HW1

Степурин Алексей M3134

1

$$(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-2z)+1+7i=0;$$

$$z-i+2iz+2+4i-3-8iz+6z+1+7i=0;$$

$$7z+10i-6iz=0;$$

$$z=\frac{10i}{6i-7}=\frac{-10i(6i+7)}{36+49}=\frac{12}{17}-\frac{14i}{17};$$

$$\text{Ответ: } \frac{12}{17}-\frac{14i}{17}.$$

2

$$\begin{cases}(3-i)z+(4+2i)w=1+3i, \qquad \mid *(1+i)\\(4+2i)z-(2-3i)w=7;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4+2i)z+(4+2i)(1+i)w=(1+3i)(1+i),\\(4+2i)z-(2-3i)w=7;\end{cases}$$

$$(4+2i)(1+i)w+(2-3i)w=(1+3i)(1+i)-7;$$

$$w=\frac{(1+3i)(1+i)-7}{(4+2i)(1+i)+(2-3i)}=\frac{-9+4i}{4+3i}=$$
$$=\frac{(-9+4i)(4-3i)}{25}=\frac{-36+27i+16i+12}{25}=-\frac{24}{25}+\frac{43i}{25};$$

$$(4+2i)z-(2-3i)(-\frac{24}{25}+\frac{43i}{25})=7;$$

$$25z(4+2i)+(2-3i)(24-43i)=175;$$

$$100z+50iz+48-86i-72i-129=175;$$

$$z(100+50i)=256+158i;$$

$$z=\frac{256+158i}{(100+50i)}=\frac{128+79i}{(50+25i)}=\frac{(128+79i)((50-25i))}{3125}=$$
$$=\frac{(128+79i)((2-i))}{125}=\frac{256-128i+158i+79}{125}=$$
$$=\frac{335+30i}{125}=\frac{67+6i}{25}=\frac{67}{25}+\frac{6i}{25};$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{67}{25}+\frac{6i}{25};-\frac{24}{25}+\frac{43i}{25}\right).$$

3

1)

$$z=-\sqrt{3}+i;$$

$$tg\ \varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\varphi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6};$$

$$r=|z|=\sqrt{-\sqrt{3}^2+1}=2;$$

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$\text{Ответ: } 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

2)

$$z=1=1+0i;$$

$$\varphi=0;$$

$$|z|=\sqrt{1^2+0^2}=1=r;$$

$$z=1(\cos 0+i\sin 0);$$

$$\text{Ответ: } 1(\cos 0+i\sin 0).$$

3) -

4)

$$z=(\sqrt{3}-i)^100;$$

$$]\ \ w=\sqrt{3}-i; \qquad |w|=2;$$

$$tg\ \varphi_w=-\frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \varphi_w=-\frac{\pi}{6};$$

$$z=w^{100}=2^{100}\left(\cos\frac{-100\pi}{6}+i\sin\frac{-100\pi}{6}\right)=$$

$$=2^{100}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right);$$

$$\text{Ответ: } 2^{100}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right).$$

4

1)

$$z^3=-1;$$

$$z=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=$$

$$=1\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3})\right), \quad k=0,1,2.$$

2)

$$z^8=1+i;$$

$$z=\sqrt[8]{1+i}=\sqrt[8]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{8}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{8}\right), \quad k=0,1,2,3,4,5,6,7.$$

3)

$$z^5=1+\sqrt{3}i;$$

$$z=\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}=\sqrt[5]{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right), \quad k=0,1,2,3,4.$$

4)

$$z^6 = \overline{z}^3;$$

$$z^2 = \overline{z};$$

Пусть $\quad z = a + bi, \quad$ тогда $\quad \overline{z} = a - bi, \quad a, b \in \mathbb{R}:$

$$(a+bi)^2 = a - bi;$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi;$$

$$i(2ab + b) = b^2 - a^2 + a;$$

Такое возможно, если $\quad 2ab + b = 0 \quad => \quad b = 0 \quad$ или $\quad a = -0.5;$

Если $\quad b = 0, \quad$ то $\quad a = 0 \quad$ или $\quad a = 1;$

Если $\quad a = -0.5, \quad => \quad b^2 + 0.25 = 0 \quad =>$ нет решений;

Ответ: 0; 1.

5

$$\frac{(-2-2\sqrt{3})^7 i^4}{(-8-8i)^3(-1+\sqrt{3}i)^3} = \frac{4\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{8\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{2^{14}\left(\cos\frac{-14\pi}{3} + i\sin\frac{-14\pi}{3}\right)(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{2^{10,5}\left(\cos\frac{-9\pi}{4} + i\sin\frac{-9\pi}{4}\right)2^3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)} =$$

$$= \sqrt{2} * \frac{\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}}{\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}} = \sqrt{2} * \frac{-0.5 - 0.5\sqrt{3}i}{0.5\sqrt{2} - 0.5\sqrt{2}i} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i}{i-1} = \frac{(1+3i)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i;$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i.$

6

$$\left(\frac{2}{z} - 1\right)^n = 1;$$

Если $\quad n = 0, \quad$ то $\quad z \neq 0;$
Если $\quad n \neq 0, \quad$ то $\quad z = 1.$

7

$$\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}} = -\frac{1}{i} - \frac{1}{i} - \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = -\frac{2}{i} = 2i;$$

Ответ: $2i$.

8

$$z = \sqrt{3}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(-0.5 + 0.5\sqrt{3}i\right) = -0.5\sqrt{3} + 1.5i;$$

Ответ: $-0.5\sqrt{3} + 1.5i.$

HW2

Степурин Алексей M3134

1

a)

$$M = \mathbb{N}, x * y = NOD(x, y);$$
$$x = 2^{x_2} \cdot 3^{x_3} \cdot 5^{x_5}...;$$
$$y = 2^{y_2} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{y_5}...;$$
$$NOD(x, y) = 2^{min(x_2,y_2)} \cdot 3^{min(x_3,y_3)} \cdot 5^{min(x_5,y_5)}...;$$

Коммутативность есть: $x * y = 2^{min(x_2,y_2)} \cdot 3^{min(x_3,y_3)} \cdot 5^{min(x_5,y_5)}... =$
$= 2^{min(y_2,x_2)} \cdot 3^{min(y_3,x_3)} \cdot 5^{min(y_5,y_5)}... = y * x;$

Ассоциативность есть: $(x * y) * z = 2^{min(min(x_2,y_2),z_2)} \cdot 3^{min(min(x_3,y_3),z_3)} \cdot 5^{min(min(x_5,y_5),z_5)}... =$
$= 2^{min(min(z_2,y_2),x_2)} \cdot 3^{min(min(z_3,y_3),x_3)} \cdot 5^{min(min(z_5,y_5),x_5)}... = x * (y * z);$

Нейтральный: $\forall x \in \mathbb{N} \;\; NOD(x, e) = x \quad => \quad e = 2^{\infty} \cdot 3^{\infty} \cdot 5^{\infty}... \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

b)

$$M = \mathbb{Z}, x * y = x^2 + y^2;$$

Коммутативность есть: $x * y = x^2 + y^2 = y^2 + x^2 = y * x;$

Ассоциативности нет: $(x * y) * z = (x^2 + y^2)^2 + z^2 \neq (z^2 + y^2)^2 + x^2 = x * (y * z)$

Нейтральный: $\forall x \in \mathbb{Z} \;\; x^2 + e^2 = x \quad => \quad e = \sqrt{x - x^2} \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

c)

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) * (a, b) = (x, b);$$

Коммутативности нет: $(a, b) * (c, d) = (a, d);$
$(c, d) * (a, b) = (c, b) \neq (a, d);$

Ассоциативность есть: $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, d) * (e, f) = (a, f);$
$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c, f) = (a, f);$

Нейтральный: $\forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}(x, y) * (e_1, e_2) = (x, e_2) = (x, y) \quad => \quad e_2 = y \quad =>$
нейтрального нет, а значит и об обратных говорить нет смысла.

2

$$\forall f, g \text{ — строго возр-ие, непр-ые, опр-ы на } [0,1] : f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1;$$

Назовём множество таких функций F.

Передадим привет матану: композиция строго возрастающих функций строго возрастает, композиция непрерывных функция непрерывна. Расссмотрим композицию $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: если g — строго возрастает и непрерывна на $[0,1]$ и g(0) = 0, g(1) = 1, то $D(f) = E(g) = D(g) = [0,1]$, тогда $f(g(x))$ определена на $[0,1]$. Ясно что $f(g(0)) = f(0) = 0, f(g(1)) = f(1) = 1$. Тогда множество F образует магму отнозительно композиции.

Ассоциативность: $\forall f, g, h \in F: \quad ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x);$

Нейтральный элемент e: $\forall f \in F: \quad (f \circ e)(x) = f(x)$ и $(e \circ f)(x) = f(x) \quad => \quad f(e(x)) = f(x)$ и $e(f(x)) = f(x) \quad => \quad e(x) = x$.

Обратный элемент: $\forall f \in F \ \exists f^{-1} : f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = e(x) = x$. Ясно, что графики обратных друг другу функций будут симметричны относительно прямой $e(x) = x$.

Тогда F образует группу относительно композиции.

3

$$G = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, H = \{0,1,2\};$$

$$+_9 \text{— сумма по модулю 9;}$$

$$+_3 \text{— сумма по модулю 3;}$$

$$\times_9 \text{— произведение по модулю 9;}$$

$$\times_3 \text{— произведение по модулю 3;}$$

a)

$(H, +_3)$:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$(H, \times_3)$:

$\times_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

b)

Ассоциативность и коммутативность всех структур очевидны.

Нейтральный элемент в $(G, +_9)$ и $(H, +_3)$ — 0.

Нейтральный элемент в $(G, \times_9)$ и $(H, \times_3)$ — 1.

Пары обратных друг другу в $(G, +_9)$: $(0,0), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)$ — все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(H, +_3)$: $(0,0), (1,2)$ – все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(G, \times_9)$: $(1,1), (2,5), (4,7)$ — не все имеют обратный.

Пары обратных друг другу в $(H, \times_3)$: $(1,1), (2,2)$ — не все имеют обратный.

Ответ: $(G, +_9), (H, +_3)$ — группы, $(G, \times_9), (H, \times_3)$ — моноиды.

c)

$]\ f \in Hom(G, H) : \forall x \in G\ \ f(x) = x \bmod 3$;
$f(x +_9 y) = (x +_9 y) \bmod 3 = (x \bmod 3) +_3 (y \bmod 3) = f(x) +_3 f(y)$;
$f(0) = 0$;
$f(\{0, 3, 6\}) = \{0\}$;
$f(\{1, 4, 7\}) = \{1\}$;
$f(\{2, 5, 8\}) = \{2\}$;
Получаем, что f - сюръективный гомоморфизм групп $(G, +_9), (H, +_3)$.

d)

$Ker\ f = \{0, 3, 6\};\ \ Im\ f = \{0, 1, 2\}$;
$f(1) = 1;\ \ f^{-1}(1) = \{0, 4, 7\}$.

e)

Группы: $(G, +_9), (H, +_3)$.

Подгруппы:

- обе несобственный подгруппы;
- $(\{0\}, +_9)$ и $(\{0\}, +_3)$ соответственно;
- $(\{0, 3, 6\}, +_9$ для группы $(G, +_9)$.

4

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

a)

Коммутативность оперции очевидна из таблицы. Нейтральный элемент — c, каждый элемент является обратным самому себе.

Проверим ассоциативность: если в выражении есть c, то

- $(c * x_1) * x_2 = x_1 * x_2 = c * (x_1 * x_2)$;
- $(x_1 * c) * x_2 = x_1 * x_2 = x_1 * (c * x_2)$;
- $(x_1 * x_2) * c = x_1 * x2 = x_1 * (x_2 * c)$,

проверим остальные случаи (уже зная, что закон коммутативен):

- $a * (b * d) = a * a = d * d = (a * b) * d$;
- $b * (a * d) = b * b = d * d = (b * a) * d$;
- $d * (a * b) = d * d = b * b = (d * a) * b$;
- $a * (a * a) = a * c = c * a = (a * a) * a$;

- $b * (b * b) = b * c = c * b = (b * b) * b$;
- $d * (d * d) = d * c = c * d = (d * d) * d$;
- $a * (b * b) = a * c = a = d * b = (a * b) * b$;
- $a * (d * d) = a * c = a = b * d = (a * d) * d$;
- $b * (a * a) = b * c = b = d * a = (b * a) * a$;
- $b * (d * d) = b * c = b = a * d = (b * d) * d$;
- $d * (a * a) = d * c = d = b * a = (d * a) * a$;
- $d * (b * b) = d * c = d = a * b = (d * b) * b$;

Получаем, что тип данной структуры — группа.

b)

Нейтральный элемент — c, каждый элемент является обратным самому себе, поглощающих нет.

c)

a, b, d — нильпотенты, т.к. $a^2 = b^2 = d^2 = c$, с — идемпотент, т.к. с*с = с.

d)

Подгруппы: $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, c\}$ (с тем же законом композиции). Все подгруппы нормальные, т.к. закон коммутативен.

5

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad n = 2, 3, 5, 6, 8, \quad I = n\mathbb{Z};$$
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: \quad \overline{x} = x + I; \quad \overline{y} = y + I;$$
$$\overline{x} + \overline{y} = (x + I) + (y + I) = x + y + I = \overline{x + y};$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (x + I)(y + I) = xy + I = \overline{xy};$$

Обе операции ассоциативны и коммутативны, нулем будет $0_I = \overline{0} = I$, единицей — $1_I = \overline{1}$. Для сложения каждый элемент имеет обратный.

$$\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y + z} = \overline{x(y + z)} = \overline{xy + xz} = \overline{xy} + \overline{xz} = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z};$$
$$(\overline{x} + \overline{y})\overline{z} = \overline{x + y} \cdot \overline{z} = \overline{(x + y)z} = \overline{xz + yz} = \overline{xz} + \overline{yz} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z};$$

a)

Получаем, что $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — кольцо.

$n = 2, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$;

$n = 3, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$;

$n = 5, \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$;

$n = 6, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$;

$n = 8, \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$.

b)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, — области целостности, т.к. 2, 3, 5 — простые.
В $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ делители нуля $\overline{2}, \overline{3}$; В $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ делители нуля $\overline{2}, \overline{4}$;

c)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}, \ \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}: \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}, \ \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{1}, \ \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$ => поле;
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}:$ — нет обратного для $\overline{2}$ => не поле;
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}:$ — нет обратного для $\overline{2}$ => не поле;

HW3

Степурин Алексей M3134

1

] $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$— полином n-ой степени с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0, 0, ...$. Сразу заметим, что операции сложения и умножения полиномов ассоциативны и коммутативны. Будем обозначать полином p степени n так: ${}_np(x)$.

a)

$\forall p(x) \in \mathbb{Z}[x]:$

] e_+ — нейтральный эл-т по сложению, тогда

$p(x) + e_+ = p(x) \quad => \quad e_+ = 0 \ \ (deg(0) = -\infty)$.

] θ_+ – поглощающий эл-т по сложению, тогда

$p(x) + \theta_+ = \theta_+ \quad => \quad p(x) = 0 \quad =>$ поглощающего по сложению нет.

Обратные по сложению: $p(x) + e_+ = p(x) \quad => \quad e_+ = p(x) - p(x) = p(x) + (-p(x)) = p(x) + p^{-1_+}(x) \quad => \quad p^{-1_+}(x) = -p(x)$, т.е. если $p(x)$ имеет коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2...$, то $p^{-1_+}(x)$ имеет коэффициенты $-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2...$.

] $e.$ — нейтральный эл-т по умножению, тогда

$p(x) \cdot e. = p(x) \quad => \quad e. = 1$.

] $\theta.$ – поглощающий эл-т по умножению, тогда

$p(x) \cdot \theta. = \theta. \quad => \quad \theta. = 0$.

Обратные по умножению: $p(x) \cdot e. = p(x) \quad => \quad e. = p(x) \cdot p^{-1.}(x) \quad => \quad p(x) \mid e. \quad => \quad p(x) = 1 \quad =>$ обратного по умножению элемента нет.

b)

При рассмотрении $\mathbb{Q}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$ рассуждения будут аналогичны $\quad => \quad$ ответ не изменится.

c)

Рассмотрим множества на предмет операций сложения и умножения:

- $\mathbb{Z}_{\leq n}$: сумма полиномов степени не больше n равна полиному степени не больше n, произведение полиномов степени n равно полиному степени $2n > n$, $=>$ сложение является законом композиции на $\mathbb{Z}_{\leq n}$, а умножение - нет.

  Нейтральный и обратный для каждого, степенью не превосходящие n, есть (см. п. (a)) $=>$ $\mathbb{Z}_{\leq n}$ — абелева группа.
- $\mathbb{Z}_{<n}$ или $\mathbb{Z}_{\leq n-1}$: рассуждения аналогичны, как и для $\mathbb{Z}_{\leq n}$, при $n = 1$ такое множество обратится в кольцо целых чисел.
- $\mathbb{Z}_{=n}$:] ${}_np(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$, ${}_nq(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + (-\alpha_n)x^n \quad =>$ $deg\ ({}_np(x) + {}_nq(x)) < n$, произведение полиномов степени n равно полиному степени $2n$, $=>$ сложение и умножение не являются законами композиции на $\mathbb{Z}_{=n}$.
- $\mathbb{Z}_{\geq n}$:] ${}_np(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$, ${}_nq(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + (-\alpha_n)x^n \quad =>$ $deg({}_np(x) + {}_nq(x)) < n$, $deg({}_{\geq n}p(x) \cdot {}_{\geq n}q(x)) \geq 2n \geq n \quad =>$ умножение является законом композиции на $\mathbb{Z}_n$, а сложение - нет.

- $\mathbb{Z}_{=2n}$: сумма полиномов степени $2n$ может иметь степень $2n-1$. Произведение полиномов четных степеней - всегда полином четной степени $=>$ умножение является законом композиции на $\mathbb{Z}_{=2n}$, а сложение - нет.
- $\mathbb{Z}_{=2n+1}$: сумма полиномов степени $2n+1$ может иметь степень $2n$. Произведение полиномов нечетных степеней - всегда полином четной степени $=>$ сложение и умножение не являются законами композиции на $\mathbb{Z}_{=2n+1}$.

Абелевы группы по сложению образуют только подмножества $\mathbb{Z}_{\leq n}$ и $\mathbb{Z}_{=n}$. О согласованности операций сложения и умножения говорить можно лишь в случае для $\mathbb{Z}_{<n}$ при $n = 1$ (тогда такое множество станет кольцом целых чисел, но полем может быть лишь при рассмотрении $\mathbb{Q}[x]$ или $\mathbb{R}[x]$), т.к. в остальных случаях операции умножения и сложения не являются законами композиции на указанных подмножествах одновременно, также из этого следует, что эти подмножества не могут являться полями.

d)

Ясно, что композиция полиномов с целыми коэффициентами — полином с целыми коэффициентами (не вижу смысла это как-то доказывать). Множество полиномов в таком случае можно трактовать как множество функций от аргумента x, тогда композиция ассоциативна и некоммутативна, правый и левый нейтральный — $e(x) = x$, левый поглощающий — $\forall C \in \mathbb{Z}\ \ \theta_C(x) = C$. $\forall_n p(x), {}_k q(x)\ \ deg((p \circ q)(x)) = nk$. $]\ \ {}_k q(x) =_k p^{-1}(x),\ \ deg(e(x)) = 1 = nk\ \ => \ \ k = \frac{1}{n} \notin \mathbb{N}\ \ if\ \ n > 1\ \ =>$ обратный есть не для всех. Тогда множество полиномов с операцией композиции — моноид.

2

$$p(x) = x^8 + 6x^7 - 45x^6 - 131x^5 + 738x^4 - 531x^3 + 130x^2 - 744x + 576 =$$

$$= (x-1)(x^7 + 7x^6 - 38x^5 - 169x^4 + 569x^3 + 38x^2 + 168x - 576) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^6 + 10x^5 - 8x^4 - 193x^3 - 10x^2 + 8x + 192) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x-4)(x^5 + 14x^4 + 48x^3 - x^2 - 14x - 48) =$$

$$= (x-1)(x-3)(x-4)(x^3-1)(x^2 + 14x + 48) =$$

$$= (x-1)^2(x-3)(x-4)(x+6)(x+8)(x^2 + x + 1);$$

Корни в $\mathbb{R} : -8, -6, 1, 3, 4;$

Корни в $\mathbb{C} : -8, -6, 1, 3, 4, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

3

a)

$$p(x) = x^5 - 14x^3 + 2x^2 + 45x - 18 = (x^2 + 2x - 1)(x+3)(x-2)(x-3);$$

$$q(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 3x - 2 = (x^2 + 2x - 1)(x+2)(x+1)(x-1);$$

$$NOD(p,q) = x^2 + 2x - 1.$$

b)

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2; q(x) = x^2 - x + 1;$$

Корни полинома $q(x): \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2};$

Подстановкой этих корней в $p(x)$ получаем ненулевое значение в обоих случаях => ни один из множителей разложения $q(x)$ не является множителем разложения $p(x)$ => $NOD(p,q) = 1$.

4

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}; \tag{3}$$

c)

$$C = A + 1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

f)

$$(A + \lambda \cdot E)(A + B)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^T = \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ 31 & 55 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}; \tag{10}$$

b)

Неподходящие размеры для произведения.

c)

$$C = A + \lambda \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 15 \\ 4 & 7 & 16 \end{pmatrix}; \tag{12}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

e)

$$A \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 43 & 17 \end{pmatrix}; \tag{14}$$

f)

Нет единичной матрицы размера (2, 3).

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

a)

Неподходящие размеры для суммы.

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

c)

Неподходящие размеры для суммы.

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{17}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{18}$$

f)

Нет единичной матрицы размера (2, 3).

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{19}$$

a)

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{20}$$

b)

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{21}$$

c)

$$C = A + \lambda \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{22}$$

d)

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{23}$$

e)

$$C = A \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{24}$$

f)

$$
(A+\lambda\cdot E)(A+B)^T = \left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \tag{25}
$$

$$
= \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 6 & 7\\ 6 & 2 & 6\\ 7 & 6 & 7\end{pmatrix}; \tag{26}
$$

5)

$$
A = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt[5]{2}\\ 1 & 15\\ 0 & -\frac{16}{7}\end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}; \tag{27}
$$

a)

Неподходящие размеры для суммы.

b)

$$
C = A\times B = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt[5]{2}\\ 1 & 15\\ 0 & -\frac{16}{7}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9-\sqrt[5]{4} & 3-5\sqrt[5]{2} & -18+\frac{9}{7}\sqrt[5]{2}\\ 3-15\sqrt[5]{2} & -76 & \frac{177}{7}\\ \frac{16}{7}\sqrt[5]{2} & \frac{80}{7} & -\frac{144}{49}\end{pmatrix}; \tag{28}
$$

c)

Неподходящие размеры для суммы.

d)

$$
B^T = \begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -\sqrt[5]{2} & -5 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}3 & -\sqrt[5]{2}\\ -1 & -5\\ 6 & \frac{9}{7}\end{pmatrix}; \tag{29}
$$

e)

Неподходящие размеры для произведения.

f)

Нет единичной матрицы размера (3, 2).

HW4

Степурин Алексей M3134

1 Найти в S_4 элементы, которые невозможно представить ≤ 2 транспозициями.

Lm1. Цикл длины n невозвможно представить $< n-1$ транспозициями.

∇ Предположим, что некоторый цикл длины n представим менее чем $n-1$ транспозициями. Представим цикл в виде графа, так что элементы цикла - это вершины графа, а транспозиции - ребра, соединяющие соответственные вершины-элементы. Ясно, что в цикле из любого элемента можно прийти в любой другой. Тогда из любой вершины графа существует путь по ребрам в любую другую вершину, следовательно, этот граф состоит из единственной компоненты связности, но в графе с n вершинами и $\leq n-2$ ребрами хотя бы две компоненты связности !!! $\triangle$.

Lm2. Цикл длины n представим $n-1$ транспозициями.

∇ Пусть транспозиция (i, j) - перестановка элементов, стоящих на позициях i и j. Тогда цикл $(k_1, k_2, ..., k_n)$ раскладывается в $n-1$ транспозиций следующим образом: $(k_1, k_2, ..., k_n) = (k_n, k_{n-1}) \circ (k_{n-1}, k_{n-2}) \circ ... \circ (k_2, k_1)$. Например, для $n = 4$ представим цикл $(1, 4, 2, 3)$ таким образом: $(1, 4, 2, 3) = (3, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 1)$, тогда

1	2	3	4
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	2	3	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	1	3	2
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	3	1	2

таким образом мы построили верную перестановку данного цикла $\triangle$.

Из леммы 1 следует, что в S_4 перестановки представимы минимум тремя транспозициями, только если эти перестановки раскладываются в единственный цикл длины 4. Таких перестановок $(4-1)! = 6$ и они представляются следующими циклами: $(1, 2, 3, 4); (1, 2, 4, 3); (1, 3, 2, 4); (1, 3, 4, 2); (1, 4, 2, 3); (1, 4, 3, 2)$.

2 Доказать, что множества перестановок знаков 1 и -1 равномощны.

Пусть n — число элементов множества, на котором действуют перестановки.
Докажем по индукции: ∇
База: $n = 2$. Перестановки: $(1)(2); (1, 2)$. $sign((1)(2)) = 1$, $sign((1, 2)) = -1$.
Пусть для некоторого n верно, что $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1)$, тогда $countOf(\sigma : sign(\sigma) = 1) = countOf(\sigma : sign(\sigma) = -1) = c_+^n = c_-^n = \dfrac{n!}{2}$.

Добавим один элемент в множество элементов. Тогда всего перестановок для нового множества $(n+1)!$. Ясно, что если новый элемент добавился как свободный цикл, то знак этих перестановок не изменится, таких перестановок $n!$ (среди них знака 1 и знака -1 поровну). Вставить новый элемент в имеющиеся циклы первоначальной перестановки можно n способами. Тогда такой вставкой получаем как раз $n \cdot n!$ оставшихся перестановок. Если первоначальная перестановка была знака s, то после вставки она будет знака $-s$, т.к. изменится знак лишь одного цикла в перестановке (это ясно из леммы 2). Тогда в полученных перестановках будет поровну перестановок знаков 1 и -1, а следовательно для группы перестановок элементов полученного множества мощности $(n+1)$ перестановок знака 1 и знака -1 будет поровну $\triangle$.

3 Доказать, что любую перестановку можно представить композицией транспозиций из множества: $(1,2),(1,3),...,(1,n)$.

∇ Покажем, что любую транспозицию (i,j) можно представить используя данное множество транспозиций: $(i,j) = (1,j) \circ (1,i) \circ (1,j)$. Действительно:

1	...	i	...	j	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	i	...	1	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
j	...	1	...	i	...
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
1	...	j	...	i	...

Таким образом выражаем любую транспозицию, а следовательно, - и любую перестановку $\triangle$.