Лабораторная работа №1.01 «Исследование распределения случайных величин»

Цель работы: распределение случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

Задачи:

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения, средним значением и дисперсией

Результаты прямых измерений

Было проведено 50 пятисекундных измерений, в ходе которых сформировалась выборка результатов.

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$
1	5,39	0,40429	0,16345
2	4,56	-0,42571	0,18123
3	5,12	0,13429	0,01803
4	4,97	-0,01571	0,00025
5	4,99	0,00429	0,00002
6	4,98	-0,00571	0,00003
7	5,12	0,13429	0,01803
8	4,76	-0,22571	0,05095
9	5,2	0,21429	0,04592
10	4,89	-0,09571	0,00916
11	5,13	0,14429	0,02082
12	4,76	-0,22571	0,05095
13	5,11	0,12429	0,01545
14	5,03	0,04429	0,00196
15	4,94	-0,04571	0,00209
16	4,99	0,00429	0,00002
17	5,02	0,03429	0,00118
18	4,99	0,00429	0,00002
19	4,37	-0,61571	0,37910
20	5,66	0,67429	0,45466
21	5,12	0,13429	0,01803
22	4,8	-0,18571	0,03449
23	5,03	0,04429	0,00196
24	4,85	-0,13571	0,01842
25	5,19	0,20429	0,04173
26	4,8	-0,18571	0,03449
27	5,23	0,24429	0,05968
28	4,92	-0,06571	0,00432
29	4,91	-0,07571	0,00573
30	5,05	0,06429	0,00413
31	4,98	-0,00571	0,00003
32	5,05	0,06429	0,00413
33	5,09	0,10429	0,01088
34	4,44	-0,54571	0,29780
35	5,28	0,29429	0,08660
36	4,96	-0,02571	0,00066
37	5,23	0,24429	0,05968
38	4,85	-0,13571	0,01842
39	5,11	0,12429	0,01545
40	4,92	-0,06571	0,00432
41	5,13	0,14429	0,02082
42	4,71	-0,27571	0,07602
43	5,38	0,39429	0,15546
44	4,61	-0,37571	0,14116
45	5,44	0,45429	0,20638
46	4,72	-0,26571	0,07060
47	4,95	-0,03571	0,00128
48	5,06	0,07429	0,00552
49	4,97	-0,01571	0,00025
50	4,93	-0,05571	0,00310
	4,98571	8,88178·10^{-16}	σ_N = 0,23968 ρ_{max} = 1,66491

Таблица 1.1, Павел Овчинников

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$
1	5,29	0,2876	0,08271
2	4,69	-0,3124	0,09759
3	5,16	0,1576	0,02484
4	5,04	0,0376	0,00141
5	5,11	0,1076	0,01158
6	4,75	-0,2524	0,06371
7	5,15	0,1476	0,02179
8	4,83	-0,1724	0,02972
9	5,24	0,2376	0,05645
10	4,71	-0,2924	0,08550
11	5,07	0,0676	0,00457
12	4,98	-0,0224	0,00050
13	5,14	0,1376	0,01893
14	4,87	-0,1324	0,01753
15	5,13	0,1276	0,01628
16	4,83	-0,1724	0,02972
17	5,09	0,0876	0,00767
18	5,22	0,2176	0,04735
19	4,98	-0,0224	0,00050
20	4,77	-0,2324	0,05401
21	5,11	0,1076	0,01158
22	4,84	-0,1624	0,02637
23	5,07	0,0676	0,00457
24	4,93	-0,0724	0,00524
25	5,08	0,0776	0,00602
26	4,95	-0,0524	0,00275
27	5,14	0,1376	0,01893
28	4,84	-0,1624	0,02637
29	5,05	0,0476	0,00227
30	4,97	-0,0324	0,00105
31	5,09	0,0876	0,00767
32	5,03	0,0276	0,00076
33	4,87	-0,1324	0,01753
34	4,91	-0,0924	0,00854
35	5,22	0,2176	0,04735
36	4,82	-0,1824	0,03327
37	5,08	0,0776	0,00602
38	5,07	0,0676	0,00457
39	4,95	-0,0524	0,00275
40	4,91	-0,0924	0,00854
41	5,11	0,1076	0,01158
42	4,92	-0,0824	0,00679
43	4,9	-0,1024	0,01049
44	5,16	0,1576	0,02484
45	4,96	-0,0424	0,00180
46	5,16	0,1576	0,02484
47	4,96	-0,0424	0,00180
48	4,88	-0,1224	0,01498
49	5,06	0,0576	0,00332
50	5,03	0,0276	0,00076
	5,0024	1,59872·10^{-14}	σ_N = 0,14398 ρ_{max} = 2,77162

Таблица 1.2, Алексей Румянцев

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$
1	5,34	0,3578	0,12802
2	4,71	-0,2722	0,07409
3	5,06	0,0778	0,00605
4	4,96	-0,0222	0,00049
5	5,03	0,0478	0,00228
6	4,98	-0,0022	0,00000
7	4,99	0,0078	0,00006
8	4,79	-0,1922	0,03694
9	5,1	0,1178	0,01388
10	4,86	-0,1222	0,01493
11	4,99	0,0078	0,00006
12	5	0,0178	0,00032
13	4,87	-0,1122	0,01259
14	5,03	0,0478	0,00228
15	4,63	-0,3522	0,12404
16	5,2	0,2178	0,04744
17	4,99	0,0078	0,00006
18	4,96	-0,0222	0,00049
19	4,94	-0,0422	0,00178
20	5,14	0,1578	0,02490
21	4,76	-0,2222	0,04937
22	5,26	0,2778	0,07717
23	4,8	-0,1822	0,03320
24	5,05	0,0678	0,00460
25	5,1	0,1178	0,01388
26	4,88	-0,1022	0,01044
27	5,16	0,1778	0,03161
28	4,78	-0,2022	0,04088
29	5,06	0,0778	0,00605
30	4,91	-0,0722	0,00521
31	5,2	0,2178	0,04744
32	4,85	-0,1322	0,01748
33	5,01	0,0278	0,00077
34	5,06	0,0778	0,00605
35	4,86	-0,1222	0,01493
36	5,08	0,0978	0,00956
37	4,57	-0,4122	0,16991
38	5,2	0,2178	0,04744
39	4,9	-0,0822	0,00676
40	5,08	0,0978	0,00956
41	4,89	-0,0922	0,00850
42	5,01	0,0278	0,00077
43	4,96	-0,0222	0,00049
44	4,88	-0,1022	0,01044
45	5,26	0,2778	0,07717
46	4,96	-0,0222	0,00049
47	4,89	-0,0922	0,00850
48	4,93	-0,0522	0,00272
49	5,2	0,2178	0,04744
50	4,99	0,0078	0,00006
	4,9822	5,68434·10^{-14}	σ_N = 0,1597 ρ_{max} = 2,49875

Таблица 1.3, Дмитрий Чебаненко

Для вычисления значений в конце таблицы использовались следующие формулы:

- Среднее значение: $\langle t \rangle_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$, где $N = 50$
- Сумма отклонений от среднего: $\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N)$
- Выборочное среднее отклонение $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N)^2}$
- Максимальная значение функции Гаусса: $\rho_{max} = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}}$

Данные для построения гистограмм

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
4,37	2	0,22222	4,46	0,15020
4,55				
4,55	4	0,42105	4,645	0,60615
4,74				
4,74	10	1,11111	4,83	1,34814
4,92				
4,92	18	1,89474	5,015	1,65253
5,11				
5,11	12	1,33333	5,2	1,11639
5,29				
5,29	3	0,31579	5,385	0,41567
5,48				
5,48	1	0,11111	5,57	0,08530
5,66				

Таблица 2.1, Павел Овчинников

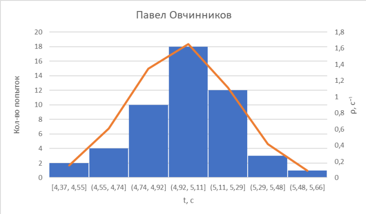
Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
4,69	4	0,888889	4,735	0,493966
4,78				
4,78	5	1,25	4,82	1,242257
4,86				
4,86	8	1,777778	4,905	2,204719
4,95				
4,95	9	2,25	4,99	2,761355
5,03				
5,03	13	2,888889	5,075	2,440723
5,12				
5,12	7	1,75	5,16	1,522446
5,2				
5,2	4	0,888889	5,245	0,670182
5,29				

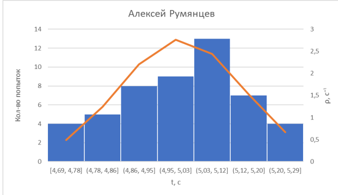
Таблица 2.2, Алексей Румянцев

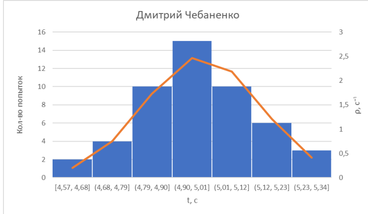
Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
4,57	2	0,36364	4,625	0,20481
4,68				
4,68	4	0,72727	4,735	0,75408
4,79				
4,79	10	1,81818	4,845	1,72762
4,9				
4,9	15	2,72727	4,955	2,46277
5,01				
5,01	10	1,81818	5,065	2,18448
5,12				
5,12	6	1,09091	5,175	1,20566
5,23				
5,23	2	0,36364	5,285	0,41404
5,34				

Таблица 2.3, Дмитрий Чебаненко

Для вычисления ρ использовалась формула вычисления нормального распределения: $\rho(t) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma_N^2})$, где $exp(x) = e^x$, $\langle t \rangle$ — сред.арифм. всех измерений для конкретного участника группы, σ_N была вычислена для предыдущей таблицы. ΔN — количество измерений, попадающих в интервал, указанный в первом столбце, а величина $\frac{\Delta N}{N \Delta t}$ характеризует плотность вероятности, то есть по сути отображает количество результатов за время Δt и попадающих на промежуток в границах указанного в первом столбце интервала.







Стандартные доверительные интервалы

	t_1, c	t_2, c	ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
$\langle t \rangle(N) \pm \sigma(N)$	4,74604	5,22539	40	0,8	0,68269
$\langle t \rangle(N) \pm 2\sigma(N)$	4,50636	5,46507	47	0,94	0,95450
$\langle t \rangle(N) \pm 3\sigma(N)$	4,26668	5,70475	50	1	0,99730

Таблица 3.1, Павел Овчинников

	t_1, c	t_2, c	ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
$\langle t \rangle(N) \pm \sigma(N)$	4,85842	5,14638	32	0,64	0,45099
$\langle t \rangle(N) \pm 2\sigma(N)$	4,71445	5,29035	49	0,98	0,76928
$\langle t \rangle(N) \pm 3\sigma(N)$	4,57047	5,43433	50	1	0,92778

Таблица 3.2, Алексей Румянцев

	t_1, c	t_2, c	ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
$\langle t \rangle(N) \pm \sigma(N)$	4,82250	5,14190	37	0,74	0,49473
$\langle t \rangle(N) \pm 2\sigma(N)$	4,66281	5,30159	47	0,94	0,81729
$\langle t \rangle(N) \pm 3\sigma(N)$	4,50311	5,46129	50	1	0,95436

Таблица 3.3, Дмитрий Чебаненко

t_1 и t_2 заданы как $\langle t \rangle(N) + \sigma(N)$ и $\langle t \rangle(N) - \sigma(N)$ соответственно. $\frac{\Delta N}{N}$ по сути приближается к нормальному распределению P, в некоторых случаях точно выполняясь, но иногда всё же отклоняясь от него.

Вывод: в большинстве случаев выясняется, что распределение случайных величин соответствует нормальному распределению величин или графику функции Гаусса — с пиком в центре и симметричными боковыми сторонами графика по оси t. По сути погрешность измерений как раз и моделирует нормальное распределение.