

1. Найти период функции

$$y = 3 \sin(4\pi x + 5).$$

*Решение:*

Рассчитать период функции  $y = Af(kx + b)$  можно по формуле  $T_1 = \frac{T}{|k|}$ , где

$T$  – период  $f(x)$ .

Период функции  $\sin(x) = 2\pi$ , значит:

$$T_1 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = 0.$$

*Решение:*

Так выглядит решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Чтобы найти  $k_1$  и  $k_2$ , составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 8 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 * 8 = -16$$

$$k_1 = \frac{-4 - \sqrt{-16}}{2} = -2 - 2i$$

$$k_2 = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} = -2 + 2i$$

Получаем окончательный ответ:

$$y = C_1 e^{(-2-2i)x} + C_2 e^{(-2+2i)x}$$

3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2 \, dx}{3x + 5}$$

*Решение:*

Сделаем замену:

$$u = 3x + 5$$

$$du = (3x + 5)' = 3 \, dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

Тогда:

$$\int \frac{2 \, dx}{3x + 5} = \int \frac{2 \, du}{3u} = \frac{2}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{2}{3} \ln|u| + C = \frac{2}{3} \ln|3x + 5| + C$$

4. Найти производную

$$y = \sqrt{tg(x)}$$

*Решение:*

Производная сложной функции равна произведению производных внутренней и внешней функций:

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$(tg(u))' = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

Тогда:

$$(\sqrt{tg(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x)}} * \frac{1}{\cos^2(x)}$$

5. Найти интервалы возрастания и точки экстремума функции

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 22$$

*Решение:*

Сначала исследуем производную функции:

$$(2x^3 - 6x^2 - 18x + 22)' = 6x^2 - 12x - 18$$

Найдем нули производной:

$$6x^2 - 12x - 18 = 6(x - 3)(x + 1)$$

$$6(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$

Проверим знак производной на интервалах  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(3; +\infty)$ :

$$f'(-2) = 6 * 4 - 12 * (-2) - 18 = 30; \quad f(x) - \text{растет на } (-\infty; -1)$$

$$f'(0) = -18; \quad f(x) - \text{убывает на } (-1; 3)$$

$$f'(4) = 6 * 16 - 12 * 4 - 18 = 30; \quad f(x) - \text{растет на } (3; +\infty)$$

Значит в точке  $x = -1$  находится локальный максимум, а в точке  $x = 3$  - локальный минимум

6. Решить систему уравнений наибольшим числом способов

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

*Решение 1:*

Выразим из первого уравнение  $x$  через  $y$ :

$$x = \frac{12 - 3y}{2}$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{3(12 - 3y)}{2} + 2y = 13$$

$$36 - 9y + 4y = 26$$

$$y = 2$$

Вернемся к подстановке:

$$x = \frac{12 - 3 * 2}{2} = 3$$

Решение 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A * X = B$ , значит  $X = A^{-1} * B$

Найдем обратную матрицу методом алгебраических дополнений

$$\det A = 2 * 2 - 3 * 3 = -5$$

Выпишем союзную матрицу:

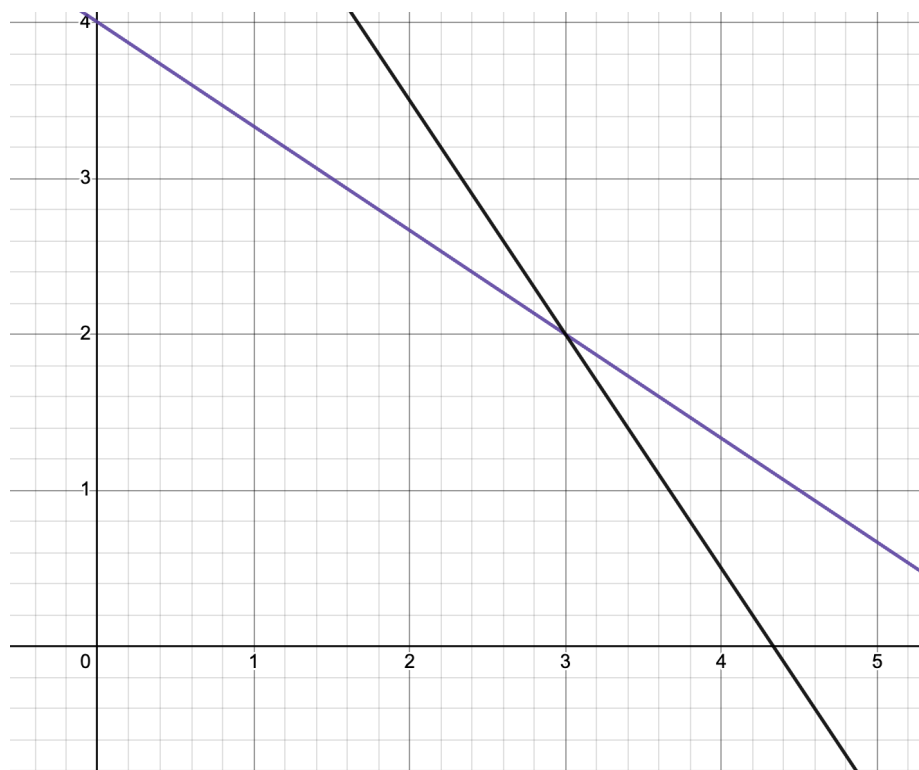
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T}{-5} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Найдем решение:

$$X = A^{-1} * B = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 * 12 + 0.6 * 13 \\ 0.6 * 12 - 0.4 * 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



*Решение 3:*

Построим графики функций, и найдем точку пересечения:

$$y = 2; \quad x = 3$$

7. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \frac{x-1}{2+2^{1/x}} + \frac{|x+2|}{x^2+5x+6}.$$

*Решение:*

Разложим знаменатель второй дроби на множители:

$$y = \frac{x-1}{2+2^{1/x}} + \frac{|x+2|}{(x+2)(x+3)}$$

Функция неопределена в точках:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 0$$

8. Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n^2+n+11}$$

*Решение:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n^2+n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3+\frac{4}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{n} \rightarrow 0}{n(1+\frac{1}{n} \rightarrow 0 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$$

9. На ГенАссамблее ООН присутствуют 142 страны, делегаты которых говорят на разных языках. Сколько переводчиков нужно, чтобы обеспечить перевод между любыми делегациями? (Переводчик для перевода, например, между русскоязычной и англоязычной делегацией один. Он обеспечивает перевод как с английского, так и с русского языка).

*Решение:*

ООН может выбрать одну страну, язык которой будет использоваться для переговоров, допустим РФ. Тогда делегации из 141 стран должны приехать со своими переводчиками, которые должны знать русский язык. Любые 2 страны могут провести переговоры, используя русский язык как промежуточный, а делегация РФ вообще не будет нуждаться в переводчики, т.к. у каждой страны уже имеется таковой. Итого 141 переводчик.

Если не допускается использовать больше одного переводчика для переговоров, тогда общее количество переводчиков можно рассчитать так:

$$C_{144}^2 = \frac{144!}{2!(144-2)!} = \frac{144 * 143}{2} = 10296$$

10. Вокруг круглого стола расставлены 6 стульев. Какова вероятность, что из 6 человек, которые случайным образом рассаживаются по этим стульям, двое избранных сядут рядом?

*Решение:*

Пусть один избранный участник занял какой-либо стул. Тогда второму участнику останется 5 стульев, только 2 из них являются положительным исходом. В таком случае вероятность положительного исхода

$$P = \frac{2}{5} = 40\%$$