Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет компьютерных наук
ООП «Прикладная математика и информатика»

Отчёт о прохождении практики

Студент: Леонов Алексей Олегович
Группа: БМПИ161
Вид практики: учебная
Руководитель: Авдеев Роман Сергеевич, к. ф.-м. н., доцент Департамента больших данных и информационного поиска

____
(подпись руководителя практики
об ознакомлении с отчетом)

Москва, 2017

Содержание

1 Введение

Цель практики – ознакомиться с численными методами решения систем линейных уравнений. Были поставлены следующие задачи:

1. Изучение численных методов решения систем линейных уравнений.
2. Написание соответствующих алгоритмов.
3. Сравнение их эффективности.

2 Основная часть:

2.1 Изучение и написание алгоритмов

Для изучения методов потребовалось найти литературу по соответствующей теме. Руководителем практики была предоставлена книга «Практикум на ЭВМ» Богачева К.Ю. Кроме того, среди литературы курса «Численные методы в анализе данных» на сайте wiki.cs.hse.ru я нашёл учебник «Лекции по вычислительной математике» Лобанова А.И. и Петрова И.Б.

Для реализации изученных алгоритмов использовался язык C++. Для построения графиков – язык Python, библиотека matplotlib.

Ссылка на исходный код программ:
https://github.com/alexey9177950/summer-practice

Было реализовано 4 точных (прямых) метода решения систем:

1. Метод Гаусса.
2. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.
3. Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице.
4. Метод вращений.

И два итерационных: метод простой итерации и метод Зейделя.

2.2 Описание методов

Метод Гаусса заключается в приведении матрицы к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. При его работе поддерживается инвариант, что после шага с номером j в столбцах расширенной матрицы системы с номерами k ($k \in [1, j]$) $A_{i,k} = 0$ при $i > k$. На j-ом шаге выбирается $i \in \{j, \dots n\} : \ A_{ij} \neq 0$. Это строка меняется местами со строкой номер j. Далее j-ая строка вычитается из всех с $j + 1$ до n с таким коэффициентом, чтобы соответствующие элементы в j-ом столбце стали равны нулю.

Отличие метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу заключается в том, что выбирается не просто произвольная строка, где элемент j-ого столбца ненулевой, а та, где он максмален по модулю (такой называется главным элементом), так как это обеспечивает наименьшую погрешность.

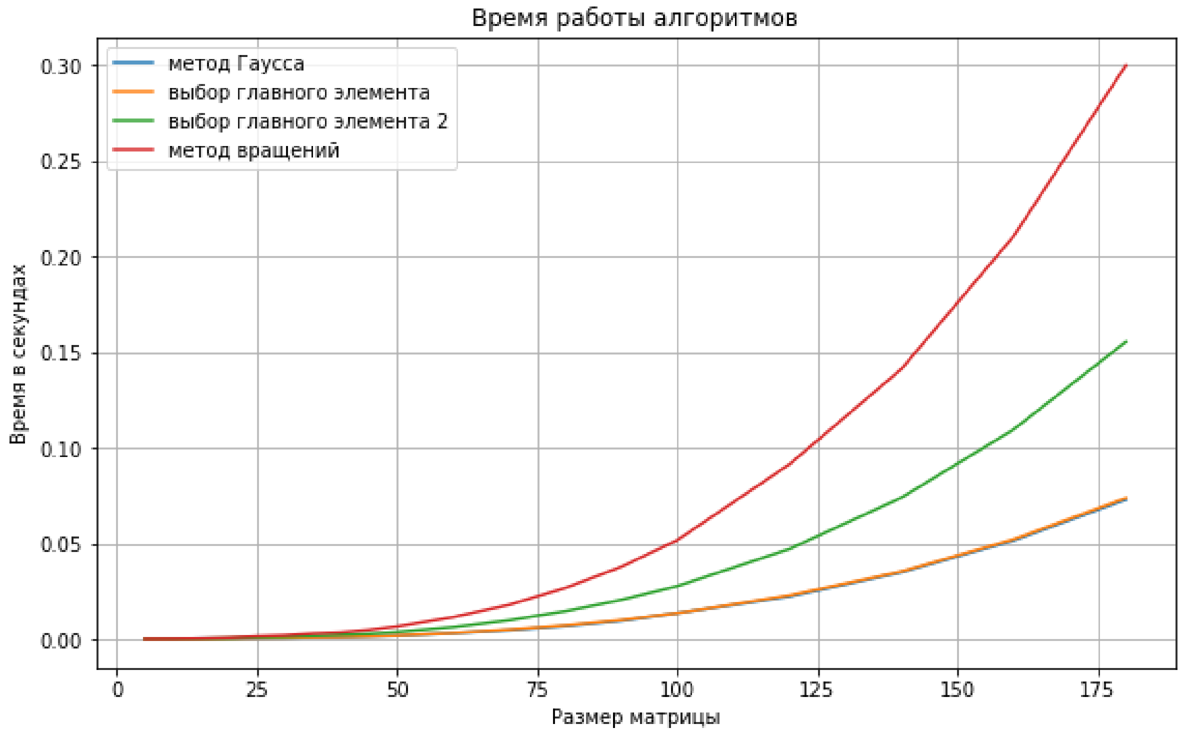
В ещё одной модификации алгоритма Гаусса главный элемент выбирается не только из столбца, но из всей подматрицы слева снизу от A_{jj} включительно. Таким образом, меняются не только строки, но и столбцы.

В методе вращений используются унитарные преобразования, что обеспечивает то, что число обусловленности в процессе преобразований не увеличивается. Как и в методе Гаусса, матрица приводится к диагональному виду по столбцам. При этом для обнуления элементов матрицы используется умножение на матрицу элементарного вращения.

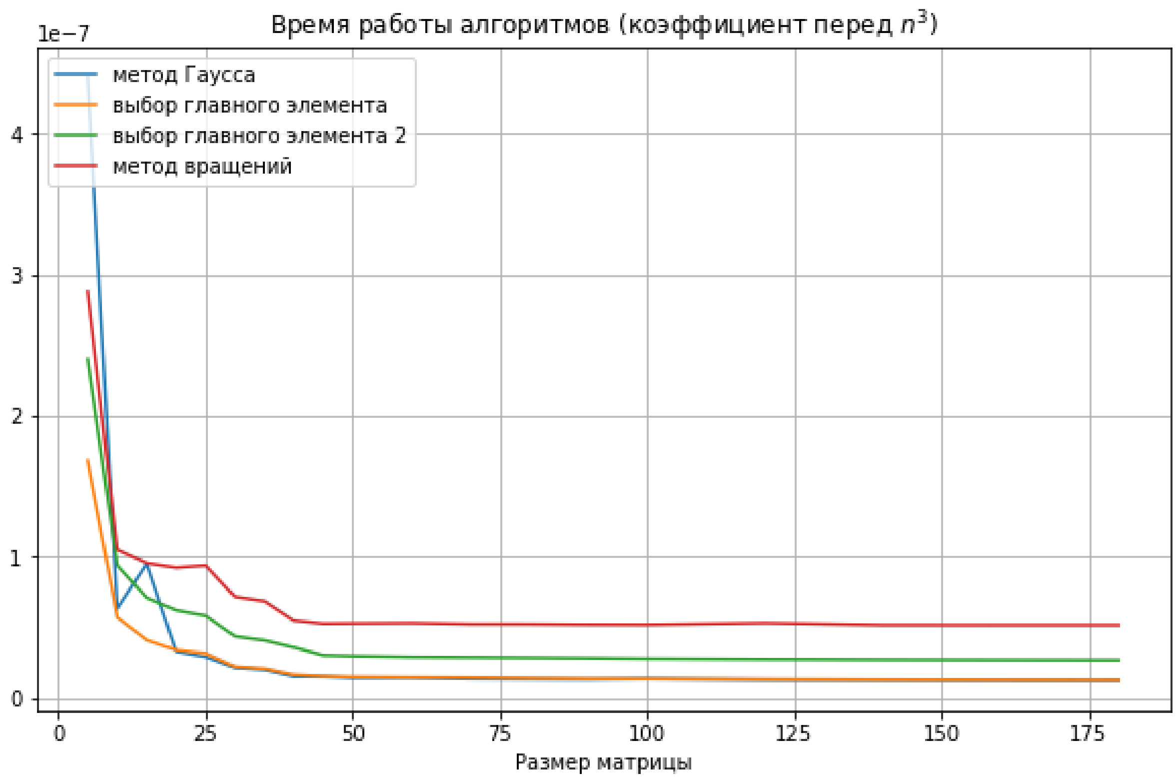
В методе простой итерации уравнение $Ax = b$ приводится к виду $x = Bx+c$ (то есть к виду $x = (E-A)x+b$) и строится последовательность векторов-приближений $x^{(i)}$. Первый её член может быть произвольным, а последующие вычисляются по формуле $x^{(i+1)} = Bx^{(i)}+c$. При определённых условиях такая последовательность сходится к решению системы.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что при последовательном вычислении элементов вектора $x^{(i+1)}$ используются уже найденные на этом шаге значения.

2.3 Время работы прямых методов



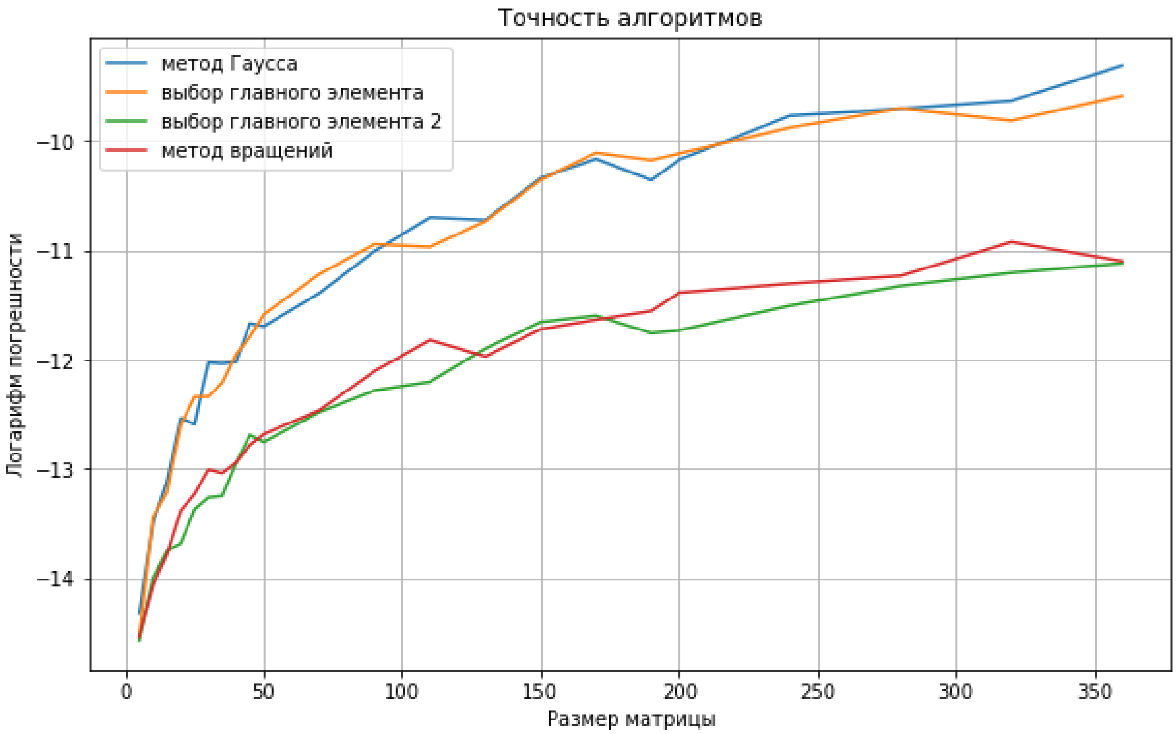
Поскольку время работы всех алгоритмов $O(n^3)$, где n – размер матрицы, то можно, поделив на n^3 результаты измерений, вычислить константу перед старшим членом в времени работы:



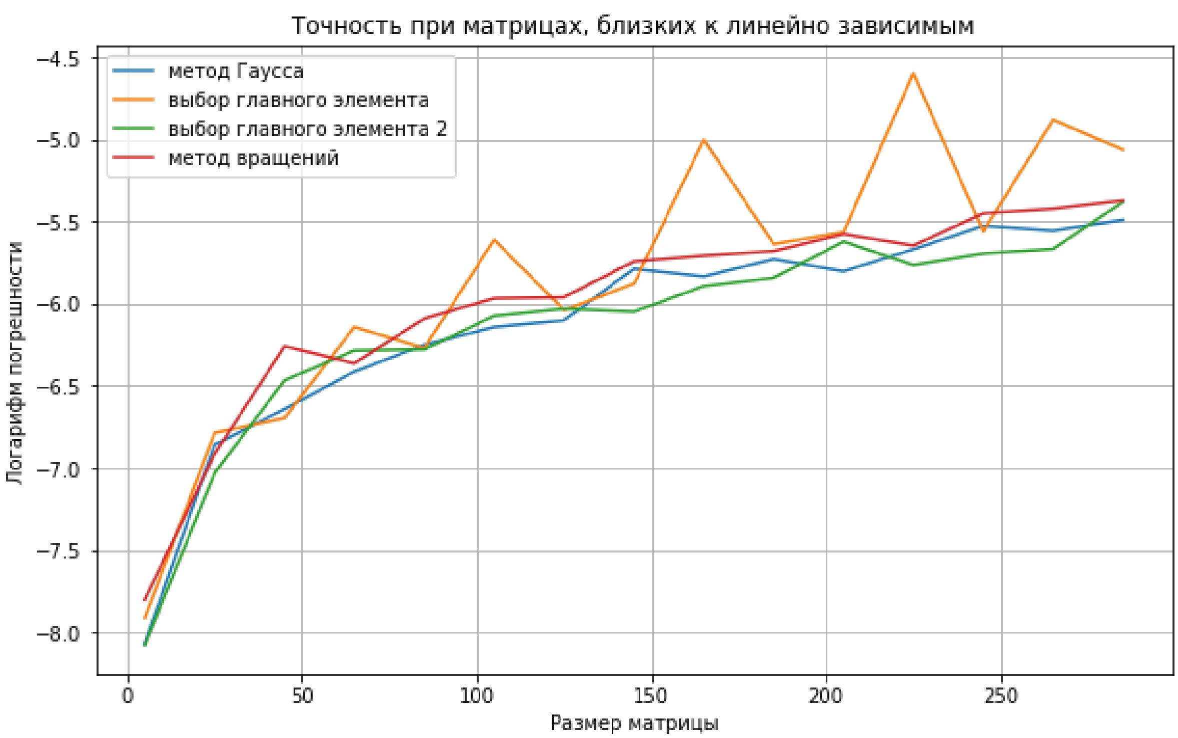
2.4 Точность прямых методов

Точность оценивалась следующим образом: генерировались вектор x_0 и матрица A. Вектор b вычислялся как $b = Ax_0$. Далее алгоритм находил решение уравнения $Ax = b$ и считалась относительная погрешность его ответа: $\frac{|x-x_0|}{x_0}$. Здесь используется норма $||A||_1 = \max_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|\right)$.

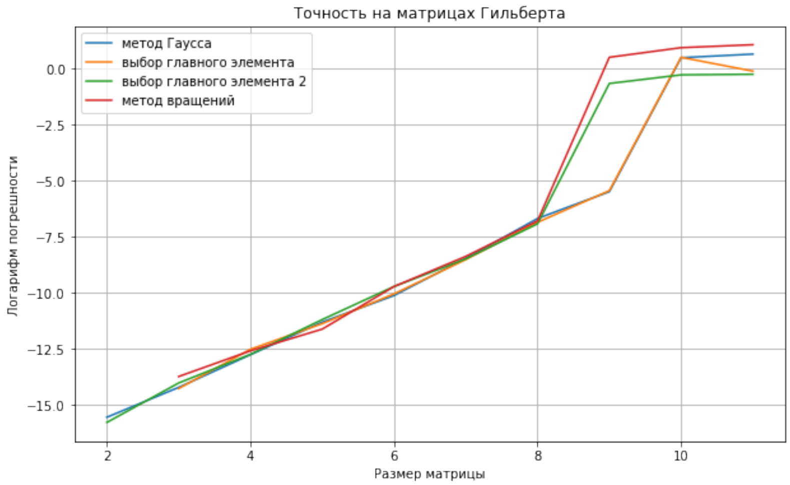
На матрицах из случайных чисел от 0 до 1 точность всех алгоритмов была высокой, поскольку сгенерированные таким образом матрицы обладают небольшим числом обусловленности.



Также была измерена точность на матрицах с высоким числом обусловленности. Для этого генерировались матрицы, близкие к линейно зависимым. Как видно из графика, точность на них значительно меньше:



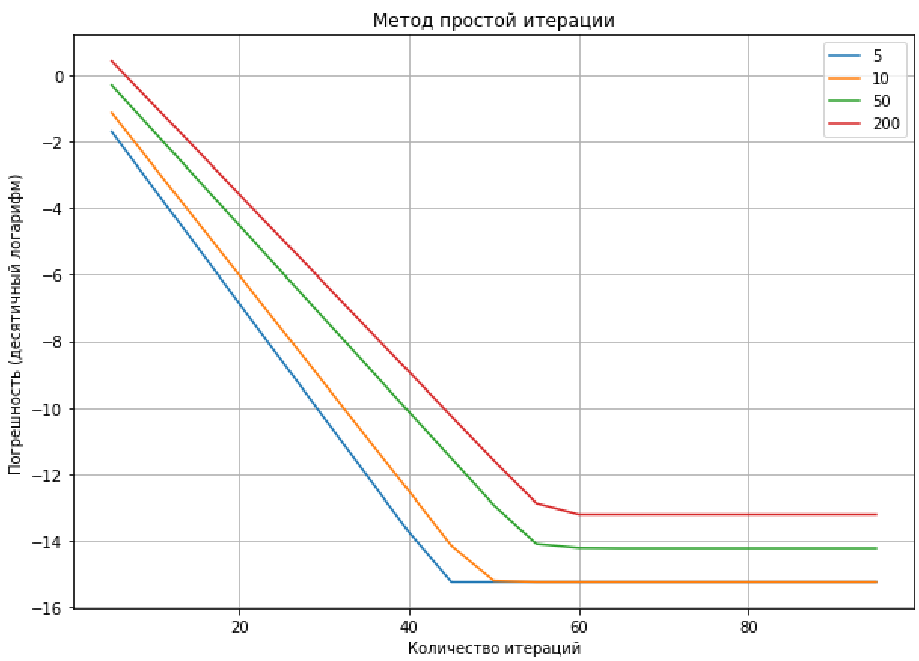
На матрицах Гильберта (матрицы, в которых $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$) точность очень быстро падает с увеличением размерности матриц:

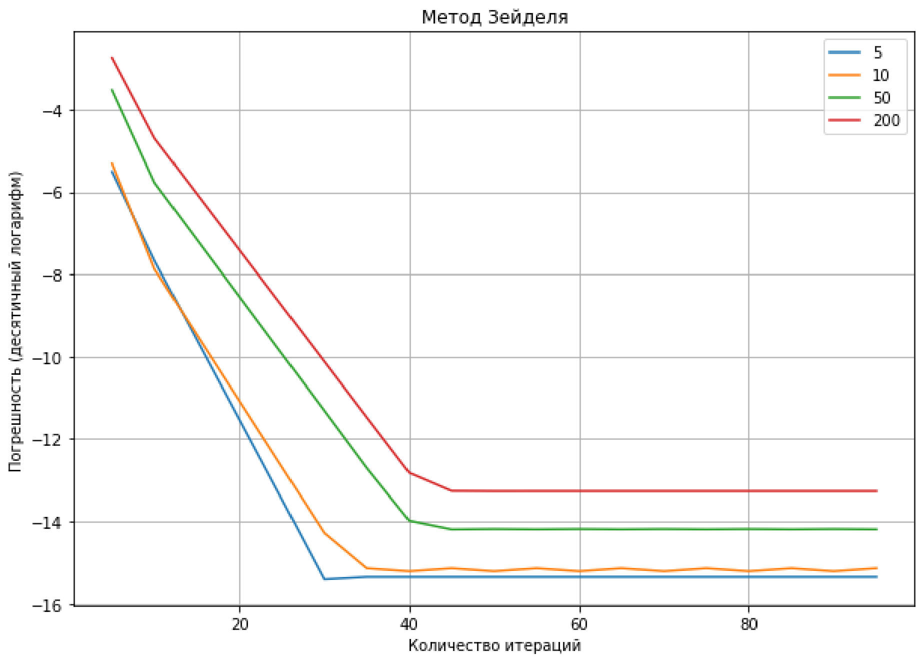


2.5 Итерационные методы

Для сходимости достаточным условием является то, что $||B||_1 < 1$. Поэтому генерировались матрицы с нормой $k < 1$ (на графиках ниже 0.6) и к ним прибавлялась единичная матрица. Чтобы сгенерировать матрицу с заданной нормой, бралась матрица A_0 из случайных чисел и все её элементы умножались на $\frac{k}{||A||_1}$.

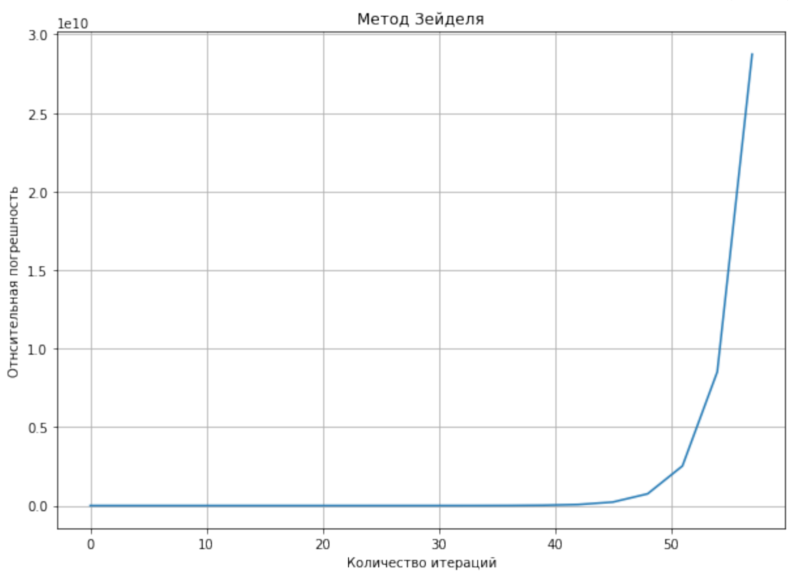
График зависимости точности приближения от количество итераций для двух методов (разные линии соответствуют разным размерам матрицы):





Видно, что отклонение от решения системы убывает экспоненциально (поскольку на графике его логарифм, то график является прямой линией), но с некоторого момента стабилизируется, что связано с точностью вещественных чисел в компьютере. И что метод Зейделя обеспечивает чуть более быструю сходимость.

Однако рассмотрим решение уравнения методом Зейделя $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:



Относительная погрешность возрастает с увеличинием количества операций, процесс не сходится.

Действительно, критерий сходимости метода Зейделя: все решения уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

по модулю должны быть меньше единицы (здесь a_{ij} – числа из исходной матрицы в уравнении). Однако в рассмотреном случае суеществует решение $\lambda = 1.5$.

3 Заключение:

Таким образом, алгоритм Гаусса и алгоритм Гаусса с выбором главного элемента по столбцу обладают примерно одинаковой точностью и временем работы. Алгоритм Гаусса с выбором главного элемента по подматрице медленнее, но обладает большей точностью. Метод вращений ещё медленнее, но обладает примерно одинаковой точностью с выбором главного элемента по подматрице.

Итерационные методы эффективнее, когда количество итераций, необходимое для достижения нужной точности значительно меньше n, поскольку время их работы $O(n^2k)$, где k – количество итераций, а время работы точных методов $O(n^3)$.

4 Список использованной литературы:

1. Богачёв К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 137 с.

2. Петров, И. Б. Лекции по вычислительной математике / И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М.: Интернет-университет информационных технологий, Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 528 с.