



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
ПРЕДМЕТ «ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ
ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА»
Вариант 4

Преподаватель: Золотаревич В. П.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЛСАУ R22 бак 4.1.1

Факультет: СУиР
Группа: R3341

Санкт-Петербург
2024

Содержание

| | | |
|----------|----------------------|----------|
| 1 | Цель работы | 2 |
| 2 | Задание 1 | 2 |
| 2.1 | Условие | 2 |
| 2.2 | Выполнение | 2 |
| 3 | Задание 2 | 6 |
| 3.1 | Условие | 6 |
| 3.2 | Выполнение | 6 |
| 4 | Задание 3 | 7 |
| 4.1 | Условие | 7 |
| 4.2 | Выполнение | 7 |
| 5 | Вывод | 8 |
| 6 | Приложения | 9 |

1 Цель работы

Изучить связь характера переходной характеристики, динамических свойств системы с размещением на комплексной плоскости нулей и полюсов.

2 Задание 1

2.1 Условие

По заданным значениям постоянных

$$n = 4, \quad t_{\Pi} = 1.5, \quad k = 2.5,$$

определите параметры системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = bg$$

с характеристическим полиномом Баттерворта и биномиальным полиномом. Для каждого случая рассчитайте корни характеристического полинома

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

и оцените время переходного процесса по формуле

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05}$$

Составьте схему моделирования системы и постройте переходные характеристики, соответствующие двум типам распределения корней характеристического уравнения.

2.2 Выполнение

Синтез системы с использованием полинома Баттерворта. Полином Баттерворта в общем виде записывается как

$$a(s) = \prod_{i=1}^n \left(s - \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i-1}{2n}\pi\right)} \right) = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + \dots + \alpha_1\omega^{n-1}s + \omega^n$$

По графику нормированных переходных функций определим значение $t_{\Pi}^* \Rightarrow t_{\Pi}^* \approx 6.8$

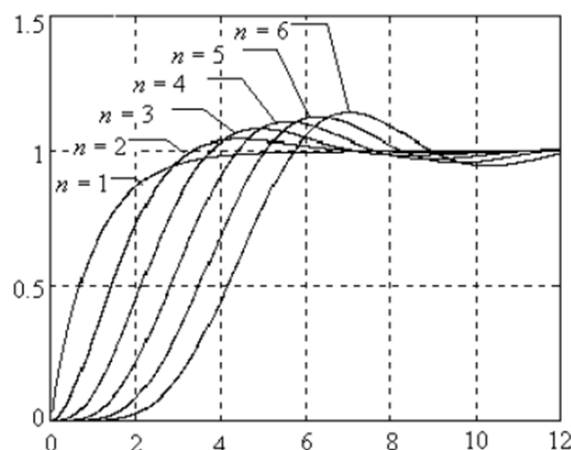


Рис. 1: Нормированные переходные характеристики системы с характеристическим полиномом Баттерворта

Найдем среднегеометрический корень ω_0

$$\omega_0 = \sqrt[n]{|s_1 s_2 \dots s_n|} = \sqrt[n]{a_0} = \frac{t_{\Pi}^*}{t_{\Pi}} = \frac{6.8}{1.5} \approx 4.53$$

Коэффициенты полинома выражаются как

$$a_j = \alpha_j \cdot \omega^{n-j}$$

Для случая с $n = 4$ (см. методическое пособие)

$$\alpha_1 = 2.613$$

$$\alpha_2 = 3.414$$

$$\alpha_3 = 2.613$$

Полином Баттерворта для системы порядка $n = 4$ имеет вид (α_3 самый левый не единичный коэффициент, α_1 самый правый)

$$s^4 + 2.613\omega s^3 + 3.414\omega^2 s^2 + 2.613\omega^3 s + \omega^4$$

Подставим найденный ω_0 , чтобы получить коэффициенты a_j . Полином Баттерворта для нашего случая будет иметь вид

$$s^4 + 11.83689s^3 + 70.0583526s^2 + 242.903636s + 421.1073368$$

Найдем коэффициент b . Из полинома Баттерворта имеем коэффициент

$$a_0 = 421.1073368,$$

тогда

$$b = k \cdot \omega^4 = k \cdot a_0 = 2.5 \cdot 421.1073368 = 1052.768342$$

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 11.83689y^{(3)} + 70.0583526y^{(2)} + 242.903636y^{(1)} + 421.1073368 = 1052.768342g$$

Рассчитаем корни полинома по формуле

$$s = \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i-1}{2n}\pi\right)}, \quad i \in [1, 2n]$$

С учетом ω_0 получим

$$s_{1,4} = -1.7336 \pm 4.1852i$$

$$s_{5,8} = 1.7336 \mp 4.1852i$$

$$s_{2,3} = -4.1852 \pm 1.7336i$$

$$s_{6,7} = 4.1852 \mp 1.7336i$$

Рассчитаем время переходного процесса. В качестве η берется абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня, то есть

$$\eta = |\Re(s_{1,4})| = 1.7336$$

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3}{1.7336} \approx 1.7305029995$$

Синтез системы с использованием полинома Ньютона. Биномиальный полином в общем виде записывается как

$$\alpha(s) = (s + \omega)^n = s^n + \alpha_{n-1}\omega s^{n-1} + \dots + \alpha_1\omega^{n-1}s + \omega^n$$

По графику нормированных переходных функций определим значение $t_{\Pi}^* \Rightarrow t_{\Pi}^* \approx 7.8$

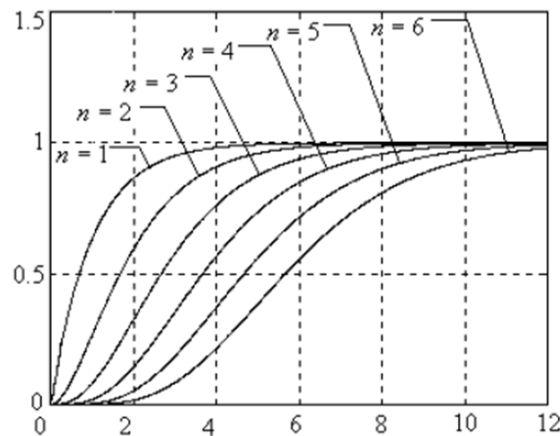


Рис. 2: Нормированные переходные характеристики системы с биномиальным характеристическим полиномом

Найдем среднегеометрический корень ω_0

$$\omega_0 = \frac{t_{\Pi}^*}{t_{\Pi}} = \frac{7.8}{1.5} = 5.2$$

Коэффициенты полинома выражаются как

$$a_j = \alpha_j \cdot \omega^{n-j}$$

Для случая с $n = 4$ (см. методическое пособие)

$$\alpha_1 = 4$$

$$\alpha_2 = 6$$

$$\alpha_3 = 4$$

Биномиальный полином для системы порядка $n = 4$ имеет вид (α_3 самый левый не единичный коэффициент, α_1 самый правый)

$$s^4 + 4\omega s^3 + 6\omega^2 s^2 + 4\omega^3 s + \omega^4$$

Подставим найденный ω_0 , чтобы получить коэффициенты a_j . Биномиальный полином для нашего случая будет иметь вид

$$s^4 + 20.8s^3 + 162.24s^2 + 562.432s + 731.1616$$

Найдем коэффициент b . Из биномиального полинома имеем коэффициент

$$a_0 = 731.1616,$$

тогда

$$b = k \cdot \omega^4 = k \cdot a_0 = 2.5 \cdot 731.1616 = 1827.904$$

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 1827.904g$$

При биномиальном распределении Ньютона n комплексных чисел s_i принимаются равными и вещественными, т.е. $s_i = -\omega$. Таким образом,

$$s_i = -\omega_0 = -5.2$$

Рассчитаем время переходного процесса

$$t_{\Pi} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3}{5.2} \approx 0.5769230769$$

Схема моделирования двух полиномов представлена на рисунке 3.

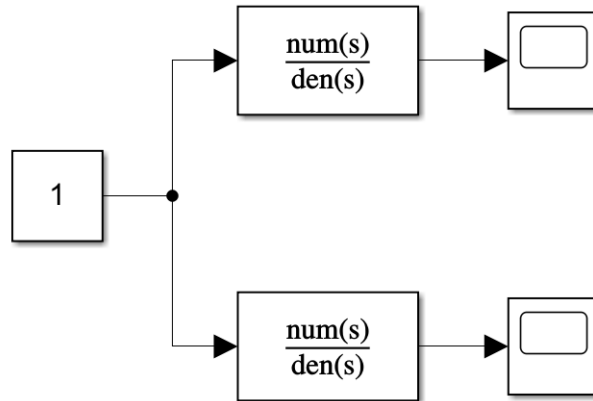


Рис. 3: Схема эксперимента

Параметры блоков “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 12 под заголовком «Приложения». Построим графики.

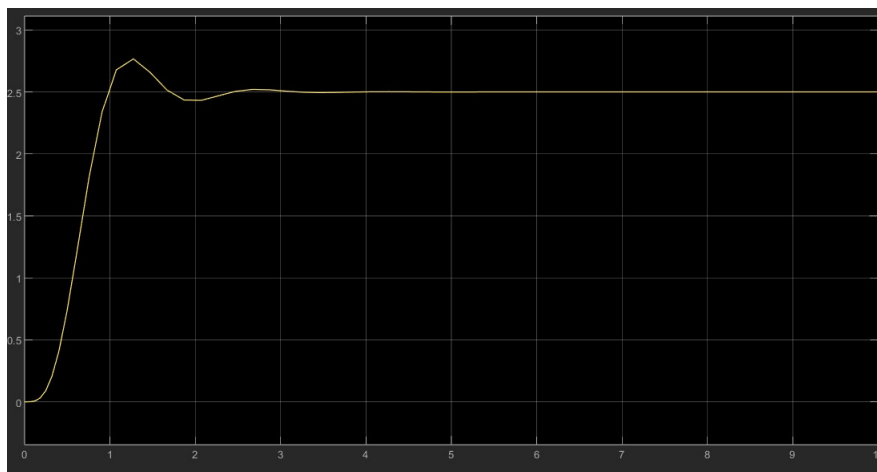


Рис. 4: График переходной характеристики системы: полином Баттерворта

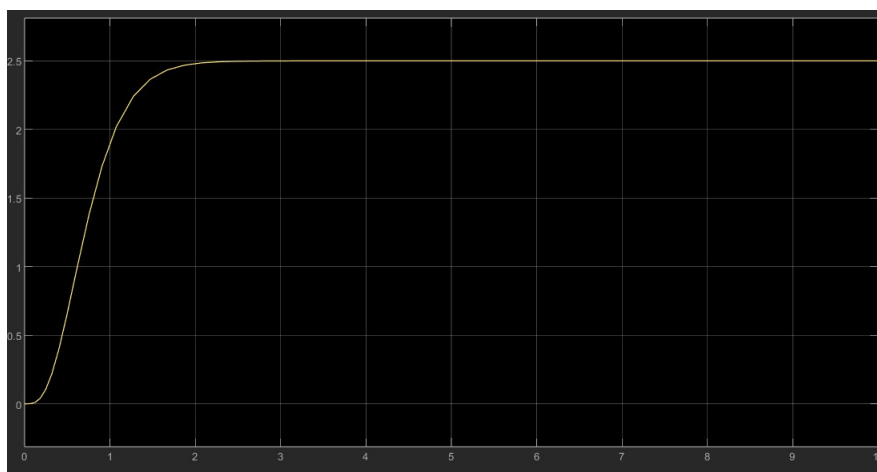


Рис. 5: График переходной характеристики системы: полином Ньютона

3 Задание 2

3.1 Условие

Для каждого набора параметров

$$\text{А: } b_0 = b, \quad b_1 = 2.5$$

$$\text{В: } b_0 = b, \quad b_1 = 0.5, \quad b_2 = 0.25, \quad b_3 = 1.25, \quad b_4 = 2$$

постройте переходные характеристики системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m g^{(m)} + \dots + b_0g$$

с коэффициентами a_0, \dots, a_{n-1} и коэффициентом b , рассчитанными в первом задании для биномиального распределения корней характеристического уравнения.

3.2 Выполнение

Пункт А. Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 2.5g^{(1)} + 1827.904g$$

Схема моделирования представлена на рисунке 6.

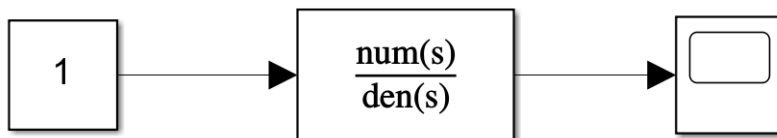


Рис. 6: Схема эксперимента

Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 13а под заголовком «Приложения». Построим графики.

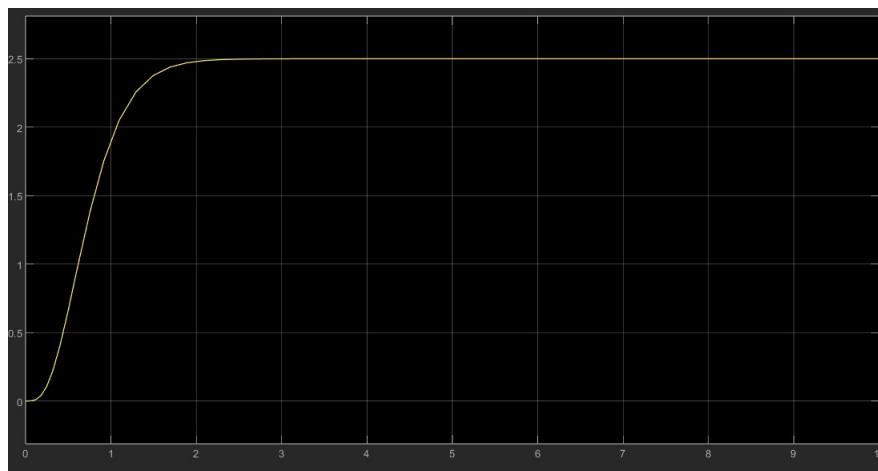


Рис. 7: График переходной характеристики системы

Пункт В. Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 2g^{(4)} + 1.25g^{(3)} + 0.25g^{(2)} + 0.5g^{(1)} + 1827.904g$$

Схема моделирования аналогична пункту А и представлена на рисунке 6. Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 13b под заголовком «Приложения». Построим графики.

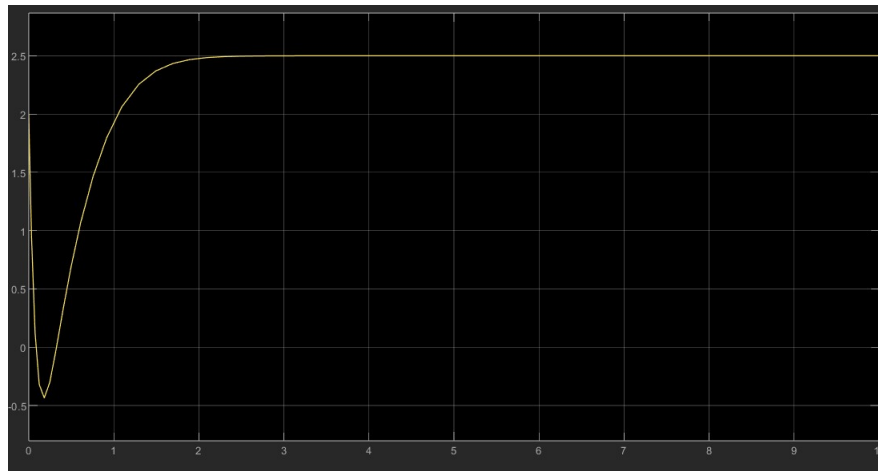


Рис. 8: График переходной характеристики системы

4 Задание 3

4.1 Условие

Для набора параметров

$$b_0 = 2.25, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2$$

и внешнего воздействия

$$g(t) = \sin(1.5t)$$

постройте реакцию системы

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mg^{(m)} + \dots + b_0g$$

с нулевыми начальными условиями и коэффициентами a_0, \dots, a_{n-1} , рассчитанными в первом задании для биномиального распределения корней характеристического уравнения. На экран монитора выводить графики $y(t), g(t)$.

4.2 Выполнение

Модель вход-выход системы будет иметь вид

$$y^{(4)} + 20.8y^{(3)} + 162.24y^{(2)} + 562.432y^{(1)} + 731.1616 = 2g^{(2)} + 2.25g$$

Схема моделирования представлена на рисунке 9.

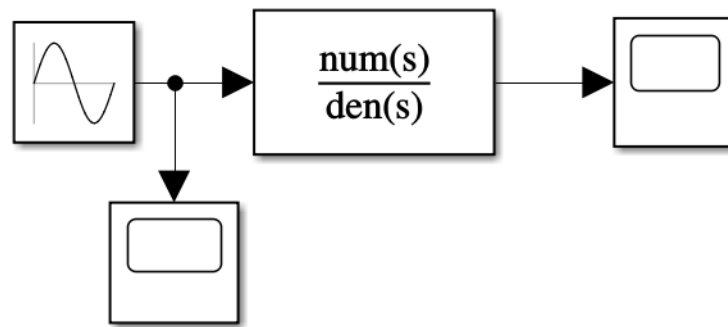
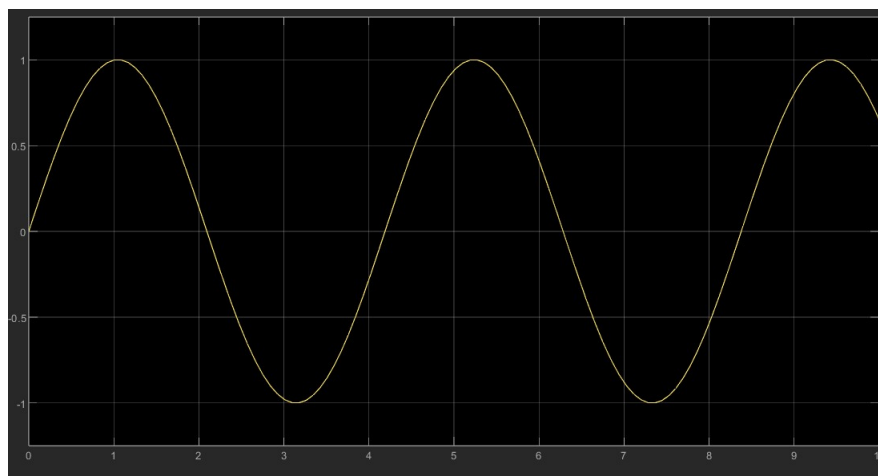


Рис. 9: Схема эксперимента

Параметры блока “Transfer Fcn” в SIMULINK представлены на рисунке 14 под заголовком «Приложения». Построим графики.

Рис. 10: График входного воздействия $g(t)$ Рис. 11: График реакции системы $y(t)$

5 Вывод

Я изучил связь характера переходной характеристики, динамических свойств системы с размещением на комплексной плоскости нулей и полюсов.

На основе заданных параметров качества системы возможно выполнить её синтез, применяя стандартные переходные функции. Динамические характеристики системы находятся в прямой зависимости от полюсов и нулей её передаточной функции.

6 Приложения

(а) Параметры SIMULINK для полинома Баттерворта (б) Параметры SIMULINK для полинома Ньютона

Рис. 12: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” для задания 1

(а) Параметры SIMULINK переходной хар-ки системы А (б) Параметры SIMULINK переходной характеристики системы В

Рис. 13: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” для задания 2

Output a sine wave:

$O(t) = \text{Amp} \cdot \sin(\text{Freq} \cdot t + \text{Phase}) + \text{Bias}$

Sine type determines the computational technique used. The parameter in the two types are related through:

Samples per period = $2 \cdot \pi / (\text{Frequency} \cdot \text{Sample time})$

Number of offset samples = $\text{Phase} \cdot \text{Samples per period} / (2 \cdot \pi)$

Use the sample-based sine type if numerical problems due to running for large times (e.g. overflow in absolute time) occur.

Parameters

Sine type: Time based

Time (t): Use simulation time

Amplitude: 1

Bias: 0

Frequency (rad/sec): 1.5

Phase (rad): 0

Sample time: 0

OK Cancel Help Apply

Transfer Fcn

The numerator coefficient can be a vector or matrix expression. The denominator coefficient must be a vector. The output width equals the number of rows in the numerator coefficient. You should specify the coefficients in descending order of powers of s.

'Parameter tunability' controls the runtime tunability level for numerator and denominator coefficients.

'Auto': Allow Simulink to choose the most appropriate tunability level.

'Optimized': Tunability is optimized for performance.

'Unconstrained': Tunability is unconstrained across the simulation targets.

Parameters

Numerator coefficients: [2 0 2.25]

Denominator coefficients: [1 20.8 162.24 562.432 731.1616]

Parameter tunability: Auto

Absolute tolerance: auto

State Name: (e.g., 'position')

OK Cancel Help Apply

(a) Параметры SIMULINK для входного сигнала $g(t)$

(b) Параметры SIMULINK для реакции системы $y(t)$

Рис. 14: Параметры SIMULINK для “Transfer Fcn” для задания 3