



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»
Вариант 4

Преподаватель: Золотаревич В. П.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЛСАУ R22 бак 4.1.1

Факультет: СУиР
Группа: R3341

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Цель работы	2
2	Задание 1	2
2.1	Условие	2
2.2	Выполнение	2
3	Задание 2	4
3.1	Условие	4
3.2	Выполнение	5
4	Задание 3	6
4.1	Условие	6
4.2	Выполнение	7
5	Вывод	8
6	Приложения	9

1 Цель работы

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

2 Задание 1

2.1 Условие

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.

- Построить математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Определить передаточную функцию системы. Дано:

$$n = 3, \quad a_0 = 8, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad b_0 = 12, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 10$$

- Используя блоки “Transfer Fcn” и “State-Space” пакета SIMULINK, осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Схема моделирования иллюстрируется рис. 1, где блок с именем “Transfer Fcn” задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блок “State-Space” – модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме, а блок “State-Space1” – модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме.

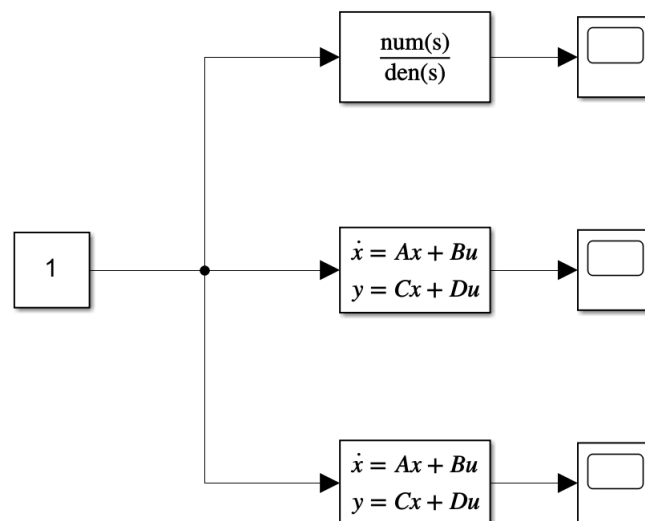


Рис. 1: Схема эксперимента

2.2 Выполнение

Составим уравнение

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 6y^{(1)} + 8y = 10u^{(2)} + u^{(1)} + 12u$$

Сделаем замену $p = d/dt$

$$p^3y + 2p^2y + 6py + 8y = 10p^2u + pu + 12u$$

Вынесем за скобки общие множители y и u

$$y(p^3 + 2p^2 + 6p + 8) = u(10p^2 + p + 12)$$

Найдем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{10p^2 + p + 12}{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}$$

Разложим на систему уравнений с передаточной функцией. Переменная z служит для связи между входом u и выходом y

$$\begin{cases} (p^3 + 2p^2 + 6p + 8)z = u \\ (10p^2 + p + 12)z = y \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [12 \quad 1 \quad 10]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -8x_1 - 6x_2 - 2x_3 + u \\ y = 12x_1 + x_2 + 10x_3 \end{cases}$$

Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_3 + 12u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 + 10u \\ y = x_3 \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 11 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

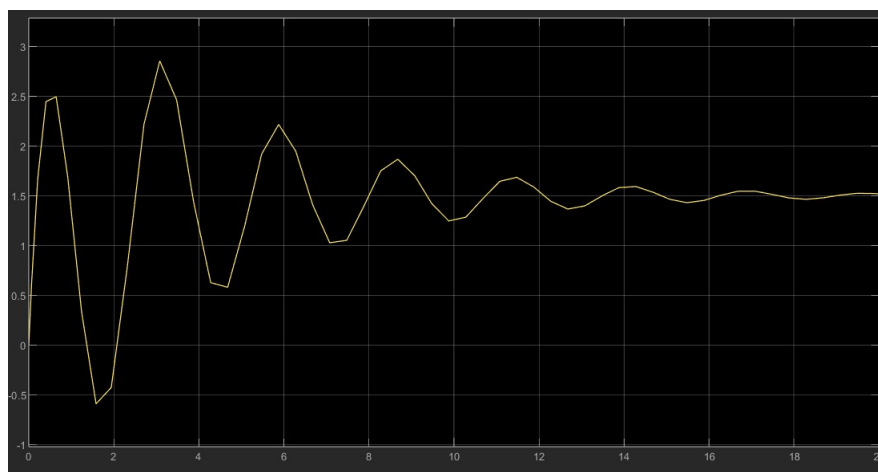


Рис. 2: График передаточной функции $W(p)$

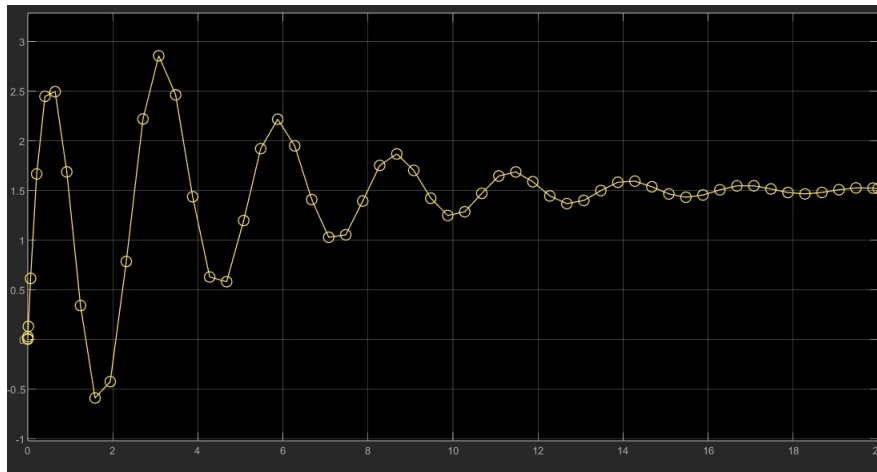


Рис. 3: График канонической управляемой формы

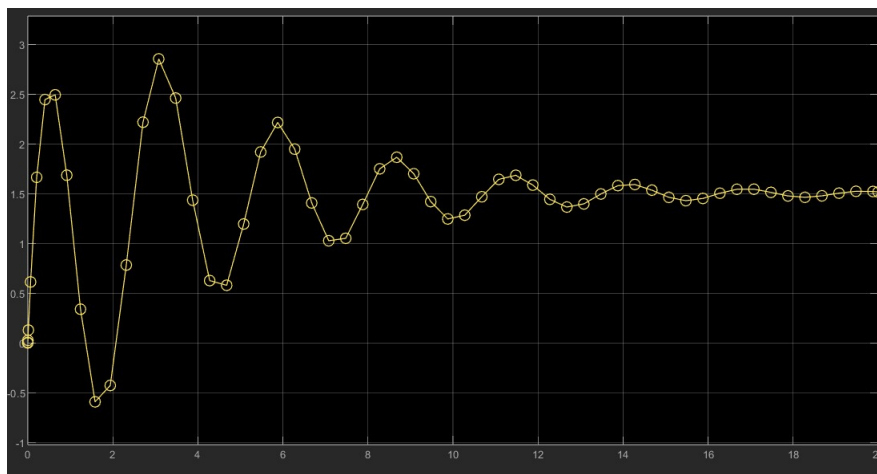


Рис. 4: График канонической наблюдаемой формы

3 Задание 2

3.1 Условие

Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.

- Осуществить расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход. Дано:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 1]$$

- Используя блоки “Transfer Fcn” и “State-Space” пакета SIMULINK, осуществить моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.
- Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

3.2 Выполнение

Найдем передаточную функцию по формуле

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

Проведем расчеты

$$pI - A = p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2p-1}{2} & -1 \\ 15 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2p-1}{2} & -1 \\ 15 & p+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} \begin{bmatrix} 2p+6 & 2 \\ -30 & 2p-1 \end{bmatrix}$$

$$C(pI - A)^{-1} = [5 \quad 1] \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} \begin{bmatrix} 2p+6 & 2 \\ -30 & 2p-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} [10p \quad 2p+9]$$

$$C(pI - A)^{-1}B = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} [10p \quad 2p+9] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2p+9}{2p^2 + 5p + 27}$$

Таким образом,

$$W(p) = \frac{2p+9}{2p^2 + 5p + 27} = \frac{p+4.5}{p^2 + 2.5p + 13.5}$$

Разложение на систему уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (p^2 + 2.5p + 13.5)z = u \\ (p + 4.5)z = y \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13.5 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [4.5 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -13.5x_1 - 2.5x_2 + u \\ y = 4.5x_1 + x_2 \end{cases}$$

Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -13.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -13.5x_2 + 4.5u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2.5x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 12 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

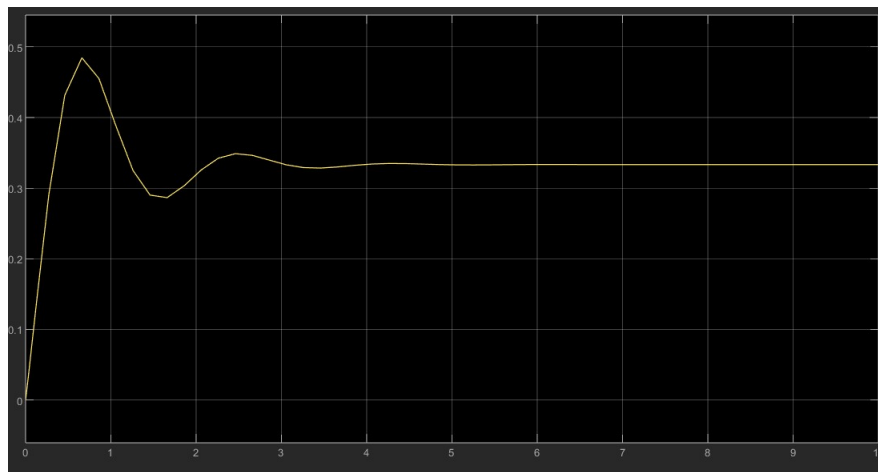
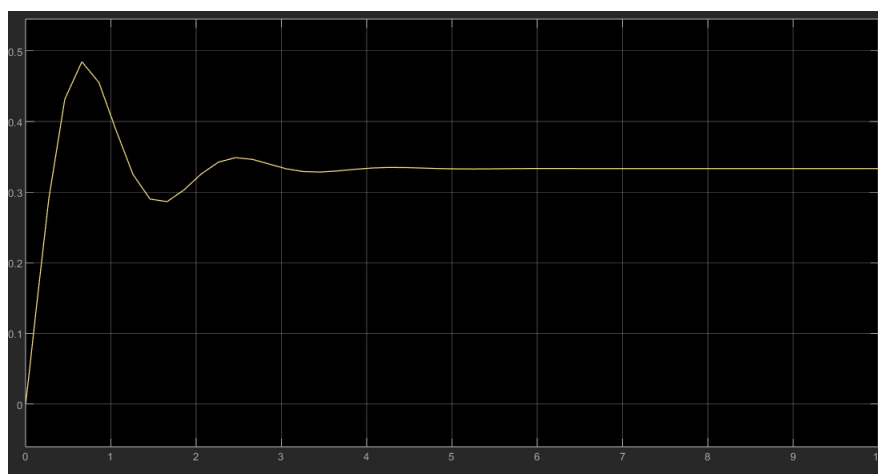
Рис. 5: График передаточной функции $W(p)$ 

Рис. 6: График канонической управляемой формы

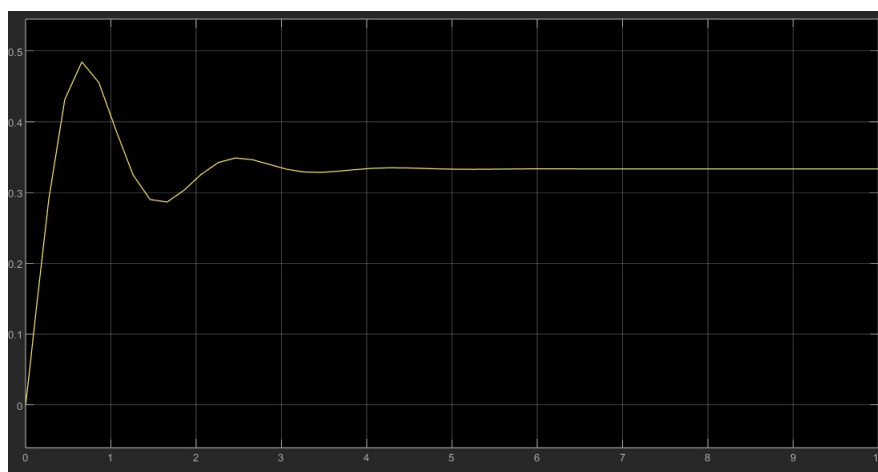


Рис. 7: График канонической наблюдаемой формы

4 Задание 3

4.1 Условие

Замена базиса в пространстве состояний.

- Построить модель, подобную модели из задания 2, если матрица преобразования координат M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Используя блоки “State-Space”, осуществить моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. На экран вывести выходные переменные двух систем. Схема моделирования представлена на рисунке 8.

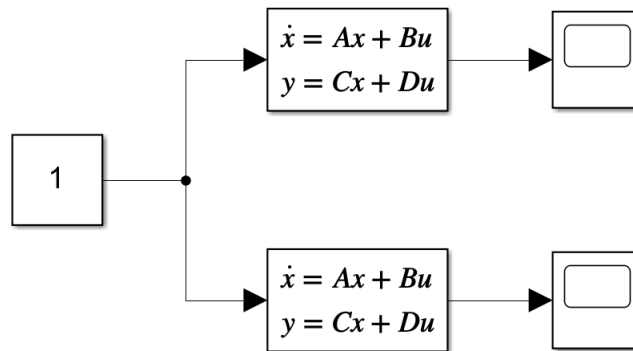


Рис. 8: Схема эксперимента

4.2 Выполнение

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \quad \hat{B} = M^{-1}B, \quad \hat{C} = CM$$

Проведем расчеты

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -32.5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0.25 \\ -120 & -5.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CM = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция остается такой же, как в задании 2

$$W(p) = \frac{p + 4.5}{p^2 + 2.5p + 13.5}$$

Схема моделирования представлена на рис. 8. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 13 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

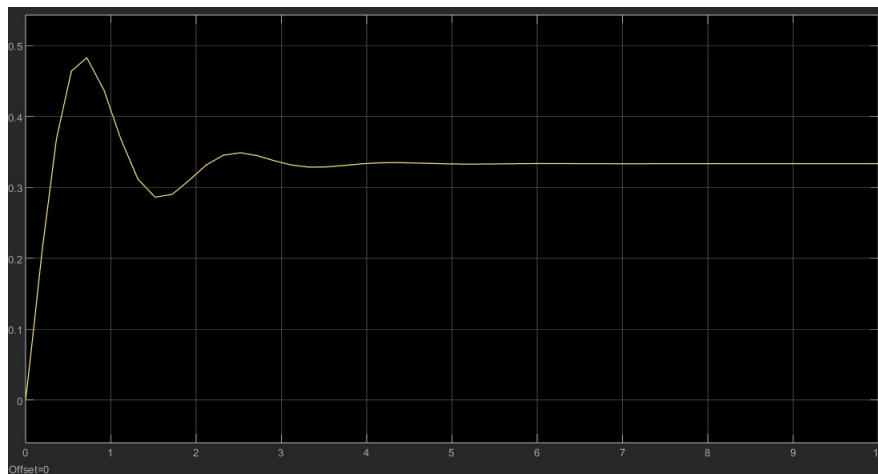


Рис. 9: График исходной системы

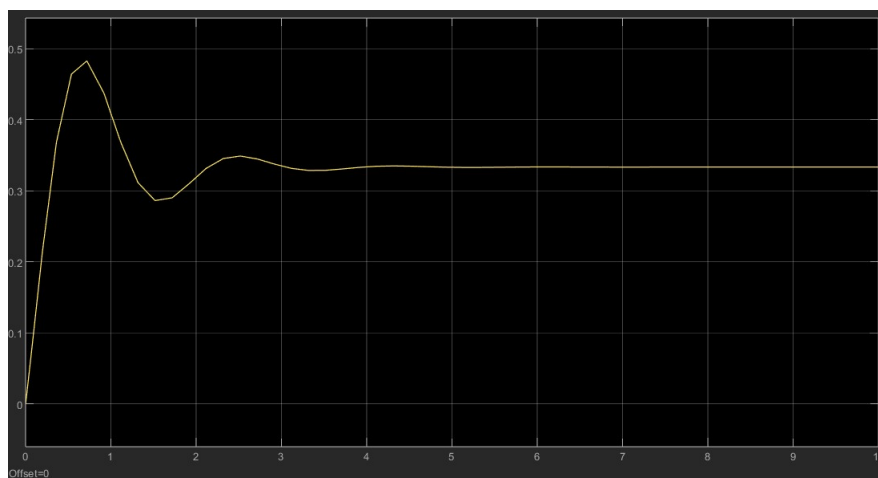


Рис. 10: График преобразованной системы

5 Вывод

Я познакомился с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Использование канонических форм существенно упрощает решение многих практических задач, связанных с анализом и синтезом систем управления.

6 Приложения

The figure shows three screenshots of SIMULINK parameter dialog boxes. The first screenshot (a) is for the 'Transfer Fcn' block, showing fields for numerator coefficients [10 1 12], denominator coefficients [1 2 6 8], and parameter tunability set to 'Auto'. The second screenshot (b) is for the 'State Space' block, showing matrices A, B, C, and D with values: A=[0 1 0; 0 0 1; -8 -6 -2], B=[0; 0; 1], C=[12 1 10], and D=0. The third screenshot (c) is also for the 'State Space' block, showing matrices A, B, C, and D with values: A=[0 0 -8; 1 0 -6; 0 1 -2], B=[12; 1; 10], C=[0 0 1], and D=0. All three dialog boxes have 'OK', 'Cancel', 'Help', and 'Apply' buttons at the bottom.

(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$ (b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы (c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

Рис. 11: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space” для задания 1

The figure shows three screenshots of SIMULINK parameter dialog boxes. The first screenshot (a) is for the 'Transfer Fcn' block, showing fields for numerator coefficients [1 4.5], denominator coefficients [1 2.5 13.5], and parameter tunability set to 'Auto'. The second screenshot (b) is for the 'State Space' block, showing matrices A, B, C, and D with values: A=[0 1; -13.5 -2.5], B=[0; 1], C=[4.5 1], and D=0. The third screenshot (c) is also for the 'State Space' block, showing matrices A, B, C, and D with values: A=[0 -13.5; 1 -2.5], B=[4.5; 1], C=[0 1], and D=0. All three dialog boxes have 'OK', 'Cancel', 'Help', and 'Apply' buttons at the bottom.

(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$ (b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы (c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

Рис. 12: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space” для задания 2

State Space

State-space model:
 $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
'Optimized': Tunability is optimized for performance.
'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A:
[0.5 1; -15 -3]

B:
[0; 1]

C:
[5 1]

D:
0

Initial conditions:
0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

State Space

State-space model:
 $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
'Optimized': Tunability is optimized for performance.
'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A:
[3 0.25; -120 -5.5]

B:
[0; 2]

C:
[15 0.5]

D:
0

Initial conditions:
0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

(a) Параметры SIMULINK для исходной системы (см. задание 2)

(b) Параметры SIMULINK для преобразованной системы

Рис. 13: Параметры SIMULINK для “State-Space” для задания 3