4. Дискретные случайные величины (СВ).

4.1. Одномерные случайные величины.

Пусть у нас есть пространство элементарных событий $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ... \omega_n)$, на котором определена вероятностная мера, т.е. заданы вероятности $p(\omega_i)$ реализации элементарных событий. Поставим в соответствие однозначным образом каждому элементарному событию ω пространства Ω вещественное число $x(\omega)$. Тем самым определяем дискретную случайную величину $X = (x_1, x_2, ... x_k)$, где $x_1, x_2, ... x_k$ - возможные значения СВ. В общем случае $k \le n$, поскольку нескольким разным ω может соответствовать одно и то же значение СВ x, т.е. отображение $\Omega \to X$ не является взаимно однозначным. Возникает важный вопрос: как найти вероятности $P_x(x_i)$ реализаций возможных значений x? Для ответа на этот вопрос введем события

$$A_i = \{\omega : x(\omega) = x_i\}, \ i = 1, 2, ... k \tag{4.1}$$

Очевидно, что $A_1 + A_2 + ... + A_k = \Omega$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ (несовместны) при $i \ne j$, т.е. совокупность событий A_i образует полную группу. Поскольку значение x_i реализуется тогда и только тогда, когда происходит событие A_i, имеем

$$P_x(x_i) = P(A_i) = \sum_{\omega : x(\omega) = x_i} P(\omega_i) \tag{4.2}$$

Совокупность чисел $P_x(x_i)$ - распределение вероятностей для СВ *X*. Это распределение нормировано на 1:

$$\sum_{i=1}^{k} P_x(x_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = P(\Omega) = 1 \tag{4.3}$$

В (4.3) использована формула сложения вероятностей для несовместных событий.

Результат построения СВ и закона ее распределения оформляется в виде таблицы:

$$\begin{aligned} X &= (x_1, \quad x_2, ... \quad x_k) \\ P_x(x) &= (P_x(x_1), P_x(x_2), ... P_x(x_k)) \end{aligned}$$

Функция распределения. Наряду с заданием вероятностей $P(x_i),(i=1,2,...,k)$, часто используется описание вероятностных свойств СВ X с помощью функции распределения $F_x(x)$. По определению (справедливому как в дискретном, так и в непрерывном случае)

$$F_x(x) = P(X < x) \tag{4.4}$$

т.е. $F_x(x)$ - вероятность того, что СВ X примет значение меньшее, чем x.

Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \le F_x(x) \le 1$
2. $F_x(-\infty) = 0, \quad F_x(+\infty) = 1$
3. $F_x(x)$ непрерывна слева (4.5)
4. $F_x(x)$ неубывающая функция своего аргумента
5. $P(a \le x < b) = F_x(b) - F_x(a)$

Любая функция, удовлетворяющая свойствам 1-4 является функцией распределения какой-либо случайной величины. Если все возможные значения X принадлежат конечному интервалу $[x_{\min}; x_{\max}]$, то $F_x(x) = 0$ при $x \le x_{\min}$ и $F_x(x) = 1$ при $x > x_{\max}$.

В дискретном случае $F_x(x) = \sum\limits_{k: x_k < x} P(x_k)$ и представляет собой ступенчатую функцию со скачкам в точках x_k. Величина скачков равна $P(x_k)$.

Если известна функция распределения СВ, то возможные значения X совпадают с точками разрыва x_k и

$$P_x(x_k) = F_x(x_{k+1}) - F_x(x_k) \tag{4.6}$$

Для иллюстрации приведем пример. Подбрасываются две различные монеты. Здесь введены обозначения: X – число выпадений решки при проведении эксперимента. Y – факт появления решки.

$\Omega = (ГГ, ГР, РГ, РР)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

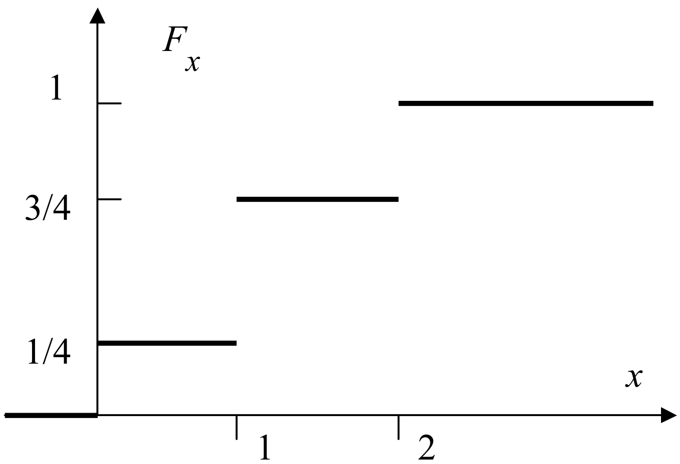
Рассмотрим сначала СВ *X*. $A_1 = \{\omega : X(\omega) = x_1\} \quad (ГГ)$;

$A_2 = \{\omega : X(\omega) = x_2\} \quad (ГР, РГ)$; $A_3 = \{\omega : X(\omega) = x_3\} \quad (РР)$. Очевидно:

$A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$; $A_1A_2 = \varnothing$; $A_1A_3 = \varnothing$; $A_2A_3 = \varnothing$, т.е. эти события образуют полную группу. $P_x(x_1) = P(A_1) = \frac{1}{4}$; $P_x(x_2) = P(A_2) = \frac{1}{2}$; $P_x(x_3) = P(A_3) = \frac{1}{4}$.

Таким образом получим $\begin{matrix} X = (& 0, & 1, & 2) \\ P_x(x) = \Big(& \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}\Big) \end{matrix}$, при чем

$P_x(x_1) + P_x(x_2) + P_x(x_3) = 1$, т.е. условие нормировки выполнено.



Построим функцию распределения $F_x(x)$.непрерывность слева дает $F_x(0) = 0, F_x(1) = 1/4, F_x(2) = 3/4$. Если бы была изначально задана функция распределения, изображенная на рисунке, то можно определить возможные значения СВ *X* по точкам разрыва: $X = (\ 0,\ 1,\ 2)$, а вероятности этих значений по формуле (4.6):

$P_x(x) = \left(\ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Аналогично, для СВ *Y*: $B_1 = \{\omega : Y(\omega) = y_1\} \quad (ГГ)$;

$B_2 = \{\omega : Y(\omega) = y_2\} \quad (ГР, РГ, РР)$. $B_1 + B_2 = \Omega$; $B_1B_2 = \varnothing$, т.е. эти события образуют полную группу.

$P_y(y_1) = P(B_1) = \frac{1}{4}$; $P_y(y_2) = P(B_2) = \frac{3}{4}$. Так что $\begin{matrix} Y = (\;0, & 1) \\ P_y(y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{matrix}$.

4.2. Двумерные случайные величины.

На пространстве $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_n)$ можно определить по отдельности две случайные величины *X* и *Y*:

$$X = (x_1, x_2, ...x_k); A_i = \{\omega : x(\omega) = x_i\}, \quad P_x(x_i) = P(A_i)$$

$$Y = (y_1, y_2, ...y_m); B_j = \{\omega : y(\omega) = y_j\}, \quad P_y(y_j) = P(B_j)$$

Однако, можно каждому ω поставить в соответствие пару чисел $x(\omega), y(\omega)$. Множество всех возможных пар $\{x_i, y_j\}$ образуют возможные значения двумерной случайной величины *X,Y*. Значение x_i, y_j двумерной случайной величины реализуется тогда, когда одновременно происходят и событие A_i и событие B_j, т.е. происходит событие $A_i B_j = \{\omega : x(\omega) = x_i; y(\omega) = y_j\}$. По этому совместное распределение вероятностей двумерной СВ можно найти так:

$$\begin{aligned} &P_{xy}(x_i, y_j) = P(A_i B_j) \\ &\sum_{i,j} P_{xy}(x_i, y_j) = 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Часто изначально известно двумерное распределение $P_{xy}(x_i, y_j)$, а требуется найти одномерные распределения $P_x(x_i)$ и $P_y(y_j)$. Эти распределения находятся по следующим формулам:

$$P_x(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P_{xy}(x_i, y_j); \quad P_y(y_j) = \sum_{i=1}^{k} P_{xy}(x_i, y_j) \tag{4.8}$$

Действительно, $P_x(x_i)=P(A_i)=P\left(\sum_j A_i \cdot B_j\right)=\sum_j P\left(A_i \cdot B_j\right)=\sum_j P_{\overline{xy}}(x_i,y_j)$. Здесь использовано: $\sum_j B_j=\Omega$; события $A_i B_j$ при фиксированном *i* и различных *j* несовместны; использована формула сложения несовместных событий.

<u>Условное распределение вероятностей.</u>

$$P\left(x_i/y_j\right)=\frac{P_{xy}\left(x_i y_j\right)}{P_y\left(y_j\right)};\ \sum_{i=1}^{k} P\left(x_i/y_j\right)=1 \qquad (4.9)$$

<u>Независимость.</u>

Если $P\left(x_i/y_j\right)=P_x\left(x_i\right)\cdot P_y\left(y_j\right)$ при всех *i* и *j,* то случайные величины *X* и *Y* – независимы.

<u>Двумерная функция распределения.</u>

$F_{xy}(x,y)=P\left(X<x,Y<y\right)$

$F_{xy}(x,y)$ и в дискретном и в непрерывном случае удовлетворяет свойствам:

1. $0\le F_{xy}(x,y)\le 1$
2. $F_{xy}(-\infty,y)=0,\ F_{xy}(x,-\infty)=0$
3. $F_{xy}(+\infty,y)=F_y(y),\ F_{xy}(x,+\infty)=F_x(x)$ (4.10)
4. Функция распределения непрерывна слева по каждому аргументу.
5. Функция распределения – неубывающая функция по каждому аргументу.
6. $P\left(a_1\le X<b_1, a_2\le Y<b_2\right)=F_{xy}(b_1,b_2)+F_{xy}(a_1,a_2)-F_{xy}(b_1,a_2)-F_{xy}(a_1,b_2)$

В дискретном случае $F_{xy}(x,y)=\sum_{\substack{i:x_i<x\\ j:y_j<y}} P_{xy}\left(x_i,y_j\right)$ (4.11)

По этому $P_{xy}\left(x_i,y_j\right)=F_{xy}(x_{i+1},y_{j+1})+F_{xy}(x_i,y_j)-F_{xy}(x_{i+1},y_j)-F_{xy}(x_i,y_{j+1})$

В п. 4.1 примере с монетами рассмотрены по отдельности случайные величины *X* и *Y*. Рассмотрим теперь двумерную величину *X,Y*.

$P_{xy}(x_1,y_1)=P(A_1,B_1)=P(ГГ)=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $P_{xy}(x_1,y_2)=P(A_1,B_2)=P(\varnothing)=0$

$P_{xy}(x_2,y_1)=P(A_2,B_1)=P(\varnothing)=0$ $\qquad$ $P_{xy}(x_2,y_2)=P(A_2,B_2)=P(ГР,РГ)=\frac{1}{2}$

$P_{xy}(x_3,y_1)=P(A_3,B_1)=P(\varnothing)=0$ $\qquad$ $P_{xy}(x_3,y_2)=P(A_3,B_2)=P(РР)=\frac{1}{4}$

Эти вероятности оформляются в виде таблицы:

Y \ X	0	1	2	$P_y(y)$
0	1/4	0	0	1/4
1	0	1/2	1/4	3/4
$P_x(x)$	1/4	1/2	1/4	

Последний столбец дает распределение для СВ *Y*. Последняя строка – распределение для СВ *X* (в соответствии с формулами (4.8)). Случайные величины *X* и *Y* в этом примере зависимы, т.к., например, $P_{xy}(1,0)=0$, а $P_x(1)\cdot P_y(0)=\frac{1}{8}$, т.е. $P_{xy}(1,0)\neq P_x(1)\cdot P_y(0)$.

Для этого же случая построим двумерную функцию распределения, используя определение (4.11). При отрицательных *X* или *Y,* либо и *X* и *Y,* $F_{xy}(x,y)=0$.

y			
1	1/4	3/4	1
	1/4	1/4	1/4
0	1	2	x

Верхняя строка - $F_x(x)$, последний столбец - $F_y(y)$ в соответствии со свойством 3 из (4.10).

Второе соотношение в (4.11) позволяет решить обратную задачу и найти $P_{xy}(x_i,y_j)$.

Характеристики случайных величин.

<u>Математическое ожидание.</u>

Пусть
$$X=\begin{pmatrix} x_1, & x_2,\ldots & x_k \end{pmatrix}$$
$$P_x(x)=\left(P_x(x_1),P_x(x_2),\ldots P_x(x_k)\right),$$

тогда $MX = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P_x\left(x_i\right)$ - математическое ожидание, или среднее значение случайной величины *X*.

Свойства математического ожидания:

1. $M\varphi\left(x\right) = \sum_{i=1}^{k} \varphi\left(x_i\right) \cdot P_x\left(x_i\right)$, где $\varphi\left(x\right)$ - детерминированная функция *x*.

2. $MC = C,\ \ MC\varphi\left(x\right) = C \cdot M\varphi\left(x\right)$, где *C* – константа.

3. $M\left(X+Y\right) = MX + MY,\ \ M\left(\varphi\left(x\right) + \psi\left(Y\right)\right) = M\varphi\left(x\right) + M\psi\left(Y\right)$ (4.12)

4. $M\left(X \cdot Y\right) = MX \cdot MY$, если *X* и *Y* – независимы.

5. $M\left|X \cdot Y\right| \le \sqrt{MX^2} \cdot \sqrt{MY^2}$ - неравенство Буняковского.

Здесь, например, в 3 $M\left(X+Y\right) = \sum_{i,j}\left(x_i + y_j\right) \cdot P_{xy}\left(x_i, y_j\right)$

<u>Дисперсия, моменты</u>

1. $\partial_k = MX^k$ - начальный момент *k* – го порядка.

2. $\mu_k = M\left(x - MX\right)^k$ - центральный момент *k* – го порядка.

3. $DX = M\left(x - MX\right)^2 = \mu_2$ - дисперсия

$\sigma = \sqrt{DX}$ - среднеквадратичное или стандартное отклонение. Величина σ характеризует разброс возможных реализаций *X* относительно среднего значения. Обычно $P\left(MX - \sigma < x < MX + \sigma\right) > 0.6$.

Свойства дисперсии:

1. $DX \ge 0;\ DC = 0;\ \ D\left(Cx + b\right) = C^2 DX$

2. $DX = MX^2 - \left(MX\right)^2$ (4.13)

3. Если $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ и X_i - попарно независимы, то $DX = \sum_{i=1}^{n} DX_i$ - дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий.

Ковариация, коэффициент корреляции

$\mathrm{cov}(X,Y)=M\left(X-MX\right)\left(Y-MY\right)$ $=MXY-MX\cdot MY$ - ковариация случайных величин X и Y – мера статистической зависимости X и Y. Если X и Y – независимы, то $\mathrm{cov}(X,Y)=0$. Если $\mathrm{cov}(X,Y)=0$, то X и Y называются некоррелированными, но при этом могут быть зависимыми.

Коэффициент корреляции: $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$; $\left|\rho(X,Y)\right|\le 1$.

Ковариационная матрица.

Для случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ вводят ковариационную матрицу $D_{ij}=\mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)$, $D_{ii}=\mathrm{cov}\left(X_i, X_i\right)=DX_i$. Эта матрица положительно определена, т.е. все ее главные миноры – положительны.

Если проводится линейное преобразование $X_i{}'=\sum_{k=1}^{n}C_{ik}X_k+b_i$, $(i=1,2,...,l)$, то $D_{ij}{}'=\mathrm{cov}\left(X_i{}', X_j{}'\right)=\left(C\cdot D\cdot C^T\right)_{ij}$, где C^T - матрица, транспонированная к матрице перехода $C=\left\{C_{ij}\right\}$.

Коэффициент асимметрии.

$\beta=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$. Для симметричных относительно MX распределений $\beta=0$; для скошенных влево - $\beta>0$; для скошенных вправо - $\beta<0$.

Коэффициент эксцесса.

$\gamma=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}-3$. Характеризует «островершинность» распределения по отношению к нормальному (см. следующий параграф). Для нормального распределения $\gamma=0$; для более островершинного - $\gamma>0$; для менее островершинного - $\gamma<0$.

Мода – наиболее вероятное значение X. Мод может быть несколько.

Медиана – Середина распределения. Это такое значение X, которое делит множество возможных значений X на два равновероятных подмножества.

4.4. Классические дискретные распределения.

Схема Бернулли. Последовательность испытаний называется схемой Бернулли, если: а) испытания независимы, б) при каждом испытании происходит либо событие A, либо $\overline{A}$, в) вероятность наступления события A не зависит о номера испытания и равна p $\left(P(A)=p; P\left(\overline{A}\right)=1-p=q\right)$. В рамках этой схемы возникает несколько распределений

Распределение Бернулли.

Для единичного испытания введем случайную величину

$$X=\begin{cases}1, \text{ если произойдет событие } A\\ 0, \text{ если произойдет событие } \overline{A}\end{cases}, \text{ тогда } \begin{matrix}P(x)=p^x q^{1-x}\\ MX=p;\ DX=pq\end{matrix} \tag{4.14}$$

Биномиальное распределение.

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}p^k q^{n-k}$ - вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет ровно k раз.

$$MK=np;\ DK=npq;\ \beta=\frac{q-p}{\sqrt{npq}};\ \gamma=\frac{1-6pq}{npq} \tag{4.15}$$

Геометрическое распределение.

$P_n=pq^{n-1},\ \ (n=1,2,...)$ - вероятность того, что в первый раз событие A произойдет при n – ном испытании.

$$Mn=\frac{1}{n};\ Dn=\frac{q}{n^2} \tag{4.16}$$

Полиномиальное распределение.

Если при единичном испытании может произойти одно из событий $A_{1,2,...,l}$ с соответствующими вероятностями $p_{1,2,...,l}$, то такая схема испытаний называется расширенной схемой Бернулли. При этом $\sum_{i=1}^{l}A_i=\Omega;\ \sum_{i=1}^{l}p_i=1.$

$$P_n(k_1,k_2,...,k_l)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!}\prod_{i=1}^{l} p_i^{k_i} \quad \left(\sum_{i=1}^{l} k_i = n\right) - \tag{4.17}$$

вероятность того, что при *n* испытаниях событие A_1 произойдет k_1 раз; событие A_2 - k_2 раз; … ; событие A_l произойдет k_l раз. Каждая из случайных величин k_i имеет обычное биномиальное распределение с параметром p_i.

$Mk_i = np_i;\ Dk_i = np_i(1-p_i);\ \mathrm{cov}(k_i,k_j) = -np_ip_j \quad (i \neq j)$

<u>Распределение Пуассона</u>.

$$p(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \ (k=0,1,...);\ Mk=\lambda;\ Dk=\lambda;\ \beta=\frac{1}{\sqrt{\lambda}};\ \gamma=\frac{1}{\lambda} \tag{4.18}$$

<u>Гипергеометрическое распределение</u>.

Реализация: в ящике всего *N* деталей, из которых *M* бракованных. Вынимают *n* деталей. Вероятность того, что среди вынутых деталей *m* окажутся бракованными.

$$P_{N,M,n}(m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};\quad Mm=\frac{M}{N}n;\quad Dm=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \tag{4.19}$$

Задачи:

4.1. Пусть *X*=(1;2;3) – объем продаж товара А в промтоварном магазине, *Y*=(0;1) – объем продаж товара В. Совместная вероятность $P_{xy}(x,y)$ приведена в таблице. а) Найти $P_x(x)$, $P_y(y)$, $M(x)$, $M(y)$, $D(x)$, $D(y)$, $\mathrm{cov}(x,y)$;

y\x	*1*	*2*	*3*
0	**2/8**	**0**	**0**
1	**1/8**	**2/8**	**3/8**

б) Построить графики функций распределения $F_x(x)$, $F_y(y)$;

в) Найти законы распределения для случайных величин $z_1 = xy$, $z_2 = x + y$, $z_3 = x - y$;

г) Найти условные средние $M(X/Y=1)$, $M(X/Y=0)$;

д) Найти ковариационную матрицу случайных величин $X' = 2X + 3Y - 1$ и $Y' = 2X - 3Y$;

е) Найти двумерную функцию распределения $F_{xy}(x, y)$, представить ее в виде таблицы в плоскости (x, y).

y				
4	0	0,3	0,7	1
3	0	0,1	0,5	0,7
2	0	0,1	0,4	0,6
1	0	0	0	0
	1	2	3	4 x

4.2. Двумерная функция распределения $F_{xy}(x, y)$ дискретных случайных величин приведена в таблице. Ответить на вопросы, сформулированные в задаче 4.1.

4.3. Подбрасываются 2-ве игральные кости. Введем случайные величины: X={x=1, если произведение выпавших чисел четное, и x=0 в противном случае}, Y={y=1, если сумма очков больше 10, y=0 в противном случае}. Найти $P_{xy}(x, y)$ и ответить на вопросы, сформулированные в задаче 4.1.

4.4. Показать, что приведенные таблицы соответствуют друг другу. Ответить на вопросы задачи 4.1.

$P_{xy}(x_i, y_j)$

y\x	*1*	*2*	*3*
0	**0.1**	**0.2**	**0.3**
1	**0.2**	**0.1**	**0.1**

$\Leftrightarrow F_{xy}(x, y)$:

y				
	0	0.3	0.6	1
2	0	0.1	0.3	0.6
1	0	0	0	0
	0	1	2	x

4.5. Ответить на вопросы задачи 4.4.

$P_{xy}\left(x_i, y_j\right)$

y\x	*0*	*1*	*2*
1	**0.2**	**0.1**	**0.1**
2	**0.1**	**0**	**0.1**
3	**0.1**	**0**	**0.3**

$\Leftrightarrow F_{xy}\left(x, y\right):$

y				
	0	0.4	0.5	1
3	0	0.3	0.4	0.6
2	0	0.2	0.3	0.4
1	0	0	0	0
	0	1	2	x

y\x	*1*	*2*
1	**0.07**	**0.07**
2	**0.21**	**0.09**
3	**0.42**	**0.18**

4.6. Найти а) $\operatorname{cov}\left(x, y\right)$, $F_x\left(x\right)$, $F_y\left(y\right)$, $F_{xy}\left(x, y\right)$. Проверить, что в данном случае $F_{xy}\left(x, y\right) = F_x\left(x\right)\cdot F_y\left(y\right)$

4.7. $F_x\left(x\right) = 0$ при $x \le 0$; $F_x\left(x\right) = \frac{27}{64}$ при $0 < x \le 1$; $F_x\left(x\right) = \frac{54}{64}$ при $1 < x \le 2$; $F_x\left(x\right) = \frac{63}{64}$ при $2 < x \le 3$ и $F_x\left(x\right) = 1$ при $x > 3$. Найти MX, DX, $P\left(1 \le x < 4\right)$.

4.8. $F_x\left(x\right) = 0$ при $x \le 1$; $F_x\left(x\right) = 1 - q^k$ при $k - 1 < x \le k$ $\left(k = 2,3,...\right)$. Найти P_k, MX, DX, $P\left(3 \le x < 5\right)$.

4.9. $F_x\left(x\right) = 0$ при $x \le 1$; $F_x\left(x\right) = \frac{6}{13}$ при $1 < x \le 2$; $F_x\left(x\right) = \frac{10}{13}$ при $2 < x \le 3$; и $F_x\left(x\right) = 1$ при $x > 3$. Найти MX, DX, $P\left(2 \le x < 10\right)$, $P\left(2 < x < 10\right)$.

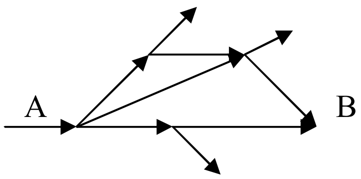
4.10. Случайная величина n (n=1;2;…) имеет геометрическое распределение. Найти $M\left(n\right)$, $D\left(n\right)$.

4.11. Для биномиального распределения найти коэффициент асимметрии β, $M\left(k\right)$, $D\left(k\right)$, эксцесс γ.

4.12. Для распределения Пуассона найти коэффициент асимметрии β, $M\left(k\right)$, $D\left(k\right)$, μ_3, эксцесс γ.

4.13. Показать, что если случайные величины k_1 и k_2 независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, то случайная величина $k = k_1 + k_2$ то же имеет распределение Пуассона со средним значением $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

4.14. В двух ящиках находится по 2 красных и 2 синих шара. Из 1-го ящика во 2-й перекладывают 1 шар. Потом из 2-го вынимают 2 шара. Затем система шаров возвращается в исходное состояние. Далее указанная процедура повторяется. а) Найти вероятность того, что из 2-го ящика будут вынуты 1 красный и 1 синий шар (событие А) с 3-ей попытки. Чему равно ожидаемое (среднее) число попыток для реализации события А? б) Указанная процедура повторяется 5 раз. Найти вероятность того, что событие А произойдет не менее 2-х, но не более 4-х раз. Сколько раз в среднем произойдет событие А? в) Найти вероятность того, что при 6-ти повторах процедуры, событие А произойдет в 3-ей, 5-ой и 6-ой попытках.



4.15. Путник идет из А в В выбирая путь на перекрестках случайным образом. Если он не попадет в В, то возвращается назад, забывая путь, которым он шел. Найти вероятность того, что он попадет в В с 4-ой попытки. Сколько (в среднем) попыток ему нужно сделать, чтобы попасть в В?

4.16. По пути задачи 4.10. независимо друг от друга идут 10 паломников (или 1 паломник 10 раз). Найти вероятность того, что число дошедших меньше 8, но больше 5. Сколько в среднем паломников дойдет до В?

4.17. В одном ящике находится 1 красный и 1 синий шар, а во втором ящике – 2 красных шара. Из первого во второй переложили 1 шар. За тем из второго вынимают 2 шара. Потом система возвращается в исходное состояние. Эта процедура повторяется 5 раз. Найти вероятность того, что 2 красных шара будут вынуты 4 раза.

4.18. Из колоды в 36 карт вынимают 3 карты и возвращают их в колоду. Найти вероятность того, что король, дама и валет будут вынуты с 4-ой попытки.

4.19. В одном ящике находится 2 красных и 1 синий шар, а во втором ящике – 1 синий шар. Из первого во второй переложили 2 шара. За тем из второго вынимают 1 шар. Потом система возвращается в исходное состояние. Эта процедура повторяется 4 раза. Найти вероятность того, что синий шар из второго ящика будет вынут 2 раза.

4.20. Подбрасываются 4 монеты. Найти вероятность ого, что 3 решки и герб выпадут при 3-ей попытке.

4.21. В ящике находится 3 белых и 1 синий шар. Один шар укатился. За тем из ящика вынимают 2 шара. Потом система возвращается в исходное состояние. Найти вероятность того, что 2 белых шара будут вынуты с 4-ой попытки.

4.22. Для ребенка 3-х лет впервые пошедшего в детский сад вероятность заразиться новой болезнью в течение одной недели равна 0,1. Найти вероятность того, что в течении месяца ребенок заболеет. Найти вероятность заражения за неделю, если вероятность болезни за месяц составит 0,4.

4.23. В билете содержится 10 задач, в каждой из которых возможна ошибка с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что оценка будет снижена. Какой должна быть вероятность ошибки в одной задаче, чтоб вероятность снижения оценки составила 0,2?

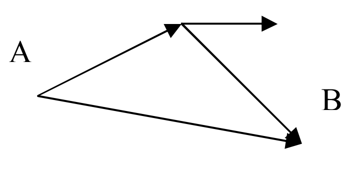
4.24. В каждой из 10 коробок находится по 20 еженедельных газет и по одной рекламной газете. Почтальон кладет в почтовый ящик не выбирая по одной газете из каждой коробки. Найти вероятность того, что подписчик получит рекламу. Сколько газет должно быть в каждой коробке, чтоб вероятность получения рекламы составила 0,9?

4.25. На пасху разносчик выкладывает в корзинку потребителя не глядя по одному крашенному яйцу из 8 коробок, в каждой из которых находится 80% красных и 20% синих яиц. Найти вероятность того, что потребитель получит синее яйцо. Каким должно быть распределение яиц у разносчика, чтоб вероятность получения синего потребителем составила 0,95?

4.26. На каждой из 400 страниц книги расположено 45 строк, на каждой из которых возможна опечатка с вероятностью 0,01. Найти вероятность того, что на одной странице будет опечатка. Какой должна быть вероятность одной опечатки, чтоб вероятность порчи страницы составляла 0,05?

4.27. Вероятность опоздания на работу для каждого дня составляет 0,1. Найти вероятность того, что в течении ближайшей недели не обойдется без опозданий. Какой должна быть вероятность одного опоздания, чтоб вероятность опоздания за неделю составила 0,5?

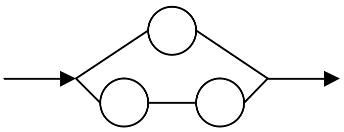
4.28. 2-ва стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания у каждого равна 1/3. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при третьем залпе.



4.29. 7 человек, независимо друг от друга, хотят попасть из A в B, выбирая путь совершенно случайно. Найти вероятность того, что трое из них не попадут в B.

4.30. 10 стрелков одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания у каждого равна 1/3. Найти вероятность того, что 2-ва стрелка не попали в цель.

4.31. Подбрасывается 3 кубика. Сколько в среднем попыток нужно произвести, чтобы появилась комбинация с суммой в 17 очков.



4.32. Имеются 10 схем указанного вида, где элементы работают независимо, и вероятность годности каждого равна 1/3. Найти вероятность того, что ток пройдет через 2 схемы.

4.33. Посажено 6 яблонь. В данный год каждая из них плодоносит с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в данный год а) плодоносит 4 яблони; б) плодоносят все яблони; в) не плодоносит ни одна яблоня; г) плодоносит хотя бы одна яблоня.

4.34. В одном испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что в 5-ти независимых испытаниях прибор выйдет из строя не менее 2-х раз.

4.35. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет а) менее 2-х раз; б) не менее 2-х раз.

4.36. Число звонков, поступающих на телефонную станцию за время Т имеет распределение Пуассона со средним значением ***5***. Найти вероятность того, что: а) за это время не поступит ни одного звонка; б) поступит по крайней мере один звонок; число поступивших звонков лежит в интервале [2;8].

4.37. Подбрасывается 10 игральных кубиков (или 1 кубик – 10 раз). Найти вероятность того, что грань 2 выпадет 5 раз, а 4 выпадет 3 раза.

X	1	2
$P(x)$	1/3	2/3

Y	1	2
$P(y)$	1/3	2/3

4.38. Случайные величины X и Y независимы и имеют указанное распределение. Для случайных величин $Z=X+Y$ и $W=X-Y$:

а) построить таблицу совместного распределения случайных величин Z и W;

б) Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин Z и W;

в) Найти вероятность событий $ZW<3$; $Z^2+W^2<10$.

4.39. Последовательно испытываются 5 приборов на надежность. Испытание завершится, если очередной прибор окажется неисправным. Построить закон

распределения количества испытаний, если вероятность выдержать испытание для одного прибора =0,9.
4.40. Серия одинаковых реле включаются через 5 сек. каждое. Время срабатывания каждого реле 16 сек. Опыт ведется до срабатывания одного реле. Вероятность срабатывания одного реле p=1/2. Построить закон распределения числа включенных приборов.
4.41. Монету подбрасывают 3 раза. Найти закон распределения числа выпавших гербов, мат. ожидание, среднеквадратическое отклонение, функцию распределения, моду и медиану этого числа.
4.42. Монету подбрасывают 5 раз. Составить закон распределения отношения числа выпавших гербов к числу выпавших решек.
4.43. Сл. величина X может принимать два значения X_1 и X_2 с вероятностью 0,3 и 0,7 соответственно. M(X)=2,7 и D(X)=0,21. Найти значения X.
4.44. Для возможных значений X=(1;0;-2) соответствуют вероятности P=(0,3;0,6;?). Для величины Y=3X-2 найти M(Y), D(Y).
4.45. При одном выстреле вероятность попадания в цель =0,3. Произведено 4 выстрела. Построить закон распределения числа попаданий, найти среднее число попаданий и дисперсию этого числа.
4.46. Вес тела равен целому числу килограмм (от 1 до 10). Определить, при какой системе разновесов (а), б) или в)), среднее число необходимых для взвешивания гирь – наименьшее? (Каждый раз используется наименьшее возможное число гирь). а) 1;2;2;5;10; б) 1;2;3;4;5; в) 1;1;2;5; 10.
4.47. Ряд распределения случайной величины а) $\begin{matrix} x & 1 & 2 & 3 \\ p & 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} x & -1 & 1 & 2 \\ p & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{matrix}$. Найти закон распределения $Y = X^4$, M(Y)
4.48. Один стрелок стреляет 1 раз по мишени. Вероятность попадания p. Для X – число попаданий, Y – число промахов, построить закон распределения и функцию распределения для (X,Y). Для p=1/3 найти cov(x,y).
4.49. Два стрелка стреляют по 1 разу в мишень. Вероятности попадания p1 и p2 соответственно. Для X – число попаданий 1-го стрелка, Y – число попаданий 2-го, построить закон распределения и функцию распределения.
4.50. Одновременно подбрасывается 1 монета и 1 игральная кость. Для X – число гербов, Y – выпавшее на кости число построить закон распределения (X,Y), найти M(X,Y). Определить зависимость и коррелированность величин X и Y.
4.51. Одновременно подбрасывается 2 монеты и кубик (у которого на 2-х гранях стоит число 5, а на остальных число 7),. Для X – число гербов, Y – выпавшее на кубике число построить закон распределения (X,Y), найти M(X,Y).