ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

DEBER 01

Fecha entrega: 2015/05/12

EJERCICIOS

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias *i.i.d.* de distribución $Gamma(\alpha, \lambda)$ con α, λ desconocidos. Pruebe que la función de distribución conjunta de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ pertenece a una familia exponencial. Considere que si $X_i \rightsquigarrow Gamma(\alpha, \lambda)$, su función de densidad viene dada por:

$$f(x_i, \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x_i^{\alpha-1} exp(-\lambda x_i)}{\Gamma(\alpha)}$$

2. Demuestre que la familia de distribuciones $Binomial(n, \theta)$ con θ desconocido es una familia exponencial. Encuentre la esperanza y la varianza del estadístico $T(X)$ respectivo.

3. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} a(\theta_1, \theta_2) h(x), & \text{si } \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

donde $h(x)$ es una función conocida definida en los reales.

a. Demuestre que:

$$a(\theta_1, \theta_2) = \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} h(x) dx \right)^{-1}$$

b. Demuestre que $(X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente para (θ_1, θ_2).

4. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *i.i.d.* uniformes en el intervalo $[0, \theta]$ con $\theta > 0$. Sean $X_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n)$ y $X_{(n)} = max(X_1, \ldots, X_n)$.

a. ¿$X_{(1)}$ es ancilar para θ?

b. ¿$X_{(n)}$ es ancilar para θ?

Un estadístico T se dice ancilar para θ si su distribución (función de densidad) no depende de θ.

5. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x;\mu,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & \text{si}\, \mu - \theta \leq x \leq \mu + \theta, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Sean $X_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n)$ y $X_{(n)} = max(X_1, \ldots, X_n)$.

a. Definiendo $T = X_{(n)} - X_{(1)}$. ¿T es ancilar para θ?

b. ¿T es ancilar para μ?

6. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)} \qquad para\, x \geq 0$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.

a. Demuestre que T definido como sigue, es suficiente para θ.

$$T = \Sigma_{i=1}^{n} \ln(1 + X_i)$$

b. Encuentre $E(T), Var(T)$.

7. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad:

$$f(x;\mu) = exp[-(x-\mu)] \qquad para\, x \geq \mu$$

a. Demuestre que $Z_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico suficiente para μ.

b. Demuestre que $Z_{(1)}$ converge en probabilidad a μ cuando $n \to \infty$