5. Непрерывные случайные величины.

Пространством реализации непрерывной случайной величины является множество вещественных чисел: $X = \{-\infty < x < \infty\}$. Вероятностные характеристики случайной величины могут быть описаны с помощью функции распределения $F_x(x) = P(X < x)$, которая удовлетворяет условиям (4.5) предыдущего параграфа.

5.1. Абсолютно непрерывные случайные величины.

X - абсолютно непрерывная случайная величина, если ее функцию распределения можно представить в виде

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x')dx' \tag{5.1}$$

$f_x(x)$ - плотность распределения случайной величины X. Плотность $f_x(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f_x(x) = \dfrac{dF_x}{dx}$
2. $f_x(x) \geq 0$
3. $P(a \leq x < b) = \int_a^b f_x(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$ (условие нормировки)
5. $MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)dx, \quad M\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_x(x)dx$

Все свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации, перечисленные в п.п. (4.12) и (4.13) предыдущего параграфа, остаются в силе и для непрерывного случая.

Двумерная функция распределения.

$$F_{XY}(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx' \int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x',y')dy', \qquad (5.3)$$

$f_{XY}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$ - двумерная плотность распределения вероятностей.

Свойства двумерной функции распределения определены в (4.10). Вероятность попадания случайной величины (X, Y) в область A может быть найдена по формуле $P(XY \in A) = \iint\limits_{x,y \in A} f_X(x)dxdy$ (5.4)

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty), \quad f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y), \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

X и Y – независимы, если при всех x и y выполняется $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ или $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Замена переменных

Пусть $f_X(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины X. Возникает вопрос: как найти $f_Y(y)$, если $x = \psi(y)$ или $y = \varphi(x)$?

а) $\psi(y)$ или $\varphi(x)$ - монотонные функции

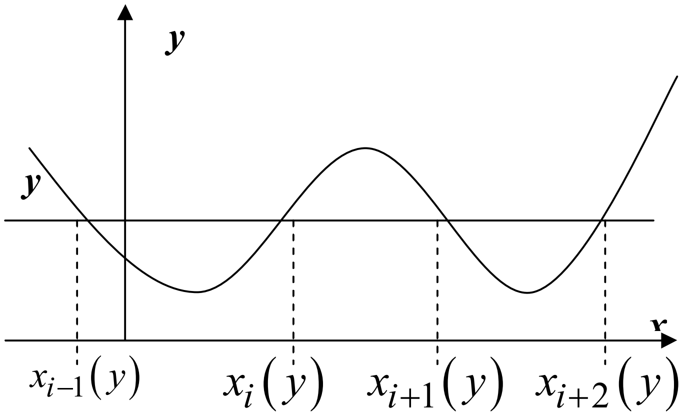
$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|, \qquad (5.5)$$

где x после вычислений следует выразить через y.

б) Зависимость x от y или y от x немонотонна

$$F_Y(y) = \ldots + \int\limits_{x_{i-1}(y)}^{x_i(y)} f_X(x)dx + \int\limits_{x_i(y)}^{x_{i+1}(y)} f_X(x)dx + \ldots, \qquad (5.6)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$



В (5.6) $x_k(y)$ являются решениями уравнения $y = \varphi(x_k)$ и интегрирование поводится по тем *x,* для которых $\varphi(x_k) \le y$.

Законы композиции.

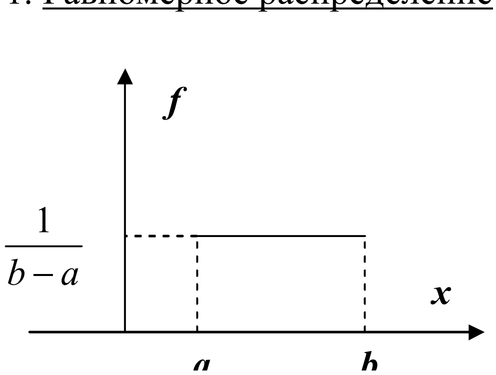
Пусть $f_{XY}(x,y)$ - двумерная плотность распределения вероятностей для (X,Y)

Часто возникает вопрос о нахождении законов распределения для суммы $U = X + Y$ и частного $V = X/Y$.

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, u-x)\,dx$$
$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_{X,Y}(v \cdot y, y)\,dy \qquad (5.7)$$

5.2. Классические непрерывные распределения.

1. Равномерное распределение $U(a,b)$.



$X \sim U(a,b)$, если $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x \in (a,b) \\ 0, & \text{при } x \notin (a,b) \end{cases}.$

Характеристики этого распределения

$MX = \dfrac{a+b}{2}$; $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$; $\beta \quad 0$; $\gamma \quad \dfrac{9}{5}$.

2. <u>Гамма – распределение</u> $\Gamma(\mu,a)$.

$X \sim \Gamma(\mu,a)$, если $f(x)=\dfrac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e^{-x/a}, \quad (x>0); \quad \mu>0, \quad a>0$. Здесь

$\Gamma(\mu)=\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx$ - гамма – функция Эйлера, обладающая свойствами:

$\Gamma(\mu+1)=\mu\cdot\Gamma(\mu)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$.

$MX=\mu a; \; DX= \mu a^2; \; \partial_k \quad MX^k= a^k\,\Gamma(\mu+k)/\Gamma(\mu)$.

Если $X_1,X_2,...,X_m$ - независимы и $X_i \sim \Gamma(\mu_i,a)$, то $X=\sum\limits_{i=1}^m X_i \sim \Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^m \mu_i, a\right)$.

3. <u>Показательное распределение</u> $P(a,b)$.

$X \sim P(a,b)$, если $f(x)=\dfrac{1}{b}e^{-(x-a)/b}$, при $x>a$; $f(x)=0$, при $x\le a$.

$X \sim P(0,b)$, если $f(x)=\dfrac{1}{b}e^{-x/b}$, при $x>0$; $MX= b$, $DX= b^2$.

Если $X_1,X_2,...,X_m$ - независимы и $X_i \sim P(0,b)$, то $X=\sum\limits_{i=1}^m X_i \sim \Gamma(b,m)$.

4. <u>Распределение Лапласа</u> $L(b)$.

$X \sim L(b)$, если $f(x)=\dfrac{1}{2b}e^{-|x|/b} \quad (-\infty<x<\infty)=0$. $\quad MX=0,\; DX=2a^2$.

5. <u>Бета – распределение</u> $\beta(r,s)$.

$X \sim \beta(r,s)$, если $f(x)=\dfrac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}x^{r-1}(1-x)^{s-1}; \quad r>0, \quad s>0, \quad 0<x<1$.

$B(r,s)=\int\limits_0^\infty x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx=\dfrac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$ - бета – функция Эйлера.

$MX=\dfrac{r}{r+s}; \quad DX=\dfrac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}$.

6. <u>Нормальное распределение</u> $N\left(a,\sigma^2\right)$.

$X \sim N\left(a,\sigma^2\right)$, если $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$, $(-\infty < x < \infty)$.

$MX = a;\ DX = \sigma^2;\ \beta = 0;\ \gamma = 0.$

$P(x_1 \le x \le x_2) = \Phi_N\left(\dfrac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_N\left(\dfrac{x_1 - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ –

функция распределения случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(0,1)$. $\Phi_N(-\infty) = 0,\quad \Phi_N(\infty) = 1,\quad \Phi_N(-x) = 1 - \Phi_N(x)$

7. <u>Многомерное нормальное распределение</u> $N_m\left(\vec{a}, D\right)$.

Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ имеет m – мерное нормальное распределение $\left(\vec{X} \sim N_m\left(\vec{a}, D\right)\right)$, если

$$f_{X_1,X_2,\ldots X_m}(x_1,x_2,\ldots x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det D}} \cdot e^{-\sum\limits_{i,j=1}^{m} \left(D^{-1}\right)_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)/2}$$

$MX_i = a_i;\ \operatorname{cov}(X_i X_j) = D_{ij};\ DX_i = D_{ii} = \sigma_i^2.$

$f_{X_i}(x_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \cdot e^{-(x_i - a_i)^2/2\sigma_i^2}$, т.е. каждая из случайных величин X_i имеет нормальное распределение $N\left(a_i, \sigma_i^2\right)$.

Если $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i X_i$, то $Y \sim N\left(a, \sigma^2\right)$, где $a = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i a_i$; $\sigma^2 = C \cdot D \cdot C^T$, где D – ковариационная матрица, $C = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ - матрица – строка.

8. <u>Двумерное нормальное распределение.</u>

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma_1\sigma_2}\cdot e^{\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right]\right\}}$$

$$MX_1=a_1;\ \ MX_2=a_2;\ \ DX_1=\sigma_1^2;\ \ DX_2=\sigma_2^2;\ \ \rho=\frac{\operatorname{cov}\left(X_1X_2\right)}{\sigma_1\cdot\sigma_2}.$$

Если $\rho=0$, то $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)$, т.е. из некоррелированности X_1,X_2 следует их независимость.

Если $Y=\alpha X_1+\beta X_2+c$, то $Y\sim N\left(a,\sigma^2\right)$, где

$$a=\alpha a_1+\beta a_2+c,\quad \sigma^2=\alpha^2\sigma_1{}^2+\beta^2\sigma_1{}^2+2\alpha\beta\rho\sigma_1\sigma_2$$

9. <u>ХИ – квадрат распределение с n степенями свободы</u> $\chi_n{}^2$.

Пусть $x_1,x_2,...x_n$ - независимы и $X_i\sim N(0,1)$, тогда $U=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i{}^2\sim\chi_n^2$,

$$f(u)=\frac{U^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-u/2};\quad (u>0).$$ Заметим, что $U\sim\Gamma\left(\frac{n}{2},2\right)$ (см. п.2).

Если n – мерный случайный вектор $\vec{X}\sim N_n\left(\vec{a},D\right)$ (см. п.7), то

$$U=\sum_{i,j=1}^{m}\left(D^{-1}\right)_{ij}\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\sim\chi_n^2,$$ если $\det D>0$.

Если $U_1\sim\chi_k^2,\quad U_2\sim\chi_p^2$, то $U_1+U_2\sim\chi_{k+p}^2$

10. <u>Распределение Стьюдента с n степенями свободы</u> $t^{(n)}$.

Пусть $Z\sim N(0,1),\quad U\sim\chi_n^2$ и $Z,\ U$ - независимы. Тогда $T=\dfrac{Z}{\sqrt{U/n}}\sim t^{(n)}$.

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi\cdot n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad (-\infty<t<\infty)$$

11. <u>Распределение Фишера</u> $F^{(m,n)}$

Пусть $U,\ V$ - независимы и $U \sim \chi_m^2, \quad V \sim \chi_n^2$. Тогда $F = \dfrac{U/m}{V/n} \sim F^{(m,n)}$.

$$f(F) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F^{\frac{m-2}{2}} \left(1+\frac{m}{n}F\right)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad (F>0)$$

12. <u>Логарифмическое нормальное распределение (логнормальное)</u> $LN\left(a,\sigma^2\right)$.

$X \sim LN\left(a,\sigma^2\right)$, если $\ln X \sim N\left(a,\sigma^2\right)$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} e^{-(\ln x - a)^2/2\sigma^2}, \quad (x>0).\ MX = e^{\left(a+\sigma^2/2\right)};\quad DX = a^2\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

Предельные теоремы.

1. Неравенство Чебышева:

$P\left(\left|X-MX\right| \ge \varepsilon\right) \le \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$, или (как следствие) $P\left(\left|X-MX\right| \le \varepsilon\right) \ge 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

2. Сходимость по вероятности:

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ сходится по вероятности к величине ***a*,** если для любого $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|x-a\right| \ge \varepsilon\right) = 0$. Т.е. $X_n \xrightarrow{п.в.} a$.

3. Теорема Чебышева:

Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ - независимы и имеют одинаковые распределения.

$MX_i = a, \quad DX_i = \sigma^2$. Введем $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогда $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{п.в.} a$.

Действительно: $M\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i=a$, т.к. матожидание суммы С.В. всегда равно сумме матожиданий и $MX_i=a$; так же $D\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n^2}DS_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\sigma^2}{n}$, т.к. дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий и $DX_i=\sigma^2$. Применяя неравенство Чебышева к случайной величине $\frac{S_n}{n}$, получим $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\,S_n/n}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, что и требовалось.

4. Теорема Бернулли:

Пусть реализуется схема Бернулли независимых испытаний и

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{если реализуется событие } A\\ 0, & \text{если реализуется событие } \overline{A}\end{cases}.$$

$P(x_i)=p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$ - распределение Бернулли для результатов i –го испытания. $MX_i=p,\ DX_i=p(1-p)$.

Тогда $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ - число наступления события A в n испытаниях. Поскольку выполнены условия применимости теоремы Чебышева, имеем $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{п.в.}p$, т.е. $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}\leq\frac{1}{4\cdot n\cdot\varepsilon^2}\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$. Это означает, что вероятность отклонения величины $\frac{S_n}{n}$ от p на сколь угодно малую величину можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно большое n. По этому теорема Бернулли позволяет экспериментально находить вероятность p реализации события A: $p\approx\frac{S_n}{n}$ при больших n.

5. Центральная предельная теорема (Ц.П.Т.)

Пусть $X_1, X_2, \dots X_n$ - независимы и $MX_i = a_i, \quad DX_i = \sigma_i^2$. Введем $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

тогда $MS_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad DS_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Если выполнено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{DS_n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x_i - a_i| \ge \varepsilon\sqrt{DS_n}} (x_i - a_i)^2 \cdot f_{X_i}(x_i) \cdot dx_i \right\} = 0$$ (в непрерывном случае),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{DS_n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{x_i : (x_i - a_i) \ge \varepsilon\sqrt{DS_n}} (x_i - a_i)^2 P_{X_i}(x_i) \right\} = 0$$ (в дискретном случае),

То справедлива теорема Ляпунова (Ц.П.Т.): при $n \to \infty$ случайная величина $X = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} \sim N(0,1)$. Соответственно, $S_n \sim N(MS_n, DS_n)$ при $n \to \infty$. Таким образом, Ц.П.Т. утверждает, что сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, произвольно распределенных, имеет нормальное распределение (при выполнении условия Линдеберга).

В частном, но часто встречаемом случае, $X_1, X_2, \dots X_n$ независимы и одинаково распределены, т.е. $MX_i = a, \quad DX_i = \sigma^2$. В этом случае условие Линдеберга выполнено и, следовательно, справедлива теорема Ляпунова, $S_n \sim N(MS_n, DS_n)$

6. Теорема Муавра – Лапласа.

Если $X_i, \quad (i = 1,2,\dots n)$ имеют распределение Бернулли

$P(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \quad (x_i = 0;1)$, то условия применимости Ц.П.Т. выполнены, т.к. $MX_i = p, \quad DX_i = pq$ (где $q = 1 - p$). При этом $S_n = k$ - число реализаций события A в n испытаниях. По этому $S_n = k \sim N(np, npq)$, т.е. биномиальное распределение $P_n(k)$ при достаточно больших n аппроксимируется нормальным распределением $P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2/2npq}$, т.е.

$b(n,p) \sim N(np, npq)$ и точность этой аппроксимации тем больше, чем больше величина $\sqrt{npq}$.

7. Распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$**,** как предельный случай биномиального распределения $b(n,p)$.

Пусть $k \sim b(n,p)$. Рассмотрим предельный случай, когда $p \to 0$; $n \to \infty$, но $np = \lambda$. Тогда $k \sim \Pi(\lambda)$, т.е. $P_n(k) \approx P(k) = e^{-\lambda}\lambda^k / k!$ и точность этой аппроксимации тем выше, чем меньше величина $2\lambda^2/n$.

8. Аппроксимация распределения Пуассона нормальным распределением.

Пусть $k \sim \Pi(\lambda)$. Если $\lambda \gg 1$, то $k \sim N(\lambda,\lambda)$, т.е. $\Pi(\lambda) \sim N(\lambda,\lambda)$.

9. Аппроксимация распределений Стьюдента и ХИ – квадрат нормальным распределением.

При $n \to \infty$ $\quad t^{(n)} \sim N(0,1); \quad \chi_n^2 \sim N(n,2n)$.

Задачи.

5.1 $f_X(x) = A \cdot x^{3/2} \cdot e^{-5x}$, $\;(x>0)$, Найти: A; MX; $f_Y(y)$, если y=5x; DY.

5.2. $f_X(x) = K \cdot x^2$, $\;(0<x<1)$, Найти: K; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если *y=1/x.*

5.3. $f_X(x) = A \cdot (1-x)$, $\;(0<x<1)$, Найти: A; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если $x = \cos y$, $\;y \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.4. $f_X(x) = \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}$, $\;(-1<x<1)$, Найти: A; MX; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если $x = \sin y$ $\;\left(y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

5.5. $f_x(x)=C\left(1-x^2\right)$, $\left(|x|<1\right)$, Найти: C; DX; $f_Y(y)$, если $x=\sin y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$; MY; DY ..

5.6. $f_x(x)=C\sin^3 x$, $\left(0<x<\pi\right)$, Найти: C; $f_Y(y)$, если $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$; MY; DY.

5.7. $f_x(x)=A\cdot x$, $\left(0<x<1\right)$, Найти: A; MX; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если $y=-\ln x$.

5.8. $f_X(x)=A\operatorname{ctg} x$, $\left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, Найти: A; $f_Y(y)$, если $y=\ln\sin x$; MY; DY, и построить график $f_Y(y)$.

5.9. $f_x(x)=A\sin 5x$, $\left(0<x<\dfrac{\pi}{10}\right)$, Найти: A; $f_Y(y)$, если $y=\cos 5x$; MY; DY.

5.10. $f_x(x)=A\cos x$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, Найти: A; $f_Y(y)$, если $y=\sin x$; MY; DY.

5.11. $f_x(x)=A\cdot e^{-3x}$, $\left(x>0\right)$, Найти: A; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если $x=-\ln y$; $P\left(\dfrac{1}{2}<y<1\right)$.

5.12. $f_x(x)=A\cdot e^{4x}$, $\left(x<0\right)$, Найти: A; DX; $F_X(x)$, и построить ее график; $f_Y(y)$, если $x=\ln y$; $P\left(0<y<\dfrac{1}{2}\right)$.

5.13. $f_x(x)=A\cdot x^2 e^{-x^3/a}$, $\left(x>0\right)$, Найти: A; DX; $f_Y(y)$, если $x=\sqrt[3]{a\ln y}$; $P\left(1<y<4\right)$.

5.14. $f_x(x)=A\cdot e^{-|x|/a}$, $\left(-\infty<x<\infty\right)$, Найти: A; ∂_k; μ_k; β; γ.

5.15. $F_x(x)=A\cdot x^2$, $\left(0<x\le 1\right)$; $F_x(x)=0$, $\left(x\le 0\right)$ и $F_x(x)=1$, $\left(x>1\right)$, Найти: A; MX; DX; β; γ; $f_Y(y)$, если $x=e^{-y}$.

5.16. $F_x(x)=0$, $\left(x\le 0\right)$ и $F_x(x)=A\left(1-e^{-x/a}\right)$, $\left(x>0\right)$. Найти: A; MX; DX; ∂_k; μ_k; β; γ; $P\left(0<x<2a\right)$.

5.17. $F_x(x)=0$, $\left(x\le 0\right)$; $F_x(x)=Ax$, $\left(0<x\le 1\right)$ и $F_x(x)=1$, $\left(x>1\right)$, Найти: A; MX; DX; $F_Y(y)$, если $x=e^{-y}$; $P\left(0\le y<1\right)$.

5.18. $U\sim\chi_n^2$. Найти: MU; DU.

5.19. $T\sim t^{(n)}$. Найти: MT; DT.

5.20. $F_{XY}(x,y)=\left(1+e^{-2x-y}-e^{-2x}-e^{-y}\right)$, $(x>0,\ y>0)$. Найти: $\operatorname{cov}(X,Y)$; $f_{XY}(x,y)$; $\operatorname{cov}(U,V)$, если $U=X+Y,=V\quad X-Y$.

$F_{XY}(x,y)$:

y \ x	0 … 1	1 …
1 …	$\dfrac{x(x+1)}{2}$	1
0 … 1	$\dfrac{xy(x+y)}{2}$	$\dfrac{y(y+1)}{2}$

5.21. На показанном распределении в отмеченной серым цветом области $F_{XY}(x,y)=0$. Найти: $F_X(x)$; $F_Y(y)$; $\operatorname{cov}(X,Y)$; $f_{XY}(x,y)$; $f(x)$; $f(y)$; $f\left(x/y\right)$; $M\left(x/y\right)$; $\operatorname{cov}(U,V)$, если $U=X+Y,=V\quad X-Y$.

$F_{XY}(x,y)$:

y \ x	0 … $\pi/2$	$\pi/2$ …
$\frac{\pi}{2}$ …	$\sin x+\cos x$	1
0 … $\frac{\pi}{2}$	$\cos x+\cos y-$ $-\cos(x+y)$	$\sin y+\cos y$

5.22. На показанном распределении в отмеченной серым цветом области $F_{XY}(x,y)=0$. Найти: $f_{XY}(x,y)$; $f(x)$; $f(y)$; $M\sin y$; $M\cos x$; $\operatorname{cov}(\sin y,\cos x)$; $f\left(x/y\right)$; $M\left(x/y\right)$.

5.23. а) $T \sim t^{(10)}$. Найти: $P(2{,}16<T<18{,}31)$; $P(2{,}56<T<25{,}19)$.

5.23. б) $T \sim t^{(16)}$. Найти: $P(6{,}91<T<34{,}27)$; $P(28{,}85<T<32)$.

5.24. а) $U \sim \chi^2_{10}$. Найти: $P(4{,}87<U<25{,}19)$; $P(3{,}94<U<20{,}48)$.

5.24. б) $U \sim \chi^2_{24}$. Найти: $P(36{,}42<U<42{,}98)$; $P(10{,}81<U<15{,}66)$.

5.25. Случайные величины X и Y имеют двумерное нормальное распределение. Известно: $X \sim N(-2,1)$, $Y \sim N(3,4)$, $\operatorname{cov}(X,Y)\quad -1$. Найти:

а) распределение случайной величины $Z_1=X-Y$ и вероятность $P(Z_1<-2)$

б) ковариационную матрицу случайных величин $Z_1=X-Y,=Z_2\quad X+Y$

в) $f\left(x/y\right)$, $M\left(x/y\right)$

5.26. Дневной объем продаж товаров типа 1, 2 и 3 образует трехмерный случайный вектор $(X_1;X_2;X_3)$, имеющий нормальное распределение

$N_3(2,4,3;D)$ с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Стоимость каждого товара одинакова и равна 2.

а) Найти закон распределения для дневного дохода от продаж всех товаров.

б) Найти вероятность того, что дневной доход находится в интервале (9,27). Найти вероятность того, что дневной доход превысит 20.

5.27. Время X обслуживания кассиром клиента имеет показательное распределение со средним значением 2 минуты, т.е. $X \sim P(0,2)$. Найти вероятность того, что время обслуживания клиента лежит в интервале (0.5;1.5).

5.28. Время X бесперебойной работы станка имеет показательное распределение $X \sim P(1,10)$ (числа даны в неделях). Найти вероятность того, что время работы превысит 12 недель.

5.29. Число звонков K, поступающих на телефонную станцию за некоторое время T имеет распределение Пуассона с средним значением 100, т.е. $K \sim \Pi(100)$. Найти вероятность того, что число звонков а) меньше 90; б) больше 110; в) лежит в интервале (85,115).

5.30. Число звонков K, поступающих на телефонную станцию за время t имеет распределение $\Pi(10 \cdot t)$. Найти вероятность того, что время ожидания звонка больше 0.2.

5.31. Известно, что 70% населения поддерживают Президента. Проводится опрос 1000 человек. Найти вероятность того, что число поддерживающих Президента людей окажется в интервале (685,715).

5.32. При производстве микросхем брак составляет 0,1%. Найти вероятность того, что в партии из 1000 микросхем будет не менее 2-х бракованных.

5.33. При производстве микросхем брак составляет 0,1%. Найти вероятность того, что в партии из 100000 микросхем число бракованных будет меньше 90.

5.34. Случайные величины X и Y имеют нормальное распределение N(2,1) и N(3,2) соответственно. а) Найти распределение случайных величин $Z = X + Y;\ W = X - Y;\ V = 2 - 3X + 4Y$; б) Найти $P(Z > 6),\ P(W < 0)$; В пунктах а) и б) рассмотреть отдельно два случая: 1) X и Y – независимы; 2) $\operatorname{cov}(X,Y) = -1$.

5.35. У Вас 100 разных акций. Ожидается снижение стоимости любой из акции с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что число акций, стоимость которых будет снижена: а) <50; б) >50.

5.36. Опрошено 150 студентов. Вероятность встретить студента – отличника равна 0,1. Найти вероятность того, что отличников среди опрошенных менее 20 и более 10.

5.37. Из 6 яблонь каждая плодоносит с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что а) плодоносит 4 яблони; б) плодоносят все яблони; в) не плодоносит ни одна яблоня; г) плодоносит хотя бы одна яблоня.

5.38. В одном испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что в 5-ти независимых испытаниях прибор выйдет из строя не менее 2-х раз.
5.39. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет а) менее 2-х раз; б) не менее 2-х раз.
5.40. Вероятность опоздания на работу равна 0,2. Найти вероятность того, что за 400 дней было а) ровно 80 опозданий; б) от 70 до 100 опозданий.
5.41. Вероятность поражения мишени стрелком равна 0,75 при каждом выстреле. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.
5.42. Стул может быть сломанным с вероятностью 0,01. Партия стульев пускается в продажу, если объем брака не превышает 2%. А) Найти вероятность пустить партию из 900 стульев в продажу. В) Найти число стульев в партии, если вероятность пустить парию в продажу =0,98.
5.43. Норвежские рыбаки ловят семгу, которая с вероятностью 0,9 (каждая) содержит икру. Магазин принимает к реализации парию рыбы, среди которой 80% - с икрой. Какой должна быть партия рыбы, чтоб ее приняли в магазин с вероятностью а) 0,99; б) 0,95; в) 0,9?
5.44. В группе 49 студентов, каждый из которых может сдать зачет с вероятностью 4/5. Зачет проведен успешно, если число не сдавших не превышает 40%. А) Найти вероятность успешного проведения зачета.
Б) Вычислить число студентов, при котором вероятность успешного проведения зачета была не менее 0,85.
5.45. Внутрь круга радиуса R случайным образом брошена точка. Случайная величина X – расстояние от точки до центра круга. Найти F(x), f(x), M(x), D(x), $\sigma(x)$, m_e, m_d.
5.46. То же для шара радиуса R.
5.47. Внутрь треугольника с вершинами в точках (0;0), (0;4) и (4;0) случайным образом брошена точка. X – координата точки по горизонтали. Найти F(x), f(x), M(x), D(x), $\sigma(x)$, m_e, m_d..
5.48. Внутрь треугольника с вершинами в точках (0;0), (0;-2) и (-2;0) случайным образом брошена точка. X – координата точки по горизонтали. Найти F(x), f(x), M(x), D(x).
5.49. Для произвольной случайной величины *X* выбрать наиболее вероятное событие (A,B или C): A) $3X-2<1$; B) $2X+4<5$; C) $3-2X>-1$.
5.50. То же, что и в 5.49: A) $X^2-5X+6>0$; B) $X^2-4X>-3$; C) $X^2+5>6X$.
5.51. То же, что и в 5.49: A) $5X>X^2+6$; B) $3<4X-X^2$; C) $X^2-6X+5<0$.
5.52. То же, что и в 5.49: A) $1<2X-3$; B) $3X-2>1$; C) $2X+4>5$.
5.53. Время безотказной работы элемента распределен по экспоненциальному закону $f(x)=0{,}01 e^{-0{,}01t}$, $(t \ge 0)$, где t – время (часы). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

5.54. Независимые случайные величины X,Y заданы плотностями $f_1(x)=\frac{1}{3}\cdot e^{-x/3},\ \ (x\ge 0),\ f_2(y)=\frac{1}{5}\cdot e^{-y/5},\ \ (y\ge 0)$. Найти композицию этих случайных величин (т.е. плотность Z=X+Y).

5.55. Внутрь квадрата с вершинами в точках (1;1), (-1;1), (-1;-1) и (1;-1) плотность распределения двумерной случайной величины $f(x,y)=C$. Определить зависимость и коррелированность величин X и Y.

5.56. Внутрь квадрата с вершинами в точках (1;0), (0;-1), (-1;0) и (0;1) плотность распределения двумерной случайной величины $f(x,y)=C$. Определить зависимость и коррелированность величин X и Y.

5.57. Система 2-х случайных величин распределена равномерно, т.е. в прямоугольнике, ограниченном линиями x=4, x=6, y=10, y=15 совместная плотность f(x,y)=C и f(x,y)=0 вне прямоугольника. Найти C, F(x,y), P(x<5), P(y>12), P(3<x<5;12<y<20)/

5.58. Найти вероятность попадания сл. величины (X,Y) в прямоугольник, ограниченный линиями $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$, если $F(X,Y)=C\sin x\cdot\sin y\ \ (0\le x\le\pi/2, 0\le y\le\pi/2)$. Найти C, F(x), F(y), f(x), f(y)

5.59. $F(X,Y)=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right)\ \ (x\ge 0, y\ge 0)$ Найти $f(x,y), F(x), F(y)$, $f(x), f(x/y), f(y), f(y/x), M(x), M(y), \operatorname{cov}(xy)$. Определить зависимость и коррелированность величин X и Y. Найти P(x>y), P(|x|>|y|).

5.60. В прямоугольнике, ограниченном линиями $x=0,\ x=\pi/2,\ y=0,\ y=\pi/2$, $f(x,y)=C\sin(x+y)$ и $f(x,y)=0$ вне прямоугольника. Найти $C, F(x,y), M(x), M(y), M(xy), \operatorname{cov}(xy)$. Определить зависимость и коррелированность величин X и Y.

5.61. $f(x,y)=\frac{C}{\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}$, Найти C, функцию совместного распределения системы, условные плотности распределения составляющих, $M(x/y), M(y/x)$. Определить зависимость и коррелированность величин X и Y. Найти P(x<y), P(|x|<y), P(x<2y), P(x>7y).

5.62. $f(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot e^{-4x^2-6xy-9y^2}$, Найти условные плотности распределения составляющих, коэффициент корреляции.

5.63. Среди данных функций указать те, которые на указанном интервале могут быть плотностью распределения какой-либо случайной величины

1) $C\ \mathrm{arctg}\, x$ при -1<x<1; 2) $C\ \mathrm{arctg}\, x$ при 0<x<1; 3) $C\ \mathrm{arctg}\, x$ при x>0;

4) $C\ \mathrm{arctg}\, x$ при x<0; 5) $C\ln(x)$ при 1/2<x<1; 6) $C\ln(x)$ при x>1;

7) $C\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ при x<-1; 8) $C\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ при x>1; 9) $C\ln(x)$ при e<x<2e;

10) $C\dfrac{2x^2-5}{3x^3+3x}$ при x>2; 11) $C\dfrac{3x^2+5}{4x^6-3x}$ при x>2; 12) $C\sin^2(\pi x)$ при x>0;

13) $C\left(\dfrac{2x^2+1}{4x^2+5}\right)^x$ при любом x; 14) $C\left(\dfrac{2x^2+1}{4x^2+5}\right)^x$ при x>0; 15) $\dfrac{C}{x-1}$ при 1<x<10.

5.64. Система 2-х сл. вел. X,Y имеет функцию распределения $F(x,y)=C\left(1+x^2+2x\right)y^3$ в области $-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$. Найти C, плотности распределения компонент, совместное матожидание, коэффициент корреляции, описать *F(x,y)* на всем пространстве. Установить зависимость и коррелированность компонент.

5.65. Ответить на вопросы задачи 5.64., если $F(x,y)=C\left(y^4+4\right)x^2y$ в области $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

5.66. Ответить на вопросы задачи 5.64., если $F(x,y)=C\left(x^2\sin y+x^2\right)$ в области $0\le x\le 1$, $-\pi/2\le y\le \pi/2$.