# Отчет по лабораторной работе

Боин Михаил, Степурин Алексей, Чупров Дмитрий M3134

## 1 Номер 11

$$f(x) = \sin(x) \ \ [0, 2\pi]$$

Функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, значит она интегрируема по Риману.

Вычислим предел интегральных сумм на отрезке $[0, 2\pi]$ для $f$ со средним оснащением:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2\pi}{n}\cdot(\sin\frac{\pi\cdot(2\cdot 1-1)}{n}+\sin\frac{\pi\cdot(2\cdot 2-1)}{n}+\ldots+\sin\frac{\pi\cdot(2\cdot n-1)}{n}))$$

Заметим, что $\forall i : \frac{\pi\cdot(2\cdot i-1)}{n}+\frac{\pi\cdot(2\cdot(n+1-i)-1)}{n} = 2\pi$, следовательно, $\sin\frac{\pi\cdot(2\cdot i-1)}{n}+\sin\frac{\pi\cdot(2\cdot(n+1-i)-1)}{n} = 0$. Тогда предел интегральных сумм равен 0. (Аналогичная задача разобрана под пунктом 5 в номере 28 в более формализованном виде)

Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{2\pi}\sin x dx = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

## 2 Номер 16

$$f(x) = e^{-x} \ \ [0, 2]$$

Функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, значит она интегрируема по Риману.

Вычислим предел интегральных сумм на отрезке $[0, 2]$ для $f$ с правым оснащением:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}e^{-\frac{2k}{n}}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n}\cdot\frac{(e^{-\frac{2}{n}\cdot n}-1)\cdot(e^{-\frac{2}{n}})}{e^{-\frac{2}{n}}-1}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{-2}-1}{-\frac{2}{n}}) = 1-\frac{1}{e^2}.$$

Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^2 e^{-x}dx = -e^{-2} + e^{-0} = 1 - \frac{1}{e^2}.$$

## 3 Номер 25

$$f(x) = x^2 \ \ [1, 4]$$

Функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, значит она интегрируема по Риману.

Вычислим предел интегральных сумм на отрезке $[1, 4]$ для $f$ с правым оснащением:

$$\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n} \cdot (\sum_{k=1}^{3n} (1 + \frac{k}{n})^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots + 1 + \frac{6n}{n} + \frac{9n^2}{n^2}) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} ((1 + 1 + \ldots + 1) + 2(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{3n}{n}) + (\frac{1^2}{n^2} + \ldots + \frac{(3n)^2}{n^2})) =$$

Сворачиваем второе слагаемое как сумму арифметической прогрессии, а третье как сумму квадратов первых $n$ натуральных чисел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (3n + \frac{2 \cdot 3n(3n+1)}{2n} + \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6n^2}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (12n + 3 + 9n + \frac{9}{2} + \frac{1}{2}) = 21$$

Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

## 4 Номер 27

$$f(x) = \sin 2x \ \ [0, \frac{\pi}{2}]$$

Функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, значит она интегрируема по Риману.

Вычислим предел интегральных сумм на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ для $f$ с правым оснащением:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \sin(2\frac{k\pi}{2n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} (\sin(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) + \cdots + \sin(\frac{(n-1)\pi}{n}) + \sin(\frac{n\pi}{n})) =$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{\sin(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})} (\sin(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) + \cdots + \sin(\frac{(n-1)\pi}{n}) + \sin(\frac{n\pi}{n})) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} (\sin(\frac{\pi}{n}) \sin(\frac{\pi}{2n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) \sin(\frac{\pi}{2n}) + \cdots + \sin(\frac{(n-1)\pi}{n}) \sin(\frac{\pi}{2n}) + \sin(\frac{n\pi}{n}) \sin(\frac{\pi}{2n})) =$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} (\frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n})) + \frac{1}{2} (\cos(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{2n})) +$$
$$\ldots$$
$$+ \frac{1}{2} (\cos(\frac{(n-1))\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{(n-1))\pi}{n} + \frac{\pi}{2n})) + \frac{1}{2} (\cos(\frac{n\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{n\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}))) =$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \frac{1}{2} ((\cos(\frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{3\pi}{2n})) + (\cos(\frac{3\pi}{2n} - \cos(\frac{5\pi}{2n})))+$$
$$\ldots$$

$$+(\cos(\frac{(2n-3))\pi}{2n}) - \cos(\frac{(2n-1))\pi}{2n}))) + (\cos(\frac{(2n-1))\pi}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1))\pi}{2n})))) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2n})) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2n})) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \frac{1}{2}(2\sin\frac{\frac{(2n+1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}}{2} \sin\frac{\frac{(2n+1)\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n}}{2}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \frac{1}{2}(2\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n})\sin\frac{\pi}{2}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} * \frac{1}{\frac{\pi}{2n}}(\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n})\sin\frac{\pi}{2}) = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n})\sin\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 0)\sin\frac{\pi}{2} = 1 * 1 = 1$$

Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\, d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * 1 = 1$$

## 5 Номер 28

$$f(x) = \cos 2x \quad [0, \pi]$$

Функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, значит она интегрируема по Риману.

Вычислим предел интегральных сумм на отрезке $[0, \pi]$ для $f$ с средним оснащением:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} cos(2\frac{(k-0.5)\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) =$$

Замена: $r = n - k + 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2(n-r+1)-1)\pi}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(2\pi + \frac{(-2r+1)\pi}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2r-1)\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2(\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + (\sum_{k=\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n})) =$$

Замена: $r = \frac{n}{2} - k + 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n}(\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + (\sum_{r=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2(\frac{n}{2}-r+1)-1)\pi}{n})) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2\pi}{n} (\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + (\sum_{r=1}^{\frac{n}{4}} cos(\pi - \frac{(2r-1)\pi}{n})) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2\pi}{n} (\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) + (\sum_{r=1}^{\frac{n}{4}} -cos(\frac{(2r-1)\pi}{n})) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2\pi}{n} (\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n}) - (\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} cos(\frac{(2k-1)\pi}{n})) = \lim_{n \to \infty} \frac{2\pi}{n} * 0 = 0$$

Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^\pi \cos 2x \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos 2x \, d2x = \frac{1}{2} \sin 2\pi - \frac{1}{2} \sin 0 = 0 - 0 = 0$$