HW?

Степурин Алексей M3134

1 Задачи на конец первой трети семестра

1.1 Найти в S_4 элементы, которые невозможно представить ≤ 2 транспозициями.

Lm1. Цикл длины n невозвможно представить $< n-1$ транспозициями.

∇ Предположим, что некоторый цикл длины n представим менее чем $n-1$ транспозициями. Представим цикл в виде графа, так что элементы цикла - это вершины графа, а транспозиции - ребра, соединяющие соответственные вершины-элементы. Ясно, что в цикле из любого элемента можно прийти в любой другой. Тогда из любой вершины графа существует путь по ребрам в любую другую вершину, следовательно, этот граф состоит из единственной компоненты связности, но в графе с n вершинами и $\leq n-2$ ребрами хотя бы две компоненты связности !!! $\triangle$.

Lm2. Цикл длины n представим $n-1$ транспозициями.

∇ Пусть транспозиция (i, j) - перестановка элементов, стоящих на позициях i и j. Тогда цикл $(k_1, k_2, ..., k_n)$ раскладывается в $n-1$ транспозиций следующим образом: $(k_1, k_2, ..., k_n) = (k_n, k_{n-1}) \circ (k_{n-1}, k_{n-2}) \circ ... \circ (k_2, k_1)$. Например, для $n = 4$ представим цикл $(1, 4, 2, 3)$ таким образом: $(1, 4, 2, 3) = (3, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 1)$, тогда

1	2	3	4
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	2	3	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	1	3	2
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	3	1	2

таким образом мы построили верную перестановку данного цикла $\triangle$.

Из леммы 1 следует, что в S_4 перестановки представимы минимум тремя транспозициями, только если эти перестановки раскладываются в единственный цикл длины 4. Таких перестановок $(4-1)! = 6$ и они представляются следующими циклами: $(1, 2, 3, 4); (1, 2, 4, 3); (1, 3, 2, 4); (1, 3, 4, 2); (1, 4, 2, 3); (1, 4, 3, 2)$.

1.2 Доказать, что множества перестановок знаков 1 и -1 равномощны.

Пусть n — число элементов множества, на котором действуют перестановки.
Докажем по индукции: ∇
База: $n = 2$. Перестановки: $(1)(2); (1, 2)$. $sign((1)(2)) = 1$, $sign((1, 2)) = -1$.
Пусть для некоторого n верно, что $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1)$, тогда $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1) = c_+^n = c_-^n = \dfrac{n!}{2}$.

Добавим один элемент в множество элементов. Тогда всего перестановок для нового множества $(n+1)!$. Ясно, что если новый элемент добавился как свободный цикл, то знак этих перестановок не изменится, таких перестановок $n!$ (среди них знака 1 и знака -1 поровну). Вставить новый элемент в имеющиеся циклы первоначальной перестановки можно n способами. Тогда такой вставкой получаем как раз $n \cdot n!$ оставшихся перестановок. Если первоначальная перестановка была знака s, то после вставки она будет знака $-s$, т.к. изменится знак лишь одного цикла в перестановке (это ясно из леммы 2). Тогда в полученных перестановках будет поровну перестановок знаков 1 и -1, а следовательно для группы перестановок элементов полученного множества мощности $(n+1)$ перестановок знака 1 и знака -1 будет поровну $\triangle$.

1.3 Доказать, что любую перестановку можно представить композицией транспозиций из множества: $(1,2),(1,3),...,(1,n)$.

∇ Покажем, что любую транспозицию (i,j) можно представить используя данное множество транспозиций: $(i,j) = (1,j) \circ (1,i) \circ (1,j)$. Действительно:

1	...	i	...	j	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	i	...	1	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	1	...	i	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
1	...	j	...	i	...

Таким образом выражаем любую транспозицию, а следовательно, - и любую перестановку $\triangle$.

2 Задачи второй трети семестра

2.1 Доказать, что если $a_1, a_2 \in V(\mathbb{K})$ — два линейно независимых вектора, то их взвешенная сумма и разность $k_1a_1 + k_2a_2,\ k_1a_1 - k_2a_2$ — также линейно независимы.

∇ Рассмотрим линейную комбинацию взвешенных суммы и разности с коэффициентами c_1, c_2 :

$$c_1(k_1a_1 + k_2a_2) + c_2(k_1a_1 - k_2a_2) = 0;$$

$$k_1(c_1 + c_2)a_1 + k_2(c_1 - c_2)a_2 = 0;$$

$$k_1(c_1 + c_2) = k_2(c_1 - c_2) = 0;$$

$$c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = 0;$$

$$c_1 = c_2 = 0 \ \ \triangle$$

2.2 Пусть M - множество, $P[x]$ - цепь вложений на M, докажите что тогда на M можно единственным образом ввести отношение нестрогого порядка, которое порождает $P[x]$ как цепь вложений по классам нестрого порядка по данному отношению нестрогого порядка.

∇ Имеем цепь вложений $\varnothing = P_0 \subset P_1 \subset \ P_2 \subset \ldots \subset P_n = M$. Построим по нему отношение нестрогого порядка $\leq$: для каждого класса P_k для $\forall m_1, m_2 \in P_k \setminus P_{k-1}$ пусть $m_1 = m_2$ и $\forall t \in P_{k-1}$ пусть $t < m_1$. Пускай элементу m_i соответствует класс P_i, тогда верно, что $P_i = \{m \in M : m \leq m_i\}$.

Докажем теперь, что такое отношение единственно. Предположим, что это не так и существует еще одно отношение нестрого порядка $\leq'$, порождающее ту же цепь вложений, тогда н. у. о. $\exists m_i, m_j \in M$: $m_i \leq m_j,\ m_i >' m_j$. Отсюда ясно, что $P_i \subseteq P_j$ и $P_i \supset P_j$!!! $\triangle$.

2.3

2.4 Для заданного частично упорядоченного множества M и цепи $P[M]$ написать функцию $f : M \to M$, такую что $P[M]$ становится fg-цепью: 1)$M = [0,1] \subset \mathbb{R}, P[M] = \{(0, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 2) $M = \mathbb{R}_+, P[M] = \{(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$.

1) $A_y = (0, y)$, тогда $g(A_y) = y$. Чтобы цепь была fg-цепью, необходимо и достаточно $f(g(A_y)) = y$, но $f(g(A_y)) = f(y)$, тогда f - тождественная функция.

2) Аналогично, только для $n = 0 : (0, n) = \varnothing$ определим $g((0, 0)) = 0$.

2.5 Докажите, что если $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис в V^n, то $det(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. Кроме того докажите что из линейной независимости некоторого набора из n векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V^n$ следует что $det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

∇ Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис в V^n, $\{v_i\}_{i=1}^n$ - набор векторов в V^n. Рассмотрим общую формулу для определителя, взятую из одной статьи на Хабре:

$$det(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{p(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}(v_{1\sigma_1} \dots v_{n\sigma_n}) \cdot det(e_1, \dots, e_n);$$

Теперь предположим, что $det(e_1, \dots, e_n) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \forall\{v_i\}_{i=1}^n \subset V^n \ \ det(v_1, \dots, v_n) = 0$!!!.

Если $\{v_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ и имеет мощность n, то это базис, для которого выполнено $det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ $\triangle$.

2.6

2.7 Пусть A - диагональная матрица (т.е. везде кроме главной диагонали у нее нули). Обозначим $A = diag(a11, ..., ann)$. Доказать, что $A^{-1} = diag(\frac{1}{A_{11}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}})$.

∇ Рассмотрим две диагональные матрицы A и B и скалярное произведение строки A_{i*} на столбец B_{*j}. Ясно, что это произведение не равно нулю тогда и только тогда, когда $i = j$. Тогда получаем, что AB - диагональная матрица, ведь $(AB)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = j$, причем $(AB)_{ii} = A_{ii}B_{ii}$. Пусть $B = diag(\frac{1}{A_{11}}, \dots, \frac{1}{A_{nn}})$, тогда $AB = diag(1, \dots, 1)$, т.е. AB - единичная матрица по умножению, $\ \Rightarrow \ \ B = A^{-1}$ $\triangle$.

2.8