4.Постановка задачи численного интегрирования. Формулы трапеций. Погрешность вычислений

Постановка задачи

Задача вычисления интегралов возникает во многих областях прикладной математики. Требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx . \qquad (1)$$

при условии, что a и b конечны и функция f(x) непрерывна на [a,b].

Если известна первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Однако во многих случаях первообразная F(x) не может быть найдена с помощью элементарных функций или является слишком сложной; поэтому вычисление интеграла (1) может быть практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция f(x) часто задается таблично и тогда понятие первообразной теряет смысл. Поэтому важное значение имеют численные методы вычисления определенных интегралов.

Суть численного интегрирования заключается в вычислении значения интеграла на основании ряда значений $f(x_i), i = 0, \dots , n$.

Кроме того возникает вопрос об оценке погрешности методов численного интегрирования.

Численное вычисление однократного интеграла (интеграла от функции одной переменной) называется квадратурой, а двойного –кубатурой. Соответствующие формулы мы будем называть квадратурными и кубатурными.

Рассмотрим вычисление однократных интегралов. Обычный прием квадратуры состоит в том, что f(x) на [a,b] заменяют аппроксимирующей или интерполирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Функция $\varphi(x)$ должна быть такова, чтобы $\int_a^b \varphi(x)dx$ легко вычислялся непосредственно.

В зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции различают следующие методы численного интегрирования:

1.Методы Ньютона–Котеса, основанные на полиноминальной аппроксимации. Эти методы отличаются степенью используемого полинома. (в него входит метод трапеций)

2.Сплайновые алгоритмы, базирующиеся на аппроксимации подынтегральной функции сплайнами.

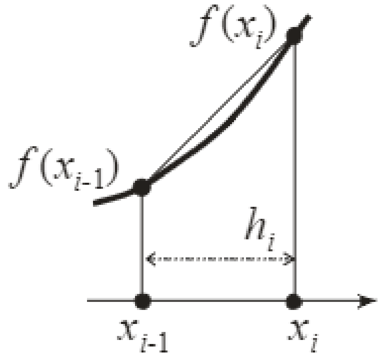
3.Методы наивысшей алгебраической точности, где используется неравно-мерная разбивка интервала интегрирования в зависимости от характера функции. Например, метод Гаусса.

4.Методы Монте –Карло, где узлы функции выбираются как случайные числа. Эти методы эффективны при расчете кратных интегралов.

5.Специальные методы, основанные на особенностях конкретных классов интегрируемых функций.

Формула трапеций

Аппроксимируем подынтегральную функцию полиномом первой степени, построенным по двум узлам: x_{i-1} и x_i.



Тогда в случае равномерной сетки

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) + R_1^i$$

-формула трапеций для элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Отметим, что для получения формул численного интегрирования на некотором отрезке [a, b] достаточно построить квадратурную формулу для интеграла на элементарномотрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а затем ее просуммировать.

Суммируя формулу, получаем составную формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] + R_1.$$

Погрешность формулы трапеции

$$R_1 = \frac{M_2(b-a)}{12}h^2$$

Формула трапеций имеет тот же порядок точности –второй, что и формула центральных прямоугольников, но ее погрешность оценивается величиной в два раза большей. Поэтому предпочтительнее пользоваться формулой прямоугольников.

Программа

```
import java.util.Scanner;
public class trap {
	public static void main(String[] args) {
		Scanner scan = new Scanner(System.in);
		double s=0;
		int n = scan.nextInt();
		double a = scan.nextDouble();
		double b = scan.nextDouble();
		double h=(b-a)/n;
		while(a+h<b) {
			s+=h*(FN(a)+FN(a+h))/2;
			a+=h;
		}
		System.out.println(s);

	}
	public static double FN (double x) {
		double y;
		y=7/x;
		return y;
	}
}
```