## I. Пространство элементарных событий. События. Алгебра событий.

Множество $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ всех возможных исходов эксперимента образуют пространство элементарных событий.

Примеры:

1. При социологическом исследовании деятельности парламента каждый опрошенный отвечал либо «ДА» (работа парламента его удовлетворяет), либо «НЕТ» (не удовлетворяет). По этому для одного опрошенного $\Omega = (ДА, НЕТ)$.
2. При подбрасывании 2-х монет $\Omega = (ГГ, ГР, РГ, РР)$.

<u>События</u>. Любое подмножество пространства $\Omega$ называется событием. События будем обозначать буквами А, В, С, … Среди всех возможных событий удобно ввести события

$\varnothing$ - пустое множество или невозможное событие,

$\Omega$ - все пространство элементарных событий или достоверное событие.

<u>Операции над событиями.</u>

1. А+В – событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из исходных событий. С точки зрения теории множеств А+В состоит из тех элементарных событий, которые принадлежат либо А, либо В, либо и А и В.
2. АВ – событие, состоящее в том, что произошли оба исходные события одновременно. С точки зрения теории множеств АВ состоит из тех элементарных событий, которые принадлежат и А и В. Если АВ=$\varnothing$, то говорят, что А и В несовместны.
3. $\overline{\mathrm{A}}$ - событие, состоящее в том, что А не происходит, т.е. $\overline{\mathrm{A}}$ состоит из элементарных событий, которые не принадлежат А.
4. А-В – событие, состоящее в том, что А происходит, но В не происходит. Это множество элементарных событий принадлежащих А, но не принадлежащих В. Очевидно: $\overline{\mathrm{A}} = \Omega - \mathrm{A}$.
5. $\mathrm{A}\varnothing = \varnothing$; $\mathrm{A}+\varnothing = \mathrm{A}$; $\Omega\mathrm{A}=\mathrm{A}$; $\Omega + \mathrm{A}=\Omega$

Свойства операций над событиями.

Из определений операций сложения и умножения следуют их свойства:

1. A+B=B+A - коммутативности относительно сложения,

   AB=BA - коммутативности относительно умножения.

2. (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C - ассоциативность относительно сложения,

   (AB)C=A(BC)=ABC - ассоциативность относительно умножения. Свойство ассоциативности позволяет опускать скобки.

3. A(B+C)=AB+AC - дистрибутивность.

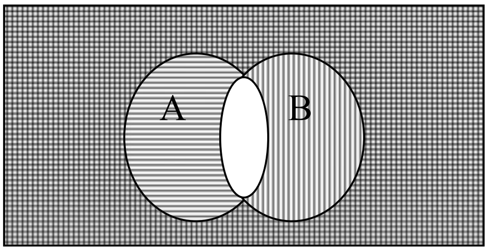
4. AA=A; A+A=A - идемпотентность.

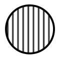
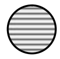
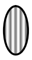
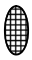
Пример: Подбрасывается игральная кость (кубик с пронумерованными от 1 до 6 гранями), т.е. $\Omega$=(1,2,3,4,5,6). Выберем события A=(1,2), B=(1,3,4), C=(4,6) и D=(5).

Тогда: A+B=(1,2,3,4); B+C=(1,3,4,6); AB=(1); ABC=$\varnothing$; (A+B)(B+C)= (1,3,4);

$\overline{B}$=(2,5,6); A-B=(2); B-A=$\varnothing$; CD=$\varnothing$; $\overline{\Omega}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=\Omega$.

Диаграммы Вьенна (Венна).




Для получения соотношений между событиями удобно использовать диаграммное представление событий. Элементарное событие – точка прямоугольника. $\Omega$ - множесто всех точек прямоугольника. A – множество точек, принадлежащих области A, и т.д.. В качестве примера, докажем справедливость одного из соотношений де-Моргана: $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$. Заштрихуем область $\overline{A}$  и область $\overline{B}$ , тогда $\overline{A}+\overline{B}$=  +  + , т.е. множество точек $\overline{A}+\overline{B}$ имеют одну из приведенных штриховок. Свободной от штриховки осталась область AB, откуда $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$.

## Задачи

1.1. Даны три события А, В, С. Указать формальные выражения, означающие:

а) Произошло только событие А.

б) Не произошло ни одно из этих событий.

в) Произошли только А и В.

г) Произошло по крайней мере одно из этих событий.

д) Произошло по крайней мере два из этих событий.

е) Произошло одно и только одно событие.

ж) Произошло два и только два события.

з) Произошло не более двух событий.

и) Произошло не более одного события.

к) Произошло событие А

Используя диаграммы Вьенна, показать:

1.2. $A-B = A-AB = A\,\overline{B}$

1.3. $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$

1.4. $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$

1.5. $(A+B)(A+C) = A+BC$

1.6. $(A+B)\left(A+\overline{B}\right) = A$

1.7. $(A+B)-B = A-B = A\,\overline{B}$

1.8. $A+AB = A$

1.9. $A+B = A+B\,\overline{A}$

1.10. $(A+B)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right) = AB$

1.11. Решить уравнения: а) $AX = A$ в) $A+X = A$

Исходя из соотношений 1.2. – 1.11. доказать:

1.12. $\overline{A+B+C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

1.13. $\overline{ABC} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

1.14. $\overline{A-B} = \overline{A}+AB$

1.15. $A(B-C) = AB-AC$

1.16. $A+B+C = A+B\,\overline{A}+C\,\overline{A}\,\overline{B}$

1.17. $A = AB+A\,\overline{B}$

1.18. $(A-B)+AB = A$

1.19. $(A-B)+B = A+B$

1.20. $\overline{A-(B+C)} = \overline{A}+BA+CA$

1.21. $A-(B+C) = (A-B)-C$

1.22. $\overline{AB+AC+BC} = \overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$

1.23. $(A-B)-C = (A-C)-B = A\overline{B}\,\overline{C}$

1.24. $A = AB+AC+AD$ если $B+C+D = \Omega$

## II Вероятность.

### 2.1. Аксиомы и их следствия.

Поставим в соответствие каждому элементарному событию $\omega_i$ пространства $\Omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ действительное число $P(\omega_i)$. Это число называется вероятностью реализации элементарного события $\omega_i$, если выполнены следующие аксиомы:

а) $0 \le P(\omega_i) \le 1, \quad \forall i=\overline{1,n}$

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i)=1$ - условие нормировки (2.1)

в) $P(A)=\sum\limits_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i)$ - вероятность реализации события А равна сумме вероятностей тех элементарных событий, из которых состоит А.

Эти аксиому позволяют получить ряд соотношений между вероятностями различных событий

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\Omega)=1$ - условие нормировки
3. $P(A+B) = P(A)+P(B)$, если $AB=\varnothing$ - формула сложения для несовместных событий (2.2)
4. $P(\varnothing)=0$
5. $P(\overline{A})=1-P(A)$
6. $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$ - формула сложения для произвольных событий

### 2.2. Классическая вероятность и элементы комбинаторики.

Очень часто (например, в играх в рулету, кости, карты) реализуется ситуация, когда вероятности всех элементарных событий одинаковы. В этом случае из условия нормировки (2.1.б) следует, что $P(\omega_i)=1/n$, где n – полное число всех возможных исходов эксперимента. Тогда из аксиомы (2.1.в) получим

$$P(A)=\frac{m(A)}{n} \tag{2.3}$$

где m(A) – число элементарных событий, из которых состоит событие A. Обычно говорят, что вероятность наступления события A равна отношению числа благоприятных m(A) исходов к их полному числу n.

Для решения задач с равновозможными исходами ниже приводятся основные сведения из комбинаторики.

## Выборки.

Рассмотрим стандартную урновую систему. В урне содержится M различных шаров с номерами от 1 до M. Из урны последовательно извлекаются n шаров, т.е. производится выборка объема n. Каждая выборка может быть записана в виде $(a_1,a_2,...,a_n)$, где $a_i$ - номер шара. Извлеченного на i – ом шаге. Каждая такая выборка – элементарное событие. Совокупность всех возможных выборок объема n образует пространство элементарных событий. Структура пространства $\Omega$ существенно зависит от того, считаем ли мы выборки упорядоченными или неупорядоченными. В случае упорядоченных выборок, исходы, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком их следования, объявляются различными. (Например, (1,4,2) и (4,2,1) – различные выборки.) В случае неупорядоченных выборок порядок следования элементов не принимается во внимание и все выборки, состоящие из одних и тех же элементов считаются тождественными. ((1,4,2) и (4,2,1) – это одна выборка.) Для упорядоченных выборок будем использовать обозначение $(a_1,a_2,...,a_n)$, а для неупорядоченных - $[a_1,a_2,...,a_n]$.

Упорядоченные выборки с возвращением. Это такой эксперимент (выборка), в котором на каждом шаге вынутый шар возвращается в урну (т.е. возможен повтор). В этом случае пространство элементарных событий имеет следующую структуру: $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_n); a_i = 1,2,...,M\}$ и число различных исходов

$$N(\Omega) = M^n \tag{2.4}$$

Неупорядоченные выборки с возвращением. В этом случае

$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_n]; a_i = 1,2,...,M\}$ и число различных исходов (выборок)

$$N(\Omega) = C_{M+n-1}^{n} \tag{2.5}$$

где $C_k^l = \dfrac{k!}{l!(k-l)!}$ - число сочетаний из $k$ элементов по $l$,

$k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1) \cdot k$ - число перестановок из $k$ элементов.

Упорядоченные выборки без возвращения. Это такой эксперимент, в котором вынутый шар не возвращается в урну (т.е. повтор невозможен). Будем полагать, что $n \le M$. В этом случае $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_n); i \ne j \to a_i \ne a_j; a_i = 1,2,...,M\}$ и число различных исходов = число размещений из $M$ элементов по $n$.

$$N(\Omega) = A_M^n = \frac{M!}{(M-n)!} \tag{2.6}$$

Неупорядоченные выборки без возвращения. В этом случае

$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_n]; i \ne j \to a_i \ne a_j; a_i = 1,2,...,M\}$ и число различных исходов

$$N(\Omega) = C_M^n \tag{2.7}$$

Размещения.

Рассмотрим структуру пространства элементарных событий в задаче размещения n дробинок по M ячейкам. Пусть ячейкам присвоены номера от 1 до M, а дробинкам – номера от 1 до n. При этом следует различать два случая: дробинки различимы между собой, или нет.

Распределение n <u>различимых</u> дробинок по M ячейкам полностью описывается <u>упорядоченным</u> набором $(b_1, b_2, ..., b_n)$, где $b_i$ - номер ячейки, в которую попала дробинка с номером $i$. $b_i = \overline{1, M}$.

Распределение n <u>неразличимых</u> дробинок по M ячейкам полностью описывается <u>неупорядоченным</u> набором $[b_1, b_2, ..., b_n]$, где $b_i$ - номер ячейки, в которую попала дробинка с номером $i$. $b_i = \overline{1, M}$.

Сравнивая задачи о размещении с задачами о выборках, видно, что имеет место соответствия:

(упорядоченные выборки) $\Leftrightarrow$ (различимые дробинки)

(неупорядоченные выборки) $\Leftrightarrow$ (неразличимые дробинки)

Это значит, что случаю упорядоченных (неупорядоченных) выборок в задаче выбора n шаров из урны с M шарами соответствует один и только один случай расположения различимых (неразличимых) дробинок в задаче размещения n дробинок по M ячейкам.

Аналогичный смысл имеют следующие соответствия:

(выбор с возвращением) $\Leftrightarrow$ (в ячейке может находится любое число дробинок, т.е. нет запрета)

(выбор без возвращения) $\Leftrightarrow$ (в ячейке может находится не более одной дробинки, т.е. есть запрет)

Из этих 4-х соответствий можно сконструировать соответствия разных смешанных (двойственных) типов, которые можно объединить в таблице:

Таблица 1

<table>
<tr><td colspan="4">$N(\Omega)$ в задаче размещения n дробинок по M ячейкам</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Тип дробинок</td><td>Различимые дробинки</td><td>Неразличимые дробинки</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">размещение</td><td>Без запрета</td><td>$M^n$</td><td>$C_{M+n-1}^n$</td><td>С возвращением</td><td rowspan="2">Выбор</td></tr>
<tr><td>С запретом</td><td>$A_M^n$</td><td>$C_M^n$</td><td>Без возвращения</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Упорядоченные выборки</td><td>Неупорядоченные выборки</td><td colspan="2">Набор</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">$N(\Omega)$ в задаче выбора n шаров из урны с M шарами</td></tr>
</table>

В классических задачах вероятности реализаций одинаковы и равны $1/N(\Omega)$. Это позволяет находить вероятности различных событий согласно формуле (2.3). Приведем несколько примеров.

1. Пусть из совокупности M элементов извлекается с возвращением выборка объема n. Рассмотрим событие A, состоящее в том, что все элементы этой выборки различны, т.е. эта выборка могла быть получена при выборе без возвращения. Поскольку полное число выборок равно $M^n$ и из них $A_M^n$ обладают указанным свойством, находим

$$P(A) = \frac{A_M^n}{M^n} \tag{2.8}$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 10 студентов все дни рождения различны, равна $\frac{A_{365}^{10}}{365^{10}} \approx 0,883$.

При подбрасывании n одинаковых игральных костей полное число исходов равно $6^n$, из них $C_{n+5}^n$ - число различных исходов, т.е. число неупорядоченных выборок объема n из 6-ти элементов с возвращениями (или число размещений n неразличимых дробинок по 6-ти ящикам). По этому вероятность реализации одного из различимых исходов равна

$$P_n = \frac{C_{n+5}^{n}}{6^n} \tag{2.9}$$

в том числе $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_2 = 0,583$, $P_3 = 0,259$ и т.д.

3. Из колоды в 52 карты наудачу вынимают 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих кат будут 2 туза и не будет 10-ки крестей. Полное число способов вынуть 5 карт равно $C_{52}^{5}$ (неупорядоченная выборка без возвращения). Поскольку тузы выбираются только из тузов, то число выбрать какие-нибудь 2 туза равно $C_4^2$. Остальные 3 карты выбираются из тех, которые не являются тузами или 10-кой крестей. Таких карт 47. Число способов вынуть 3 карты из 47 равно $C_{47}^{3}$. Общее число выборок, благоприятствующих нашему событию, равно $C_4^2 \cdot C_{47}^{3}$. Соответственно искомая вероятность равна $C_4^2 \cdot C_{47}^{3} \big/ C_{52}^{5} \approx 0,037$.

## Геометрическая вероятность.

К классически задачам обычно относят и задачу, в которой вероятность попадания в некоторую точку d – мерного пространства пропорциональна мере (длине, площади, объему) этой области. По этому вероятность реализации события A определяется выражением

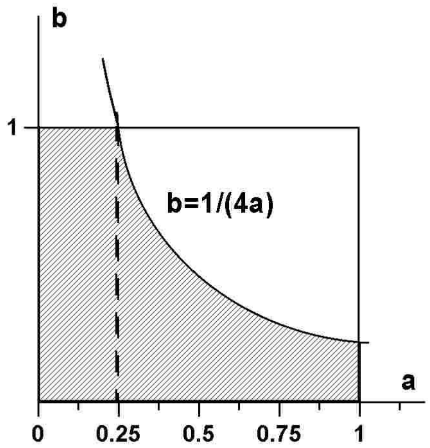
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu} \tag{2.9}$$

где $\mu(A)$ - мера области пространства, которая соответствует событию A, $\mu$ - полная мера допустимой задачей области пространства. Для иллюстрации приведем примеры:

1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-(\alpha-0,1)x}dx$. Параметр $\alpha$ выбирается случайным образом из интервала (0;2). Найти вероятность того, что интеграл– сходится (событие А). $\int\limits_0^{\infty} e^{-(\alpha-0,1)x}dx = \frac{-1}{\alpha-0,1}\cdot\left(e^{-(\alpha-0,1)\cdot\infty}-1\right)$. Область сходимости:

$\alpha > 0,1$. По этому $\mu(A)=1,9$; $\mu = 2$.

Следовательно $P(A)=\frac{1,9}{2}=0,95$




2. Рассмотрим квадратное уравнение $a\cdot x^2+x+b=0$, где параметры *a* и *b* случайным и независимым образом выбираются из интервала (0;1) каждый. Найти вероятность того, что корни этого уравнения действительны (событие А). Корни действительны, если дискриминант уравнения неотрицателен, т.е. если $a\cdot b \le 1/4$ .Изобразим эту область в плоскости с координатами *a* и *b.* Здесь $\mu$ - площадь квадрата со стороной 1. Событию А соответствует заштрихованная область. По этому $P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu} = \frac{1}{4}+\int\limits_{1/4}^{1}\frac{da}{4a} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4 \approx 0,6$.

## Задачи

**2.1.** Подбрасываем 3 монеты. Найти:

а) вероятность P(k) того, что число выпавших гербов равно k (k=0;1;2;3).

б) вероятность того, что число выпавших гербов более одного.

в) вероятность того, что выпадет по крайней мере один герб.

**2.2.** Из колоды в 52 карты вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что

а) будут вынуты k тузов k (k=0;1;2;3).

б) среди вынутых будет по крайней мере 1 туз.

в) появятся тройка, семерка, туз.

г) будут вынуты тройка, семерка, дама пик.

д) появятся 6 и 10 крестей.

е) среди вынутых карт не будет шестерок и 10 крестей.

ж) появятся 6 бубей, 7 треф, 10 пик.

з) среди вынутых карт не будет 6 бубей, 7 треф, 10 пик.

**2.3.** Бросается 2 кости (кубика). Найти вероятность того, что

а) сумма выпавших очков равна 9.

б) произведение выпавших очков равно 18.

в) сумма очков равна 9, а произведение – 18.

**2.4.** Задача де-Мере.

а) Бросаем 4 кости. Найти вероятность того, что единица выпадет по крайней мере один раз.

б) Бросаем 24 раза 2 кости. Найти вероятность того, что две единицы выпадут по крайней мере один раз.

(примечание: де-Мере утверждал, что эти вероятности одинаковы)

**2.5.** Задача фермера – Галилея (или Лейбница). Бросаем три кости.

а) Найти вероятность P(11) того, что сумма выпавших очков равна 11.

б) Найти вероятность P(12) того, что сумма очков равна 12.

(примечание: некий фермер пришел к Галилею (по другой легенде – к Лейбницу) с утверждением, что эти вероятности равны. Но проведенный эксперимент показал, что это не так).

**2.6.** Из колоды в 36 карт вынимают 18 карт. Найти вероятность того, что среди вынутых карт будет 9 карт красной масти. Получить точный ответ и приближенный, вычисляя факториалы по формуле Стирлинга

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\quad (n \gg 1)$$

**2.7.** Из 20-ти АО 4-ре являются банкротами. Гражданин приобрел по 1 акции в 6-ти АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов.

**2.8.** В ящике N деталей, из которых M являются бракованными. Наудачу вынимаются n деталей. Найти вероятность того, что среди вынутых будет m бракованных. (P(m) – гипергеометрическое распределение).

**2.9.** На станцию прибыли 10 вагонов. Вагоны помечены номерами от 1 до 10. Найти вероятность того, что среди выбранных для контрольного взвешивания 5 вагонов:

а) окажутся вагоны с номерами 2 и 7.

б) не окажется вагонов с номерами 2 и 7.

**2.10.** В ящике (урне) 8 красных, 1 синий, 7 желтых шаров. Наудачу вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что:

а) вынули 3 красных, 1 синий, 1 желтый шар.

б) среди вынутых окажется k желтых шаров (k=0;1;2;3;4;5).

в) среди вынутых будет по крайней мере 1 желтый шар.

**2.11.** Тест содержит 5 вопросов, для каждого из которых предложено выбрать 1 вариант ответа из 4-х. Сколько различных ключей можно предложить для этого теста? Какова вероятность угадать все ответы?

**2.12.** Врач должен посетить 6 больных. Сколько различных путей посещения в его распоряжении? Какова вероятность, что путь содержит последовательность обхода 2;5;3?

**2.13.** Сколько существует способов избрать общественный комитет из 3-х женщин и 2-х мужчин в АО, в котором зарегистрировано 24 женщины и 16 мужчин? Известно, что среди акционеров 10 семейных пар. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном комитете не будет семейных пар.

**2.14.** В подъезде дома установлен кодовый замок. Дверь открывается, если в определенной последовательности набрать 3 цифры из 10. Какова вероятность открыть замок при случайном наборе в течение 1-го часа, если на каждую попытку тратится 20 сек.?

**2.15.** На 10-ти карточках написаны буквы слова МАТЕМАТИКА. А) Карточки перемешивают и случайным образом выбирают 5 карточек. Какова вероятность, что из отобранных карточек можно составить слово МЕТКА? Б) Найти вероятность того же события, если выбираются 6 карточек.

**2.16.** Игральную кость бросают 1 раз. Найти вероятность того, что выпадет четное число.

**2.17.** Монета подбрасывается 2 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) хотя бы 1 раз. Б) ровно 1 раз. В) 2 раза.

**2.18.** Игральная кость подбрасывается 2 раза. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

**2.19.** В среднем из 200 выстрелов стрелок попадает в мишень 190 раз. Какова вероятность поражения цели? Сколько попаданий можно ожидать при 1000 выстрелов?

**2.20.** Партия из 10 деталей содержит 1-ну бракованную. Найти вероятность того, что при случайной выборке 5-ти деталей все 5 окажутся качественными.

**2.21.** На экзамене присутствует m студентов, для которых приготовлено n билетов ($n \geq m$), среди которых k ($k \leq m$) билетов «простые». Студенты берут по 1-му билету. Найти вероятность того, что все «простые» билеты взяты.

**2.22.** Найти вероятность угадывания в игре «Спорт - Лото 6 из 49» k (k=4;5;6) чисел.

**2.23.** В колоде 36 карт. На удачу вынимают 1 карту. Какова вероятность того, что это карта пиковой масти? Что это - туз черной масти?

**2.24.** Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами (от 1 до 40). Найти вероятность того, что на удачу взятый жетон не содержит цифры 5.

**2.25.** Сколько существует двузначных четных чисел?

**2.26**. Сколькими способами можно направить 5 автобусов на 5 разных маршрутов?

**2.27.** На 3 путевки в дом отдыха подано 8 заявлений. Сколькими способами можно распределить путевки?

**2.28.** В чемпионате встретилось 7 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых мест?

**2.29.** Сколькими способами можно рассадить 4 человека на 1-ну скамейку?

**2.30.** В списке имен содержится 900 мужских и 700 женских. Сколько всего можно составить полных имен (имя плюс отчество)?

**2.31.** Сколько разных чисел можно составить из всего набора цифр: а) 2;3;5;7 б) 3;3;2;5;2;3;5;4 в) 2;2;2;2;5;5;4;4;4;1;1;1;8

**2.32.** Решается уравнение $x^2 + ax + b = 0$, где $a$ и $b$ – случайным образом выбираются из интервала [0;1]. Найти вероятность того, что корни этого уравнения вещественны (действительны).

**2.33.** Задача о встрече. Он и она условились встретиться между 12 и 13 часами. Договорились, что пришедший первым ждет 20 минут и уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится.

**2.34.** Решить задачу о встрече, если она ждет 5 минут, а он - 30 минут.

**2.35.** Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными линиями, отстоящими друг от друга на расстояние *2a*. На плоскость бросают иглу длиной *2l* (*l*<*a*). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

**2.36.** Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3q)^n$, где $q$ случайным образом выбирается из интервала [0;1]. Найти вероятность того, что ряд сходится.

**2.37.** В интеграле $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx$ параметр $\alpha$ случайным образом выбирается из интервала [-5;3]. Найти вероятность того, что интеграл сходится.

**2.38.** В несобственном интеграле $\int\limits_1^2 \frac{\sin(x-1)^2}{(x-1)^{\alpha}}dx$ параметр $\alpha$ случайно выбирается из интервала [-5;3]. Найти вероятность того, что интеграл сходится.

**2.39.** В интеграле $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x^{\alpha}} dx$ параметр $\alpha$ случайным образом выбирается из интервала [0;5]. Найти вероятность того, что интеграл сходится.

**2.40.** На дне бочки радиуса R лежат 2 монеты радиуса r (не перекрываясь). Внутрь этой бочки стреляют не целясь. Найти вероятность попадания в одну из монет.

**2.41.** На отрезке длины L случайным образом ставится точка, которая разбивает отрезок на два отрезка. Найти вероятность того, что длина меньшего из этих отрезков не будет превышать L/3.

**2.42.** В круг вписан квадрат. Внутрь круга случайным образом бросают точку. Найти вероятность того, что эта точка не попадет (или попадет) в квадрат.

**2.43.** Случайным образом берутся 3 отрезка, длины не более 1 каждый. Найти вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник.

**2.44.** На отрезке длины L случайным образом ставятся 2 точки, которые разбивает отрезок на три отрезка. Найти вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник.

**2.45.** Дан треугольник с вершинами в точках (0;0), (0;4) и (-4;0). Внутрь треугольника случайным образом бросается точка. Найти вероятность того, что координата X точки: а)$\leq -2$; б)$< -2$; в) $= -2$; г) $> -2$; д) $< +2$; е)$> +2$.

**2.46.** В круг (в шар) радиуса R  случайным образом брошена точка. Найти вероятность того, что x (расстояние от точки до центра круга): а) $x < R/2$; б) $x \leq R/2$; в) $x = R/2$; г) $x > R/2$; д) $x < R$; е) $x < 2R$; ж) $x \geq 2R$.

## III Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

### 3.1. Условная вероятность.

До сих пор рассматривавшиеся вероятности событий следует считать безусловными. Здесь обратимся к случаю, в котором необходимо найти вероятность реализации события А при условии, что событие В уже произошло, т.е. условную вероятность. По определению

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad \left(P(B)\neq 0\right) \tag{3.1}$$

отсюда следует формула умножения вероятностей для произвольных событий

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B), \text{ или } P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \tag{3.2}$$

Из (3.1) легко получаются соотношения

$$P(\Omega/B)=1,\ P(A/A)=1,\ P(\varnothing/A)=0,\ P(\overline{A}/B)=1-P(A/B), \tag{3.3}$$

$$P(A_1+A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)-P(A_1\cdot A_2/B)$$

Из приведенных формул видно, что соотношения между условными вероятностями такие же как и в случае безусловных вероятностей.

Независимость. События А и В являются независимыми, если

$$P(A/B)=P(A) \text{ или } P(B/A)=P(B), \tag{3.4}$$

откуда с учетом (3.2) получим формулу умножения для независимых событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \tag{3.5}$$

Заметим, что для набора трех событий (например – А, В, С) из попарной независимости не следует независимость всех трех событий одновременно, т.е. в общем случае $P(ABC)\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$. Для достижения равенства на ряду с условиями попарной независимости ($P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, $P(AC)=P(A)\cdot P(C)$, $P(BC)=P(B)\cdot P(C)$) необходимо выполнение одного из условий $P(A/BC)=P(A)$, $P(B/AC)=P(B)$ или $P(C/AB)=P(C)$. В этом случае события А, В и С называются независимыми в совокупности.

Аналогично, из условия $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ не следует попарная независимость этих событий.

## 3.2. Формула полной вероятности.

Полная группа событий. Пространство $\Omega$ Всегда можно разбить на множества $H_1,H_2,...,H_m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} H_i=\Omega;\quad H_i\cdot H_j=\varnothing \text{ при } i\neq j \tag{3.6}$$

В этом случае говорят, что события $H_1,H_2,...,H_m$ образуют полную группу событий. Например, для любого $H$ выполняется $H+\overline{H}=\Omega$, $H\cdot\overline{H}=\varnothing$, значит $H$ и $\overline{H}$ образуют полную группу.

Формула полной вероятности. Если $H_i$, $(i=1,2,...,m)$ - полная группа событий, то любое событие А можно представить в виде

$$A=A\Omega=\sum_{i=1}^{m} A\cdot H_i \tag{3.7}$$

Поскольку $AH_i\cdot AH_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то по формуле сложения вероятностей для несовместных событий $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{m}P(A\cdot H_i)$. Тогда, учитывая формулу умножения (3.2) для произвольных событий, получаем формулу полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{m}P(H_i)\cdot P(A/H_i) \tag{3.8}$$

Часто говорят так: Если событие А может произойти с одним и только с одним из несовместных событий $H_i$, $(i=1,2,...,m)$, то справедлива формула разложения (3.7) и, соответственно, формула полной вероятности (3.8). Это замечание существенно в тех случаях, когда сложно записать в явном виде элементы пространства $\Omega$.

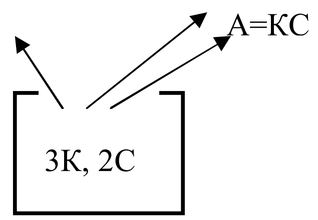
### 3.3. Формула Байеса.

Если произведен эксперимент и реализовалось событие А, т условная вероятность события $H_i$ определяется формулой Байеса:

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)}{P\left(A\right)} \tag{3.9}$$

где $P\left(A\right)$ находится по формуле полной вероятности (3.8). Обычно принята следующая терминология: События $H_i$ называются гипотезами, $P\left(H_i\right)$ - априорными (определяемыми до проведения опыта) вероятностями, $P\left(H_i/A\right)$ - апостериорными (определяемыми после проведения опыта) вероятностями.

Приведем пример:




В урне3 красных и 2 синих шара. Один шар укатился, его цвет неизвестен. Затем из урны достают 2 шара. Найти вероятность того, что вынули 1 красный и один синий шар (событие А).

Здесь гипотеза $H_1$=К={укатился красный шар}, гипотеза $H_2$=С={укатился синий шар}. В этих обозначениях применение формулы полной вероятности имеет следующий вид: $P\left(K\right)=3/5$, $P\left(C\right)=2/5$, $P\left(A/K\right)=2/3$, $P\left(A/C\right)=1/2$ и $P\left(A\right)=P\left(K\right)\cdot P\left(A/K\right)+P\left(C\right)\cdot P\left(A/C\right)$, т.е. $P\left(A\right)=3/5$.

Пусть, теперь, в результате этого эксперимента реализовалось событие А=КС. Найдем апостериорную вероятность того, что укатился красный шар. По формуле Байеса $P\left(K/A\right)=\frac{P\left(K\right)P\left(A/K\right)}{P\left(A\right)}=\frac{2}{3}$.

## Задачи

3.1. События $A_1$ и $A_2$ независимы. Доказать:

а) $A_1$ и $\overline{A_2}$ независимы; б) $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ независимы.

3.2. Используя формулу умножения вероятностей для двух событий, вывести формулу умножения вероятностей для 3-х событий:

$$P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)P\left(A_3/A_1A_2\right)$$

3.3. Используя формулу сложения вероятностей для двух событий, вывести формулу сложения вероятностей для трех событий:

$$P\left(A_1+A_2+A_3\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-P\left(A_1A_2\right)-P\left(A_1A_3\right)-P\left(A_2A_3\right)+P\left(A_1A_2A_3\right)$$

3.4. Доказать: а) $P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{A}/B\right)P\left(B\right)$;

б) $P\left(A-B\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)$;

в) $P\left(A_1+A_2+A_3\right)=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)$;

г) $P\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3\right)=1-P\left(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}\right)$

3.5. В группе студентов 25% имеют голубые глаза (событие Г), 35% имеют темные волосы (событие Т), и 10% имеют и голубые глаза и темные волосы. Найти: а) $P\left(Г\cdot Т\right)$; б) $P\left(Т+Г\right)$; в) $P\left(Т/Г\right)$; г) $P\left(Г/Т\right)$; д) $P\left(\overline{Т}+\overline{Г}\right)$;

е) $P\left(\overline{Т}\cdot\overline{Г}\right)$; ж) $P\left(Т-Г\right)$; з) $P\left(Т/\overline{Г}\right)$; и) $P\left(Т/Т+Г\right)$. Сформулировать перечисленные вопросы в виде предложений типа а) Найти вероятность того, что у случайно вызванного к доске студента будут голубые глаза и темные волосы.

3.6. В очень большой группе студентов, доля студентов с признаком А равна $P\left(A\right)$, а доля студентов с признаком В равна $P\left(B\right)$. Доля студентов, имеющих одновременно и признак А и признак В равна $P\left(AB\right)$. К доске вызывают двух случайных студентов. Найти вероятность того, что

а) хотя бы у одного из студентов есть хотя бы один из этих признаков;

б) и у первого и у второго отсутствуют хотя бы один из этих признаков;

в) и у первого и у второго студента есть признак А;

г) у одного есть хотя бы один из этих признаков, а у другого нет признака А;

д) хотя бы у одного студента отсутствует хотя бы один из признаков.

3.7. Решить задачу 3.6. в следующей формулировке: В группе $n$ студентов $m_A$ имеют признак А, $m_B$ - признак В, $m_{AB}$ - и признак А и признак В. В полученных формулах перейти к пределу, когда $n \to \infty$ при фиксированных отношениях $\frac{m_A}{n} = P(A)$, $\frac{m_B}{n} = P(B)$, $\frac{m_{AB}}{n} = P(AB)$.

3.8. Решить задачу 2.2., исходя из формулы умножения задачи 3.2.

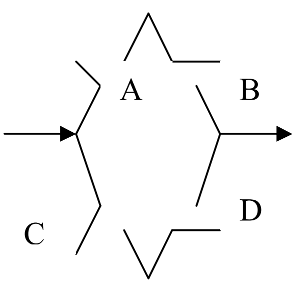
3.9. Два человека «выбрасывают» пальцы одной руки каждый (не менее 1 пальца). Если сумма пальцев четна, то выиграет 1-й игрок, а если сумма нечетна – то второй. Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

3.10. В ящике 6 красных и 4 синих шара. Вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что это будут: а) 2 красных шара; б) 2 синих; в) один красный и один синий; г) первый – красный, а второй – синий; д) вторым вынут красный.

3.11. Рассмотрим семьи, имеющие 2-х детей. Вероятность рождения мальчика равна 1/2. а) Найти вероятность того, что оба ребенка – мальчики, если старший – мальчик; б) Найти вероятность того, что оба ребенка – мальчики, если хотя бы один из детей – мальчик.

3.12. Известно, что при бросании 10 костей появилась по крайней мере одна единица. Найти вероятность того, что выпало не менее 2-х единиц.

3.13. Перепись населения (Англия) дала, в частности, следующие результаты. Если А – темноглазый отец, а В – темноглазый сын, то $P(AB) = 0{,}05$; $P(A\overline{B}) = 0{,}079$; $P(\overline{A}B) = 0{,}089$. Найти: $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$, $P(B/\overline{A})$, $P(\overline{B}/A)$, $P(B/A)$, $P(\overline{B}/\overline{A})$.




3.14. Ключи A, B, C, D работают независимо. Вероятность того, что ключ замкнут, равна Р (для каждого ключа). Найти вероятность того, что сигнал пройдет.

3.15. Рассмотрим семьи, имеющие 3-х детей. Вероятности появления мальчика или девочки одинаковы. Найти вероятность того, что

а) Все три ребенка – мальчики, если хотя бы один из детей – мальчик;

б) Все три ребенка – мальчики, если хотя бы старший или средний – мальчики;

в) Старший и младший ребенок – мальчики, если хотя бы один из детей – мальчик.

3.16. Три стрелка производят залп по мишени. Вероятности попадания в цель стрелками равны соответственно $P_1, P_2, P_3$.

а) Найти вероятность попадания в цель первым стрелком, если два стрелка попали в цель;

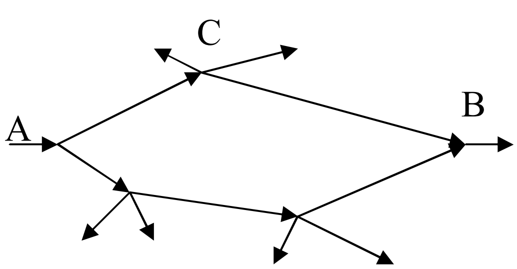
б) Найти вероятность попадания в цель первым стрелком, если цель поражена;

в) Найти вероятность попадания в цель 2-х снарядов, если цель поражена;

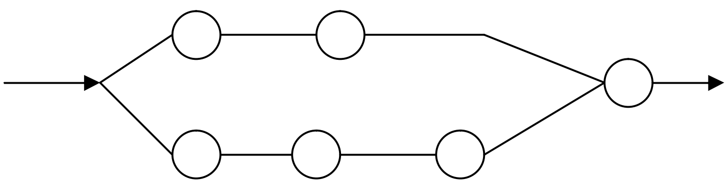
г) Найти вероятность попадания в цель по крайней мере 2-х снарядов, если цель поражена;

д) Цель поражена. Найти вероятность того, что в цель попало не более двух снарядов;

е) Цель поражена. Найти вероятность того, что в цель попало не более одного снаряда.




3.17. Путник хочет попасть из A в B. На перекрестках направление движения выбирается случайным образом. а) Найти вероятность того, что он попадет в пункт B; б) Он попал в пункт B. Найти вероятность того, что он выбрал путь ACB.



3.18. Элементы системы (кружки) работают независимо. Вероятность годности каждого элемента одинакова и равна Р. Найти вероятность того, что сигнал пройдет.

3.19. Автомобильная компания имеет три завода, которые производят соответственно 50%, 30% и 20% автомобилей. При чем соответственно 2%, 4% и 5% выпущенных этими заводами автомобилей имеют дефект двигателя. У наудачу выбранного автомобиля оказался дефект двигателя. Что вероятнее: этот автомобиль выпущен 1-ым, 2-ым или 3-им заводом?

3.20. Вы рассматриваете в рамках ремонта квартиры два проекта: по отделочным материалам и по сантехнике. По оценке экспертов, проект по отделочным материалам будет выполнен успешно с вероятностью 0,7. При условии успешного выполнения этого проекта, вероятность успешного выполнения проекта, связанного с сантехникой, равна 0,8. Однако, если проект по отделочным материалам не будет успешным, проект по сантехнике реализуется хорошо с вероятностью 0,3. Найти: а) вероятность успешного выполнения обоих проектов; б) вероятность успешного выполнения проекта по отделочным материалам, если успешно выполнен проект по сантехнике.

3.21. В одном ящике находятся 5 красных и 3 синих шара, а в другом ящике – 2 красных и 2 синих. Из первого ящика во второй перекладывают 1 шар. Потом из второго ящика вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что переложили красный шар, если: а) из второго ящика вынуты два красных шара; б) вынуты два синих шара; в) вынуты красный и синий шары.

3.22. В одном ящике находятся 2 красных и 2 синих шара, а в другом ящике – 2 красный и 1 синий. Из первого ящика во второй перекладывают 2 шара. Потом из второго ящика вынимают 1 шар. Он оказался красным. Найти вероятность того, что переложили: а) два красных шара; б) два синих; в) красный и синий.

3.23. В ящике N шаров, из которых M белых, а остальные – черные. Один шар укатился. После этого вынимается 1 шар: он оказался белым. Найти вероятность того, что укатился белый шар.

3.24. Рассмотрим семьи, имеющие 2-х детей. Найти вероятность того, что: а) Старший ребенок – мальчик, если хотя бы один из детей – мальчик; б) оба ребенка – мальчики, если хотя бы один из детей – мальчик. Вероятность рождения мальчика полагается равной Р.

3.25. В двух коробках 8 и 10 телефонов соответственно. В первой коробке 1 телефон имеет дефекты, а во второй 2 телефона имеют дефекты. Все телефоны перекладывают в одну коробку и перемешивают. Затем наугад выбирают один телефон, который оказался с дефектом. Найти вероятность того, что этот телефон ранее лежал в первой коробке.

3.26. Для типичных клиентов магазина вероятность покупки молочных продуктов составляет 0,3, вероятность покупки хлеба составляет 0,86, а условная вероятность покупки хлеба при условии покупки молочных продуктов равна 0,75.

а) Являются ли события покупка хлеба и покупка молочных продуктов несовместными? Независимыми?

Найти вероятности событий:

б) Покупка и хлеба и молочных продуктов.

в) Покупка молочных продуктов при условии покупки хлеба.

г) Покупается хлеб, но не покупаются молочные продукты.

д) Покупатель не берет ни хлеба, ни молочных продуктов.

е) Не покупается хотя бы один из этих продуктов.

3.27. Сотрудник фирмы, отвечающий на телефонные звонки, отвечает на множество различных вопросов. В 75% случаев лишь запрашивается информация, 15% звонков связаны с реальными заказами, в 10% обращений запрашивается информация и делается заказ. Найти следующие вероятности:

а) Некоторый звонок приводит к получению заказа, при условии, что в этом же звонке запрашивается информация.

б) Звонок не связан с получением информации, при условии, что делается заказ.

в) Не запрашивается информация и не делается заказ.

г) Делается заказ, но не запрашивается информация.

д) Не запрашивается информация, при условии, что не делается заказ.

3.28. Магазин заинтересован в углублении знаний о модели поведения покупателей. Магазин посещают две категории покупателей: местные и внешние (из других регионов). Вероятность того, что посещение магазина местным покупателем завершится покупкой, равна 0,65. Среди посетивших магазин в течении прошлого месяца 80% составили местные жители. Среди посетивших магазин в прошлом месяце 40% ничего не купили.

а) Найти вероятность совершения покупки посетителем, если он внешний.

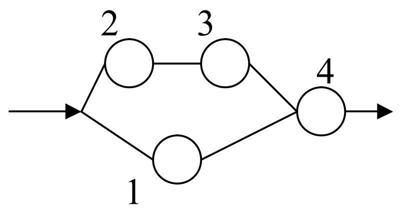
б) Какой процент от общего числа посетителей составляют местные покупатели не совершившие покупок за прошлый месяц.

в) Найти вероятность того, что покупатель - внешний, если он не совершил покупку.

3.29. Фирма рассматривает вопрос о выпуске нового товара. При обсуждении стратегии сделан вывод о том, что маркетинговое исследование для нового продукта будет удачным с вероятностью 0,75. Вероятность успешного выпуска товара на рынок оценена в 0,6. Вероятность успешного выпуска товара при условии удачного маркетингового исследования оценивается в 0,75. Найти вероятность того, что:

а) Маркетинговое исследование удачно и выпуск товара на рынок оказался успешным.

б) Маркетинговое исследование удачно, если выпуск товара был успешным.




3.30. Элементы схемы работают независимо. Вероятность годности каждого одинакова и равна p

а) Найти вероятность того, что сигнал пройдет.

б) Сигнал не прошел. Найти вероятность того, что 1, 2, 3 элементы годны к работе, а 4-й – негоден.

в) Сигнал не прошел. Найти вероятность того, что элементы 1 и 2 годны, а 3 и 4 – негодны.

3.31. В схеме к задаче 3.30. вероятность прохождения сигнала равна 5/16. Найти вероятность годности каждого элемента.

3.32. Подбрасываются 2 монеты. При этом рассматриваются 4 события: А={герб выпал на первой монете}; В={выпал хотя бы один герб}; С={выпала хотя бы одна решка}; Д={герб выпал ровно один раз}. Определить попарную зависимость событий (А и С); (А и Д); (В и С); (В и Д).

3.33. Подбрасываются 2 монеты. При этом рассматриваются 3 события: А={герб выпал на первой монете}; В={герб выпал на второй монете}; С={выпал только один герб}. Определить попарную зависимость этих событий, определить совместную зависимость всех этих событий.

3.34. В ящике 5 деталей, среди которых 2 бракованных. Найти вероятность того, что среди 3-х вынутых не более 1-й с браком.

3.35. 2-ва танка стреляют по 1-й мишени. Вероятность попадания 1-го =0,3, а 2-го =0,4. Найти вероятность того, что а) оба танка попадут; б) попадет хотя - бы один танк; в) произойдет хотя бы одно попадание, если 1-й танк выстрелит 3 раза, а 2-й – 5 раз.

3.36. В ящике лежит n пронумерованных шаров. Из ящика вынимают по 1-му шару без возвращения. Найти вероятность того, что при k выниманиях номер шара совпадет с номером вынимания.

3.37. В 1-м ящике лежит 5 белых, 11 черных и 8 красных шаров. Во 2-м – 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из каждого ящика берут по 1 шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

3.38. 2-е игроков по - очереди подбрасывают одну монету. Выиграет тот, у кого первого выпадет герб. Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

3.39. 2-е стрелков по - очереди стреляют в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле 1-го стрелка =0,2, а 2-го =0,3. Найти вероятность того, что 1-й стрелок выстрелит больше раз, чем 2-й.

3.40. Стрелок стреляет по 1-му разу в 2-ве мишени. Вероятность поразить 1-ю мишень =2/3. Вероятность поразить обе мишени =1/2. Найти вероятность поразить 2-ю мишень.
3.41. В ящике находится 2 белых, 3 красных и 5 синих шаров. Из ящика достается 1 шар. Найти вероятность того, что шар –цветной. (не белый).
3.42. В ящике находится 3 белых, 2 красных и 5 черных шаров. Из ящика последовательно вынимают по 1 шару без возврата. Найти вероятность того, что красный шар впервые будет вынут при 3-ем вынимании.
3.43. Карточки с буквами А;А;Е;К;Р;Т перемешаны. Найти вероятность того, что при последовательном извлечении карточек сложится слово РАКЕТА.
3.44. Одновременно бросают 4-ре игральные кости. Найти вероятность получить хотя бы 1-ну единицу.
3.45. Из колоды в 52 карты берут 4 карты. Найти вероятность получить хотя бы один туз (ровно один туз).
3.46. Сколько игральных костей нужно бросить, чтоб вероятность появления хотя бы 1-й четверки составила 0,5?
3.47. Сколько раз нужно бросить монету, чтоб хотя бы 1 раз выпал герб с вероятностью 0,8?
3.49. Сколько раз нужно бросить кубик (у которого на 2-х гранях стоит число 5, а на остальных число 7), чтоб хотя бы 1 раз выпала «5» с вероятностью 0,95?
3.50. В ящике находится 8 белых и 4 черных шаров. Из ящика по-очереди вынимают 3 шара (вариант I – с возвратом; вариант II - без возврата). Найти вероятность того, что среди шаров: а) 2 белых; б) 1 белый; в) нет белых.
3.51. В ящике находится 10 белых и 5 черных шаров. Из ящика по-очереди вынимают 2 шара (вариант I – с возвратом; вариант II - без возврата). Найти вероятность того, что среди шаров: а) 2 белых; б) 1 белый; в) нет белых.
3.52. 7 человек (пришедшие в один дом в гости) имеют калоши одинакового размера. Уходя из гостей, каждый из них может различать левую и правую калоши, но не могут отличить свои от чужих. Найти вероятность того, что: А)

каждый из них наденет свои калоши; Б) каждый из них оденет калоши, относящиеся к одной паре (не обязательно свои).

3.53. Ответить на вопросы задачи 3.53. при условии, что уходя из гостей люди не могут отличить правую калошу от левой.

3.54. Для производственно – торговой компании в течении текущего месяца возможно заключение нового контракта (событие А) с вероятностью 0,6, а так же исполнение обязательств по ранее заключенному контракту (событие В) с вероятностью 0,7.

1) Текущий месяц считается успешным, если удается заключить новый контракт, или выполнить предыдущий, и вероятность успешности месяца равна 0,9. Определить совместность и зависимость событий А и В.

2) Текущий месяц считается сверх успешным, если удается и заключить новый контракт и выполнить предыдущий. Найти вероятность сверх - успеха, если а) события А и В независимы; б) события А и В несовместны.

3) Текущий месяц считается неуспешным, если не удается ни заключить новый контракт, ни выполнить предыдущий. Найти вероятность неуспеха, если а) события А и В независимы; б) события А и В несовместны.