HW (пределы ф-ций)

№ 1

1) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[4]{\sin(y+\frac{\pi}{2})}-\sqrt[3]{\sin(y+\frac{\pi}{2})}}{\cos^2(y+\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[4]{\cos y}-\sqrt[3]{\cos y}}{\sin^2 y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-\frac{y^2}{2}}-\sqrt[3]{1-\frac{y^2}{2}}}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+(-\frac{y^2}{2})}-1-\left(\sqrt[3]{1+(-\frac{y^2}{2})}-1\right)}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{8}+\frac{y^2}{6}}{y^2} = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}$$

2) $$\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln \operatorname{tg}\pi x} = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{1}{\operatorname{tg} y}}{\ln(\underbrace{\operatorname{tg} y-1}_{\text{б.м.}}+1)} =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{1}{\operatorname{tg} y}}{\operatorname{tg} y-1} = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 1$$

3) $$\lim_{x\to\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(4^{\overset{\text{б.м.}}{\frac{1}{x}}}-1\right)-\left(4^{\overset{\text{б.м.}}{\frac{1}{x+1}}}-1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{x}\ln 4-\frac{1}{x+1}\ln 4\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\ln 4\cdot\frac{1}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\ln 4 = \ln 4$$

4) $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

5) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sqrt{3} - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\sqrt{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}\cos y + 2\sin\frac{\pi}{6}\sin y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos y + \sin y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}y^2}{2} + y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\frac{\sqrt{3}y^2}{2} + y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}y}{2} + 1} = 1$$

6) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{x^2} = 0$$

7) $$\lim_{x \to 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(2x+3)}{(x-7)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{7 - 2} = 3,4$$

8) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + x + 1 - 3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$

9) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{7+2x-x^2-x^2-x-1}{x(2-x)\left(\sqrt{7+2x-x^2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2x+3)}{x(2-x)\cdot 2\sqrt{7}} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x\,2\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2+3}{2\cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

10) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\sim|x|}{\sqrt{x^2+|x|}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+\underbrace{\sqrt{x^2+|x|}}_{\sim|x|}}}_{|x|}+|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{|x|+|x|} = \frac{1}{2}$$

11) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}-1\right)}{x^3\,2\sqrt{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{2}{2-x^2}-1\right)}{x^3\,2\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2-2+x^2)}{x^3(2-x^2)\,2\sqrt{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2-x^2)\,2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{4}$$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1-\frac{25x^2}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{16x^2}{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{25x^2}{2}}{-\frac{16x^2}{2}} = \dfrac{25}{16}$

№ 2

1) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D(f) : 0 < a - x < \delta :$
$f(x) < M$

Ex : $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in D(f) : \quad x < k :$
$f(x) > M$

Ex $f(x) = -x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (-x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall x \in D(f) : \quad x > k \quad :$

$f(x) < M$

<u>Ex</u> $\quad f(x) = -2x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$

№ 3

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+5}{x+1} = \dfrac{7}{3}$

▷

◁ окр-ти т. 2 радиуса < 1, т.е.

$x \in (1; 3)$:

$$\left| \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} - \frac{7}{3} \right| = \left| \frac{x+5}{x+1} - \frac{7}{3} \right| =$$

$$= \left| \frac{3(x+5) - 7(x+1)}{3(x+1)} \right| = \left| \frac{4x-8}{3x+3} \right| < 4|x-2| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{4} : \quad \forall x \in D(f) \cap (1, 3) :$

$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} - \dfrac{7}{3} \right| < \varepsilon$

◁

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$

▶ Δ $\forall x: \ |x| > 2$:

$\left| \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| =$

$= \left| \frac{2x+2-2x-1}{2(2x+1)} \right| = \left| \frac{1}{2(2x+1)} \right| < \frac{1}{|x|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \ k = \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k = \frac{1}{\varepsilon} : \quad \forall x \in D(f), \ |x| > 2, \ |x| > k$

$\left| \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ◀

№ 4

1)

а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x^3} - \alpha x - \beta, \quad x \to \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^2-x^3} - \alpha x - \beta \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(-x - \alpha x - \beta \right) = 0$

$\Rightarrow \ \alpha = -1, \ \beta = 0$

б) $f(x) = (x+4) e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta, \quad x \to \infty, \ x \to -0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left((x+4) e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left((x+4)(e^{\frac{1}{x}} - 1 + 1) - \alpha x - \beta \right) =$

$$= \lim_{x \to \infty} \left((x+4)\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \alpha x - \beta \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + x + 4 - \alpha x - \beta \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{x} + x + 5 - \alpha x - \beta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 1, \ \beta = 5$$

$$\lim_{x \to -0} \left((x+4) e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta \right) =$$

$$= \lim_{x \to +0} \left(\frac{\overset{\text{б.м.}}{4 - x}}{\underset{\text{б.б.}}{e^{\frac{1}{x}}}} + \alpha x - \beta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \text{ - любое}, \ \beta = 0$$

2) $f(x) = \dfrac{x^5}{2x^2 + x + 1}, \quad x_0 = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{2x^2 + x + 1} = \infty$$

▶ $\Delta \quad \forall x > 3$

$$\left| \frac{x^5}{2x^2 + x + 1} \right| > \left| x^3 \cdot \frac{x^2}{2x^2 + x + 1} \right| > \left| x^3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \right| =$$

$$= \left| x^3 \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x+1)} \right| > \left| x^3 \cdot \frac{1}{3x} \right| = \frac{x^2}{3} > M$$

$$\Rightarrow \quad x > \sqrt{3M}$$

$\Delta \quad \forall x <$

$$\left|\frac{x^5}{2x^2+x+1}\right| > \left|x^3\cdot\frac{x^2}{2x^2+x+1}\right| > \left|x^3\cdot\frac{x^2+0{,}5x-1{,}5}{2x^2-x+6}\right|$$

$$= \left|x^3\cdot\frac{(x+1{,}5)(x-1)}{(2x+3)(x-2)}\right| = \left|x^3\cdot\frac{x-1}{2(x-2)}\right| > \left|x^3\cdot\frac{x+2}{2(-x-2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{x^3}{2}\right| > M$$

$$\Rightarrow \quad x > \sqrt[3]{2M}$$

◄

$g(x) = Ax^n$, $f(x) \sim g(x) \Rightarrow$

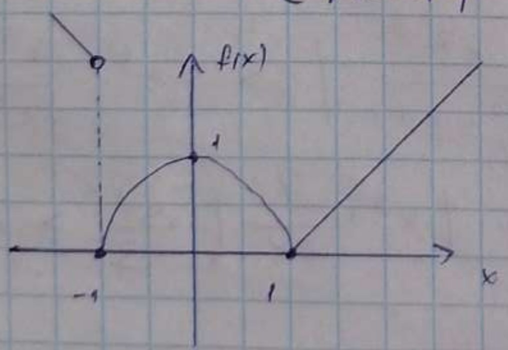
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{2x^2+x+1}}{Ax^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{A}x^{5-n}}{2x^2+x+1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{A} = 2, \quad A = \frac{1}{2}, \quad 5-n = 2, \quad n = 3$$

Ответ: $g(x) = \frac{1}{2}x^3$

№ 5

1) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \le 1 \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$



На интерв-а $(-\infty; -1)$, $(-1, 1)$, $(1; +\infty)$ ф-ция

∢ $x \to -1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1+0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to -1-0} f(x) &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{разрыв 1-ого рода}$$

∢ $x \to 1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1+0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 1-0} f(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1 - \text{не т. разрыва}$$

2) $$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x-1)}$$

Возможные т. разрыва: $-2, -1, 1$

∢ $x \to -2$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x-1)} = \lim_{x \to -2+0} \frac{\overset{-1}{\overset{\Uparrow}{x+1}}}{\underset{+0}{\underset{\Downarrow}{(x+2)}}\underset{-3}{\underset{\Downarrow}{(x-1)}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x-1)} = \lim_{x \to -2-0} \frac{(x+1) \Rightarrow -1}{\underset{-0}{\underset{\Downarrow}{(x+2)}}\underset{-3}{\underset{\Downarrow}{(x-1)}}} = -\infty$$

$\Rightarrow -2$ – разрыв 2-ого рода

∢ $x \to -1$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{(x+1) \Rightarrow 0}{\underset{1}{\underset{\Downarrow}{(x+2)}}\underset{-2}{\underset{\Downarrow}{(x-1)}}} = 0 \qquad \lim_{x \to -1-0} \frac{(x+1) \Rightarrow 0}{\underset{1}{\underset{\Downarrow}{(x+2)}}\underset{-2}{\underset{\Downarrow}{(x-1)}}} = 0$$

$\Rightarrow -1$ - не т. разрыва

$\measuredangle\ x \Rightarrow 1$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\overset{\Rightarrow 2}{x+1}}{\underset{\Downarrow\ 3}{(x+2)}\underset{\Downarrow\ +0}{(x-1)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\overset{\Rightarrow 2}{x+1}}{\underset{\Downarrow\ 3}{(x+2)}\underset{\Downarrow\ -0}{(x-1)}} = -\infty$$

$\Rightarrow 1$ - т. разрыва 2-ого рода.

4) $y = \dfrac{|x-1|}{x^2(1-x)}$

Возможные т. разрыва: 0, 1

$\measuredangle\ x \to 0$

$$\lim_{x\to +0} \frac{\overset{\Rightarrow 1}{|x-1|}}{\underset{\Downarrow\ +0}{x^2}\underset{\Downarrow\ 1}{(1-x)}} = +\infty$$

в т. 0 f не опред.
$\Rightarrow$ 0 - т. р. 2-ого р.

$$\lim_{x\to -0} \frac{\overset{\Rightarrow 1}{|x-1|}}{\underset{\Downarrow\ +0}{x^2}\underset{\Rightarrow 1}{(1-x)}} = +\infty$$

$\measuredangle\ x \to 1$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\overset{\Rightarrow +0}{|x-1|}}{\underset{\Downarrow\ 1}{x^2}\underset{\Rightarrow -0}{(1-x)}} = -1$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{|x-1|^{\to +0}}{\underbrace{x^2(1-x)}_{\to +0}} = 1$$

в т. 1 f не опред. => 1 - т. разрыва 1-ого рода.

№6

1)

а)] $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0 \\ x+1, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0 \\ -x-2, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

Обе ф-ии разрывны в т. 0

$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ -1, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

т.е. $(f+g)$ разрывна в т. 0.

б)] $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0 \\ x+1, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0 \\ -x-1, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

Обе ф-ии разрывны в т. 0, но $(f+g)(x) = 0$ непр-а в т. 0.

р.

2) $\exists\ f(x) = 1$, $g(x) = x$

обе ф-ии непр-ы в т. 0, но их частно $\frac{f}{g}$ - не определено в т. 0 $\Rightarrow$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$ - разрывна в т. 0.

3) $\exists\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x<0 \\ x+1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$

тогда f - непр-а на $(-\infty; 0) = X_1$ и на $[0; +\infty) = X_2$, но разрывна на $X_1 \cup X_2 = (-\infty; +\infty)$ в т. 0.

№ 7

1) $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x^2$ - не равн. непр.

Докажем, что $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in D(f) : |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$

▶ $\angle$ $x_1 = \sqrt{2\pi n}$, $x_2 = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$

$$|x_1 - x_2| = \left|\sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{2\pi n - 2\pi n - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right| < \left|\frac{\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2\pi n}}\right| = \left|\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\delta^2}$ (т.е. $\forall \delta > 0 : \exists n : |x_1 - x_2| = \left|\sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right| < \delta$)

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sin(2\pi n) - \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 > 0{,}5 = \varepsilon,$$

Тогда $\exists \varepsilon = 0{,}5 \ : \ \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in D(f)$:

$|x_1 - x_2| < \delta \ : \ |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$ ◀

2) $f(x) = \sin\sqrt{x} \qquad f : [1;+\infty) \to \mathbb{R}$

Докажем равн. непр-ть или что $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x_1, x_2 \in D(f) = [1;+\infty) \quad |x_1 - x_2| < \delta$:

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

▶ $\measuredangle \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |\sin\sqrt{x_1} - \sin\sqrt{x_2}| =$

$$= \left| 2\sin\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2} \cos\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right| =$$

$$= \left| 2\sin\frac{|x_1 - x_2|}{2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} \cos\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right| < \left| 2\sin\frac{|x_1 - x_2|}{2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} \right| <$$

$$< \left| 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| < |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ : \exists \delta = \varepsilon \ : \ \forall x_1, x_2 \in D(f) : |x_1 - x_2| < \delta$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ◀

3) $f(x) = \cos\frac{1}{x} \qquad f : (0;1) \to \mathbb{R}$ – не равн. непр-а

Докажем, что $\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \delta > 0 \ : \ \exists x_1, x_2 \in D(f) = (0;1)$:

$|x_1 - x_2| < \delta \ : \ |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$

▶ $\measuredangle \quad x_1 = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_2 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$

$2\pi n + \frac{\pi}{2} > 2\pi n > 1 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \in (0,1)$

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}\right| <$$

$$< \left|\frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi^2 n^2}\right| = \left|\frac{1}{8\pi n^2}\right| < \frac{1}{n^2} < \delta$$

$\Rightarrow$ $n > \frac{1}{\delta^2}$ (т.е. начиная с этого номера расстояние м/у x_1 и x_2 $< \delta$)

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\cos(2\pi n) - \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right| =$$

$$= 1 > 0{,}5 = \varepsilon_1$$

тогда $\exists \varepsilon = 0{,}5 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in D(f) = (0,1) :$

$|x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$ ◄