HW3

Степурин Алексей M3134

1

] $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$— полином n-ой степени с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0, 0, ...$. Сразу заметим, что операции сложения и умножения полиномов ассоциативны и коммутативны. Будем обозначать полином p степени n так: ${}_np(x)$.

a)

$\forall p(x) \in \mathbb{Z}[x]$:

] e_+ — нейтральный эл-т по сложению, тогда

$p(x) + e_+ = p(x) \quad => \quad e_+ = 0 \;\; (deg(0) = -\infty)$.

] θ_+ – поглощающий эл-т по сложению, тогда

$p(x) + \theta_+ = \theta_+ \quad => \quad p(x) = 0 \quad =>$ поглощающего по сложению нет.

Обратные по сложению: $p(x) + e_+ = p(x) \quad => \quad e_+ = p(x) - p(x) = p(x) + (-p(x)) = p(x) + p^{-1_+}(x) \quad => \quad p^{-1_+}(x) = -p(x)$, т.е. если $p(x)$ имеет коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2...$, то $p^{-1_+}(x)$ имеет коэффициенты $-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2...$.

] $e.$ — нейтральный эл-т по умножению, тогда

$p(x) \cdot e. = p(x) \quad => \quad e. = 1$.

] $\theta.$ – поглощающий эл-т по умножению, тогда

$p(x) \cdot \theta. = \theta. \quad => \quad \theta. = 0$.

Обратные по умножению: $p(x) \cdot e. = p(x) \quad => \quad e. = p(x) \cdot p^{-1.}(x) \quad => \quad p(x) \mid e. \quad => \quad p(x) = 1 \quad =>$ обратного по умножению элемента нет.

b)

При рассмотрении $\mathbb{Q}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$ рассуждения будут аналогичны $\quad => \quad$ ответ не изменится.

c)

Рассмотрим множества на предмет операций сложения и умножения:

- $\mathbb{Z}_{\leq n}$: сумма полиномов степени не больше n равна полиному степени не больше n, произведение полиномов степени n равно полиному степени $2n > n$, $=>$ сложение является законом композиции на $\mathbb{Z}_{\leq n}$, а умножение - нет.

  Нейтральный и обратный для каждого, степенью не превосходящие n, есть (см. п. (a)) $=>$ $\mathbb{Z}_{\leq n}$ — абелева группа.
- $\mathbb{Z}_{<n}$ или $\mathbb{Z}_{\leq n-1}$: рассуждения аналогичны, как и для $\mathbb{Z}_{\leq n}$, при $n = 1$ такое множество обратится в кольцо целых чисел.
- $\mathbb{Z}_{=n}$:] ${}_np(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$, ${}_nq(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + (-\alpha_n)x^n \quad =>$ $deg\;({}_np(x) + {}_nq(x)) < n$, произведение полиномов степени n равно полиному степени $2n$, $=>$ сложение и умножение не являются законами композиции на $\mathbb{Z}_{=n}$.
- $\mathbb{Z}_{\geq n}$:] ${}_np(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$, ${}_nq(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + (-\alpha_n)x^n \quad =>$ $deg({}_np(x) + {}_nq(x)) < n$, $deg({}_{\geq n}p(x) \cdot {}_{\geq n}q(x)) \geq 2n \geq n \quad =>$ умножение является законом композиции на $\mathbb{Z}_n$, а сложение - нет.

- $\mathbb{Z}_{=2n}$: сумма полиномов степени $2n$ может иметь степень $2n-1$. Произведение полиномов четных степеней - всегда полином четной степени => умножение является законом композиции на $\mathbb{Z}_{=2n}$, а сложение - нет.
- $\mathbb{Z}_{=2n+1}$: сумма полиномов степени $2n+1$ может иметь степень $2n$. Произведение полиномов нечетных степеней - всегда полином четной степени => сложение и умножение не являются законами композиции на $\mathbb{Z}_{=2n+1}$.

Абелевы группы по сложению образуют только подмножества $\mathbb{Z}_{\leq n}$ и $\mathbb{Z}_{=n}$. О согласованности операций сложения и умножения говорить можно лишь в случае для $\mathbb{Z}_{<n}$ при $n=1$ (тогда такое множество станет кольцом целых чисел, но полем может быть лишь при рассмотрении $\mathbb{Q}[x]$ или $\mathbb{R}[x]$), т.к. в остальных случаях операции умножения и сложения не являются законами композиции на указанных подмножествах одновременно, также из этого следует, что эти подмножества не могут являться полями.

d)

Ясно, что композиция полиномов с целыми коэффициентами — полином с целыми коэффициентами (не вижу смысла это как-то доказывать). Множество полиномов в таком случае можно трактовать как множество функций от аргумента x, тогда композиция ассоциативна и некоммутативна, правый и левый нейтральный — $e(x)=x$, левый поглощающий — $\forall C \in \mathbb{Z}\ \ \theta_C(x)=C$. $\forall_n p(x), {}_k q(x)\ \ deg((p \circ q)(x)) = nk$. $]\ \ {}_k q(x) ={}_k p^{-1}(x),\ \ deg(e(x)) = 1 = nk\ \ => \ \ k=\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}\ \ if\ \ n>1\ \ =>$ обратный есть не для всех. Тогда множество полиномов с операцией композиции — моноид.

2

$$p(x) = x^8 + 6x^7 - 45x^6 - 131x^5 + 738x^4 - 531x^3 + 130x^2 - 744x + 576 =$$

$$= (x-1)(x^7 + 7x^6 - 38x^5 - 169x^4 + 569x^3 + 38x^2 + 168x - 576) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^6 + 10x^5 - 8x^4 - 193x^3 - 10x^2 + 8x + 192) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x-4)(x^5 + 14x^4 + 48x^3 - x^2 - 14x - 48) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x-4)(x^3-1)(x^2+14x+48) =$$

$$= (x-1)^2(x-3)(x-4)(x+6)(x+8)(x^2+x+1);$$

Корни в $\mathbb{R} : -8, -6, 1, 3, 4;$

Корни в $\mathbb{C} : -8, -6, 1, 3, 4, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

3

a)

$$p(x) = x^5 - 14x^3 + 2x^2 + 45x - 18 = (x^2+2x-1)(x+3)(x-2)(x-3);$$

$$q(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 3x - 2 = (x^2+2x-1)(x+2)(x+1)(x-1);$$

$$NOD(p,q) = x^2 + 2x - 1.$$

b)

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2; q(x) = x^2 - x + 1;$$

Корни полинома $q(x) : \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2};$

Подстановкой этих корней в $p(x)$ получаем ненулевое значение в обоих случаях => ни один из множителей разложения $q(x)$ не является множителем разложения $p(x)$ => $NOD(p,q) = 1$.

4

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}; \tag{3}$$

c)

$$C = A + 1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

f)

$$(A + \lambda \cdot E)(A + B)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^T = \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ 31 & 55 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}; \tag{10}$$

b)

Неподходящие размеры для произведения.

c)

$$C = A + \lambda \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 15 \\ 4 & 7 & 16 \end{pmatrix}; \tag{12}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

e)

$$A \times B^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22 & 8\\ 43 & 17\end{pmatrix}; \tag{14}$$

f)

Нет единичной матрицы размера (2, 3).

3)

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \tag{15}$$

a)

Неподходящие размеры для суммы.

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \tag{16}$$

c)

Неподходящие размеры для суммы.

d)

$$B^T = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \tag{17}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \tag{18}$$

f)

Нет единичной матрицы размера (2, 3).

4)

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}; \tag{19}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}; \tag{20}$$

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}; \tag{21}$$

c)

$$C = A + \lambda \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}; \tag{22}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}; \tag{23}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}; \tag{24}$$

f)

$$(A+\lambda\cdot E)(A+B)^T = \left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 6 & 7\\ 6 & 2 & 6\\ 7 & 6 & 7\end{pmatrix}; \tag{26}$$

5)

$$A = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt[5]{2}\\ 1 & 15\\ 0 & -\frac{16}{7}\end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}; \tag{27}$$

a)

Неподходящие размеры для суммы.

b)

$$C = A\times B = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt[5]{2}\\ 1 & 15\\ 0 & -\frac{16}{7}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9-\sqrt[5]{4} & 3-5\sqrt[5]{2} & -18+\frac{9}{7}\sqrt[5]{2}\\ 3-15\sqrt[5]{2} & -76 & \frac{177}{7}\\ \frac{16}{7}\sqrt[5]{2} & \frac{80}{7} & -\frac{144}{49}\end{pmatrix}; \tag{28}$$

c)

Неподходящие размеры для суммы.

d)

$$B^T = \begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}3 & -\sqrt[5]{2}\\ -1 & -5\\ 6 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}; \tag{29}$$

e)

Неподходящие размеры для произведения.

f)

Нет единичной матрицы размера (3, 2).