3. Численные методы решения нелинейных уравнений. Постановка задачи. Определение корней.

Пусть имеется уравнение вида

$$\mathbf{f(x)= 0}$$

где **f(x)** — заданная алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить уравнение — значит найти все его корни, то есть те значения **x**, которые обращают уравнение в тождество.

Если уравнение достаточно сложно, то задача точного определения корней является в некоторых случаях нерешаемой. Поэтому ставится задача найти такое приближенное значение корня $\mathbf{x_{пр}}$, которое отличается от точного значения корня **x*** на величину, по модулю не превышающую указанной точности (малой положительной величины) **ε**, то есть

$$| x^* - x_{пр} | < \varepsilon$$

Величину **ε** также называют ***допустимой ошибкой***, которую можно задать по своему усмотрению.

Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

Приближенное решение уравнения состоит из двух этапов:

- Отделение корней, то есть нахождение интервалов из области определения функции **f(x)**, в каждом из которых содержится только один корень уравнения **f(x)=0**.
- Уточнение корней до заданной точности.

Отделение корней

Для отделения корней используют теорему математического анализа.

Теорема 1. Если непрерывная функция f(x) принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, \beta]$, т.е. $f(a)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in (a, \beta)$ такое, что$f(\xi) = 0$.

Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $f'x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (a, β), т.е. если $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при $а < x < \beta$.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных точках $x = а$ и $x = b$ области ее существования. Затем определяют знаки функции $f(x)$ в ряде промежуточных точек $x = a_1, a_2 \dots$, выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(a_k)f(a_{k+i}) < 0$, то в силу теоремы 1 в интервале (a_k, a_{k+i}) имеется корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным способом убедиться, является ли этот корень единственным.

Пример программы для
$f(x) = 1 - 0{,}5x^2 \ln x + 0{,}3\sqrt{x}$

Ищем корни методом половинного деления.

```
public class laret {
	public static void main(String[] args) {
		double a = 1;
		double b = 3;
		double h = (b-a)/10;
		for(int r=1;r<=10;r++) {
			double t=a+h;
			double q=f(a);
			double w=f(t);
			if((q*w)<0) {
				b=t;
				r=11;
			}else {
				a=t;
			}
		}
		System.out.println("Сужаем отрезок до a="+a+" b="+b);

		double c=(a+b)/2;;
		h=b-a;
		while(h>0.001) {
			c=(a+b)/2;
			double q=f(a);
			double w=f(c);
			if((q*w)<0) {
				b=c;
			}else {
				a=c;
			}
			h=b-a;
		}
		System.out.println(c + " - корень");
	}

	public static double f(double x) {
		double y = 1-0.5*Math.pow(x,2)*Math.log(x)+0.3*Math.sqrt(x);
		return y;
	}

}
```