Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
Факультет ***«Робототехника и комплексная автоматизация» (РК)***
Кафедра ***«Системы автоматизированного проектирования» (РК-6)***

Домашняя работа

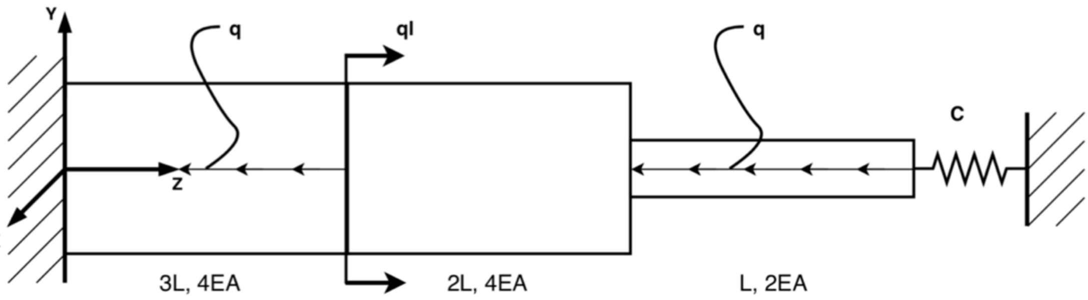
Типовой расчет по прикладной механике №3

Выполнил:
студент группы РК6-33Б
Ершков Алексей Дмитриевич

Преподаватель: **Шашурин Г. В.**

Москва
2019

Задание



Для заданной системы требуется:

1) Разбить стержень на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жёсткости каждого конечного элемента.

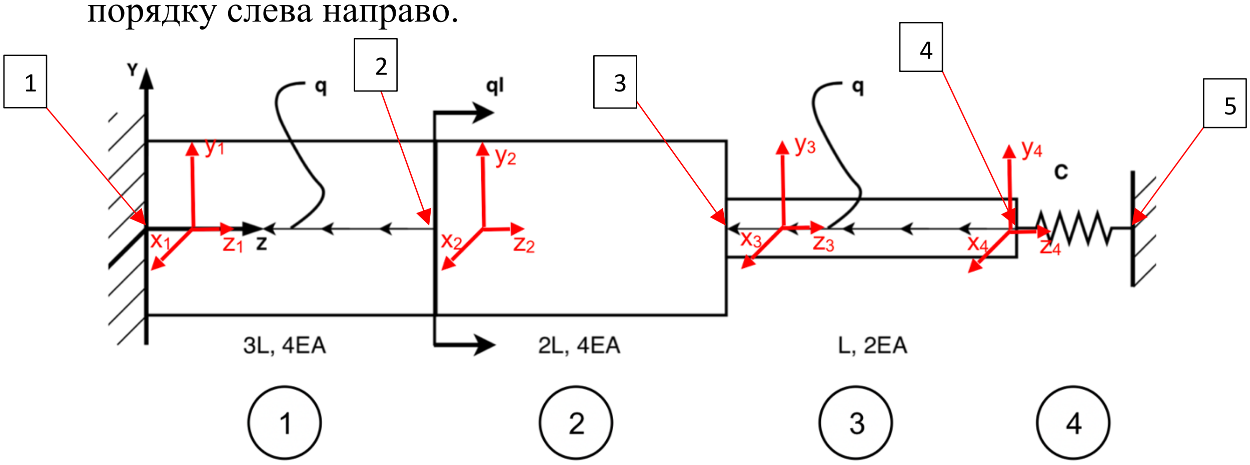
2) Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне. Найти узловые перемещения системы.

3) При С→0 и при С→ ∞ вычислить наибольшее значение осевой силы в системе.

Решение

<u>Задание 1.</u>

Введем глобальную систему координат, разобьём стержень на 4 конечных элемента, пронумеруем их по порядку слева направо. Введём локальные системы координат и обозначим 5 узлов по порядку слева направо.



Запишем матрицы жёсткости для каждого КЭ:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EA}{3l} & -\frac{4EA}{3l} \\ -\frac{4EA}{3l} & \frac{4EA}{3l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & -\frac{2EA}{l} \\ -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & -\frac{2EA}{l} \\ -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

<u>Задание 2.</u>

СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне:

[K]*{u} = {f}

[K] – матрица жёсткости системы

$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix}$- вектор узловых перемещений

Вектор сил (распределённые нагрузки заменяются двумя эквивалентными приложенными силами)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-3ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таблица индексов:

Степень свободы / Номер КЭ	1’	2’
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Получение матрицы жёсткости с помощью ансамблирования:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EA}{3l} & -\frac{4EA}{3l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4EA}{3l} & \frac{4EA}{3l} + \frac{2EA}{l} & -\frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} + \frac{2EA}{l} & -\frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -C \\ 0 & 0 & 0 & -C & C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4EA}{3l} & -\frac{4EA}{3l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4EA}{3l} & \frac{10EA}{3l} & -\frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{4EA}{l} & -\frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -C \\ 0 & 0 & 0 & -C & C \end{bmatrix}$$

Учёт граничных условий точным способом:

$$\begin{bmatrix} \cancelto{1}{\frac{4EA}{3l}} & \cancelto{0}{-\frac{4EA}{3l}} & 0 & 0 & 0 \\ \cancelto{0}{-\frac{4EA}{3l}} & \frac{10EA}{3l} & -\frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{4EA}{l} & -\frac{2EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & \cancelto{0}{-C} \\ 0 & 0 & 0 & \cancelto{0}{-C} & \cancelto{1}{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-3ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Упростим СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{10EA}{3l} & -\frac{2EA}{l} & 0 \\ -\frac{2EA}{l} & \frac{4EA}{l} & -\frac{2EA}{l} \\ 0 & -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} + \mathrm{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \\ \frac{-ql}{2} \end{Bmatrix}$$

Решим СЛАУ и найдём узловые перемещения:

$$W_2 = \frac{ql^2(-18EA - 9Cl)}{EA(16EA + 28Cl)}$$

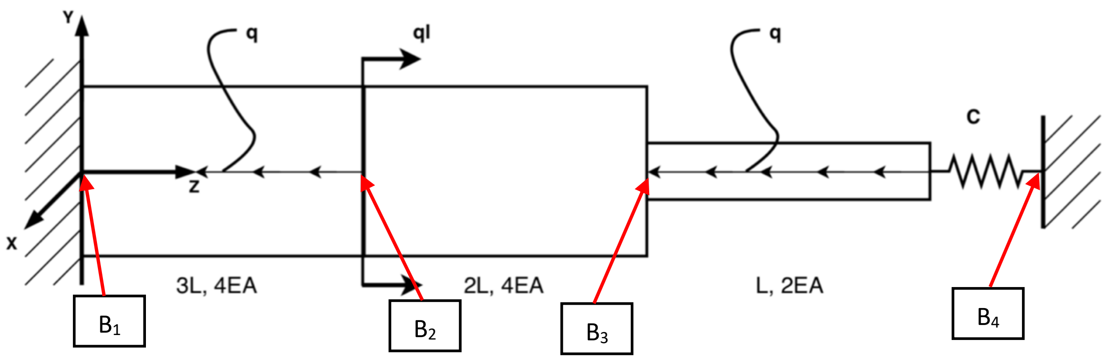
$$W_3 = \frac{ql^2(-13EA - 4Cl)}{EA(8EA + 14Cl)}$$

$$W_4 = \frac{-15ql^2}{(8EA + 14Cl)}$$

$$W = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{ql^2(-18EA - 9Cl)}{EA(16EA + 28Cl)} \\ \dfrac{ql^2(-13EA - 4Cl)}{EA(8EA + 14Cl)} \\ \dfrac{-15ql^2}{(8EA + 14Cl)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Задание 3

Обозначим узлы стержня B_i следующим образом:



Построим выражение для поиска осевых напряжений в узлах стержня.

(Учитывать будем только конечные элементы стержня, исключая пружину из системы)

$$\{N(z)\} = [D]\{\varepsilon(z)\}$$

$$\{N(z)\} = \begin{Bmatrix} N_1(z) \\ N_2(z) \\ N_3(z) \end{Bmatrix} - \text{вектор осевых сил в К.Э.}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(z) \\ \varepsilon_2(z) \\ \varepsilon_3(z) \end{Bmatrix} - \text{вектор деформаций}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EA & 0 \\ 0 & 0 & 2EA \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(z)\} = \frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z}$$

$\{W(z)\} -$ вектор функций перемещений в конечных элементах

Данный вектор найдём, аппроксимируя каждую функцию перемещений, опираясь на узловые перемещения и внешние распределённые нагрузки.

$$\{W(z)\} = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \\ W_3(z) \end{Bmatrix}$$

Т.к. на участках стержня присутствуют распределённые нагрузки, функция перемещения будет иметь квадратичную форму

$$W_i(z) = a_i z^2 + b_i z + c_i$$

$$a_i = \frac{-q_i}{2E_iA_i}$$

$$b_i = \frac{W_i(l_i) - a_i l_i^2 - c_i}{l_i}$$

$$c_i = W_i(0)$$

Выразим перемещение на границе i-ого элемента через перемещение сечения в j-ом узле:

$$W_i(0) = W_j$$

$$W_i(l_i) = W_{j+1}$$

где ввиду последовательного нумерования узлов и конечных элементов i=j

$$\frac{\partial\{W_i(z)\}}{\partial z} = 2a_i z + b_i = \frac{-q_i z}{E_iA_i} + \frac{W_{i+1} - W_i}{l_i} + \frac{q_i l_i}{2E_iA_i}$$

Таким образом,

$$\{\sigma(z)\} = [D]\{\varepsilon(z)\} = [D]\frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z}$$

Вычислим перемещения сечений стержня при C→0:

$$W = \lim_{C\to 0}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{ql^2(-18EA - 9Cl)}{EA(16EA + 28Cl)} \\ \dfrac{ql^2(-13EA - 4Cl)}{EA(8EA + 14Cl)} \\ \dfrac{-15ql^2}{(8EA + 14Cl)} \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{-9ql^2}{8EA} \\ \dfrac{-13ql^2}{8EA} \\ \dfrac{-15ql^2}{8EA} \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{qz}{4EA} + \dfrac{\dfrac{-9ql^2}{8EA} - 0}{3l} - \dfrac{ql}{8EA} \\ \dfrac{-\dfrac{13ql^2}{8EA} + \dfrac{9ql^2}{8EA}}{2l} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{\dfrac{-15ql^2}{8EA} + \dfrac{13ql^2}{8EA}}{l} - \dfrac{ql}{4EA} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{qz}{4EA} - \dfrac{3ql}{4EA} \\ -\dfrac{ql}{4EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} - \dfrac{ql}{2EA} \end{matrix}\right\}$$

Найдём вектор осевых сил:

$$\{N(z)\} = [D]\frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z} = \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EA & 0 \\ 0 & 0 & 2EA \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \dfrac{qz}{4EA} - \dfrac{3ql}{4EA} \\ -\dfrac{ql}{4EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} - \dfrac{ql}{2EA} \end{matrix}\right\}$$

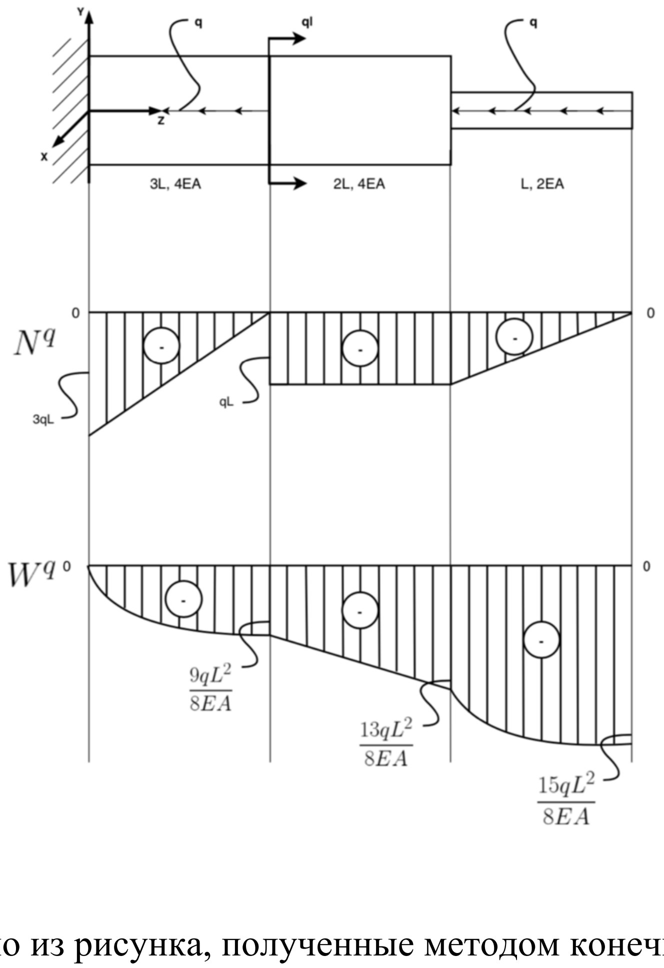
$$= \left\{\begin{matrix} qz - 3ql \\ -ql \\ qz - ql \end{matrix}\right\}$$

Так как получившиеся осевые силы представлены линейной зависимостью, максимальная осевая сила будет находиться в узле стержня. Найдём силы в узлах стержня:

$$\{N(0)\} = \begin{Bmatrix} -3ql \\ -ql \\ -ql \end{Bmatrix}; \ \{N(l_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таким образом, максимальная осевая сила (по модулю) $F_{max} = 0$

Сравним полученные значения со значениями из 1-го ДЗ. В 1-ом ДЗ были построены следующие эпюры для случая, когда C→0:



Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений и напряжений совпадают со значениями, полученными с помощью построения эпюр в первом ДЗ.

Вычислим перемещения сечений стержня при С→∞:

$$W = \lim_{C\to 0}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{ql^2(-18EA-9Cl)}{EA(16EA+28Cl)} \\ \dfrac{ql^2(-13EA-4Cl)}{EA(8EA+14Cl)} \\ \dfrac{-15ql^2}{(8EA+14Cl)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{-9ql^2}{28EA} \\ \dfrac{-2ql^2}{7EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z} = \begin{Bmatrix} \dfrac{qz}{4EA} + \dfrac{\frac{-9ql^2}{28EA} - 0}{3l} - \dfrac{ql}{8EA} \\ \dfrac{\frac{-2ql^2}{7EA} + \frac{9ql^2}{28EA}}{2l} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{0 + \frac{2ql^2}{7EA}}{l} - \dfrac{ql}{4EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{qz}{4EA} - \dfrac{27ql}{56EA} \\ \dfrac{ql}{56EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{ql}{28EA} \end{Bmatrix}$$

Найдём вектор осевых сил:

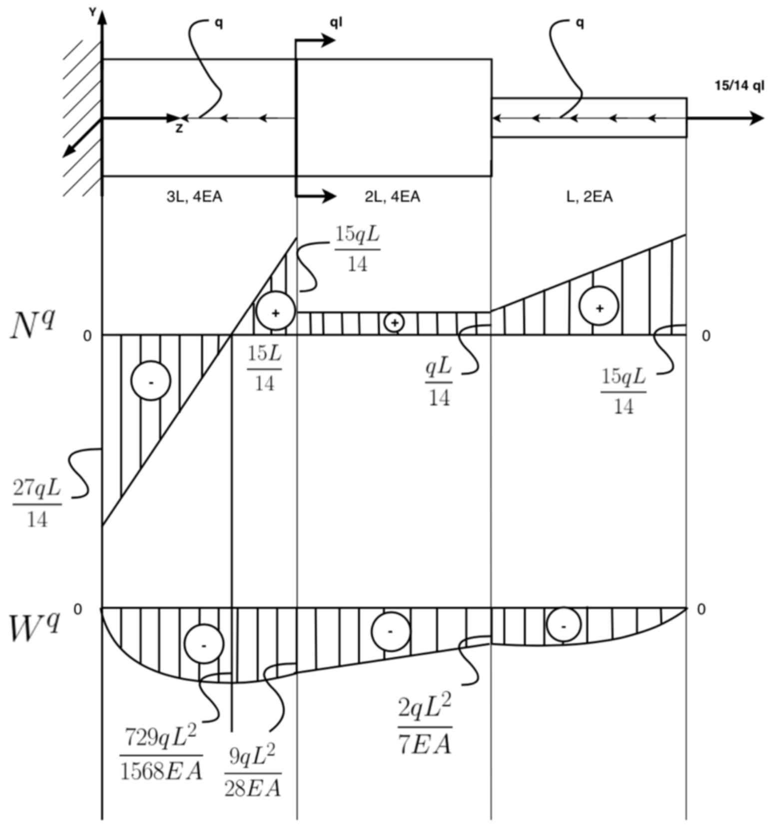
$$\{N(z)\} = [D]\frac{\partial\{W(z)\}}{\partial z} = \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EA & 0 \\ 0 & 0 & 2EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{qz}{4EA} - \dfrac{27ql}{56EA} \\ \dfrac{ql}{56EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{ql}{28EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qz - \dfrac{27ql}{14} \\ \dfrac{ql}{14} \\ qz + \dfrac{ql}{14EA} \end{Bmatrix}$$

Так как получившиеся осевые силы, как и в прошлом случае, представлены линейной зависимостью, максимальная осевая сила будет находиться в узле стержня. Найдём силы в узлах стержня:

$$\{N(0)\} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{27ql}{14} \\ \dfrac{ql}{14} \\ \dfrac{ql}{14EA} \end{Bmatrix}; \ \{N(l_i)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{15ql}{14} \\ \dfrac{ql}{14} \\ \dfrac{15ql}{14EA} \end{Bmatrix}$$

Таким образом, максимальная осевая сила (по модулю) $F_{max} = \frac{15ql}{14}$

Аналогично предыдущему случаю, сравним полученные значения со значениями из 1-го ДЗ:



В случае с C→∞, как и в предыдущем случае, полученные методом конечных элементов значения перемещений и напряжений совпадают со значениями, полученными с помощью метода построения эпюр.