DM SEM 3

alexey2512, progeranna

HW 3

Task 39

Центром графа называется вершина u, для которой кратчайшее расстояние до наиболее удаленной от u вершины минимально. Докажите, что у дерева не более двух центров.

На каждом шаге удаляем все листья дерева. Заметим, что при таком удалении центр дерева не смещается. Проделываем это до тех пор пока не останется одна или две вершины. Это и будет центром дерева.
1) докажем, что центры смежны. 2) В дереве не может быть более двух попарно смежных вершин

Task 41

Каждое дерево является двудольным графом. А какие деревья являются полными двудольными графами?

Пусть дерево из n вершин - полный двудольный граф. Пускай в первой доле k вершин, тогда во второй $n-k$. Т.к. граф полный, то всего $k(n-k) = n-1$ ребер. Найдем все возможные k:

$$kn - k^2 = n - 1$$

$$k^2 - kn + n - 1 = 0$$

$$D = n^2 - 4(n-1) = (n-2)^2$$

$$k = \frac{n \pm (n-2)}{2} = 1; n-1$$

Task 43

Докажите, что число помеченных неподвешенных деревьев есть n^{n-2}, используя теорему Кирхгофа.

Рассмотрим матрицу Кирхгофа:

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Бдуем рассматривать минор $(1,1)$ это матрицы. Тогда необходимо найти определитель той же матрицы, но размера $(n-1)*(n-1)$. Вычтем из каждой i-ой строки (кроме последней) (i + 1)-ую:

$$\begin{pmatrix} n & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & -n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель через разложение по последней строке. Пусть [x] = 1, если x - четно и -1 в ином случае. Тогда:

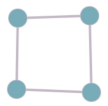
$$det = -[n-1+1](-n)^{n-2} - [n-1+2]n(-n)^{n-3} - [n-1+3]n^2(-n)^{n-4} - \ldots - [n-1+n-2]n^{n-3}(-n) + [n-1+n-1](n-1)n^{n-2} =$$

$$= -n^{n-2} - n^{n-2} - n^{n-2} - \ldots - n^{n-2} + (n-1)n^{n-2} = (n-1)n^{n-2} - (n-2)n^{n-2} = n^{n-2}$$

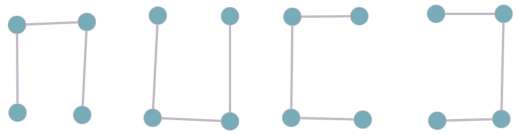
Task 46

Диаметром графа называют максимальное значение кратчайшего пути между двумя его вершинами. Пусть связный граф G имеет хотя бы 4 вершины и диаметр d. Докажите или опровергните, что у G есть остовное дерево с диаметром d.

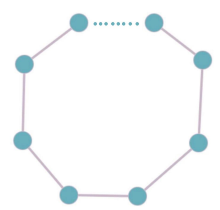
$\lhd$ $n = 4$, опровергнем
d=2:



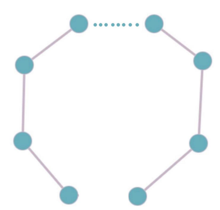
Все остовные (у каждого d=3):



$\lhd$ произвольный n, опровергнем следующим образом (примерчик):
] G - просто цикл:



После удаления ребра получаем d=n-1



Task 48

Докажите, что две вершины T_1 и T_2 в S_G соединены ребром тогда и только тогда, когда их объединение содержит ровно один простой цикл.

Примечание: T_1 и T_2 соединены ребром в S_G $\Leftrightarrow$ отличаются лишь одним ребром.

$\Rightarrow$ Если в дерево T_1 добавить ребро, которого нет в T_1, но есть в T_2, то получим $T_1 \cup T_2$, который будет содержать n вершин и n ребер. Такой граф содержит единственный простой цикл.

$\Leftarrow$ Если $T_1 \cup T_2$ содержит единственный простой цикл, то в нем n вершин и n ребер. Тогда удалением какого-то ребра из цикла можем получить и T_1, и T_2.

Task 49

Пусть связный граф G содержит n вершин, докажите, что диаметр S_G не превышает $n1$.

Любое дерево содержит n вершин и n - 1 ребер. Очевидно, что любое дерево может быть получено из любого другого на тех же вершинах заменой не более n - 1 ребер. Тогда между любыми двумя вершинами из S_G существует путь длины не более n - 1, следовательно диаметр S_G не превышает n - 1.

Task 50

Приведите пример связного графа G, содержащего n вершин, для которого граф S_G имеет диаметр $n1$.

Пример для произвольного n ($n >= 4$):
Возьмём полный граф на n вершинах. Выберем два остовных дерева T_1, T_2, отличающихся во всех рёбрах. Тогда расстояние между T_1, T_2 будет $n - 1$.

Task 51

Докажите, что для любого $1 \leq k \leq n1$ существует связный граф G, содержащий n вершин, такой что диаметр S_G равен nk.

Бамбук из k вершин и полный граф из $n - k + 1$ вершин. Получается, что $k - 1$ ребер в остовном дереве фиксированы. Получается груша такая.

Task 57

Для $n \leq 2$, найдите формулу для количества остовных деревьев K_n, содержащих ребро 12

Будем использовать формулу из задачи 56. Рассмотрим остовный лес, где одно из деревьев содержит вершины 1 и 2, а остальные - одиночные вершины. Тогда $k = n - 1, c_1 = 2, c_2 = 1, \dots, c_{n-1} = 1$. Тогда число остовных деревьев, содержащих ребро 1-2 равно:

$$c_1 c_2 \dots c_{n-1}(c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1})^{n-1-2} = 2 * 1 * \dots * 1 * n^{n-3} = 2n^{n-3}$$

HW4

Task 58

Сколько раз необходимо оторвать карандаш от бумаги, чтобы нарисовать граф K_n, не проводя никакое ребро два раза, в зависимости от n?

cases:

- Если n - нечетно, то степень каждой вершины графа K_n четна, тогда существует эйлеров цикл, который нарисует нам граф за один раз, т.е. отрывать карандаш от бумаги не придется.
- Если n - четно, то степень каждой вершины нечетна. В таком случае будем жадно бить граф на эйлеровы пути/циклы, чтобы минимизировать их количество. Тогда можно взять подграф со степенями $n - 1, n - 1, n-2, n-2, \dots, n-2$, который образует эйлеров путь. Осталось дорисовать оставшиеся $\frac{n-2}{2}$ ребер, которые попарно не имеют общих вершин. Таким образом придется оторвать карандаш $\frac{n-2}{2}$. Причем очевидно, что меньше нельзя, т.к. задача сводится к разбиению всех ребер на минимальное количество эйлеровых путей/циклов. Засчет того что степени всех вершин нечетны, можно разбить все ребра не менее чем на $\frac{n}{2}$ эйлеровых путей, отсюда и получаем ответ.

Task 59

Сколько раз необходимо оторвать карандаш от бумаги, чтобы нарисовать граф $K_{m,m}$, не проводя никакое ребро два раза, в зависимости от n и m?

cases:

- Если n, m - четно, то существует единственный эйлеров цикл.
- Если н.у.о. n - четно, m - нечетно, то всегда есть $\frac{n}{2}$ эйлеровых путей, меньше быть не может.
- Если n, m - нечетны, то всегда есть $\frac{n+m}{2}$ эйлеровых путей, меньше быть не может.

Task 61

Сбалансированной ориентацией неориентированного графа называют такую ориентацию всех его ребер, чтобы в каждую вершину входило столько же ребер, сколько выходит. Какие графы имеют сбалансированную ориентацию?

Докажем что граф имеет сбалансированную ориентацию $\Leftrightarrow$ он имеет эйлеров цикл.

$\Rightarrow$ Пусть граф имеет сбалансированную ориентацию, тогда каждая его вершина имеет четную степень, $\Rightarrow$ граф имеет эйлеров цикл.

$\Leftarrow$ Пусть граф имеет эйлеров цикл. Тогда этот граф можно нарисовать не отрывая карандаша, при этом начав и закончив в одной и той же вершине. Тогда каждому входу в вершину по некоторому ребру соответствует единственный выход из этой вершины по другому ребру. Рассмотрим любой эйлеров цикл в графе и по нему нарисуем этот граф, оставляя за собой ориентацию ребер.

Task 66

Выразите число треугольников в реберном графе G_E через число треугольников графа G и набор его степеней.

Можно заметить, что треугольник в G_E может быть порожден либо треугольником в G, либо мерседесом (когда из одной вершины исходит 3 ребра). Пусть $t(H)$ - число треугольников в графе H. Тогда

$$t(G_E) = t(G) + \sum_{v=1}^{n} \binom{d_v}{3}$$

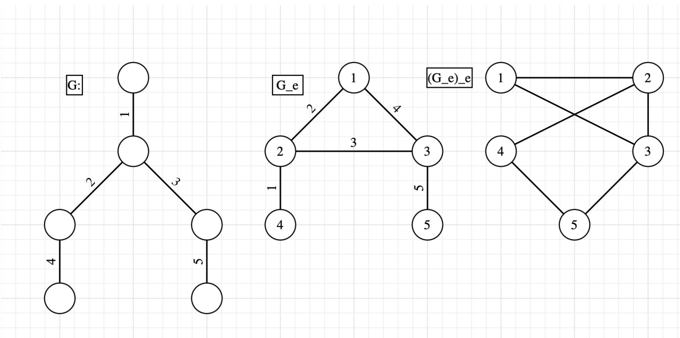
Task 67

В каком случае связный граф G имеет регулярный реберный граф?

Заметим, что степень вершины в G_E равна $deg(u)+deg(v)-2$, где uv - ребро в G, соответствующее этой вершине. Тогда, чтобы G_E был регулярным, достаточно, чтобы $\forall uv, xy \in E(G) : deg(u) + deg(v) = deg(x) + deg(y)$.

Task 68

Постройте связный граф G с $n \geq 4$ вершинами, для которого граф G_E не эйлеров, а граф $(G_E)_E$ эйлеров.



Task 70, 71, 72

Сколько существует неизоморфных связных неориентированных эйлеровых графов с 4/5/6 вершинами?

```
from itertools import product
import numpy as np
import networkx as nx


def getDegrees(graph):
    dgr = []
    for r in range(len(graph)):
        degree = 0
        for s in range(len(graph[r])):
            degree += (1 if (graph[r][s] != 0) else 0)
        dgr.append(degree)
    return dgr


def checkIsomorphic(graph1, graph2):
    G1 = nx.from_numpy_array(np.array(graph1))
    G2 = nx.from_numpy_array(np.array(graph2))
    return nx.is_isomorphic(G1, G2)
```

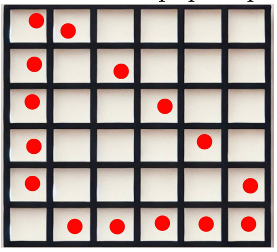
```
def checkConnection(graph):
    marked = [False for _ in range(len(graph))]

    def dfs(u):
        marked[u] = True
        for v in range(len(graph)):
            if graph[u][v] != 0 and not marked[v]:
                dfs(v)

    dfs(0)
    for w in range(len(graph)):
        if not marked[w]:
            return False
    return True


n = 5
graphs = []

for p in product(range(2), repeat=n * (n - 1) // 2):
    T = [[0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
    index = 0
    for i in range(n - 1):
        for j in range(i + 1, n):
            T[i][j] = p[index]
            T[j][i] = p[index]
            index += 1

    degrees = getDegrees(T)
    if sum(degrees) < (n - 1) * 2:
        continue
    odd_count = 0
    zero_count = 0
    for d in degrees:
        if d % 2 == 1:
            odd_count += 1
        if d == 0:
            zero_count += 1
    if odd_count > 0 or zero_count != 0 or not checkConnection(T):
        continue

    f = True
    for g in graphs:
        if checkIsomorphic(T, g):
            f = False
            break

    if f:
        graphs.append(T)

for g in graphs:
    print(g)

print(len(graphs))
```

$n = 4$, answer: 1
$n = 5$, answer: 4
$n = 6$, answer: 8

Task 75

На некоторых клетках таблицы $n \times n$ стоит фишка, причем в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит хотя бы две фишки. Докажите или опровергните, что можно убрать часть фишек, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали стояло ровно по две фишки.

$n = 2$: очевидно (ничего убирать не надо даже)
$n >= 4$: контрпример:



Выполняется условие: "в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит хотя бы две фишки". Однако в первых столбце и строке более двух фишек. Если убрать фишку из строки/столбца с номером k, то в соответствующей строке/столбце останется одна фишка.

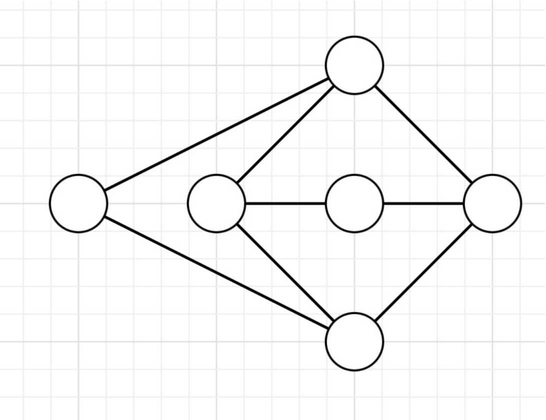
Для $n = 3$ всегда можно, это легко объясляется. Заметим, что если на поле 3x3 в каждом ряду и каждой строке стоит ровно по 2 фишки, то все пустые клетки находятся в различных рядах и различных строках (иначе быть не может). Тогда любым образом добавив 7-ую, 8-ую или 9-ую фишки получим, что они будут лежать в полных строке и столбце. Тогда тут очев, просто обобщить перебор случаев для 7, 8 и 9 по отдельности, поебаться с перестановками там.

HW5

Task 77

Порожденным (также индуцированным) подграфом называется подграф, полученный удалением некоторого множества вершин и всех инцидентных ребер. Докажите или опровергните, что если G содержит порожденный тета-подграф (две вершины, соединенные тремя путями длины хотя бы 2), то G не гамильтонов.

Опровергнем: рассмотрим следующий граф, который содержит тета-подграф, однако является гамильтоновым:



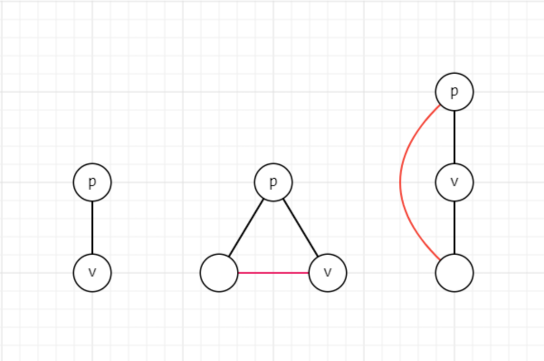
Task 78

Обозначим как G^3 граф, в котором две вершины соединены, если они соединены в G путем длины не более 3. Докажите, что если G связен, то G^3 гамильтонов.

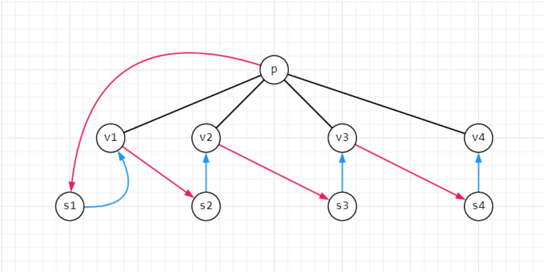
Докажем это утверждение для любого дерева. Тогда, $\forall\, G\, \exists\, H \subset G$ – остов : H^3 – гамильтонов $\Rightarrow$ G^3 – гамильтонов.

Докажем, что для любого дерева H с корнем p существует гамильтонов путь в H^3 между p и некоторым его сыном v, не прохлодящий по ребру pv.

Индукция по структуре дерева. База:

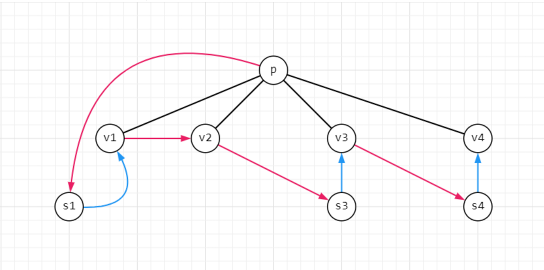


Переход: Расссмотрим произвольное дерево H и его H^3. Покажем, что если выполнено для всех его сыновей, то выполнено и для него. Действительно



Здесь подразумеватся, что s_i - сын v_i и синим выделены пути, которые существуют по предположению индукции. Красным выделены ребра, появляющиеся в H^3.

Частный случай: когда один из сыновей - поддерево из одной вершины, то сделаем следующее:



Здесь v_2 соединили особым образом.

Таким образом доказано для любого дерева, и как следствие для любого графа.

Task 79

Докажите, что каждое ребро G^3 принадлежит его некоторому простому циклу.

Если ребро смежно хотя бы с одним другим в графе G, то в G^3 на этих ребрах породится треугольник. Если рассмотреть любое ребро графа G^3, то окажется, что оно состоит в треугольнике (достаточно рассмотреть три вида ребра в G^3).

Task 80

Продемонструйте пример негамильтонова графа с 10 вершинами, где для любой пары несмежных вершил u и v сумма их степеней хотя бы 9.

Построим K_9 и дорисуем один лист к любой вершине. Получим негамильтонов граф на 10 вершинах со степенями $1, 9, \ldots, 9, 10$.

Task 84

Теорема Антидирака. Для любого $n \geq 3$ постройте граф, степень каждой вершины которого хотя бы $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$, но нет гамильтонова цикла.

Если $n = 2k$, то построим двудольный граф с долями $k-1, k+1$, тогда степерь каждой вершины будет хотя бы $k - 1 = \frac{n}{2} - 1$. Легко проверить, что он не гамильтонов.

Если $n = 2k+1$, то построим двудольный граф с долями $k, k+1$, тогда степень каждой веришны будет хотя бы $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. Легко проверить, что оне не гамильтонов.

Task 87

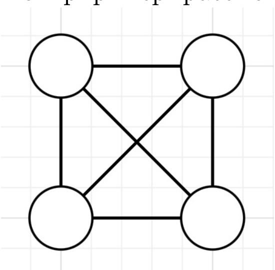
Реберным графом для графа G называется граф G_E, множество вершин которого совпадает с множеством ребер исходного графа, два ребра e и f соединены ребром в реберном графе, если у них есть общая инцидентная вершина. Докажите или опровергните, что если G является эйлеровым, то реберный граф является гамильтоновым.

Рассмотрим произвольный эйлеров граф G и рассмотрим в нем эйлеров цикл $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_1$. Рассмотрим последовательность $e_1, \dots, e_k$. Очевидно, что в этой последовательности встречаются все вершины графа G_E ровно один раз, причем каждый две соседние смежны, т.к. смежны соответствующие им ребра в G. Тогда это гамильтонов путь в G_E. Заметим, что ребра e_1 и e_k смежны в G, тогда вершины e_1 и e_k смежны в G_E, тогда это гамильтонов цикл и G_E гамильтонов.

Task 88

Докажите или опровергните, что если G_E является гамильтоновым, то граф G является эйлеровым.

Контрпример: рассмотрим следующий граф G:



В G_E будет 6 вершин, степень каждой будет равна $4 > 6/2 \Rightarrow$ он гамильтонов. Однако сам G не эйлеров.

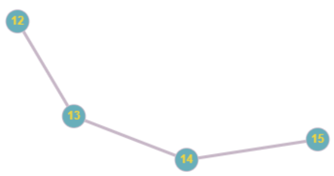
Task 89

Постройте минимальный по числу ребер связный граф, рёберный граф которого не пуст и в реберном графе которого нет гамильтонова цикла.

Если построить граф на одном ребре, то реберный граф будет содержать одну вершину, что будет считаться гамильтоновым циклом.

Если построить на двух ребрах, то эти ребра должны быть смежными (иначе граф будет не связен), тогда реберный граф будет деревом из двух вершин, что является гамильтоновым циклом.

Построить на трех ребрах уже проблем не составит:



Реберный граф будет бамбуком из трех вершин, что не является гамильтоновым.

Task 91

Докажите усиленную версию теоремы Редеи-Камеона: в любом сильно связном турнире с n вершинами есть простой цикл любой длины от 3 до n.

Пусть имеется некоторый турнир на $n \geq 3$ вершинах. Докажем, что в нем есть циклы длины от 3 до n, индукцией непосредственно по длине цикла, т.е. по k.

База: $k = 3$:

Рассмотрим произвольную вершину u. Тогда множество остальных вершин делится на два дизъюнктных подмножества вида:

- $V_1 = \{x \in V \mid (x, u) \in E\}$ (входящие ребра)
- $V_2 = \{x \in V \mid (u, x) \in E\}$ (исходящие ребра)

В силу того, что турнир сильно связен, $\exists\, x \in V_1, y \in V_2 :\ (y, x) \in E$. Тогда имеем цикл длины 3: $x \to u \to y \to x$.

Переход: пусть имеется цикл длины $k < n$. предъявим цикл длины $k + 1$.

Пусть есть цикл $S_k = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_1$. Пусть $v_0\ :\ v_0 \notin S_k, \exists\, x, y\ :\ (x, v_0), (v_0, y) \in E$.
Рассмотрим случаи:

- Вершина v_0 существует (если $k = n-1$, то она всегда существует, ведь иначе теряется сильная связность). Тогда $\exists\, i\ :\ (v_i, v_0), (v_0, v_{i+1}) \in E$. Тогда получаем $S_{k+1} = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_i \to v_0 \to v_{i+1} \to \ldots \to v_k \to v_1$.
- Вершина v_0 не существует. Тогда рассмотрим множества:
  - $V_x = \{x \in V \mid \forall i = 1..k\ :\ (x, v_i) \in E\}$
  - $V_y = \{y \in V \mid \forall i = 1..k\ :\ (v_i, y) \in E\}$

  Заметим, что оба множества дизъюнктны и не пусты, причем $\exists\, x \in V_x, y \in V_y\ :\ (y, x) \in E$ (иначе у нас нет сильной связности). Тогда получаем $S_{k+1} = v_1 \to y \to x \to v_3 \to \ldots \to v_k \to v_1$.

HW6

Task 94

Докажите, что $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

Докажем $\lambda(G) \le \delta(G)$. Пусть $v \in V(G) : d_v = \delta(G)$. Тогда удалением всех инцидентных ей ребер получим две КС. Отсюда ясно, что $\lambda(G) \le \delta(G)$.

Докажем $\kappa(G) \le \lambda(G)$. Пусть $E' \subset E(G) : |E'| = \lambda(G)$, причем удаление всех ребер E' из G приводит к распаду графа на несколько КС. Рассмотрим все вершины, что инцидентны хотя бы одному ребру из E'. Тогда получим r связных подграфов G, в каждом из которых $n_i \ge 2$ вершин и $m_i \ge n_i - 1$ ребер. Выберем из каждого подграфа любые $n_i - 1$ вершин кроме висячих в G (если таковая имеется, то она будет всего одна, это легко доказать). Тогда удаление выбранных вершин приведет к удалению ребер из E' и еще каких-то (она нам точно малину не обосрут), и граф распадется на несколько КС. Таким образом $\kappa(G) \le \sum(n_i - 1) \le \sum m_i = \lambda(G)$.

Task 95

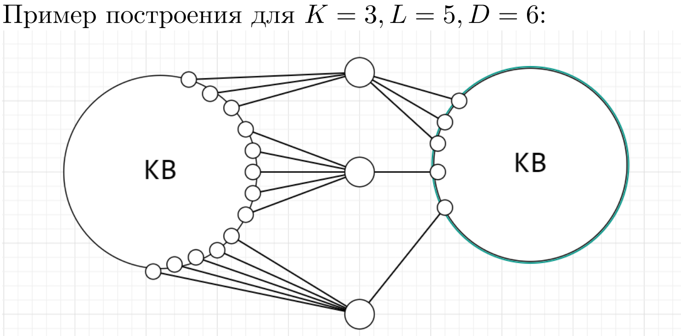
Докажите. что для любых $1 \le \kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ существует граф G с такими параметрами.

Пусть даны $1 \le \kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$, $\kappa(G) = K$, $\lambda(G) = L$, $\delta(G) = D$. Пусть также $B = K * D + 1$. Построим следующий граф G:

- по середине поместим K вершин, которые не будут соединены между собой;
- справа и слева поместим K_B - полные графы; заметим, что степени у вершин этих графов уже больше D, поэтому они точно не будут иметь минимальную степень во всем графе;
- далее проведем ребра из вершин по середине в вершины правого K_B так, что в каждую вершину из правого K_B входит единственное ребро извне (это возможно благодаря достаточно большому B) и из одной из вершин по середине исходит $L - K + 1$ ребер, а из остальных по одному;
- аналогичным образом проводим ребра в левый K_B, дополняя степени вершин по середине до D.

Осталось проверить, что полученный граф имеет нужные нам $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ (здесь я этого делать не буду)

Пример построения для $K = 3, L = 5, D = 6$:



Task 96

Докажите, что не существует графов с $\kappa(G) = 3$ и 7 ребрами.

Пускай такой граф существует. Заметим, что граф с 7 ребрами имеет хотя бы $n = 5$ вершин. По доказанному ранее $\delta(G) \geq \kappa(G) = 3$. Сумма степеней в таком графе равна 14. Однако ее также можно оценить как $s \geq \delta(G) * n \geq 3 * 5 = 15$. Противоречие.

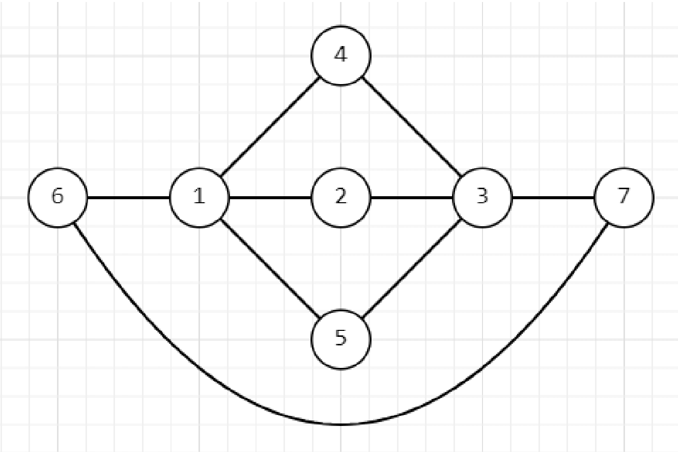
Task 98

Графы G_1, содержащий n_1 вершин и m_1 ребер, и G_2, содержащий n_2 вершин и m_2 ребер, гомеоморфны. Докажите, что $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Заметим, что обе гомеоморфные операции оставляют константной величину $m - n$. Тогда, если графы G_1 и G_2 гомеоморфны, то $m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Task 100

Приведите пример вершинно двусвязного планарного графа, который не является гамильтоновым.



Task 104

Докажите, что все колеса самодвойственны.

Очевидно. Достаточно продемонстрировать построение графа, двойственного колесу.

Task 106

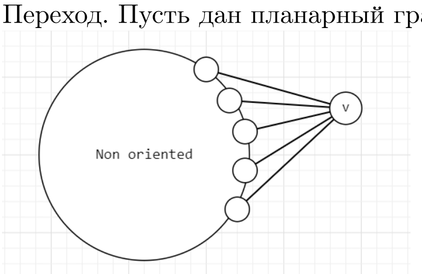
Докажите, что можно ориентировать ребра планарного графа так, что $deg^{-}(v) \leq 5$ для всех вершин v.

Lm В планарном графе G $\exists u \in V(G): \ deg(u) \leq 5$.
$\triangleright$ Пусть все степени вершин в планарном графе ≥ 6. Тогда $2E = \sum deg(v) \geq 6V$. С другой стороны, т.к. граф планарен, то $6V - 12 \geq 2E$. Получили $6V - 12 \geq 6V$. Противоречие. $\triangleleft$

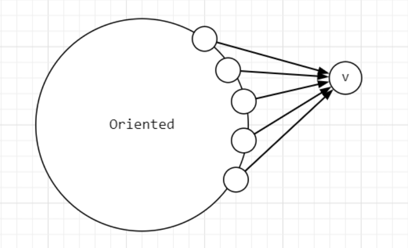
Lm Удаление вершины из планарного графа не нарушает его планарность.
$\triangleright$ Очевидно. $\triangleleft$

База: $n = 1$ - очевидно, верно.

Переход. Пусть дан планарный граф на $n + 1$ вершине. Найдем в этом графе вершину v со степенью ≤ 5:



Теперь удалим эту вершину из графа. Останется планарный граф на n вершинах, для которого, по предположению индукции, существует нужная нам ориентация. Рассмотрим эту ориентацию. Теперь вернем вершину v обратно и ориентируем все инцидентные ей ребра в нее:

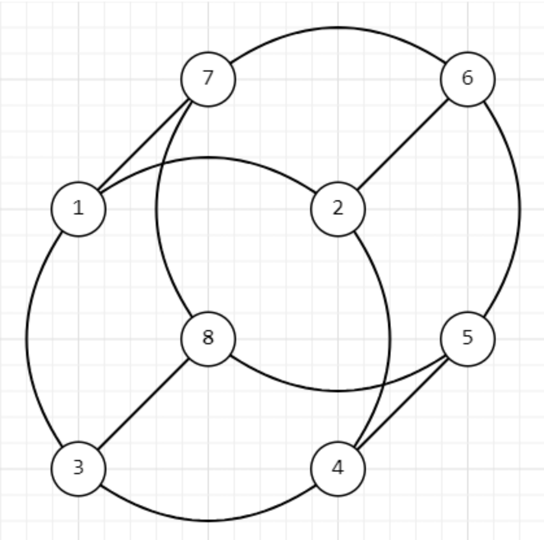


Тогда $deg^{-}(v) \leq 5$, а для остальных вершин это также верно, потому что мы не добавили входящие в них ребра, только исходящие.

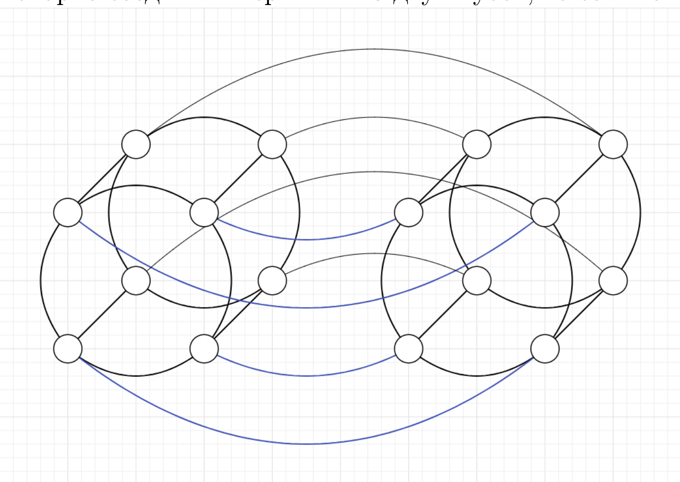
Task 108

Уложите четырехмерный куб на поверхности тора.

Сначала поймем как уложить куб на поверхности тора:



Теперь на двух диаметрально противоположных сторонах уложим два куба. Чтобы получить тессеракт, нужно попарно соединить вершины из двух кубов, то есть как-то так:



Task 110

Докажите, что K_8 нельзя уложить на поверхности тора.

Определение: родом γ графа G называется наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы уложить G на этой сфере. Обобщенная формула Эйлера: $V - E + F = 2 - 2\gamma$. Тор эквивалентен сфере с одной ручкой.

Предположим K_8 можно уложить на поверхности тора, то есть $\gamma(K_8) = 1$. Тогда $V - E + F = 8 - 28 + F =$

$0 \Rightarrow F = 20$. С другой стороны, каждая грань ограничивается как минимум тремя ребрами, каждое ребро ограничивает ровно 2 грани, тогда $E \geq \frac{3F}{2} = 30$. Противоречие.

Task 111

Найдите максимальное k, что граф K_k можно уложить на сфере с двумя ручками.

Докажем, что $\gamma \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$.

$$\gamma = \frac{E - V - F + 2}{2} \geq \frac{E - V - \frac{2}{3}E + 2}{2} = \frac{\frac{1}{3}E - V + 2}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{12} - \frac{n-2}{2} = \frac{n^2 - 7n + 12}{12} = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

.

Тогда:

$$2 \geq \frac{(k-3)(k-4)}{12}$$

$$k^2 - 7k - 12 \leq 0$$

$$(k - 3,5)^2 \leq 24,25 < 25$$

$$k - 3,5 < 5$$

$$k < 8,5$$

Отсюда делаем предположение, что искомое $k = 8$. Осталось только проверить, что K_8 можно уложить на сфере с двумя ручками. Хз как.

Task 112

Докажите, что для любого m существует k, такое что граф K_k нельзя уложить на сфере с m ручками.

По доказанному выше, если граф K_k можно уложить на сфере с m ручками, то выполняется неравенство $m \geq \gamma \geq \frac{(k-3)(k-4)}{12}$. Если мы примем, что $\frac{(k-3)(k-4)}{12} > m$, то граф K_k нельзя уложить на сфере с m ручками.

В силу того, что $f(k) = \frac{(k-3)(k-4)}{12}$ - парабола с ветвями вверх, то $\forall m \in (N) : \exists k \in (N) : \frac{(k-3)(k-4)}{12} > m \Rightarrow$ граф K_k нельзя уложить на сфере с m ручками.

HW7

Task 113

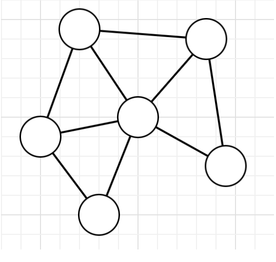
Посчитать хроматический многочлен цикла C_n.

Выведем рекурентную формулу для $p_{C_n}(t)$. База для $n = 3$: $p_{C_3}(t) = p_{K_3}(t) = t(t-1)(t-2)$. Для $n > 3$ рассмотрим любое ребро e в цикле. Если смерджить две инцидентные ему вершины получим C_{n-1}. А если удалить это ребро, то получим бамбук P_n. Тогда $p_{C_n}(t) = p_{C_n \setminus e}(t) - p_{C_n / e}(t) = t(t-1)^{n-1} - p_{C_{n-1}}(t)$.

Task 114

Посчитать хроматический многочлен колеса $C_n + K_1$.

Для начала рассмотрим семейство графов, которые представляют собой колеса без одного ребра на цикле. Назовем их R_n. Пример R_5:



Выведем хроматический многочлен для них. Для $n = 3$: $p_{R_3}(t) = p_{K_4}(t) + p_{K_3}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2) = t(t-1)(t-2)^2$. Для $n > 3$: рассмотрим ребро, соединяющее центр и вершину колеса, не имеющую соседа, тогда $p_{R_n}(t) = (t-1)p_{R_{n-1}}(t) - p_{R_{n-1}}(t) = (t-2)p_{R_{n-1}}(t)$. Отсюда $p_{R_n}(t) = t(t-1)(t-2)^{n-1}$.

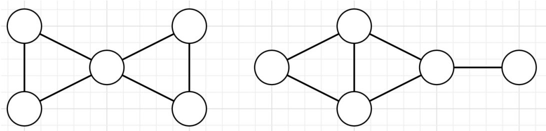
Теперь для колес. Пусть $C_n + K_1 = W_n$. Для $n = 3$: $p_{W_3}(t) = p_{K_4}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)$. Для $n > 3$: рассмотрим любое ребро, не инцидентное центральной вершине, тогда $p_{W_n}(t) = p_{R_n}(t) - p_{W_{n-1}}(t) = t(t-1)(t-2)^{n-1} - p_{W_{n-1}}(t)$.

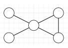
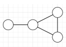
Task 115

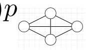
Посчитать хроматический многочлен полного двудольного графа $K_{n,m}$.

Будем рассматривать любую раскраску одной из долей и для каждой такой раскраски определим количество способов раскрасить вторую долю. Для этого будем строить дерево разбора случаев, и будем считать, что на i-ом уровне раскрашены первые i вершин. Каждый случай будет представлять собой пару вида $(kt^{\underline{l}}, t-l)$, где первое число - количество способов раскрасить первые i вершин первой доли, а второе - количество неиспользованных цветов (легко доказать по индукции, что любой случай имеет такой вид). Далее ветвимся от этого случая влево и вправо пытаясь раскрасить $(i+1)$-ую вершину первой доли. Пусть левый сын - случай, когда $(i+1)$-ая вершина красится в новый неиспользованный цвет, а правый сын - когда следующая вершина красится в цвет одной из предыдущих вершин. Тогда левый сын будет равен $(kt^{\underline{l+1}}, t-l-1)$, а правый - $(klt^{\underline{l}}, t-l)$. Чтобы посчитать хроматический полином, нужно для каждого случая $(kt^{\underline{l}}, t-l)$ на n-ом уровне просуммировать выражения вида $kt^{\underline{l}} \cdot (t-l)^m$.

Task 116



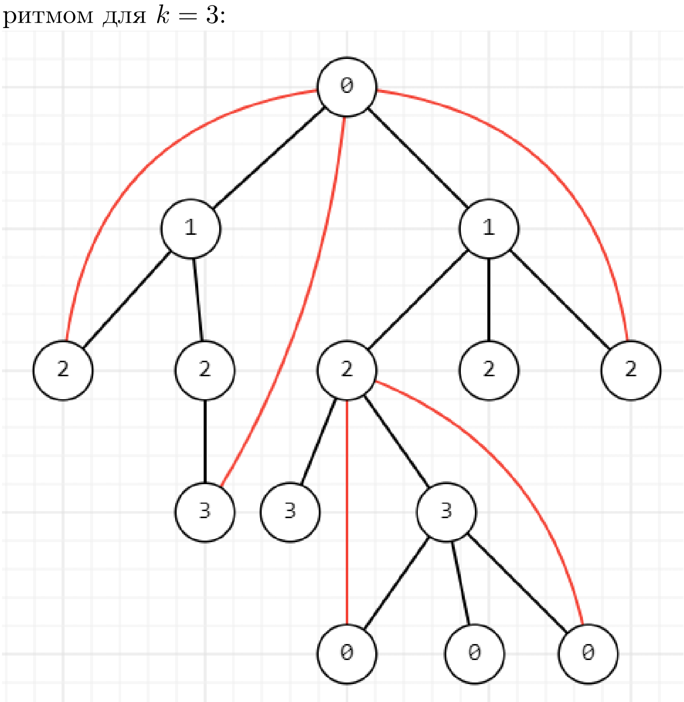
p$(t) - p$$(t) = (t-1)^2 t(t-1)(t-2) - (t-1)t(t-1)(t-2) = t(t-1)^2(t-2)^2$

$(t-1)p$$(t) = (t-1)(t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)) = (t-1)t(t-1)(t-2)(t-2) = t(t-1)^2(t-2)^2$

Task 117

Докажите, что если длина максимального простого нечетного цикла в G есть k, то $\chi(G) \leq k+1$

Приведем алгоритм раскраски графа G в $k+1$ цветов и покажем, что он работает. Будем красить каждую КС обходом в глубину. Рассмотрим любую КС H и произвольную вершину s в ней. Запустим dfs от этой вершины. Пусть T - дерево обхода графа H в глубину. Произвольную вершину $u \in V(H)$ будем красить в $dist_T(s,u)\ mod\ (k+1)$, где $dist_T(s,u)$ - расстояние от u до s в дереве T. Пример раскраски графа таким алгоритмом для $k = 3$:

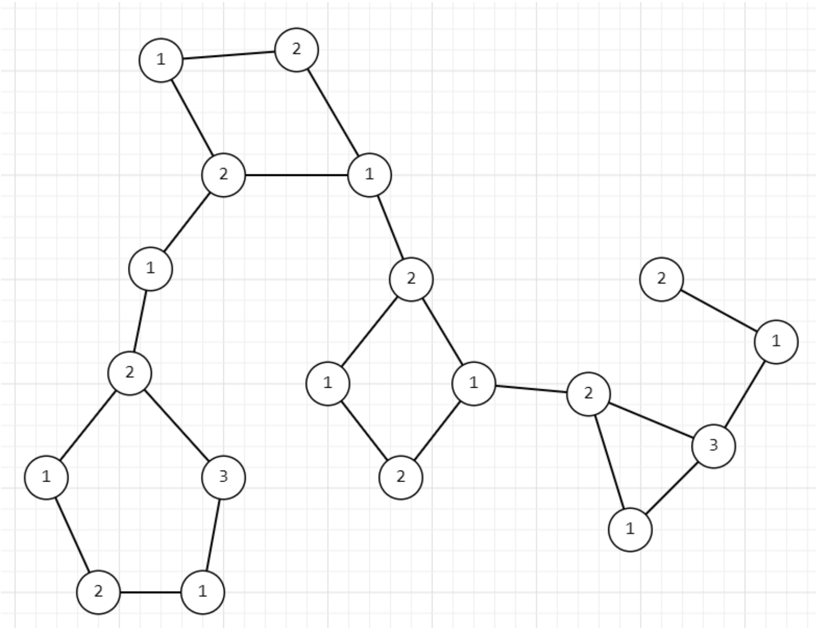


Предположим теперь, что такой алгоритм красит граф некорректно, и найдут две вершины x и y одного цвета, такие что $xy \in E(H)$. Рассмотрим эти вершины в дереве T. Эти вершины, очевидно, не находятся на одном уровне (т.к. между вершинами на одном уровне не может быть ребер), одна из них не может быть предком первого порядка другой (т.к. два соседних уровня всегда покрашены в разные цвета). Тогда н.у.о. вершина x является предком q-ого порядка вершины y ($q > 1$) и между ними есть обратное ребро, ведь в любом другом нерассмотренном случае между вершинами x и y ребра быть не может. Тогда можно заметить, что $dist_T(x, y) = q = p(k+1)$ $p \in \mathcal{N}$. Но тогда в графе можно найти цикл, состоящий из пути от x до y в дереве T и обратного ребра между x и y длины $l = p(k+1)+1$, причем $l \geq k+2$ и l - нечетное. Противоречие.

Task 118

Граф называется вершинным кактусом, если никакая вершина не лежит более чем на одном простом цикле. Каким может быть хроматическое число вершинного кактуса?

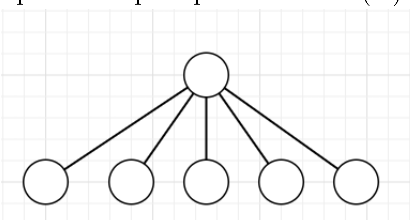
Если вершинный кактус содержит нечетный цикл, то $\chi = 3$, иначе - $\chi = 2$. Во втором случае получается двудольный граф, тогда случай очевиден. В общем случае вершинный кактус всегда можно покрасить в три цвета. Чтобы это сделать, давайте сделаем конденсацию вершинного кактуса по циклам в нем. Тогда получим дерево (это не сложно доказать). Подвесим это дерево за любую вершину и запустим красящий дфс от нее. При переходе в каждую вершину-цикл будем принимать цвет, которым была покрашена исходная вершина, как запретный. Красим текущий цикл, начиная с вершины, которая соединена с предком, любым из трех цветов кроме запретного (любой цикл можно покрасить в 3 цвета). Далее передаем запретные цвета в детей. Получим раскраску кактуса в три цвета. Пример раскраски некоторого кактуса таким алгоритмом:



Task 119

Граф называется реберным кактусом, если никакое ребро не лежит более чем на одном простом цикле. Каким может быть реберное хроматическое число реберного кактуса?

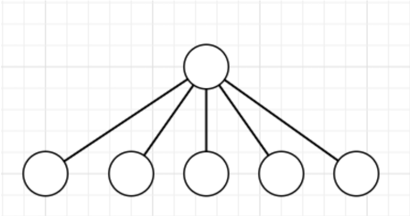
Заметим, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Но $\Delta(G)$ в реберном кактусе вообще-то говоря ничем не ограничено. Можно привести пример ежика на $\Delta(G)+1$ вершине, для которого $\chi'(G) = \Delta(G)$. Пример для $\Delta(G) = 5$:



Task 120

Граф называется вершинным кактусом, если никакая вершина не лежит более чем на одном простом цикле. Каким может быть реберное хроматическое число вершинного кактуса?

Заметим, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Но $\Delta(G)$ в вершинном кактусе вообще-то говоря ничем не ограничено. Можно привести пример ежика на $\Delta(G)+1$ вершине, для которого $\chi'(G) = \Delta(G)$. Пример для $\Delta(G) = 5$:

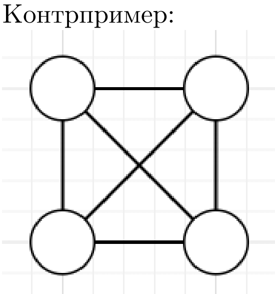


Task 122

Докажите или опровергните, что если граф G с n вершинами содержит гамильтонов цикл, причем ему принадлежат не все ребра графа, то (а) $\chi(G) \leq 1 + n/2$ (б) $\chi(G) \geq 1 + n/2$

(a)

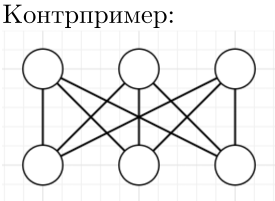
Контрпример:



Такой граф содержит ГЦ, проходящий не по всем ребрам, но $\chi = 4 > 1 + n/2 = 3$

(b)

Контрпример:



Такой граф содержит ГЦ, проходящий не по всем ребрамб но $\chi = 2 < 1 + n/2 = 4$

Task 123

Конъюнкцией $G_1 \wedge G_2$ графов называется граф с $V = V_1 \times V_2$, $(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E$, если $u_1v_1 \in E_1$ и $u_2v_2 \in E_2$. Доказать, что хроматическое число конъюнкции $G_1 \wedge G_2$ двух графов G_1 и G_2 не превосходит хроматических чисел этих графов.

Пусть вершины $u_1, u_2, \ldots, u_n$ графа G_1 покрашены в цвета $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Покрасим вершины графа $G_1 \wedge G_2$ вида $(u_i, \_)$ в цвет c_i. Тогда, если есть ребро $(u_1, u_2)(v_1, v_2)$ в графе $G_1 \wedge G_2$, то есть ребро $u_1 - v_1$ в графе G_1, тогда вершины u_1 и v_1 покрашены в разные цвета, тогда вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) графа $G_1 \wedge G_2$ покрашены в разные цвета. Таким образом $\chi(G_1 \wedge G_2) \leq \chi(G_1)$. Аналогичные рассуждения можно провести и для G_2.

Task 125

Докажите, что при любой верной раскраске графа G в его реберном графе G_E каждая вершина смежна не более чем с двумя вершинами одного цвета.

Предположим, что это не так, и существует вершина $x \in V(G_E)$, которой соответствует ребро $uv \in E(G)$ и которой смежны хотя бы три покрашенные в один цвет вершины $a, b, c \in V(G_E)$, которым соответствуют ребра $e, f, g \in E(G)$ соответственно. Тогда, хотя бы два ребра из e, f, g имеют общую вершину - либо u, либо v, т.е. исходная раскраска ребер некорректна. Противоречие.

Task 126

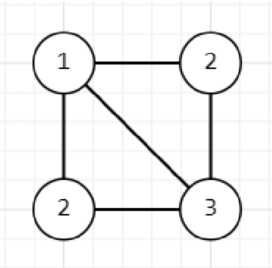
Доказать формулу Зыкова для хроматического многочлена графа G: $P_G(x) = \sum_{i=1}^{n} pt(G,i)x^{\underline{i}}$, где $pt(G,i)$ — число способов разбить вершины G на i независимых множеств.

Nerc

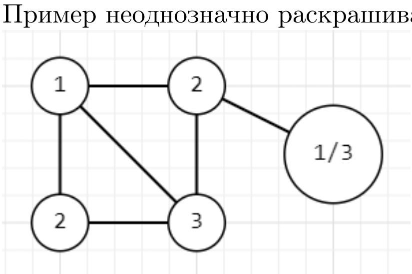
Task 128

Граф называется однозначно раскрашиваемым, если любые две его раскраски в $\chi(G)$ цветов совпадают с точностью до переименования цветов. Приведите пример однозначно раскрашиваемого связного графа и связного графа, который не является однозначно раскрашиваемым

Пример однозначно раскрашиваемого графа:



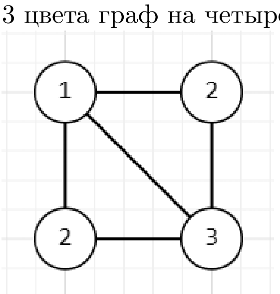
Пример неоднозначно раскрашиваемого графа:



Task 129

Какое минимальное число вершин может быть в однозначно раскрашиваемом в 3 цвета графе, отличном от полного графа?

Связный граф на трех вершинах с $\chi = 3$ может быть только полным. Такой граф, очевидно, однозначно раскрашиваемый, однако все же он полный. Тогда будем искать неполный связный однозначно раскрашиваемый в 3 цвета граф на четырех вершинах. Такой граф существует:



HW8

Task 131

Доказать или опровернгнуть: любое вершинное покрытие содержит как подмножество минимальное по мощности вершинное покрытие.

Контрпример: $a - b - c$ - дерево на трех вершинах. Минимальное вершинное покрытие - $\{b\}$, однако вершинное покрытие $\{a, c\}$ не содержит минимальное.

Task 132

Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}$

Пусть I - макс. независимое множество, $C = V(G)\backslash I$ - мин. вершинное покрытие. Заметим, что $\sum\limits_{v\in I} deg(v) \geq \beta(G) = |C|$. Это очевидно верно, ведь если предположить обратное, то найдется вершина $u \in C$, которая не смежна ни с одной вершиной из I, тогда $I \cup \{u\}$ - независимое множество, т.е. I - не максимально.

Пусть $\alpha(G) < \frac{n}{1+\Delta(G)}$. Тогда $\alpha(G)\Delta(G) < n - \alpha(G) = \beta(G)$. Но тогда $\sum\limits_{v\in I} deg(v) \leq \alpha(G)\Delta(G) < \beta(G)$. Противоречие.

Task 134

Как может поменяться $\alpha(G)$ при (a) Удалении ребра? (b) Удалении вершины? (c) Добавлении ребра?

(a)

При удалении ребра $\alpha(G)$ очевидно не уменьшится. Может не измениться (например для ежиков), может увеличиться на 1 (например K_2). Увеличиться более чем на 1 не может. Действительно, пусть увеличилось хотя бы на 2. Тогда $\beta(G)$ уменьшится хотя бы на 2. Однако если вернуть удаленное ребро, то $\beta(G)$ увеличится не более чем на 1 (очевидно, чтобы покрыть добавленное ребро нужно не более одной дополнительной вершины). Противоречие.

(b)

При удалении вершины $\alpha(G)$ очевидно не увеличится. Может не измениться (например для дерева на трех вершинах), может уменьшиться на 1 (например для P_5). Уменьшиться более чем на 1 не может. Действительно, пусть уменьшилось хотя бы на 2. Тогда $\beta(G)$ увеличится хотя бы на 1 (не на 2, потому что вершин уже на 1 меньше). Но этого не может быть, ведь число ребер не увеличилось. Противоречие.

(c)

При добавлении ребра $\alpha(G)$ очевидно не увеличится. Может не измениться (например для C_5), может уменьшиться на 1 (например для P_3). Уменьшиться более чем на 2 не может, т.к. $\beta(G)$ может увеличиться не более чем на 1 (очевидно, чтобы покрыть новое ребро нужно не более одной дополнительной вершины).

Task 135

Верно ли, что для двудольного графа значение $\alpha(G)$ равно размеру максимальной доли?

Нет, очевидный контрпример - пустой граф на n верщинах. Для него $\alpha = n$, однако размер максимальной доли не превосходит $n - 1$.

Task 136

Докажите, что G двудольный тогда и только тогда, когда для любого H - подграфа G выполнено $\alpha(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$

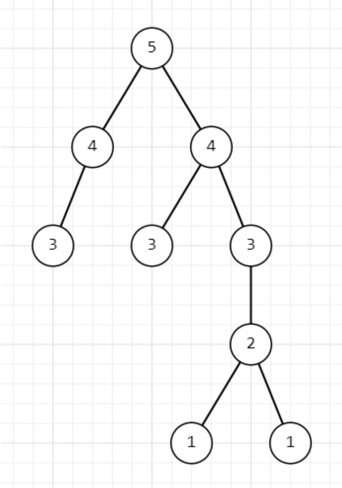
$\underline{\Rightarrow}$ Если G - двудольный, то любой его подграф H двудольный. Очевидно, что $\alpha(H) \geq max(H)$, где $max(H)$ - максимальный размер доли в H. Тогда $\alpha(H) \geq max(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$.

$\underline{\Leftarrow}$ От противного. Пусть G - не двудольный, тогда в нем существует нечетный цикл. Рассмотрим этот цикл C как подграф G. Пусть его длина равна $2k + 1$. Тогда $\alpha(C) = k < \frac{|V(C)|}{2}$. Противоречие.

Task 137

Докажите, что если в дереве расстояние между двумя любыми листьями четно, то в нем существует единственное максимальное по числу вершин независимое множество. Верно ли обратное?

Пусть T - дерево, удовлетворяющее условию. Подвесим его за любую вершину r в нем, которая не является листом, т.е. ее степень хотя бы 2. Занумеруем уровни снизу вверх начиная с 1. Тогда, очевидно, что листья дерева находятся на нечетных уровнях. Пример, чтобы было понятно:



Тогда, обозначим как odd множество вершин, находящихся на нечетных уровнях, $even$ - находящихся на четных уровнях. Докажем, что $|odd| > |even|$. Для доказательств построим инъекцию из $even$ в odd. Поставим в соответствие каждой вершине из $even$ любого из ее детей (из odd). Полученное отображение является инъекцией, из чего следует $|odd| \geq |even|$. Если $r \in odd$, то r не была поставлена в соответствие никакой вершине из $even$ $\Rightarrow$ $|odd| > |even|$. Если $r \in even$, тогда т.к. у r хотя бы два ребенка, то хотя бы один из них не был поставлен в соответствие никакой вершине из $even$, откуда так же следует $|odd| > |even|$.

Теперь осознаем, что odd - максимальное независимое множество. Если рассматривать $even$ или любые собственные подмножества odd или $even$, то они будут независимыми, но по размеру будут строго меньше odd. Если рассматривать остальные подмножества $V(T)$, то там все вобщем-то очевидно.

Task 138

Зафиксируем n и k. Рассмотрим граф, удовлетворяющий следующим условиям: (1) граф G содержит n вершин; (2) $\alpha(G) \leq k$. Среди таких графов рассмотрим граф с минимальным числом ребер. Этот граф называется граф Турана. Докажите, что в графе Турана любые две смежные вершины имеют равную степень.

Заметим, что если I - независимое множество в G, то I - клика в $\overline{G}$. Тогда (G имеет минимальное число ребер и $\alpha(G) \leq k$) $\Leftrightarrow$ ($\overline{G}$ имеет максимальное число ребер и $\omega(\overline{G}) \leq k$). Тогда задача сводится к тому, чтобы доказать, что любые две несмежные вершины в $\overline{G}$ имеют равную степень.

Пусть это не так и $\exists u, v \in V \, : \, uv \notin E(\overline{G}) \,\&\, deg(u) > deg(v)$. Тогда удалим вершину v из $\overline{G}$ и добавим на ее место вершину w, сделав ее смежной со всеми соседями вершины u. Тогда $\omega(\overline{G})$ не увеличится, однако число ребер увеличится $\Rightarrow$ оно не было изначально максимальным. Противоречие.

Task 139

Степень любых двух несмежных вершин в графе Турана отличается не более чем на 1.

Заметим, что если I - независимое множество в G, то I - клика в $\overline{G}$. Тогда (G имеет минимальное число ребер и $\alpha(G) \leq k$) $\Leftrightarrow$ ($\overline{G}$ имеет максимальное число ребер и $\omega(\overline{G}) \leq k$). Тогда задача сводится к тому, чтобы доказать, что степени любых двух смежных вершин в $\overline{G}$ отличаются не более чем на 1.

Пусть это не так и $\exists u, v \in V \, : \, uv \in E(\overline{G}) \,\&\, deg(u) - deg(v) \geq 2$. Тогда удалим ребро uv (уменьшим число ребер на 1), потом удалим вершину v из $\overline{G}$ и добавим на ее место вершину w, сделав ее смежной со всеми соседями вершины u (увеличим число ребер хотя бы на 2). Тогда $\omega(\overline{G})$ не увеличится, однако число ребер увеличится $\Rightarrow$ оно не было изначально максимальным. Противоречие.

Task 141

Граф называется α-критическим, если удаление любого ребра увеличивает $\alpha(G)$. Приведите пример α-критического и не α-критического графа

α-критический: K_2.
не α-критический: P_3

Task 142

Докажите, что в любом дереве, кроме K_2 существует минимальное по числу вершин вершинное покрытие, включающее все вершины, соседние с листьями.

1. Рассмотрим любое минимальное покрытие дерева мощности β.
2. Если оно уже удовлетворяют условию, то задача решена.
3. Если не удовлетворяет, то рассмотрим вершину v, которой нет в покрытии и которая смежна с хотя бы одним листом. В рассматриваемом покрытии должны лежать все соседи вершины v. Тогда удалим из покрытия листья, смежные с v, и добавим в покрытие v.
4. Полученное множество все еще является покрытием. Очевидно, что число вершин в нем не увеличилось. Если оно уменьшилось, то приходим к противоречию и ищем покрытие мощности $\beta - 1$, продолжая алгоритм с первого шага. Иначе, если остались предки листьев, не лежащие в покрытии, то продолжаем алгоритм с третьего шага, если же таких вершин не осталось, то мы предъявили искомое покрытие, завершаем алгоритм.

Task 143

Доминирующим множеством в графе называется множество вершин, такое что каждая вершина либо входит в это множество, либо имеет соседа в этом множестве. Докажите, что независимое множество вершин является максимальным по включению если и только если оно является доминирующим.

$\underline{\Rightarrow}$ От противного. Пусть независимое и максимальное по включению множество I не является доминирующим. Тогда $\exists v \in V(G) \setminus I : \forall u \in I : uv \notin E$. Но тогда множество $I \cup \{v\}$ является независимым, следовательно, множество I не является максимальным по включению. Противоречие.

$\underline{\Leftarrow}$ Пусть независимое множество I является доминирующим. Тогда $\forall v \in V(G) \setminus I : \exists u \in I : uv \in E$. Тогда никакой вершиной из $V(G) \setminus I$ нельзя пополнить множество I с сохранением независимости. Следовательно, оно максимально по включению.

Task 144

Обозначим размер минимального доминирующего множества в графе как $\gamma(G)$. Как связаны $\alpha(G)$ и $\gamma(G)$?

Пусть I - максимальное по размеру независимое множество графа G. Оно является максимальным и по включению. По задаче 143 I максимально по включению $\Rightarrow$ I доминирующее. Отсюда $\gamma(G) \leq \alpha(G)$. Они могут быть равны (как например для K_2) или иметь неограниченную разницу (как например для ежиков).

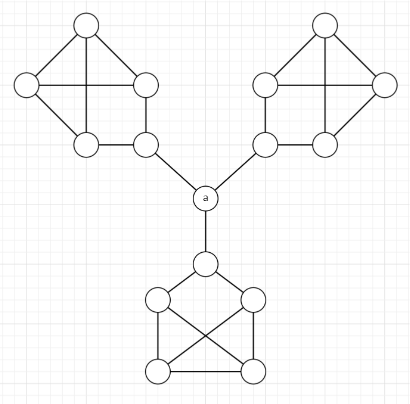
Task 146

Обозначим размер минимального по мощности вершинного покрытия множества в графе как $\beta(G)$. Как связаны $\gamma(G)$ и $\beta(G)$?

По задаче 144 $\gamma(G) \leq \alpha(G)$. Тогда $\gamma(G) + \beta(G) \leq \alpha(G) + \beta(G) = n \Rightarrow \gamma(G) + \beta(G) \leq n$. Равенство может выполняться (как например для циклов C_n), может и не выполняться (как например для ежиков).

Task 148

Приведите пример связного кубического графа, содержащего три моста, в котором нет совершенного паросочетания.

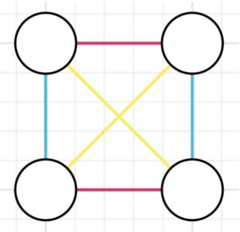


Граф G является кубическим и содержит три моста, каждый из которых инцидентен вершине a. Множество $\{a\} \subset V(G)$ является множеством Татта, ведь после его удаления из G в нем появляется $3 > |\{a\}|$ нечетных КС. Следовательно, G не содержит совершенное паросочетание.

HW 9

Task 149

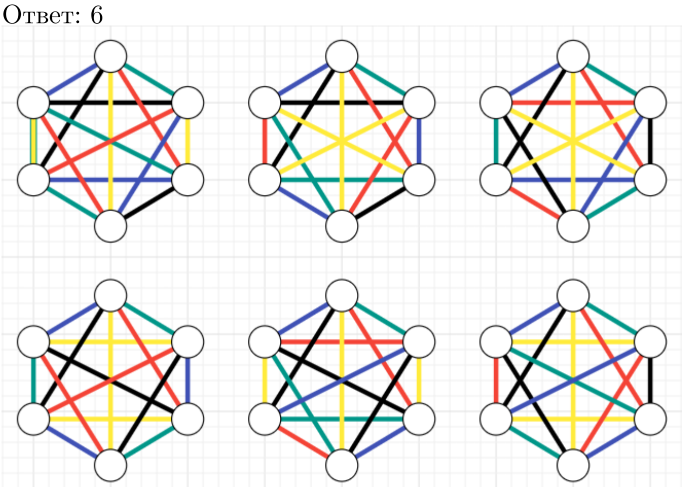
k-факторизацией графа называется разбиение множество ребер графа на его k-факторы. Докажите, что K_4 имеет единственную 1-факторизацию.



Task 150

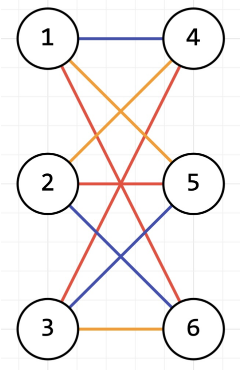
Найдите число 1-факторизаций графа K_6.

Ответ: 6



Task 151

Найдите число 1-факторизаций графа $K_{3,3}$.



Task 152

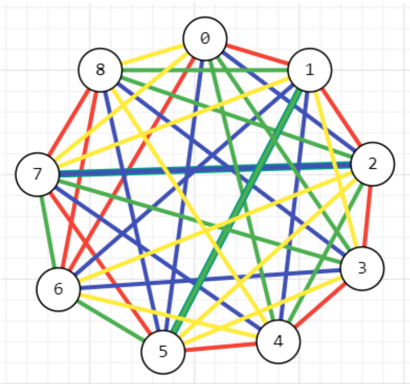
Найдите число 1-факторов графа K_{2n}

$c_n = (2n-1)!!$

Докажем по индукции:
База: $n = 1$, $c_1 = 1 = (2 \cdot 1 - 2)!!$
Переход: рассмотрим все варианты выбрать ребро (v', v_i) - их $2n-1$. Тогда $c_n = (2n-1) \cdot c_{n-1}$. Фиксируем первую вершину, чтобы учесть ее предпочтения лишь один раз. Если рассматривать все ребра, то каждый из вариантов посчитаем n раз, что нам, конечно, не надо.

Task 155

Докажите, что граф K_9 представим в виде объединения 4 гамильтоновых циклов.



1. $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to 8 \to 6 \to 0$
2. $0 \to 2 \to 7 \to 4 \to 1 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 0$
3. $0 \to 4 \to 2 \to 8 \to 1 \to 5 \to 6 \to 7 \to 3 \to 0$
4. $0 \to 8 \to 4 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1 \to 7 \to 0$

Task 157

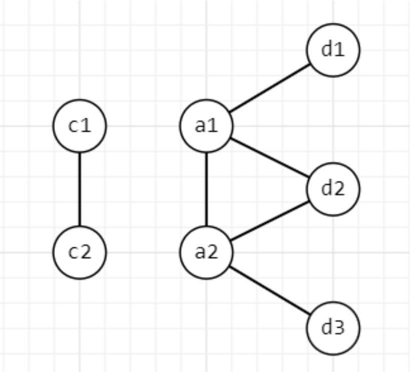
Пусть G - регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \leq k-1$. Тогда для любого ребра uv существует совершенное паросочетание, содержащее uv.

Рассмотрим вершину v и построим граф G', удалив все инцидентные вершине v ребра, кроме uv. Т.к. граф k-регулярный, то удалим мы ровно $k-1$ ребер. Тогда граф G' подпадает под условие задачи 156. Следовательно, в нем существует СПС, которое обязательно содержит ребро uv, т.к. v в G' - лист. Это СПС так же будет являться СПС для G.

Task 160

Множество $S \subset V$, для которого $odd(G \backslash S) - |S| = def(G)$, называется барьером. $A(G)$ является барьером графа. Приведите пример графа, в котором $A(G)$ не является максимальным по включению барьером.

Рассмотрим следующий граф G:



Нетрудно убедиться, что $A(G) = \{a_1, a_2\}, D(G) = \{d_1, d_2, d_3\}, C(G) = \{c_1, c_2\}$. Тогда $def(G) = odd(G \backslash A) - |A| = 3 - 2 = 1$. Теперь рассмотрим $A' = A \cup \{c_1\}$. Тогда $odd(G \backslash A') - |A'| = 4 - 3 = 1 = def(G) \Rightarrow A'$ - барьер, причем $A \subset A'$.

Task 161

Приведите пример графа, в котором $A(G)$ не является минимальным по включению барьером.

Рассмотрим тот же пример, что и в задаче 160. Если положить $A' = \varnothing$, то A' - барьер, причем $A' \subset A$.

Task 167

Лапой называется индуцированный подграф $K_{1,3}$ - вершина (центр лапы) и три её соседа, не связанные между собой. Докажите, что если B - минимальный по включению барьер G, то каждая вершина B - центр лапы в G.

От противного. Пусть $v \in B$ - не центр лапы. Тогда v связывает не более двух КС, образующихся в $G \backslash B$, т.к. в противном случае v была бы центром лапы. Покажем, что $B \backslash x$ - барьер, что противоречило бы минимальности B.

Заметим, что $odd(G \backslash (B \backslash v)) = odd((G \backslash B) \cup v) \geq odd(G \backslash B) - 1$, т.к. v связывает не более двух КС. Тогда $odd(G \backslash (B \backslash v)) \geq odd(G \backslash B) - 1 = def(G) + |B| - 1 = def(G) + |B \backslash v| \Rightarrow def(G) \leq odd(G \backslash (B \backslash v)) - |B \backslash v|$. Но по определению дефицита, $def(G) \geq odd(G \backslash (B \backslash v)) - |B \backslash v| \Rightarrow odd(G \backslash (B \backslash v)) - |B \backslash v| = def(G)$. Тогда $B \backslash v$ - барьер, по определению. Противоречие.

Task 168

Докажите, что если связный граф G содержит четное число вершин и не содержит лапы, то он содержит совершенное паросочетание (Теорема Сумнера-Лас Вергнаса).

Рассмотрим любой барьер B, и т.к. всегда найдется $v \in B$ - не центр лапы, то приводим этот барьер к пустому множеству (см. рассуждения в задаче 167). Тогда $odd(G \backslash \varnothing) = odd(G) = 0, |\varnothing| = 0 \Rightarrow def(G) = 0 \Rightarrow G$ содержит СПС.

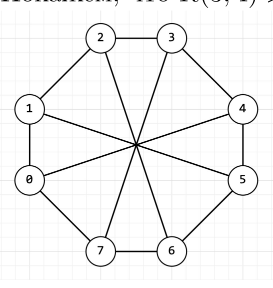
HW10

Task 169

Найти $R(3, 4)$

$R(2, 4) = 4, R(3, 3) = 6$ - четны, тогда можем применить усиленную оценку Эрдеша-Секереша: $R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) - 1 = 9$.

Покажем, что $R(3, 4) > 8$:



Для такого графа $\alpha = 3, \omega = 2$. Для $n \leq 7$ такие графы легко ищутся.

Отсюда получаем, что $R(3,4) = 9$.

Task 170

Докажите, что $R(n,3) \leq \frac{n^2+3}{2}$

Будем доказывать по индукции. База очевидна.

Переход: пусть для $n-1$ верно $R(n-1,3) \leq \frac{(n-1)^2+3}{2}$.

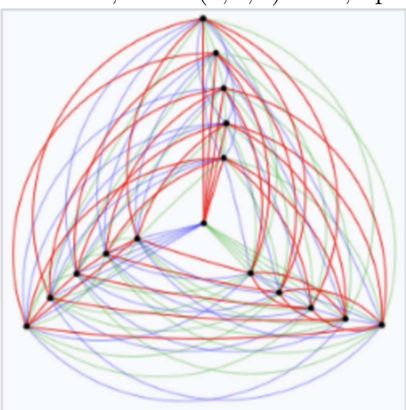
1. Если n - нечетно, то $n-1$ - четно, тогда $R(n-1,3) \leq \frac{(n-1)^2+2}{2}$. Тогда $R(n,3) \leq R(n-1,3) + R(n,2) \leq \frac{(n-1)^2+2}{2} + n = \frac{n^2-2n+1+2+2n}{2} = \frac{n^2+3}{2}$
2. Если $n = 2k$, то $R(n,2)$ - четно. Заметим, что $\frac{(2k-1)^2+3}{2} = \frac{4k^2-4k+4}{2} = 2k^2-2k+2$ - четно. Если $R(n-1,3) = \frac{(2k-1)^2+3}{2}$, то по усиленной оценке получаем $R(n,3) \leq R(n,2) + R(n-1,3) - 1 = n + \frac{n^2-2n+1+3}{2} - 1 = \frac{n^2+2}{2}$. Если $R(n-1,3) < \frac{(2k-1)^2+3}{2}$, то $R(n-1,3) \leq \frac{(n-1)^2+1}{2}$ и аналогично получаем требуемое.

Task 171

Найти $R(3,3,3)$

Покажем, что $R(3,3,3) \leq 17$. Рассмотрим K_{17} и любую раскраску его ребер в 3 цвета. Зафиксируем вершину u. По принципу Дирихле, существует цвет C, такой что из u выходит 6 ребер цвета C. Пусть эти ребра ведут в вершины $\{v_i\}_{i=1}^6$. Если в подграфе на этих вершинах есть хотя бы одно ребро цвета C, то мы нашли треугольник цвета C. Иначе, если ребра в этом подграфе раскрашены только в остальные два цвета, то т.к. $R(3,3) = 6$, среди них обязательно найдется одноцветный треугольник.

Покажем, что $R(3,3,3) > 16$, приведя раскраску ребер для K_{16}, в которой нет одноцветных треугольников:



Таким образом получаем $R(3,3,3) = 17$.

Task 174

Докажите, что из 5 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 4, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника.

Пусть даны 5 точек на плоскости. Рассмотрим выпуклую оболочку системы. Если это пятиугольник или четырехугольник, то мы победили. Если это треугольник ABC, то проведем прямую через две внутренние точки DE. Пусть эта прямая н.у.о. пересекает стороны AB и AC. Тогда выберем точки B, C, D, E - они образуют выпуклый четырехугольник.

Task 177

Докажите усиление теоремы Эрдёша: $R(s,s) \geq \frac{2^{s/2} \cdot s}{e \cdot \sqrt{2}}$

Зафиксируем некоторые s и n. Рассмотрим любой граф на n вершинах и все подмножества мощности s множества его вершин. Всего их C_n^s. Пусть событие $A_i \equiv$ является ли данный подграф на s вершинах кликой или независимым множеством. Тогда очевидно, что $p(A_i) = \frac{2}{2^{C_s^2}} = 2^{1-C_s^2}$. Тогда $p(\cup A_i) \leq C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$.

Теперь осознаем, что если n и s таковы, что $C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} < 1$, то существует граф на n вершинах, в котором нет ни клики, ни нез. мн-ва размера s. Отсюда следует, что $R(s,s) > n$.

Подставим в формулу выражение $\frac{2^{s/2} \cdot s}{e \cdot \sqrt{2}}$:

$$C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} \leq \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-C_s^2} = \frac{2^{s^2/2} \cdot s^s \cdot 2^{1-s^2/2+s/2}}{e^s \cdot 2^{s/2} \cdot s!} = \frac{2s^s}{e^s \cdot s!} \leq \frac{2 \cdot s^s \cdot e^s}{e^s \cdot \sqrt{2\pi s} \cdot s^s} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} < 1$$

И теорема доказана.

Task 178

Докажите, что для любого достаточно большого n выполнено $R(s,s) \geq n - C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$

По задаче 177, $M(CNT) = C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$ - математическое ожидание клик или нез. мн-в размера s. Тогда возьмем любой граф $G(n, \_)$ для которого $CNT \leq C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$. Удалим некоторые вершины из этого графа так, чтобы удалились все CNT клик или нез. мн-в размера s. Очевидно, что нам достаточно удалить $t \leq CNT$ вершин. В полученном графе нет клик или нез. мн-в размера s. Тогда $R(s,s) \geq n - t \geq n - C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$.

Task 179

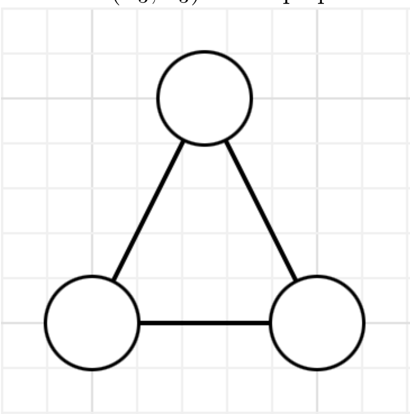
Докажите, что в любой перестановке n элементов найдется возрастающая последовательность из $\sqrt{n}$ элементов или убывающая последовательнтсть из $\sqrt{n}$ элементов.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - перестановка элементов, M_k, m_k - соответственно максимальная и минимальная подпоследовательность начиная с a_k. Предположим противное, то есть $\forall\, k :\ M_k < \sqrt{n} \,\&\, m_k < \sqrt{n}$. Тогда всего может быть $< n$ различных пар (M_k, m_k). Значит $\exists\, i < j :\ M_i = M_j \,\&\, m_i = m_j$. Однако если $a_i < a_j$, то $M_i > M_j$, или если $a_i > a_j$, то $m_i > m_j$. Противоречие.

Task 183

P_k - путь длины $k-1$ (содержащий k вершин и $k-1$ ребро). Найдите $R(P_3, P_3)$.

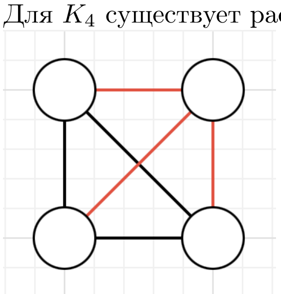
Ответ: $R(P_3, P_3) = 3$. Граф:



Task 184

Найти $R(P_4, P_4)$

Для K_4 существует раскраска, не содержащая одноцветного P_4:



Для K_5 любая раскраска содержит одноцветный P_4 (это легко доказывается рассмотрением случаев).

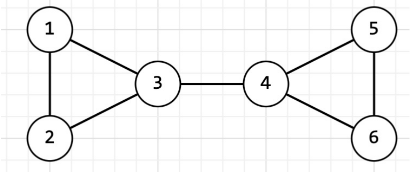
Таким образом $R(P_4, P_4) = 5$.

HW11

Task 185

Покажите, что добавление ребра может сделать совершенный граф несовершенным.

Рассмотрим следующий граф:

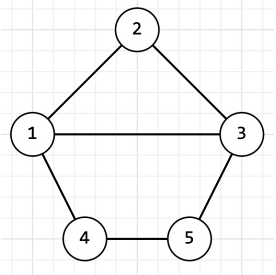


Такой граф является совершенным. Однако если добавить ребро $1-5$, то он перестанет быть совершенным, т.к. из него можно будет выделить цикл C_5.

Task 186

Покажите, что удаление ребра может сделать совершенный граф несовершенным.

Рассмотрим следущий граф:



Такой граф совершенный, однако удаление ребра $1-3$ сделает его несовершенным.

Task 187

Граф называется хордальным, если любой простой цикл длины больше трех имеет хорду (то есть ребро, соединяющее не соседние в цикле вершины). Докажите, что любой интервальный граф является хордальным

Пусть дан интервальный граф G. Рассмотрим в нем любой цикл $v_1, \dots, v_k$ и соответствующие этим вершинам интервалы $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$. Рассмотрим вершину цикла v_t, такую что a_t минимально. v_t смежна с двумя вершинами v_{t-1} и v_{t+1} (по модулю k). Если отрезки $[a_{t-1}, b_{t-1}]$ и $[a_{t+1}, b_{t+1}]$ пересекаются, то мы нашли хорду. Если они не пересекаются, то н.у.о. верно либо $a_t < a_{t-1} < b_{t-1} < a_{t+1} < b_{t+1} < b_t$, либо $a_t < a_{t-1} < b_{t-1} < a_{t+1} < b_t < b_{t+1}$. Но вершина v_{t-1} смежна с $v_{t-2} \Rightarrow [a_{t-1}, b_{t-1}] \cap [a_{t-2}, b_{t-2}] \neq \varnothing \Rightarrow [a_t, b_t] \cap [a_{t-2}, b_{t-2}] \neq \varnothing \Rightarrow v_t v_{t-2}$ - хорда.

Task 188

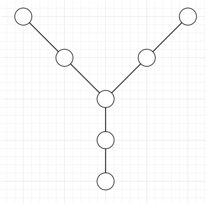
Докажите, что дополнение любого интервального графа является графом сравнений

Пусть дан интервальный граф G. Тогда в $\overline{G}$ есть ребро между $v_i \Leftrightarrow I_i = [a_i, b_i], v_j \Leftrightarrow I_j = [a_j, b_j] \Leftrightarrow I_i \cap I_j = \varnothing$. То есть непересекающиеся интервалы можно упорядочить на числовой прямой, например, так: $I_i < I_j \Leftrightarrow b_i < a_j$. Тогда граф $\overline{G}$ является графом сравнений.

Task 189

Приведите пример хордального графа, который не является интервальным

Пример:



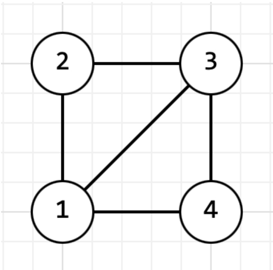
Легко проверить, что подобрать множество интервалов не получится.

Task 191

Совершенный порядок удаления вершин из графа (perfect elimination order, PEO) это последовательность вершин графа $v_1, v_2, \ldots, v_n$, такая что для любой вершины v_i все ее соседи с номерами $j > i$ образуют клику. Докажите, что хордальный граф имеет PEO.

Заметим, что если перевернуть PEO, то получается порядок добавления вершин, такой что для для любой вершины v_i наличие двух ребер $v_j v_i$ и $v_k v_i$, где $j, k < i$ влечет наличие ребра $v_j v_k$. Назовем такой порядок PIO (perfect inserting order).

Рассмотрим следующий алгоритм построения PIO для графа. На каждой итерации будем выписывать вершину, которая имеет максимальное количество выписанных соседей среди еще не выписанных вершин.
Например для такого графа:

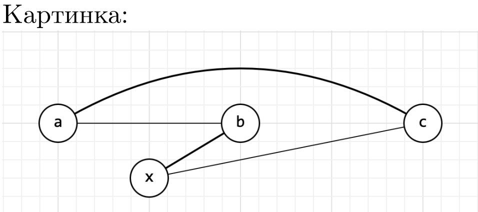


порядок может быть таким: $2, 1, 3, 4$.

Теперь покажем, что такой алгоритм строит PIO для хордального графа.

<u>Lm1</u> Пусть на некоторой итерации выписаны три вершины $a < b < c$, причем $ab \notin E, ac \in E$. Тогда $\exists\, x \in V, x < b \ : \ xb \in E, xc \notin E$.

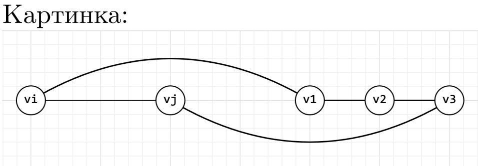
Картинка:



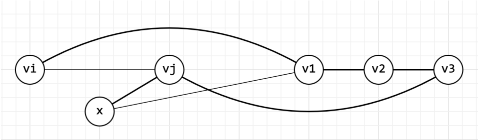
$\triangleright$ Обозначим как $N(b)$ - множество соседей вершины b слева от вершины b и $N(c)$ - множество соседей вершины c слева от вершины b. Предположим, что вершины x нет, то есть $\forall\, x < b \ : \ (xb \in E) \ \Rightarrow \ (xc \in E)$. Но тогда верно $N(b) \subset N(c) \ \Rightarrow \ |N(b)| \leq |N(c)|$, однако $a \in N(c)$, но $a \notin N(b) \ \Rightarrow \ |N(b)| < |N(c)|$. Но тогда вершина c должна была быть выписана раньше, чем b. Противоречие. $\triangleleft$

<u>Lm2</u> Если граф хордален, то в построенном порядке не существует пути между вершинами $v_i, v_j, i < j$, такого что нет ребра $v_i v_j$ и все неконцевые вершины пути находятся справа от v_j.

Картинка:



$\triangleright$ Пусть это не так и такой путь существует. Рассмотрим среди всех таких путь с минимальной суммой номеров его концов i и j (пусть такой путь изображен на картинке выше). Заметим, что вершины v_i, v_j, v_1 удовлятворяют лемме выше. Тогда $\exists\, x < v_j \ : \ xv_j \in E, xv_1 \notin E$.



Тогда, если $v_i x \notin E$, то мы нашли путь с меньшей суммой концов, противоречие. Если $v_i x \in E$, то перед нами цикл, в котором не может быть ребер xv_1 и $v_i v_j$, что противоречит хордальности графа. $\triangleleft$

По лемме 2 ясно, что если граф хордален, то в построенном для него порядке не существует вершины v_t, такой, для которой существует два ребра влево, концы которых не соединены ребром (в противном случае это был бы путь из леммы 2). Тогда построенный порядок является PIO для изначального графа. В силу того, что алгоритм всегда может построить такой порядок для хордального графа, то существует и PEO. хуй

Task 192

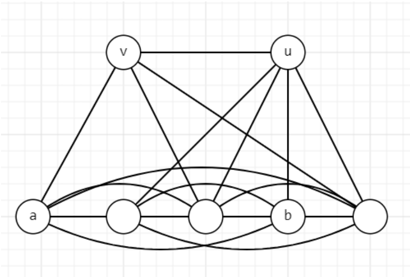
Докажите, что если граф имеет PEO, то он хордальный.

Рассмотрим любой граф G и его PIO. Рассмотрим любой цикл длины хотя бы 4 и вершину v_t этого цикла, имеющую максимальный номер в PIO. Эта вершина смежна с $v_i, v_j,\ \ i, j < t$. Т.к. вершины упорядочены в PIO, то $v_i v_j \in E(G)$ - хорда в рассматриваемом цикле.

Task 193

Докажите, что хордальный граф является совершенным.

Пусть дан хордальный граф G и пусть он не совершенен. Это означает, что найдется такой его подграф H, что $\chi(H) > \omega(H)$. Рассмотрим этот подграф. Среди всех его КС рассмотрим те, что содержат клики размера $\omega(H)$. Тогда утверждается, что среди этих КС найдется такая, размер которой хотя бы $\omega(H)+2$ и среди вершин не из клики найдутся такие две v, u, что между ними есть ребро и среди вершин клики существует вершина a, смежная с v, но не смежная с u, и другая вершина b, смежная с u, но не смежная с v:



Это утверждение легко проверить от противного, достаточно аккуратно рассмотреть все противные случаи и увидеть противоречие одному из вышеуказанных условий. Но вообще-то говоря мы нашли цикл длины 4 без хорд: $a - v - u - b - a$. Это противоречит хордальности графа.

Task 195

Докажите, что если G является реберным графом, то $\chi(G) \in \{\omega(G), \omega(G)+1\}$

Пусть G - реберный граф некоторого графа H. По теореме Визинга, $\chi'(H) \le \Delta(H) + 1$. Также верно, что раскраска ребер графа H эквивалентна раскраске вершин графа G, тогда $\chi'(H) = \chi(G)$. С другой стороны, также верно $\Delta(H) = \omega(G)$. Тогда $\chi(G) = \chi'(H) \le \Delta(H) + 1 = \omega(G) + 1$. Но также верно $\chi(G) \ge \omega(G)$, и утверждение доказано.

Task 202

Предложите полиномиальный алгоритм проверки, что граф является хордальным.

Будем использовать алгоритм из задачи 191. Заметим, что если граф был изначально хордальным, то построенный для него порядок будет корректным PIO, тогда достаточно проверить, что он корректен. Однако если изначально граф не был хордальным, то для него не существует PIO, иными словами, в любом таком порядке найдется два обратных ребра идущих из одной вершины, концы которых не соединены ребром. Таким образом хордальность графа равносильна корректности построенного алгоритмом из задачи 191 порядка. Очевидно, это можно провернуть за полином.

Task 203

Предложите полиномиальный алгоритм поиска $\alpha(G)$ для хордального графа G.

Будем использовать алгоритм из задачи 191. Чтобы выбрать МНМ, будем итерироваться по вершинам с конца, добавлять вершину в ответ, если она свободна и маркировать занятыми всех ее соседей слева. Очевидно, что в итоге в ответе будет НМ I. Почему же оно максимально? Действительно, рассмотрим любое другое НМ J, которое отличается от I вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Т.к. эти вершины не были добавлены в I, то они были промаркированы занятыми некоторыми вершинами из $I : u_1, u_2, \ldots, u_k$. Заметим, что никакие два u_i, u_j не могут совпадать, т.к. в противном случае между x_i, x_j должно быть ребро по определению PIO. Также заметим, что если мы взяли в J вершину x_i, то в J не может быть ни одного другого соседа u_i слева и самой u_i. То есть размер J не превышает размера I.

Task 204

Предложите полиномиальный алгоритм поиска $\chi(G)$ для хордального графа G.

Будем использовать алгоритм из задачи 191. Т.к. хордальный граф является совершенным (задача 193), то для него верно $\chi(G) = \omega(G)$. Тогда очевидно, что достаточно построить PIO и найти с его помощью максимальную клику. По построению PIO достаточно найти вершину, из которой выходит максимальное число ребер влево, она и будет образовывать с левыми смежными вершинами максимальную клику.

HW 13

Task 223

Как устроено замыкание в графовом матроиде?

Рассмотрим $M = \langle X, I \rangle$ - графовый матроид, $A \subset X$ - граф с n вершинами и k компонентами связности. Тогда $r(A) = n - k$. По определению $\langle A \rangle = \{x \in X \mid r(A \cup x) = r(A)\}$, то есть в замыкание мы возьмем все ребра из A и еще те, что не уменьшат количество компонент связности. Таким образом, замыкание сделает из каждой КС полный граф.

Task 224

Как устроено замыкание в матричном матроиде?

Пусть A - множество векторов. В замыкание множества A мы добавим все элементы из A и еще те, что при добавлении не увеличат ранг. То есть по сути добавим те вектора, что линейно-зависимы с A (или, иными словами, что не изменяют размерность линейной оболочки, натянутой на набор).

Task 225

Докажите, что если A независимо, то для любого $p \in A$ выполнено $p \notin \langle A \backslash p \rangle$.

Просто достаточно понять, почему p мы не можем добавить в замыкание $\langle A \backslash p \rangle$. $r(A \backslash p) = |A| - 1, r((A \backslash p) \cup p) = r(A) = |A|$. Грустно.

Task 226

Докажите, что если $A \subset B$, то $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$.

Воспользуемся первым определением замыкания: $\langle A \rangle = A \cup \{x \in X \mid \exists H \subset A : \ H \in I, H \cup x \notin I\}$. Положим $x \in \langle A \rangle$.

1. Если $x \in A$, то $x \in B \ \Rightarrow \ x \in \langle B \rangle$
2. Если $x \notin A$, то $\exists H \subset A \subset B : \ H \in I, H \cup x \notin I$. Тогда $x \in \langle B \rangle$.

Task 227

Докажите, что $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$

Очевидно, что $\langle A \rangle \subset \langle \langle A \rangle \rangle$. Покажем, что $\langle \langle A \rangle \rangle \backslash \langle A \rangle = \varnothing$. Действительно, пусть $x \in \langle \langle A \rangle \rangle \backslash \langle A \rangle$. Тогда $r(\langle A \rangle \cup x) = r(\langle A \rangle) = r(A)$. Однако, т.к. $x \notin \langle A \rangle$, то $r(A) < r(A \cup x)$. Следовательно $r(\langle A \rangle \cup x) < r(A \cup x)$, что невозможно, ведь $(A \cup x) \subset (\langle A \rangle \cup x)$. Противоречие.

Task 228

Докажите, что если $q \notin \langle A \rangle$, $q \in \langle A \cup p \rangle$, то $p \in \langle A \cup q \rangle$.

Разберем случаи:

1. $q \in A \cup p$. $q \notin \langle A \rangle \;\;\Rightarrow\;\; q \notin A \;\;\Rightarrow\;\; q = p$, тогда утверждение очевидно.
2. $\exists H \subset A \cup p, H \in I, H \cup q \notin I$. Заметим, что $p \in H$, т.к. в противном случае оказалось бы, что $q \in \langle A \rangle$. Тогда положим, что $H' = H \backslash p$, и получается, что $H' \cup p \in I, H' \cup p \cup q \notin I$. Заметим, что $H' \cup q \in I$, т.к. в ином случае, в силу того что $H' \in I$, было бы верно что $q \in \langle A \rangle$. И тогда отсюда получается, что $p \in \langle A \cup q \rangle$.

Task 229

Двойственный матроид. Пусть $M = \langle X, I \rangle$ - матроид. Обозначим как M^* следующую конструкцию: $M^* = \langle X, \{A \mid \exists B \in \mathcal{B}(M) :\ A \cap B = \varnothing\} \rangle$. Докажите, что M^* является матроидом.

Докажем используя теорему о аксиоматизации базами. Покажем, что множество дополнений до баз - это базы, на основании которых строится двойственный матроид.

Обозначим множество дополнений до баз как $\mathcal{B}^*$.

1. $\overline{B_1}, \overline{B_2} \in \mathcal{B}^*$. Пусть $\overline{B_1} \subset \overline{B_2}, \overline{B_1} \neq \overline{B_2}$. Но тогда $B_2 \subset B_1, B_2 \neq B_1$. Противоречие.
2. $\overline{B_1}, \overline{B_2} \in \mathcal{B}^*$. По усиленной теореме о базах, $\forall x \in B_2 \backslash B_1 :\ \ \exists y \in B_1 \backslash B_2 :\ \ B_1 \cup x \backslash y \in \mathcal{B}$. Тогда $\forall x \in \overline{B_1} \backslash \overline{B_2} :$ $\exists y \in \overline{B_2} \backslash \overline{B_1} :\ \ \overline{B_1 \cup x \backslash y} = \overline{B_1} \backslash x \cup y \in \mathcal{B}^*$.

Тогда на базах $\mathcal{B}^*$ существует матроид. Из определения ясно, что такой матроид будет является двойственным.

Task 230

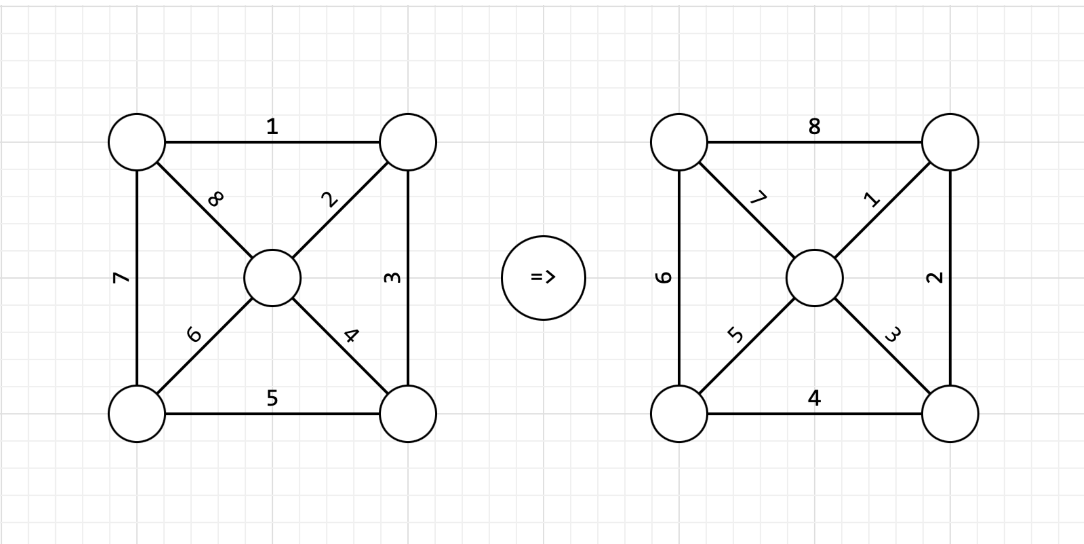
Циклы двойственного матроида называются коциклами. Докажите, что любая база пересекается с любым коциклом.

От противного. Пусть $\exists B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}^* :\ B \cup C = \varnothing$ - непересекающиеся база и коцикл. Тогда $C \subset \overline{B}$. Но тогда C - независимо, то есть не цикл. Противоречие.

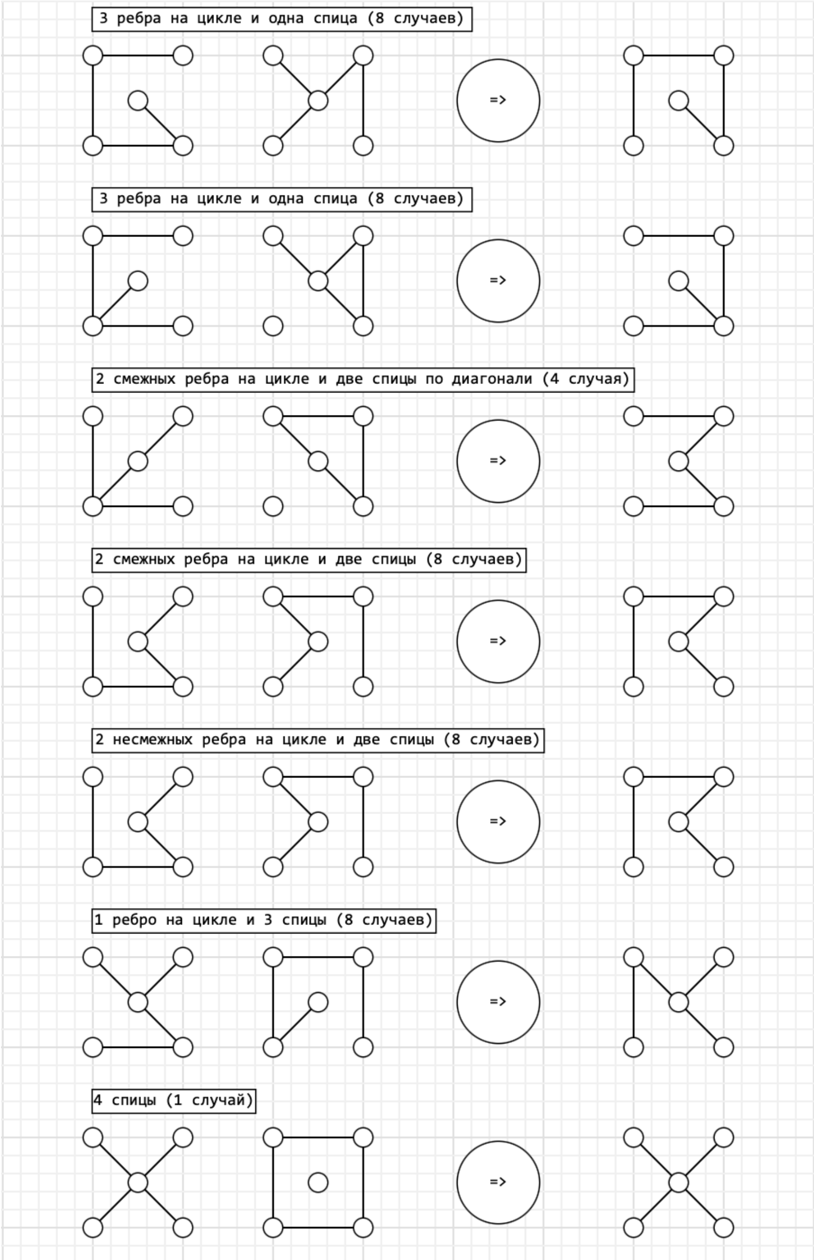
Task 232

В этой и следующих задача граф для графового матроида может содержать кратные ребра. Докажите, что двойственный к графовому матроиду колеса $C_4 + K_1$ изоморфен графовому для некоторого графа.

Рассмотрим биекцию на ребрах и для каждого остова покажем, что образ дополнения каждого остова - тоже остов. Биекцией будет циклическая перенумерация ребер:



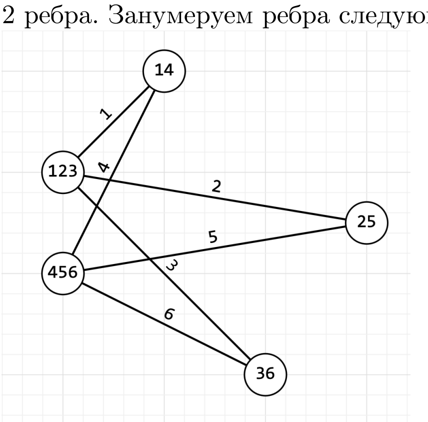
У такого графа, по формуле Кирхгофа, 45 остовных деревьев. Рассмотрим их всех и проверим изоморфизм (см. ниже). Заметим, что мы таким образом проверили изоморфизм в обе стороны. Для остовов работает, значит работает для всех ациклических подграфов.



Task 233

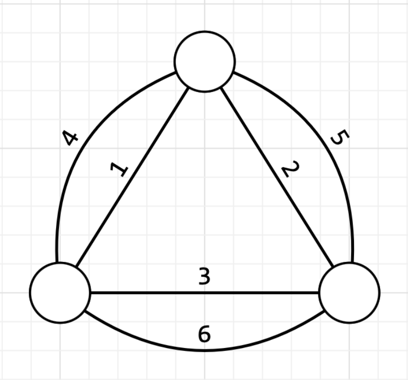
Докажите, что двойственный к графовому матроиду графа $K_{2,3}$ изоморфен графовому для некоторого графа

В графе $K_{2,3}$ ровно 12 остовов. В каждый остов входит 4 ребра, значит в каждое дополнение до остова входит 2 ребра. Занумеруем ребра следующим образом:



Выпишем все пары ребер, которые являются дополнениями до остовов:
$(1,2),(1,3),(2,3),(4,5),(4,6),(5,6),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,4),(3,5)$.
Здесь не хватает только пар $(1,4),(2,5),(3,6)$ - они зависимы.

Такое множество баз имеет графовый матроид на следующем графе:



Изоморфизм очевиден.

Task 239

Докажите, что $M^{**} = M$.

Пусть $\mathcal{B}$ - множество баз M. Как мы уже убедились ранее, $\mathcal{B}^* = \{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$. Аналогично, $\mathcal{B}^{**} = \{\overline{\overline{B}} \mid \overline{B} \in \mathcal{B}^*\} = \mathcal{B}$. Тогда матроиды M и M^{**}, построенные на базах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{**}$ соответственно, будут равны.

Task 240

Один студент считает, что xor двух циклов обязательно содержит цикл. Доказать или опровергнуть.

Опровергнем. Рассмотрим любой цикл C. $C \bigoplus C = \varnothing$. $\varnothing$ как подмножества содержит только себя и не может быть циклом по определению.

Task X

Докажите, или опровергните, что приведенная конструкция является матроидом. Носитель — множество чисел от 1 до $2n$, независимые множества — множества A чисел, таких, что существует правильная скобочная последовательность с n открывающимися скобками, такая, что на всех позициях из A стоят открывающиеся скобки.

Пусть $\mathcal{B} = \{A \mid |A| = n,$ существует ПСП длины $2n$, такая что на позициях A стоят открывающие скобки$\}$. Тогда очевидно, что достаточно доказать свойства баз для такого множества и по теореме об аксиоматизации базами построенный на них матроид будет матроидом из условия.

1. $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \;\;\Rightarrow\;\; A = B$ - очевидно по построению.
2. $A, B \in \mathcal{B}$. Нужно показать, что $\forall x \in A \backslash B : \; \exists y \in B \backslash A : \; A \backslash x \cup y \in \mathcal{B}$. Пусть дано $i \in A \backslash B, S_A$ и S_B- ПСП, соответсвующие мн-вам A и B. Будем писать $S[k] = +1$, если на k позиции в S стоит открывающая скобра и $S[k] = -1$ - если закрывающая. Разберем случаи:

   1. $\exists j \in B \backslash A : \; j < i$. Тогда $S_A[j] = -1, S_A[i] = +1$, причем на подотрезке $S_A[j, i)$ баланс неотрицательный. Пусть $S'_A = \{S_A \mid S_A[i] = +1, S_A[j] = -1\}$. Заметим, что мы лишь увеличили баланс на подотрезке $S_A[j, i)$, на остальной части СП баланс не изменился. S'_A соответсвует $A \backslash i \cup j$, причем S'_A - ПСП. Таким образом $A \backslash i \cup j \in \mathcal{B}$.

   2. $\forall y \in B \backslash A : \; y > i$. Среди всех таких y выберем минимальный - j. Тогда $S_A[i] = S_B[j] = +1, S_A[j] = S_B[i] = -1$. Сразу заметим, что $balance(S_A, i-1) \geq balance(S_B, i-1)$ (по сути это следует из очевидного факта, что $\{b \in B \mid b < i\} \subset \{a \in A \mid a < i\}$). И т.к. $S_B[i] = -1$, то $balance(S_B, i-1) \geq 1$. Еще заметим, что $S_A[i+1, j) = S_B[i+1, j)$. В силу того, что баланс на отрезке $S_B[i+1, j)$ неотрицательный, верно, что баланс на отрезке $S_A[i+1, j)$ не меньше 2. Тогда пусть $S'_A = \{S_A \mid S_A[i] = -1, S_A[j] = +1\}$. Баланс на всем S'_A все еще неотрицательный. S'_A соответсвует $A \backslash i \cup j \in \mathcal{B}$.