



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»
Вариант 4

Преподаватель: Золотаревич В. П.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЛСАУ R22 бак 4.1.1

Факультет: СУиР
Группа: R3341

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Цель работы	2
2	Задание 1	2
2.1	Условие	2
2.2	Выполнение	2
3	Задание 2	5
3.1	Условие	5
3.2	Выполнение	5
4	Задание 3	7
4.1	Условие	7
4.2	Выполнение	8
5	Вывод	10

1 Цель работы

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

2 Задание 1

2.1 Условие

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.

- Построить математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Определить передаточную функцию системы. Дано:

$$n = 3, \quad a_0 = 8, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad b_0 = 12, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 10$$

- Используя блоки “Transfer Fcn” и “State-Space” пакета SIMULINK, осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Схема моделирования иллюстрируется рис. 1, где блок с именем “Transfer Fcn” задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блок “State-Space” – модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме, а блок “State-Space1” – модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме.

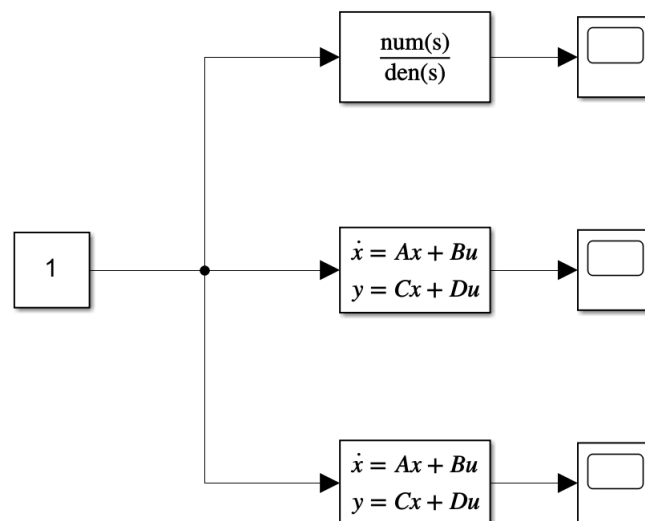


Рис. 1: Схема эксперимента

2.2 Выполнение

Составим уравнение

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 6y^{(1)} + 8y = 10u^{(2)} + u^{(1)} + 12u$$

Сделаем замену $p = d/dt$

$$p^3 y + 2p^2 y + 6p y + 8y = 10p^2 u + p u + 12u$$

Вынесем за скобки общие множители y и u

$$y(p^3 + 2p^2 + 6p + 8) = u(10p^2 + p + 12)$$

Найдем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{10p^2 + p + 12}{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}$$

Разложим на систему уравнений с передаточной функцией. Переменная z служит для связи между входом u и выходом y

$$\begin{cases} (p^3 + 2p^2 + 6p + 8)z = u \\ (10p^2 + p + 12)z = y \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [12 \quad 1 \quad 10]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -8x_1 - 6x_2 - 2x_3 + u \\ y = 12x_1 + x_2 + 10x_3 \end{cases}$$

Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_3 + 12u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 + 10u \\ y = x_3 \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 2. Выведем графики.

Transfer Fcn

The numerator coefficient can be a vector or matrix expression. The denominator coefficient must be a vector. The output width equals the number of rows in the numerator coefficient. You should specify the coefficients in descending order of powers of s.

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for numerator and denominator coefficients.
 'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
 'Optimized': Tunability is optimized for performance.
 'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets.

Parameters

Numerator coefficients:
[10 1 12]

Denominator coefficients:
[1 2 6 8]

Parameter tunability: Auto

Absolute tolerance:
auto

State Name: (e.g., 'position')
"

OK Cancel Help Apply

State Space

State-space model:
 $\dot{x}/dt = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
 'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
 'Optimized': Tunability is optimized for performance.
 'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A:
[0 1 0; 0 0 1; -8 -6 -2]

B:
[0; 0; 1]

C:
[12 1 10]

D:
0

Initial conditions:
0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

State Space

State-space model:
 $\dot{x}/dt = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
 'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
 'Optimized': Tunability is optimized for performance.
 'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A:
[0 0 -8; 1 0 -6; 0 1 -2]

B:
[12; 1; 10]

C:
[0 0 1]

D:
0

Initial conditions:
0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$ (b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы (c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

Рис. 2: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space”

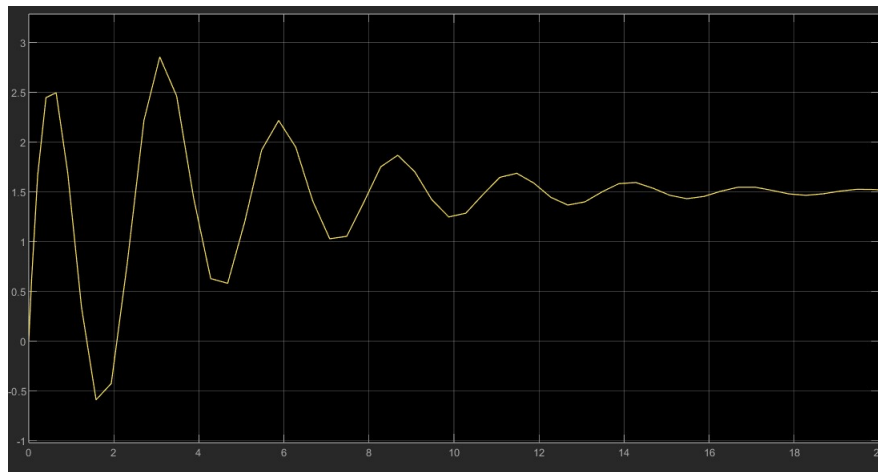


Рис. 3: График передаточной функции $W(p)$

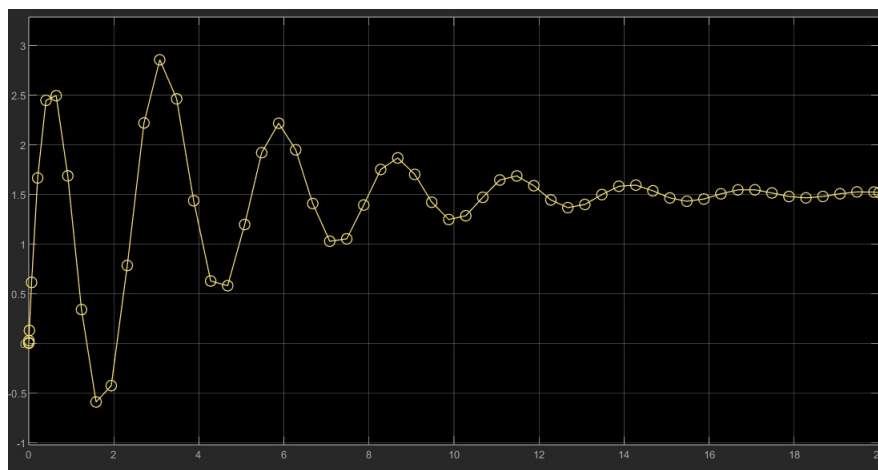


Рис. 4: График канонической управляемой формы

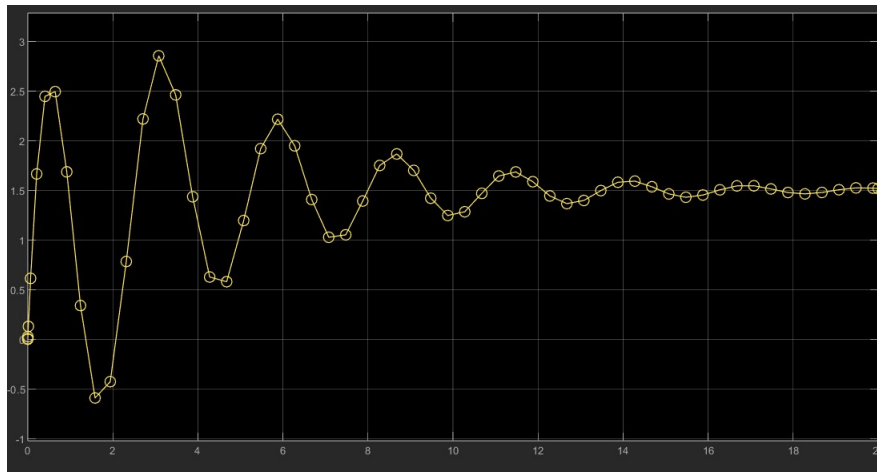


Рис. 5: График канонической наблюдаемой формы

3 Задание 2

3.1 Условие

Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.

- Осуществить расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход. Дано:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 1]$$

- Используя блоки “Transfer Fcn” и “State-Space” пакета SIMULINK, осуществить моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях
- Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

3.2 Выполнение

Найдем передаточную функцию по формуле

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

Проведем расчеты

$$pI - A = p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2p-1}{2} & -1 \\ 15 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2p-1}{2} & -1 \\ 15 & p+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} \begin{bmatrix} 2p+6 & 2 \\ -30 & 2p-1 \end{bmatrix}$$

$$C(pI - A)^{-1} = [5 \quad 1] \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} \begin{bmatrix} 2p+6 & 2 \\ -30 & 2p-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} [10p \quad 2p+9]$$

$$C(pI - A)^{-1}B = \frac{1}{2p^2 + 5p + 27} [10p \quad 2p+9] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2p+9}{2p^2 + 5p + 27}$$

Таким образом,

$$W(p) = \frac{2p + 9}{2p^2 + 5p + 27} = \frac{p + 4.5}{p^2 + 2.5p + 13.5}$$

Разложение на систему уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (p^2 + 2.5p + 13.5)z = u \\ (p + 4.5)z = y \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13.5 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [4.5 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -13.5x_1 - 2.5x_2 + u \\ y = 4.5x_1 + x_2 \end{cases}$$

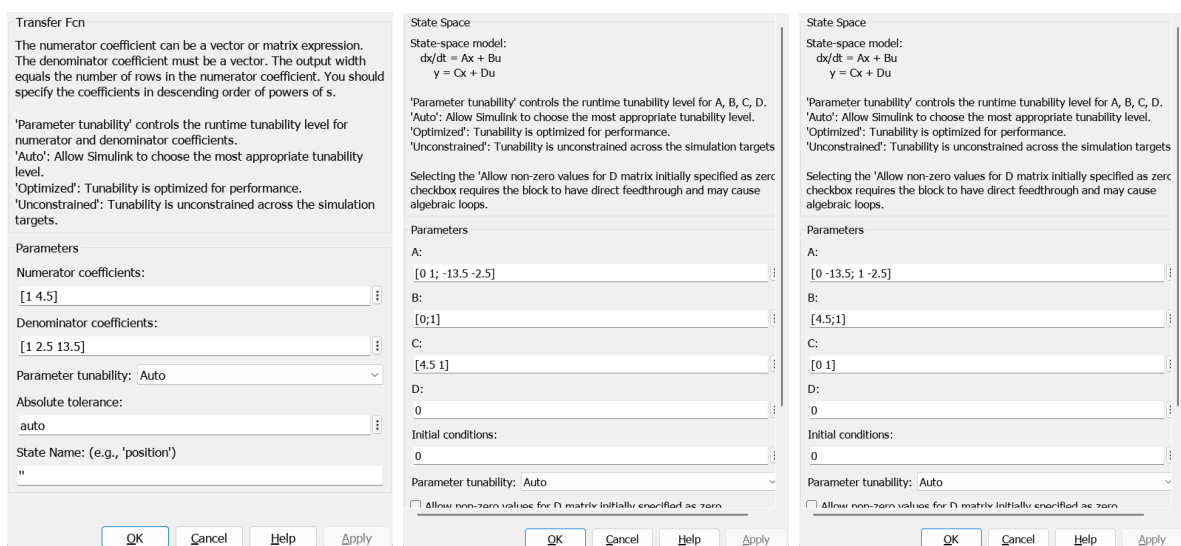
Каноническая наблюдаемая форма будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -13.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

Записывается в виде системы как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -13.5x_2 + 4.5u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2.5x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 1. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 6. Выведем графики.



(a) Параметры SIMULINK для передаточной функции $W(p)$ (b) Параметры SIMULINK для канонической управляемой формы (c) Параметры SIMULINK для канонической наблюдаемой формы

Рис. 6: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” и “State-Space”

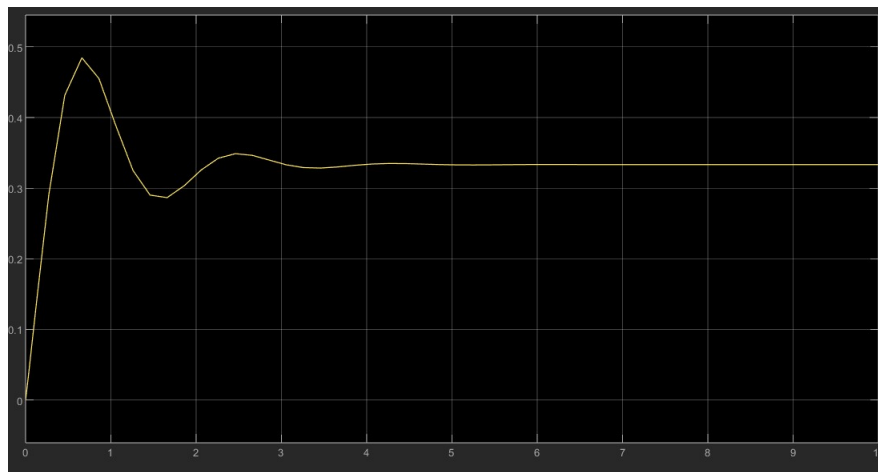
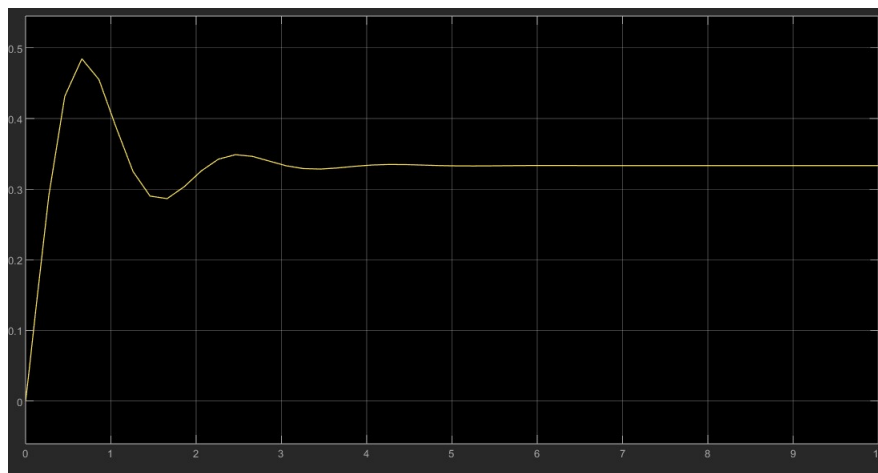
Рис. 7: График передаточной функции $W(p)$ 

Рис. 8: График канонической управляемой формы

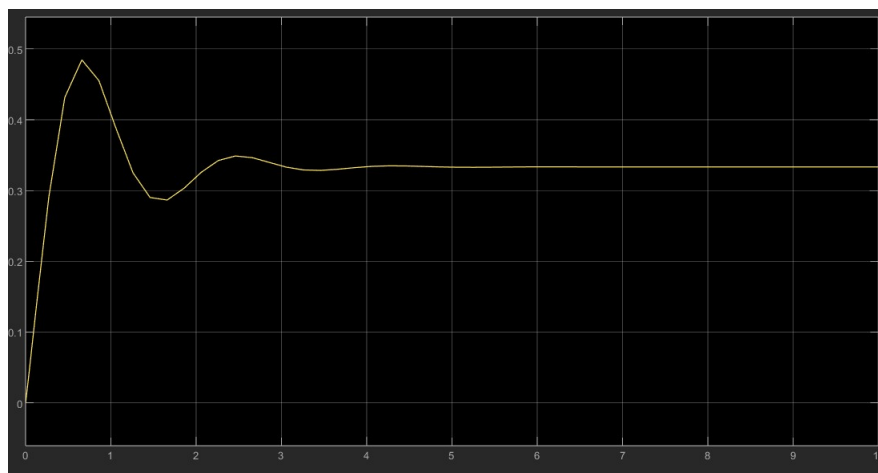


Рис. 9: График канонической наблюдаемой формы

4 Задание 3

4.1 Условие

Замена базиса в пространстве состояний.

- Построить модель, подобную модели из задания 2, если матрица преобразования координат M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Используя блоки “State-Space”, осуществить моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. На экран вывести выходные переменные двух систем. Схема моделирования представлена на рисунке 10

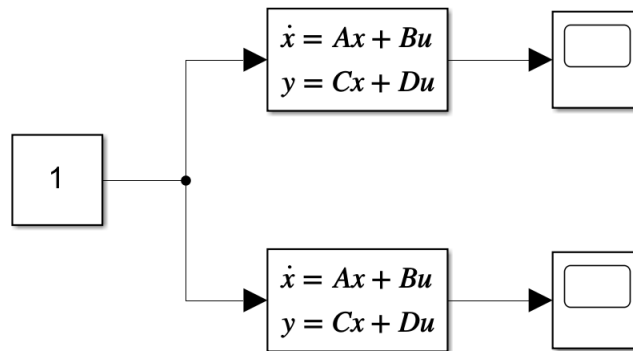


Рис. 10: Схема эксперимента

4.2 Выполнение

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \quad \hat{B} = M^{-1}B, \quad \hat{C} = CM$$

Проведем расчеты

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -32.5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0.25 \\ -120 & -5.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CM = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция остается такой же, как в задании 2

$$W(p) = \frac{p + 4.5}{p^2 + 2.5p + 13.5}$$

Схема моделирования представлена на рис. 10. Параметры в SIMULINK представлены на рис. 11. Выведем графики.

State Space

State-space model:
 $\dot{x}/dt = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
 'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
 'Optimized': Tunability is optimized for performance.
 'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A: [0.5 1; -15 -3]

B: [0; 1]

C: [5 1]

D: 0

Initial conditions: 0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

State Space

State-space model:
 $\dot{x}/dt = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for A, B, C, D.
 'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.
 'Optimized': Tunability is optimized for performance.
 'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets

Selecting the 'Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero' checkbox requires the block to have direct feedthrough and may cause algebraic loops.

Parameters

A: [3 0.25; -120 -5.5]

B: [0; 2]

C: [15 0.5]

D: 0

Initial conditions: 0

Parameter tunability: Auto

☐ Allow non-zero values for D matrix initially specified as zero

OK Cancel Help Apply

(a) Параметры SIMULINK для исходной системы (см. задание 2)

(b) Параметры SIMULINK для преобразованной системы

Рис. 11: Параметры SIMULINK для “State-Space”

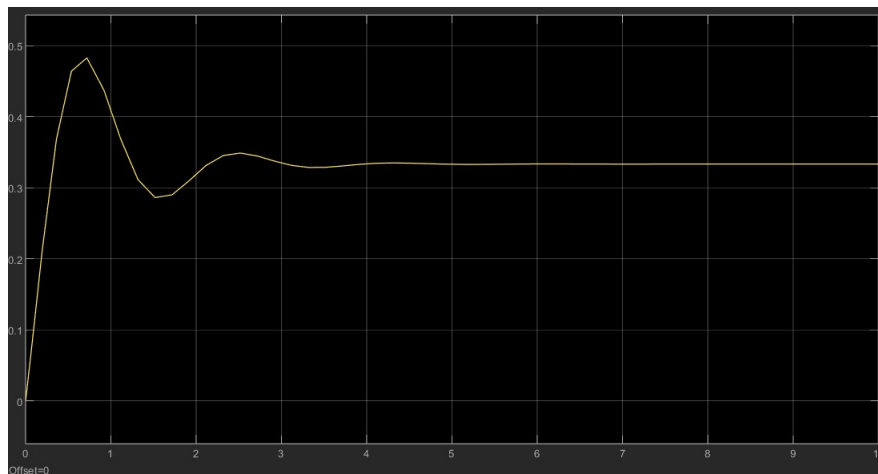


Рис. 12: График исходной системы

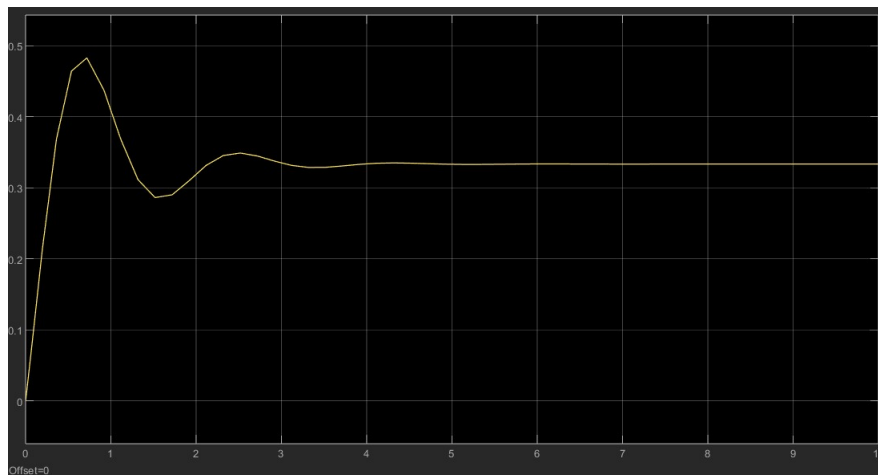


Рис. 13: График преобразованной системы

5 Вывод

Я познакомился с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Использование канонических форм существенно упрощает решение многих практических задач, связанных с анализом и синтезом систем управления.