Огибающая пучка с учетом влияния пространственного заряда

V. Fedorov (mailto:fuodorov1998@gmail.com), D. Nikiforov (mailto:nikdanila@bk.ru), A. Petrenko (http://www.inp.nsk.su/~petrenko/), (Novosibirsk, 2019)

Сначала разберем теорию, затем расчитаем огибающую электронного пучка в ЛИУ-5 с помощью Python и Astra, приведем сравнение результатов

Уравнения Максвелла

Объемная плотность тока пучка $\jmath = \rho v$, где ρ - объемная плотность заряда,v - скорость пучка. Запишем дифференциальные уравнения Максвелла:

$$\nabla \vec{D} = 4\pi\rho,$$
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi\vec{\jmath}}{c},$$

где $\vec{D}$ - индукция электрического поля, $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля, c - скорость света. Используем теорему Стокса об интегрировании дифференциальных форм, чтобы получить уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{D}\overrightarrow{dS} = 4\pi \int\limits_V \rho dV,$$
$$\oint\limits_{\partial S} \vec{H}\overrightarrow{dl} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S \vec{\jmath}\overrightarrow{dS}.$$

Найдем D_r для цилиндрического пучка радиуса a с постоянной плотностью ρ_0:

$$D_r = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^r \rho(\xi)\xi d\xi = \begin{cases} 2\pi\rho_0 r, r < a, \\ \dfrac{2\pi\rho_0 a^2}{r}, r > a. \end{cases}$$

Учитывая, что в вакууме $D = E$, $H = B$, E - напряженность электрического поля, B - индукция магнитного поля, и в плоском пространстве в декартовой системе координат $H_\alpha = \beta D_r$, где $\beta = \dfrac{v}{c}$, радиальная компонента силы F_r из силы Лоренца $\vec{F} = e\vec{E} + \dfrac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$:

$$F_r = eE_r - \frac{ev_z B_\alpha}{c} = eE_r(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{eE_r}{\gamma^2}.$$

Полезно выразить поле через ток $I = \rho_0 v\pi a^2$, тогда:

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{2Ir}{a^2 v}, r < a, \\ \dfrac{2I}{rv}, r > a. \end{cases}$$

Уравнения движения

Второй закон Ньютона $\dot{p}_r = F_r$, используем параксиальное приближение и считаем $\gamma = const$:

$$\gamma m\ddot{r} = \frac{eE_r}{\gamma^2} = \frac{2Ie}{\gamma^2 a^2 v} r,$$

получилось линейное уравнение, но так как все частицы движутся нужно учесть, что $a = a(t)$. Решение линейного уравнения можно представить как линейное преобразование фазовой плоскости. Так как отрезок на фазовой плоскости при невырожденном линейном преобразовании переходит в отрезок, то его можно охарактеризовать одной точкой. Следовательно, выберем крайнюю точку $r = a$, которая будет характеризовать крайнюю траекторию:

$$\gamma m\ddot{r} = \frac{2Ie}{\gamma^2 a v}.$$

Перейдем к дифференцированию по z, учтем, что $dt = \dfrac{dz}{v}$, тогда:

$$a'' = \frac{e}{a} \frac{2I}{m\gamma^3 v^3}.$$

Введем характерный альфвеновский ток $I_a = \dfrac{mc^3}{e} \approx$ 17 kA, следовательно:

$$a'' = \frac{2I}{I_a (\beta\gamma)^3} \frac{1}{a}.$$

Учтем внешнюю фокусировку, предполагая суперпозицию полей (верно не всегда, например, в нелинейных средах это не выполняется), получим:

$$a'' + k(z)a - \frac{2I}{I_a (\beta\gamma)^3} \frac{1}{a} = 0,$$

что напоминает уравнение огибающей:

$$w'' + kw - \frac{1}{w^3} = 0,$$

где $w = \sqrt{\beta}$.

Уравнения огибающей для эллиптического пучка с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями

Распределение Капчинского-Владимирского:

$$f = A\delta(1 - \frac{\beta_x x'^2 + 2\alpha_x x x' + \gamma_x x^2}{\epsilon_x} - \frac{\beta_y y'^2 + 2\alpha_y y y' + \gamma_y y^2}{\epsilon_y}),$$

где A - инвариант Куранта-Снайдера. Полуоси эллипса:

$$a = \sqrt{\epsilon_x \beta_x}, b = \sqrt{\epsilon_y \beta_y}.$$

Поле получается линейно внутри заряженного эллиптического цилиндра:

$$E_x = \frac{4I}{v}\frac{x}{a(a+b)},$$

$$E_y = \frac{4I}{v}\frac{y}{b(a+b)}.$$

Проверим, что $\nabla\vec{E} = 4\pi\rho$:

$$I = \rho v \pi a b,$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{4I(a+b)}{\pi(a+b)ab} = \frac{4I}{\pi ab} = 4\pi\rho.$$

Так как поля линейные, они добавятся к полям фокусирующей линзы. Подставим в уравнение огибающей $a = \sqrt{\epsilon}_x w_x, b = \sqrt{\epsilon}_y w_y$:

$$a'' + k_{xt} a - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0,$$

где $k_{xt} = k_x + k_{xsc}$ - полная жесткость, k_x - жесткость линзы, а $k_{xsc} = \dfrac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3}\dfrac{1}{a(a+b)}$. В итоге получаем систему уравнений, связанных через пространственный заряд:

$$\begin{cases} a'' + k_x a - \dfrac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3}\dfrac{1}{(a+b)} - \dfrac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + k_y b - \dfrac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3}\dfrac{1}{(a+b)} - \dfrac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

Количественный критерий применимости приближения ламинарности течения

Данная система уравнений позволяет учесть 2 эффекта, мешающих сфокусировать пучок в точку - конечность эммитанса и пространственный заряд. Работают члены одинаково, поэтому можно сравнить эти величины. Когда ток I малый - слабое отталкивание, если ток I большой - сильное отталкивание, следовательно, эммитанс можно откинуть и считать течение ламинарным. Очевидно, количественный критерий применимости ламинарности течения выглядит так:

$$\sqrt{\frac{2I}{I_a(\beta\gamma)^3}} \gg \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}.$$

Видно, что пространственный заряд влияет на огибающую больше там, где β-функция больше, а в вблизи фокуса влиянием пространственного заряда можно пренебречь.

Теорема Буша

В качестве дополнения к выводу уравнения огибающей пучка докажем важную вспомогательную теорему, которая называется теоремой Буша. Она связывает угловую скорость заряженной частицы, движущейся в аксиально-симметричном магнитном поле, с магнитным потоком, охваченным окружностью с центром на оси и проходящим через точку, в которой расположена частица.

Рассмотрим заряд q, движущийся в магнитном поле $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$. Приравняем θ -составляющую силы Лоренца к производной момента импульса по времени, деленной на r:

$$F_\theta = -q(\ddot{r}B_z - \dot{z}B_r) = \frac{d}{rdt}(\gamma m r^2 \dot{\theta}).$$

Поток, пронизывающий площадь, охваченную окружностью радиуса r, центр которой расположен на оси, а сама она проходит через точку, в которой расположен заряд, записывается в виде $\psi = \int\limits_0^r 2\pi r B_z dr$. Когда частица перемещается на $\overrightarrow{dl} = (dr, dz)$, скорость изменения потока, охваченного этой окружностью, можно найти из второго уравнения Максвелла $\nabla\vec{B} = 0$. Таким образом,

$$\dot{\psi} = 2\pi r(-B_r\dot{z} + B_z\dot{r}).$$

После интегрирования по времени из приведенных уравнений получаем следующее выражение:

$$\dot{\theta} = (-\frac{q}{2\pi\gamma m r^2})(\psi - \psi_0).$$

Уравнение параксиального луча

Здесь мы запишем уравнение параксиального луча в виде, соответсвующем системе с аксиальнорй симметрией при принятых ранее допущениях. Чтобы вывести уравнение параксиального луча, приравняем силу радиального ускорения силам электрическим и магнитным со стороны внешних полей. Нужно помнить, что величина $\gamma = \gamma(t)$.

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r(\dot{\theta})^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z).$$

Применим теорему Буша и независимость B_z от r :

$$-\dot{\theta} = \frac{q}{2\gamma m}(B_z - \frac{\psi_0}{\pi r}).$$

Исключим $\dot{\theta}$ и подставим $\dot{\gamma} \approx \dfrac{\beta q E_z}{mc}$:

$$\ddot{r} + \frac{\beta q E_z}{\gamma m c}\dot{r} + \frac{q^2 B_z^2}{4\gamma^2 m^2}r - \frac{q^2\psi_0^2}{4\pi^2\gamma^2 m^2}(\frac{1}{r^3}) - \frac{qE_r}{\gamma m} = 0.$$

Уравнение огибающей для круглого и эллиптического пучка

Учитывая, что:

$$\dot{r} = \beta c r',$$
$$\ddot{r} = r''(\dot{z})^2 + r'\ddot{z} \approx r''\beta^2 c^2 + r'\beta'\beta c^2.$$

А также, если в области пучка нет никаких зарядов, то, разлагая в ряд Тейлора в окрестности оси и оставляя только первый член, с учетом

$$\nabla \vec{E} = 0$$

получаем

$$E_r = -0.5 r E_z' \approx -0.5 r \gamma'' mc^2/q.$$

Тогда окончательно можем записать уравнение огибающей для круглого пучка радиуса r с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями:

$$r'' + \frac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' r' + \frac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' r + kr - \frac{2I}{I_a(\beta\gamma)^3}\frac{1}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^3} = 0;$$

и для эллиптического пучка:

$$\begin{cases} a'' + \dfrac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' a' + \dfrac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' a + k_x a - \dfrac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3}\dfrac{1}{(a+b)} - \dfrac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + \dfrac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' b' + \dfrac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' b + k_y b - \dfrac{4I}{I_a(\beta\gamma)^3}\dfrac{1}{(a+b)} - \dfrac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

Магнитные линзы

Фокусирующими элементами могут являться: соленоиды и магнитные квадрупольные линзы.

Соленоиды

$k_x = k_y = k_s$ - жесткость соленоида:

$$k_s = \left(\frac{eB_z}{2m_e c\beta\gamma}\right)^2 = \left(\frac{eB_z}{2\beta\gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 e \cdot \mathrm{volt}/c}\right)^2 = \left(\frac{cB_z[\mathrm{T}]}{2\beta\gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot \mathrm{volt}}\right)^2.$$

Квадруполи

$k_q = \dfrac{eG}{pc}$ - жесткость квадруполя, где $G = \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \dfrac{\partial B_y}{\partial x}$ - градиент магнитного поля, причем $k_x = k_q, k_y = -k_q$.

$$k_q = \left(\frac{eG}{m_e c\beta\gamma}\right) = \left(\frac{eG}{\beta\gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 e \cdot \mathrm{volt}/c}\right) = \left(\frac{cG}{\beta\gamma \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot \mathrm{volt}}\right).$$

Продольная динамика пучка

Уравнение на продольную динамику пучка можно решить независимо от уравнения на огибающую, чтобы в уравнении на огибающую уже использовать готовую функцию энергии пучка от z. Считая, что скорость электрона достаточно близка к скорости света и следовательно его продольная координата $z \approx ct$, а импульс $p_z \approx \gamma mc$

$$\frac{d\gamma}{dz} \approx \frac{eE_z}{mc^2},$$

Тогда достаточно один раз проинтегрировать функцию $E_z(z)$:

Решение уравнения огибающей для эллиптического пучка с фокусирующими элементами

Уравнение огибающей для эллиптического пучка с полуосями a, b с распределением Капчинского-Владимирского с внешней фокусировкой линейными полями:

$$\begin{cases} a'' + \frac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' a' + \frac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' a + k_q a - \frac{2P}{(a+b)} - \frac{\epsilon_x^2}{a^3} = 0, \\ b'' + \frac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' b' + \frac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' b - k_q b - \frac{2P}{(a+b)} - \frac{\epsilon_y^2}{b^3} = 0. \end{cases}$$

Пусть $x = \frac{da}{dz}, y = \frac{db}{dz}, \frac{d\gamma}{dz} \approx \frac{eE_z}{mc^2}, k = \frac{1}{R}-$ кривизна, тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' a' - \frac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' a - k_q a + \frac{2P}{(a+b)} + \frac{\epsilon_x^2}{a^3} \\ \frac{da}{dz} = x \\ \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\beta^2\gamma}\gamma' b' - \frac{1}{2\beta^2\gamma}\gamma'' b + k_q b + \frac{2P}{(a+b)} + \frac{\epsilon_x^2}{b^3} \\ \frac{db}{dz} = y \end{cases}$$

Пусть $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ a \\ y \\ b \end{bmatrix}$, теперь составим дифференциальное уравнение $X' = F(X)$.

Литература

1. Дж. Лоусон "Физика пучков заряженных частиц"
2. Н.А. Винокуров "Лекции по электронной оптике для ускорительных физиков"