HW2

Степурин Алексей M3134

1

a)

$$M = \mathbb{N}, x * y = NOD(x, y);$$
$$x = 2^{x_2} \cdot 3^{x_3} \cdot 5^{x_5} ...;$$
$$y = 2^{y_2} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{y_5} ...;$$
$$NOD(x, y) = 2^{min(x_2,y_2)} \cdot 3^{min(x_3,y_3)} \cdot 5^{min(x_5,y_5)} ...;$$

Коммутативность есть: $x * y = 2^{min(x_2,y_2)} \cdot 3^{min(x_3,y_3)} \cdot 5^{min(x_5,y_5)} ... =$
$= 2^{min(y_2,x_2)} \cdot 3^{min(y_3,x_3)} \cdot 5^{min(y_5,y_5)} ... = y * x;$

Ассоциативность есть: $(x * y) * z = 2^{min(min(x_2,y_2),z_2)} \cdot 3^{min(min(x_3,y_3),z_3)} \cdot 5^{min(min(x_5,y_5),z_5)} ... =$
$= 2^{min(min(z_2,y_2),x_2)} \cdot 3^{min(min(z_3,y_3),x_3)} \cdot 5^{min(min(z_5,y_5),x_5)} ... = x * (y * z);$

Нейтральный: $\forall x \in \mathbb{N} \;\; NOD(x, e) = x \quad => \quad e = 2^{\infty} \cdot 3^{\infty} \cdot 5^{\infty} ... \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

b)

$$M = \mathbb{Z}, x * y = x^2 + y^2;$$

Коммутативность есть: $x * y = x^2 + y^2 = y^2 + x^2 = y * x;$

Ассоциативности нет: $(x * y) * z = (x^2 + y^2)^2 + z^2 \neq (z^2 + y^2)^2 + x^2 = x * (y * z)$

Нейтральный: $\forall x \in \mathbb{Z} \;\; x^2 + e^2 = x \quad => \quad e = \sqrt{x - x^2} \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

c)

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) * (a, b) = (x, b);$$

Коммутативности нет: $(a, b) * (c, d) = (a, d);$
$(c, d) * (a, b) = (c, b) \neq (a, d);$

Ассоциативность есть: $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, d) * (e, f) = (a, f);$
$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c, f) = (a, f);$

Нейтральный: $\forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} (x, y) * (e_1, e_2) = (x, e_2) = (x, y) \quad => \quad e_2 = y \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

2

$$\forall f, g \text{ — строго возр-ие, непр-ые, опр-ы на } [0,1] : f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1;$$

Назовём множество таких функций F.

Передадим привет матану: композиция строго возрастающих функций строго возрастает, композиция непрерывных функция непрерывна. Рассcмотрим композицию $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: если g — строго возрастает и непрерывна на $[0,1]$ и g(0) = 0, g(1) = 1, то $D(f) = E(g) = D(g) = [0,1]$, тогда $f(g(x))$ определена на $[0,1]$. Ясно что $f(g(0)) = f(0) = 0, f(g(1)) = f(1) = 1$. Тогда множество F образует магму отнозительно композиции.

Ассоциативность: $\forall f, g, h \in F : \; ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x);$

Нейтральный элемент e: $\forall f \in F : \; (f \circ e)(x) = f(x)$ и $(e \circ f)(x) = f(x) \; => \; f(e(x)) = f(x)$ и $e(f(x)) = f(x) \; => \; e(x) = x$.

Обратный элемент: $\forall f \in F \; \exists f^{-1} : f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = e(x) = x$. Ясно, что графики обратных друг другу функций будут симметричны относительно прямой $e(x) = x$.

Тогда F образует группу относительно композиции.

3

$$G = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, H = \{0,1,2\};$$

$$+_9 \text{— сумма по модулю 9;}$$

$$+_3 \text{— сумма по модулю 3;}$$

$$\times_9 \text{— произведение по модулю 9;}$$

$$\times_3 \text{— произведение по модулю 3;}$$

a)

$(H, +_3)$:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$(H, \times_3)$:

$\times_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

b)

Ассоциативность и коммутативность всех структур очевидны.

Нейтральный элемент в $(G, +_9)$ и $(H, +_3)$ — 0.

Нейтральный элемент в $(G, \times_9)$ и $(H, \times_3)$ — 1.

Пары обратных друг другу в $(G, +_9)$: $(0,0), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)$ — все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(H, +_3)$: $(0,0), (1,2)$ – все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(G, \times_9)$: $(1,1), (2,5), (4,7)$ — не все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(H, \times_3)$: $(1,1), (2,2)$ — не все имеют обратный.

Ответ: $(G, +_9), (H, +_3)$ — группы, $(G, \times_9), (H, \times_3)$ — моноиды.

c)

$\rceil$ $f \in Hom(G,H) : \forall x \in G \;\; f(x) = x \; mod \; 3$;
$f(x +_9 y) = (x +_9 y) \; mod \; 3 = (x \; mod \; 3) +_3 (y \; mod \; 3) = f(x) +_3 f(y)$;
$f(0) = 0$;
$f(\{0,3,6\}) = \{0\}$;
$f(\{1,4,7\}) = \{1\}$;
$f(\{2,5,8\}) = \{2\}$;
Получаем, что f - сюръективный гомоморфизм групп $(G, +_9), (H, +_3)$.

d)

$Ker\; f = \{0,3,6\}$; $\;Im\; f = \{0,1,2\}$;
$f(1) = 1$; $\;f^{-1}(1) = \{0,4,7\}$.

e)

Группы: $(G, +_9), (H, +_3)$.

Подгруппы:

- обе несобственный подгруппы;
- $(\{0\}, +_9)$ и $(\{0\}, +_3)$ соответственно;
- $(\{0,3,6\}, +_9$ для группы $(G, +_9)$.

4

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

a)

Коммутативность оперции очевидна из таблицы. Нейтральный элемент — c, каждый элемент является обратным самому себе.

Проверим ассоциативность: если в выражении есть c, то

- $(c * x_1) * x_2 = x_1 * x_2 = c * (x_1 * x_2)$;
- $(x_1 * c) * x_2 = x_1 * x_2 = x_1 * (c * x_2)$;
- $(x_1 * x_2) * c = x_1 * x2 = x_1 * (x_2 * c)$,

проверим остальные случаи (уже зная, что закон коммутативен):

- $a * (b * d) = a * a = d * d = (a * b) * d$;
- $b * (a * d) = b * b = d * d = (b * a) * d$;
- $d * (a * b) = d * d = b * b = (d * a) * b$;
- $a * (a * a) = a * c = c * a = (a * a) * a$;

- $b * (b * b) = b * c = c * b = (b * b) * b$;
- $d * (d * d) = d * c = c * d = (d * d) * d$;
- $a * (b * b) = a * c = a = d * b = (a * b) * b$;
- $a * (d * d) = a * c = a = b * d = (a * d) * d$;
- $b * (a * a) = b * c = b = d * a = (b * a) * a$;
- $b * (d * d) = b * c = b = a * d = (b * d) * d$;
- $d * (a * a) = d * c = d = b * a = (d * a) * a$;
- $d * (b * b) = d * c = d = a * b = (d * b) * b$;

Получаем, что тип данной структуры — группа.

b)

Нейтральный элемент — c, каждый элемент является обратным самому себе, поглощающих нет.

c)

a, b, d — нильпотенты, т.к. $a^2 = b^2 = d^2 = c$, c — идемпотент, т.к. c*c = c.

d)

Подгруппы: $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, c\}$ (с тем же законом композиции). Все подгруппы нормальные, т.к. закон коммутативен.

5

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad n = 2, 3, 5, 6, 8, \quad I = n\mathbb{Z};$$
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: \quad \overline{x} = x + I; \quad \overline{y} = y + I;$$
$$\overline{x} + \overline{y} = (x + I) + (y + I) = x + y + I = \overline{x + y};$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (x + I)(y + I) = xy + I = \overline{xy};$$

Обе операции ассоциативны и коммутативны, нулем будет $0_I = \overline{0} = I$, единицей — $1_I = \overline{1}$. Для сложения каждый элемент имеет обратный.

$$\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y + z} = \overline{x(y + z)} = \overline{xy + xz} = \overline{xy} + \overline{xz} = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z};$$
$$(\overline{x} + \overline{y})\overline{z} = \overline{x + y} \cdot \overline{z} = \overline{(x + y)z} = \overline{xz + yz} = \overline{xz} + \overline{yz} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z};$$

a)

Получаем, что $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — кольцо.
$n = 2, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$;
$n = 3, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$;
$n = 5, \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$;
$n = 6, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$;
$n = 8, \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$.

b)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, — области целостности, т.к. 2, 3, 5 — простые.
В $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ делители нуля $\overline{2}, \overline{3}$; В $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ делители нуля $\overline{2}, \overline{4}$;

c)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}, \ \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}, \ \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{1}, \ \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}:$ — нет обратного для $\overline{2}$ => не поле;
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}:$ — нет обратного для $\overline{2}$ => не поле;