Вопрос 15. Программная реализация правила Крамера. Погрешности вычисления.

Правило Крамера

Правило Крамера рассмотрим на примере двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (17)$$

хотя оно применимо и для решения системы n линейных уравнений с n переменными, но с увеличением n требует большого объема вычислительной работы.

Умножим первое уравнение системы (17) на коэффициент a_{22}, а второе — на — a_{12} и полученные уравнения сложим. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12}. \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то получаем значение переменной

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (17) на —a_{21}, второе — на a_{11} и складывая их, получаем:

$$\begin{cases} -a_{21}a_{11}x_1 - a_{21}a_{12}x_2 = -a_{21}b_1, \\ (a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2. \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \Rightarrow x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Введем обозначения: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$;

$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1;$

$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_2.$

Следовательно, Δ — определитель матрицы коэффициентов системы (17).

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ, если коэффициенты системы (17) при x_1 (первый столбец матрицы А*)* заменить свободными членами

B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$;

Определитель Δ_2 — если заменить коэффициенты системы (17) при x_2 (второй столбец матрицы А*)* свободными членами.

Определитель Δ называется *главным определителем* системы (17), а определители Δ_1 и Δ_2 — *вспомогательными.*

Если главный определитель $\Delta \neq 0$, то

матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *неособенной,*в противном случае - *особенной.*

Таким образом, если главный определитель системы уравнений (17) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (18)$$

Формулы (18) называются формулами Крамера.

Нахождение решения линейной системы (17) по формулам (18) называется *правилом Крамера,* который одним из первых пришел к понятию определителя и доказал сформулированное выше предложение.

Справедливы также следующие два предложения:

1. Если главный определитель системы (17) $\Delta = 0$, но хотя бы один из вспомогательных определителей Δ_1 или Δ_2 отличен от нуля, то система (17) не имеет решений (система несовместна).

2. Если все три определителя Δ, Δ_1 и Δ_2 системы (17) равны нулю, но среди коэффициентов $a_{ij}(i, j = 1,2)$ есть хотя бы один, отличный от нуля, то система (17) имеет бесконечное множество решений.

Легко дать геометрическое истолкование этим предложениям. Поскольку каждому уравнению системы (17) в плоскости соответствует некоторая прямая, то система (17) имеет единственное решение, если прямые имеют одну общую точку; не имеет решений, если прямые параллельны; и имеет бесконечное множество решений, если прямые сливаются.

Правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n переменными имеет определенное теоретическое значение; практически им уже при n = 4 не пользуются. Установлено, что число операций умножения и деления, которые необходимо выполнить при решении линейной системы алгебраических уравнений порядка n по формулам Крамера, равно:

$N(n)= (n^2 — 1)n! + n$,

а по схеме единственного деления метода Гаусса:

$N(n) = \frac{n}{3} (n^2 + 3n — 1)$.

Для сравнения объема вычислительной работы по этим двум алгоритмам подсчитаем количество операций:

по Крамеру по Гауссу

при n = 5 2885 65

при n =10 $360*10^6$ 430

Поэтому все современные ЭВМ имеют стандартные подпрограммы, реализующие различные модификации метода Гаусса.