Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Вариант 4

Преподаватель: Золотаревич В. П.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЛСАУ R22 бак 4.1.1

Факультет: СУиР
Группа: R3341

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Цель работы **2**

2 Задание 1 **2**

2.1 Условие 2

2.2 Выполнение 2

3 Задание 2 **4**

3.1 Условие 4

3.2 Выполнение 5

4 Задание 3 **6**

4.1 Условие 6

4.2 Выполнение 7

5 Вывод **8**

6 Приложения **9**

1 Цель работы

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

2 Задание 1

2.1 Условие

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.

- Построить математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Определить передаточную функцию системы. Дано:

$$n = 3, \quad a_0 = 8, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad b_0 = 12, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 10$$

- Используя блоки "Transfer Fcn" и "State-Space" пакета SIMULINK, осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Схема моделирования иллюстрируется рис. 1, где блок с именем "Transfer Fcn" задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блок "State-Space" – модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме, а блок "State-Space1" – модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме.

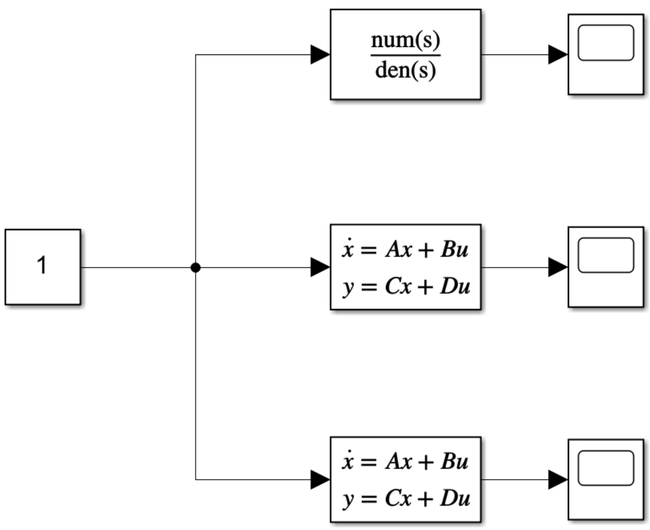


Рис. 1: Схема эксперимента

2.2 Выполнение

Составим уравнение

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 6y^{(1)} + 8y = 10u^{(2)} + u^{(1)} + 12u$$

Сделаем замену $p = d/dt$

$$p^3y + 2p^2y + 6py + 8y = 10p^2u + pu + 12u$$

Вынесем за скобки общие множители y и u

$$y(p^3 + 2p^2 + 6p + 8) = u(10p^2 + p + 12)$$

Найдем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{10p^2 + p + 12}{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}$$

Разложим на систему уравнений с передаточной функцией. Переменная z служит для связи между входом u и выходом y

$$\begin{cases} (p^3 + 2p^2 + 6p + 8)z = u \\ (10p^2 + p + 12)z = y \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -8x_1 - 6x_2 - 2x_3 + u \\ y = 12x_1 + x_2 + 10x_3 \end{cases}$$

Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_3 + 12u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 + 10u \\ y = x_3 \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 11 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

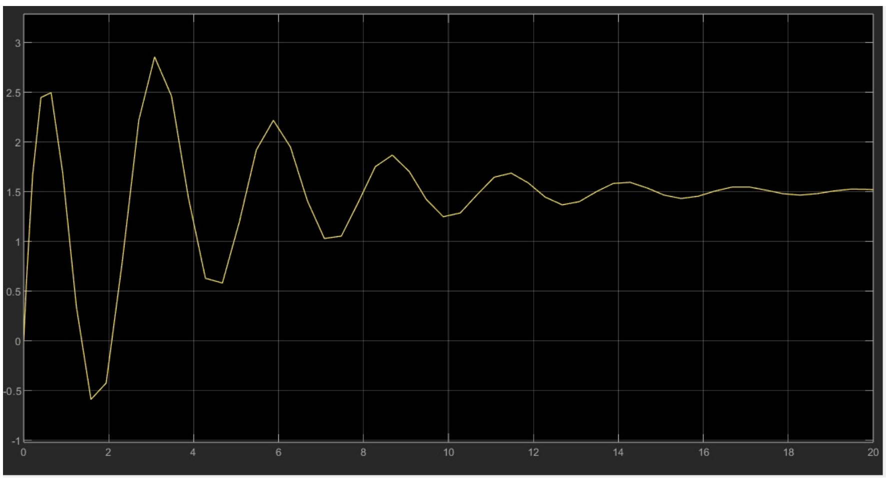


Рис. 2: График передаточной функции $W(p)$

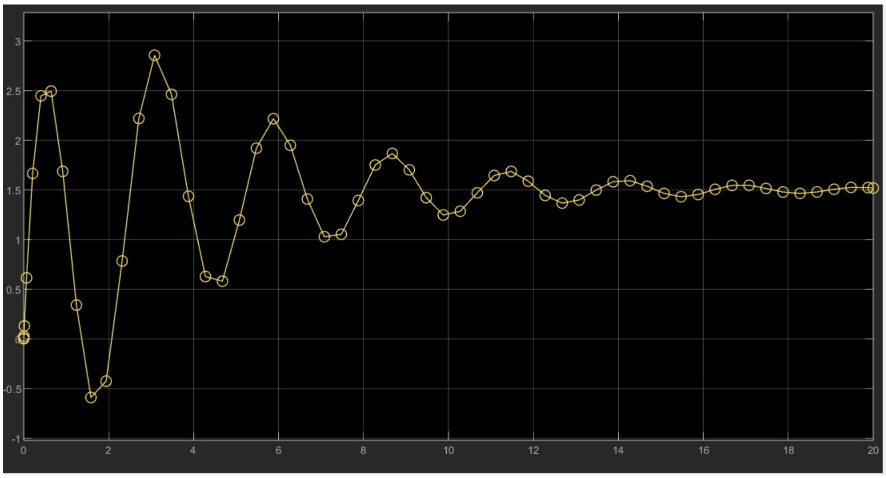


Рис. 3: График канонической управляемой формы

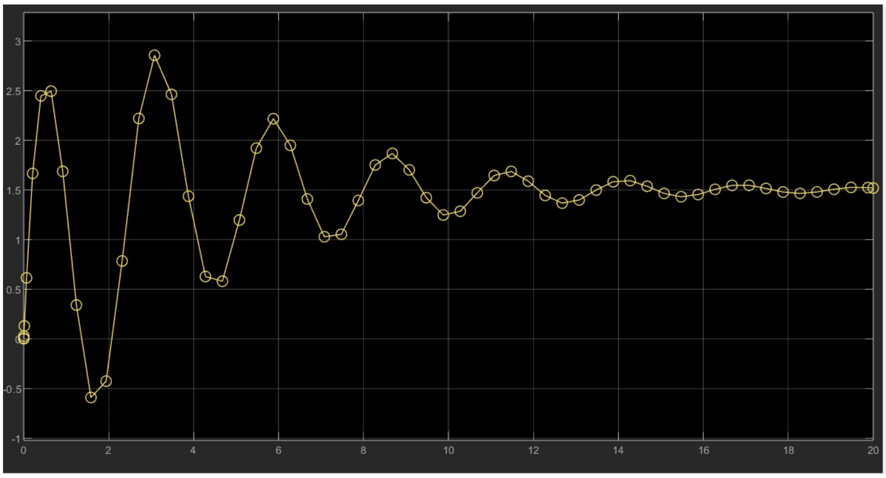


Рис. 4: График канонической наблюдаемой формы

3 Задание 2

3.1 Условие

Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.

- Осуществить расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход. Дано:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Используя блоки “Transfer Fcn” и “State-Space” пакета SIMULINK, осуществить моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.
- Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

3.2 Выполнение

Найдем передаточную функцию по формуле

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

Проведем расчеты

$$pI - A = p\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5 & 1\\-15 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2p-1}{2} & -1\\15 & p+3\end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{2p-1}{2} & -1\\15 & p+3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2p^2+5p+27}\begin{bmatrix}2p+6 & 2\\-30 & 2p-1\end{bmatrix}$$

$$C(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2p^2+5p+27}\begin{bmatrix}2p+6 & 2\\-30 & 2p-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2p^2+5p+27}\begin{bmatrix}10p & 2p+9\end{bmatrix}$$

$$C(pI - A)^{-1}B = \frac{1}{2p^2+5p+27}\begin{bmatrix}10p & 2p+9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{2p+9}{2p^2+5p+27}$$

Таким образом,

$$W(p) = \frac{2p+9}{2p^2+5p+27} = \frac{p+4.5}{p^2+2.5p+13.5}$$

Разложение на систему уравнений имеет вид

$$\begin{cases}(p^2+2.5p+13.5)z = u\\(p+4.5)z = y\end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\-13.5 & -2.5\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix}4.5 & 1\end{bmatrix}$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\\dot{x}_2 = -13.5x_1 - 2.5x_2 + u\\y = 4.5x_1 + x_2\end{cases}$$

Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix}0 & -13.5\\1 & -2.5\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}4.5\\1\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -13.5x_2 + 4.5u\\\dot{x}_2 = x_1 - 2.5x_2 + u\\y = x_2\end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 12 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

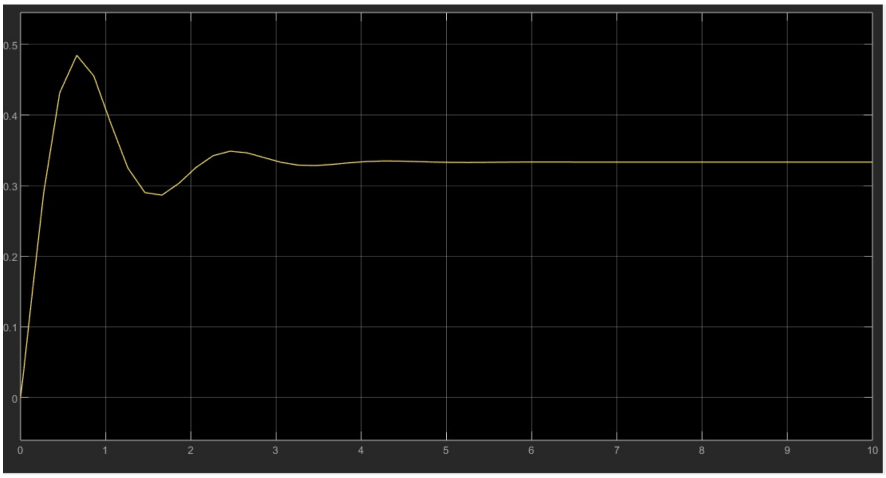


Рис. 5: График передаточной функции $W(p)$

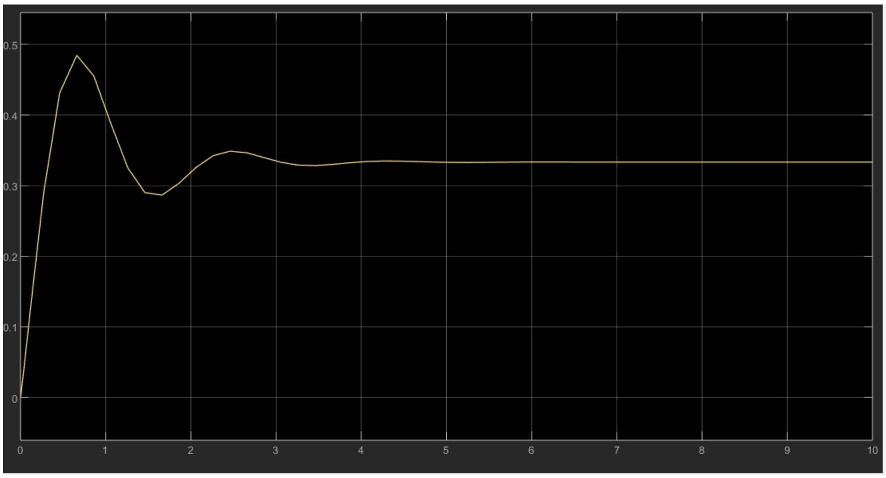


Рис. 6: График канонической управляемой формы

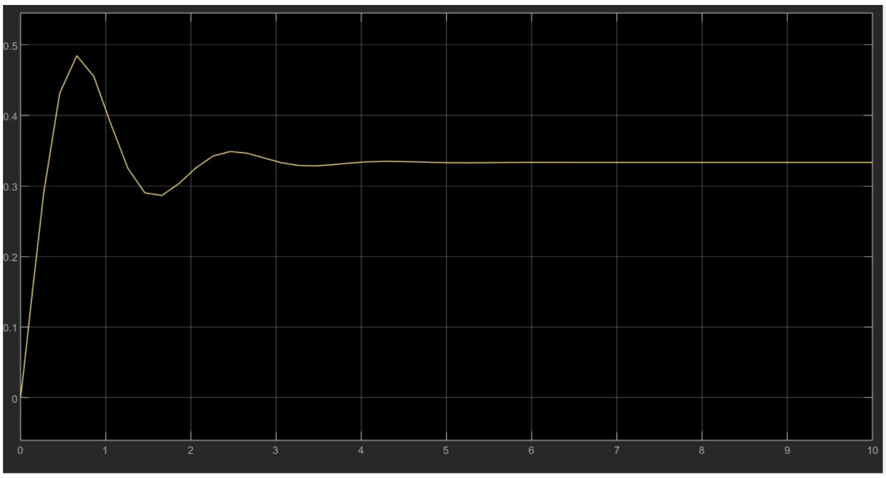


Рис. 7: График канонической наблюдаемой формы

4 Задание 3

4.1 Условие

Замена базиса в пространстве состояний.

- Построить модель, подобную модели из задания 2, если матрица преобразования координат M имеет вид
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$
- Используя блоки "State-Space", осуществить моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. На экран вывести выходные переменные двух систем. Схема моделирования представлена на рисунке 8.

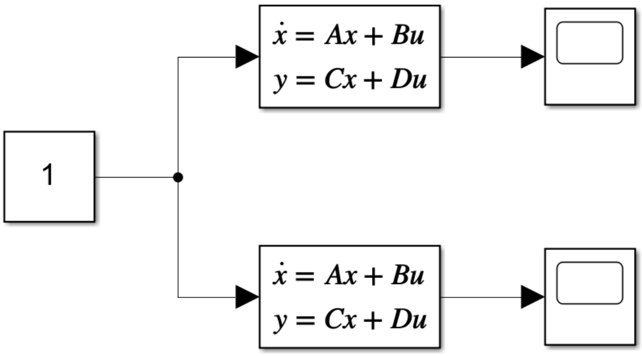


Рис. 8: Схема эксперимента

4.2 Выполнение

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \quad \hat{B} = M^{-1}B, \quad \hat{C} = CM$$

Проведем расчеты

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -32.5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0.25 \\ -120 & -5.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CM = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция остается такой же, как в задании 2

$$W(p) = \frac{p + 4.5}{p^2 + 2.5p + 13.5}$$

Схема моделирования представлена на рис. 8. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 13 под заголовком «Приложения». Выведем графики.

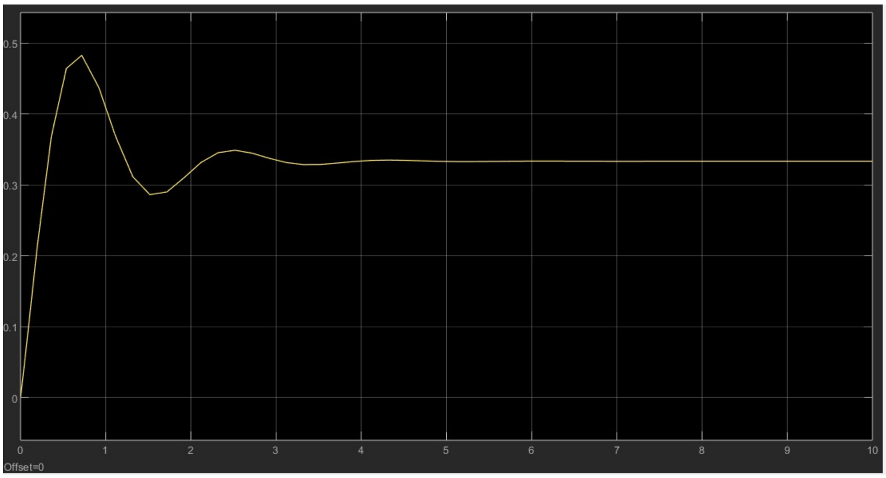


Рис. 9: График исходной системы

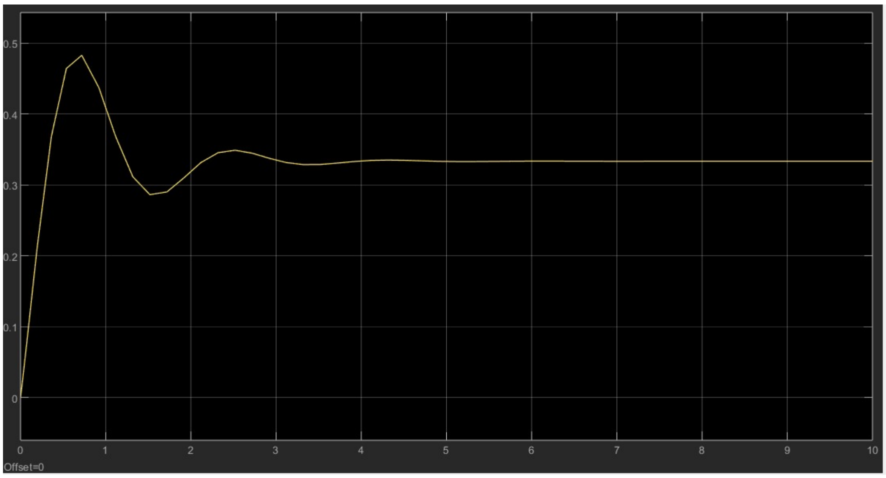


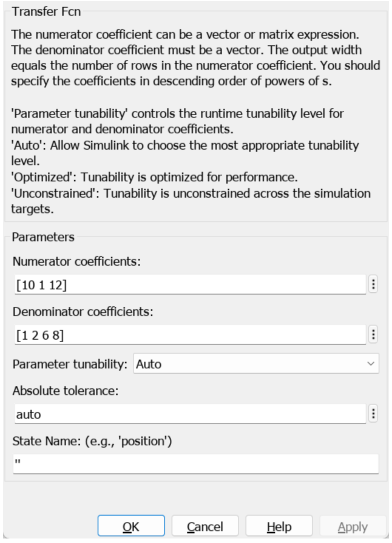
Рис. 10: График преобразованной системы

5 Вывод

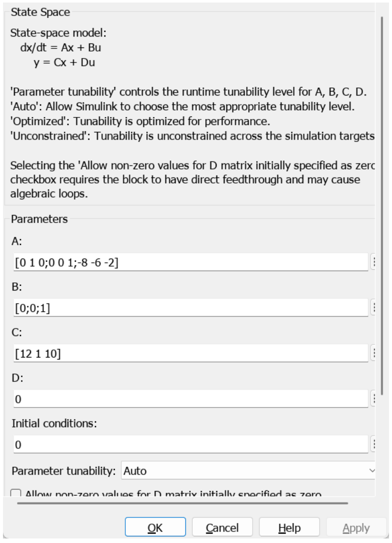
Я познакомился с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Использование канонических форм существенно упрощает решение многих практических задач, связанных с анализом и синтезом систем управления.

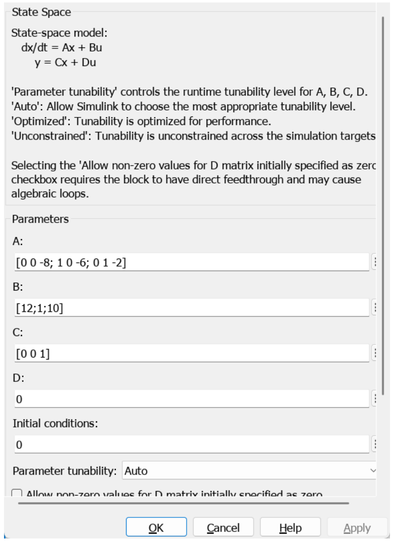
6 Приложения



(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$

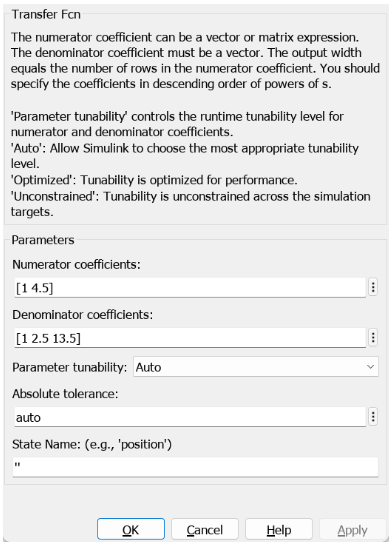


(b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы

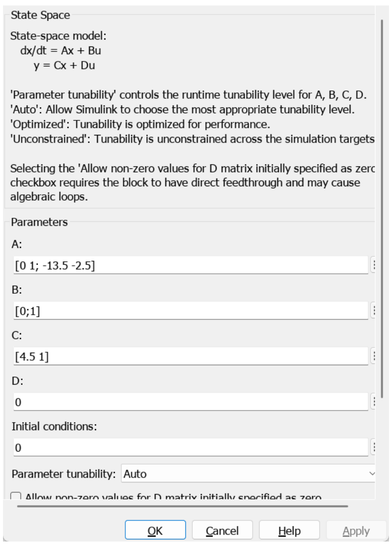


(c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

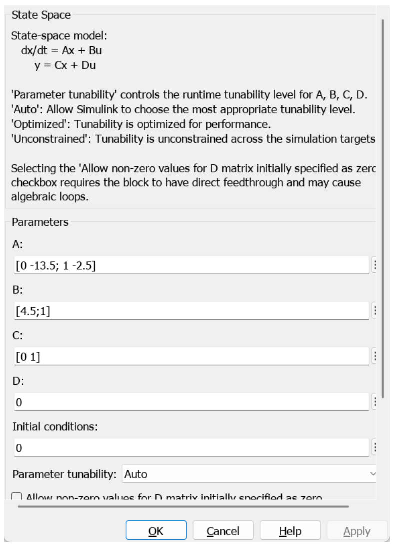
Рис. 11: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space” для задания 1



(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$

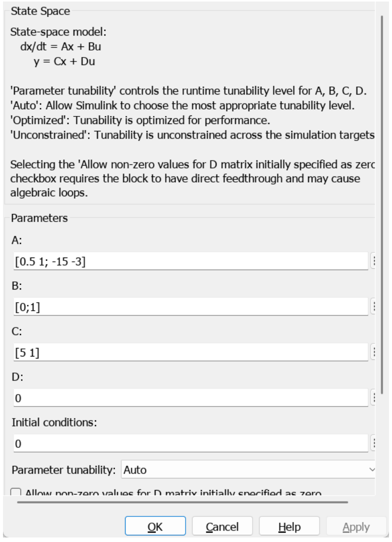


(b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы

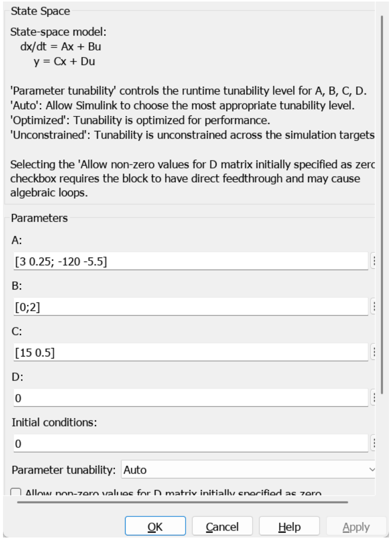


(c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

Рис. 12: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space” для задания 2



(a) Параметры SIMULINK для исходной системы (см. задание 2)



(b) Параметры SIMULINK для преобразованной системы

Рис. 13: Параметры SIMULINK для “State-Space” для задания 3