HW4

Степурин Алексей M3134

1 Найти в S_4 элементы, которые невозможно представить ≤ 2 транспозициями.

Lm1. Цикл длины n невозвможно представить $< n-1$ транспозициями.

∇ Предположим, что некоторый цикл длины n представим менее чем $n-1$ транспозициями. Представим цикл в виде графа, так что элементы цикла - это вершины графа, а транспозиции - ребра, соединяющие соответственные вершины-элементы. Ясно, что в цикле из любого элемента можно прийти в любой другой. Тогда из любой вершины графа существует путь по ребрам в любую другую вершину, следовательно, этот граф состоит из единственной компоненты связности, но в графе с n вершинами и $\leq n-2$ ребрами хотя бы две компоненты связности !!! $\triangle$.

Lm2. Цикл длины n представим $n-1$ транспозициями.

∇ Пусть транспозиция (i, j) - перестановка элементов, стоящих на позициях i и j. Тогда цикл $(k_1, k_2, ..., k_n)$ раскладывается в $n-1$ транспозиций следующим образом: $(k_1, k_2, ..., k_n) = (k_n, k_{n-1}) \circ (k_{n-1}, k_{n-2}) \circ ... \circ (k_2, k_1)$. Например, для $n = 4$ представим цикл $(1, 4, 2, 3)$ таким образом: $(1, 4, 2, 3) = (3, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 1)$, тогда

1	2	3	4
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	2	3	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	1	3	2
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	3	1	2

таким образом мы построили верную перестановку данного цикла $\triangle$.

Из леммы 1 следует, что в S_4 перестановки представимы минимум тремя транспозициями, только если эти перестановки раскладываются в единственный цикл длины 4. Таких перестановок $(4-1)! = 6$ и они представляются следующими циклами: $(1, 2, 3, 4); (1, 2, 4, 3); (1, 3, 2, 4); (1, 3, 4, 2); (1, 4, 2, 3); (1, 4, 3, 2)$.

2 Доказать, что множества перестановок знаков 1 и -1 равномощны.

Пусть n — число элементов множества, на котором действуют перестановки.
Докажем по индукции: ∇
База: $n = 2$. Перестановки: $(1)(2); (1, 2)$. $sign((1)(2)) = 1$, $sign((1, 2)) = -1$.
Пусть для некоторого n верно, что $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1)$, тогда $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1) = c_+^n = c_-^n = \dfrac{n!}{2}$.

Добавим один элемент в множество элементов. Тогда всего перестановок для нового множества $(n+1)!$. Ясно, что если новый элемент добавился как свободный цикл, то знак этих перестановок не изменится, таких перестановок $n!$ (среди них знака 1 и знака -1 поровну). Вставить новый элемент в имеющиеся циклы первоначальной перестановки можно n способами. Тогда такой вставкой получаем как раз $n \cdot n!$ оставшихся перестановок. Если первоначальная перестановка была знака s, то после вставки она будет знака $-s$, т.к. изменится знак лишь одного цикла в перестановке (это ясно из леммы 2). Тогда в полученных перестановках будет поровну перестановок знаков 1 и -1, а следовательно для группы перестановок элементов полученного множества мощности $(n+1)$ перестановок знака 1 и знака -1 будет поровну $\triangle$.

3 Доказать, что любую перестановку можно представить композицией транспозиций из множества: $(1,2),(1,3),...,(1,n)$.

∇ Покажем, что любую транспозицию (i,j) можно представить используя данное множество транспозиций: $(i,j) = (1,j) \circ (1,i) \circ (1,j)$. Действительно:

1	...	i	...	j	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	i	...	1	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	1	...	i	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
1	...	j	...	i	...

Таким образом выражаем любую транспозицию, а следовательно, - и любую перестановку $\triangle$.