs de $k\theta$ basado en $X_1, \ldots, X_n$ y su error estándar.

3. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, \theta]$, con θ desconocido.

a. Halle el estadístico de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para θ.

b. Halle la función de distribución de la variable aleatoria $\hat{\theta}$.

c. Calcule la esperanza y la varianza de $\hat{\theta}$.

d. Calcule $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma} exp\Big(-\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \qquad para\, x \geq \mu$$

donde $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\mu \in (-\infty, \infty)$ y $\sigma > 0$.

a. Si $\sigma = 1$ y μ desconocido encuentre y grafique la función de verosimilitud. Halle un MLE para μ.

b. Si $\mu = 2$ y σ es desconocido, halle un MLE para σ.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha^{\beta} \beta x^{-(\beta+1)} \qquad para\, 0 < \alpha < x \, y \, \beta > 0.$$

a. Si α es conocido y β desconocido, encuentre un MLE para β, halle su distribución asintótica y encuentre su error estándar.

b. Si β es conocido y α desconocido, encuentre un MLE para α.

6. Considere el modelo de regresión lineal múltiple definido como:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i \qquad para\, i = 1, \ldots, n.$$

Suponiendo que $u_i \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$, $u_1, \ldots, u_n$ independientes, encuentre MLEs para $\beta_1, \ldots, \beta_k$ basados en $Y_1, \ldots, Y_n$, considerando los regresores $X_2, \ldots, X_k$ no aleatorios.