**Вопрос 9. Метод касательных решения нелинейных уравнений. Погрешность метода.**

В соответствии с данным методом задача поиска корня функции $f(x)$ сводится к задаче поиска точки пересечения с осью абсцисс касательной, построенной к графику функции $f(x)$.

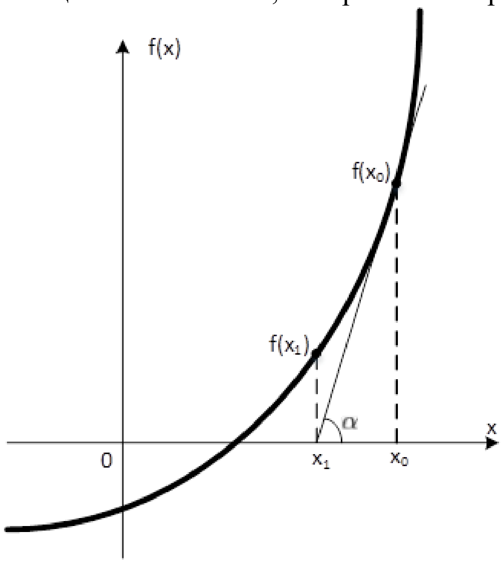


Рис.1. График изменение функции

Проведенная в любой точке касательная линия к графику функции определяется производной данной функции в рассматриваемой точке, которая в свою очередь определяется тангенсом угла α ($tg(\alpha) = f'(x_0)$). Точка пересечения касательной с осью абсцисс определяется исходя из следующего соотношения в прямоугольном треугольнике: тангенс угла $\alpha$ в прямоугольном треугольнике определяется отношением противолежащего катета к прилежащему катету треугольнику. Таким образом, на каждом шаге строится касательная к графику функции в точке очередного приближения $x_i$.Точка пересечения касательной с осью Ох будет являться следующей точкой приближения $x_{i+1}$. В соответствии с рассматриваемым методом расчет приближенного значения корня на i-итерации производится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{f'(x_i)} \cdot f(x_i)$$

Наклон прямой подстраивается на каждом шаге наилучшим образом, однако следует обратить внимание на то, что алгоритм не учитывает кривизну графика и следовательно в процессе расчета остается неизвестно в какую сторону может отклониться график.

Условием окончания итерационного процесса является выполнение следующего условия:

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ - допустимая погрешность определения корня.

Метод обладает квадратичной сходимостью. Квадратичная скорость сходимость означает, что число верных знаков в приближённом значении удваивается с каждой итерацией.

**Математическое обоснование**

Пусть дана вещественная функция $f(x)$, которая определена и непрерывна на рассматриваемом участке. Необходимо найти вещественный корень $x^*$ рассматриваемой функции.

Вывод уравнения основано на методе простых итераций, в соответствии с которым уравнение $f(x) = 0$ приводят к эквивалентному уравнению $x = x + \lambda(x) \cdot f(x)$ при любой функции $\lambda(x) \neq 0$. Введем понятие сжимающего отображения, которое определяется соотношением $\varphi(x) = x + \lambda(x) \cdot f(x)$.

Для наилучшей сходимости метода в точке очередного приближения $x^*$ должно выполняться условие $\varphi'(x^*) = 0$. Данное требование означает, что корень функции $f(x) = 0$ должен соответствовать экстремуму функции $\varphi(x)$.

Производная сжимающего отображения $\varphi(x)$ определяется в следующем виде:

$$\varphi'(x^*) = 1 + \alpha'(x^*) \cdot f(x^*) + \alpha(x^*) \cdot f'(x^*)$$

Выразим из данного выражение переменную $\alpha(x)$ при условии принятого ранее утверждения о том, что при $f(x) = 0$ необходимо обеспечить условие $\varphi'(x^*) = 0$. В результате получим выражение для определения переменной $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

С учетом этого сжимающая функция прием следующий вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x)$$

Таким образом, алгоритм нахождения численного решения уравнения $f(x) = 0$ сводится к итерационной процедуре вычисления:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{f'(x_i)} \cdot f(x_i)$$

**Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения по методу Ньютона для уравнения с одной переменной**

1. Задать начальную точку приближенного значения корня функции $x_0$, а также погрешность расчета (малое положительное число $\xi$) и начальный шаг итерации ($k = 0$).
2. Выполнить расчет приближенного значения корня функции в соответствии с формулой:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \cdot f(x_k)$$

3. Проверяем приближенное значение корня на предмет заданной точности, в случае:

- если разность двух последовательных приближений станет меньше заданной точности $\left|x_*^k - x_*^{k-1}\right| < \xi$, то итерационный процесс заканчивается.
- если разность двух последовательных приближений не достигает необходимой точности $\left|x_*^k - x_*^{k-1}\right| > \xi$, то необходимо продолжить итерационный процесс $(k = k+1)$ и перейти к п.2 рассматриваемого алгоритма.

**Оценка погрешности**

Для оценки погрешности n-го приближения xn можно воспользоваться общей формулой.

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \qquad (6)$$

где m1 — наименьшее значение |*f ’( x )* |на отрезке [a, b].

Выведем еще одну формулу для оценки точности приближения xn. Применяя формулу Тейлора, имеем:

$$f(x_n) = f[x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})] = \\ = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2, \qquad (7)$$

где $\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$.Так как в силу определения приближения *xn* имеем

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

то из (7) находим:

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2} M_2 (x_n - x_{n-1})^2,$$

где *M2* — наибольшее значение | *f ″ (x)* |на отрезке [a, b].Следовательно, на основании формулы (6) окончательно получаем:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2. \quad (8)$$

Если процесс Ньютона сходится, то *xn- xn-1* 0 при *n* —► $\infty$. Поэтому при $n \geq N$ имеем:

$$|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|,$$

т.е. *«установившиеся»* начальные десятичные знаки приближений *xn -1* и*xn* начиная с некоторого приближения, являются верными.

Заметим, что в общем случае совпадение с точностью до е двух последовательных приближений *xn-1* и *xn* вовсе не гарантирует, что с той же точностью совпадает значение *xn* и точный корень | (рис. 19).

Установим также формулу, связывающую абсолютные погрешности двух последовательных приближений *xn* и *xn +1* . Из формулы (5) получаем:

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

где $c_n \in (x_n, \xi)$. Отсюда, учитывая формулу (3), будем иметь:

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

и, следовательно,

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \quad (9)$$

Формула (9) обеспечивает быструю сходимость процесса Ньютона, если начальное приближение *x**0*** таково, что

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| \leqslant q < 1.$$

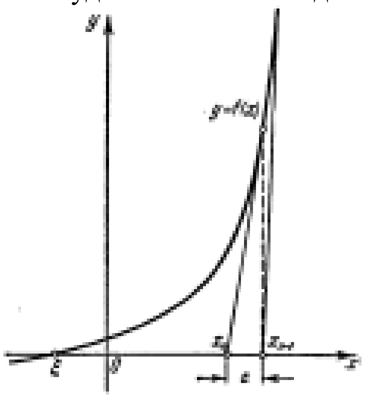
В частности, если

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leqslant 1 \text{ и } |\xi - x_n| < 10$$

то из формулы (9) получаем:

$$|\xi - x_{n+1}| < 10^{-2m},$$

т.е. в этом случае, если приближение *xn* имело mверных десятичных знаков после запятой, то следующее приближение *xn+1* будет иметь по меньшей мере *2m* верных знаков; иными словами, если $\mu \leq 1$, то с помощью метода Ньютона число верных знаков после запятой искомого корня $\xi$ удваивается на каждом шаге.




```
package uravnenie3;
import java.util.Scanner;
public class kasat {

	public static void main(String[] args) {
		// TODO Auto-generated method stub
		Scanner input=new Scanner (System.in);
	  double a = input.nextDouble();
```

```
        double b = input.nextDouble();
        double c;
        if (funcprr(a)*funcprr(a)<0) {c=(-func(a))/funcpr(a)+a;
        while (Math.abs(func(a))>=0.0001) {a=c;
        c=(-func(a))/funcpr(a)+a;}}
        else {c=(-func(b))/funcpr(b)+b;
        while (Math.abs(func(a))>0.0001) {b=c;
        c=(-func(a))/funcpr(a)+a;}}
        System.out.println (c+"- корень");}
      static double func(double x) {
            double y;
            y = 0.2*Math.exp(-x*x)-Math.sqrt(x)+3;
            return y;
}
      static double funcpr(double x) {
            double y;
            y = -0.4*x*Math.exp(-x*x)-(1/(2*Math.sqrt(x)));
            return y;
}
      static double funcprr(double x) {
            double y;
            y = 0.8*x*x*Math.exp(-x*x)-0.4*Math.exp(-x*x)+1/(4*Math.sqrt(x*x*x));
            return y;
}
}
```