

# Огибающая пучка с учетом влияния пространственного заряда

[V. Fedorov \(mailto:fuodorov1998@gmail.com\)](mailto:fuodorov1998@gmail.com), [D. Nikiforov \(mailto:nikdanila@bk.ru\)](mailto:nikdanila@bk.ru), [A. Petrenko \(http://www.inp.nsk.su/~petrenko/\)](http://www.inp.nsk.su/~petrenko/), (Novosibirsk, 2019)

Сначала разберем теорию, затем рассчитаем огибающую электронного пучка в ЛИУ-5 с помощью Python и Astra, приведем сравнение результатов

## Уравнения Максвелла

Объемная плотность тока пучка  $j = \rho v$ , где  $\rho$  - объемная плотность заряда,  $v$  - скорость пучка. Запишем дифференциальные уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi j}{c},\end{aligned}$$

где  $\vec{D}$  - индукция электрического поля,  $\vec{H}$  - напряженность магнитного поля,  $c$  - скорость света.

Используем теорему Стокса об интегрировании дифференциальных форм, чтобы получить уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{S} &= 4\pi \int_V \rho dV, \\ \oint_{\partial S} \vec{H} d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c} \int_S j d\vec{S}.\end{aligned}$$

Найдем  $D_r$  для цилиндрического пучка радиуса  $a$  с постоянной плотностью  $\rho_0$ :

$$D_r = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(\xi) \xi d\xi = \begin{cases} 2\pi\rho_0 r, & r < a, \\ \frac{2\pi\rho_0 a^2}{r}, & r > a. \end{cases}$$

Учитывая, что в вакууме  $D = E$ ,  $H = B$ ,  $E$  - напряженность электрического поля,  $B$  - индукция магнитного поля, и в плоском пространстве в декартовой системе координат  $H_\alpha = \beta D_r$ , где  $\beta = \frac{v}{c}$ ,

радиальная компонента силы  $F_r$  из силы Лоренца  $\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ :

$$F_r = eE_r - \frac{ev_z B_\alpha}{c} = eE_r \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{eE_r}{\gamma^2}.$$

Полезно выразить поле через ток  $I = \rho_0 v \pi a^2$ , тогда:

$$E_r = \begin{cases} \frac{2Ir}{a^2 v}, & r < a, \\ \frac{2I}{rv}, & r > a. \end{cases}$$

## Уравнения движения

Второй закон Ньютона  $\dot{p}_r = F_r$ , используем параксиальное приближение и считаем  $\gamma = \text{const}$ :

$$\gamma m \ddot{r} = \frac{e E_r}{\gamma^2} = \frac{2 I e}{\gamma^2 a^2 v} r,$$

получилось линейное уравнение, но так как все частицы движутся нужно учесть, что  $a = a(t)$ .

Решение линейного уравнения можно представить как линейное преобразование фазовой плоскости. Так как отрезок на фазовой плоскости при невырожденном линейном преобразовании переходит в отрезок, то его можно охарактеризовать одной точкой. Следовательно, выберем крайнюю точку  $r = a$ , которая будет характеризовать крайнюю траекторию:

$$\gamma m \ddot{r} = \frac{2 I e}{\gamma^2 a v}.$$

Перейдем к дифференцированию по  $z$ , учтем, что  $dt = \frac{dz}{v}$ , тогда:

$$a'' = \frac{e}{a} \frac{2 I}{m \gamma^3 v^3}.$$

Введем характерный альфвеновский ток  $I_a = \frac{m c^3}{e} \approx 17 \text{ кА}$ , следовательно:

$$a'' = \frac{2 I}{I_a (\beta \gamma)^3} \frac{1}{a}.$$

Учтем внешнюю фокусировку, предполагая суперпозицию полей (верно не всегда, например, в нелинейных средах это не выполняется), получим:

$$a'' + k(z)a - \frac{2 I}{I_a (\beta \gamma)^3} \frac{1}{a} = 0,$$

что напоминает уравнение огибающей:

$$w'' + k w - \frac{1}{w^3} = 0,$$

где  $w = \sqrt{\beta}$ .

**Уравнения огибающей для эллиптического пучка с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями**

Распределение Капчинского-Владимирского:

$$f = A\delta\left(1 - \frac{\beta_x x'^2 + 2\alpha_x x x' + \gamma_x x^2}{\epsilon_x} - \frac{\beta_y y'^2 + 2\alpha_y y y' + \gamma_y y^2}{\epsilon_y}\right),$$

где  $A$  - инвариант Куранта-Снайдера. Полуоси эллипса:

$$a = \sqrt{\epsilon_x \beta_x}, b = \sqrt{\epsilon_y \beta_y}.$$

Поле получается линейно внутри заряженного эллиптического цилиндра:

$$E_x = \frac{4I}{v} \frac{x}{a(a+b)},$$

$$E_y = \frac{4I}{v} \frac{y}{b(a+b)}.$$

Проверим, что  $\nabla \vec{E} = 4\pi\rho$  :

$$I = \rho v \pi a b,$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{4I(a+b)}{\pi(a+b)ab} = \frac{4I}{\pi ab} = 4\pi\rho.$$

Так как поля линейные, они добавятся к полям фокусирующей линзы. Подставим в уравнение огибающей  $a = \sqrt{\epsilon_x} w_x, b = \sqrt{\epsilon_y} w_y$  :

$$a'' + k_{xt}a - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0,$$

где  $k_{xt} = k_x + k_{xsc}$  - полная жесткость,  $k_x$  - жесткость линзы, а  $k_{xsc} = \frac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3} \frac{1}{a(a+b)}$ . В итоге

получаем систему уравнений, связанных через пространственный заряд:

$$\begin{cases} a'' + k_x a - \frac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3} \frac{1}{a(a+b)} - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + k_y b - \frac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3} \frac{1}{a(a+b)} - \frac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

## Количественный критерий применимости приближения ламинарности течения

Данная система уравнений позволяет учесть 2 эффекта, мешающих сфокусировать пучок в точку - конечность эммитанса и пространственный заряд. Работают члены одинаково, поэтому можно сравнить эти величины. Когда ток  $I$  малый - слабое отталкивание, если ток  $I$  большой - сильное отталкивание, следовательно, эммитанс можно откинуть и считать течение ламинарным. Очевидно, количественный критерий применимости ламинарности течения выглядит так:

$$\sqrt{\frac{2I}{I_a(\beta\gamma)^3}} \gg \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}.$$

Видно, что пространственный заряд влияет на огибающую больше там, где  $\beta$ -функция больше, а вблизи фокуса влиянием пространственного заряда можно пренебречь.

## Теорема Буша

В качестве дополнения к выводу уравнения огибающей пучка докажем важную вспомогательную теорему, которая называется теоремой Буша. Она связывает угловую скорость заряженной частицы, движущейся в аксиально-симметричном магнитном поле, с магнитным потоком, охваченным окружностью с центром на оси и проходящим через точку, в которой расположена частица.

Рассмотрим заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$ . Приравняем  $\theta$ -составляющую силы Лоренца к производной момента импульса по времени, деленной на  $r$ :

$$F_\theta = -q(\ddot{r}B_z - \dot{z}B_r) = \frac{d}{r dt}(\gamma m r^2 \dot{\theta}).$$

Поток, пронизывающий площадь, охваченную окружностью радиуса  $r$ , центр которой расположен на оси, а сама она проходит через точку, в которой расположен заряд, записывается в виде

$$\psi = \int_0^r 2\pi r B_z dr. \text{ Когда частица перемещается на } \vec{dl} = (dr, dz), \text{ скорость изменения потока,}$$

охваченного этой окружностью, можно найти из второго уравнения Максвелла  $\nabla \vec{B} = 0$ . Таким образом,

$$\dot{\psi} = 2\pi r(-B_r \dot{z} + B_z \dot{r}).$$

После интегрирования по времени из приведенных уравнений получаем следующее выражение:

$$\dot{\theta} = \left(-\frac{q}{2\pi\gamma m r^2}\right)(\psi - \psi_0).$$

## Уравнение параксиального луча

Здесь мы запишем уравнение параксиального луча в виде, соответствующем системе с аксиальной симметрией при принятых ранее допущениях. Чтобы вывести уравнение параксиального луча, приравняем силу радиального ускорения силам электрическим и магнитным со стороны внешних полей. Нужно помнить, что величина  $\gamma = \gamma(t)$ .

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r (\dot{\theta})^2 = q(E_r + r \dot{\theta} B_z).$$

Применим теорему Буша и независимость  $B_z$  от  $r$ :

$$-\dot{\theta} = \frac{q}{2\gamma m} \left(B_z - \frac{\psi_0}{\pi r}\right).$$

Исключим  $\dot{\theta}$  и подставим  $\dot{\gamma} \approx \frac{\beta q E_z}{mc}$ :

$$\ddot{r} + \frac{\beta q E_z}{\gamma m c} \dot{r} + \frac{q^2 B_z^2}{4\gamma^2 m^2} r - \frac{q^2 \psi_0^2}{4\pi^2 \gamma^2 m^2} \left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{q E_r}{\gamma m} = 0.$$

## Уравнение огибающей для круглого и эллиптического пучка

Учитывая, что:

$$\dot{r} = \beta c r',$$

$$\ddot{r} = r''(\dot{z})^2 + r' \ddot{z} \approx r'' \beta^2 c^2 + r' \beta' \beta c^2.$$

А также, если в области пучка нет никаких зарядов, то, разлагая в ряд Тейлора в окрестности оси и оставляя только первый член, с учетом

$$\nabla \vec{E} = 0$$

получаем

$$E_r = -0.5 r E_z' \approx -0.5 r \gamma'' m c^2 / q.$$

Тогда окончательно можем записать уравнение огибающей для круглого пучка радиуса  $r$  с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями:

$$r'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' r' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' r + k r - \frac{2I}{I_a (\beta \gamma)^3} \frac{1}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^3} = 0;$$

и для эллиптического пучка:

$$\begin{cases} a'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' a' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' a + k_x a - \frac{4I}{I_a (\beta \gamma)^3} \frac{1}{(a+b)} - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' b' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' b + k_y b - \frac{4I}{I_a (\beta \gamma)^3} \frac{1}{(a+b)} - \frac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

## Магнитные линзы

Фокусирующими элементами могут являться: соленоиды и магнитные квадрупольные линзы.

## Соленоиды

$k_x = k_y = k_s$  - жесткость соленоида:

$$k_s = \left( \frac{e B_z}{2 m_e c \beta \gamma} \right)^2 = \left( \frac{e B_z}{2 \beta \gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 e \cdot \text{volt}/c} \right)^2 = \left( \frac{c B_z [\text{T}]}{2 \beta \gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot \text{volt}} \right)^2.$$

## Квадрупольи

$k_q = \frac{e G}{p c}$  - жесткость квадрупольи, где  $G = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$  - градиент магнитного поля, причем

$k_x = k_q, k_y = -k_q$ .

$$k_q = \left( \frac{e G}{m_e c \beta \gamma} \right) = \left( \frac{e G}{\beta \gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 e \cdot \text{volt}/c} \right) = \left( \frac{c G}{\beta \gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot \text{volt}} \right).$$

## Продольная динамика пучка

Уравнение на продольную динамику пучка можно решить независимо от уравнения на огибающую, чтобы в уравнении на огибающую уже использовать готовую функцию энергии пучка от  $z$ . Считая, что скорость электрона достаточно близка к скорости света и следовательно его продольная координата  $z \approx ct$ , а импульс  $p_z \approx \gamma m c$

$$\frac{d\gamma}{dz} \approx \frac{eE_z}{mc^2},$$

Тогда достаточно один раз проинтегрировать функцию  $E_z(z)$ :

## Решение уравнения огибающей для эллиптического пучка с фокусирующими элементами

Уравнение огибающей для эллиптического пучка с полуосями  $a, b$  с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями:

$$\begin{cases} a'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' a' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' a + k_q a - \frac{2P}{(a+b)} - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' b' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' b - k_q b - \frac{2P}{(a+b)} - \frac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

Пусть  $x = \frac{da}{dz}, y = \frac{db}{dz}, \frac{d\gamma}{dz} \approx \frac{eE_z}{mc^2}, k = \frac{1}{R}$  — кривизна, тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' a' - \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' a - k_q a + \frac{2P}{(a+b)} + \frac{\epsilon_x^2}{a^3} \\ \frac{da}{dz} = x \\ \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' b' - \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' b + k_q b + \frac{2P}{(a+b)} + \frac{\epsilon_x^2}{b^3} \\ \frac{db}{dz} = y \end{cases}$$

Пусть  $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ a \\ y \\ b \end{bmatrix}$ , теперь составим дифференциальное уравнение  $X' = F(X)$ .

## Уравнение траектории для одной частицы

Векторный потенциал в соленоиде имеет только одну компоненту и легко выражается через  $B_z(z)$ :

$$A_\phi(z, r) = \sum_0^{inf} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} B_z^{2n} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

Следовательно Лагранжиан в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$L = -mc^2(1 - \beta^2)^{1/2} + \frac{e}{c} A_\phi r \dot{\phi}.$$

Из аксиальной симметрии следует существование интеграла движения:

$$P_\phi = \gamma m r^2 \dot{\phi} + \frac{e}{c} r A_\phi = \gamma m r^2 \dot{\phi}_0.$$

Продифференцировав по  $z$  получим:

$$\phi' - \phi'_0 = -\frac{e}{pc} \frac{A_\phi}{r}.$$

И в параксиальном приближении:

$$\phi' - \phi'_0 = -\frac{e}{pc} B_z(z).$$

Откуда:

$$\delta\phi = -\int \frac{e}{2pc} B_z(z) dz.$$

Тогда и уравнения траектории в приведенных координатах выглядят так:

$$\begin{cases} \tilde{x}'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' \tilde{x}' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' \tilde{x} + k_s \tilde{x} = 0, \\ \tilde{y}'' + \frac{1}{\beta^2 \gamma} \gamma' \tilde{y}' + \frac{1}{2\beta^2 \gamma} \gamma'' \tilde{y} + k_s \tilde{y} = 0, \end{cases}$$

## Литература

1. Дж. Лоусон "Физика пучков заряженных частиц" ([https://www.studmed.ru/louson-dzh-fizika-puchkov-zaryazhennyh-chastice\\_7a5ae1fcef4.html](https://www.studmed.ru/louson-dzh-fizika-puchkov-zaryazhennyh-chastice_7a5ae1fcef4.html)).
2. Н.А. Винокуров "Лекции по электронной оптике для ускорительных физиков" (<http://accel.inp.nsk.su/refs/Elopt24.pdf>).
3. А.А. Жоленц "О компенсации влияния поля соленоида квадрупольными линзами" ([http://www.inp.nsk.su/images/preprint/1981\\_080.pdf](http://www.inp.nsk.su/images/preprint/1981_080.pdf)).

In [ ]: