Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
# ПРЕДМЕТ «ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
# ТЕМА «АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА»

Вариант 4


Преподаватель: Золотаревич В. П.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЛСАУ R22 бак 4.1.1

Факультет: СУиР
Группа: R3341


Санкт-Петербург
2024

# Содержание

# 1 Цель работы

Изучить связь характера переходной характеристики, динамических свойств системы с размещением на комплексной плоскости нулей и полюсов.

# 2 Задание 1

## 2.1 Условие

По заданным значениям постоянных

$$n = 4, \quad t_\Pi = 1.5, \quad k = 2.5,$$

определите параметры системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y^{(1)} + a_0 y = bg$$

с характеристическим полиномом Баттерворта и биномиальным полиномом. Для каждого случая рассчитайте корни характеристического полинома

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

и оцените время переходного процесса по формуле

$$t_\Pi \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05}$$

Составьте схему моделирования системы и постройте переходные характеристики, соответствующие двум типам распределения корней характеристического уравнения.

## 2.2 Выполнение

**Синтез системы с использованием полинома Баттерворта.** Полином Баттерворта в общем виде записывается как

$$a(s) = \prod_{i=1}^{n} \left( s - \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i-1}{2n}\pi\right)} \right) = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + ... + \alpha_1 \omega^{n-1} s + \omega^n$$

По графику нормированных переходных функций определим значение $t^*_\Pi \Rightarrow t^*_\Pi \approx 6.8$

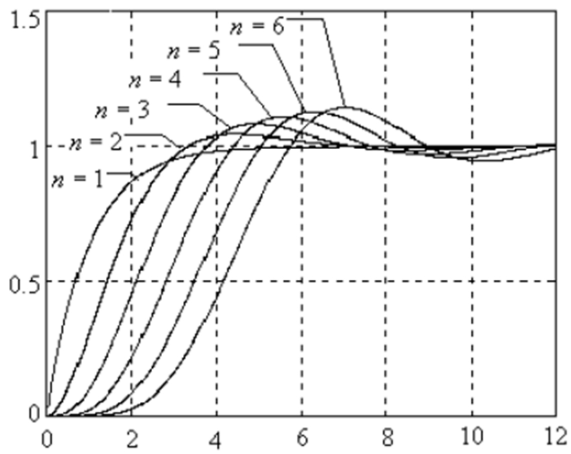



Рис. 1: Нормированные переходные характеристики системы с характеристическим полиномом Баттерворта

Найдем среднегеометрический корень $\omega_0$

$$\omega_0 = \sqrt[n]{|s_1 s_2 ... s_n|} = \sqrt[n]{a_0} = \frac{t_\Pi^*}{t_\Pi} = \frac{6.8}{1.5} \approx 4.53$$

Коэффициенты полинома выражаются как

$$a_j = \alpha_j \cdot \omega^{n-j}$$

Для случая с $n = 4$ (см. методическое пособие)

$$\alpha_1 = 2.613$$
$$\alpha_2 = 3.414$$
$$\alpha_3 = 2.613$$

Полином Баттерворта для системы порядка $n = 4$ имеет вид ($\alpha_3$ самый левый не единичный коэффициент, $\alpha_1$ самый правый)

$$s^4 + 2.613\omega s^3 + 3.414\omega^2 s^2 + 2.613\omega^3 s + \omega^4$$

Подставим найденный $\omega_0$, чтобы получить коэффициенты $a_j$. Полином Баттерворта для нашего случая будет иметь вид

$$s^4 + 11.83689s^3 + 70.0583526s^2 + 242.903636s + 421.1073368$$

Найдем коэффициент $b$. Из полинома Баттерворта имеем коэффициент

$$a_0 = 421.1073368,$$

тогда

$$b = k \cdot \omega^4 = k \cdot a_0 = 2.5 \cdot 421.1073368 = 1052.768342$$

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 11.83689y^{(3)} + 70.0583526y^{(2)} + 242.903636y^{(1)} + 421.1073368 = 1052.768342g$$

Рассчитаем корни полинома по формуле

$$s = \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i-1}{2n}\pi\right)}, \ i \in [1, 2n]$$

С учетом $\omega_0$ получим

$$\begin{aligned} s_{1,4} &= -1.7336 \pm 4.1852i \\ s_{5,8} &= \ \ \ 1.7336 \mp 4.1852i \\ s_{2,3} &= -4.1852 \pm 1.7336i \\ s_{6,7} &= \ \ \ 4.1852 \mp 1.7336i \end{aligned}$$

Рассчитаем время переходного процесса. В качестве $\eta$ берется абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня, то есть

$$\eta = |\Re(s_{1,4})| = 1.7336$$

$$t_\Pi \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3}{1.7336} \approx 1.7305029995$$

**Синтез системы с использованием полинома Ньютона.** Биномиальный полином в общем виде записывается как

$$\alpha(s) = (s + \omega)^n = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + ... + \alpha_1 \omega^{n-1} s + \omega^n$$

По графику нормированных переходных функций определим значение $t_{\Pi}^* \Rightarrow t_{\Pi}^* \approx 7.8$

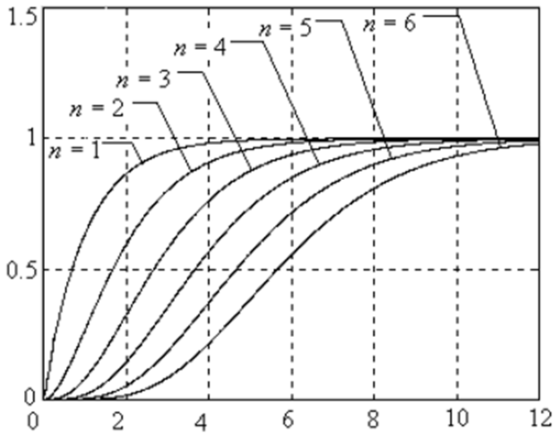



Рис. 2: Нормированные переходные характеристики системы с биноминальным характеристическим полиномом

Найдем среднегеометрический корень $\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{t_{\Pi}^*}{t_{\Pi}} = \frac{7.8}{1.5} = 5.2$$

Коэффициенты полинома выражаются как

$$a_j = \alpha_j \cdot \omega^{n-j}$$

Для случая с $n = 4$ (см. методическое пособие)

$$\alpha_1 = 4$$
$$\alpha_2 = 6$$
$$\alpha_3 = 4$$

Биномиальный полином для системы порядка $n = 4$ имеет вид ($\alpha_3$ самый левый не единичный коэффициент, $\alpha_1$ самый правый)

$$s^4 + 4\omega s^3 + 6\omega^2 s^2 + 4\omega^3 s + \omega^4$$

Подставим найденный $\omega_0$, чтобы получить коэффициенты $a_j$. Биномиальный полином для нашего случая будет иметь вид

$$s^4 + 20.8s^3 + 162.24s^2 + 562.432s + 731.1616$$

Найдем коэффициент $b$. Из биномиального полинома имеем коэффициент

$$a_0 = 731.1616,$$

тогда

$$b = k \cdot \omega^4 = k \cdot a_0 = 2.5 \cdot 731.1616 = 1827.904$$

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 1827.904g$$

При биномиальном распределении Ньютона $n$ комплексных чисел $s_i$ принимаются равными и вещественными, т.е. $s_i = -\omega$. Таким образом,

$$s_i = -\omega_0 = -5.2$$

Рассчитаем время переходного процесса

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3}{5.2} \approx 0.5769230769$$

Схема моделирования двух полиномов представлена на рисунке 3.

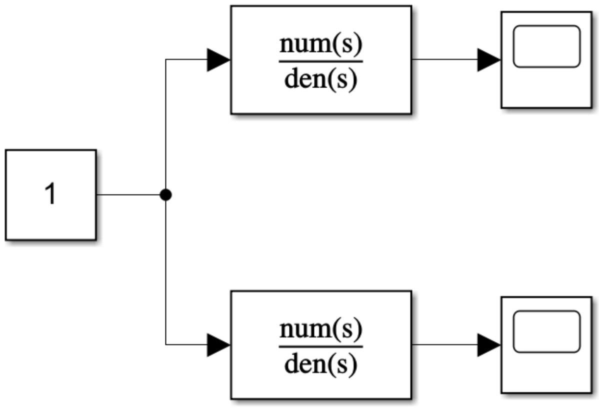
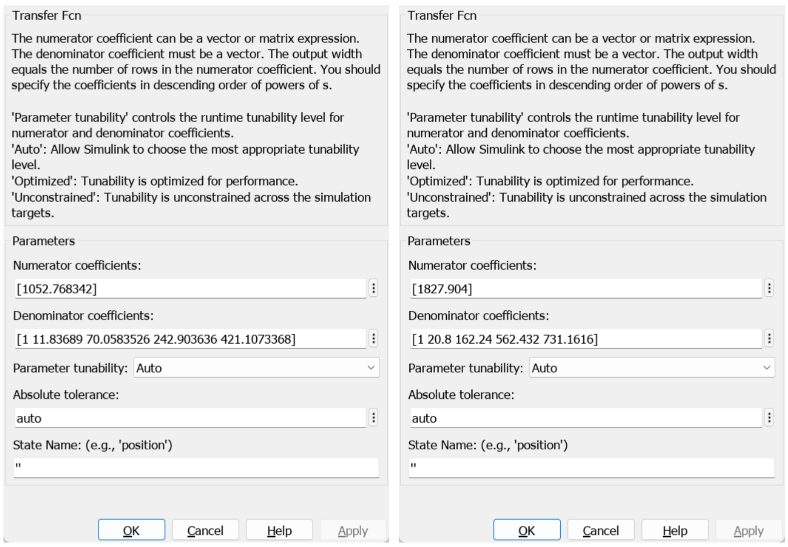



Рис. 3: Схема эксперимента

Параметры блоков “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 4. Построим графики.




(a) Параметры SIMULINK для полинома Баттерворта

(b) Параметры SIMULINK для полинома Ньютона

Рис. 4: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn”

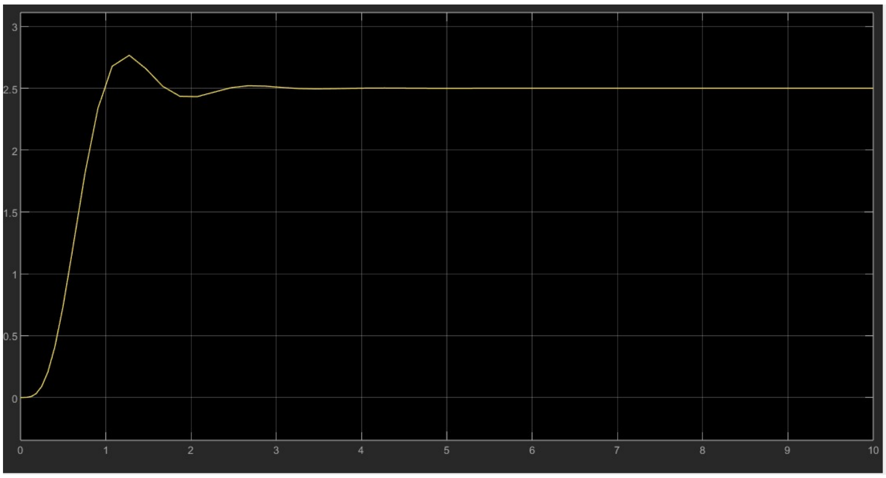


Рис. 5: График переходной характеристики системы: полином Баттерворта

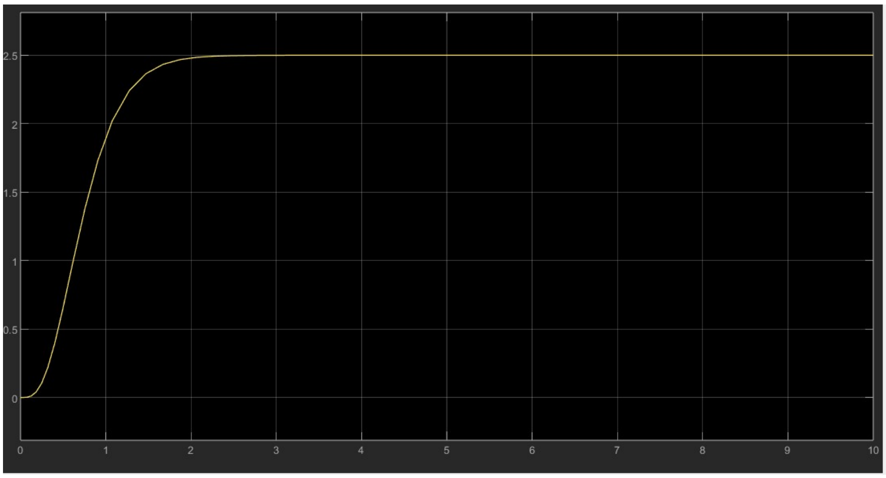


Рис. 6: График переходной характеристики системы: полином Ньютона

# 3 Задание 2

## 3.1 Условие

Для каждого набора параметров

$$\text{A: } b_0 = b, \quad b_1 = 2.5$$

$$\text{B: } b_0 = b, \quad b_1 = 0.5, \quad b_2 = 0.25, \quad b_3 = 1.25, \quad b_4 = 2$$

постройте переходные характеристики системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m g^{(m)} + ... + b_0 g$$

с коэффициентамиа $a_0, ..., a_{n-1}$ и коэффициентом $b$, рассчитанными в первом задании для биномиального распределения корней характеристического уравнения.

## 3.2 Выполнение

**Пункт А.** Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 2.5g^{(1)} + 1827.904g$$

Схема моделирования представлена на рисунке 7.

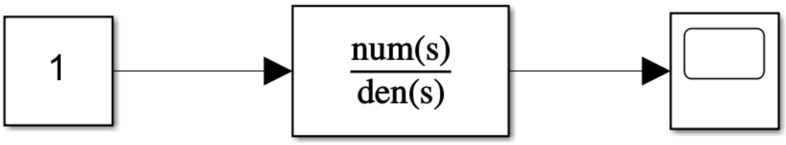



Рис. 7: Схема эксперимента

Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 8. Построим графики.

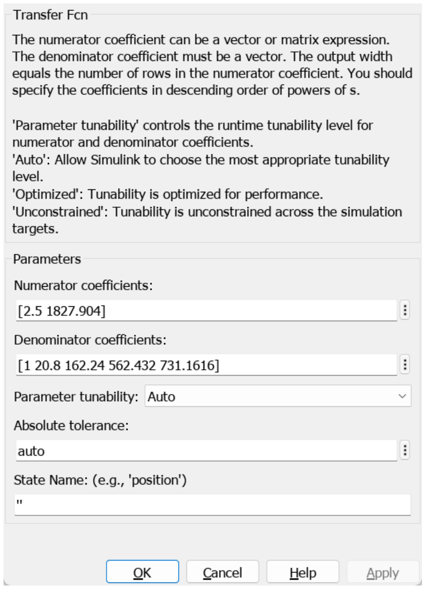



Рис. 8: Параметры SIMULINK переходной хар-ки системы

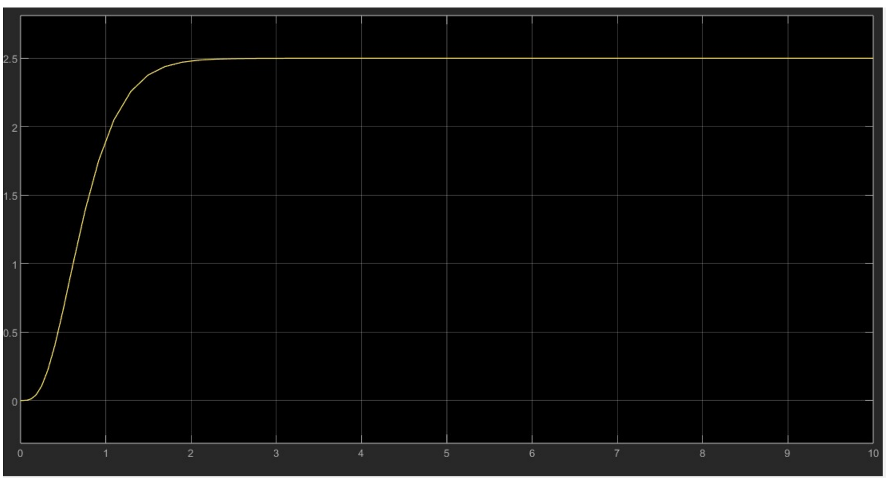



Рис. 9: График переходной характеристики системы

**Пункт B.** Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)}+20.8y^{(3)}+162.24y^{(2)}+562.432y^{(1)}+731.1616 = 2g^{(4)}+1.25g^{(3)}+0.25g^{(2)}+0.5g^{(1)}+1827.904g$$

Схема моделирования аналогична пункту А и представлена на рисунке 7. Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 10. Построим графики.

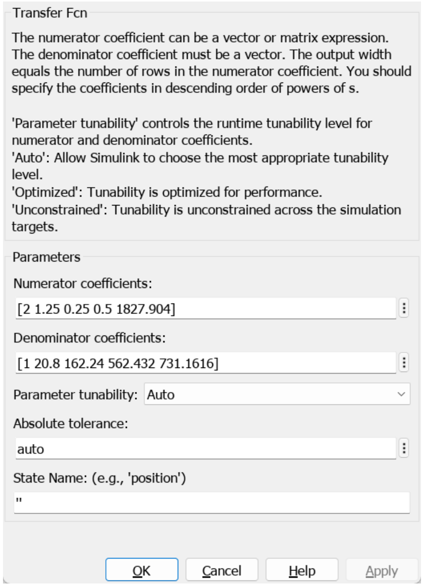



Рис. 10: Параметры SIMULINK переходной хар-ки системы

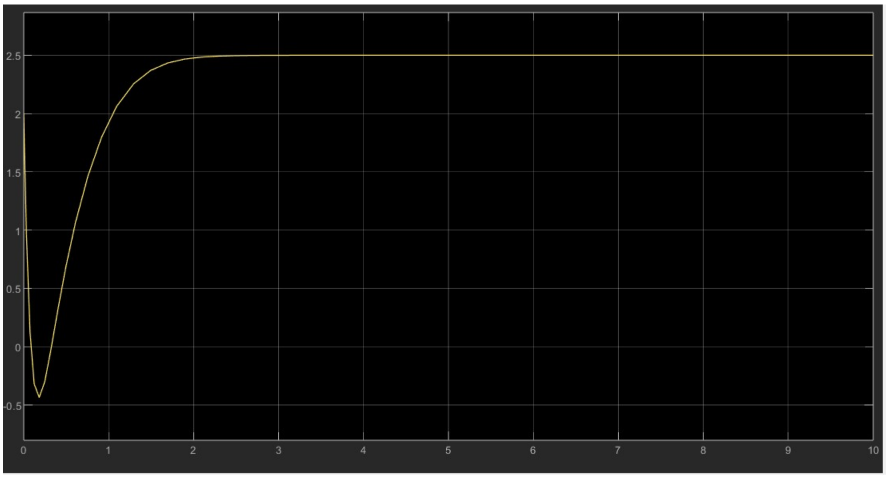



Рис. 11: График переходной характеристики системы

# 4 Задание 3

## 4.1 Условие

Для набора параметров

$$b_0 = 2.25, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2$$

и внешнего воздействия

$$g(t) = \sin(1.5t)$$

постройте реакцию системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m g^{(m)} + ... + b_0 g$$

с нулевыми начальными условиями и коэффициентами $a_0, ..., a_{n-1}$, рассчитанными в первом задании для биномиального распределения корней характеристического уравнения. На экран монитора выводить графики $y(t), g(t)$.

## 4.2 Выполнение

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 2g^{(2)} + 2.25$$

Схема моделирования представлена на рисунке 12.

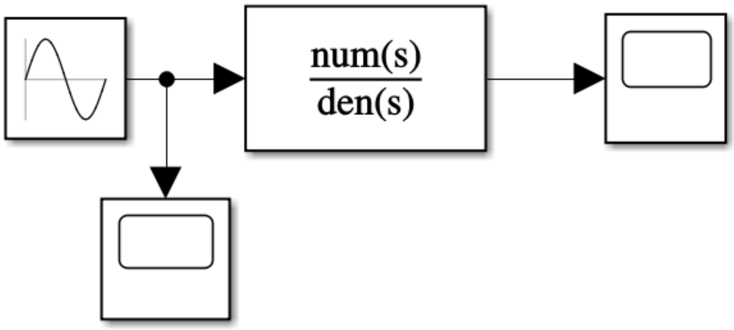
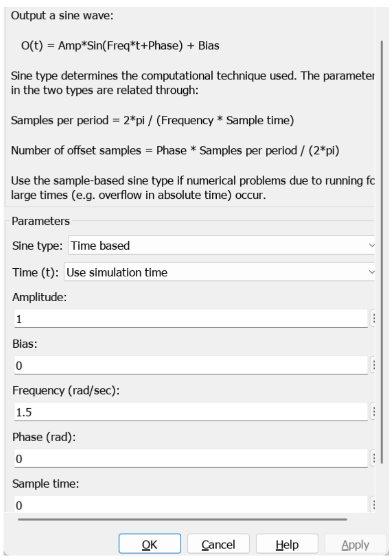
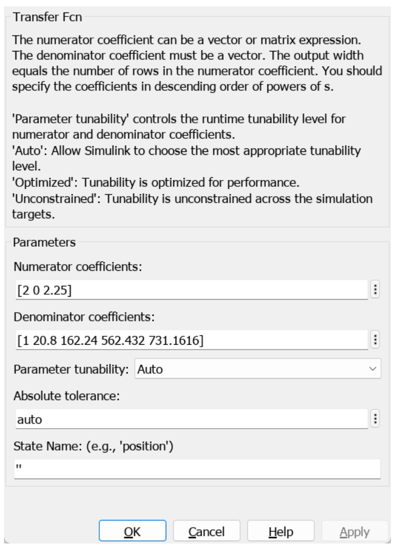



Рис. 12: Схема эксперимента

Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 13. Построим графики.




(a) Параметры SIMULINK для входного сигнала $g(t)$




(b) Параметры SIMULINK для реакции системы $y(t)$

Рис. 13: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn”

Рис. 14: График входного воздействия $g(t)$

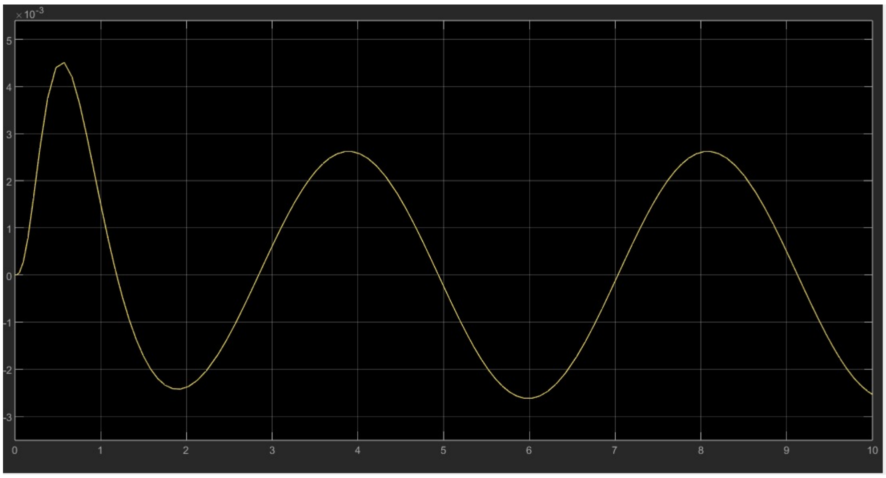


Рис. 15: График реакции системы $y(t)$

# 5 Вывод

Я изучил связь характера переходной характеристики, динамических свойств системы с размещением на комплексной плоскости нулей и полюсов.

На основе заданных параметров качества системы возможно выполнить её синтез, применяя стандартные переходные функции. Динамические характеристики системы находятся в прямой зависимости от полюсов и нулей её передаточной функции.