Задание:

В эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

вписать прямоугольник максимальной площади так, чтобы стороны прямоугольника были параллельны осям эллипса.

Наити наибольшую возможную площадь прямоугольника.

Решение: Представим уравнение (1) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \tag{2}$$

где a и b – полуоси.

Вершины прямоугольника $(-x, -y), (-x, +y), (+x, +y), (+x, -y)$.

Стороны прямоугольника равны $2x$ и $2y \Rightarrow$

$$S = 2x \cdot 2y = 4xy \tag{3}$$

Подставим (2) в (3)

$$\begin{gathered} S(t) = 4ab \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) = 2ab \cdot \sin(2t) \\ S'(t) = 2ab \cdot 2 \cdot \cos(2t) \Rightarrow \cos(2t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Пусть $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(2t) = 1, \sin(t) = \cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Подставим эти значения в (2) и найдем площадь:

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $S = 2ab$