

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

---

Г. А. Тимофеев

# Теория механизмов и машин

КУРС ЛЕКЦИЙ

*Допущено УМО в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по техническим специальностям*

МОСКВА • ИД ЮРАЙТ • 2010

УДК 621.01  
ББК 34.41.073  
Т41

**Рецензент:**

Плахтин В. Д. — доктор технических наук, профессор  
МГОУ

**Тимофеев, Г. А.**  
Теория механизмов и машин : курс лекций / Г. А. Тимофеев. —  
М. : ИД Юрайт, 2010. — 351 с. — (Основы науки).

ISBN 978-5-9692-0244-3

Изложены основы теории механизмов и машин (ТММ), изучены свойства отдельных типов механизмов, широко применяемых в самых разных машинах, приборах и устройствах; рассматриваются задачи совершенствования современной техники, создания новых высокопроизводительных машин и систем, освобождающих человека от трудоемких процессов. ТММ базируется на методах математического анализа, векторной и линейной алгебры, дифференциальной геометрии и других разделов математики, поэтому курс лекций рассчитан на студентов, уже имеющих подготовку по высшей математике, теоретической механике, векторной алгебре, информатике и др.

Содержание соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования и методическим требованиям, предъявляемым к учебным изданиям.

Для студентов высших технических учебных заведений.

УДК 621.01  
ББК 34.41.073

**Покупайте наши книги:**

**Оптом:** в офисе книготорга «Юрайт»: 140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1, тел. (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

**В розницу:** в интернет-магазине: www.urait-book.ru, e-mail: order@urait-book.ru, тел.: (495) 742-72-12, в филиале: г. Москва, Олимпийский проспект, д. 16, подъезд № 1, с/к «Олимпийский», торговое место 48, тел.: (495) 726-27-04, 688-30-11

**Для закупок у Единого поставщика** в соответствии с ФЗ от 24.07.2007 г. № 94-ФЗ обращаться по тел. (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, kea@urait.ru

ISBN 978-5-9692-0244-3

© Тимофеев Г. А., 2019

© ИД Юрайт, 2010

## Содержание

<b>Предисловие .....</b>	<b>7</b>
<b>Лекция 1 .....</b>	<b>8</b>
Введение.....	8
Литература.....	12
Основные определения и понятия.....	18
Понятие о машинном агрегате .....	19
Механизм и его элементы .....	18
Контрольные вопросы и задания к лекции 1 .....	22
<b>Лекция 2 .....</b>	<b>23</b>
Классификация кинематических пар .....	23
Кинематические соединения .....	26
Основные виды механизмов .....	27
Структурные формулы механизмов .....	36
Структурный анализ и синтез механизмов. Влияние избыточных связей на работоспособность и надежность машин.....	39
Контрольные вопросы и задания к лекции 2 .....	43
<b>Лекция 3 .....</b>	<b>44</b>
Структурный синтез механизмов .....	44
Структурный синтез простых и сложных механизмов с помощью структурных групп .....	45
Синтез структурных групп с помощью структурных формул.....	50
Классификация структурных групп .....	54
Контрольные вопросы и задания к лекции 3 .....	58
<b>Лекция 4 .....</b>	<b>59</b>
Проектирование плоских рычажных механизмов .....	59
Этапы проектирования механизмов .....	59
Условие существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах.....	64
Синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям звеньев .....	67
Синтез шестизвенных кулисных механизмов.....	73
Контрольные вопросы и задания к лекции 4 .....	77
<b>Лекция 5 .....</b>	<b>78</b>
Кинематические характеристики механизмов.....	78
Кинематика входных и выходных звеньев .....	79
Определение кинематических характеристик плоского рычажного механизма геометрическим методом в аналитической форме .....	81
Метод планов положений, скоростей и ускорений.....	85
Экспериментальный метод.....	86
Метод кинематических диаграмм.....	88
Графическое и численное интегрирование .....	88
Графическое и численное дифференцирование .....	91
Метод преобразования координат .....	95
Контрольные вопросы и задания к лекции 5 .....	96

<b>Лекция 6 .....</b>	<b>97</b>
Динамика механизмов .....	97
Силы, действующие в машинах, и их характеристики .....	97
Динамическая модель. Приведение сил .....	104
Приведение масс .....	107
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 6 .....</i>	109
<b>Лекция 7 .....</b>	<b>110</b>
Уравнения движения механизма .....	110
Основные режимы движения машины .....	113
Неустановившееся движение механизма (переходные режимы работы) .....	115
Определение продолжительности переходного процесса.....	118
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 7 .....</i>	120
<b>Лекция 8 .....</b>	<b>121</b>
Исследование установившегося режима движения.....	121
Расчет маховых масс по методике Н. И. Мерцалова .....	124
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 8 .....</i>	132
<b>Лекция 9 .....</b>	<b>133</b>
Силовой расчет механизмов .....	133
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 9 .....</i>	143
<b>Лекция 10 .....</b>	<b>145</b>
Уравновешивание механизмов .....	145
Понятие о неуравновешенности механизма.....	145
Метод замещающих масс .....	148
Условия перехода от звена с распределенной массой к модели с точечными массами .....	149
Полное статическое уравновешивание шарнирного четырехзвенника .....	150
Полное статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма... ..	152
Частичное статическое уравновешивание, при котором допускается движение центра масс вдоль направляющих ползуна (уравновешивание вертикальной составляющей сил инерции) .....	153
Частичное уравновешивание для случая, когда центр масс движется по дуге, хорда которой перпендикулярна оси направляющей ползуна .....	155
Эквивалентная схема .....	156
<b>Лекция 11 .....</b>	<b>157</b>
Неуравновешенность роторов и их балансировка .....	157
Балансировка роторов при различных видах неуравновешенности .....	161
Статическая неуравновешенность.....	161
Моментная неуравновешенность.....	162
Динамическая неуравновешенность.....	163
Статическая балансировка роторов при проектировании .....	164
Динамическая балансировка роторов при проектировании .....	165
<b>Лекция 12 .....</b>	<b>168</b>
Основы виброзащиты машин .....	168
Основные методы виброзащиты. Виброизоляция.....	169
Случай силового возбуждения .....	170
Этапы решения задач виброзащиты .....	171
Кинематическое возбуждение $m \ll M$ .....	174
Динамическое гашение колебаний.....	175
<i>Контрольные вопросы к лекциям 10–12 .....</i>	178

<b>Лекция 13 .....</b>	<b>179</b>
Основы геометро-кинематического синтеза механизмов с высшими кинематическими парами .....	179
Скорость скольжения профиля .....	186
Эвольвента окружности, ее свойства и уравнение.....	187
Эвольвентное зацепление.....	189
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 13 .....</i>	191
<b>Лекция 14 .....</b>	<b>192</b>
Цилиндрические зубчатые передачи .....	192
Элементы зубчатого колеса .....	192
Основные положения станочного зацепления. Реечное станочное зацепление .....	199
<i>Контрольные вопросы к лекции 14 .....</i>	207
<b>Лекция 15 .....</b>	<b>208</b>
Подрезание и заострение зуба .....	208
Эвольвентная зубчатая передача.....	210
Уравнения эвольвентной зубчатой передачи .....	212
Качественные показатели зубчатой передачи. Выбор расчетных коэффициентов смещения.....	215
<i>Контрольные вопросы к лекции 15 .....</i>	221
<b>Лекция 16 .....</b>	<b>222</b>
Цилиндрическая передача, составленная из колес с косыми зубьями .....	222
Особенности точечного круговинтового зацепления Новикова .....	227
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 16 .....</i>	233
<b>Лекция 17 .....</b>	<b>234</b>
Сложные зубчатые и планетарные механизмы .....	234
Кинематическое исследование рядного зубчатого механизма аналитическим и графическим методами .....	236
Формула Виллиса.....	238
Кинематическое исследование типовых планетарных механизмов графическим и аналитическим методами .....	240
Двухрядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением .....	240
Однорядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением .....	242
Двухрядный механизм с двумя внешними зацеплениями .....	243
Двухрядный механизм с двумя внутренними зацеплениями .....	244
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 17 .....</i>	246
<b>Лекция 18 .....</b>	<b>247</b>
Проектирование многопоточных планетарных механизмов.	
Постановка задачи синтеза .....	247
Условия подбора чисел зубьев. Вывод расчетных формул для условий соосности, соседства и сборки .....	248
Подбор чисел зубьев по методу сомножителей .....	251
Примеры подбора чисел зубьев для типовых планетарных механизмов .....	253
Оптимальный синтез планетарных механизмов при автоматизи- рованном проектировании .....	259
Планетарные дифференциальные механизмы с $W = 2$ .....	260
<i>Контрольные вопросы и задания к лекции 18 .....</i>	261

<b>Лекция 19 .....</b>	<b>262</b>
Волновые зубчатые передачи .....	262
Кинематика волновой передачи .....	264
Особенности волнового зацепления .....	265
Методика проектирования ВЗП.....	267
Контрольные вопросы и задания к лекции 19.....	270
<b>Лекция 20 .....</b>	<b>271</b>
Пространственные зубчатые передачи. Коническая зубчатая передача.....	271
Контрольные вопросы и задания к лекции 20.....	284
<b>Лекция 21 .....</b>	<b>285</b>
Гиперболоидные зубчатые передачи.....	285
Контрольные вопросы и задания к лекции 21.....	295
<b>Лекция 22 .....</b>	<b>296</b>
Кулачковые механизмы.....	296
Виды кулачковых механизмов. Их достоинства и недостатки.....	296
Понятие центрового профиля кулачка .....	298
Угол давления и его влияние на работоспособность механизма .....	299
Взаимосвязь угла давления и размеров кулачкового механизма .....	301
Свойство отрезка передаточной функции и правило его построения .....	303
<b>Лекция 23 .....</b>	<b>306</b>
Проектирование кулачкового механизма с прямолинейно движущимся роликовым толкателем .....	306
Построение графика перемещения толкателя.....	308
Построение области допустимого расположения центра вращения кулачка.....	308
Выбор положения центра вращения кулачка, определение его начального радиуса .....	310
Построение центрового и конструктивного профилей кулачка.....	312
Проектирование кулачкового механизма с коромысловым роликовым толкателем .....	314
Определение основных размеров кулачкового механизма.....	315
Построение профиля кулачка .....	318
Контрольные вопросы и задания к лекциям 22, 23 .....	319
<b>Лекция 24 .....</b>	<b>321</b>
Манипуляционные роботы .....	321
Классификация, назначение и области применения .....	321
Кинематические схемы, структура и технические характеристики манипуляторов.....	326
<b>Лекция 25 .....</b>	<b>338</b>
Задачи о положениях манипуляторов.....	338
Контрольные вопросы и задания к лекциям 24, 25 .....	342
<b>Лекция 26 (для самостоятельной работы).....</b>	<b>343</b>
Силовой расчет механизмов с учетом трения в кинематических парах.....	343
Силы в низших кинематических парах с учетом трения.....	345
Силы в высших кинематических парах с учетом трения .....	347
Учет сил трения при силовом расчете механизмов .....	348

## Предисловие

Предлагаемый цикл лекций по дисциплине «Теория механизмов и машин» автор читает в течение ряда лет в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана на факультетах «РК» и «МТ» для специальностей «РК-4», «РК-5» и «МТ-8», «МТ-11».

Данная учебная дисциплина базируется на механико-математической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими дисциплинами: «Высшая математика», «Теоретическая механика», «Технология конструкционных материалов», «Алгоритмические языки и программирование».

Автор сознательно изложил сжато некоторые вопросы дисциплины, имея в виду то, что они достаточно подробно освещаются при прохождении лабораторного практикума (методы нарезания зубчатых колес, балансировка роторов, виброзащита механизмов) и выполнении упражнений (кинематический и структурный анализ механизмов, силовой расчет рычажных механизмов).

Материал лекций должен помочь студентам выполнить домашние задания, подготовиться к рубежным контролям.

Автор выражает свою глубокую благодарность коллегам по кафедре за замечания и предложения по содержанию лекций и особенно заведующему кафедрой до 2007 г. академику РАН К. В. Фролову.

## Лекция 1

### Введение

Сегодня мы начинаем изучать одну из общеинженерных дисциплин — теорию механизмов и машин (ТММ). ТММ — наука, изучающая общие законы и принципы построения машин, позволяющая выполнить первый этап проектирования конструкций, сооружений, систем машин и механизмов на основе разработанных ею методов.

В ТММ изучаются свойства отдельных типовых механизмов, широко применяемых в самых различных машинах, приборах и устройствах. При этом анализ и синтез механизмов осуществляется независимо от его конкретного назначения, т.е. однотипные механизмы (рычажные, кулачковые, зубчатые и др.) исследуются одними и теми же приемами для двигателей, насосов, компрессоров и других типов машин.

В основе ТММ — методы математического анализа, векторной и линейной алгебры, дифференциальной геометрии и других разделов математики, теоремы и положения теоретической механики.

Решая задачи геометро-кинематического и динамического синтеза механических систем, ТММ является основой курсов «Детали машин», «Детали приборов» и других спецкурсов по проектированию и расчету механизмов и машин (специального назначения). В этих дисциплинах широко используются общие методы, разработанные ТММ в приложении к конкретным механизмам.

Сейчас, как и прежде, перед учеными, инженерами и конструкторами стоят задачи дальнейшего совершенствования всех видов современной техники, и в первую очередь создание новых высокопроизводительных машин и систем машин, освобождающих человека от трудоемких и утомительных процессов.

Становление теории механизмов и машин как науки относится к XVIII в., когда рассматривались кинематика

и динамика различных машинных устройств, использовавшие теоремы и постулаты теоретической механики для изучения законов движения этих устройств и создания основ их проектирования.

Существенный вклад в развитие теории машин и механизмов внесли русские ученые П. Л. Чебышев, И. А. Вышнеградский, Н. П. Петров, Н. Е. Жуковский, Л. В. Ассур, В. П. Горячкин, И. И. Артоболевский, А. А. Благонравов, а также ученые старейшей кафедры технических вузов страны — теории механизмов и машин, созданной в Императорском Московском техническом училище — ИМТУ в 1873 г. Среди них первый заведующий кафедрой профессор Ф. Е. Орлов, уделявший много внимания изучению вопросов трения, динамики машин и, главное, разработке основных принципов, которыми необходимо было руководствоваться при проектировании машин того времени. Он был автором первого курса прикладной механики, который пользовался широкой популярностью и систематически переиздавался.

Много внимания совершенствованию методов анализа и синтеза механизмов уделял Д. С. Зернов, возглавлявший нашу кафедру с 1892 по 1899 г.

Решение многих сложных задач синтеза механизмов, основ динамики, вопросов гидродинамической теории смазки связано с именем выдающегося педагога и новатора профессора Н. И. Мерцалова, заведовавшего кафедрой с 1899 по 1929 г.

Многими методами, разработанными профессором Л. П. Смирновым (возглавлял кафедру с 1929 по 1949 г.), мы пользуемся и до сих пор. Им же были разработаны методы экспериментальных исследований, создано оборудование для проведения лабораторных работ.

Широкую известность в мире получили труды и изобретения профессора Л. Н. Решетова, заведовавшего кафедрой с 1951 по 1962 г. Он внес большой вклад в развитие зубчатых передач, кулачковых механизмов, вопросов уравновешивания. Он основатель нового направления в ТММ — рационального проектирования механизмов.

Большой вклад в развитие науки о механизмах внес профессор В. А. Гавриленко, заведовавший кафедрой с 1962 по 1977 г. Созданная им геометрическая теория эвольвентных передач позволила избавиться от множества эмпирических зависимостей в расчетах и проектировать малогабаритные

зубчатые передачи. Его теория открыла путь к решению динамических и прочностных задач в области зубчатых передач. Ему и его ученикам удалось внедрить в производство новые пространственные передачи, планетарные, кривошипно-планетарные и волновые зубчатые передачи.

Продолжателем традиций научной и педагогической школы теории механизмов и машин МВТУ им. Н. Э. Баумана и России стал К. В. Фролов. В 1978 г., будучи уже директором института машиноведения им. А. А. Благонравова, К. В. Фролов по совместительству возглавил кафедру «Теории механизмов и машин» и бессменно руководил ею до 2007 г.

С приходом К. В. Фролова читаемый в МВТУ курс «Теория механизмов и машин» пополнился сведениями о трибологии, проектировании манипуляторов промышленных роботов, расчетах пространственных механизмов, вибраактивности и виброзащите. Расширилась тематика курсовых проектов. На кафедре был создан компьютерный класс для студентов, разработана система автоматизированных расчетов для курсового проектирования (САРКП МГТУ).

Преподаватели кафедры совместно с РНПО «Росучприбор» создали экспериментальную учебную лабораторию по теории механизмов и механике машин и программное обеспечение для проведения цикла новых лабораторных работ.

Кафедра ТММ, руководимая К. В. Фроловым все эти годы вела не только большую методическую, но и систематическую научно-издательскую работу. Усилиями преподавателей кафедры подготовлены и созданы учебники «Теория механизмов и машин» (1987 г.) и «Теория механизмов и механика машин», неоднократно переизданные (в 1998, 2001, 2002, 2004 и 2009 гг.) в издательствах «Высшая школа» и МГТУ им. Н. Э. Баумана.

В издательстве «Высшая школа» выпущены пять изданий (1996, 1998, 2001, 2004 и 2008 гг.) учебного пособия «Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин» под редакцией К. В. Фролова, а в 1989 г. — оригинальное трехтомное учебное пособие «Механика промышленных роботов» под редакцией К. В. Фролова и Е. И. Воробьева.

Научная деятельность К. В. Фролова получила заслуженное признание в сообществе отечественных и зарубежных ученых. В 1976 г. Константин Васильевич избирается членом-корреспондентом, а в 1984 г. — действительным членом АН СССР. С 1985 по 1996 г., являясь вице-президентом

Академии наук, он как академик-секретарь, возглавлял новое Отделение проблем машиностроения, механики и процессов управления.

Под руководством К. В. Фролова институт машиноведения РАН стал настоящим центром научной и технической мысли в области машиностроения. Им решались актуальные проблемы динамики машин, теории вибрации машин и вибroteхнологий, выполнялись фундаментальные работы в области биомеханики. Применительно к системе «человек — машина — среда» разработаны научные основы нормирования вибрационных и шумовых воздействий на человека-оператора. Полученные им и при его руководстве научные результаты широко используются при создании образцов специальной техники в атомном и ракетно-космическом машиностроении, авиации и судостроении.

Академик К. В. Фролов являлся главным редактором 40-томного издания «Энциклопедия машиностроения», главным редактором журналов «Проблемы машиностроения и надежности машин» РАН, «Машиностроение и инженерное образование» и международного журнала «Проблемы машиностроения и автоматизации». Под научным руководством К. В. Фролова защищено девять докторских и 18 кандидатских диссертаций, он автор более 400 научных работ, в том числе 12 монографий.

Академик К. В. Фролов многие годы активно участвовал в широком распространении научных знаний в качестве председателя правления международной научно-просветительской ассоциации «Знание».

Деятельность академика К. В. Фролова получила должное международное признание, он был членом ряда зарубежных академий и награжден престижными научными медалями и премиями.

Как бы мы ни называли наш технический век — веком космоса или автоматики, атомным веком или веком электроники, — основой технического прогресса всегда было и остается машиностроение. От уровня развития машиностроения, от степени совершенствования машин в значительной степени зависят производительность общественно-го труда и благосостояние нашего народа. ТММ как наука дает общие методы построения наиболее совершенных, высокоэкономичных и надежных машин. Изучая ТММ, вы получите не только конкретные знания, но и определенные навыки и умения.

## Литература

### Основная

1. Теория механизмов и механика машин / под ред. К. В. Фролова. — М., 1987, 1998, 2001, 2004.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. — М., 1988.
3. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. — М., 1979.
4. Юдин, В. А. Теория механизмов и машин / В. А. Юдин, Л. В. Петрокас. — М., 1977.
5. Механика машин / под ред. Г. А. Смирнова. — М., 1996.
6. Попов, С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин / С. А. Попов, Г. А. Тимофеев. — М., 1998, 2002, 2004, 2008.

### Дополнительная

7. Артоболевский, И. И. Механизмы в современной технике : в 6 т. / И. И. Артоболевский. — М., 1970–1975.
8. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин / С. Н. Кожевников. — М., 1977.
9. Кожевников, С. Н. Механизмы: справочное пособие / С. Н. Кожевников, Я. И. Есипенко, Я. М. Раскин ; под ред. С. Н. Кожевникова. — М., 1976.
10. Теория механизмов / под ред. В. А. Гавриленко. — М., 1973.
11. Теория механизмов и машин / под ред. К. И. Заблонского. — Киев, 1989.
12. Решетов, Л. Н. Самоустанавливающиеся механизмы : справочник / Л. Н. Решетов. — М., 1979.
13. Коловский, М. З. Динамика машин / М. З. Коловский. — Л., 1989.
14. Крайнев, А. Ф. Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев. — М., 1987.
15. Пейсах, Э. Е. Система проектирования рычажных механизмов / Э. Е. Пейсах, В. А. Нестеров. — М., 1988.
16. Механика промышленных роботов : в 3 т. / под ред. К. В. Фролова и Е. И. Воробьева. — М., 1988, 1989.
17. Основы балансировочной техники : в 2 т. / под ред. В. А. Щепетильникова. — М., 1975.
18. Дитрих, Я. Проектирование и конструирование. Системный подход / Я. Дитрих. — М., 1981.
19. Джонс, Дж. К. Методы проектирования / Дж. К. Джонс ; пер. с англ. — 2-е изд. — М., 1986.
20. Смелягин, А. И. Структура механизмов и машин : учеб. пособие / А. И. Смелягин. — Новосибирск : изд-во НГТУ, 2002.
21. Головин, А. А. Проектирование сложных рычажных механизмов / А. А. Головин. — М. : изд-во МГТУ, 1995.



Рис. 1.1

Несколько слов о методологии проектирования машин.

Процесс проектирования сложен и трудоемок не только в том случае, когда создается новая машина, не имеющая близких аналогов, но и тогда, когда необходимо получить более высокий качественный уровень одного или нескольких параметров машины с уже существующей кинематической схемой. Последовательность проектирования показана на рис. 1.1.

При проектировании машины должен быть осуществлен выбор ее оптимальных параметров (структурных, кинематических, точностных, динамических, эксплуатационных), наилучшим образом соответствующих предъявляемым к ней требованиям. Решения, принимаемые на стадии проектирования, могут корректироваться несколько позднее, на стадии разработки технологии изготовления машины. Однако следует помнить, что качество новой машины определяется в первую очередь качеством проектирования, поэтому неудачные решения на этом этапе не всегда могут быть компенсированы на последующих стадиях. Затраты на качественное



Рис. 1.2

проектирование окупается за счет экономии, получаемой впоследствии, включая и эксплуатацию машины.

Любая машина выполняет свой рабочий процесс посредством механического движения, поэтому она должна иметь носителя этого движения, каковым является механизм или система механизмов. Следовательно, составной частью общего процесса проектирования машины является проектирование ее механизмов. Оно включает разработку и анализ возможных вариантов схем машины и ее механизмов и оценку полученных решений методами оптимизации (рис. 1.2). Поиск оптимального, т.е. наилучшего решения для каждого варианта ведется, как правило, с использованием итерационных алгоритмов, которые поддаются формализации и должны быть реализованы на ЭВМ.

Процесс проектирования состоит из нескольких итерационных (повторяющихся) циклов (рис. 1.3). Первый цикл имеет сравнительно небольшой набор исходных данных, необходимых для расчета, и заканчивается совокупностью



Рис. 1.3

результатов, именуемых начальными. Эти результаты расчета первого цикла позволяют, во-первых, произвести в составе исходных данных, необходимых для расчета второго цикла, нужные уточнения и, во-вторых, пополнить исходные данные новыми, неизвестными ранее параметрами. Затем следует расчет второго цикла [21].

Второй итерационный цикл реализуется в результате определения масс и моментов инерции звеньев и уточнения размеров сочленений звеньев. По этим данным проводится силовой расчет с учетом ускоренного движения звеньев механизма и наличия трения в кинематических парах.

Третий итерационный цикл позволяет корректировать конструкцию привода. Исходные данные, необходимые для выбора двигателя, определяются в блоке «Динамический синтез, определение закона движения, управление движением» (см. рис. 1.3).

Проектирование нового механизма начинается с создания схемы механизма со структурно-кинематическими свойствами, соответствующими заданным с требуемой точностью. Структурные свойства механизма подразделяются на *внешние* — число степеней свободы и число обеспечиваемых механизмом связанных друг с другом перемещений рабочих органов машины; и *внутренние* — состав механизма, т.е. его внутренняя структура (состав звеньев и способ их соединения друг с другом). С точки зрения внутренней структуры можно выделить два типа механизмов — структурно-элементарные и структурно-сложные.

*Структурно-элементарные* механизмы, осуществляющие преобразование и передачу движения по определенному закону, объединены в группы по способу соединения звеньев друг с другом. Такими элементарными механизмами являются рычажные, зубчатые передаточные, планетарные, кулачковые и др., которые будут рассматриваться в последующих лекциях. В состав *структурно-сложных* механизмов могут входить несколько элементарных механизмов с различными кинематическими свойствами.

Кинематические свойства проектируемого механизма определяются его геометро-кинематическими характеристиками, связывающими параметры движения на входе механизма и на выходе из него. Основные геометро-кинематические характеристики механизмов: *функция положения*, определяющая связь координат выходного и входного звеньев, и *кинематическая передаточная функция*, являющаяся первой производной от функции положения.

Известно очень большое количество разновидностей как структурно-элементарных, так и структурно-сложных механизмов, обладающих разнообразными структурно-кинематическими характеристиками. Поэтому при проектировании нового механизма следует проанализировать возможности использования уже существующих механизмов для осуществления заданной функции. Для этого необходимо использовать систематизацию существующих схем механизмов [7, 9, 19, 14] по структурно-кинематическим признакам с определением их кинематических характеристик. Во многих случаях геометро-кинематические характеристики существующих механизмов вполне подходят для осуществления основной функции проектируемого механизма.

### Основные определения и понятия

Понятие машины определяется следующим образом: **машиной** называется **техническое устройство**, осуществляющее определенные механические движения, связанные с преобразованием энергии, свойств, размеров, формы или положения материалов (или объектов труда) и информации с целью облегчения физического и умственного труда человека, повышения его качества и производительности.

Существуют следующие виды машин (рис. 1.4).

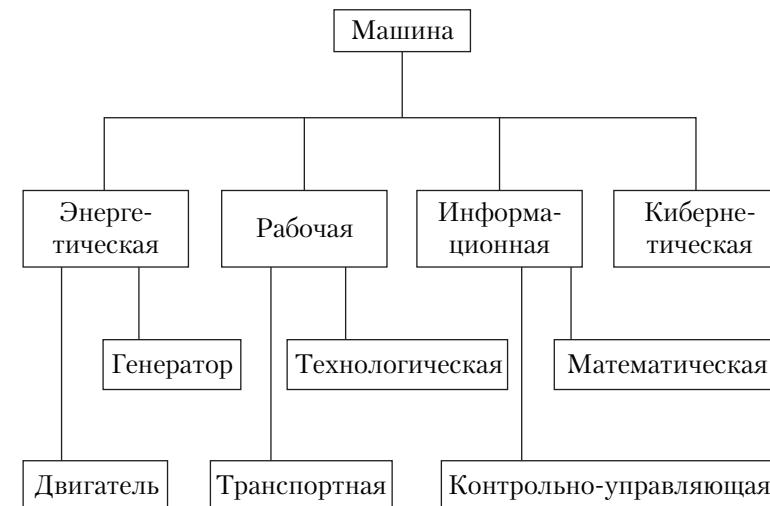


Рис. 1.4

**Энергетической машиной** называется машина, предназначенная для преобразования энергии. Если осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в механическую, то имеем дело с **машиной-двигателем**, если же процесс обратный — с **машиной-генератором**.

**Рабочая машина** предназначена для преобразования материалов, причем **транспортная** машина преобразует материал только путем изменения положения объекта, а **технологическая** — форму, свойства и положение материала или объекта.

**Информационная машина** служит для получения и преобразования информации.

**Контрольно-управляющая машина** преобразует информацию с целью управления энергетическими или рабочими машинами, а **математическая машина** — с целью получения математических образов, соответствующих свойствам объекта.

**Кибернетическая машина** имитирует или заменяет человека в процессах деятельности, присущих только ему или объектам живой природы, и обладает элементами искусственного интеллекта.

### Понятие о машинном агрегате

**Машинным агрегатом** называется техническая система, состоящая из одной или нескольких машин, соединенных последовательно или параллельно, и предназначенная для выполнения каких-либо требуемых функций (рис. 1.5).

Схема машинного агрегата



Рис. 1.5

Обычно в состав машинного агрегата входят: двигатель, передаточный механизм (их может быть несколько или не быть совсем) и рабочая или энергетическая машина. В настоящее время в состав машинного агрегата часто включается контрольно-управляющая или кибернетическая машина. Передаточный механизм в машинном агрегате необходим для согласования механических характеристик двигателя с механическими характеристиками рабочей или энергетической машины.

### Механизм и его элементы

**Механизмом** называется *система твердых тел, объединенных геометрическими или динамическими связями, и предназначенных для преобразования входных звеньев в требуемое движение выходных звеньев*.

Твердые тела, входящие в состав механизма, не являются абсолютно твердыми, однако их деформации обычно весьма малы.

Главное назначение создаваемого механизма — осуществление технической операции в результате движения его элементов.

**Звено** — это твердое тело, входящее в состав механизма.

**Кинематическая пара** — это соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

Звено, относительно которого рассматривается движение остальных звеньев, считается условно неподвижным и называется **стойкой**.

**Входное звено** — это звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемое движение других звеньев.

**Выходное звено** — это звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен данный механизм.

Рассмотрим простейший кривошипно-ползунный механизм на рис. 1.6, основные элементы которого: кривошип (1); шатун (2); ползун (3); стойка (4), составляющие кинематические пары *A, B, C, D*.

Несколько звеньев, связанных между собой кинематическими парами, образуют кинематическую цепь (рис. 1.7), которая может быть: а) **замкнутой**, у которой звенья образуют один или несколько замкнутых контуров; б) **незамкнутой**, звенья которой не образуют замкнутых контуров

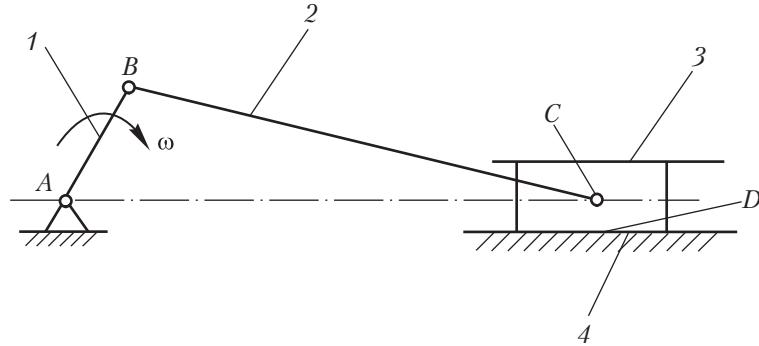


Рис. 1.6

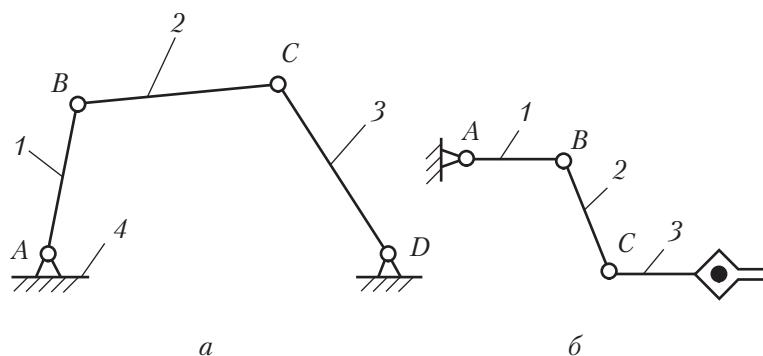


Рис. 1.7

(на рис. 1.7 цифровые и буквенные обозначения такие же, как на рис 1.6).

В современном машиностроении применяются машины и механизмы с абсолютно твердыми (жесткими), упругими (гибкими), жидкими и газообразными телами (звеньями).

Преобладающее большинство используемых в механизмах звеньев являются абсолютно *твёрдыми*. К *упругим* звеньям относят пружины, мембранны и другие элементы, упругая деформация которых вносит существенные изменения в работу механизма; к *гибким* — ремни, цепи, канаты; к *жидким и газообразным* — масло, воду, газ, воздух и тому подобные вещества.

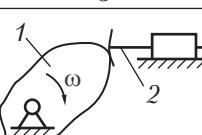
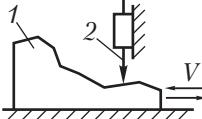
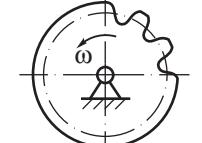
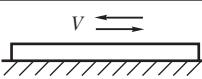
Основные виды звеньев механизмов показаны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

## Основные виды звеньев механизмов

№ п/п	Название	Условное изобра- жение на схемах	Движение	Особен- ности
1	2	3	4	5
1	Стойка		Отсутствует	
2	Стойка		Отсутствует	
3	Кривошип		Враща- тельное	Полный оборот
4	Шатун		Сложное	Нет пар, связанных со стойкой
5	Коромысло		Кача- тельный	Неполный оборот, воз- вратно-вра- щательное движение
6	Ползун		Возвратно- поступа- тельное	Направ- ляющая неподвижна
7	Кулиса (1) Камень (2)		Вращатель- ное, колеба- тельный	Направ- ляющая подвижна
8	Кулиса (1) Камень (2)		Сложное	Направ- ляющая подвижна
9	Кулиса (1) Камень (2)		Возвратно- поступа- тельное	Направ- ляющая подвижна

Окончание табл. 1.1

1	2	3	4	5
10	Кулачок (1) Толкатель (2)		Вращательное, колебательное	Профиль определяет закон движения ведомого звена
11	Кулачок (1) Толкатель (2)		Возвратно-поступательное	Профиль определяет закон движения ведомого звена
12	Зубчатое колесо		Вращательное, колебательное	Зубчатый контур
13	Фрикционное колесо		Вращательное, колебательное	
14	Рейка		Возвратно-поступательное	Может иметь зубчатый контур

### Контрольные вопросы и задания к лекции 1

- Что называется машиной? Какие машины вы знаете? Что такое машинный агрегат?
- Что называется механизмом, кинематической цепью? Какие виды кинематических цепей существуют?
- Какая разница между кинематической цепью и кинематической парой?
- Что называют кинематической парой, как данные пары классифицируют?
- Как происходит замыкание кинематических пар в кинематической цепи?
- Что называют звеном, какие виды звеньев существуют? Чем отличается деталь от звена?

## Лекция 2

### Классификация кинематических пар

Каким бы ни был механизм машины, он всегда состоит только из звеньев и кинематических пар.

Условия связи, налагаемые в механизмах на подвижные звенья, в теории машин и механизмов принято называть кинематическими парами.

*Кинематической парой* называется подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, обеспечивающее их определенное относительное движение.

В табл. 2.1 представлена классификация кинематических пар, приведены названия, рисунки, условные обозначения наиболее распространенных на практике способов подвижных соединений звеньев.

Звенья при объединении их в кинематическую пару могут соприкасаться между собой по поверхностям, линиям и точкам.

*Элементами кинематической пары* называют совокупность поверхностей, линий или точек, по которым происходит подвижное соединение двух звеньев и которые образуют кинематическую пару. В зависимости от вида контакта элементов кинематических пар различают высшие и низшие кинематические пары.

Кинематические пары, образованные элементами в виде линии или точки, называются *высшими*.

Кинематические пары, образованные элементами в виде поверхностей, называются *низшими*.

Чтобы пара существовала, элементы входящих в нее звеньев должны находиться в постоянном контакте, т.е. быть замкнутыми. Замыкание кинематических пар может быть *геометрическим* или *силовым*, осуществляемым, например, с помощью собственной массы, пружин и т.п.

Таблица 2.1

## Классификация кинематических пар

В точке	По линии	Низшая кинематическая пара	По поверхности		
			Контакт звеньев	Вид пары	Подвижность пары
			Виды кинематических пар	Число связей	Изображение пары
Высшая кинематич. пара Пяти-подвижные $\Pi = 5$	Четырех-подвижные $\Pi = 4$	Трехподвижные $\Pi = 3$	Одно подвижные $\Pi = 1$	$S = 5$	
			Двухподвижные $\Pi = 2$	$S = 4$	
				$S = 3$	
				$S = 2$	
				$S = 1$	
			Шариковые направляющие Однорядный радиальный подшипник Шариковый винт Радиальный подшипник, свободный по оси X Подшипник Сферический подшипник, свободный по оси X		

Примечания. Виды кинематических пар: 1П — поступательная; 1В — вращательная; 1ВТ — вращательная точечная; 2Ц — цилиндрическая; 3СФ — сферическая; 3ПЛ — плоскостная; 4П — четырехподвижная с линейным контактом; 5Т — пятиподвижная с точечным контактом.

Прочность, износостойкость и долговечность кинематических пар зависят от их вида и конструктивного исполнения. Низшие пары более износостойкие, чем высшие. Это объясняется тем, что в низших парах контакт элементов пар происходит по поверхности, а следовательно, при одинаковой нагрузке в них возникают меньшие удельные давления, чем в высших. Износ, при прочих равных условиях, пропорционален удельному давлению, поэтому низшие пары изнашиваются медленнее, чем высшие. Использование низших пар с целью уменьшения износа в машинах предпочтительнее, однако применение высших кинематических пар часто позволяет значительно упростить структурные схемы машин, что снижает их габариты и упрощает конструкцию. Поэтому правильный выбор кинематических пар является сложной инженерной задачей.

Кинематические пары разделяют также по *числу степеней свободы (подвижности)*, которые она предоставляет соединенным посредством нее звеньям, или по *числу условий связей (класс пары)*, налагаемых парой на относительное движение соединяемых звеньев. При использовании такой классификации разработчики машин получают сведения о возможных относительных движениях звеньев и о характере взаимодействия силовых факторов между элементами пары.

Свободное звено, находящееся в общем случае в  $M$ -мерном пространстве, допускающем  $\Pi$  видов простейших движений, обладает числом степеней свободы  $H$  или  $W$ -подвижно.

Так, если звено находится в трехмерном пространстве, допускающем шесть видов простейших движений — три вращательных и три поступательных вокруг и вдоль осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , то говорят, что оно обладает шестью степенями свободы, или имеет шесть обобщенных координат, или шестиподвижно. Если звено находится в двухмерном пространстве, допускающем три вида простейших движений — одно вращательное вокруг  $Z$  и два поступательных вдоль осей  $X$  и  $Y$ , то говорят, что оно имеет три степени свободы, или три обобщенные координаты, или оно трехподвижно и т.д.

При объединении звеньев с помощью кинематических пар они лишаются степеней свободы, значит,  $S$  — число связей, которые кинематические пары налагают на соединяемые ими звенья.

В зависимости от числа степеней свободы, которым обладают в относительном движении звенья, объединенные в кинематическую пару, определяют подвижность пары

$(W = H)$ . Если  $H$  – число степеней свободы звеньев кинематической пары в относительном движении, то подвижность пары определится следующим образом:

$$W = \Pi - S,$$

где  $\Pi$  – подвижность пространства, в котором существует рассматриваемая пара;  $S$  – число налагаемых парой связей.

Следует заметить, что подвижность пары  $W$ , определенная по табл. 2.1, зависит не от вида пространства, в котором она реализуется, а только от конструкции.

Например, вращательная (поступательная) пара (см. табл. 2.1) как в шести-, так и в трехподвижном пространстве все равно останется одноподвижной. В первом случае на нее будет наложено 5 связей, а во втором случае – 2 связи, соответственно, будем иметь:

для шестиподвижного пространства:

$$W = 6 - 5 = 1,$$

для трехподвижного пространства:

$$W = 3 - 2 = 1.$$

Как видим, подвижность кинематических пар не зависит от характеристик пространства, что является преимуществом данной классификации. Напротив, часто встречающееся деление кинематических пар на классы страдает тем, что класс пары зависит от характеристик пространства, а значит, одна и та же пара в разных пространствах имеет разный класс. Это неудобно для практических целей, следовательно, такая классификация кинематических пар нерациональна, поэтому ее лучше не применять.

Можно подобрать такую форму элементов пары, чтобы при одном независимом простейшем движении возникало второе – зависимое (производное). Примером такой кинематической пары является винтовая (см. табл. 2.1). В этой паре вращательное движение винта (гайки) вызывает поступательное его (ее) перемещение вдоль оси. Такую пару следует отнести к одноподвижной, так как в ней реализуется всего одно независимое простейшее движение.

### Кинематические соединения

Кинематические пары, приведенные в табл. 2.1, просты и компактны. Они реализуют практически все необходимые при создании механизмов простейшие относительные пере-

мещения звеньев. Однако при создании машин и механизмов они применяются редко. Это обусловлено тем, что в точках соприкосновения звеньев, образующих пару, обычно возникают большие силы трения. Это приводит к значительному износу элементов пары и ее разрушению. Поэтому простейшую двухзвенную кинематическую цепь кинематической пары часто заменяют более длинными кинематическими цепями, которые в совокупности реализуют то же самое относительное движение звеньев, что и заменяемая кинематическая пара.

*Кинематическая цепь*, предназначенная для замены кинематической пары, называется *кинематическим соединением*.

Приведем примеры кинематических цепей для наиболее распространенных на практике кинематических пар: вращательной, поступательной, винтовой, сферической и плоскость–плоскость.

В табл. 2.1 показано, что простейшим аналогом вращательной кинематической пары является подшипник с телами качения. Аналогично роликовые направляющие заменяют поступательную пару и т.д.

Кинематические соединения удобнее и надежнее в эксплуатации, выдерживают значительно большие силы (моменты) и позволяют механизмам работать при высоких относительных скоростях звеньев.

### Основные виды механизмов

Механизм можно рассматривать как частный случай кинематической цепи, у которой, как минимум, одно звено обращено в стойку, а движение остальных определено заданным движением входных звеньев.

Отличительными особенностями кинематической цепи, представляющей механизм, являются подвижность и определенность движения ее звеньев относительно стойки.

Механизм может иметь несколько входных и одно выходное звено, в этом случае он называется суммирующим механизмом и, наоборот – одно входное и несколько выходных, тогда он называется дифференциальным механизмом.

По своему назначению механизмы разделяются на передаточные и направляющие.

*Передаточным* называется механизм, предназначенный для воспроизведения заданной функциональной зависимости между перемещениями входного и выходного звеньев.

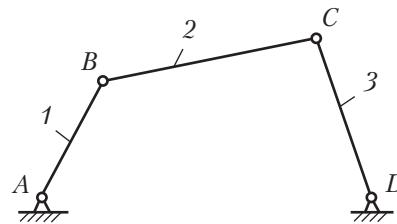


Рис. 2.1

**Направляющим** называется механизм, у которого траектория определенной точки звена, образующего кинематические пары только с подвижными звеньями, совпадает с заданной кривой.

Рассмотрим основные виды механизмов, нашедших широкое применение в технике.

Механизмы, звенья которых образуют только низшие кинематические пары, называют **рычажными**. Эти механизмы нашли широкое применение благодаря тому, что они долговечны, надежны и просты в эксплуатации. Основным представителем таких механизмов является шарнирный четырехзвенник (рис. 2.1), состоящий из кривошипа (1), шатуна (2), коромысла (3).

Названия механизмов обычно определяются по названиям их входного и выходного звеньев или характерного звена, входящего в их состав.

В зависимости от законов движения входного и выходного звеньев этот механизм может называться кривошипно-коромысловым, двойным кривошипным, двойным коромысловым, коромыслово-кривошипным.

Шарнирный четырехзвенник применяется в станкостроении, приборостроении, а также в сельскохозяйственных, пищевых, снегоуборочных и других машинах.

Если заменить в шарнирном четырехзвеннике вращательную пару, например *D*, на поступательную, то получим широко известный кривошипно-ползунный механизм, различные виды которого представлены на рис. 2.2, *a*, *b*.

Главными составляющими кривошипно-ползунных механизмов являются: кривошип (1); шатун (2); ползун (3).

Кривошипно-ползунный (ползунно-кривошипный) механизм нашел широкое применение в компрессорах, насосах, двигателях внутреннего сгорания и других машинах.

Заменив в шарнирном четырехзвеннике вращательную пару *C* на поступательную, получим **кулисный** механизм

(различные виды механизмов представлены на рис. 2.3, *a*, *b*, *v*). Составляющие кулисного механизма: кривошип (1); камень (2); кулиса (3). Кулисный механизм на рис. 2.3, *v* получен из шарнирного четырехзвенника путем замены в нем вращательных пар *C* и *D* на поступательные.

Кулисные механизмы нашли широкое применение в строгальных станках благодаря присущему им свойству асимметрии рабочего и холостого хода: у них длительный рабочий ход и быстрый, обеспечивающий возврат резца в исходное положение, холостой ход.

Большое применение шарнирно-рычажные механизмы нашли в робототехнике. В изображенном на рис. 2.4 устройстве механизма манипулятора 1, 2, 3, 4 – звенья; *A*, *B*, *C*, *D* – кинематические пары.

Особенностью этих механизмов является то, что они обладают большим числом степеней свободы, а значит, имеют много приводов. Согласованная работа приводов входных звеньев обеспечивает перемещение схвата по рациональной траектории и в заданное место окружающего пространства.

Широкое применение в технике получили **кулачковые механизмы**. При помощи кулачковых механизмов

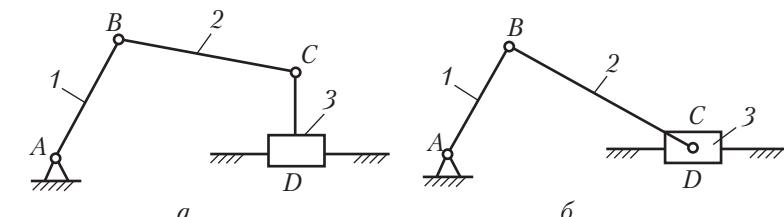


Рис. 2.2

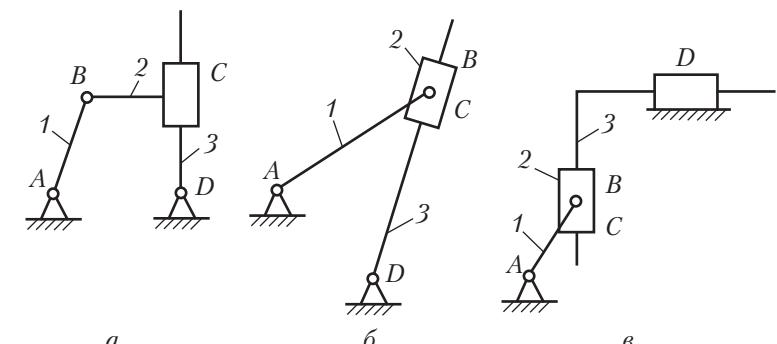


Рис. 2.3

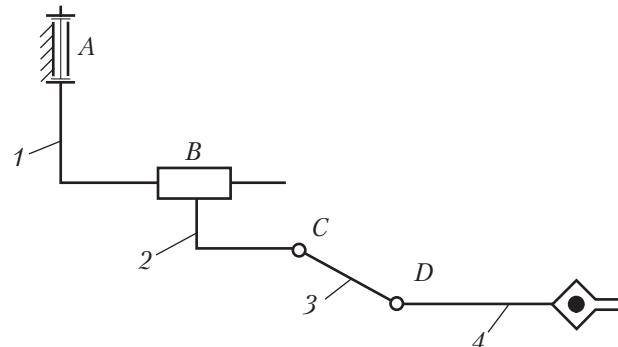


Рис. 2.4

конструктивно наиболее просто можно получить практически любое движение ведомого звена по заданному закону.

В настоящее время существует большое число разновидностей кулачковых механизмов, некоторые из них представлены на рис. 2.5. Устройство кулачкового механизма: кулачок (1); плоский толкатель (2); коромысло (2); острый толкатель (3); ролик (3).

Необходимый закон движения выходного звена кулачкового механизма достигается за счет придания входному звено

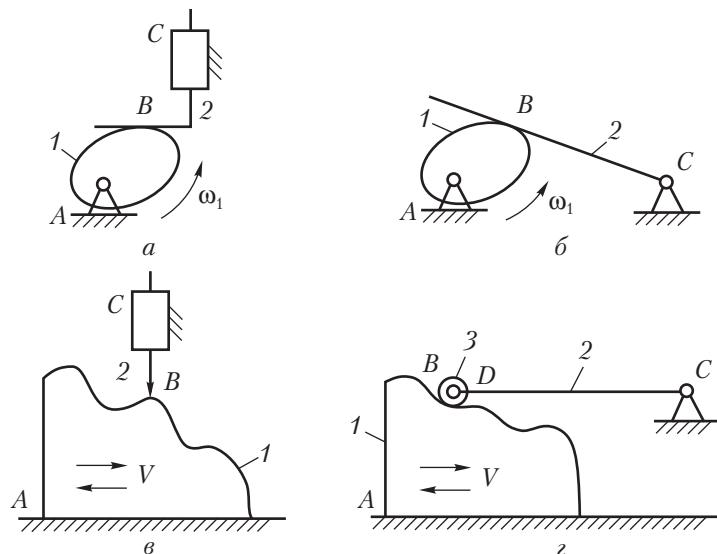


Рис. 2.5

(кулачку) соответствующей формы. Кулачок может совершать вращательное (рис. 2.5, а, б), поступательное (рис. 2.5, в, г) или сложное движение. Выходное звено, если оно совершает поступательное движение (рис. 2.5, а, в), называют толкателем, а если качательное (рис. 2.5, г) — коромыслом. Для снижения потерь на трение в высшей кинематической паре В применяют дополнительное звено-ролик (рис. 2.5, г).

Кулачковые механизмы применяются как в рабочих машинах, так и в разного рода командоаппаратах.

Очень часто в металлорежущих станках, прессах, различных приборах и измерительных устройствах применяются *винтовые механизмы*, простейший из которых представлен на рис. 2.6. Он состоит из винта (1), гайки (2) и кинематических пар А, В, С.

Винтовые механизмы обычно применяются там, где необходимо преобразовать вращательное движение во взаимозависимое поступательное или наоборот. Взаимозависимость движений устанавливается правильным подбором геометрических параметров винтовой пары В.

*Клиновые механизмы* (рис. 2.7) применяются в различного вида зажимных устройствах и приспособлениях, в которых требуется создать большое усилие на выходе при ограниченных силах, действующих на входе. Отличительной особенностью этих механизмов являются простота и надежность конструкций: 1, 2 — звенья; А, В, С — кинематические пары (см. рис. 2.7).

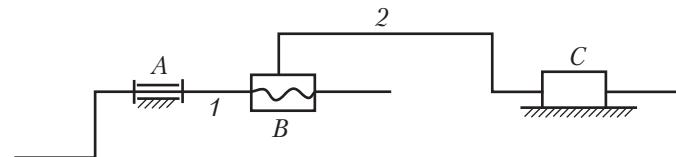


Рис. 2.6

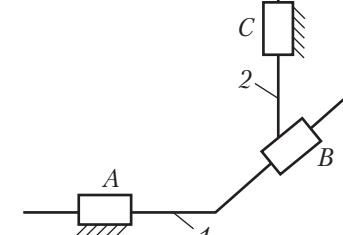


Рис. 2.7

Механизмы, в которых передача движения между со-прикасающимися телами осуществляется за счет сил трения, называются *фрикционными*. Простейшие трехзвенные фрикционные механизмы представлены на рис. 2.8: фрикционный механизм с параллельными осями (*а*); фрикционный механизм с пересекающимися осями (*б*); реечный фрикционный механизм (*в*). Основные составляющие механизмов: входной ролик 1; выходной ролик (колесо) 2; рейка 2' (см. рис. 2.8).

Вследствие того, что звенья 1 и 2 прижаты друг к другу, по линии касания между ними возникает сила трения, которая увлекает за собой ведомое звено 2.

Широкое применение фрикционные передачи получили в приборах, лентопротяжных механизмах, вариаторах (механизмах с плавной регулировкой числа оборотов).

Для передачи вращательного движения по заданному закону между валами с параллельными, пересекающимися и перекрещивающимися осями применяются различного вида *зубчатые механизмы*. При помощи зубчатых колес

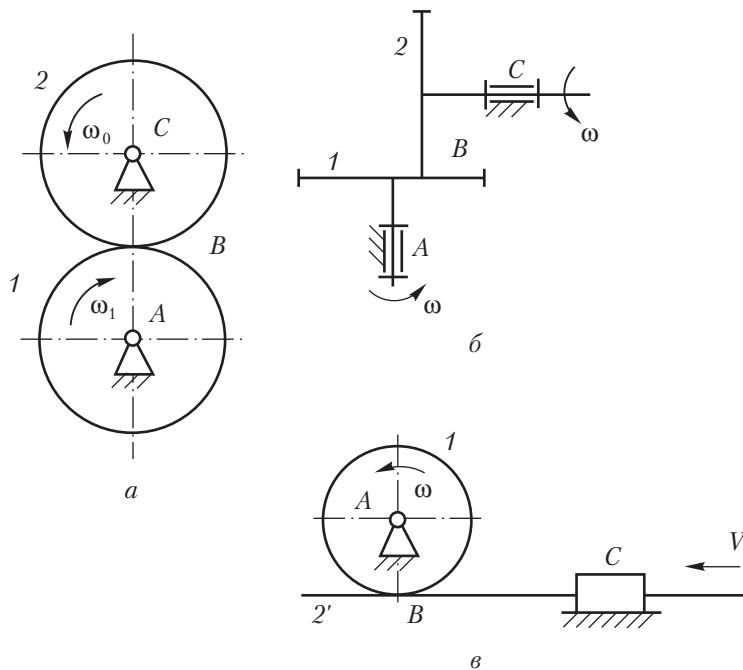


Рис. 2.8

можно осуществлять передачу движения как между валами с *неподвижными* осями, так и с осями, *перемещающимися* в пространстве.

Зубчатые механизмы применяют для изменения частоты и направления вращения выходного звена, суммирования или разделения движений.

На рис. 2.9 показаны основные представители зубчатых передач с неподвижными осями: цилиндрическая (*а*); коническая (*б*); торцовая (*в*); реечная (*г*), состоящие из шестерни 1, зубчатого колеса 2 и рейки 2\*.

Меньшее из двух зацепляющихся зубчатых колес называют *шестерней*, а большее – *зубчатым колесом*.

Рейка является частным случаем зубчатого колеса, у которого радиус кривизны равен бесконечности.

Если в зубчатой передаче имеются зубчатые колеса с подвижными осями, то эти передачи называют *планетарными* (рис. 2.10). Планетарная зубчатая передача состоит из: стойки 0, представляющей зубчатое колесо 3 с внутренним зацеплением; солнечного зубчатого колеса 1; сателлита 2;

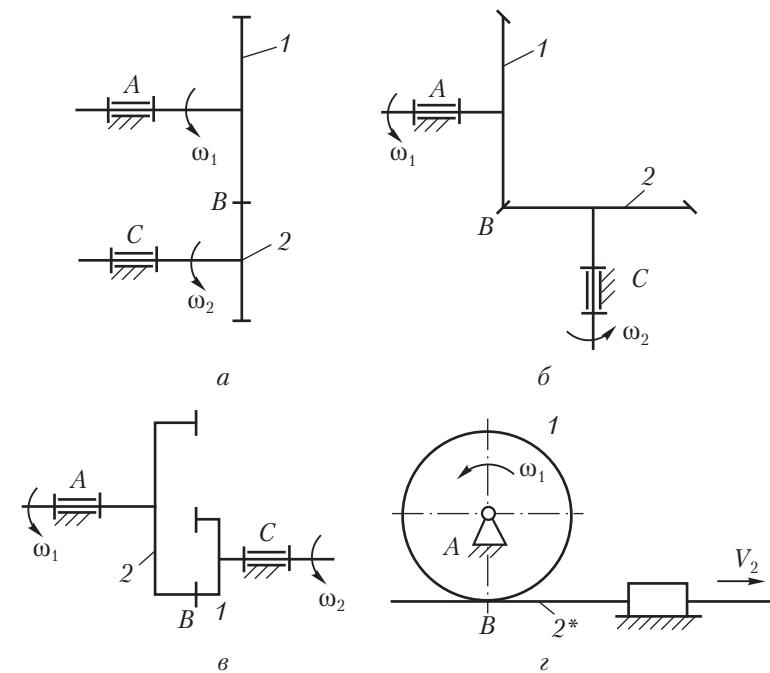


Рис. 2.9

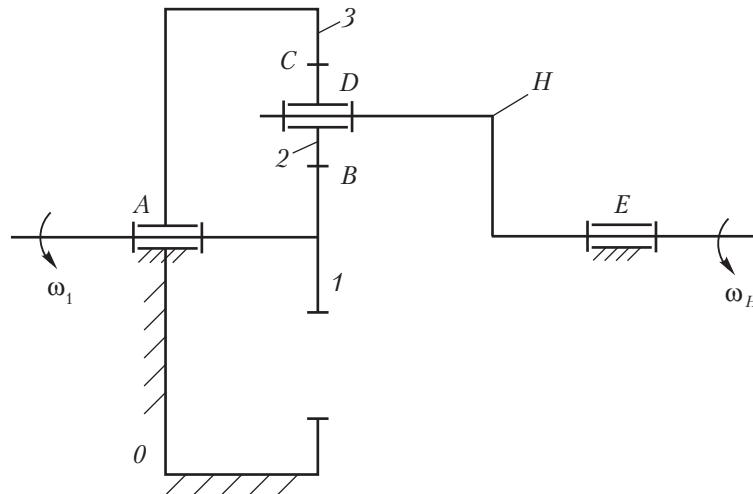


Рис. 2.10

водила  $H$ ; низших кинематических пар  $A, D, E$ ; высших кинематических пар  $B, C$ .

Планетарные зубчатые передачи позволяют передавать большие мощности и реализовывать большие передаточные числа при меньшем числе зубчатых колес, чем передачи с неподвижными осями. Они также широко применяются при создании суммирующих и дифференциальных механизмов.

Передача движений между перекрещивающимися осями осуществляется с помощью *червячной* передачи (рис. 2.11), состоящей из червяка  $1$  и червячного колеса  $2$ .

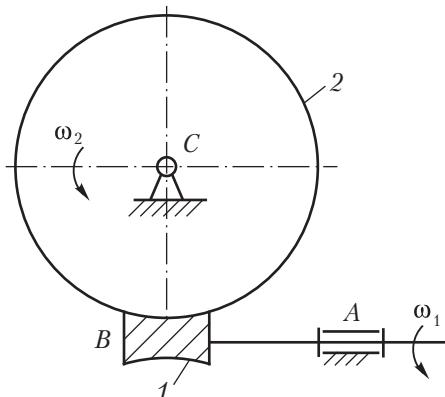


Рис. 2.11

Червячная передача получается из передачи винт–гайка путем продольной разрезки гайки и ее двукратного сворачивания во взаимно перпендикулярных плоскостях. Червячная передача обладает свойством самоторможения и позволяет в одной ступени реализовывать большие передаточные отношения.

К зубчатым механизмам прерывистого движения относят также механизм «мальтийского креста», или *мальтийский механизм*. На рис. 2.12 показан механизм четырехпазового «мальтийского креста».

Механизм «мальтийского креста» преобразует непрерывное вращение ведущего звена — кривошипа  $1$  с цевкой  $3$  в прерывистое вращение креста  $2$ ; цевка  $3$  без удара входит в радиальный паз креста  $2$  и поворачивает его на угол  $\frac{2\pi}{z}$ , где  $z$  — число пазов. Механизм имеет массивную неподвижную стойку  $4$ .

Для осуществления движения только в одном направлении применяют храповые механизмы. На рис. 2.13 показан *храповый механизм*, состоящий из коромысла  $1$ , храпового колеса  $3$ , стойки  $4$ , собачек  $2, 5$  и пружины  $6$ .

При качаниях коромысла  $1$  качающаяся собачка  $2$  сообщает вращение храповому колесу  $3$  только при движении

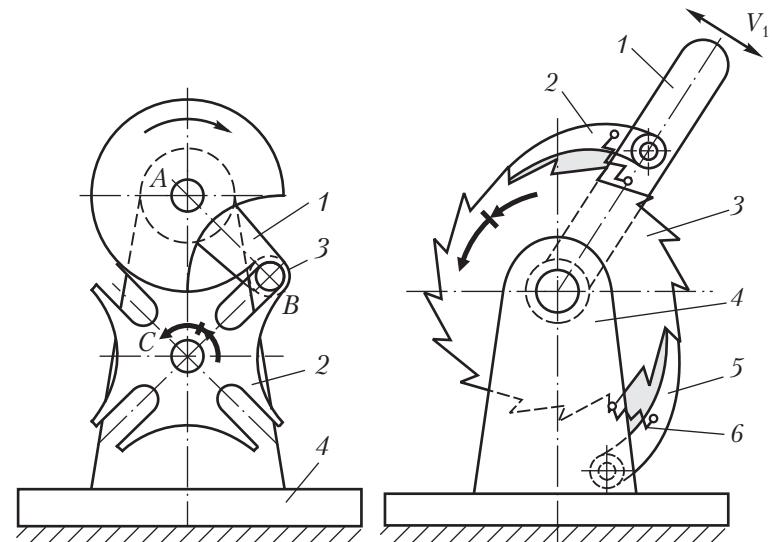


Рис. 2.12

Рис. 2.13

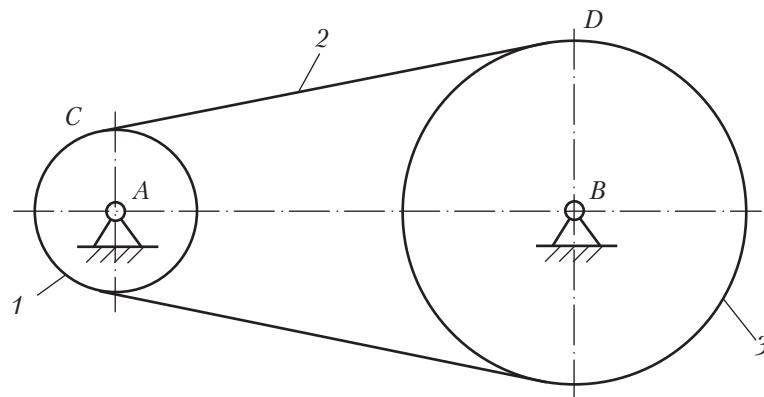


Рис. 2.14

коромысла против часовой стрелки. Для удержания колеса 3 от самопроизвольного поворота по часовой стрелке при движении коромысла против хода часов служит стопорная собачка 5 с пружиной 6.

Мальтийские и храповые механизмы широко применяются в станках и приборах.

Если необходимо передать на относительно большое расстояние механическую энергию из одной точки пространства в другую, то применяют механизмы с гибкими звеньями.

В качестве гибких звеньев, передающих движение от одного звена механизма к другому, используются ремни, канаты, цепи, нити, ленты, шарики и т.п.

На рис. 2.14 приведена структурная схема простейшего механизма с гибким звеном, состоящего из малого шкива 1, гибкого элемента 2 и большого шкива 3.

Передачи с гибкими звеньями широко применяются в машиностроении, приборостроении и других отраслях промышленности.

Выше были рассмотрены наиболее типичные простейшие механизмы. Большое количество механизмов приводится в специальной литературе, патентах и справочниках, например таких, как [7, 9, 14].

### Структурные формулы механизмов

Существуют общие закономерности в структуре (строении) самых различных механизмов, связывающие число

степеней свободы  $W$  механизма с числом звеньев и числом и видом его кинематических пар. Эти закономерности носят название структурных формул механизмов.

Для пространственных механизмов в настоящее время наиболее распространена формула Малышева, вывод которой производится следующим образом.

Пусть в механизме, имеющем  $m$  звеньев (включая стойку),  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  — число одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных пар. Число подвижных звеньев обозначим  $n = m - 1$ . Если бы все подвижные звенья были свободными телами, общее число степеней свободы было бы равно  $6n$ . Однако каждая одноподвижная пара V класса накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, 5 связей, каждая двухподвижная пара IV класса — 4 связи и т.д. Следовательно, общее число степеней свободы, равное шести, будет уменьшено на величину

$$\sum_{i=1}^5 (6-i)p_i = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5, \quad (2.1)$$

где  $i = H$  — подвижность кинематической пары;  $p_i$  — число пар, подвижность которых равна  $i$ . В общее число наложенных связей может войти некоторое число  $q$  избыточных (повторных), которые дублируют другие связи, не уменьшая подвижности механизма, а только обращая его в статически неопределенную систему [12]. Поэтому число степеней свободы пространственного механизма, равное числу степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Малышева:

$$W = 6n - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - q),$$

или в краткой записи

$$W = 6n - \left[ \sum_{i=1}^5 (6-i)p_i - q \right]; \quad (2.2)$$

при  $q = 0$  механизм — статически определимая система, при  $q > 0$  — статически неопределенная система.

В общем случае решение уравнения (2.2) — трудная задача, поскольку неизвестны  $W$  и  $q$ ; имеющиеся способы решений сложны и не рассматриваются в данной лекции. В частном случае, если  $W$ , равное числу обобщенных

координат механизма, найдено геометрическим способом, из этой формулы можно найти число избыточных связей<sup>1</sup>

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^5 (6 - i)p_i \quad (2.3)$$

и решить вопрос о статической определимости механизма; или же, зная, что механизм статически определимый, найти (или проверить)  $W$ .

Важно заметить, что в структурные формулы не входят размеры звеньев, поэтому при структурном анализе механизмов можно предполагать их любыми (в некоторых пределах). Если избыточных связей нет ( $q = 0$ ), сборка механизма происходит без деформирования звеньев, последние как бы самоустанавливаются; поэтому такие механизмы называют самоустанавливающимися [12]. Если избыточные связи есть ( $q > 0$ ), то сборка механизма и движение его звеньев становятся возможными только при деформировании последних.

Для плоских механизмов без избыточных связей структурная формула носит имя П. Л. Чебышева, впервые предложившего ее в 1869 г. для рычажных механизмов с вращательными парами и одной степенью свободы. В настоящее время формула Чебышева распространяется на любые плоские механизмы и выводится с учетом избыточных связей следующим образом.

Пусть в плоском механизме, имеющем  $m$  звеньев (включая стойку),  $n = m - 1$  — число подвижных звеньев,  $p_n$  — число низших пар и  $p_b$  — число высших пар. Если бы все подвижные звенья были свободными телами, совершающими плоское движение, общее число степеней свободы было бы равно  $3n$ . Однако каждая низшая пара накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, две связи, оставляя одну степень свободы, а каждая высшая пара накладывает одну связь, оставляя две степени свободы.

В число наложенных связей может войти некоторое число  $q_n$  избыточных (повторных) связей, устранение которых не увеличивает подвижности механизма. Следовательно, число степеней свободы плоского механизма, т.е. число степеней свободы его подвижной кинематической цепи

<sup>1</sup> Решетов, Л. Н. Конструирование рациональных механизмов / Л. Н. Решетов. — М., 1972.

относительно стойки, определяется по следующей формуле Чебышева:

$$W_n = 3n - (2p_n + p_b - q_n). \quad (2.4)$$

Если  $W_n$  известно, отсюда можно найти число избыточных связей

$$q_n = W_n - 3n + 2p_n + p_b. \quad (2.5)$$

Индекс «п» напоминает о том, что речь идет об идеально плоском механизме или, точнее, о его плоской схеме, поскольку за счет неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере является пространственным.

По формулам (2.2)–(2.5) проводят структурный анализ имеющихся механизмов и синтез структурных схем новых механизмов.

### Структурный анализ и синтез механизмов. Влияние избыточных связей на работоспособность и надежность машин

Как было сказано выше, при произвольных (в некоторых пределах) размерах звеньев механизм с избыточными связями ( $q > 0$ ) нельзя собрать без деформирования звеньев. Поэтому такие механизмы требуют повышенной точности изготовления, в противном случае в процессе сборки звенья механизма деформируются, что вызывает нагружение кинематических пар и звеньев значительными дополнительными силами (сверх тех основных внешних сил, для передачи которых механизм предназначен). При недостаточной точности изготовления механизма с избыточными связями трение в кинематических парах может сильно увеличиться и привести к заклиниванию звеньев, поэтому с этой точки зрения избыточные связи в механизмах нежелательны.

Что касается избыточных связей в кинематических цепях механизма, то при конструировании машин их следует стремиться устраниТЬ или же оставлять минимальное число, если полное их устранение оказывается невыгодным из-за усложнения конструкции или по каким-либо другим соображениям. В общем случае оптимальное решение следует искать, учитывая наличие необходимого технологического оборудования, стоимость изготовления, требуемые ресурсы работы и надежность машины. Следовательно, это весьма сложная задача для каждого конкретного случая.

Методику определения и устранения избыточных связей в кинематических цепях механизмов рассмотрим на примерах.

Пусть плоский четырехзвеный механизм с четырьмя одноподвижными вращательными парами ( $W = 1, n = 3, p_1 = 4$ , рис. 2.15, *a*) за счет неточностей изготовления (например, вследствие непараллельности осей *A* и *D*) оказался пространственным. Сборка кинематических цепей 4, 3, 2 и отдельно 4, 1 не вызывает трудностей, а точки *B*, *B'* можно расположить на оси *x*. Однако собрать вращательную пару *B*, образованную звенями 1 и 2, можно будет лишь совместив системы координат *Bxyz* и *B'x'y'z'*, для чего потребуются линейное перемещение (деформация) точки *B'* звена 2 вдоль оси *x* и угловые деформации звена 2 вокруг осей *x* и *z* (показаны стрелками). Это означает наличие в механизме трех избыточных связей, что подтверждается и по формуле (2.3):  $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$ . Для того чтобы данный пространственный механизм был

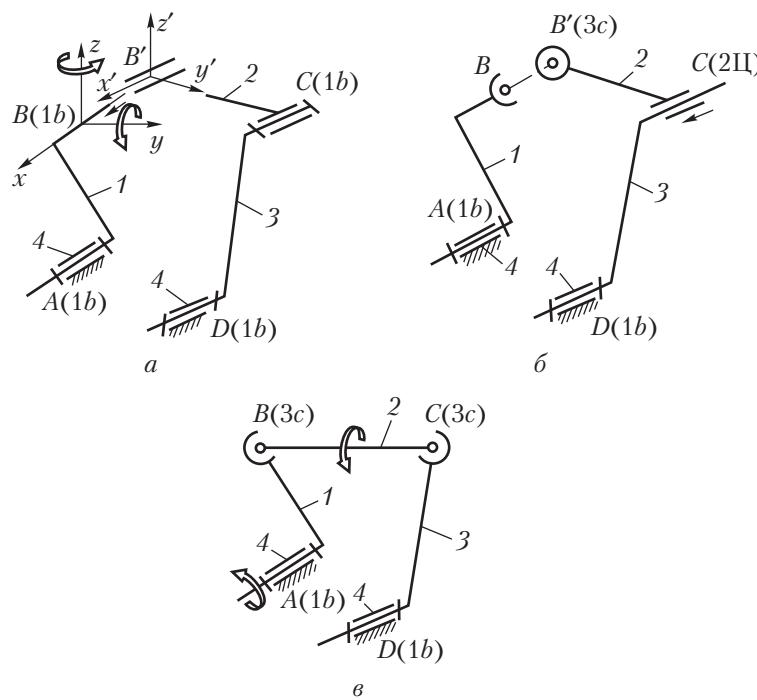


Рис. 2.15

статически определимым, нужна другая структурная схема, например изображенная на рис. 2.15, *b*, где  $W = 1, p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1$ . Сборка такого механизма произойдет без натягов, поскольку совмещение точек *B* и *B'* будет возможно за счет перемещения точки *C* в цилиндрической паре.

Возможен вариант механизма (рис. 2.15, *c*) с двумя сферическими парами ( $p_1 = 2, p_3 = 2$ ); в этом случае, помимо основной подвижности механизма  $W_0 = 1$  появляется местная подвижность  $W_m = 1$  — возможность вращения шатуна 2 вокруг своей оси *BC*; эта подвижность не влияет на основной закон движения механизма и может быть даже полезна с точки зрения выравнивания износа шарниров: шатун 2 может при работе механизма поворачиваться вокруг своей оси за счет динамических нагрузок. Формула Малышева подтверждает, что такой механизм будет статически определимым:

$$q = 2 - 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0.$$

Наиболее простой и эффективный способ устранения избыточных связей в механизмах приборов — применение высшей пары с точечным контактом взамен звена с двумя низшими парами; степень подвижности плоского механизма в этом случае не меняется, поскольку по формуле Чебышева (при  $q_n = 0$ ):

$$W_n = 3n - 2p_h - p_b = 3(n - 1) - 2(p_h - 2) - (p_b + 1).$$

На рис. 2.16, *a*, *b*, *v* дан пример устранения избыточных связей в кулачковом механизме с поступательно движущимся роликовым толкателем. Механизм (см. рис. 2.16, *a*) — четырехзвенный ( $n = 3$ ); кроме основной подвижности (вращение кулачка 1) имеется местная подвижность (независимое вращение круглого цилиндрического ролика 3 вокруг своей оси); следовательно,  $W_n = W = W_0 + W_m = 2$ . Плоская схема избыточных связей не имеет (механизм собирается без натягов:  $q_n = W_n - 3n + 2p_h + p_b = 2 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 = 0$ ). Если вследствие неточностей изготовления механизм считать пространственным, то при линейном контакте ролика 3 с кулачком 1, по формуле Малышева, при  $p_1 = 3$  получим  $q = 1$ , но при определенном условии. Кинематическая пара цилиндр—цилиндр (см. рис. 2.16, *b*) при невозможности относительного поворота звеньев 1, 3 вокруг оси *z* была бы трехподвижной парой. Если же такой поворот вследствие неточности изготовления имеет место, но мал и

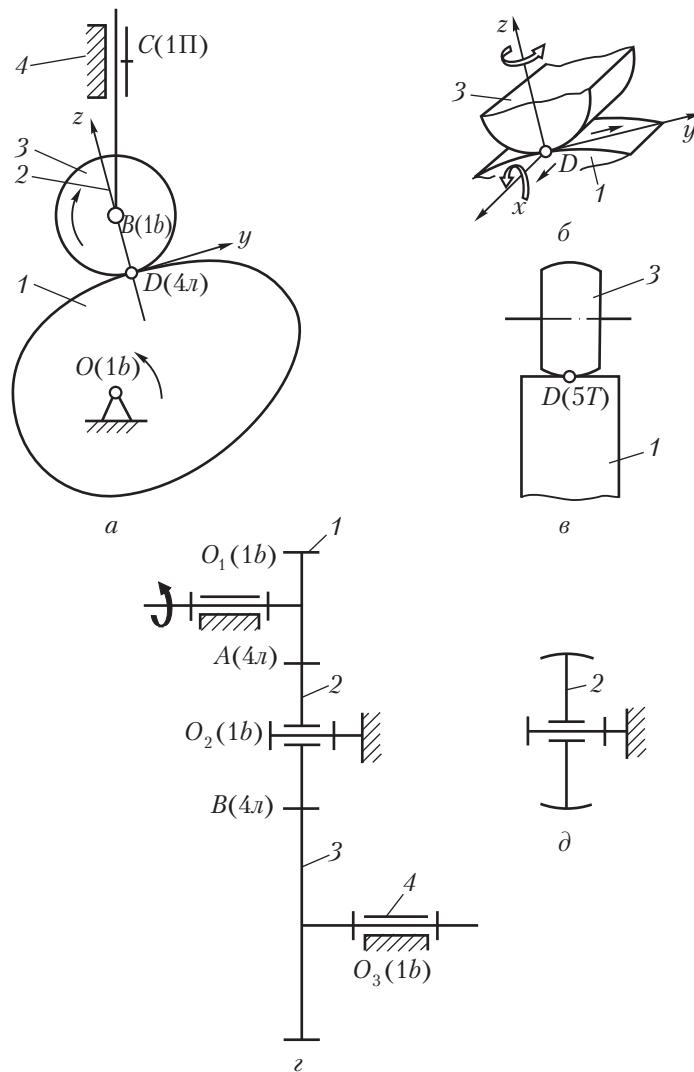


Рис. 2.16

практически сохраняется линейный контакт (при нагружении пятно контакта по форме близко к прямоугольнику), то данная кинематическая пара будет четырехподвижной, следовательно,  $p_4 = 1$  и  $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1$ .

Сниженный класс высшей пары путем применения бочкообразного ролика (пятиподвижная пара с точечным контактом,

см. рис. 2.16, в), получим при  $p_1 = 3$  и  $p_5 = 1$ ,  $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 0$  — механизм статически определимый. Однако при этом следует помнить, что линейный контакт звеньев, хотя и требует при  $q > 0$  повышенной точности изготовления, позволяет передавать большие нагрузки, чем точечный контакт.

На рис. 2.16, г, д дан другой пример устранения избыточных связей в зубчатой четырехзвенной передаче ( $W = 1$ ,  $n = 3$ ,  $p_1 = 3$ ,  $p_4 = 2$ , контакт зубьев колес 1, 2 и 2, 3 — линейный). В этом случае, по формуле Чебышева,  $q_n = 1 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 0$  — плоская схема избыточных связей не имеет; по формуле Малышева,  $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 2$  — механизм статически неопределенный, следовательно, потребуется высокая точность изготовления, в частности для обеспечения параллельности геометрических осей всех трех колес.

Заменив зубья промежуточного колеса 2 на бочкообразные (см. рис. 2.16, д), получим  $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$  — статически определимый механизм.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 2

1. Дайте определение машины, механизма (приведите примеры нескольких механизмов).
2. Что называется звеном?
3. Что называется кинематической парой?
4. Что называется кинематической цепью?
5. В чем различие между высшими и низшими парами с различным числом условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев?
6. Укажите физический смысл величины  $W$ .
7. Как определить  $W$  пространственного механизма?
8. Изобразите структурные схемы плоского и пространственного механизмов и определите их число степеней свободы.
9. Что называется избыточными связями в замкнутой кинематической цепи?
10. Изобразите структурную схему шестизвездного рычажного механизма и определите число степеней свободы, число независимых контуров и число избыточных связей при заданном числе степеней свободы механизма.
11. Определите число избыточных связей в планетарном механизме (см. рис. 2.10), если число сателлитов (2) в механизме равно трем.

## Лекция 3

### Структурный синтез механизмов

Проектирование механизма по заданным входным и выходным условиям называется синтезом.

Синтез механизмов является самым ответственным этапом при создании будущей машины. Синтез представляет собой сложную задачу, которая обычно имеет многовариантное решение. Поэтому для выбора наиболее подходящего варианта необходимо производить дополнительный анализ.

Неоднозначность решений при синтезе происходит из-за того, что:

- во-первых, на этапе разработки технического задания по созданию нового механизма (машины) обычно невозможно правильно и однозначно сформулировать требования, предъявляемые к нему;
- во-вторых, одни и те же условия могут быть воспроизведены как несколькими различными по структуре механизмами, так и одним механизмом, имеющим различные размеры звеньев.

Традиционно синтез механизмов [2, 3, 15] проводят в следующих два этапа:

1. Определяют структуру будущего механизма (структурный синтез). *Структурный синтез* – это проектирование такой структурной схемы механизма, на которой указываются стойка, подвижные звенья, виды кинематических пар и их взаимное расположение.

2. По заданным кинематическим или динамическим свойствам механизма определяют размеры его звеньев – *параметрический синтез*.

В последние годы также начинает активно развиваться структурно-параметрический синтез механизмов [15, 5], при котором одновременно определяются и структура механизма, и размеры его звеньев.

Задачей структурного синтеза является разработка структурной схемы будущего механизма по заданной подвижности с учетом желаемых структурных, кинематических и динамических свойств.

Результаты структурного синтеза механизмов обычно многовариантны. Это связано с тем, что, используя одни и те же кинематические пары, но по-разному их расставив, можно получить различные по структуре механизмы. Поэтому окончательный выбор рациональной структурной схемы будущей машины выполняется с учетом параметров:

- кинематических и динамических свойств той или иной схемы;
- технологичности и надежности звеньев и кинематических пар, в нее входящих;
- условий сборки и эксплуатации и других условий.

Научные основы структурного синтеза механизмов разрабатываются более 100 лет. Первые основополагающие работы в этом направлении были сделаны П. Л. Чебышевым и Л. В. Ассуром. Однако анализ научной литературы [2, 3, 4, 8, 11, 12, 15], посвященной структурному синтезу машин и механизмов, позволяет сделать вывод, что этот раздел ТММ является еще слабо разработанным.

В настоящее время выбор структуры вновь проектируемой машины традиционно ведут либо интуитивно, опираясь на опыт и квалификацию разработчиков, либо путем наслаждения структурных групп [2, 3, 5, 8, 11]. Эти подходы обычно позволяют найти приемлемое решение. Однако такое решение не всегда рационально, поскольку невозможно проанализировать все варианты.

### Структурный синтез простых и сложных механизмов с помощью структурных групп

Наиболее распространенным методом создания механизмов с замкнутыми кинематическими цепями в настоящее время является метод присоединения к элементарным механизмам структурных групп. Этот метод образования механизмов впервые был предложен Л. В. Ассуром для так называемых плоских замкнутых цепей, заканчивающихся во всех направлениях поводками с вращательными или поступательными кинематическими парами.

Кинематические цепи, обладающие нулевой подвижностью относительно внешних кинематических пар и не распадающиеся на более простые цепи, удовлетворяющие этому условию, получили название *структурных групп*, или *групп Ассура*.

По классификации Л. В. Асура, а позже и по классификации И. И. Артоболевского [7], самый простой механизм состоит из двух звеньев, одно из которых подвижно, образует со стойкой низшую кинематическую пару и называется первичным (элементарным) механизмом, или механизмом первого класса. У такого механизма  $W = 1$ .

Три разновидности такого механизма представлены на рис. 3.1.

Любой более сложный механизм образуется присоединением к первичному механизму каких-либо групп звеньев. Следовательно, каждый механизм с низшими кинематическими парами состоит из двух частей: первичных механизмов и присоединенных к нему групп с нулевой степенью подвижности.

Структурную формулу любого простого или сложного механизма, образованного с помощью структурных групп, можно представить следующим образом:

$$W = \sum_{i=1}^m W_{i \text{ эм}} + \sum_{j=1}^n W_{j \text{ cr}}, \quad (3.1)$$

где  $W$  — подвижность синтезируемого механизма;  $W_{i \text{ эм}}$  — подвижность элементарного первичного механизма;  $W_{j \text{ cr}}$  — подвижность структурной группы;  $m$  — число элементарных первичных механизмов;  $n$  — число присоединяемых структурных групп;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

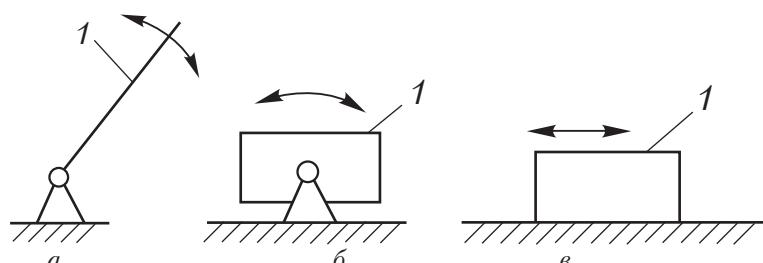


Рис. 3.1

Так как подвижность присоединяемых (-ой) структурных (-ой) групп(-ы) равна нулю, то  $\sum_{j=1}^n W_{j \text{ cr}} = 0$ , а значит, (3.1) эквивалентно выражению

$$W = \sum_{i=1}^m W_{i \text{ эм}}. \quad (3.2)$$

Анализ (3.2) показывает, что присоединяемые к элементарному механизму структурные группы не влияют на подвижность простого или сложного механизма. Они только изменяют его структуру и законы движения звеньев.

Число подвижных контуров  $k$ , количество кинематических пар  $p_i$  и количество звеньев  $n$ , входящих в структурную группу, можно установить с помощью структурных формул:

$$W = \Pi \cdot n - \sum_{i=1}^{\Pi-1} (\Pi - i) p_i; \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} k\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} ip_i, \\ k = \sum_{i=1}^{\Pi-1} p_i - n, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $p = \sum_{i=1}^{\Pi-1} p_i$  — общее число кинематических пар в механизме;  $\Pi$  — подвижность пространства.

Для механизмов, существующих в шестиподвижном пространстве ( $\Pi = 6$ ), которые в технической литературе принято называть *пространственными*, выражение (3.3) примет вид хорошо известной формулы Сомолова — Малышева:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - 1p_5.$$

Для механизмов, существующих в трехподвижном пространстве (плоских механизмов)  $\Pi = 3$ , выражение (3.3) примет вид формулы Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2.$$

Так как по определению подвижность структурных групп равна нулю, то (3.3) для структурных групп примет следующий вид:

$$\Pi n = \sum_{i=1}^{\Pi-1} (\Pi-i)p_i. \quad (3.3')$$

Формулы (3.3) и (3.4) описывают любую структурную группу Ассура.

Распишем, например, (3.3) для одно-, двух-, ..., шестиподвижных пространств. В результате получим следующие условия существования структурных групп в различных пространствах [20]:

$$n = 0; \quad (3.5)$$

$$2n - p_1 = 0; \quad (3.6)$$

$$3n - 2p_1 - p_2 = 0; \quad (3.7)$$

$$4n - 3p_1 - 2p_2 - p_3 = 0; \quad (3.8)$$

$$5n - 4p_1 - 3p_2 - 2p_3 - p_4 = 0; \quad (3.9)$$

$$6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 0. \quad (3.10)$$

Из (3.5) следует, что в одноподвижном пространстве структурные группы существовать не могут, а это означает, что в одноподвижном пространстве механизмы не могут иметь замкнутые кинематические цепи, т.е. в таком пространстве могут существовать только механизмы с незамкнутыми кинематическими цепями.

Из (3.6) следует, что простейшей структурной группой (структурной единицей) является монада, которая состоит из одного звена и двух кинематических пар. На рис. 3.2

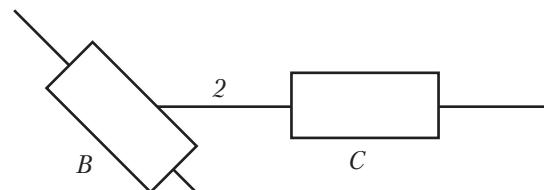


Рис. 3.2

приведена в качестве примера структурная единица, монада, существующая в двухподвижном пространстве, которая используется для образования клинового механизма.

В соответствии с (3.6) эта монада имеет одно звено 2 и две внешние кинематические пары C и B, которыми она затем присоединяется к стойке и звену 1 элементарного механизма. В результате этого образуется клиновой механизм.

На рис. 3.3, а представлена монада, существующая в трехподвижном пространстве, на основе которой созданы зубчатые и кулачковые механизмы. В соответствии с (3.7) эта монада должна иметь одно звено, одну одноподвижную C и одну двухподвижную B кинематические пары.

Присоединив эту монаду к элементарному механизму с вращательной кинематической парой A и звеном 1, получим простой механизм (рис. 3.3, б), аналог зубчатого и кулачкового механизмов.

Структурная группа, существующая в трехподвижном пространстве и имеющая только одноподвижные кинематические пары, в соответствии с (3.7) должна состоять из двух звеньев 2 и 3 и трех одноподвижных кинематических пар B, C и D. Эта группа носит название диады Сильвестера, или двухповодковой группы, и приведена на рис. 3.4, а.

Если двухповодковую группу связать шарнирами B и D со стойкой, то получим элементарную статически определимую ферму (рис. 3.4, б).

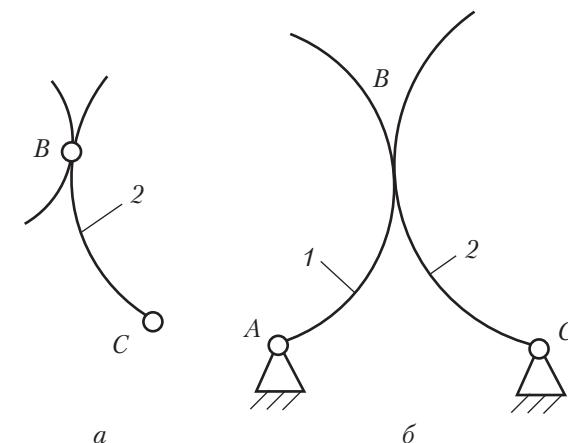


Рис. 3.3

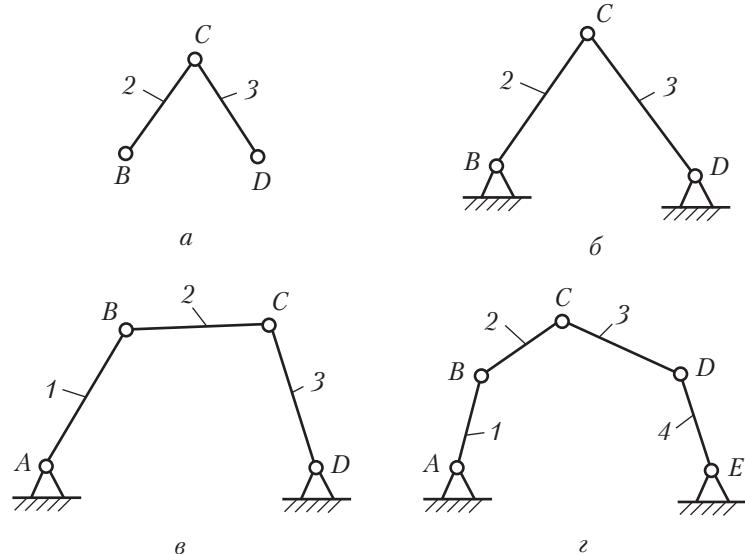


Рис. 3.4

Присоединив эту двухпроводковую структурную группу к одному неподвижному и одному или двум подвижным звеньям 1 и 4 элементарных механизмов, получим простой механизм с одной (рис. 3.4, *в*) или двумя (рис. 3.4, *г*) степенями свободы: одноподвижный четырехзвенник или двухподвижный пятизвенник соответственно.

### Синтез структурных групп с помощью структурных формул

Анализ (3.6)–(3.10) показывает, что, задаваясь различными кинематическими парами и звеньями для каждого пространства, можно синтезировать множество структурных групп.

Рассмотрим синтез структурных групп с помощью структурных формул на примере наиболее распространенных в технике механизмов, которые существуют в трехмерном ( $M = 3$ ) трехподвижном ( $\Pi = 3$ ) пространстве, допускающем два поступательных перемещения вдоль осей  $X$  и  $Y$  и одно вращательное вокруг оси  $Z$ .

Структурная формула групп Ассура для механизмов, существующих в трехподвижном пространстве, имеет вид (3.7).

Уравнение (3.7) для структурных групп в трехподвижном пространстве можно переписать в виде

$$3n - 2p_1 = 0. \quad (3.11)$$

Решив (3.11) относительно числа одноподвижных кинематических пар, получим

$$p_1 = 1,5n. \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) устанавливает связь между числом искомых кинематических пар и подвижных звеньев, входящих в структурную группу. Так как число звеньев и кинематических пар в группе Ассура может быть только целым числом, условию (3.12) могут удовлетворять следующие сочетания чисел звеньев и кинематических пар:

$n$ .....	2	4	6	8	...
$p_1$ .....	3	6	9	12	...

Первое из этих соотношений между подвижными звеньями и кинематическими парами реализуется в рассмотренной диаде Сильвестера (см. рис. 3.4, *а*). Кроме того, существуют еще четыре группы Ассура, в которых  $B$  – это вращательные кинематические пары,  $\Pi$  – поступательные (рис. 3.5, *а*, *б*, *в*, *г*).

Группа, имеющая два подвижных звена и три одноподвижные кинематические пары, называется *двухпроводкой Ассура*. Если к первичному механизму присоединить несколько групп Ассура, то класс и порядок механизма определяются классом и порядком наиболее сложной группы. Класс группы определяется количеством поводков внутренних кинематических пар. Порядок группы определяется количеством внешних пар, которыми группа присоединяется к механизму.

Кинематические пары, которыми звенья группы присоединяются между собой, называются *внутренними*.

Кинематические пары, которыми звенья группы присоединяются к другим звеньям или стойке, называются *внешними* кинематическими парами.

Второе сочетание чисел звеньев ( $n = 4$ ) и кинематических пар ( $p_1 = 6$ ) позволяет реализовать две различные

структурные группы. Эти группы приведены на рис. 3.6: структурная группа с тремя внешними кинематическими парами (*a*) и структурная группа с двумя внешними кинематическими парами (*b*) (на рисунке обозначены: 1–5 – звенья, *B* – *G* – кинематические пары).

Присоединение структурных групп, изображенных на рис. 3.5, *a*, *b*, к элементарным первичным механизмам и стойке приводит к образованию следующих простых механизмов (рис. 3.7): структурная группа с тремя внешними

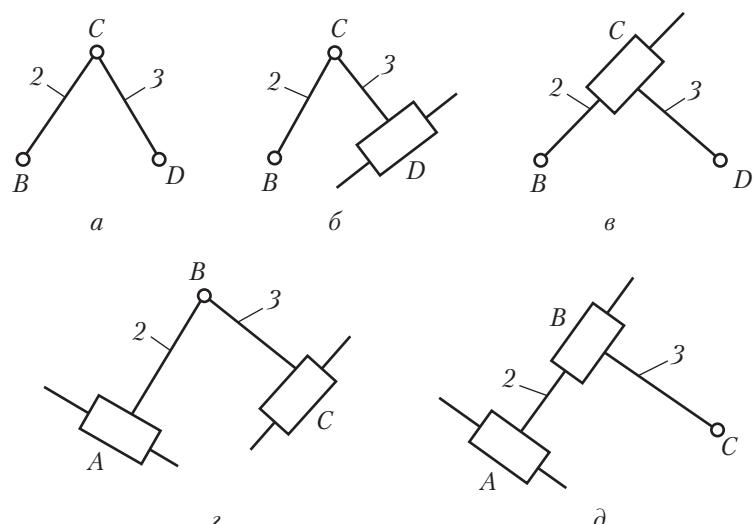


Рис. 3.5

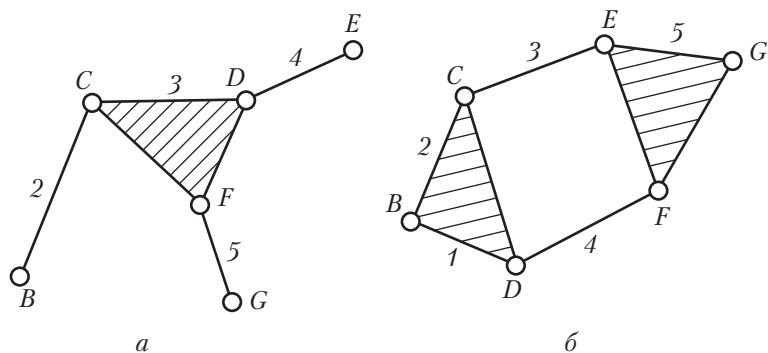


Рис. 3.6

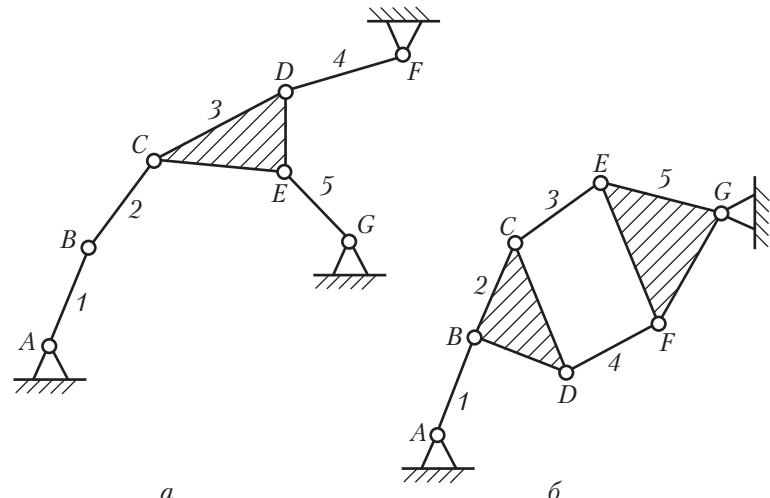


Рис. 3.7

кинематическими парами (*a*); структурная группа с двумя внешними кинематическими парами (*б*).

Заметим, что в механизме (см. рис. 3.6, *a*) в зависимости от выбора начального звена можно выделить две или одну структурные группы. Действительно, если в качестве начального звена выбрать звено 1, то структурная группа будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, *a*. Если за начальное звено взять, например, звено 5, то в механизме (см. рис. 3.6) можно выделить две двухпроводковые структурные группы (диады Сильвестера).

При проектировании плоских механизмов чаще всего применяется метод наложения групп Ассура. При этом механизм образуется из первичного механизма и присоединенных групп нулевой подвижности. Чтобы избежать избыточных связей, необходимо их отсутствие как в группах, так и в первичном механизме.

При структурном синтезе механизмов без избыточных связей необходимо соблюдать правила:

- число первичных механизмов равно  $W$ ;
- присоединяемые группы звеньев, образующие после присоединения замкнутый контур, должны иметь в своем составе набор кинематических пар, сумма подвижностей которых равна шести для пространственного механизма и трём – для плоского механизма.

## Классификация структурных групп

Анализ (3.6)–(3.10) показывает, что в машинах и механизмах имеется большое количество разнообразных структурных групп. Это усложняет их анализ и синтез. С целью упрощения изучения и анализа группы Ассура пытаются классифицировать.

В настоящее время нет единой классификации всех структурных групп. Наиболее полно проклассифицированы только группы Ассура, существующие в трехмерном трехподвижном пространстве, допускающем два независимых поступательных движения вдоль осей  $X$  и  $Y$  и одно вращательное вокруг оси  $Z$ . Отметим, что в современном машиностроении именно механизмы, существующие в трехмерном трехподвижном пространстве, нашли самое широкое распространение на практике. Поэтому в данной лекции рассмотрим классификацию структурных групп и так называемых плоских механизмов.

Напомним, что механизмы с высшими парами можно привести к механизмам с низшими кинематическими парами. В настоящее время признано, что лучшей классификацией механизмов с низшими кинематическими парами, которые существуют в трехмерном трехподвижном пространстве, является структурная классификация Ассура – Артоболевского [3]. Достоинством этой классификации является то, что с ее помощью не только упрощаются структурный анализ и синтез механизмов, но она увязывается и с методами кинематического, силового и динамического исследования механизмов.

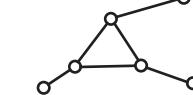
Каждый рычажный механизм рассматривается как система, состоящая из элементарного первичного механизма, который в классификации Ассура – Артоболевского назван механизмом I класса, и соединенных с ним и между собой структурных групп.

Все механизмы и структурные группы, входящие в них, делятся на классы, а класс механизма в целом определяется высшим классом структурной группы, которая в него входит. Элементарные механизмы условно отнесены к механизмам I класса.

Класс структурной группы определяется числом кинематических пар, входящих в замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами.

Таблица 3.1

## Классификация структурных групп

№ п/п	Структурная схема	Класс группы	Порядок группы	Вид группы
1		II	2	I
2		III	3	—
3		IV	2	—

При этом двухпроводковая структурная группа (см. рис. 3.4, *a*), не имеющая замкнутого контура, отнесена ко второму классу (табл. 3.1).

Порядок группы определяется числом внешних кинематических пар.

Так как на практике наибольшее применение нашла двухпроводковая группа, то в зависимости от места размещения на ней вращательных и поступательных кинематических пар эта группа разделяется еще и по видам.

Виды двухпроводковых структурных групп частично рассмотрены в предыдущем разделе лекции (двухпроводковые группы Ассура, см. рис. 3.5).

К первому виду отнесена диада, у которой все кинематические пары –  $B$ ,  $C$  и  $D$  – вращательные (см. рис. 3.5, *a*). Диада, у которой одна из внешних кинематических пар –  $D$  является поступательной, отнесена ко второму виду (см. рис. 3.5, *b*). Диада, у которой внутренняя пара  $C$  поступательная, относится к третьему виду (см. рис. 3.5, *c*). Двухпроводковая группа, у которой две внешние кинематические пары  $A$  и  $C$  поступательные, отнесена к четвертому виду (см. рис. 3.5, *d*). И наконец, группа, у которой одна внешняя  $A$  и одна внутренняя  $B$  пары поступательные, отнесена к пятому виду (см. рис. 3.5, *e*).

Казалось бы, путем последовательной замены в диаде Сильвестера вращательных кинематических пар поступательными можно заменить все три вращательные пары на

поступательные. Однако делать этого нельзя, так как в этом случае получим не структурную группу, а клиновой механизм, который не является структурной группой и существует в другом по подвижности пространстве.

При проектировании механизмов без избыточных связей чаще всего применяется метод *наслоения групп*, предложенный Л. В. Ассуром. При этом механизм образуется из первичного механизма (обычно кривошип со стойкой) и присоединенных к нему групп нулевой подвижности. Чтобы избежать избыточных связей, необходимо, чтобы они отсутствовали как в первичном механизме, так и в присоединяемых группах. При структурном синтезе механизма без избыточных связей с  $W = 1$  (частный случай) необходимо соблюдать правила:

- замкнутая кинематическая цепь механизма с  $W = 1$  и одним контуром без избыточных связей ( $q = 0$ ) должна иметь такой набор кинематических пар, чтобы сумма их подвижностей была равна семи для пространственного механизма и четырем — для плоского;
- последующие присоединяемые группы звеньев должны иметь в своем составе такой набор кинематических пар, чтобы сумма подвижностей образованного после присоединения замкнутого контура была равна шести для пространственного механизма и трем — для плоского.

Давайте разберем два примера структурного синтеза (рис. 3.8, 3.9).

#### Пример 1.

Дано:  $M = W + \Gamma_1 + \Gamma_1$ .

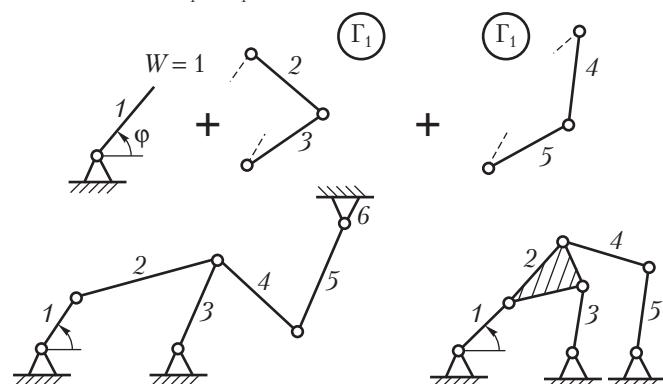


Рис. 3.8

#### Пример 2.

Дано:  $M = W + \Gamma_{\text{ш}} + \Gamma_{\text{п}}$ .

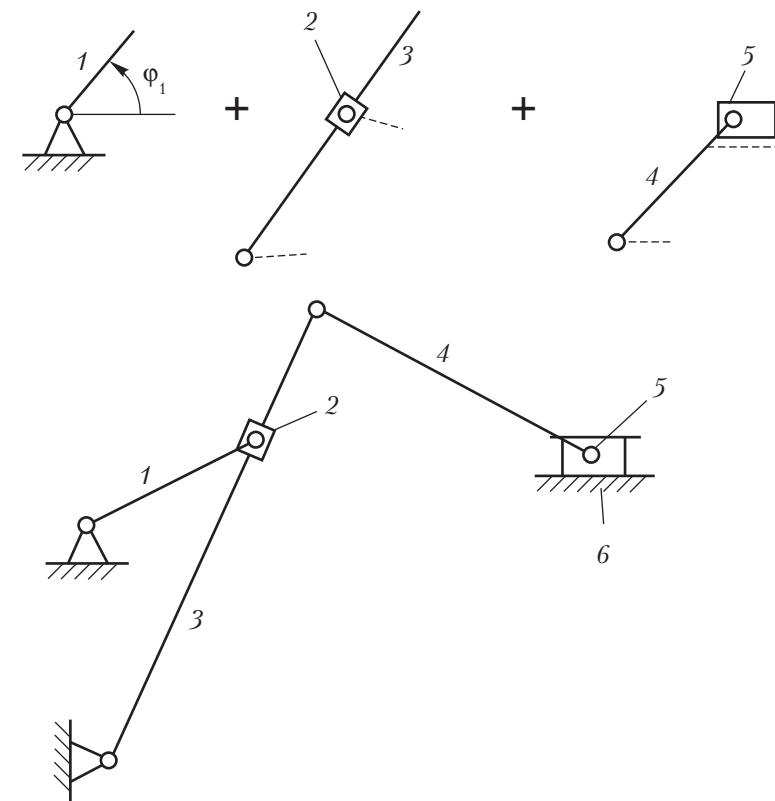


Рис. 3.9

Структурный анализ — задача, обратная синтезу. Структурный анализ заданного механизма следует производить путем расчленения его на структурные группы и первичные механизмы в порядке, обратном образованию механизма.

От структурной схемы механизма при этом отделяют по одной все структурные группы таким образом, чтобы оставшаяся цепь продолжала быть механизмом. После снятия всех групп должны остаться первичные механизмы, количество которых определяет число степеней свободы механизма (рис. 3.10).

**Пример 3.**

Дано: поперечно-строгальный станок.

$$W_{\text{пл}} = 3n - 2p_{\text{n}};$$

$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1;$$

$$W_{\text{пл}} = 1.$$

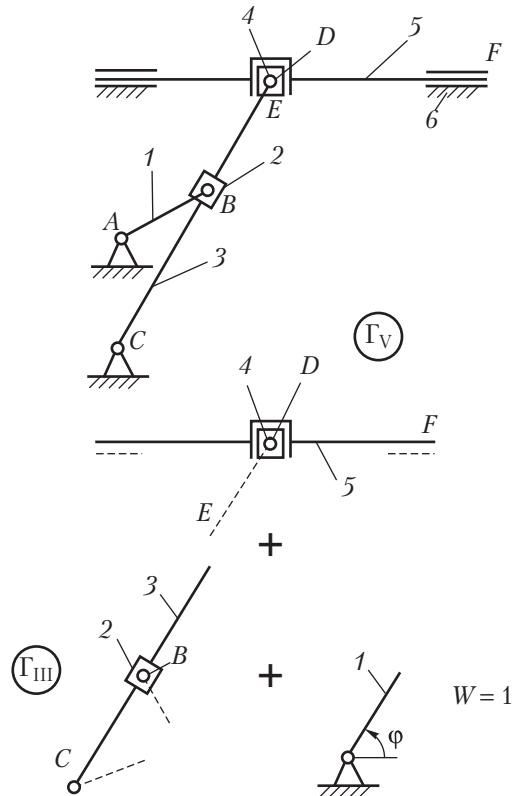


Рис. 3.10

**Контрольные вопросы и задания к лекции 3**

1. Что называется синтезом механизма?
2. Что входит в задачи структурного синтеза механизмов?
3. Расскажите о структурной классификации механизмов с низшими кинематическими парами в трехмерном трехподвижном пространстве.
4. Дайте определение группы Ассура.
5. Что определяет порядок структурной группы?
6. Что называется первичным механизмом? Назовите известные первичные механизмы.

**Лекция 4****Проектирование плоских рычажных механизмов**

Плоские рычажные механизмы, звенья которых образуют вращательные или поступательные кинематические пары, получили широкое распространение в современном машино- и приборостроении. К достоинствам механизмов относятся высокая технологичность изготовления, возможность выполнения шарнирных соединений на подшипниках качения и небольшой износ соприкасающихся поверхностей, долговечность и надежность в работе. Кроме того, для механизмов, образованных при помощи звеньев, входящих в низшие пары (в отличие от кулачковых механизмов), не требуется пружин и других устройств, обеспечивающих постоянное замыкание кинематических пар. Подавляющее большинство шарнирно-рычажных механизмов преобразует равномерное движение ведущего звена в неравномерное движение ведомого и относится к механизмам с нелинейной функцией положения ведомого звена.

Решение многих задач синтеза и анализа рычажных механизмов связано с большим объемом вычислительных операций. Поэтому автоматизация проектирования является одной из важнейших задач — фактором, определяющим технический уровень, качество и эффективность новой техники. Можно с полным основанием утверждать, что автоматизация проектирования в ближайшие годы станет одной из основных областей применения ЭВМ.

**Этапы проектирования механизмов**

Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой разбивается на несколько этапов. *Первым этапом проектирования* является выбор кинематической схемы механизма, которая бы

обеспечивала требуемый вид и закон движения. Ко *второму этапу* относится разработка конструкторских форм механизма, обеспечивающих его прочность и долговечность. *Третим этапом проектирования* является разработка технологических и технико-экономических показателей проектируемого механизма.

В теории механизмов в основном рассматриваются и решаются задачи первого этапа проектирования, с помощью которых разрабатываются кинематические схемы механизмов, воспроизводящих требуемый закон движения. Проектирование механизма начинается с выбора структурной схемы. Ее выбирают из справочных материалов или разрабатывают на основе анализа видов движения, которые должны быть реализованы. Этот этап проектирования называется *структурным синтезом*. Разработчик должен в первом приближении оценить кинематические, силовые, точностные и другие характеристики механизма, что заранее сделать трудно, а часто – невозможно.

Если имеется несколько структурных схем различных механизмов, пригодных для реализации требуемых параметров, то из них следует выбрать наиболее простую. На практике выбор структурной схемы производится чаще всего на основе предшествующего опыта, знаний или интуиции проектировщика. При огромном разнообразии схем одних только рычажных механизмов [1–9] такой эвристический подход к их выбору оправдан. Однако далеко не всегда проектировщик выбирает удачную структурную схему, о чем свидетельствуют конструкции многих существующих механизмов, применяемых в машинах и приборах. Вопрос рационального выбора структуры проектируемого механизма сравнительно сложен [9, 12, 14, 15, 20], поскольку он трудно поддается формализации и недостаточно освещен в литературе по теории механизмов.

После выбора структурной схемы механизма определяют геометрические размеры звеньев. При этом учитываются в основном геометрические функции, которые должен реализовать механизм. Этот этап проектирования называют этапом *геометрического синтеза* механизма, в режиме которого определяют относительные размеры звеньев, т.е. отношение геометрических размеров звеньев к размеру одного из них. Относительные геометрические размеры звеньев называются геометрическими параметрами механизма.

Структурный и геометрический синтез позволяет получить кинематическую схему механизма, отвечающую требованиям, предъявляемым к проектируемому механизму. Геометрические функции, которые должен реализовать проектируемый механизм, воспроизводятся им определенной точностью и определяются условиями работы механизма, обусловленными технологическим процессом. На основании анализа спроектированного механизма по степени точности воспроизведения заданной функции решают, пригоден ли полученный механизм или необходимо провести корректировку предыдущих этапов проектирования с изменением исходных данных. Если и повторные просчеты не дают удовлетворительных результатов, то необходимо перейти к другой структурной схеме механизма и выполнить для нее соответствующие расчеты. Этот этап проектирования называют этапом *точностного проектирования*.

Таким образом, задача проектирования механизма является сложной, многопараметрической, причем число исходных параметров механизма, как правило, больше числа исходных данных, поэтому частью параметров приходится варьировать.

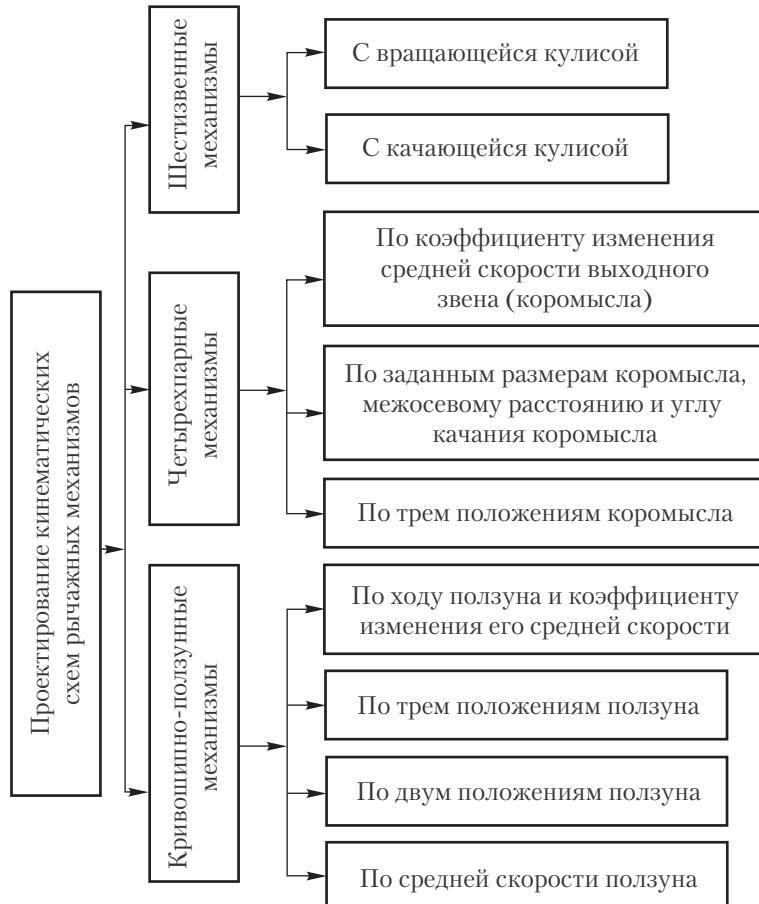
По принципу использования рычажные механизмы делятся на две группы.

1. *Передаточные механизмы*, реализующие заданную функциональную зависимость между положениями входного и выходного звеньев механизма или между их перемещениями.

2. *Направляющие механизмы*, в которых точка на звене, совершающем сложное движение, перемещается при движении механизма по заданной траектории.

Решение указанных задач синтеза рычажных механизмов с низшими парами может вестись как графическими, так и аналитическими методами. Выбор метода в значительной мере зависит от тех условий, которые поставлены при проектировании (в частности, точность). Графические методы нагляднее и проще с точки зрения их усвоения, но недостаточно точны. В последние годы учеными широко развиты аналитические методы синтеза механизмов с низшими парами.

Схемы возможных вариантов проектирования наиболее распространенных механизмов представлены на рис. 4.1.



В начальной стадии проектирования машинного агрегата при выборе кинематической схемы для осуществления заданного движения рабочего органа, с переменными скоростями движения в течение цикла, разработчик обращает внимание на четырехзвенные механизмы (рис. 4.2), образованные на основе четырехзвенной шарнирной кинематической цепи (*a*): кривошипно-коромысловый механизм (*b*); двухкривошипный механизм (*в*); двухкоромысловый механизм (*г*); механизм параллелограмма (*д*) ( $l_1 = l_3$ ,  $l_2 = l_4$ ); механизм антипараллелограмма с противоположным

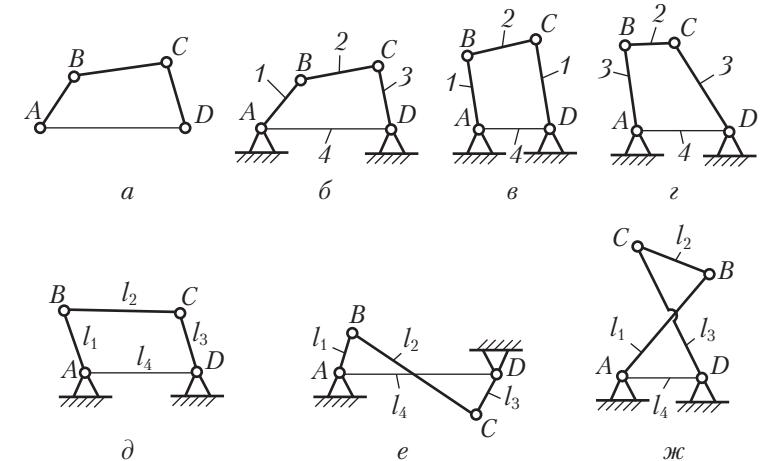


Рис. 4.2

направлением вращения кривошипа (*е*) ( $l_1 < l_4$ ); механизм антипараллелограмма с одинаковым направлением вращения кривошипов (*ж*) ( $l_1 > l_4$ ). Составляющие элементы: кривошип *1*; шатун *2*; коромысло *3* и стойка *4*.

Другой вариант выбора кинематической схемы — на основе четырехзвенной цепи с тремя вращательными и одной поступательной парами (рис. 4.3): исходная аксиальная кинематическая цепь (*а*); кривошипно-ползунный механизм (*б*); кривошипно-шатунный механизм (*в*) ( $l_1 < l_2$ ); коромыслово-ползунный механизм (*г*) ( $l_1 < l_2$ ); кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой (*д*, *е*) ( $l_1 < l_4$ ); кривошипно-кулисный механизм с вращающейся кулисой (*ж*, *з*) ( $l_4 < l_1$ ). Если поставленную задачу нельзя решить с помощью четырехзвенного механизма, разработчик усложняет кинематическую схему, применяя шестизвездные или более сложные механизмы, образованные присоединением к одному из звеньев двухпроводковой группы [1, 2, 4, 5, 6]. Подробные сведения о кинематических и конструктивных модификациях приведенных механизмов можно найти в работах [1–4, 7, 20].

Геометрический синтез механизма заключается в определении постоянных параметров его кинематической схемы исходя из условий задачи синтеза. Эти условия могут быть разнообразными по содержанию, но аналитически они представляют собой условия связей, накладываемых на

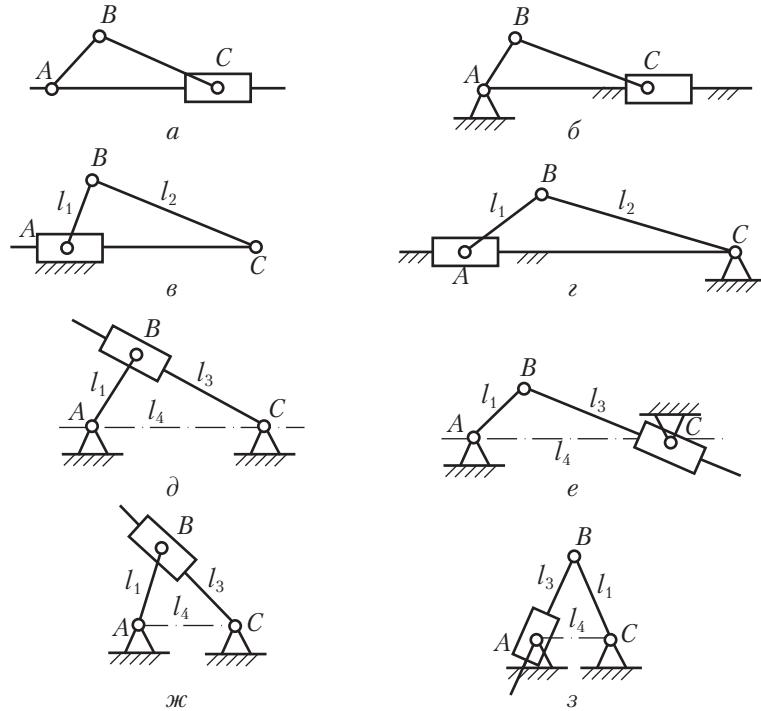


Рис. 4.3

параметры механизма, и имеют форму уравнений или неравенств. В ряде случаев условие синтеза формулируется в виде требования минимизации функции параметров механизма, принимающей неотрицательные значения.

Кроме параметров механизма в условиях синтеза фигурируют обычно и задаваемые величины или функции (например, заданная для воспроизведения функция перемещения механизма, заданный угол размаха выходного звена, заданный допустимый угол давления).

### Условие существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах

Важной кинематической характеристикой при синтезе механизма является проворачиваемость его звеньев (наличие в нем одного или двух кривошипов), которая зависит

от соотношения длин звеньев [1]. Сперва рассмотрим плоский шарнирный четырехзвенник  $ABCD$  (рис. 4.4, *a*) с длинами звеньев  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Для того чтобы звено  $AB$  могло стать кривошипом, оно должно при вращении последовательно пройти через крайние левое ( $AB_1$ ) и правое ( $AB_3$ ) положения.

Предположим, что  $a$  — длина самого короткого звена,  $d$  — самого длинного, и, используя известное соотношение между длинами сторон треугольника (длина стороны треугольника меньше суммы двух других его сторон), запишем следующие неравенства:

из  $\Delta B_1C_1D$

$$d + a < b + c; \quad (4.1)$$

из  $\Delta B_3C_3D$

$$d - a < b + c. \quad (4.2)$$

Независимо от соотношения длин  $b$  и  $c$  неравенство (4.1) всегда обеспечит выполнение неравенства (4.2).

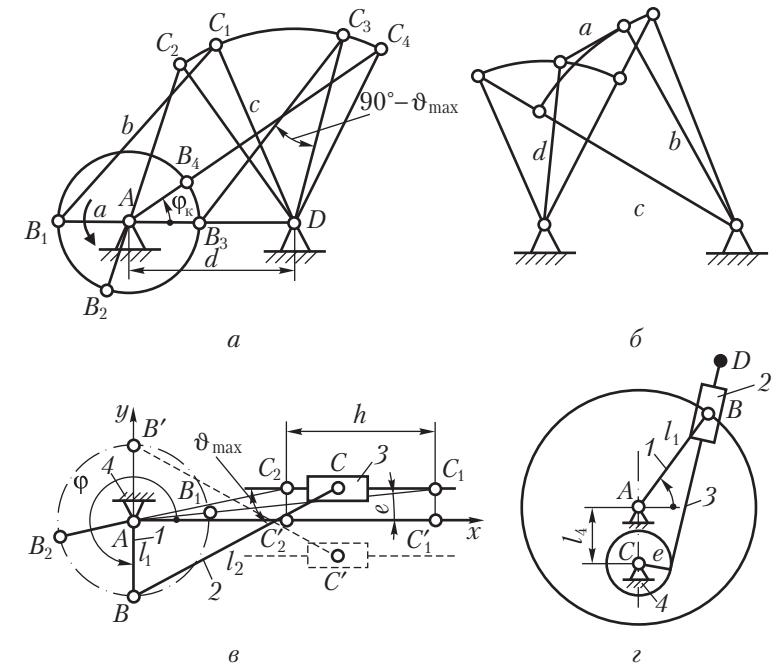


Рис. 4.4

Если же самым длинным звеном является звено  $BC$  или  $CD$  ( $b > c > d$  или  $c > b > d$ ), то неравенство только усиливается.

Позиции  $AB_2$  и  $AB_4$  характеризуют крайние положения коромысла  $CD$ . Звено  $BC$  согласно рисунку 4.4, а не делает полного оборота относительно стойки  $AD$  и потому является шатуном.

Неравенство (4.1) позволяет дать общую формулировку условия проворачиваемости звена плоского шарнирного четырехзвенника, а именно: самое короткое звено шарнирного четырехзвенника может быть кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев. Это положение носит название *правила Грасгофа*.

Применяя это правило, шарнирные четырехзвенники разбивают на три группы:

1) механизм будет кривошипно-коромысловым (рис. 4.4), если за стойку принято звено, расположенное рядом с самым коротким;

2) механизм будет двухкривошипным, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев и за стойку принято самое короткое его звено; это следует из того, что, если кривошип при выполнении правила Грасгофа делает полный оборот относительно стойки и шатуна, то и эти звенья совершают полный оборот относительно кривошипа;

3) механизм будет двухкоромысловым, если размеры его звеньев не удовлетворяют правилу, а также в том случае, когда сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев, но самое короткое его звено является шатуном (рис. 4.4, б), и, следовательно, возможность быть ему кривошипом отпадает, потому что оно не является звеном, расположенным рядом со стойкой.

В предельном случае, когда неравенство (4.1) превращается в равенство, все звенья механизма в одном из крайних положений располагаются по одной прямой. В результате получится неопределенность движения выходного звена (оно сможет двигаться либо в одном, либо в другом направлении).

Во *внеосном кривошипно-ползунном механизме* (рис. 4.4, в) звено 1 будет кривошипом, если при вращении пройдет

положения  $\varphi = 90^\circ$  и  $270^\circ$ , что возможно при выполнении условия

$$l_1 < l_2 - |e|, \quad (4.3)$$

где  $e$  — внеосьность (или дезаксиал). Штриховой линией изображена схема, когда  $e < 0$ . Если  $l_1 > l_2 - |e|$ , звено 1 будет коромыслом, и такой механизм правильнее называть коромысло-ползунным.

В *кулисном механизме* (рис. 4.4, г) звено  $l$  всегда может быть кривошипом, звено  $CD$  (кулиса) будет кривошипом, если при вращении пройдет положение  $\varphi = 270^\circ$ , что возможно при выполнении условия

$$l_1 > l_4 + e, \quad (4.4)$$

где  $e$  — внеосьность кулисы; в этом случае имеем механизм с вращающейся кулисой. Если  $l_1 < l_4 + e$ , то кулиса  $CD$  будет коромыслом (механизм с качающейся кулисой). Наиболее распространены схемы кулисных механизмов, в которых внеосьность  $e = 0$ .

### Синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям звеньев

**Кривошипно-ползунный механизм.** Для центрально-го кривошипно-ползунного механизма (внеосьность  $e = 0$ , рис. 4.5, а) ход ползуна 3 (его максимальное перемещение) равен удвоенной длине кривошипа:  $h = 2l_1$ . Крайние положения ползуна соответствуют угловым координатам кривошипа  $\vartheta = 0$  и  $180^\circ$ .

Как уже отмечалось, при проектировании механизмов нужно учитывать весьма важный параметр, характеризующий условие передачи сил и работоспособность механизма — угол давления  $\vartheta$  (угол между вектором силы, приложенной к ведомому звену, и вектором скорости точки приложения движущей силы; трение и ускоренное движение масс при этом пока не учитываются). Угол давления не должен превышать допустимого значения:  $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_{\text{доп}}$ . Угол  $\vartheta$  при передаче усилия на ведомое звено отмечают на схеме механизма в зависимости от того, какое его звено является ведомым. Если им будет ползун 3, то сила  $\bar{F}_{32}$  передается на него с углом давления  $\vartheta_{32}$ , а если кривошип 1, то сила  $\bar{F}_{12}$  составит угол  $\vartheta_{12}$  с вектором скорости  $\bar{V}_B$ .

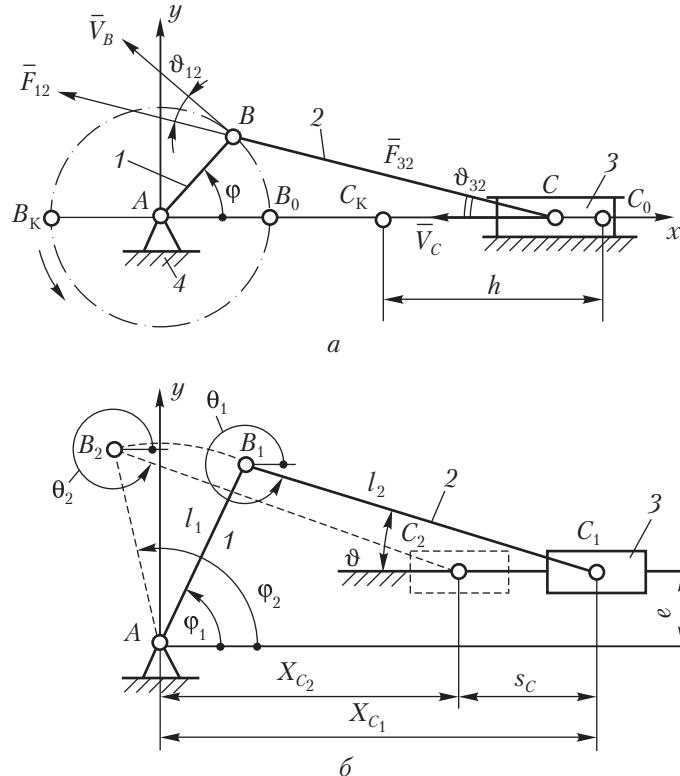


Рис. 4.5

При ведомом кривошипе угол давления  $\vartheta_{12}$  два раза за цикл (когда шатун и кривошип располагаются на одной прямой) получает максимальное значение, равное  $90^\circ$ . Эти положения кривошипа проходит только благодаря инерции вращающихся масс деталей, жестко связанных с кривошипом 1.

Наибольший угол давления  $\vartheta_{32\max}$  определяют путем исследования функции  $\vartheta_{32\max} = \vartheta_{32\max}(\phi)$  на максимум. Для центрального механизма ( $e = 0$ ) максимальное значение угла давления  $\vartheta_{32\max} = \arcsin l_1 / l_2$  будет при  $\phi = 90$  или  $270^\circ$ . Следовательно, чем меньше значение  $\lambda_2 = l_2 / l_1$ , тем меньше размеры механизма (по отношению к длине кривошипа), но большие углы давления. А с возрастанием величины  $\vartheta_{32\max}$ , независимо от того, какое звено является ведомым,

увеличивается усилие между ползуном и направляющей (между поршнем и стенкой цилиндра поршневой машины). Поэтому, например, для механизмов двигателей внутреннего сгорания  $\lambda_2$  принято выбирать в пределах<sup>1</sup>  $\lambda_2 = 3...5$ , что соответствует значению  $\vartheta_{32\max} = 19...11^\circ$ .

Во внесосном кривошипно-шатунном механизме (рис. 4.4, б) ход ползуна (его максимальное перемещение) из  $\Delta AC_1C_1'$  и  $\Delta AC_2C_2'$

$$h = l_{c_1c_2} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - e^2} - \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2}, \quad (4.5)$$

откуда при заданных  $h$ ,  $e$  и  $\lambda_2 = l_2 / l_1$  можно найти  $l_1$  (например, методом интерполяционного приближения, задаваясь рядом значений  $l_1$ , близких к  $h/2$ , и проверяя равенство левой и правой частей уравнения). Максимальный угол давления  $\vartheta_{32\max}$  при  $e < 0$ , будет в положении, когда  $\phi = 270^\circ$ ; если же  $e < 0$ , то при  $\phi = 90^\circ$ .

Если заданы два положения кривошипа (рис. 4.5, б), определяемые координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , перемещение ползуна  $s_c$  (с учетом знака: на рис. 4.5, б  $s_c < 0$ ) и отношения  $\lambda_2 = l_2 / l_1$  и  $\lambda_e = e / l_1$ , то длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$  определяют следующим образом.

Проецируя векторную цепь  $l_1 + l_2$  на ось  $y$ , имеем для любого положения  $l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta = e$ , откуда угловая координата звена 2 в положениях 1 и 2:

$$\theta_{1,2} = \arcsin \left[ \frac{\lambda_e - \sin \varphi_{1,2}}{\lambda_2} \right].$$

Проецируя ту же цепь на ось  $x$ , имеем:

$$s_c = x_{c_2} - x_{c_1} = (l_1 \cos \varphi_2 + l_2 \cos \theta_2) - (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \theta_1),$$

откуда после подстановки  $l_2 = \lambda_2 l_1$  получим

$$l_1 = \frac{s_c}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 + \lambda_2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}. \quad (4.6)$$

Затем по величине  $\lambda_2$  находят  $l_2$ .

<sup>1</sup> Баранов, Г. Г. Курс теории механизмов и машин / Г. Г. Баранов. — М., 1967.

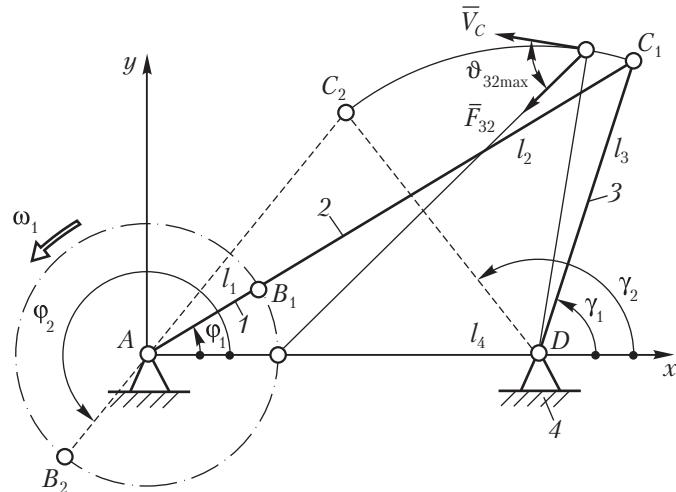


Рис. 4.6

**Кривошипно-коромысловый механизм** (рис. 4.6). По заданным длине стойки  $l_4$ , длине ведомого коромысла  $l_3$  и его координатам  $\gamma_1, \gamma_2$  в крайних положениях неизвестные длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$  находят следующим образом. Соединяя прямыми точками  $C_1$  и  $C_2$  с точкой  $A$ , имеем

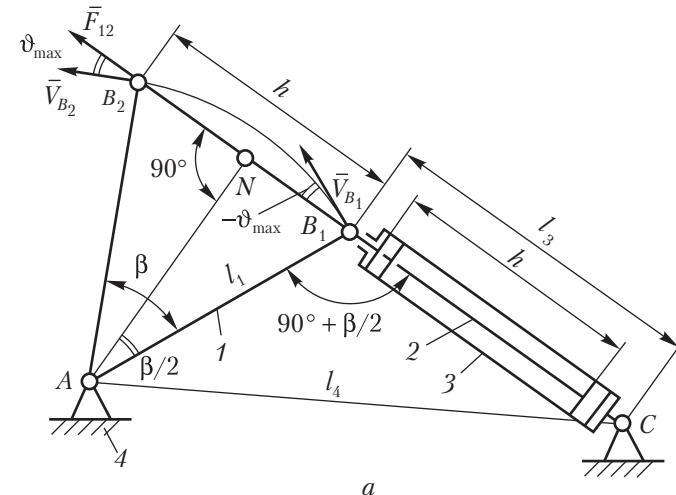
$$l_{AC_1} = l_1 + l_2; \quad l_{AC_2} = l_2 - l_1,$$

откуда

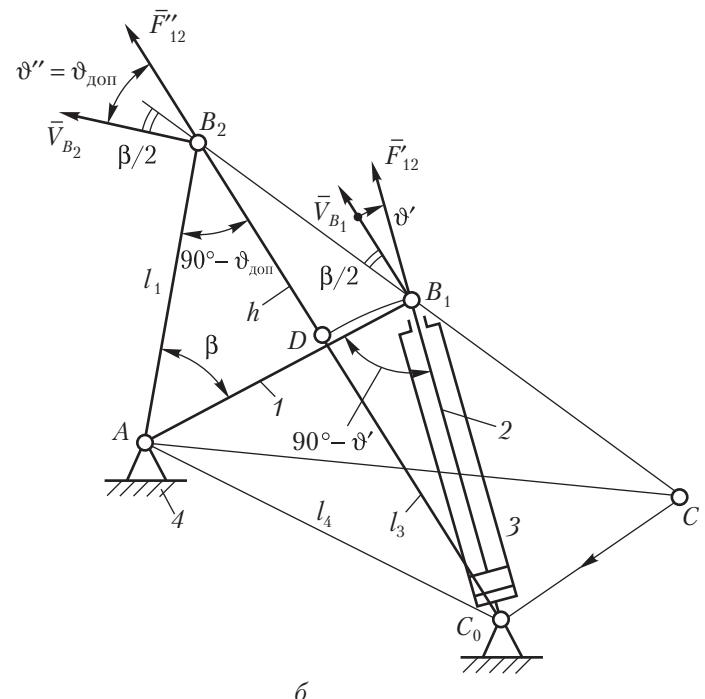
$$l_1 = \frac{(l_{AC_1} - l_{AC_2})}{2}; \quad l_2 = \frac{(l_{AC_1} + l_{AC_2})}{2}. \quad (4.7)$$

Максимальный угол давления  $\vartheta_{32\max}$  будет при  $\varphi = 0$  или  $180^\circ$ .

**Механизм с возвратно-вращающимся (качающимся) цилиндром.** Этот механизм, применяемый в гидроприводах, изображен на рис. 4.7, а в крайних положениях  $AB_1C$  и  $AB_2C$ . При переходе из одного крайнего положения в другое поршень 2 перемещается на расстояние  $h$  (ход поршня), а ведомое коромысло 1 длиной  $l_1$  поворачивается на нужный угол  $\beta$ . Чтобы полностью использовать цилиндр при перемещении поршня, задаются отношением длины цилиндра  $l_3 \approx l_{B_1C}$  к ходу поршня  $h$  в виде коэффициента  $k = l_3/h > 1$ , определяемого конструктивно; например,  $k = 1,3; 1,4$  и т.д.



а



б

Рис. 4.7

Приходится также учитывать угол давления  $\vartheta$  как угол между осью цилиндра, по направлению которой передается усилие  $F_{12}$ , и вектором скорости  $\vec{V}_B$  точки приложения силы. Этот угол переменный, поэтому при проектировании задаются допускаемым углом давления  $\vartheta_{\text{доп}}$ , с тем чтобы при работе механизма не превысить его.

Синтез оптимальной по углам давления схемы такого механизма при заданных  $l_1, k, \beta$  ведут следующим образом (см. рис. 4.7, а). Построив два положения  $AB_1$  и  $AB_2$  ведомого звена 1, примем ход поршня  $h = l_{B_1B_2}$ . Отложив на продолжении прямой  $B_2B_1$  отрезок  $l_3 = l_{B_1C} = kh$ , получим точку  $C$ . В крайних положениях механизма, как это видно из  $\Delta AB_1N$  и  $\Delta ANB_2$ , угол давления по абсолютной величине будет наибольшим:  $\vartheta_{\max} = \beta/2$ .

Во всех остальных положениях угол давления будет меньше, поскольку при переходе точки  $B$  из положения  $B_1$  в положение  $B_2$  он меняет свой знак и, следовательно, проходит через нулевое значение. Из  $\Delta AB_1N$

$$h = 2l_1 \sin(\beta/2). \quad (4.8)$$

Из  $\Delta AB_1C$ , по теореме косинусов, длина стойки

$$l_4 = l_{AC} = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 \sin \beta/2}. \quad (4.9)$$

При небольших углах  $\beta$   $\vartheta_{\max}$  может быть в данной схеме значительно меньше  $\vartheta_{\text{доп}}$ , и этот вариант кинематической схемы можно улучшить с точки зрения габаритов механизма путем уменьшения длины стойки  $l_4$ .

Оптимальную по габаритам схему механизма при условии  $\vartheta_{\max} = \vartheta_{\text{доп}}$  получим следующим образом (рис. 4.7, б). Пусть заданы  $l_1, k, \beta, \vartheta_{\text{доп}}$ . Вычертив первый вариант схемы, переместим точку  $C$  в новое положение  $C_0$ , для которого угол давления в положении 2 механизма увеличится и будет равен допускаемому:  $\vartheta'' = \vartheta_{\text{доп}}$ . При перемещении точки  $C$  угол давления в положении 1 также меняется: сперва он уменьшается, а затем может, пройдя через 0, поменять знак и снова увеличиваться. Ход поршня теперь будет  $h = l_{B_2D} < l_{B_1B_2}$ ; его можно найти, решая квадратное уравнение, полученное из  $\Delta C_0B_1B_2$  по теореме косинусов:

$$(B_1C_0)^2 = (B_1B_2)^2 + (C_0B_2)^2 - 2B_1B_2 \cos(\vartheta_{\text{доп}} - \beta/2),$$

где

$$B_1C_0 = kh, B_1B_2 = 2l_1 \sin(\beta/2), \quad C_0B_2 = kh + h = (k+1)h.$$

Решение приводит к формуле

$$h = -b/2 + \sqrt{b^2/4 - c},$$

где

$$b = -4l_1(k+1) \sin(\beta/2) \cos(\vartheta_{\text{доп}} - \beta/2)(k+1);$$

$$c = \frac{[2l_1 \sin(\beta/2)]^2}{2k+1}.$$

После этого определяют  $l_3 = kh$  и длину стойки из  $\Delta AC_0B_2$

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + (l_3 + h)^2 - 2l_1(l_3 + h) \sin \vartheta_{\text{доп}}}. \quad (4.10)$$

Данный вариант кинематической схемы является весьма целесообразным для случая, когда нужно преодолевать большую нагрузку на ведомом звене в начале движения, поскольку угол давления  $\vartheta' < \vartheta'' < \vartheta_{\text{доп}}$ , в результате чего увеличивается момент движущей силы  $F'_{12}$  относительно оси  $A$  и уменьшаются потери на трение в кинематических парах.

Кинематические пары следует подобрать так, чтобы механизм был статически определимым, или же, если это затруднительно, свести к минимуму число избыточных связей. В данном случае механизм будет статически определимым (без избыточных связей), если пара  $A$  вращательная, пары  $B$  и  $C$  сферические, пара поршень–цилиндр цилиндрическая. Тогда, учитывая, что число степеней свободы механизма  $W = W_0 + W_M = 1 + 2 = 3$  (две местные подвижности — независимые вращения поршня со штоком и цилиндра относительно своих осей), по формуле Малышева получим  $q = 0$ .

## Синтез шестизвездных кулисных механизмов

**Механизм с качающейся кулисой.** Шестизвездный кулисный механизм (рис. 4.8, а) преобразует вращательное движение кривошипа 1 в возвратно-поступательное движение ползуна 5, при этом средняя скорость  $v_{\text{обр}}$  ползуна при обратном ходе больше в  $K_v$  раз средней скорости  $v_{\text{пр}}$  прямого хода. Исходными данными обычно служат ход  $h$

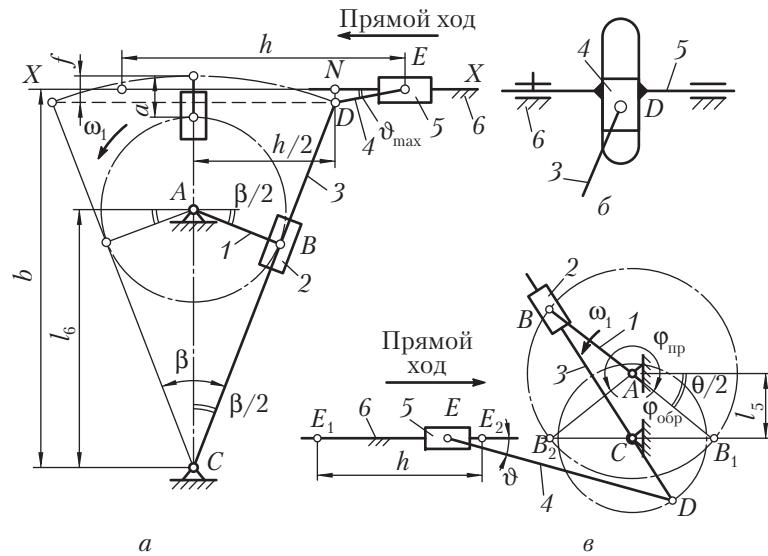


Рис. 4.8

выходного звена 5 и коэффициент изменения его средней скорости  $K_v = v_{\text{обр}} / v_{\text{пр}}$ .

Например, в строгальных и долбежных станках изделие обрабатывается в одном направлении с заданной скоростью резания, а холостой (обратный) ход режущего инструмента осуществляется с большей средней скоростью; в этом случае  $K_v > 1$ .

Коэффициент  $K_v$  и угол  $\beta$  размаха (угловый ход) кулисы связаны (при  $\omega_1 = \text{const}$ ) зависимостью

$$K_v = \frac{h/t_{\text{обр}}}{h/t_{\text{пр}}} = \frac{180^\circ + \beta}{180^\circ - \beta}, \quad (4.11)$$

откуда

$$\beta = 180^\circ \frac{K_v - 1}{K_v + 1}. \quad (4.12)$$

Длину кулисы находят из рассмотрения ее крайнего положения по формуле

$$l_3 = l_{CD} = \frac{h}{2 \sin(\beta/2)}.$$

В среднем (вертикальном) положении кулисы  $CD$  длины звеньев  $l_3, l_6 = l_{AC}$  (стойки) и  $l_1 = l_{AB}$  связаны соотношением

$$l_3 = l_6 + l_1 + a, \quad (4.13)$$

где размер  $a$  выбирают конструктивно с целью наиболее полного использования длины кулисы. С другой стороны, из прямоугольного  $\Delta ABC$

$$l_1 = l_6 \sin(\beta/2). \quad (4.14)$$

Подстановка значений  $l_1$  в выражение (4.13) дает длину стойки (межосевое расстояние)

$$l_6 = \frac{l_3 - a}{1 + \sin(\beta/2)}. \quad (4.15)$$

После вычисления  $l_6$  можно по формуле (4.14) найти  $l_1$ ; для механизмов данного типа обычно  $l_6 / l_1 \geq 2$ .

При ведущем кривошипе, при передаче усилия от кулисного камня (ползуна) 2 к кулисе 3, угол давления  $\vartheta_{32} = 0$ , что является достоинством кулисных механизмов. Для обеспечения наименьших углов давления при передаче усилия от звена 4 к ведомому ползуну 5 целесообразно положение оси  $XX$  выбрать так, чтобы она делила стрелку сегмента  $f$  пополам. Тогда из прямоугольного  $\Delta NDE$  длина звена 4

$$l_4 = l_{DE} \geq \frac{f}{2 \sin \vartheta_{\text{доп}}}, \quad (4.16)$$

где  $f = l_3 - l_3 \cos(\beta/2)$ ; в этом случае будет обеспечено соотношение  $\vartheta_{\text{max}} \leq \vartheta_{\text{доп}}$ .

Расстояние между осью вращения кулисы и осью направляющей ползуна 5 определяется по формуле

$$b = l_3 - f/2. \quad (4.17)$$

Применяют и другой вариант двухпроводковой группы звеньев 4, 5 с двумя поступательными и одной вращательной парами (рис. 4.8, б). По углам давления этот вариант лучше предыдущего:  $\vartheta_{54} = 0$ .

**Механизм с вращающейся кулисой.** Схема наиболее часто встречающегося варианта такого механизма изображена на рис. 4.8, б. Исходные данные: длина  $l_1 = l_{AB}$  кривошипа,

ход  $h$  ползуна 5 и коэффициент изменения его средней скорости  $K_v = v_{\text{обр}}/v_{\text{пр}} > 1$ .

Прямой ход ползун 5 совершает при повороте кривошипа 1 на угол  $\varphi_{\text{пр}} = 180^\circ + \theta$ , обратный — при повороте кривошипа на угол  $\varphi_{\text{обр}} = 180^\circ - \theta$ . Поэтому при  $\omega_1 = \text{const}$

$$K_v = \frac{h/t_{\text{обр}}}{h/t_{\text{пр}}} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}, \quad (4.18)$$

откуда

$$\theta = 180^\circ \frac{K_v - 1}{K_v + 1}. \quad (4.19)$$

Расстояние  $l_6 = l_{AC}$  между осями вращения кривошипа 1 и кулисы 3 из  $\Delta A B_1 C$  определяется по формуле

$$l_6 = l_1 \sin(\theta/2).$$

Крайние положения точки  $E$  ползуна ( $E_1$  и  $E_2$ ) определяются положениями точки  $B$  ( $B_1$  и  $B_2$ ), когда направления кулисы 3 и шатуна 4 совпадают, поэтому длина кривошипа  $CD$ :

$$l_{CD} = h/2.$$

Длина шатуна 4 должна быть такой, чтобы максимальная величина угла давления  $\vartheta = \vartheta_{54}$  не превосходила допускаемого значения  $\vartheta_{\text{доп}}$ , поэтому

$$l_4 \geq \frac{h}{2 \sin \vartheta_{\text{доп}}}. \quad (4.20)$$

Удлинять шатун 4 сверх полученного предела не следует, так как это увеличит габариты всего механизма. Для получения наименьших усилий в кулисной паре 2–3 (камень—кулиса) желательно выбрать длину кривошипа 1 как можно большей, однако следует учитывать, что при этом возрастают габариты механизма.

Методика решения более сложных задач синтеза рычажных механизмов по заданной непрерывной функции положения и по заданной траектории в данной лекции не рассматривается; см. литературу [5].

### Контрольные вопросы и задания к лекции 4

1. Перечислите основные этапы синтеза плоских механизмов с низшими парами.
2. Сформулируйте условия существования кривошипа в плоских четырехзвенных механизмах.
3. Дайте определение направляющего механизма. Приведите пример.
4. Дайте определение передаточного механизма. Приведите пример.
5. Как осуществляется синтез соосного кривошипно-ползунного механизма по средней скорости ползуна?
6. Как осуществляется синтез четырехзвенных механизмов по двум положениям?
7. Как осуществляется синтез четырехзвенных механизмов по трем положениям?
8. Как осуществляется синтез кулисного механизма (с качающейся кулисой) по заданному ходу выходного звена и коэффициенту изменения его средней скорости?

## Лекция 5

### Кинематические характеристики механизмов

Основным назначением механизма является выполнение им требуемых движений. Эти движения могут быть описаны посредством его кинематических характеристик. К ним относят координаты точек и звеньев, их траектории, скорости и ускорения. К числу кинематических характеристик относятся и такие характеристики, которые не зависят от закона движения начальных звеньев, определяются только строением механизма и размерами его звеньев и в общем случае зависят от обобщенных координат. Это **функции положения, кинематические передаточные функции скорости и ускорения**.

Для создания механизмов, наилучшим образом отвечающих поставленным требованиям, надо знать методы определения кинематических характеристик механизмов.

Различают следующие методы определения кинематических характеристик механизмов.

**1. Геометрический метод** — основанный на анализе векторных контуров кинематических цепей механизмов, представленных в аналитическом или графическом виде.

**2. Метод преобразования координат** точек механизма, решаемый в матричной или тензорной форме (обычно применяется для исследования кинематических цепей манипуляторов промышленных роботов с использованием ЭВМ).

**3. Метод кинематических диаграмм** — метод численного интегрирования и дифференцирования (решаемый с помощью ЭВМ или графически).

**4. Метод планов положений, скоростей и ускорений**, основанный на решении векторных уравнений, связывающих кинематические параметры, в графическом виде или аналитической форме.

**5. Экспериментальный метод.**

### Кинематика входных и выходных звеньев

Число независимых друг от друга кинематических параметров механизма с заданными размерами звеньев и структурной схемой равно числу степеней свободы механизма или числу обобщенных координат механизма.

Звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат, называют **начальным звеном**. Например, звено 1, вращающееся вокруг неподвижной точки, т.е. образующее со стойкой 2 сферическую кинематическую пару (рис. 5.1, а), имеет три степени свободы и его положение определяется тремя параметрами — тремя углами Эйлера:  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\theta_1$ . Звено 1, вращающееся вокруг неподвижной оси, т.е. образующее со стойкой 2 вращательную кинематическую пару (рис. 5.1, б), имеет одну степень свободы, и его положение определяется одним параметром, например угловой координатой  $\varphi_1$ . Звено, перемещающееся поступательно относительно стойки (рис. 5.1, в), имеет также одну степень свободы и его положение определяется одним параметром — координатой  $x_B$ . Любой механизм предназначен для преобразования движения входного звена 1 (рис. 5.2, а, б) или входных звеньев (рис. 5.2, в) в требуемые

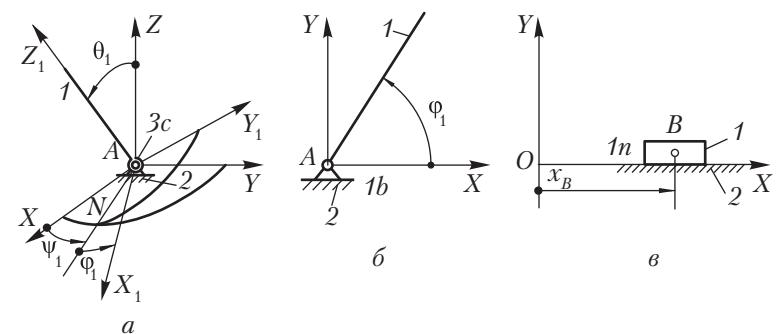


Рис. 5.1

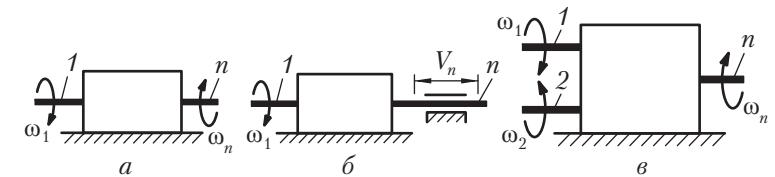


Рис. 5.2

движения звеньев, для выполнения которых предназначен механизм. Входному звену механизма с одной степенью свободы обычно присваивают номер 1, а выходному зву-ну — номер  $n$ , промежуточным звеньям — порядковые номера: 2, 3, ...,  $i$ , ...,  $n - 1$ .

Во многих случаях при проектировании машин и механизмов закон изменения обобщенных координат в функции времени удается определить только на последующих стадиях проектирования, обычно после динамического исследования движения агрегата с учетом характеристик сил, приложенных к звеньям механизма, масс и моментов инерции звеньев. В таких случаях движение выходных и промежуточных звеньев определяется в два этапа: на первом устанавливаются зависимости кинематических параметров звеньев и точек от обобщенной координаты, т.е. определяются относительные функции (функции положения и передаточные функции механизма), а на втором — определяется закон изменения обобщенной координаты от времени и зависимости кинематических параметров, выходных и промежуточных звеньев от времени.

**Функцией положения** механизма называется зависимость углового или линейного перемещения точки или звена механизма от обобщенной координаты.

**Кинематическими передаточными функциями** механизма называются производные от функции положения по обобщенной координате. Первая производная называется первой передаточной функцией или аналогом скорости (обозначаются  $V_q$ ,  $\omega_q$ ), вторая производная — второй передаточной функцией или аналогом ускорения (обозначаются  $a_q$ ,  $\varepsilon_q$ ).

**Кинематическими характеристиками механизма** называются производные от функции положения по времени. Первая производная называется скоростью (обозначают  $V$ ,  $\omega$ ), вторая — ускорением (обозначают  $a$ ,  $\varepsilon$ ).

Связь между скоростью  $V_c$  (или ускорением  $a_c$ ) точки  $C$  на ползуне механизма (рис. 5.3) и передаточной функцией скорости  $V_{qc}$  (или ускорения  $a_{qc}$ ) той же точки определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{V}_c = \frac{dS_c}{dt}; \quad \tilde{V}_{qc} = \frac{dS_c}{d\phi}; \quad \tilde{V}_c = \frac{\tilde{V}_c}{\omega_1}; \quad \tilde{V}_c = \frac{dS_c}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = V_{qc} \omega;$$

$$\tilde{a}_c = \frac{d^2 S_c}{dt^2}; \quad \tilde{a}_{qc} = \frac{d^2 S_c}{d\phi^2}; \quad \tilde{a}_{qc} = \tilde{a}_{qc} \omega^2 + \tilde{V}_{qc} \tilde{\varepsilon}_{qc};$$

$$\tilde{a}_c = \frac{d^2 S_c}{d\phi^2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{dS_c}{d\phi} \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

### Определение кинематических характеристик плоского рычажного механизма геометрическим методом в аналитической форме

Рассмотрим пример с кривошипно-ползунным механизмом.

К основным размерам, характеризующим кинематическую схему механизма, относятся:

1) длина кривошипа —  $l_1$

2) относительная длина шатуна —  $\lambda_2 = \frac{l_2}{l_1}$ ;

3) относительная внеосность —  $\lambda_c = \frac{e}{l_1}$ ;

4) угол наклона направляющей ползуна —  $\beta$ ;

5) начальная угловая координата звена 1 —  $\phi$ .

Изобразим кинематическую схему механизма (рис. 5.3).

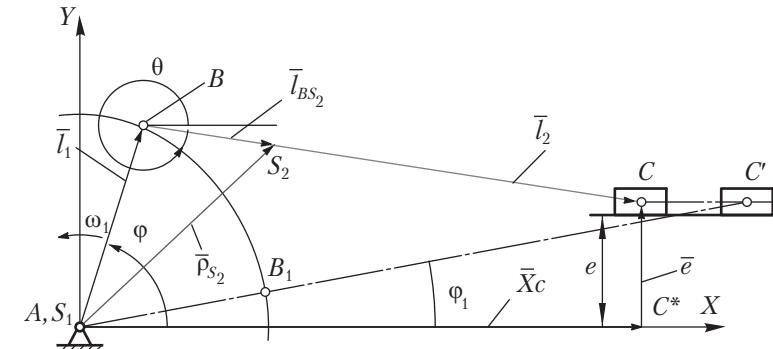


Рис. 5.3

Условие замкнутости векторного контура  $ABCC^*A$  для любого положения механизма выражается уравнением

$$\bar{l}_1 + \bar{l} = \bar{x}_c + \bar{e}.$$

Проецируя этот векторный контур на оси координат  $A_x$  и  $A_y$ , получим функцию положения механизма, т.е. зависимость входной координаты  $\varphi$  и выходной координаты  $X_c$ :

$$l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta = X_c, \quad (5.1)$$

$$l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta = e. \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.2) угловая координата  $\theta$  вектора  $l_2$  определяется по формуле

$$\sin \theta = \frac{e - l_1 \sin \varphi}{l_2} = \frac{\lambda_e - \sin \varphi}{\lambda_2}, \quad (5.3)$$

где  $\lambda_e = e/l_1$ ;  $\lambda_2 = l_2/l_1$ ;

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} > 0. \quad (5.4)$$

Дифференцируя (5.2) по обобщенной координате  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} &= 0, \\ U_{21} = \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{d\theta/dt}{d\varphi/dt} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\cos \varphi}{\lambda_2 \cos \theta} = U_{21}(\varphi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Дифференцируя (5.1) по  $\varphi$ , получим

$$-l_1 \sin \varphi - l_2 \sin \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{dX_c}{d\varphi}.$$

Передаточная функция скорости точки  $C$ :

$$V_{qc} = \frac{dX_c}{d\varphi} = \frac{dX_c/dt}{d\varphi/dt} = \frac{V_c}{\omega_1}; \quad (5.6)$$

$$V_{qc} = -l_1 (\sin \varphi + \lambda_2 \sin \theta U_{21}).$$

Из векторного контура  $ABS_2A$  определим радиус-вектор центра масс:

$$\bar{\rho}_{S_2} = \bar{l}_1 + \bar{l}_{BS_2}.$$

Проецируя этот векторный контур на оси координат  $AX$  и  $AY$ , получим координаты центра масс  $S_2$ :

$$X_{S_2} = l_1 (\cos \varphi + \lambda_2 \lambda_{S_2} \cos \theta); \quad (5.7)$$

$$Y_{S_2} = l_1 (\sin \varphi + \lambda_2 \lambda_{S_2} \sin \theta). \quad (5.8)$$

Дифференцируя (5.7) и (5.8) по  $\varphi$ , получим проекции передаточной функции скорости точки  $S_2$ :

$$V_{qS_2X} = \frac{dX_{S_2}}{d\varphi} = \frac{V_{S_2X}}{\omega_1} = -l_1 (\sin \varphi + \lambda_2 \lambda_{S_2} U_{21} \sin \theta); \quad (5.9)$$

$$V_{qS_2Y} = \frac{dY_{S_2}}{d\varphi} = \frac{V_{S_2Y}}{\omega_1} = -l_1 (\cos \varphi + \lambda_2 \lambda_{S_2} U_{21} \cos \theta); \quad (5.10)$$

$$V_{qS_2} = \sqrt{V_{qS_2X}^2 + V_{qS_2Y}^2}; \quad \lambda_{S_2} = \frac{l_{BS_2}}{l_2}.$$

Дифференцируя по  $\varphi$  выражение (5.5), получим проекции передаточной функции ускорения звена 2 (шатуна):

$$V_{qS_2X} = \frac{dU_{21}}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi - U_{21} \cos \varphi \sin \theta}{\lambda_2 \cos^2 \theta} = \varepsilon_{q2}(\varphi). \quad (5.11)$$

Дифференцируя по  $\varphi$  выражение (5.6), получим передаточную функцию ускорения точки  $C$ :

$$a_{qc} = \frac{dV_{qc}}{d\varphi} = -l_1 (\cos \varphi + \lambda_2 \varepsilon_{q2} \sin \theta + \lambda_2 U_{21}^2 \cos \theta). \quad (5.12)$$

Аналогично можно получить кинематические передаточные функции ускорения точки  $S_2$ , если продифференцировать (5.9) и (5.10) по  $\varphi$ :

$$a_{qS_2X} = \frac{dV_{qS_2X}}{d\varphi} = -l_1 (\cos \varphi - \lambda_2 B); \quad (5.13)$$

$$a_{qs_2Y} = \frac{dV_{qs_2Y}}{d\phi} = l_1(\lambda_2 - 1) \sin \phi, \quad (5.14)$$

где

$$B = \varepsilon_{q2} \sin \theta + U_{21}^2 \cos \theta. \quad (5.15)$$

Для общего случая движения механизма, когда  $\omega = \omega(t)$ , угловое ускорение шатуна:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}(U_{21}\omega) = \varepsilon_{q2}\omega^2 + U_{21}\varepsilon, \quad (5.16)$$

ускорение ползуна:

$$a_c = \frac{dV_c}{dt} = \frac{d}{dt}(V_{qc}\omega) = a_{qc}\omega^2 + V_{qc}\varepsilon. \quad (5.17)$$

Блок-схема программы определения кинематических передаточных функций скорости кривошипно-ползунного механизма (AR210) изображена на рис. 5.4.

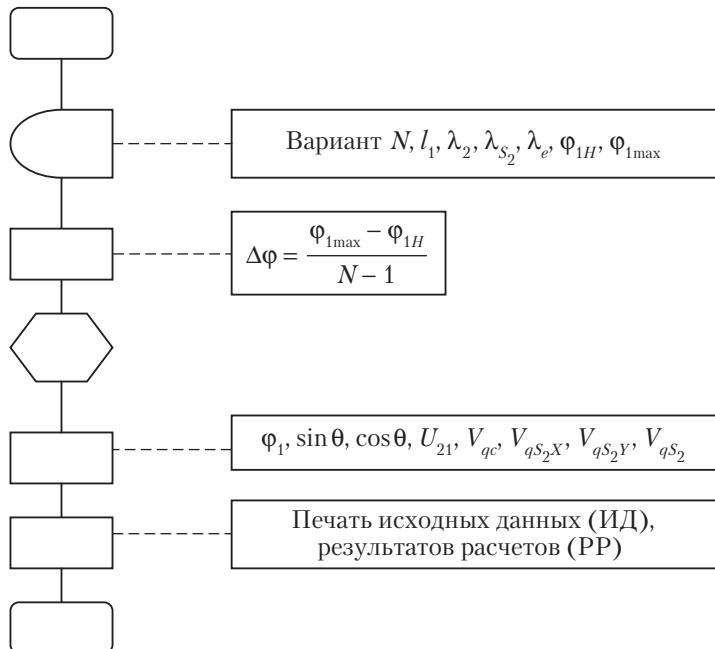


Рис. 5.4

### Метод планов положений, скоростей и ускорений

Кинематические характеристики кривошипно-ползунного (и любого другого) механизма могут быть определены и с помощью графоаналитического метода, или, как его чаще называют, метода планов положений, скоростей и ускорений.

**Планом механизма** называется масштабное графическое изображение кинематической схемы механизма соответствующее заданному положению входного звена.

**Планом скоростей** механизма называется чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению скоростям различных точек механизма в данный момент.

Чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизма в данный момент, называют **планом ускорений** механизма.

Для иллюстрации этого метода построим план скоростей (рис. 5.5) для той же угловой координаты  $\phi$ . Если угловая скорость  $\omega_1$  задана, то строим план скоростей в масштабе

$$\mu_V = \frac{p_V b}{V_B}, \frac{\text{мм}}{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}. \text{ Если же } \omega_1 \text{ неизвестна, то строим план}$$

**возможных** скоростей:

$$\mu_V = \frac{p_V b}{V_B}, \frac{\text{мм}}{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}.$$

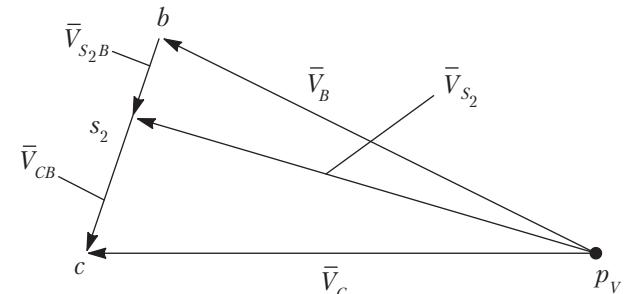


Рис. 5.5

**Определение скоростей.** Векторные уравнения для определения скоростей точек  $B$ ,  $C$  и  $S_2$ :

$$V_{1B} = \omega_1 l_{AB}, \text{ [м/с]; } \underline{\underline{V}_C} = \underline{\underline{V}_B} + \underline{\underline{V}_{CB}}; \\ \text{где } \perp AB \perp BC;$$

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}}; \quad V_{S_2B} = \omega_2 l_{S_2B}.$$

$$V_{qC} = \frac{V_C}{\omega_1} = \frac{V_C}{V_B} l_1 = l_1 \frac{p_v c}{p_v b}, \text{ м; } \quad V_{qS_2} = \frac{V_{S_2}}{\omega_1} = \frac{V_{S_2}}{V_B} l_1 = l_1 \frac{p_v S_2}{p_v b}, \text{ м;}$$

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{BC}/l_{BC}}{V_B/l_1} = \frac{l_1}{l_2} \frac{bc}{p_v b}.$$

**Определение ускорений.** Для определения ускорений точек  $B$  и  $C$  записываем уравнения в следующем виде:

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}}_B^n} + \underline{\underline{\bar{a}}_B^\tau}$$

$\parallel AB \perp AB$

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{AB}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB}; \quad \underline{\underline{a}_C} = \underline{\underline{a}_B} + \underline{\underline{a}_{CB}^n} + \underline{\underline{a}_{CB}^\tau};$$

$\text{где } \parallel CB \perp BC;$

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC}.$$

Далее строим план ускорений (рис. 5.6) в масштабе  $\mu_a = \frac{p'_a n'_b}{a_B^n}, \frac{\text{мм}}{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}$ . Угловое ускорение шатуна (звена 2) определяем по формуле  $\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{BC}}$ .

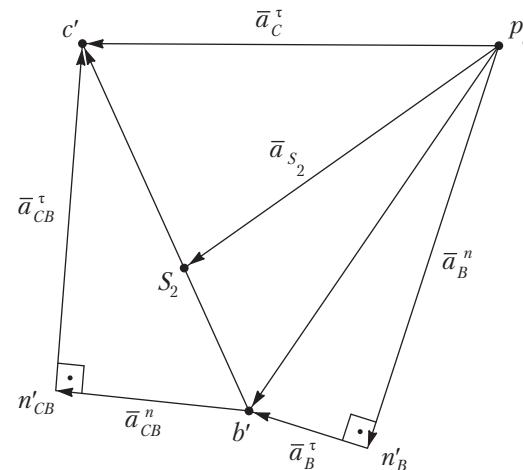


Рис. 5.6

регистрируют, а потом и преобразуют кинематические параметры в пропорциональные электрические сигналы, которые после усиления регистрируются различными приборами. В последние годы для регистрации и обработки результатов экспериментальных исследований широко используются ПЭВМ. На рис. 5.7 показана экспериментальная установка для исследования кинематических характеристик кривошипно-кулисного механизма пресс-автомата.

В этой экспериментальной установке используются для измерений:

- перемещения выходного звена — потенциометрический датчик перемещения, в котором пропорционально положению движка потенциометра изменяется его сопротивление;

• скорости выходного звена — индукционный датчик скорости, в котором напряжение на концах катушки движущейся в поле постоянного магнита пропорционально скорости катушки;

• ускорения выходного звена — тензометрический акселерометр. Он состоит из пластинчатой пружины, один конец которой закреплен на выходном звене механизма, а на втором закреплена масса. На пластину наклеены проволочные тензопреобразователи. При движении выходного звена с ускорением инерционность массы вызывает изгиб

## Экспериментальный метод

При экспериментальном методе исследования механизмов кинематические характеристики точек и звеньев механизма регистрируются с помощью датчиков. Датчики

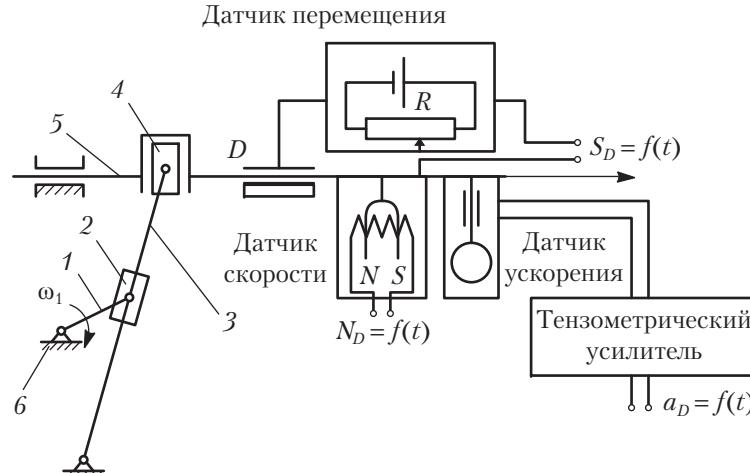


Рис. 5.7

пластины, деформацию тензопреобразователей и изменение их сопротивления, пропорциональное ускорению выходного звена.

### Метод кинематических диаграмм

#### Графическое и численное интегрирование

Этот метод применяется в тех случаях, когда функцию нельзя проинтегрировать в аналитической форме. Численное интегрирование ведется по квадратурным формулам Ньютона — Котеса, формулам Гаусса.

При заданных значениях функций  $y = y(x_i)$  для  $n + 1$  равнотстоящих значений аргумента  $x_i = x_0 + i\Delta x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) квадратурные формулы Ньютона—Котеса имеют вид:

правило трапеций для  $n$  шагов

$$I = \int_x^{x_0+n\Delta x} y(x) dx \approx \Delta x \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right);$$

правило трапеций для  $n = 1$

$$I = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + y_1);$$

правило Симпсона для  $n = 2$

$$I = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2);$$

правило Уэддля для  $n = 6$

$$I = \frac{3}{10} \Delta x (y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6).$$

При вычислениях на ЭВМ используют программы, имеющиеся в каталоге конкретной машины (например, QTGF или QSF).

При графическом определении интеграла подынтегральная функция задается графиком. Для примера рассмотрим определение угла поворота  $\phi(t) = \int_{t_0}^{t_1} \omega dt$  выходного звена по заданной кривой  $\omega(t)$ , полученной экспериментально.

График угловой скорости  $\omega(t)$  изображается в декартовых координатах с учетом числовых значений масштабов: угловой скорости  $\mu_\omega$  и времени  $\mu_t$ . Промежуток времени от  $t_0$  до  $t_1$  делится на такое количество интервалов  $\Delta t_i$ , которое позволяет считать, что на каждом малом промежутке времени  $\Delta t_i$  движение можно принять равномерным.

Эти промежутки времени, отмеченные на рис. 5.8, *a* точками 0, 1, 2, 3, 4, не обязательно должны быть равными.

В каждом интервале времени, например от  $t_{i-1}$  до  $t_i$ , можно приближенно считать, что

$$y_{\omega i \text{ср}} \approx \frac{y_{\omega(i-1)} + y_{\omega i}}{2},$$

т.е. можно принять, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника высотой  $y_{\omega i \text{ср}}$  и основанием  $\Delta x_i$ .

Концы средних ординат для каждого интервала  $y_{\omega 1 \text{ср}}, y_{\omega 2 \text{ср}}, \dots, y_{\omega i \text{ср}}$  проецируют на ось ординат и соединяют найденные точки 1', 2', 3', ..., i' с точкой D, которая ограничивает слева выбранный отрезок интегрирования 0D длиной K, мм (см. рис. 5.8, *a*).

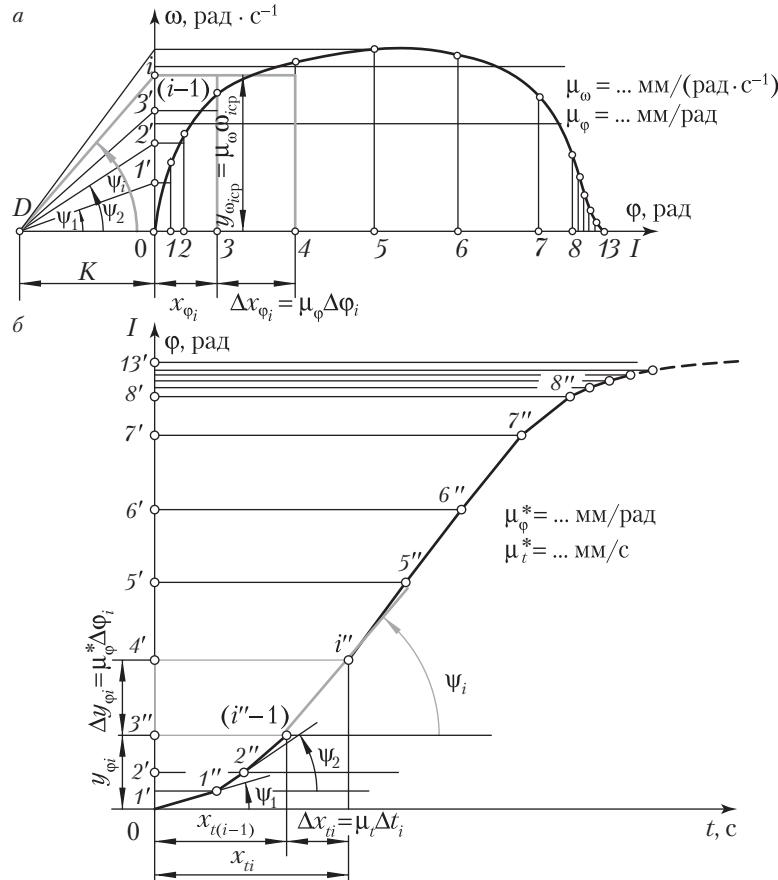


Рис. 5.8

Лучи  $D1', D2', D3', \dots$ , проведенные через точку  $D$ , образуют углы  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i$  с положительным направлением оси  $x$ , причем  $\operatorname{tg} \psi_i = \frac{y_{\omega i \text{ cp}}}{K}$ .

На искомом графике ( $\phi, t$ ) (рис. 5.8, б) проводят линии  $01'', 1''2'', 2''3'', \dots$ , параллельные в пределах соответствующих интервалов лучам  $D1', D2', D3', \dots$ . Первый отрезок  $01''$  проводят через начало координат  $0$ , следующие отрезки соответственно через точку  $1''$ , затем через точку  $2''$  и т.д. Эти линии наклонены относительно положительного

направления оси  $x$  под углами  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i$  соответственно, т.е.  $\operatorname{tg} \psi_i = \frac{\Delta y_{\phi i}}{\Delta x_{\phi i}}$ .

Отрезки на графиках связаны с соответствующими физическими параметрами с помощью масштабов соотношениями:

$$y_{\omega i \text{ cp}} = \mu_\omega \omega_{i \text{ cp}}; \quad \Delta y_{\phi i} = \mu_\phi \Delta \phi_i; \quad \Delta x_{\phi i} = \mu_t \Delta t_i.$$

Приравнивая правые части написанных выше соотношений для тангенса угла  $\psi_i$ , получаем:

$$\frac{\Delta y_{\phi i}}{\Delta x_{\phi i}} = \frac{y_{\omega i \text{ cp}}}{K} \quad \text{или} \quad \Delta y_{\phi i} = \frac{y_{\omega i \text{ cp}} \Delta x_{\phi i}}{K}.$$

Откуда масштаб искомого графика

$$\mu_\phi = \frac{\mu_\omega \mu_t}{K}, \quad [\mu_\phi] = \frac{\text{мм}}{\text{рад}}. \quad (5.18)$$

### Графическое и численное дифференцирование

Графическое дифференцирование начинают с построения графика функции по заданным значениям. При экспериментальном исследовании такой график получают с помощью самопищущих приборов. Далее проводят касательные к кривой в фиксированных положениях и вычисляют значения производной по тангенсу угла, образованного касательной с осью абсцисс.

На рис. 5.9, а изображена кривая  $\omega_3 = \omega_3(t)$ , полученная экспериментально на установке (см. рис. 5.8). Определение углового ускорения (искомой функции) проводят графическим дифференцированием по соотношению

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\left(\frac{Y_{\omega_3}}{\mu_\omega}\right)}{d\left(\frac{X_{\omega_3}}{\mu_t}\right)} = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \cdot \frac{dY_{\omega_3}}{dX_t} = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \operatorname{tg} \psi. \quad (5.19)$$

Тангенс угла  $\psi$  наклона касательной к кривой  $\omega_3(t)$  в некоторой точке  $i$  представляют в виде отношения отрез-

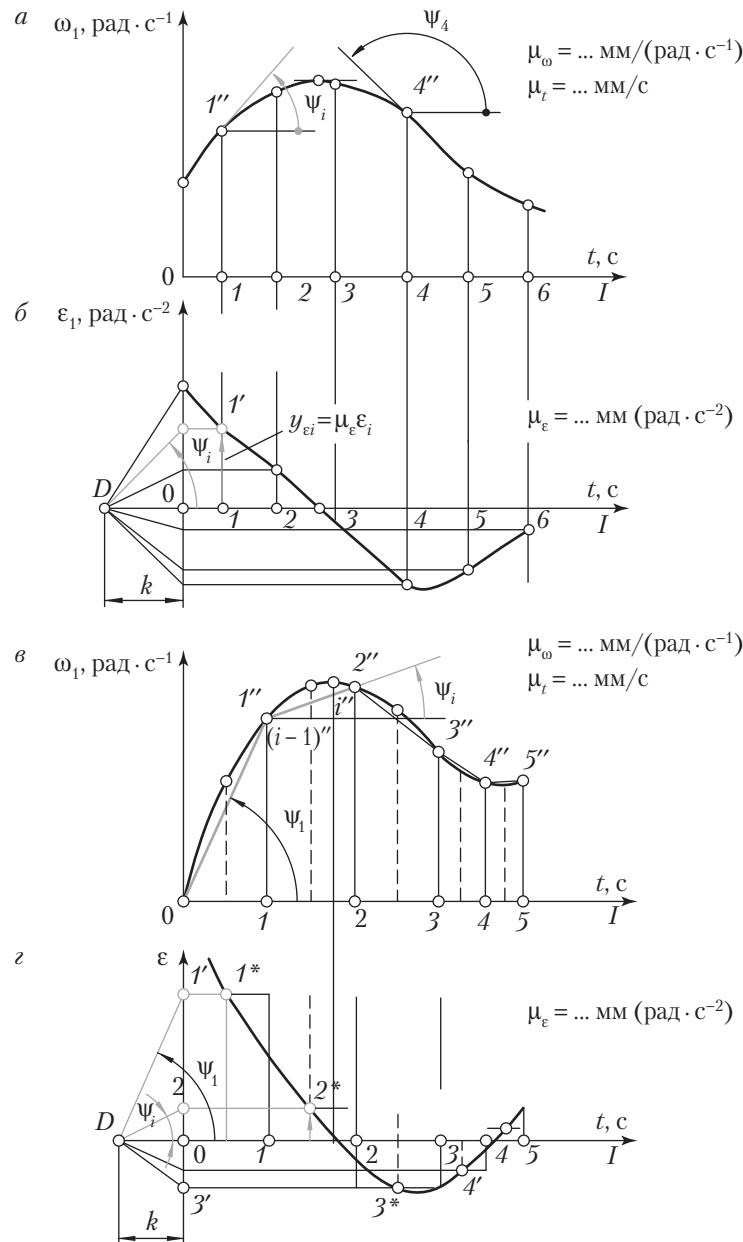


Рис. 5.9

ков  $\frac{Y_{ei}}{K} = \operatorname{tg} \psi$ , где  $K$  – выбранный отрезок интегрирования (рис. 5.9, б)

После подстановки этого соотношения в соотношение (5.19) получают

$$\varepsilon_3 = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_t}{\mu_\omega} \cdot \frac{Y_{ei}}{K} = \frac{Y_{ei}}{\mu_\varepsilon}, \quad (5.20)$$

где  $Y_{ei}$  – ордината искомого графика углового ускорения;

$$\mu_\varepsilon = \frac{\mu_K}{\mu_t} \quad (5.21)$$

– масштаб искомого графика  $\varepsilon_i(t)$ ; единицы СИ:  $[Y_{ei}] = \text{мм}$ ;  $[\mu_\varepsilon] = \text{мм}/(\text{рад} \cdot \text{s}^{-2})$ .

График функции  $\varepsilon = \varepsilon_i(t)$  строят по найденным значениям ординат для ряда позиций. Точки на кривой соединяют от руки плавной линией, а затем обводят с помощью лекала.

Графическое дифференцирование рассмотренным методом касательных имеет относительно низкую точность. Более высокую точность получают при графическом дифференцировании методом хорд (рис. 5.9, в и г).

На заданной кривой отмечают ряд точек  $1'', 2'', 3'', \dots$ , которые соединяют хордами, т.е. заменяют заданную кривую ломаной линией. Принимают следующее допущение: угол наклона касательных в точках, расположенных посередине каждого участка кривой, равен углу  $\psi_i$  наклона соответствующей хорды. Это допущение вносит некоторую погрешность, но она относится только к данной точке. Эти погрешности не суммируются, что обеспечивает приемлемую точность метода.

Остальные построения аналогичны ранее описанным при графическом дифференцировании методом касательных. Выбирают отрезок  $D0 = k$  (мм); проводят лучи, наклоненные под углами  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots$ , до пересечения с осью ординат в точках  $1', 2', 3', \dots$ , которые переносят на ординаты, проведенные в середине каждого из интервалов. Полученные точки  $1^*, 2^*, 3^*, \dots$ , являются точками искомой функции  $\varepsilon = \varepsilon_i(t) = \frac{d\omega_i}{dt}$ .

Масштабы по осям координат при этом методе построения связаны таким же соотношением (5.21), которое было выведено для случая графического дифференцирования методом касательных.

Дифференцирование функции  $f(x)$ , заданной (либо вычисленной) в виде массива чисел, выполняют методом численного дифференцирования с применением ЭВМ.

Чем меньше шаг  $\Delta x$  в массиве чисел, тем точнее можно вычислить значение производной функции в этом интервале:

$$f'(x) \approx \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}.$$

Можно пользоваться также выражением

$$f'(x)_{i+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{f(x)_{i+1} - f(x)_i}{\Delta x_i} + \frac{f(x)_{i+2} - f(x)_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \right).$$

При численном дифференцировании используют интерполяционные формулы, которые сопоставляют заданные значения какой-либо величины с функцией известного класса, зависящей от нескольких параметров, выбранной так, чтобы при заданных значениях аргумента (в узлах интерполяции) значения функции совпадали с заданными значениями величины, т.е. чтобы график функции проходил через заданные точки. Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных. Для функции  $y(x)$ , заданной таблицей разностей для равноотстоящих значений аргумента с шагом  $\Delta x$ , используют следующие соотношения для вычисления аргумента и производных:

$$x_i = x_0 + i \Delta x \quad (i = 0; \pm 1; \pm 2; \dots);$$

$$y_i = y_i(x_i) = \frac{1}{\Delta x} \left( \Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta^2 y_i + \frac{1}{3} \Delta^3 y_i - \dots \right);$$

$$y_i = y_i(x_i) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left( \Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i + \frac{11}{12} \Delta^4 y_i - \frac{5}{6} \Delta^5 y_i + \dots \right).$$

При разработке прикладных программ для численного дифференцирования на ЭВМ используют интерполяционные формулы Стирлинга, Бесселя, Ньютона и др.

## Метод преобразования координат

Применение ЭВМ для кинематического анализа механизмов связано с разработкой соответствующих алгоритмов и программ расчета. Наиболее просто такие алгоритмы реализуются с использованием уравнений преобразования координат в матричной форме записи необходимых операций вычисления.

При этом методе выбирают некоторое число систем координат, достаточное для математического описания геометрической формы звеньев и относительного движения звеньев в каждой кинематической паре. Число систем координат определяется числом элементов звеньев, образующих кинематические пары. Неподвижная система координат  $x^{(0)} y^{(0)} z^{(0)}$  связана со стойкой. В каждой кинематической паре выбирают две системы координат (способ 1) или одну систему координат (способ 2). При первом способе две системы координат относятся к элементам пары звеньев, образующих эту пару. При втором способе каждой кинематической паре соответствует прямоугольная система координат, одна из осей которой связана с характерными признаками звена, например осевой линией. Для примера следует обратиться к схеме манипулятора, имитирующего движение руки человека, изображенной на рис. 24.2 в лекции 24. На рис. 24.2, а показаны координатные оси  $0_1 x^{(0)}, 0_2 x^{(2)}, 0_3 x^{(3)}, 0_4 x^{(4)}$  (или  $0_0 x^{(0)}$ ) четырехзвенной (1, 2, 3, 4) открытой кинематической цепи, моделирующей структуру руки человека (рис. 24.2, б). Ось  $z^{(i)}$  направляют вдоль оси пары, а ось  $y^{(i)}$  дополняет правую систему координат  $0^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ . Начало координат каждой  $i$ -й локальной координатной системы совмещают с той кинематической парой, которой данное звено соединено с предыдущим звеном. Для плоских механизмов оси  $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(r)}$  параллельны между собой, так как они перпендикулярны базовой плоскости, в которой рассматривается движение звеньев плоского механизма.

Переход от  $i$ -й локальной координатной системы к другой ( $i+1$ ) системе определяется уравнениями преобразования декартовых прямоугольных координат, в общем случае — переноса и поворота координатных осей.

Применение метода будет продемонстрировано на конкретном примере в лекции 25 «Манипуляторные роботы».

## Контрольные вопросы и задания к лекции 5

1. Как построить графически функцию положения механизма и ее производные?
2. Как рассчитать масштабы кинематических диаграмм?
3. Как определить величину и направление угловых скоростей и угловых ускорений звеньев?
4. Как аналитически определить функцию положения, передаточные функции скорости и ускорения ползуна кривошипно-ползунного механизма?
5. В чем заключаются преимущества и недостатки аналитического и графического методов кинематического анализа?

## Лекция 6

### Динамика механизмов

#### Рассмотрим задачи динамики.

1. *Прямая задача динамики* (силовой анализ механизма) — по заданному закону движения определить действующие на его звенья силы, а также реакции в кинематических парах механизма.

2. *Обратная задача динамики* — по заданным силам, приложенными к механизму, определить истинный закон движения механизма.

В динамический анализ механизмов могут быть включены и задачи уравновешивания и виброзащиты.

Вначале займемся решением обратной задачи динамики, считая все звенья механизмов жесткими.

К механизму машинного агрегата во время его движения приложены различные силы. Это движущие силы, силы сопротивления (иногда их называют силами полезного сопротивления), силы тяжести, силы трения и многие другие. Некоторые силы постоянны. Характер их действия может быть различным и зависит:

- а) от положения звеньев механизма;
- б) от изменения их скорости.

Своим действием приложенные силы сообщают механизму тот или иной закон движения.

### Силы, действующие в машинах, и их характеристики

Силы и пары сил (моменты), приложенные к механизму машины, можно разделить на следующие группы.

1. **Движущие силы и моменты**, совершающие положительную работу за время своего действия или за один цикл, если они изменяются периодически. Эти силы и моменты

приложены к звеньям механизма, которые называются ведущими.

**2. Силы и моменты сопротивления**, совершающие отрицательную работу за время своего действия или за один цикл. Эти силы и моменты делятся, во-первых, на силы и моменты полезного сопротивления, которые совершают требуемую от машины работу и приложены к звеньям, называемым ведомыми, и, во-вторых, на силы и моменты сопротивления среды (газа, жидкости), в которой движутся звенья механизма. Силы сопротивления среды обычно малы по сравнению с другими силами, поэтому в дальнейшем они учитываться не будут, а силы и моменты полезного сопротивления будут называться просто силами и моментами сопротивления.

**3. Силы тяжести** подвижных звеньев и силы упругости пружин. На отдельных участках движения механизма эти силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу. Однако за полный кинематический цикл работа этих сил равна нулю, так как точки их приложения движутся циклически.

**4. Силы и моменты, приложенные к корпусу машины** (стойке) извне. К ним помимо силы тяжести корпуса относятся реакция основания (фундамента) машины на ее корпус и многие другие силы. Все эти силы и моменты, поскольку они приложены к неподвижному корпусу (стойке), работы не совершают.

**5. Силы взаимодействия между звеньями механизма**, т.е. силы, действующие в его кинематических парах. Эти силы, согласно 3-му закону Ньютона, всегда взаимообратны. Их нормальные составляющие работы не совершают, а касательные составляющие, т.е. силы трения, работу совершают, причем работа силы трения на относительном перемещении звеньев кинематической пары *отрицательна*.

Силы и моменты первых трех групп относятся к категории активных. Обычно они известны или могут быть оценены. Все эти силы и моменты приложены к механизму извне, а поэтому являются *внешними*. К числу внешних относятся также все силы и моменты 4-й группы. Однако не все они являются активными.

Силы 5-й группы, если рассматривать механизм в целом, не выделяя отдельных его частей, являются *внутренними*. Эти силы представляют собой реакции на действие активных сил. Реакцией будет также и сила (или момент),

с которой основание (фундамент) машины действует на ее корпус (т.е. на стойку механизма). Реакции заранее неизвестны. Они зависят от активных сил и моментов и от ускорений звеньев механизма.

Наибольшее влияние на закон движения механизма оказывают движущие силы и моменты, а также силы и моменты сопротивления. Их физическая природа, величина и характер действия определяются рабочим процессом машины или прибора, в которых использован рассматриваемый механизм. В большинстве случаев эти силы и моменты не остаются постоянными, а изменяют свою величину при изменении положения звеньев механизма или их скорости. Эти функциональные зависимости, представленные графически, или массивом чисел, или аналитически, носят название *механических характеристик* и при решении задач считаются известными.

При изображении механических характеристик будем придерживаться следующего правила знаков: силу и момент будем считать положительными, если на рассматриваемом участке пути (линейном или угловом) они производят положительную работу.

**Характеристики сил, зависящих от скорости.** На рис. 6.1 показана механическая характеристика асинхронного электродвигателя — зависимость движущего момента от угловой скорости ротора машины. Рабочей частью характеристики является участок *ab*, на котором движущий момент резко уменьшается даже при незначительном увеличении скорости вращения.

От скорости зависят силы и моменты, действующие также в таких роторных машинах, как электрогенераторы, вентиляторы, воздуховоды, центробежные насосы (рис. 6.2) и многие другие.

При увеличении скорости момент двигателей обычно уменьшается, а момент машин — потребителей механической энергии обычно увеличивается. Такое свойство очень полезно, так как автоматически содействует устойчивому поддержанию режима движения машины, и чем сильнее оно выражено, тем устойчивость больше. Назовем такое свойство машин саморегулированием.

**Характеристики сил, зависящих от перемещения.** На рис. 6.3 показана кинематическая схема механизма двухтактного двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и его механическая характеристика. Сила  $F_d$ , приложенная к

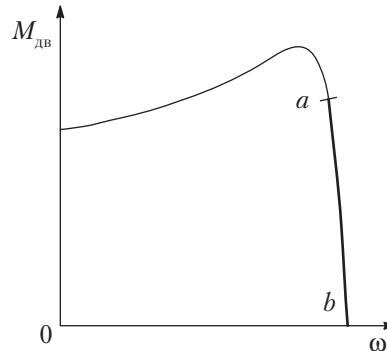


Рис. 6.1

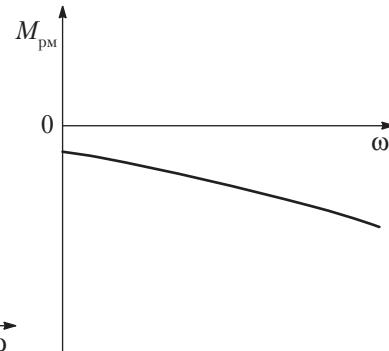


Рис. 6.2

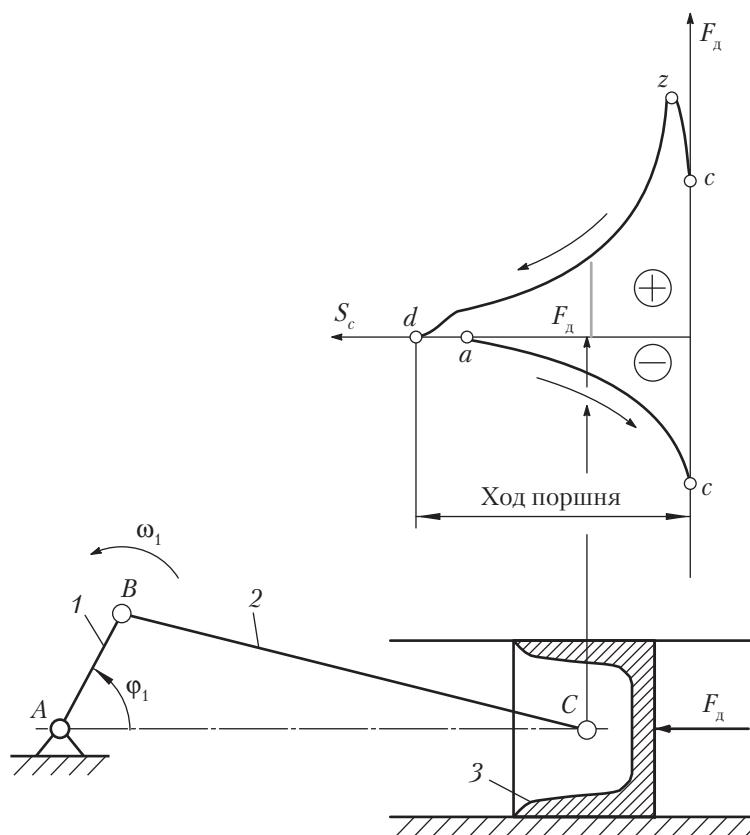


Рис. 6.3

поршню  $3$ , действует всегда влево. Поэтому при движении поршня влево (процесс расширения газов) она совершает положительную работу и показана со знаком плюс (ветвь  $czd$ ). При движении поршня вправо (процесс сжатия газов) сила  $F_d$  получает знак минус (ветвь  $dac$ ). Если подача топлива в ДВС не изменяется, то при следующем обороте начального звена (звено  $1$ ) механическая характеристика  $F_d = F_d(S_c)$  повторит свою форму. Это значит, что сила  $F_d$  будет изменяться периодически.

Работа силы  $F_d$  графически изобразится площадью, ограниченной кривой  $F_d(S_c)$ . На рис. 6.3 эта площадь имеет две части: положительную и отрицательную, причем первая больше второй. Поэтому работа силы  $F_d$  за полный период будет положительной. Следовательно, сила  $F_d$  является движущей, хотя она и знакопеременна. Отметим попутно, что если сила, будучи знакопеременной, совершает за один период отрицательную работу, то она является силой сопротивления.

Силы, зависящие только от перемещения, действуют во многих других машинах и приборах (в поршневых компрессорах, ковочных машинах, строгальных и долбежных станках, разнообразных приборах как с пневмоприводом, так и с пружинными двигателями и т.д.), причем действие этих сил может быть как периодическим, так и непериодическим.

Вместе с тем нужно отметить, что момент машин роторного типа от перемещения, т.е. от угла поворота ротора, не зависит; характеристики таких машин при  $\omega = \text{const}$  изображены на рис. 6.4,  $a, b$ . При этом у машин-двигателей  $M_{dv} > 0$ , а у машин — потребителей механической энергии (т.е. рабочих машин)  $M_{pm} < 0$ .

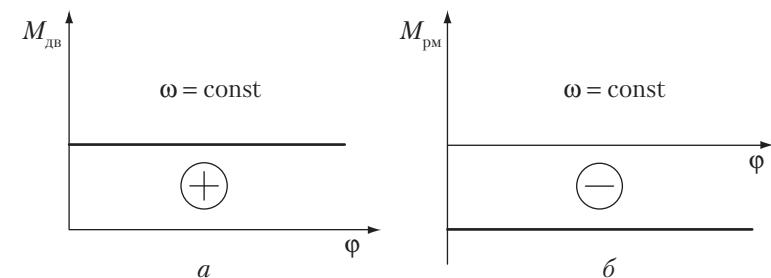


Рис. 6.4

Если изменять подачу топлива в ДВС, то его механическая характеристика примет вид семейства кривых (рис. 6.5, а): чем больше подача топлива (параметр  $h$  семейства), тем выше располагается характеристика. Семейством кривых изображается и механическая характеристика шунтового электродвигателя (рис. 6.5, б): чем больше сопротивление цепи обмотки возбуждения двигателя (параметр  $h$ ), тем правее размещается кривая. Характеристика гидродинамической муфты также имеет вид семейства кривых (рис. 6.5, в): чем больше наполнение муфты жидкостью (параметр  $h$ ), тем правее и выше располагаются характеристики.

Таким образом, воздействуя на параметр  $h$ , можно управлять режимом работы привода — теплового, электрического или гидравлического, увеличивая его движущую силу или скорость. Вместе с тем параметр управления  $h$  связан с величиной потока энергии, протекающей через машину, т.е. определяет ее нагруженность и производительность.

Механизм машинного агрегата обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Чтобы лучше ее себе представить, рассмотрим силовую насосную установку с приводом от асинхронного электродвигателя (рис. 6.6).

К поршню 3 приложена сила сопротивления жидкости, к ротору 4 электродвигателя — движущий момент. Если насос многоцилиндровый, то на каждый поршень будет действовать сила сопротивления, так что картина нагрузжения станет более сложной.

Для определения закона движения механизма под действием заданных внешних (активных) сил необходимо

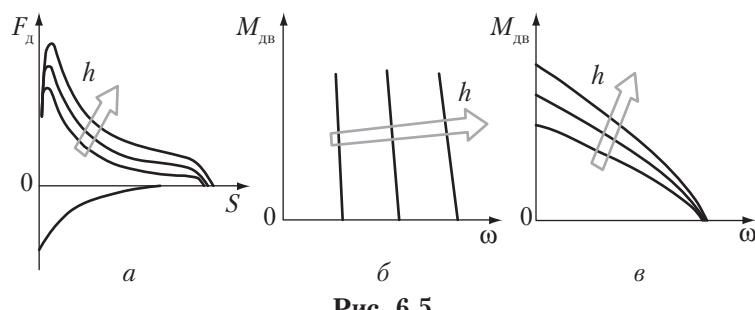


Рис. 6.5

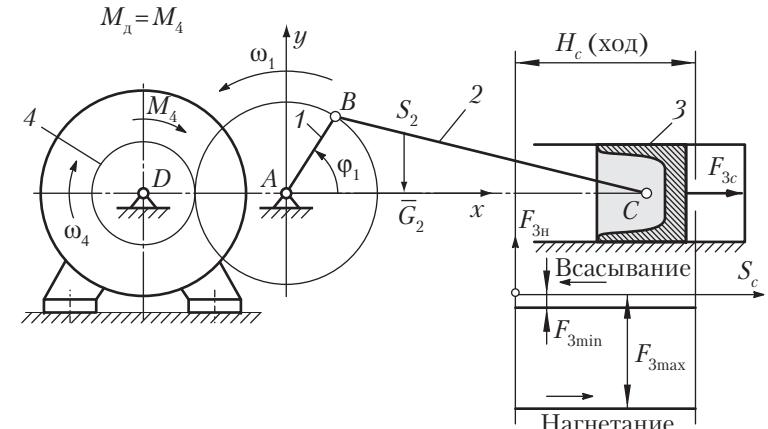


Рис. 6.6

решить уравнение его движения. Основой для составления уравнения движения служит теорема об изменении кинетической энергии механизма с  $W = 1$ , которая формулируется так: *изменение кинетической энергии механизма происходит за счет работы всех сил и моментов, приложенных к механизму.*

$$T - T_{\text{ нач}} = \sum A. \quad (6.1)$$

В плоском механизме звенья совершают вращательные, поступательные и плоскопараллельные движения, тогда кинематическая энергия механизма

$$T = \sum T_i = \sum \left( \frac{m_i V_{si}^2}{2} + \frac{J_{si} \omega_i^2}{2} \right) \quad (6.2)$$

для всех подвижных звеньев механизма

$$T_{\text{ нач}} = \frac{J_{\text{ нач}} (\omega_{\text{ нач}})^2}{2}. \quad (6.3)$$

Суммарная работа всех внешних сил и моментов

$$\sum A = \sum \left( \int_{S_H}^{S_K} P_j (\cos P_j \widehat{dS}_j) dS_j + \int_{\varphi_H}^{\varphi_K} M_K d\varphi_K \right). \quad (6.4)$$

После подстановки получим

$$\sum \left( \frac{m_i (V_{si})^2}{2} + \frac{J_{is} (\omega_i)^2}{2} \right) - T_{\text{нач}} = \sum \left( \int_{S_H}^{S_K} P_j (\cos \hat{P}_j dS_j) dS_j + \int_{\phi_H}^{\phi_K} M_K d\phi_K \right).$$

Переход от многих неизвестных к одной осуществляется при помощи методов приведения сил и масс. Для этого от реального механизма переходим к модели, т.е. заменяем весь сложный механизм одним условным звеном.

В рассматриваемом примере механизм имеет одну степень свободы ( $W = 1$ ). Это значит, что необходимо определить закон движения всего лишь одного из его звеньев, которое тем самым будет начальным.

### Динамическая модель. Приведение сил

Положение механизма с  $W = 1$  вполне определяется одной координатой, которая называется обобщенной координатой. В качестве обобщенной координаты чаще всего принимают угловую координату звена, совершающего вращательное движение. В этом случае динамическая модель будет (рис. 6.7) представлена в виде:

$\Phi_1 = \Phi_m$  — обобщенная угловая координата модели;

$\omega_1 = \omega_m$  — угловая скорость модели;

$M_{\Sigma}^{\text{пр}}$  — суммарный приведенный момент (обобщенная сила — эквивалент всей заданной нагрузки, приложенной к механизму);

$J_{\Sigma}^{\text{пр}}$  — суммарный приведенный момент инерции, являющийся эквивалентом инерционности механизма.

В случае приведения фактически действующие силы и моменты заменяют суммарным приведенным моментом, приложенным к динамической модели.

Следует подчеркнуть, что сделанная замена не должна нарушить закона движения механизма, определяемого действием фактически приложенных сил и моментов.

В основу приведения сил и моментов должно быть положено условие равенства элементарных работ, т.е.

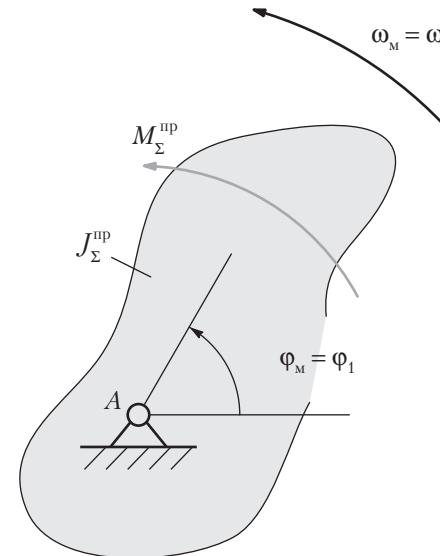


Рис. 6.7

элементарная работа каждой силы на возможном перемещении точки ее приложения или момента на возможном угловом перемещении того звена, на котором он действует, должна быть равна *элементарной работе приведенного момента на возможном угловом перемещении динамической модели*.

Рассмотрим в качестве примера приведение сил и моментов, приложенных к звеньям машинного агрегата (см. рис. 6.6), назначив в качестве обобщенной координаты угловую координату  $\Phi_1 = \Phi_m$ .

Определим величину  $M_{F_3}^{\text{пр}}$ , заменяющую приложенную силу  $F_{3c}$ . По условию равенства элементарных работ

$$M_{F_3}^{\text{пр}} d\Phi_1 = F_{3c} dS_c \cos(F_{3c} \hat{dS}_c);$$

решив относительно искомой величины  $M_{F_3}^{\text{пр}}$  и разделив возможные перемещения на время, получим

$$M_{F_3}^{\text{пр}} = F_{3c} \frac{V_c}{\omega_1} \cos(F_{3c} \hat{V}_c),$$

где  $\cos(F_{3c} \hat{V}_c) = \pm 1$ ;

$$M_{F_3}^{\text{np}} = F_{3c} \frac{V_c}{\omega_1} = F_{3c} V_{qc} = F_{3c} I_{AB} \frac{p_v c}{p_v b},$$

где  $F_{3c} V_{qc}$  — для решения на ЭВМ,  $F_{3c} I_{AB} = \frac{p_v c}{p_v b}$ , с использованием  $\Delta$  скоростей.

Аналогично произведем приведение к динамической модели (звену 1) сил  $G_2$ ,  $G_3$  и  $M_4$ .

$$M_{G_3}^{\text{np}} = G_3 \frac{V_c}{\omega_1} \cos(G_3 \hat{V}_c) = 0,$$

так как  $\cos(G_3 \hat{V}_c) = 0$ .

$$M_{G_2}^{\text{np}} = G_2 \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \cos(G_2 \hat{V}_{S_2}) = G_2 \hat{V}_{qS_2} \cos \alpha_{(G_2)}.$$

$$M_{G_2}^{\text{np}} = G_2 \frac{V_{qS_2y}}{\omega_1} = V_{qS_2y} G_2.$$

$V_{qS_2y}$  — проекция скорости центра масс  $S_2$  на ось  $y$ .

$$M_{M_4}^{\text{np}} d\phi_1 = M_4 d\phi_1; \quad M_{M_4}^{\text{np}} = M_4 \frac{d\phi_4}{d\phi_1}.$$

$$M_{M_4}^{\text{np}} d\phi_1 = M_4 d\phi_4; \quad M_{M_4}^{\text{np}} = M_4 \frac{d\phi_4}{d\phi_1}.$$

$$M_{M_4}^{\text{np}} = M_4 \frac{\omega_4}{\omega_1} = M_4 U_{41}.$$

Подобным же образом найдем  $M_1^{\text{np}} = M_1$ .

Если алгебраически сложить все приведенные моменты, приложенные к начальному звену, то получим *суммарный приведенный момент*, который заменяет собой все силы и моменты, действующие на механизм.

$$M_{\Sigma}^{\text{np}} = M_{F_3}^{\text{np}} + M_{G_3}^{\text{np}} + M_{G_2}^{\text{np}} + M_{M_4}^{\text{np}}. \quad (6.5)$$

## Приведение масс

Приведение масс делают с той же целью, что и приведение сил: видоизменить и упростить динамическую схему механизма, т.е. прийти к соответствующей динамической модели, а следовательно, и упростить решение уравнения движения.

Если в качестве динамической модели принято начальное звено с обобщенной координатой  $\phi_1 = \Phi_M$ , то кинетическая энергия модели должна быть равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма, т.е. в основу **приведения масс** к начальному звену положено условие равенства кинетических энергий.

*Приведенным моментом* инерции называется параметр динамической модели, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий реально движущихся звеньев.

Запишем условие равенства кинетической энергии отдельно взятого звена, всего механизма и модели. Для отдельного звена:  $T_M = T_i$ .

$$\frac{J_M^{\text{np}} \omega_M^2}{2} = \frac{m_i V_{S_i}^2}{2} + \frac{J_{is} \omega_i^2}{2}. \quad (6.6)$$

$$J_i^{\text{np}} = m_i \left( \frac{V_{S_i}}{\omega_M} \right)^2 + J_{is} \left( \frac{\omega_i}{\omega_M} \right)^2.$$

Для механизма  $T_M = \sum T_i$ .

$$\frac{J_M^{\text{np}} \omega_M^2}{2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i V_{S_i}^2}{2} + \frac{J_{is} \omega_i^2}{2} \right),$$

где  $\frac{J_M^{\text{np}} \omega_M^2}{2}$  — для модели,  $\frac{m_i V_{S_i}^2}{2} + \frac{J_{is} \omega_i^2}{2}$  — для реальных звеньев механизма,

$$J_{\Sigma}^{\text{np}} = J_1^{\text{np}} + J_2^{\text{np}} + J_3^{\text{np}} + \dots + J_y^{\text{np}} + \dots + J_n^{\text{np}}, \quad (6.7)$$

$$J_{\Sigma}^{\text{np}} = \sum_{i=1}^n J_i^{\text{np}}.$$

Передаточные функции (в скобках) не зависят от  $\omega_1$ , поэтому  $J_i^{\text{пр}}$  может быть определен даже в том случае, если закон движения модели (начального звена) неизвестен. При  $\omega_1 = \omega_M$

$$J_i^{\text{пр}} = m_i V_{qs_i}^2 + J_{is} U_{i1}^2, \quad (6.8)$$

$$\text{где } V_{qs_i} = \frac{V_{s_i}}{\omega_1}, \quad U_{i1} = \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$

Определим приведенные моменты инерции  $J_{\text{пот}}^{\text{пр}}, J_1^{\text{пр}}, J_{3K}^{\text{пр}}$ :

$$J_{\text{пот}}^{\text{пр}} = J_{\text{пот}} \left( \frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2; \quad J_{3K}^{\text{пр}} = J_{3K} \left( \frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2; \quad J_1^{\text{пр}} = J_1. \quad (6.9)$$

Все эти моменты инерции не зависят от углового положения начального звена. Эта группа звеньев, связанных с динамической моделью линейными передаточными отношениями, называется звеньями первой группы, а их моменты инерции — моментами инерции первой группы.

$$J_I^{\text{пр}} = J_{\text{пот}}^{\text{пр}} + J_{3K}^{\text{пр}} + J_1^{\text{пр}} = \text{const}. \quad (6.10)$$

Определим приведенные моменты инерции 2-го и 3-го звеньев:

$$J_3^{\text{пр}} = m_3 \left( \frac{V_c}{\omega_1} \right)^2 = m_3 V_{qs3}^2 = m_3 l_1^2 \left( \frac{p_v c}{p_v b} \right); \quad (6.11)$$

$$J_2^{\text{пр}} = J_{2\Pi}^{\text{пр}} + J_{2B}^{\text{пр}}; \quad (6.12)$$

$$J_{2\Pi}^{\text{пр}} = m_2 \left( \frac{V_{s_2}}{\omega_1} \right)^2 = m V_{qs2}^2 = m_2 l_1^2 \left( \frac{V_{s_2}}{V_B} \right)^2; \quad (6.13)$$

$$J_{2B}^{\text{пр}} = J_{2S} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = J_{2S} U_{21}^2 = J_{2S} \left( \frac{V_{CB}}{V_B} \right)^2 \left( \frac{l_{AB}}{l_{BC}} \right)^2. \quad (6.14)$$

Моменты инерции первой и второй групп звеньев и суммарный приведенный момент инерции рассматриваемой установки показаны на рис. 6.8 (диаграмма приведенных моментов инерции).

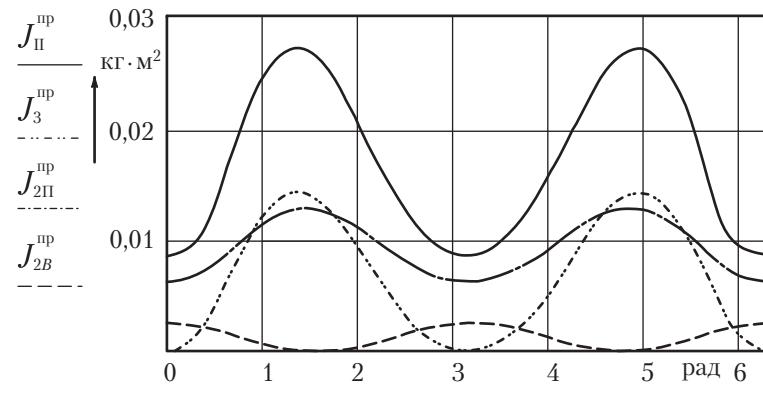


Рис. 6.8

### Контрольные вопросы и задания к лекции 6

- Сформулируйте определение прямой и обратной задач динамики.
- Что понимается над динамической моделью механизма?
- С какой целью производится приведение сил и моментов в механизме? Какое условие положено в основу приведения сил и моментов?
- Какое условие положено в основу замены масс и моментов инерции при приведении?
- Напишите формулу кинетической энергии для кривошипно-ползунного механизма.

## Лекция 7

### Уравнения движения механизма

Выполнив приведение сил и масс, любой механизм с одной степенью свободы (рычажный, зубчатый, кулачковый и др.), сколь бы сложным он ни был, можно заменить его динамической моделью (см. рис. 6.7). Эта модель в общем случае имеет переменный приведенный момент инерции  $J_{\Sigma}$  и к ней приложен суммарный приведенный момент  $M_{\Sigma}^*$ . Закон движения модели такой же, как и закон движения начального звена механизма.

Основой для составления уравнения движения механизма с одной степенью свободы служит теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_{\text{нач}} = \sum A. \quad (7.1)$$

Работу совершают все активные силы и моменты и силы трения во всех кинематических парах механизма.

Составим уравнение движения в **энергетической форме**. Запишем формулу для кинетической энергии модели, учитывая уравнение (7.1):

$$T_M = \frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2}. \quad (7.2)$$

Так как вся нагрузка, приложенная к модели, выражается суммарным приведенным моментом  $M_{\Sigma}^*$ , то сумма работ равна

$$\sum A = \int_{\phi_{\text{нач}}}^{\phi} M_{\Sigma} d\phi. \quad (7.3)$$

Здесь переменная интегрирования  $\phi_M$  заменена координатой  $\phi$  начального звена, так как  $\phi_M = \phi_1$ ,  $\omega_1 = \omega_M$ .

Учитывая (6.2) и подставив выражения (7.2) и (7.3) в основное уравнение (7.1), получим уравнение движения в энергетической форме:

$$\frac{J_{\Sigma} \omega_1^2}{2} - \frac{J_{\Sigma \text{ нач}} \omega_{\text{ нач}}^2}{2} = \int_{\phi_{\text{ нач}}}^{\phi} M_{\Sigma} d\phi_1, \quad (7.4)$$

где искомой величиной является угловая скорость  $\omega$  начального звена механизма. В общем случае верхний предел  $\phi$  интегрирования в уравнении (7.4) считается переменным.

Если вся нагрузка, приложенная к механизму, зависит только от его положения, то и суммарный приведенный момент  $M_{\Sigma}$  есть функция только координаты  $\phi_1$ . В этом случае уравнение (7.4) решается непосредственно относительно искомой величины  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\phi_{\text{ нач}}}^{\phi} M_{\Sigma}(\phi) d\phi}{J_{\Sigma}} + \frac{J_{\Sigma \text{ нач}} \omega_{\text{ нач}}^2}{J_{\Sigma}}}. \quad (7.5)$$

Укажем, что интеграл под корнем имеет знак, который надо учитывать.

**Уравнение движения в дифференциальной форме.** Продифференцируем уравнение (7.4) по координате  $\phi$ :

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} \right) = M_{\Sigma}.$$

Определим производную, стоящую в левой части уравнения, помня, что в общем случае переменной величиной является не только угловая скорость  $\omega$ , но и  $J_{\Sigma}$ . Поэтому

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} \right) = J_{\Sigma} \omega \frac{d\omega}{d\phi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi} = J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi} \omega^2,$$

откуда

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi} \omega^2 = M_{\Sigma}. \quad (7.6)$$

Это и есть уравнение движения в дифференциальной форме, поскольку искомая переменная величина — угловая скорость  $\omega$  начального звена механизма — стоит под знаком производной. При пользовании уравнением (7.6) надо помнить, что суммарный приведенный момент  $M_{\Sigma}$ , а также производная  $\frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi}$  суть величины алгебраические и подставляются со своими знаками.

В том случае, когда исследуется механизм, имеющий  $J_{\Sigma} = \text{const}$  (например, зубчатый механизм с круглыми колесами), уравнение его движения упрощается и приобретает такой вид:

$$J_{\Sigma}^{\text{пп}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Sigma}^{\text{пп}}. \quad (7.7)$$

Уравнение движения в дифференциальной форме (7.6) может быть получено также и из уравнений Лагранжа II рода [2], [4].

Для определения углового ускорения  $\varepsilon$  начального звена используем уравнение (7.6); решим его относительно  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ :

$$\varepsilon = \frac{M_{\Sigma}}{J_{\Sigma}} - \frac{\omega^2}{2J_{\Sigma}} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi}. \quad (7.8)$$

Величины  $M_{\Sigma}$  и  $\frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi}$  подставляются в уравнение (7.8) со своими знаками. Если угловое ускорение  $\varepsilon$  получится со знаком, противоположным знаку угловой скорости  $\omega$ , то это значит, что начальное звено механизма движется замедленно.

Производная  $\frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi}$  подсчитывается или численным дифференцированием на ЭВМ, или графическим дифференцированием. Другой, значительно более точный (но и более

трудоемкий) способ определения производной  $\frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi}$  можно найти в литературе<sup>1</sup>.

### Основные режимы движения машины

Процесс движения машины в общем случае состоит из трех фаз: разбега, установившегося режима и выбега (рис. 7.1). Разбег (режимы I и II) и выбег (режимы IV и V) относятся к неустановившемуся режиму, который характеризуется непериодическими, т.е. неповторяющимися, изменениями скорости главного вала машины (начального звена). Такой процесс движения называют переходным.

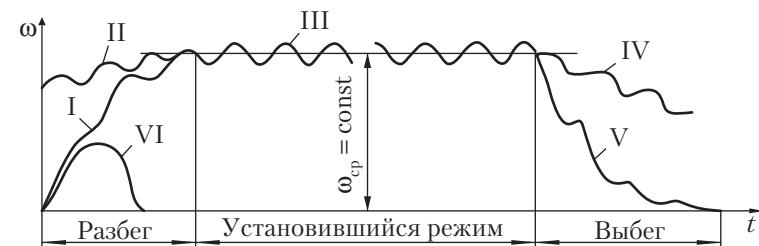


Рис. 7.1

При *установившемся* режиме III скорость главного вала изменяется периодически. В частном случае скорость может быть постоянной. В установившемся режиме работает большинство энергетических и технологических машин. Часто установившееся движение чередуется с разгонами (при повышении скоростного режима II) и торможениями (при понижении скоростного режима IV). Так работают, например, автомобильный двигатель и различные другие транспортные машины. Многие механизмы в установившемся режиме вообще не работают. Это особенно характерно для целого ряда приборов (реле,

<sup>1</sup> Минут, С. Б. Об определении производной приведенного момента инерции массы звеньев механизма / С. Б. Минут. — М.: изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1970.

Зиновьев, В. А. Основы динамики машинных агрегатов / В. А. Зиновьев, А. П. Бессонов. — М., 1964.

контакторы и т.п.). Их механизм во время срабатывания (режим VI) переходит из одного положения в другое, не совершая замкнутого повторяющегося кинематического цикла.

*Неустановившийся* режим движения машины имеет место тогда, когда ее пускают в ход и она, набирая скорость, выходит на установившийся режим, а также тогда, когда для остановки машины ее двигатель выключают и она продолжает двигаться за счет накопленного запаса кинетической энергии; при этом машина постепенно теряет скорость из-за действия сил трения или каких-либо других сил сопротивления, в том числе и специальных тормозных сил. В этих случаях необходимо знать, насколько быстро происходят переход из неподвижного состояния в рабочее и обратный переход до полной остановки. Применительно к транспортным машинам изучение обратного перехода особенно важно для надежного расчета длины тормозного пути. Исследование неустановившегося режима движения дает возможность определить время срабатывания механизма, что абсолютно необходимо для проектирования многих приборов, таких, как фотозатворы, средства автоматической защиты и др.

*Разгоны (разбеги) и торможения* могут происходить с большим ускорением. Это вызывает значительное динамическое нагружение механизма, что, в свою очередь, может привести к перенапряжениям и даже к поломкам.

Во время разбега и выбега угловая скорость многих машин проходит через критическую (резонансную) зону. Во избежание динамической перегрузки механизма и возможной аварии проход этой зоны должен быть достаточно быстрым, что надо обеспечить при проектировании, сделав расчет обеих фаз неустановившегося режима. Решение многих других динамических задач также связано с исследованием этого режима.

Таким образом, изучение неустановившихся (переходных) процессов весьма существенно для грамотного динамического проектирования механизма, машины или прибора.

Для определения закона движения механизма при неустановившемся режиме должны быть известны следующие исходные данные: кинематическая схема механизма; характеристики геометрии масс всех подвижных звеньев; механические характеристики сил и моментов; начальные

условия движения. Последнее важно для исследования именно неустановившегося режима.

Рассмотрим механизм, нагруженный силами и моментами, которые являются функциями только перемещения своих точек приложения. Пусть приведенный момент инерции рассматриваемого механизма имеет переменную величину  $J_{\Sigma} = \text{var}$ . Требуется определить зависимость скорости начального звена от его угла поворота, т.е.  $\omega(\phi)$ . Подобная задача является весьма распространенной. В качестве примеров можно привести механизмы дизель-компрессоров, буровых станков и подъемных кранов с приводом от двигателей внутреннего сгорания, различных устройств с пневмоприводом, приборов с пружинными двигателями и др.

### Неустановившееся движение механизма (переходные режимы работы)

Способами, изложенными в предыдущих лекциях, строим диаграммы  $J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_{\Sigma}^{\text{пр}}(\phi_M)$  и  $M_{\Sigma}^{\text{пр}} = M_{\Sigma}^{\text{пр}}(\phi_M)$ , таким образом динамическая задача сводится к следующей: известны зависимости  $J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_{\Sigma}^{\text{пр}}(\phi_M)$  и  $M_{\Sigma}^{\text{пр}} = M_{\Sigma}^{\text{пр}}(\phi_M)$ , требуется определить закон изменения угловой скорости и углового ускорения звена приведения (модели).

Для решения данной задачи нужно взять уравнение движения, составленное в энергетической форме:

$$\omega_1 = \omega_M = \sqrt{\frac{2(\sum A + T_{\text{нач}})}{J_{\Sigma}^{\text{пр}}}}. \quad (7.9)$$

Порядок определения искомой угловой скорости таков:

1) выполняют приведение масс и строят суммарную диаграмму приведенного момента инерции

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_{\Sigma}^{\text{пр}}(\phi_M);$$

2) по механическим характеристикам строят диаграммы приведенного движущего момента, затем диаграмму суммарного приведенного момента

$$M_{\Sigma}^{\text{пр}} = M_{\text{с}}^{\text{пр}} + M_{\text{д}}^{\text{пр}},$$

если силы тяжести и силы трения значительны, то их приведенные моменты должны войти слагаемыми в величину  $M_{\Sigma}^{\text{пп}}$ , т.е.

$$M_{\Sigma}^{\text{пп}} = M_c^{\text{пп}} + M_d^{\text{пп}} + M_F^{\text{пп}} + \sum M_{G_i}^{\text{пп}},$$

3) графическим интегрированием строим диаграмму работы суммарного приведенного момента.

По уравнению (7.9) с учетом начальных условий определяют угловую скорость начального звена (модели) и строят зависимость

$$\omega_M = \omega_1 = \omega_M(\phi_M).$$

Если  $\omega_{\text{нач}} = 0$ , то

$$\omega_1 = \omega_M = \sqrt{\frac{2 \sum A}{J_{\Sigma}^{\text{пп}}}}. \quad (7.10)$$

Если  $\omega_{\text{нач}} \neq 0$ , то

$$T_{\text{нач}} = \frac{\omega_{\text{нач}}^2 J_{\Sigma \text{ нач}}^{\text{пп}}}{2}.$$

Для определения углового ускорения начального звена (модели) используем уравнение движения, составленное в дифференциальной форме, и решим его относительно  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_M = \frac{M_{\Sigma}^{\text{пп}}}{J_{\Sigma}^{\text{пп}}} - \frac{\omega_1^2}{2 J_{\Sigma}^{\text{пп}}} \frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1}. \quad (7.11)$$

Из уравнения очевидно, что для подсчета величины  $\varepsilon_1$  необходимо знать  $M_{\Sigma}^{\text{пп}}$  и  $\omega_1$  в том положении начального звена, для которого определяется  $\varepsilon_1$ , а также нужно знать зависимость  $J_{\Sigma}^{\text{пп}} = J_{\Sigma}^{\text{пп}}(\phi_M)$ , по которой находят  $\frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1}$ .

Производную определяют графическим дифференцированием

$$\frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1} = \frac{\mu_{\phi}}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi,$$

где  $\mu_J$  и  $\mu_{\phi}$  — масштабы по осям  $J_{\Sigma}^{\text{пп}}$  и  $\phi_1$  (рис. 7.2).

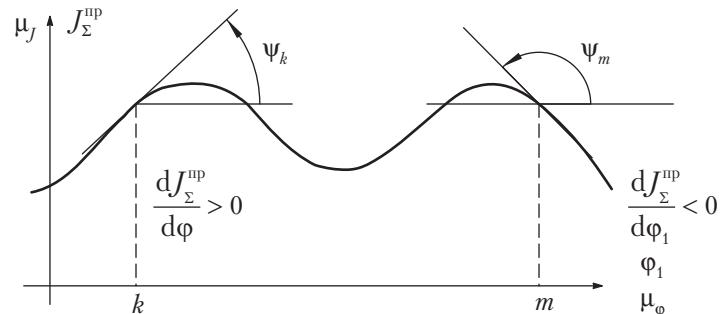


Рис. 7.2

Следует напомнить, что величины  $M_{\Sigma}^{\text{пп}}$  и  $\frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1}$  представляют в уравнение (7.11) со своими знаками. Заметим, что графическое дифференцирование зависимости  $J_{\Sigma}^{\text{пп}} = J_{\Sigma}^{\text{пп}}(\phi_M)$  вносит некоторую ошибку во второй член уравнения.

Для **тихоходных машин** второй член уравнения (7.11) мал по сравнению с первым, поэтому ошибка существенно-го значения не имеет.

Для **быстроходных машин** второе слагаемое, зависящее от квадрата угловой скорости, может быть весьма значи-тельным. В этом случае следует точно определить произ-

водную  $\frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1}$  путем использования **передаточных функ-**

**ций** скоростей и ускорений (предложенных С. Б. Минутом), **угловое ускорение** — величина **алгебраическая**.

Существует другой, менее точный, но более простой спо-соб определения  $\varepsilon_1$ , основанный на применении диаграммы  $\omega_1 = \omega_1(\phi_1)$ , — **метод поднормалей**.

Известно, что

$$\varepsilon_M = \frac{d\omega_M}{dt} = \frac{d\omega_M}{dt} \frac{d\phi_M}{d\phi_1} = \omega_M \frac{d\omega_M}{d\phi_M}, \quad (7.12)$$

Величина и знак производной определяются по диаграмме ( $\omega_M$ ,  $\phi_M$ ) (рис. 7.3), аналогично определению производной  $\frac{dJ_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\phi_1}$  ( $\omega_M$ ;  $\psi_i$  — угол наклона касательной,

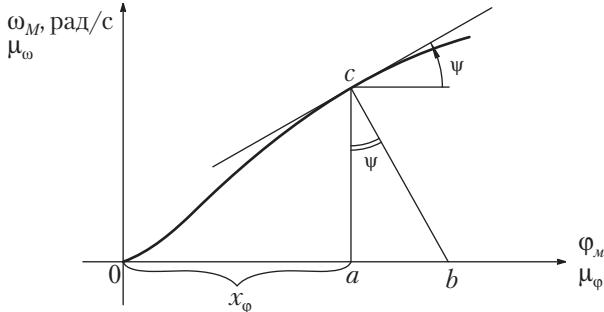


Рис. 7.3

проведенной к кривой  $(\omega_M, \phi_M)$ , с положительным направлением оси  $x$ .

$$\varepsilon_M = \left( \frac{ac}{\mu_\omega} \right) \frac{d\left(\frac{ac}{\mu_\omega}\right)}{d\left(\frac{x_\phi}{\mu_\phi}\right)} = \frac{\mu_\phi}{\mu_\omega^2} ac \frac{d(ac)}{d(x_\phi)} = \frac{\mu_\phi}{\mu_\omega^2} ac \operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_\phi}{\mu_\omega^2} ab;$$

$$\varepsilon_M = \frac{\mu_\phi}{\mu_\omega^2} ab. \quad (7.13)$$

где  $\mu_\varepsilon = \frac{\mu_\omega^2}{\mu_\phi}$  — масштаб углового ускорения;  $\frac{ab}{ac} = \operatorname{tg} \psi$  (по построению).

### Определение продолжительности переходного процесса

Известно, что

$$\omega_M = \frac{d\phi_M}{dt}; \quad dt = \frac{d\phi_M}{\omega_M};$$

$$t - t_{\text{нач}} = \int_{\phi_{\text{нач}}}^{\phi} \frac{d\phi_M}{\omega_M}, \text{ с.}$$

Рассмотрим построение кривой времени (рис. 7.4) по заданной диаграмме  $(\omega_M, \phi_M)$ . При интегрировании обратной функции применяем метод трапеций. В пределах выбранных участков  $01, 12, \dots$  кривую  $(\omega_M, \phi_M)$  заменяем ступенчатым графиком с ординатами  $y_{\omega_{1\text{cp}}}, y_{\omega_{2\text{cp}}}, \dots, y_{\omega_{i\text{cp}}}$ . Величины указанных ординат определяются из условия равенства площадей криволинейных трапеций и соответствующих прямоугольников. Ординаты  $y_{\omega_{1\text{cp}}}, y_{\omega_{2\text{cp}}}, \dots, y_{\omega_{i\text{cp}}}$  и т.д. переносим на ось ординат, затем и на отрицательную полусось абсцисс и получаем точки  $1', 2', \dots, i'$ . Отложив на оси ординат отрезок интегрирования  $K$ , соединяя точки  $1', 2', \dots, i'$  с концом отрезка интегрирования. На диаграм-

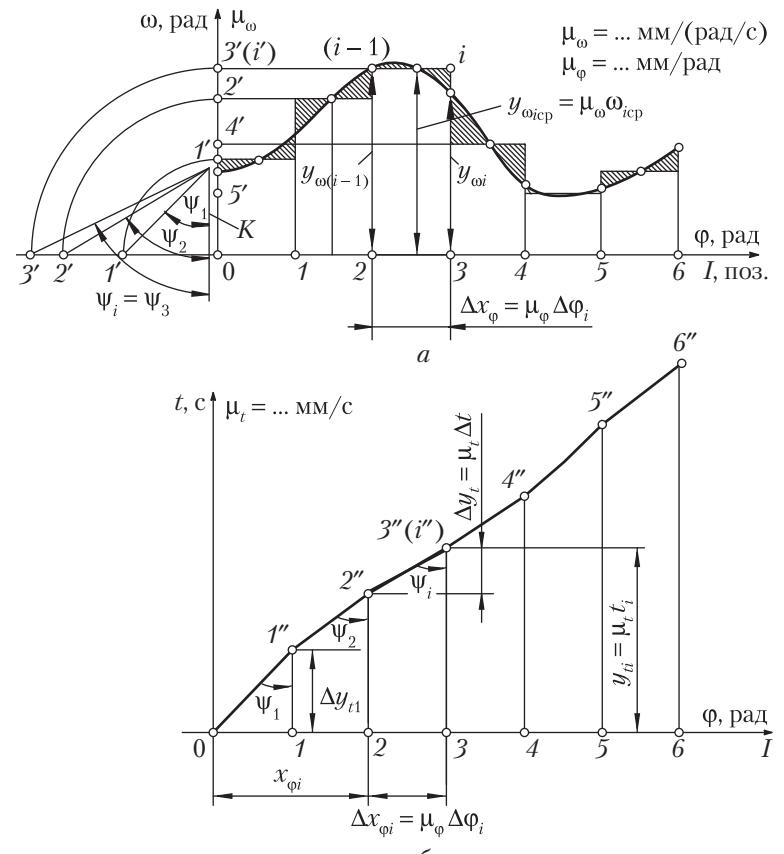


Рис. 7.4

ме  $(t; \phi_M)$  в пределах каждого участка проводим линии, параллельные линиям  $1'K, 2'K, \dots, i'K$  и т.д. Через точки  $0, 1'', 2'', \dots, i''$  проводим кривую, которая является кривой времени  $t(\phi_M)$ , в масштабе  $\mu_t$  мм/с. Масштаб  $\mu_t$  вычисляем из равенства  $\operatorname{tg} \psi_i$  углов на кривой  $\omega_M(\phi_M)$  и  $t(\phi_M)$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \psi_i &= \frac{\omega_{i\text{cp}} \mu_\omega}{k}; \quad \operatorname{tg} \psi_i = \frac{\Delta \phi \mu_\varphi}{\Delta t \mu_t}; \\ \frac{\omega_{i\text{cp}} \mu_\omega}{k} &= \frac{\Delta \phi \mu_\varphi}{\Delta t \mu_t}; \quad \frac{\omega_{i\text{cp}} \mu_\omega}{k} = \frac{d\phi_M \mu_\omega}{dt \mu_t}; \\ \mu_t &= \frac{\mu_\varphi k}{\mu_\omega}.\end{aligned}\tag{7.14}$$

### Контрольные вопросы и задания к лекции 7

- Какие факторы вызывают периодические и непериодические колебания угловой скорости динамической модели?
- Какие основные режимы движения машин вы знаете?
- Чем характеризуются переходные режимы движения машины?
- Запишите уравнение движения машины в дифференциальной форме и покажите, как им можно пользоваться.
- Как определяется продолжительность переходного процесса?

## Лекция 8

### Исследование установившегося режима движения

**Установившимся движением** называется такое движение, при котором скорость начального звена является периодической функцией времени.

График  $\omega_1 = \omega_1(\phi_1)$  или  $\omega_1 = \omega_1(t)$  имеет вид периодической кривой, изображенной на рис. 8.1.

Как показано на рис. 8.1, угловая скорость  $\omega_1$  колеблется относительно некоторого среднего значения  $\omega_{1\text{cp}}$ , причем характер изменения угловой скорости периодически повторяется.

Угловая скорость начального звена может быть определена по формуле

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(\sum A + T_{\text{нач}})}{J_{\Sigma}^{\text{пр}}} \cdot}$$

Время, по истечении которого скорость начального звена принимает свое первоначальное значение, после чего

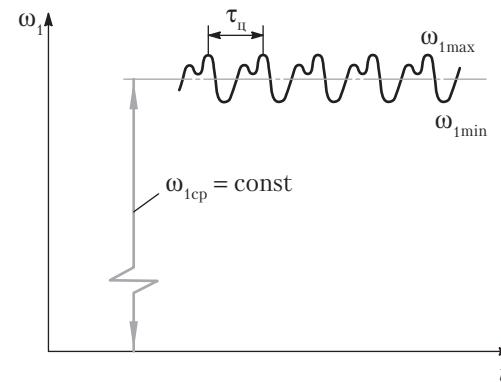


Рис. 8.1

характер ее изменения повторяется, называется временем цикла, или сокращенно **циклом**.

Установившееся движение имеет место только в том случае, если  $A_{\Sigma}^{\text{н}} = 0$ , т.е. сумма работ за цикл всех сил, приложенных к механизму, равна нулю.

Так как  $A_{G_i}^{\text{н}} = 0$ , то  $|A_{\text{д}}^{\text{н}}| = |A_{\text{с}}^{\text{н}}|$ . Из этого заключения следует, что приращения кинетической энергии за цикл не происходит ( $\Delta T_{\text{н}} = 0$ ) и угловая скорость в начале и конце цикла одинакова.

При оценке изменения угловой скорости при установившемся режиме вводят два критерия:

1) средняя (номинальная) скорость

$$\omega_{1\text{cp}} = \frac{\omega_{1\text{max}} + \omega_{1\text{min}}}{2}; \quad (8.1)$$

2) коэффициент неравномерности вращения

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{1\text{наиб}}}{\omega_1} = \frac{\omega_{1\text{max}} - \omega_{1\text{min}}}{\omega_{1\text{ср}}}. \quad (8.2)$$

Проектируя определенный класс машин, конструктор должен обеспечивать для этого класса колебание  $\omega$  в данных пределах, которые выработаны многолетней инженерной практикой. Ниже приведены значения коэффициента  $\delta$  для разных видов машин:

Машины ударного действия .....	1/10...1/30
Насосы. Компрессоры .....	1/25...1/50
Текстильные машины, ДВС .....	1/50...1/100
Генераторы, электродвигатели .....	1/100...1/300
Турбины летательных аппаратов .....	~1/1000

Совместное решение уравнений для  $\delta$  и  $\omega_{1\text{cp}}$  дает значения  $\omega_{1\text{max}}$  и  $\omega_{1\text{min}}$ :

$$\omega_{1\text{max}} = \omega_{1\text{cp}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right); \quad (8.3)$$

$$\omega_{1\text{min}} = \omega_{1\text{cp}} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (8.4)$$

Отличия  $\omega_{1\text{max}}$  и  $\omega_{1\text{min}}$  от  $\omega_{1\text{cp}}$  составляют  $\pm \frac{\delta}{2}$ , т.е. обычно не более  $\pm 2\%$ .

В установившемся режиме работают очень многие машины (станки, прессы, прокатные станы, текстильные, полиграфические и многие другие машины). Колебания угловой скорости ухудшают рабочий процесс машины, вызывают дополнительные динамические нагрузки, вследствие чего снижаются долговечность и надежность машин, а иногда и качество продукции.

Поскольку колебания скорости, обусловленные периодическими воздействиями сил, полностью устраниить нельзя, то нужно по возможности сократить их размах. Иными словами, величину коэффициента  $\delta$  надо сделать приемлемо малой.

Рассмотрим, какими средствами можно решить эту задачу. Все звенья механизма обладают инертностью. Как известно из физики, это свойство состоит в том, что чем инертнее материальное тело, тем медленнее происходят изменения его скорости, вызываемые действием приложенных сил. Поэтому, чтобы получить вращение главного вала машины с циклической неравномерностью, не превышающей требуемой величины, инертность этого вала со всеми жестко связанными с ним деталями надо сделать достаточно большой. Для этого на главном валу машины надо закрепить добавочную массу, выполненную в виде колеса с развитым ободом и называемую **маховиком**. Его момент инерции должен быть таким, чтобы неравномерность вращения главного вала машины не превышала заданных пределов.

Как отмечалось в предыдущих лекциях,

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_I^{\text{пр}} + J_{II}^{\text{пр}}.$$

Воздействие на  $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$  через  $J_{II}^{\text{пр}}$  связано со значительными трудностями, а через  $J_I^{\text{пр}}$  это сделать достаточно просто. В  $J_{\Sigma}^{\text{пр}}$  входят моменты инерции звеньев, связанных с главным валом (начальным звеном) постоянным передаточным отношением, в том числе и маховика.

Подбирая момент инерции дополнительной маховой массы (маховика), можно придать величине  $J_I^{\text{пр}}$  такое значение, при котором вал звена приведения будет вращаться с допустимой степенью неравномерности.

Итак, основное назначение маховика состоит в ограничении **колебаний** угловой скорости главного вала машины в пределах, определяемых значением коэффициента неравномерности  $[\delta]$ . Определение момента инерции маховика

по заданным условиям движения (т.е. по заданному значению  $[\delta]$ ) производится в процессе проектирования машины и составляет одну из задач ее динамического синтеза. Подчеркнем при этом, что свое основное назначение маховик может выполнить только при установленном режиме.

### Расчет маховых масс по методике Н. И. Мерцалова

Решим обе задачи — динамического синтеза и динамического анализа — наиболее простым и наглядным методом Мерцалова, основанным на применении диаграммы  $T_1(\phi)$ . Сначала выполним динамический синтез, составив прежде всего расчетную формулу для определения приведенного момента инерции I группы звеньев, необходимого для обеспечения заданного значения  $[\delta]$ .

Для динамической модели:

$$J_{\Sigma}^{\text{пр}} = J_I^{\text{пр}} + J_{II}^{\text{пр}};$$

$$\omega_M = \omega_{\text{cp}} + \Delta\omega.$$

Тогда, используя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии  $T - T_{\text{ нач}} = A_{\Sigma}$ , можно записать:

$$\frac{(J_I^{\text{пр}} + J_{II}^{\text{пр}})(\omega_{\text{cp}} + \Delta\omega)^2}{2} - T_{\text{ нач}} = A_{\Sigma};$$

$$\begin{aligned} \frac{J_{\Sigma}^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}}^2}{2} + \frac{J_I^{\text{пр}} 2\omega_{\text{cp}} \Delta\omega}{2} + \frac{J_I^{\text{пр}} \Delta\omega^2}{2} + \frac{J_{II}^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}}^2}{2} + \\ + \frac{J_{II}^{\text{пр}} 2\omega_{\text{cp}} \Delta\omega}{2} + \frac{J_{II}^{\text{пр}} \Delta\omega^2}{2} - T_{\text{ нач}} = A_{\Sigma}; \end{aligned}$$

$$\frac{J_I^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}}^2}{2} \approx T_{\text{ нач}} \quad (\text{с достаточной степенью точности}).$$

Пренебрегая малыми значениями  $\Delta\omega^2$ ;  $\Delta\omega$ ;  $J_{II}^{\text{пр}}$  и членами с этими значениями, т.е.  $\frac{J_I^{\text{пр}} \Delta\omega^2}{2} \approx 0$ ;  $\frac{J_{II}^{\text{пр}} \Delta\omega^2}{2} \approx 0$ ;  $\frac{J_{II}^{\text{пр}} 2\omega_{\text{cp}} \Delta\omega}{2} \approx 0$ , получим

$$J_I^{\text{пр}} 2\omega_{\text{cp}} \Delta\omega \approx A_{\Sigma} - \frac{J_{II}^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}}^2}{2} = A_{\Sigma} - T_{II} = \Delta T_I;$$

так как  $\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{нб}}}{\omega_{\text{cp}}}$ , то с учетом этого можно записать:

$$J_I^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}} (\Delta\omega_{\text{нб}}) = \Delta T_{\text{нб}};$$

$J_I^{\text{пр}} \omega_{\text{cp}}^2 \delta = \Delta T_{\text{нб}}$  — формула Мерцалова,

$$\text{или } J_I^{\text{пр}} = \frac{\Delta T_{\text{нб}}}{\omega_{\text{cp}}^2 \delta}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) предназначается для расчета маховых масс по Мерцалову. Способ Мерцалова основан на определении кинетической энергии всех звеньев механизма с последующим выделением из этой кинетической энергии той ее части, которая приходится только на звено приведения (модель) и на звенья, связанные с ним постоянным передаточным отношением. После этого легко определить искомое значение наибольшего перепада кинетической энергии  $\Delta T_{\text{нб}}$ :

$$T = \frac{J_{\Sigma}^{\text{пр}} \omega_M^2}{2} = \frac{J_I^{\text{пр}} \omega_M^2}{2} + \frac{J_{II}^{\text{пр}} \omega_M^2}{2},$$

$$\text{где } T_I = \frac{J_I^{\text{пр}} \omega_M^2}{2}; T_{II} = \frac{J_{II}^{\text{пр}} \omega_M^2}{2}, \text{ тогда}$$

$$T_I = T - T_{II}; \quad (8.6)$$

так как кинетическая энергия механизма

$$T = A_{\Sigma} + T_{\text{ нач}}, \quad (8.7)$$

тогда

$$T_I = (A_{\Sigma} + T_{\text{ нач}}) - T_{II}, \quad (8.8)$$

$$\text{а } \Delta T_{\text{нб}} = A_{\Sigma} - T_{II}. \quad (8.9)$$

Проиллюстрируем сказанное графиками. Пусть известны диаграмма  $A_{\Sigma}(\phi)$  (верхняя кривая на рис. 8.2, а, построенная относительно оси  $\phi$ ) и диаграмма  $T_{II}(\phi)$  (рис. 8.2, б) кинетической энергии группы II звеньев, т.е. тех, приведенные моменты инерции которых переменны. Согласно уравнению (8.6) прибавим к сумме работ  $A_{\Sigma}$  значение кинетической энергии  $T_{\text{ нач}}$  всего механизма в начале цикла. Для этого сместим ось  $\phi$  на величину  $T_{\text{ нач}}$  вниз (см. рис. 8.2, а),

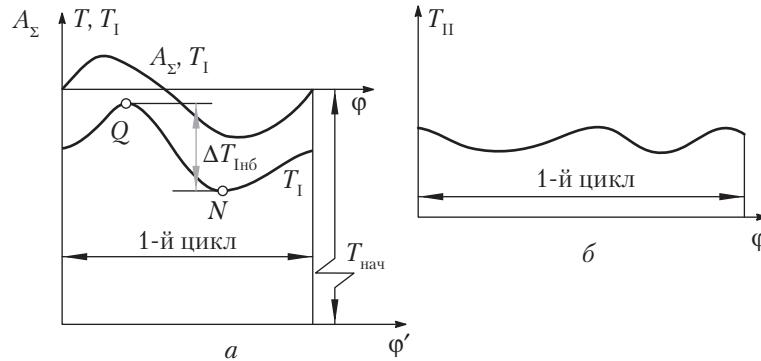


Рис. 8.2

после чего верхняя кривая на рис. 8.2, а будет относительно оси  $\phi'$  изображать кинетическую энергию  $T$  всего механизма. Вычтем, согласно уравнению (8.6), из кинетической энергии  $T$  кинетическую энергию  $T_{II}$  и получим нижнюю кривую на рис. 8.3, а. Нижняя кривая, отнесенная к оси  $\phi'$ , и является кривой кинетической энергии  $T_1(\phi)$ . Отметим на этой кривой точку максимума  $Q$  и точку минимума  $N$  и по ним определим наибольший перепад кинетической энергии  $\Delta T_{Inб}$ , необходимый для подсчета  $J_I$  по уравнению (8.5).

Обратим внимание, что для подсчета  $J_I$  по формуле (8.5) надо знать не величину кинетической энергии  $T_I$ , а ее наибольшее изменение  $\Delta T_{Inб}$ . Но  $\Delta T_{Inб}$  не зависит от начального значения  $T_{\text{нач}}$ , и, следовательно, для определения  $\Delta T_{Inб}$  не нужно знать числового значения  $T_{\text{нач}}$ , т.е. не нужно выявлять положение сдвинутой оси абсцисс  $\phi'$ .

Составим порядок определения момента инерции маховика по методу Мерцалова графическим способом:

- приведение сил и моментов; построение диаграммы суммарного приведенного момента  $M_{\Sigma}(\phi)$ ;
- построение диаграммы  $A_{\Sigma}(\phi)$  способом графического интегрирования;
- приведение масс; построение диаграммы  $J_{II}(\phi)$ ;
- определение кинетической энергии  $T_{II}$  по формуле  $T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \omega_{cp}^2$  и переход к диаграмме  $T_{II}(\phi)$ ;
- построение диаграммы кинетической энергии  $T_1(\phi)$  по уравнению (8.6) (без выявления положения сдвинутой оси абсцисс) и определение  $\Delta T_{Inб}$ ;

- подсчет  $J_I$  по уравнению (8.5) и определение момента инерции маховика.

В таком же порядке нужно вести расчет и численным способом с применением ЭВМ.

На рис. 8.4 изображены графики, выполненные для расчета маховика по методу Мерцалова для машинной установки, составленной из ДВС и электрогенератора. Механические характеристики, необходимые для расчета, заданы в функции перемещения (см. рис. 8.3, а, б), поскольку вал генератора вращается практически равномерно. Начальным звеном назначим коленчатый вал ДВС – звено 1. Рассмотрим особенности расчета.

Сначала надо сделать приведение движущей силы  $F_D$  и для одного полного цикла получить зависимость  $M_{\Sigma}(\phi)^*$ . Так как маховик может выполнить свое основное назначение только в условиях установившегося

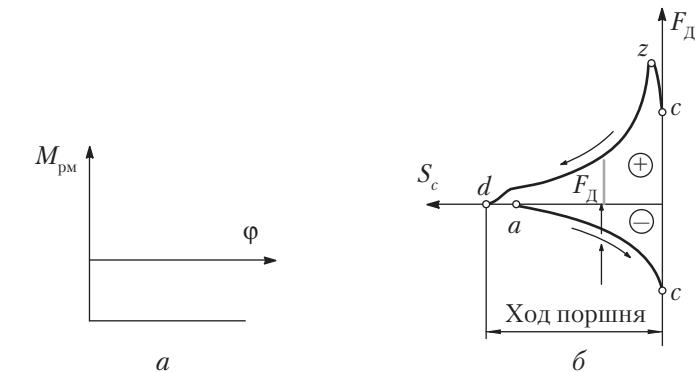


Рис. 8.3

режима, то при его расчете непременно должно быть соблюдено основное энергетическое уравнение:  $A_{\text{II}}^{\text{n}} = |A_{\text{c}}^{\text{n}}|$ . Это уравнение обуславливает обязательное соотношение между работами движущих сил и сил сопротивления, а именно:  $\int_0^{2\pi} M_{\text{d}} \, d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} |M_{\text{c}}| \, d\varphi_1$ . Отсюда, учитывая, что

$$M_{\text{c}} = \frac{M_{\text{pm}} z_1}{z_4} = \text{const}, \text{ получим } |M_{\text{c}}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\text{d}}(\varphi) \, d\varphi.$$

Подсчитав  $|M_{\text{c}}|$ , нужно определить  $M_{\Sigma} = M_{\text{d}} + M_{\text{c}}$  (рис. 8.4). Признаком установившегося режима на рис. 8.4, *a* является то, что площадки над осью абсцисс и под ней равновелики, а на рис. 8.4, *b* — то, что ордината кривой  $A_{\Sigma}$  в конце цикла равна нулю.

Так как механизм во взятом примере такой же, как и рассмотренный в лекции 6, то, используя формулы (6.6)–(6.14), заключаем, что в состав группы I входят звенья 1 и 4, а в состав группы II — звенья 2 и 3. График приведенного момента инерции  $J_{\text{II}} = J_2^{\text{пп}} + J_3^{\text{пп}}$  представлен на рис. 8.4, *c*.

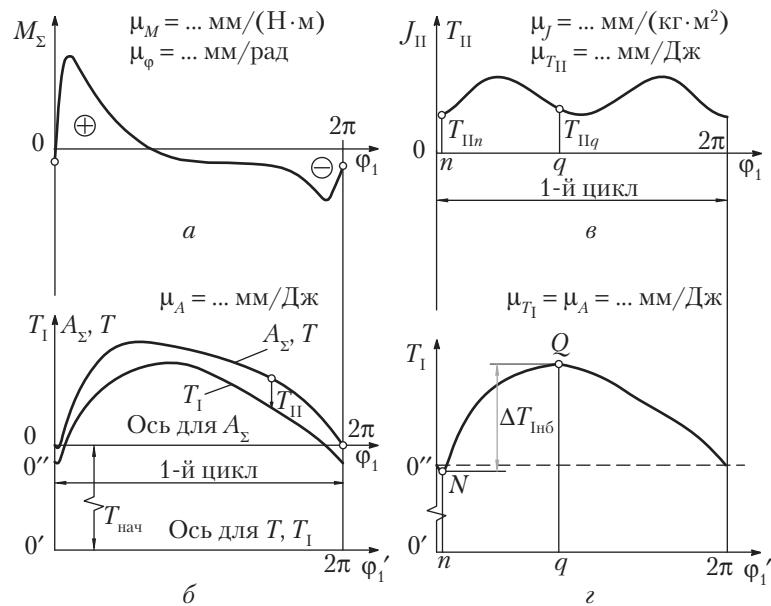


Рис. 8.4

Кинетическая энергия  $T_{\text{n}}$  определяется уравнением  $T_{\text{n}} = \frac{\omega_{\text{n}}^2}{2} J_{\text{n}}$ . Пока задача динамического синтеза не завершена, точное текущее значение  $\omega$  еще не известно. Но вследствие малости коэффициента неравномерности справедливо приближенное равенство  $\omega_{\text{n}} \approx \omega_{\text{cp}}$ . Поэтому можно принять

$T_{\text{n}} \approx \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{2} J_{\text{n}}$ . Так как  $\frac{\omega_{\text{cp}}^2}{2} \approx \text{const}$ , то график  $J_{\text{n}}(\varphi_1)$  представляет собой одновременно и график  $T_{\text{n}}(\varphi_1)$ , но выполненный в другом масштабе (см. рис. 8.4, *c*); соотношение между

масштабами таково:  $\mu_{T_{\text{n}}} = \frac{2\mu_J}{\omega_{\text{cp}}^2}$ . Таким образом, метод Мерцалова не является, строго говоря, точным, но вследствие малости ошибки вполне пригоден для практических расчетов.

Поскольку  $T_{\text{n}}$  подсчитано не вполне точно, график  $T_{\text{n}}(\varphi_1)$  (см. рис. 8.4, *b* и *c*), а вместе с ним и наибольший перепад  $\Delta T_{\text{Inb}}$  кинетической энергии (см. рис. 8.4, *c*) содержат некоторую ошибку. При  $[\delta] > 0,10$  можно сделать уточнение величины  $\Delta T_{\text{Inb}}$  по формуле, предложенной Д. М. Лукичевым:

$$\Delta T_{\text{Inb}}^* = \Delta T_{\text{Inb}} - [\delta](T_{\text{Inn}} + T_{\text{Inq}})^1.$$

В этой формуле  $T_{\text{Inn}}$  и  $T_{\text{Inq}}$  — значения кинетической энергии  $T_{\text{n}}$  в тех положениях *N* и *Q* механизма, в которых кинетическая энергия  $T_{\text{n}}$  проходит свои крайние экстремумы; в уравнение (8.5) следует подставить  $\Delta T_{\text{Inb}}^*$ .

Определив  $\Delta T_{\text{Inb}}$  по уравнению (8.5) динамического синтеза при установленном режиме, подсчитываем  $J_{\text{I}}$ , а затем  $J_{\text{mx}}$ . Во многих случаях момент инерции маховика  $J_{\text{mx}}$  преобладает над остальными моментами инерции I группы звеньев. Поэтому всякие изменения кинетической энергии  $T_{\text{n}}$  происходят прежде всего за счет изменений кинетической энергии маховика.

Рассмотрим роль маховика. В процессе расширения газов (см. рис. 8.3, *в*) ДВС вырабатывает энергию больше, чем потребляет генератор. Избыток ее идет на увеличение  $T_{\text{n}}$  (участок *NQ* на рис. 8.4, *c*), т. е. прежде всего на увеличение кинетической энергии маховика. Во время процесса сжатия газов ДВС сам потребляет энергию на совершение работы

<sup>1</sup> Лукичев, Д. М. Расчет маховика машины / Д. М. Лукичев // Вопросы теории механизмов и машин. — 1953. — № 23.

сжатия. Генератор в это время также продолжает забирать энергию с вала ДВС. Оба эти расхода энергии возмещаются за счет  $T_1$  (участок  $QN$  на рис. 8.4,  $\varepsilon$ ), т.е. в основном за счет уменьшения кинетической энергии маховика.

Таким образом, маховик то накапливает кинетическую энергию, когда работа двигателя оказывается в избытке, то отдает часть ее. Чем больше  $J_{\text{мх}}$  (а следовательно, уменьшения и  $J_1$ ), тем выше аккумулирующая способность маховика, тем меньше будут колебания  $\omega_1$  при колебаниях потока энергии, тем равномернее будет вращаться вал машины, что очевидно из уравнения (8.5), решенного относительно  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\Delta T_{\text{Инб}}}{\omega_{1\text{ср}}^2 J_1}. \quad (8.10)$$

Аккумулирующая способность маховика используется не только для обеспечения допустимой неравномерности хода машин. Так, в автомашинах маховик содействует троганию автомобиля с места. Маховики непременно применяются в машинах ударного действия — молотах, прокатных станах и др., помогая электродвигателю во время удара. В настоящее время разрабатываются проекты транспортных машин, в которых маховик — механический аккумулятор — должен использоваться как экологически чистый и автономный источник энергии.

Выше было изложено решение задачи динамического синтеза, состоящей в определении момента инерции маховика  $J_{\text{мх}}$ , обеспечивающего требуемое условие движения, заданное коэффициентом неравномерности  $[\delta]$ . Теперь решим обратную задачу — задачу динамического анализа. При установившемся режиме известны все характеристики механизма, в том числе и  $J_{\text{мх}}$ , требуется определить закон движения, а затем и фактическое значение  $\delta$ . Решение этой задачи также основано на применении диаграммы  $T_1(\phi)$ , которая строится по методу Мерцалова (см. рис. 8.4).

Проведем через начальную точку  $0''$  кривой  $T_1(\phi)$  ось (показана на рис. 8.4,  $\varepsilon$  штрихами). Относительно этой новой оси кривая изобразит изменение кинетической энергии  $\Delta T_1$ , которое выражается так:

$$\Delta T_1 = T_1 - T_{1\text{нач}} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} - \frac{J_1 \omega_{1\text{нач}}^2}{2} = J_1 \frac{\omega + \omega_{1\text{нач}}}{2} (\omega_1 - \omega_{1\text{нач}})$$

Так как неравномерность вращения начального звена задаваема мала, то можно приближенно принять  $\frac{\omega_1 + \omega_{1\text{нач}}}{2} \approx \omega_1$ .

Тогда, обозначив  $\omega_1 - \omega_{1\text{нач}} = \Delta\omega_1$ , получим

$$\Delta T_1 \approx J_1 \omega_{1\text{ср}} \Delta\omega_1.$$

Но  $J_1 \omega_{1\text{ср}} = \text{const}$ . Следовательно, при установившемся движении с малым значением коэффициента неравномерности  $\delta$  изменение кинетической энергии  $\Delta T_1$  приблизительно пропорционально изменению  $\Delta\omega_1$  угловой скорости начального звена. Поэтому кривая на рис. 8.4,  $\varepsilon$  одновременно изображает как  $\Delta T_1(\phi)$ , так и  $\Delta\omega_1(\phi)$ , но в разных масштабах; соотношение между масштабами таково:  $\mu_\omega = \mu_{T_1} J_1 \omega_{1\text{ср}}$ . График  $\Delta\omega_1(\phi)$  изображен на рис. 8.5.

Коэффициент неравномерности  $\delta$  определяют по формуле

$$\delta = \frac{\omega_{1\text{ макс}} - \omega_{1\text{ мин}}}{\omega_{1\text{ср}}} = \frac{\Delta\omega_{1\text{ макс}}}{\omega_{1\text{ср}}}.$$

Угловое ускорение  $\varepsilon$  начального звена при установившемся движении подсчитывают по уравнению

$$\varepsilon_1 = \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} - \frac{\omega_1^2}{2 J_\Sigma^{\text{пр}}} \frac{dJ_\Sigma}{d\phi_1},$$

в котором  $J_\Sigma = J_1 + J_{\text{II}}$ . Значения  $M_\Sigma$  и  $J_{\text{II}}$  берут с соответствующими диаграмм (см. рис. 8.4,  $a$ ,  $b$ );  $\omega_1 \approx \omega_{1\text{ср}}$ . Производную

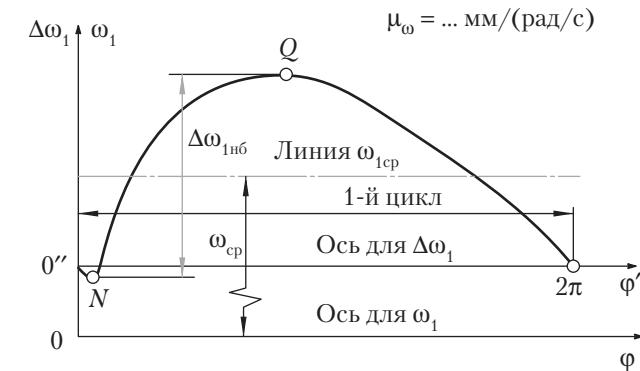


Рис. 8.5

$\frac{dJ_{\Sigma}}{d\phi} = \frac{dJ_{II}}{d\phi}$  определяют графическим или численным дифференцированием функции  $J_{II}(\phi)$  (поскольку  $J_I = \text{const}$ ) так, как

указано в лекции 7. В величинах  $M_{\Sigma}$  и  $\frac{dJ_{II}}{d\phi}$  нужно учитывать знак.

Угловое ускорение начального звена можно также выразить следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_1}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\omega_1}{d\phi} \omega_1.$$

Тогда  $\varepsilon$  определяют по диаграмме  $\omega_1(\phi)$  (см. рис. 8.5), применяя графическое или численное дифференцирование.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 8

1. Как оценивать неравномерность хода машины? Как ее можно уменьшить?
2. Какие факторы вызывают периодические и непериодические колебания входного звена машины?
3. Сформулируйте основное назначение маховой массы (маховика).
4. Какова цель установки маховика в машине? Чем следует руководствоваться при выборе места установки маховика в машине?
5. В каких случаях маховик необходим и когда он не требуется?
6. Выведите формулу для расчета дополнительных маховых масс при постоянном приведенном моменте инерции машины.

## Лекция 9

### Силовой расчет механизмов

При проектировании механизмов машин (их звеньев и кинематических пар) приходится решать задачи обеспечения необходимой прочности, жесткости и долговечности. Для этого необходимо знать силовую нагрузку звеньев и кинематических пар.

При решении задач силового расчета механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным; точно так же предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчета с использованием уравнений равновесия.

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчет называется **статическим**. Если в число заданных (или определенных) сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой расчет называется **кинетостатическим**.

Так как метод расчета для обоих случаев является общим, то в дальнейшем будем предполагать, что в число заданных сил входят и силы инерции, известные нам по величине, направлению и точкам приложения.

В первом приближении будем вести расчет **без учета сил трения**.

Механизм машинного агрегата обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Наглядно это представлено на рис. 6.6 (лекция 6) на примере силовой компрессорной установки с приводом от асинхронного электродвигателя.

К поршню приложена сила сопротивления воздуха, к ротору электродвигателя — движущий момент. Если

компрессор многоцилиндровый, то на каждый поршень будет действовать сила сопротивления и картина нагружения станет более сложной.

Так как в курсе «Теоретическая механика» и на упражнении мы разбирали пример по определению усилий в кинематических парах рычажного механизма без учета трения и на нем были сформулированы основные положения метода кинетостатики и последовательность решения задачи об определении усилий в кинематических парах, то сейчас лишь кратко сформулируем задачи силового расчета.

Силовой расчет механизмов основывается на решении прямой (первой) задачи динамики: по заданному закону движения определить действующие силы.

1. Закон движения начальных (или начального при  $W = 1$ ) звеньев считается заданным.

2. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, считаются заданными.

3. Подлежат определению только реакции в кинематических парах.

Иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считают неизвестными, тогда в силовой анализ входит определение таких величин этих сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев.

При решении обеих задач используется принцип Д'Аламбера, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции.

Учет ускоренного движения звеньев выполним методом кинетостатики, условно приложив к каждому подвижному звену механизма главный вектор  $\bar{\Phi}_i$  и главный момент  $M_{\Phi_i}$  сил инерции. Тогда для каждого звена можно записать три уравнения:

$$\sum_i F_{ix} + \Phi_{ix} = 0; \quad (9.1)$$

$$\sum_i F_{iy} + \Phi_{iy} = 0; \quad (9.2)$$

$$\sum_i M_0(\bar{F}) + \sum_i M_i + \sum_i M_0(\bar{\Phi}) + M_{\Phi_i} = 0. \quad (9.3)$$

**Уравнения равновесия** звеньев в этом случае называются **уравнениями кинетостатики**.

Два алгебраических уравнения (9.1) и (9.2) могут быть заменены одним эквивалентным векторным уравнением сил

$$\sum_i \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i = 0.$$

Главный вектор  $\bar{\Phi}_i$  и главный момент  $M_{\Phi_i}$  сил инерции звена  $i$  определяются по уравнениям

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_{Si}; \quad M_{\Phi_i} = -J_{is} \varepsilon_i. \quad (9.4)$$

Уравнение  $M_{\Phi_i} = -J_{is} \varepsilon_i$  предполагает, что главный вектор сил инерции  $\bar{\Phi}_i$  приложен к центру масс  $S_i$ .

Следует подчеркнуть, что никакой силы  $\bar{\Phi}_i$  и никакой пары сил  $M_{\Phi_i}$  к звену  $i$  в действительности не приложено. Главный вектор  $\bar{\Phi}_i$  и главный момент  $M_{\Phi_i}$  сил инерции не имеют никакого физического содержания и в расчетных уравнениях (9.1)–(9.3) выполняют роль не более чем чисто математических величин, посредством которых учитывается влияние ускоренного движения звеньев.

Силы в кинематических парах, являющиеся искомыми, определяют из уравнений (9.1)–(9.3), в которых они содержатся в составе сумм  $\sum_i F_x$ ,  $\sum_i F_y$ ,  $\sum_i M_0(\bar{F})$ . Поскольку значения  $\Phi_{ix}$ ,  $\Phi_{iy}$ ,  $M_{\Phi_i}$  зависят от ускорений, искомые силы также зависят от ускорений. Следовательно, для проведения силового расчета надо знать закон движения механизма.

Рассмотрим действие сил в кинематических парах, считая, что влияние трения мало и им можно пренебречь.

Сила взаимодействия звеньев, образующих низшую пару, представляет собой равнодействующую элементарных сил, распределенных по поверхности соприкосновения звеньев. Как известно из теоретической механики, сила взаимодействия двух соприкасающихся тел при отсутствии трения направлена по общей нормали к их поверхности.

В **поступательной паре** сила  $\bar{F}_{12}$ , приложенная к звену 1 от звена 2, направлена по нормали  $n-n$  (рис. 9.1, а). Модуль силы  $\bar{F}_{12}$  и расстояние  $b$  неизвестны и должны быть определены в процессе силового расчета. Сказанное полностью относится и к силе  $\bar{F}_{21}$ , приложенной к звену 2 от звена 1, так как силы взаимодействия  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{21}$  связаны третьим законом Ньютона:  $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$ .

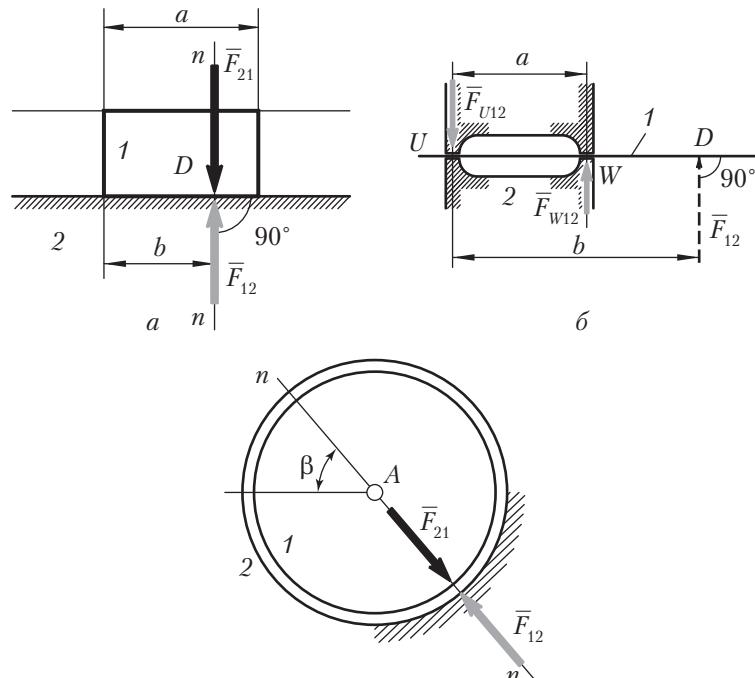


Рис. 9.1

При выполнении силового расчета расстояние  $b$  может получиться больше длины  $a$  (рис. 9.1, б). Это означает, что к звену 1 приложены уже не одна, а две реакции:  $\bar{F}_{U12}$  и  $\bar{F}_{W12}$  — направленные навстречу друг другу и неизвестные по модулю. Именно они и представляют реальное силовое воздействие на стержень 1 от звена 2, а вектор  $\bar{F}_{12}$ , полученный формально из уравнений (показан на рис. 9.1, б штрихами), является лишь их равнодействующей.

Таким образом, поступательная пара в любом случае (см. рис. 9.1, а, б) вносит в расчетные уравнения две неизвестные величины.

Во **вращательной паре** сила  $\bar{F}_{12}$  направлена нормально к цилиндрической поверхности соприкосновения обоих звеньев, т.е. проходит через центр шарнира A (рис. 9.1, в). Положение центра шарнира всегда известно, но модуль силы  $\bar{F}_{12}$  и угол  $\beta$  неизвестны. И эта низшая пара приносит в расчет две неизвестные.

Следовательно, от каждой силы, действующей в любой низшей кинематической паре, в расчетных уравнениях (9.1)–(9.3) появляются две неизвестные величины.

Пусть **вращательная пара** конструктивно выполнена в виде двух подшипников:  $O'$  и  $O''$  (рис. 9.2). Сила  $\bar{F}_{12}$ , полученная из расчета, расположена (во взятом примере) в плоскости  $BB'$  зубчатой передачи и является равнодействующей реакций  $\bar{F}'_{12}$  и  $\bar{F}''_{12}$ .

Эти реакции и представляют собой реальное силовое нагружение подшипников. Именно они нужны для расчета подшипников на долговечность, а вала — на прочность.

В **высшей паре** контакт звеньев может быть либо точечным, либо линейным. Силовое взаимодействие звеньев при точечном контакте выражается в виде сосредоточенной силы, при линейном — в виде нагрузки, распределенной по линии контакта. В последнем случае под силой взаимодействия понимают равнодействующую элементарных распределенных сил.

Сила  $\bar{F}_{12}$  в высшей паре направлена по общей нормали  $n-n$  (рис. 9.3). Следовательно, для силы  $\bar{F}_{12}$  известны как точка приложения (точка  $K$ ), так и линия действия; неизвестным остается только модуль. Таким образом, в расчетных уравнениях (9.1)–(9.3) члены, образованные силами взаимодействия в высших парах, содержат по одному неизвестному.

Рассмотрим статическую определенность любого плоского механизма без избыточных связей ( $q = 0$ ), в состав

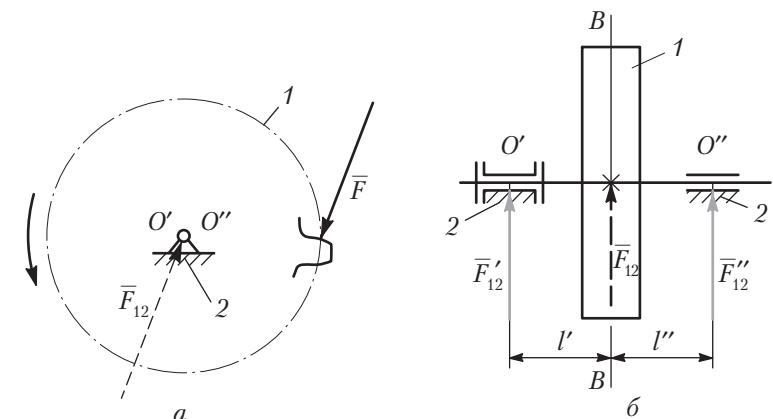


Рис. 9.2

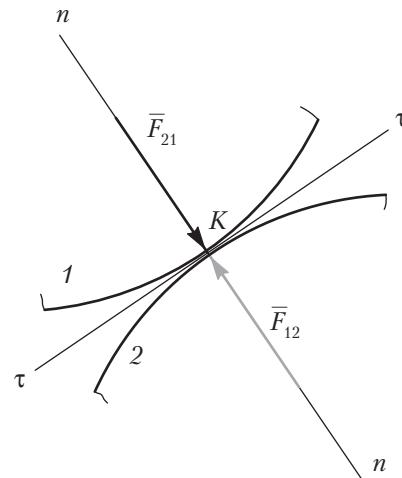


Рис. 9.3

которого входят  $n$  подвижных звеньев,  $p_{\text{н}}$  низших и  $p_{\text{в}}$  высших кинематических пар. Так как для каждого звена механизма можно записать три расчетных уравнения (9.1)–(9.3), то общее число уравнений для всех его  $n$  подвижных звеньев составит  $N_y = 3n$ .

Для плоской схемы механизма число неизвестных, определяемых из какой-либо системы уравнений  $N_F = 2p_{\text{н}} + p_{\text{в}} + W$ , должно совпадать с числом уравнений  $N_y = 3n$ , т.е.  $N_y = N_F$  или

$$3n = (2p_{\text{н}} + p_{\text{в}}) + W \dots \quad (9.4)$$

Для структурной группы Ассура число уравнений кинетостатики  $N_{y\text{г}} = 3n_{\text{г}}$ , число неизвестных —  $N_{F\text{г}} = 3p_{\text{нг}} + p_{\text{вг}}$ , где  $n_{\text{г}}$  — число подвижных звеньев группы Ассура;  $p_{\text{нг}}$  — число низших кинематических пар группы;  $p_{\text{вг}}$  — число высших кинематических пар группы.

$$N_{y\text{г}} = N_{F\text{г}}.$$

В случае кинетостатической определимости плоский механизм не должен иметь избыточных связей.

Наличие избыточных связей увеличивает число неизвестных составляющих реакций, и для их определения дополнительно к уравнениям кинетостатики должны быть составлены уравнения перемещений (деформаций).

Для пространственной схемы механизма это условие запишется в виде

$$6n = 5p_{\text{в}} + 4p_{\text{IV}} + 3p_{\text{III}} + 2p_{\text{II}} + 1p_{\text{I}} + W$$

или

$$6n = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 1p_5 + W.$$

Система сил для пространственной схемы должна быть пространственной, а для плоской схемы система действующих сил должна быть плоской.

Рассмотрим силовой расчет кривошипно-ползунного механизма компрессора (рис. 9.5).

Исходными данными являются:

- 1) кинематическая схема механизма;
- 2) массы и моменты инерции звеньев, положение их центров масс ( $m_1, J_{1S}, m_2, J_{2S}, m_3$ );
- 3) угловая скорость  $\omega_1$  и угловое ускорение  $\epsilon_1$  звена 1;
- 4) сила сопротивления, приложенная к поршню  $F_3$ ;
- 5) силы тяжести всех звеньев.

Установим последовательность выполнения силового расчета.

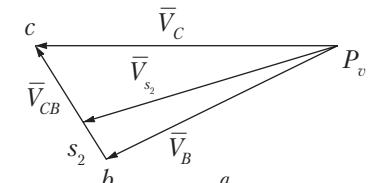
Для рассматриваемого положения механизма записываем векторные уравнения скоростей и ускорений, строим планы скоростей ( $a$ ) и ускорений ( $\bar{a}$ ) (рис. 9.4). Далее определяем

Определение скоростей

$$V_B = \omega_1 l_{AB};$$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}.$$

$$\mu = \dots \text{ММ/(м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$



Определение ускорений

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}}}_B^n + \underline{\underline{\bar{a}}}_B^\tau;$$

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}}}_C^n = \underline{\underline{\bar{a}}}_B^n + \underline{\underline{\bar{a}}}_B^\tau + \underline{\underline{\bar{a}}}_{CB}^n + \underline{\underline{\bar{a}}}_{CB}^\tau.$$

$$\mu = \dots \text{ММ/(м} \cdot \text{с}^{-2}\text{)}.$$

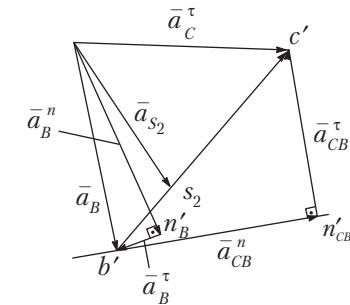


Рис. 9.4

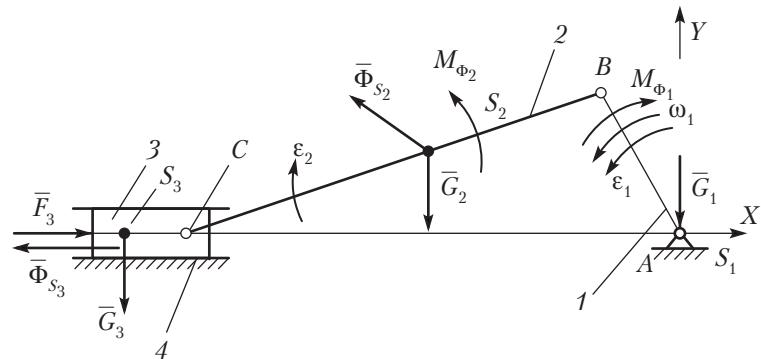
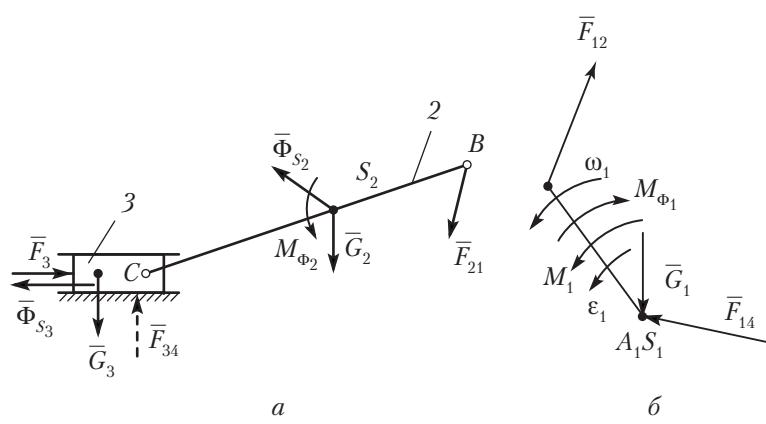


Рис. 9.5



а

б

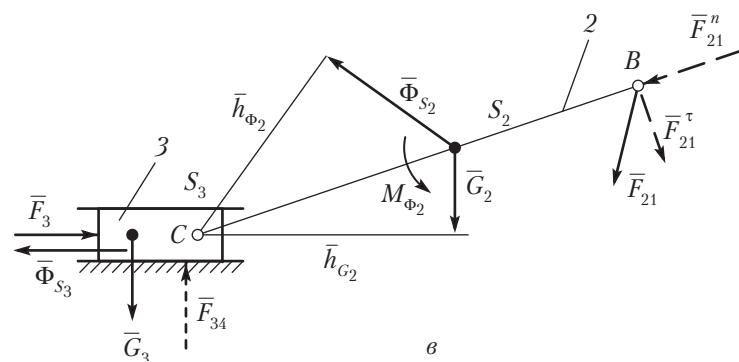


Рис. 9.6

значения главных векторов сил инерции ( $\vec{\Phi}_{S_2}$ ,  $\vec{\Phi}_{S_3}$ ) и главных моментов сил инерции ( $M_{\Phi_1}$ ,  $M_{\Phi_2}$ ) и наносим их на расчетную схему механизма рис. 9.5.

Требуется определить внутренние силы (реакции) во всех кинематических парах и момент, приложенный к кривошипу.

Разобьем механизм на две части: структурную группу, составленную звеньями 2 и 3, и первичный механизм (рис. 9.6, а, б).

Рассмотрим равновесие группы 2–3 (рис. 9.6, б):

$$\sum \bar{F}_{2,3} = 0;$$

$$\bar{F}_{34} + \bar{F}_3 + \bar{\Phi}_{S_3} + \bar{G}_3 + \bar{G}_2 + \bar{\Phi}_{S_2} + \bar{F}_{21} = 0. \quad (9.5)$$

Так как в уравнении (9.5) три неизвестных, то оно не решается. Для определения одного из неизвестных запишем уравнение равновесия для звена 2, предварительно разложив силу  $F_{21}$  на нормальную  $F_{21}^n$  и тангенциальную  $F_{21}^\tau$ :

$$\sum M_{C(2)} = 0; \quad (9.6)$$

$$M_{C(G_2)} + M_{C(\Phi_{S_2})} + M_{C(F_{21}^\tau)} + M_{\Phi_{S_2}} = 0;$$

$$F_{21}^\tau = \frac{\sum M_{C(2)}}{l_{CB}}, \text{ Н.}$$

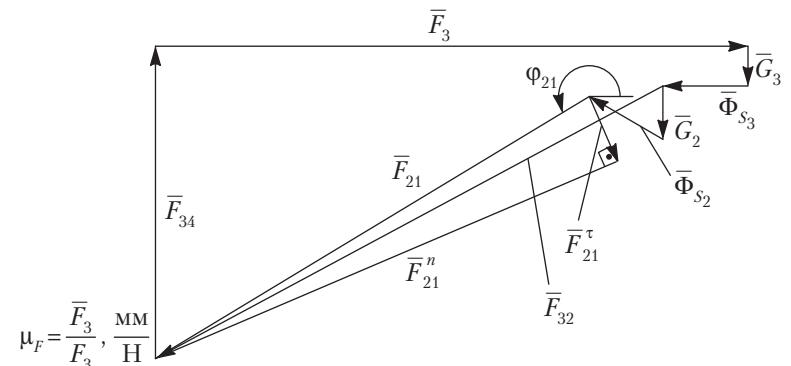


Рис. 9.7

После определения  $F_{21}^\tau$  решаем векторное уравнение (9.5)

$$\underline{\underline{F}}_{34} + \underline{\underline{F}}_3 + \underline{\underline{\Phi}}_{S3} + \underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{\Phi}}_{S2} + \underline{\underline{F}}_{21}^\tau + \underline{\underline{F}}_{21}^n = 0. \quad (9.5')$$

Задавшись масштабом  $\mu_F = \frac{\bar{F}_3}{\bar{F}_3}$ ,  $\frac{\text{ММ}}{\text{H}}$ , строим план сил для

уравнения (9.5') (рис. 9.7).

Из плана сил определяем силы  $F_{34}$  и  $F_{21}$ :

$$F_{21} = \frac{\bar{F}_{21}}{\mu_F}, \text{ H}; \quad F_{34} = \frac{\bar{F}_{34}}{\mu_F}, \text{ H.}$$

Определяем угловую координату  $\varphi_{21}$  силы  $F_{21}$ , замерив ее от положительного направления оси  $x$ .

Рассмотрим равновесие звена 3 (рис. 9.8).

Из условия равновесия звена 3 определяем

$$\sum \bar{F}_3 = 0,$$

силу (реакцию)  $F_{32}$  и плечо силы  $F_{34}$ .

$$\underline{\underline{F}}_3 + \underline{\underline{G}}_3 + \underline{\underline{\Phi}}_{S3} + \underline{\underline{F}}_{34} + \underline{\underline{F}}_{32} = 0; \quad (9.7)$$

$$\sum M_{C(3)} = 0;$$

$$M(G_3) + M(F_{34}) = 0; \quad (9.8)$$

$$h_{F_{34}} = \frac{G_3 l_{CS3}}{F_{34}}, \text{ H.}$$

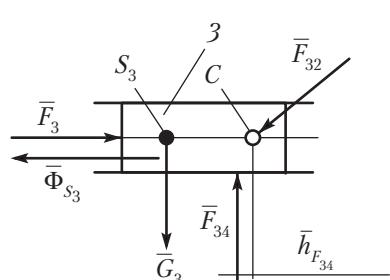


Рис. 9.8

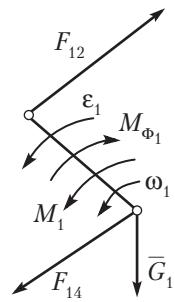


Рис. 9.9

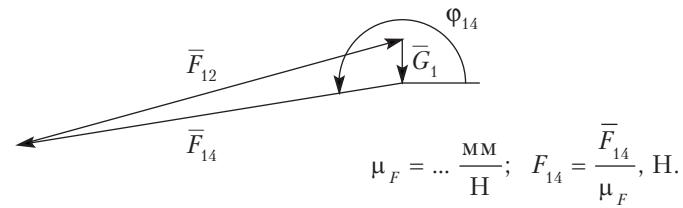


Рис. 9.10

После этого рассматриваем равновесие кривошипа (рис. 9.9) и определяем силу  $F_{14}$  (рис. 9.10), угловую координату  $\varphi_{14}$  и момент  $M_{\partial 1}$ .

$$\sum M_A = 0; \\ \underline{\underline{M}}_A(F_{12}) + \underline{\underline{M}}_{\Phi_{S1}} + \underline{\underline{M}}_{\partial 1} = 0; \quad (9.9)$$

$$\sum \bar{F}_1 = 0; \\ \underline{\underline{F}}_{12} + \underline{\underline{G}}_1 + \underline{\underline{F}}_{14} = 0. \quad (9.10)$$

### Контрольные вопросы и задания к лекции 9

- Чем отличается статический силовой расчет от кинетостатического?
- Как используется принцип Д'Аламбера в силовом расчете механизмов?
- Запишите уравнения кинетостатики для одного из звеньев механизма.
- Расскажите о методе определения угловых ускорений звеньев при силовом расчете механизма.
- Как определить величину и направление главных векторов и главных моментов сил инерции каждого из звеньев стержневого механизма?
- Сколько уравнений кинетостатики необходимо записать для проведения силового расчета кривошипно-ползунного (четырехшарнирного) механизма?
- В какой последовательности необходимо выполнять силовой расчет четырехшарнирного механизма, если задан момент нагрузки на выходном звене?

8. Как используется условие статической определенности группы Ассура при силовом расчете механизма?
9. Расскажите, как можно провести силовой расчет механизма с учетом трения в кинематических парах (см. лекцию 26).

## Лекция 10

### Уравновешивание механизмов

При движении звеньев механизма в кинематических парах возникают дополнительные динамические нагрузки от сил инерции звеньев. Это происходит из-за того, что центры масс звеньев в общем случае имеют переменные по величине и направлению ускорения. Так как всякий механизм имеет неподвижное звено-стойку, то и на стойку механизма также воздействуют вполне определенные динамические нагрузки. В свою очередь, через стойку эти нагрузки передаются на фундамент механизма. Динамические нагрузки, возникающие при движении механизма, являются источниками дополнительных сил трения в кинематических парах, вибраций звеньев и фундамента, дополнительных напряжений в отдельных звеньях механизма, причиной шума и т.д. Поэтому при проектировании механизма ставится задача о рациональном подборе масс звеньев механизма, обеспечивающем полное или частичное устранение указанных динамических нагрузок. Решение подобной задачи, относящейся к динамическому проектированию механизма машины, называется его уравновешиванием.

**Цель уравновешивания механизмов** — устранение переменных воздействий на фундамент, вызывающих нежелательные колебания как самого фундамента, так и здания, в котором он находится.

### Понятие о неуравновешенности механизма (звена)

Рассмотрим плоский механизм (рис. 10.1), начальное звено 1 которого вращается с постоянной угловой скоростью. При этом все остальные звенья будут двигаться с угловыми ускорениями, а центры масс  $S_1, S_2, S_3$  будут иметь линейные ускорения.

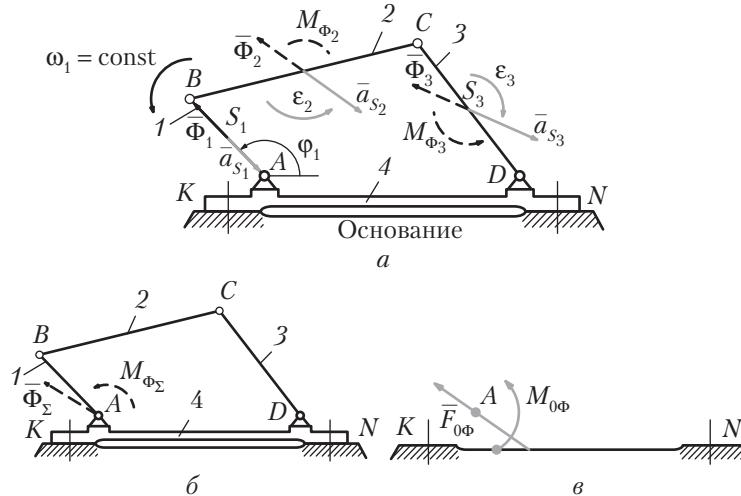


Рис. 10.1

Приведем всю систему сил инерции к центру  $A$ , в результате чего вся эта система сводится к общему главному вектору

$$\bar{\Phi}_{\Sigma} = \sum_i^n \bar{\Phi}_i, \quad (10.1)$$

и к общему главному моменту

$$M_{\Phi_{\Sigma}} = \sum M_{\Phi_i} + \sum M_A(\Phi_i), \quad (10.2)$$

так как  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $M_{\Phi_1} = 0$ .

Динамические составляющие нагрузления основания численно равны общему главному вектору  $\Phi_{\Sigma}$  и общему главному моменту  $M_{\Phi_{\Sigma}}$  системы сил инерции.

*Уравновешенным* считается механизм, для которого главный вектор и главный момент сил инерции равны нулю.

Если общий главный вектор сил инерции механизма  $\bar{\Phi}_{\Sigma} \neq 0$ , то такой механизм называется *статически неуравновешенным*.

Если  $M_{\Phi_{\Sigma}} \neq 0$ , но  $\bar{\Phi}_{\Sigma} = 0$  — моментная неуравновешенность.

Если  $M_{\Phi_{\Sigma}} \neq 0$  и  $\bar{\Phi}_{\Sigma} \neq 0$  — динамическая неуравновешенность.

Полное уравновешивание рычажных механизмов является очень трудной задачей, поэтому в большинстве случаев ограничиваются их статическим уравновешиванием. Однако и его не всегда удается осуществить в полной мере. В этих случаях производят частичное статическое уравновешивание. При статическом уравновешивании механизма необходимо обеспечить условие

$$\Phi_{\Sigma} = 0. \quad (10.3)$$

Так как масса системы всех подвижных звеньев  $\sum m_i \neq 0$ , то ускорение центра масс  $S$  этой системы должно быть равно нулю ( $a_{SM} = 0$ ). Это условие выполняется, когда центр масс  $S$  системы подвижных звеньев механизма не перемещается. Таким образом, *статическое уравновешивание есть такое действие, в результате которого центр масс системы подвижных звеньев работающего механизма становится неподвижным*.

На практике наиболее часто статическое уравновешивание проводится следующими тремя способами:

1. Выбор симметричных схем механизмов.

Примером такого механизма является сдвоенный кривошипно-ползунный механизм, используемый для мотоциклетных и других ДВС (рис. 10.2).

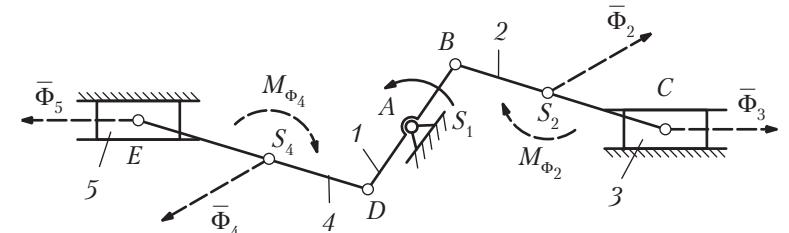


Рис. 10.2

Механизм выполнен кососимметричным, правая и левая шатунно-поршневые группы 2–3 и 4–5 абсолютно одинаковы, центр масс  $S_1$  коленчатого вала находится на оси вращения ( $\Phi_1 = 0$ ).  $\Phi_{\Sigma} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 = 0$ , что и свидетельствует о полной статической уравновешенности механизма.

Однако  $M_{\Phi_{\Sigma}} = M_{\Phi_2} + M_{\Phi_4} + M_A(\Phi_2) + M_A(\Phi_4) \neq 0$ , т.е. моментной уравновешенностью механизм не обладает.

2. Установка корректирующих масс (противовесов) (рис. 10.3).

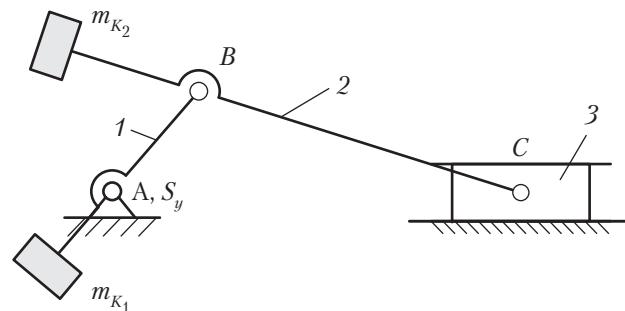


Рис. 10.3

3. Размещение противовесов на дополнительных звеньях или кинематических цепях (рис. 10.4).

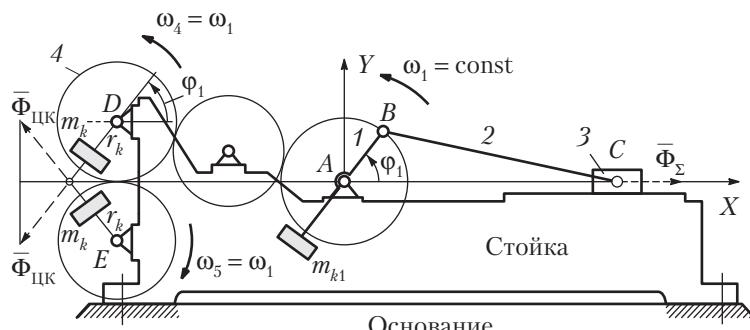


Рис. 10.4

Наиболее наглядным и простым методом уравновешивания механизмов является метод замещающих масс.

### Метод замещающих масс

При использовании метода замещающих масс звено механизма с распределенной массой заменяется расчетной моделью, которая состоит из точечных масс. Точки приложения масс можно выбирать произвольно, но обычно

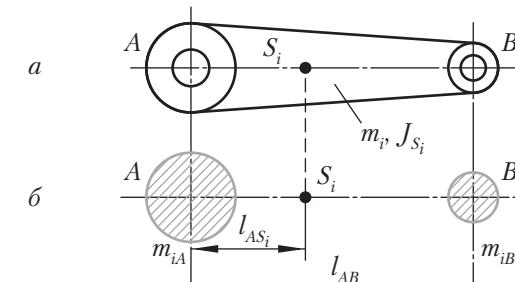


Рис. 10.5

замещающие массы располагают в шарнирах: звено с распределенной массой (рис. 10.5, а); модель с замещающими массами (см. рис. 10.5, б).

#### Условия перехода от звена с распределенной массой к модели с точечными массами

1. Сохранение массы модели и звена:

$$m_{iA} + m_{iB} = m_i. \quad (10.4)$$

2. Сохранение положения центра масс:

$$l_{AS_i} = \text{const}, \quad m_{iA} l_{AS_i} = m_{iB} (l_{AB} - l_{AS_i}). \quad (10.5)$$

3. Сохранение момента инерции:

$$m_{iA} l_{AS_i}^2 + m_{iB} (l_{AB} - l_{AS_i})^2 = J_{S_i}. \quad (10.6)$$

Очевидно, что выполнить три условия системой с двумя массами невозможно, поэтому при статическом уравновешивании механизмов ограничиваются выполнением двух первых условий. (Чтобы обеспечить выполнение всех трех условий, необходимо ввести третью массу  $m_i$  в  $S_i$ .)

*Метод замещающих масс* состоит в следующем: каждое звено механизма надо заменить двумя сосредоточенными массами, затем, вводя корректирующие массы (противовесы) и объединяя их с замещающими массами, добиться того, чтобы объединенные массы оказались бы в конечном счете размещеными в неподвижных точках механизма.

Рассмотрим применение метода замещающих масс при полном и частичном уравновешивании механизмов.

**Полное статическое уравновешивание  
шарнирного четырехзвенника**

Дано:

$$\begin{aligned} & l_1, l_2, l_3; \\ & m_1, m_2, m_3; \\ & l_{AS_1}, l_{BS_2}, l_{DS_3}; \\ & S_1, S_2, S_3 \text{ (рис. 10.6).} \end{aligned}$$

Определить:  $m_{K1}, m_{K3}; l_{K1}, l_{K3}$ .

Заменим каждое звено с распределенной массой двумя сосредоточенными массами, используя систему уравнений перехода.

$$\text{Звено 1: } m_{1A} = \frac{m_1 l_{BS_1}}{l_1}; \quad m_{1B} = \frac{m_1 l_{AS_1}}{l_1}.$$

$$\text{Звено 2: } m_{2B} = \frac{m_2 l_{SC_2}}{l_2}; \quad m_{2C} = \frac{m_2 l_{BS_2}}{l_2}.$$

$$\text{Звено 3: } m_{3C} = \frac{m_3 l_{DS_3}}{l_3}; \quad m_{3D} = \frac{m_3 l_{CS_3}}{l_3}.$$

Объединим массы, размещенные в точках  $B$  и  $C$ :

$$m_B = m_{1B} + m_{2B}, \quad m_C = m_{2C} + m_{3C}.$$

Таким образом, заданный механизм окажется заменен четырьмя массами, сосредоточенными в точках  $A, B, C, D$  (рис. 10.7). Звенья стали безынертными. Центр масс системы остался в том же месте. При работе механизма центр масс  $S$  движется с ускорением  $a_s$ , а это означает, что заданный механизм статически неуравновешен.

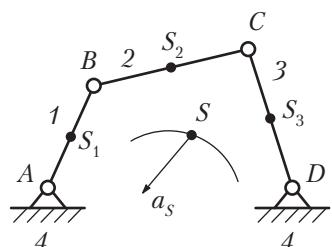


Рис. 10.6

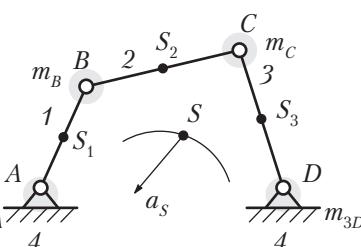


Рис. 10.7

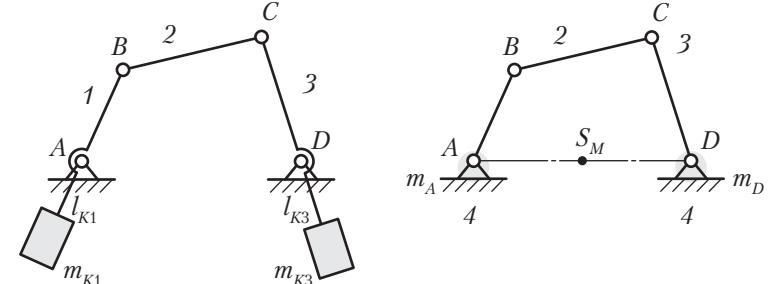


Рис. 10.8

Рис. 10.9

Разместим на звеньях 1 и 3 противовесы (корректирующие массы)  $m_{K1}, m_{K3}$  с таким расчетом, чтобы центры масс систем ( $m_B, m_{K1}$ ) и ( $m_C, m_{K3}$ ) оказались бы в точках  $A$  и  $D$  (рис. 10.8). Для этого должны быть выполнены соотношения

$$m_{K1} l_{K1} = m_B l_1; \quad m_{K3} l_{K3} = m_C l_3. \quad (10.7)$$

Массы противовесов  $m_{K1}$  и  $m_{K3}$  определяются из соотношений (10.7), если задаться размерами  $l_{K1}$  и  $l_{K3}$ .

Докажем, что механизм стал статически уравновешенным, т.е. центр масс системы неподвижен. Объединим массы, размещенные на звеньях 1 и 3:

$$m_A = m_{1A} + m_B + m_{K1};$$

$$m_D = m_{3D} + m_C + m_{K3}.$$

Заданный механизм может быть заменен системой двух неподвижных масс  $m_A$  и  $m_D$ , поэтому центр масс этой системы и центр масс заданного механизма, но дополненного противовесами, также станет неподвижным. А это значит, что статическое уравновешивание заданного механизма достигнуто. Центр масс уравновешенного механизма расположен на неподвижной прямой  $AD = l_4$  (рис. 10.9), и величина расстояния до центра масс  $r_{SM} = \text{const}$  может быть найдена из соотношения:

$$mr_{SM} = m_{3D} l_4; \quad m(l_4 - r_{SM}) = m_{3D} l_4; \quad r_{SM} = \frac{m_{3D} l_4}{m}.$$

Масса всего механизма

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_{K1} + m_{K3}.$$

**Полное статическое уравновешивание  
кривошипно-ползунного механизма**

Дано:  $l_1, l_2, l_{OS1}, l_{AS2}$ ;  
 $m_1, m_2, m_3$ ;  
 $S_3$  совпадает с точкой  $B$  (рис. 10.10).  
Определить:  $\frac{m_{K1}}{l_{K1}}, \frac{m_{K2}}{l_{K2}}$ .

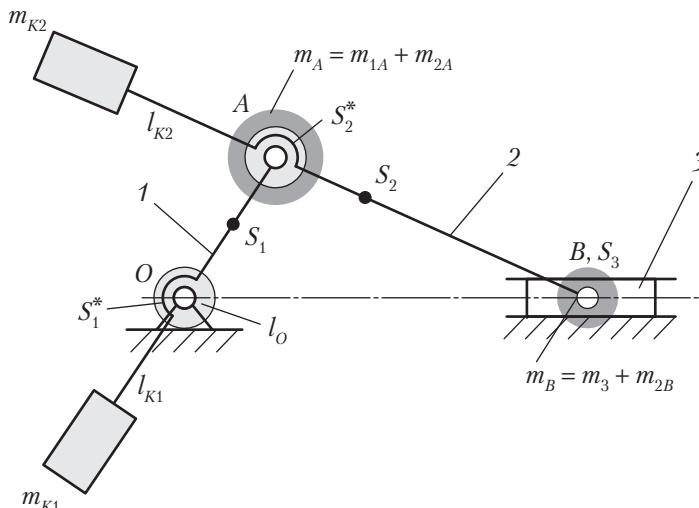


Рис. 10.10

Заменим каждое звено двумя сосредоточенными массами, используя систему уравнений перехода.

$$\text{Звено 1: } m_{1O} = \frac{m_1 l_{AS1}}{l_1}; \quad m_{1A} = \frac{m_1 l_{OS1}}{l_1}.$$

$$\text{Звено 2: } m_{2A} = \frac{m_2 l_{BS2}}{l_2}; \quad m_{2B} = \frac{m_2 l_{AS2}}{l_2}.$$

Объединим массы, размещенные в точках  $A$  и  $B$ :

$$m_A = m_{1A} + m_{2A}, \quad m_B = m_{2B} + m_3.$$

Массу  $m_B$  уравновешивают корректирующей массой (противовесом)  $m_{K2}$ , определяемой из соотношения  $m_{K2} l_{K2} = m_B l_2$  (длиной  $l_{K2}$  задаются),

$$m_{K2} = \frac{(m_3 + m_{2B}) l_2}{l_{K2}}.$$

Точка  $A$  становится центром масс уравновешенного звена 2 с массой

$$m_A^* = m_A + m_B + m_{K2}.$$

Ее уравновешивают корректирующей массой  $m_{K1}$ :

$$m_{K1} = \frac{(m_3 + m_2 + m_{A1} + m_{K2}) l_1}{l_{K1}}.$$

После установки двух корректирующих масс общий центр масс становится неподвижным и будет находиться на оси вращения кривошипа вала (в точке  $O$ ). Точка  $O$  в этом случае является центром масс всего механизма, т.е.  $r_{SM} = 0$  и  $m_M = m_1 + m_2 + m_3 + m_{K1} + m_{K2}$ .

При полном статическом уравновешивании один из противовесов устанавливается на шатуне (звено 2), что резко увеличивает габариты и массу механизма, поэтому применяют частичное (неполное) уравновешивание, добиваясь движения центра масс по специальной (расчетной) траектории.

**Частичное статическое уравновешивание,  
при котором допускается движение центра масс  
вдоль направляющих ползуна (уравновешивание  
вертикальной составляющей сил инерции)**

Каждое из звеньев заменяется двумя сосредоточенными массами с использованием системы уравнений (10.4) и (10.5).

Массы, размещенные в шарнирах  $A$  и  $B$ , объединяются:

$$m_A = m_{1A} + m_{2A}, \quad m_B = m_{2B} + m_3.$$

Массу  $m_A$  уравновешивают противовесом массой  $m_{K1}$ :

$$m_{K1} = \frac{(m_{2A} + m_{1A}) l_1}{l_{K2}}.$$

В этом случае уравновешивается только вращающаяся часть замещающих масс (рис. 10.11).

Для нахождения траектории движения центра масс частично уравновешенного механизма определим параметры радиус-вектора центра масс ( $r_{S\min}$  и  $\Delta r_s$ ):

$$\begin{aligned} m_{O1}^* &= m_{K1} + m_{1O} + m_{2A} + m_{1A}; \quad m_{\Sigma} = m_{O1}^* + m_B; \\ r_{S\min} m_{\Sigma} &= (l_2 - l_1) m_B \quad \left. \begin{aligned} \Delta r_s &= r_{S\max} - r_{S\min}; \quad \Delta r_s = \frac{m_B 2l}{m_{\Sigma}}; \\ r_{S\max} m_{\Sigma} &= (l_2 + l_1) m_B \end{aligned} \right\} \\ r_{S\min} &= \frac{m_B (l_2 - l_1)}{m_{\Sigma}}; \quad r_{S\max} = r_{S\min} + \Delta r_s = \frac{m_B}{m_{\Sigma}} (l_2 + l_1). \end{aligned}$$

Такое уравновешивание (рис. 10.12) применяют для кривошипно-ползунных механизмов с вертикальным расположением ползуна или с горизонтальным расположением ползуна при низком фундаменте.

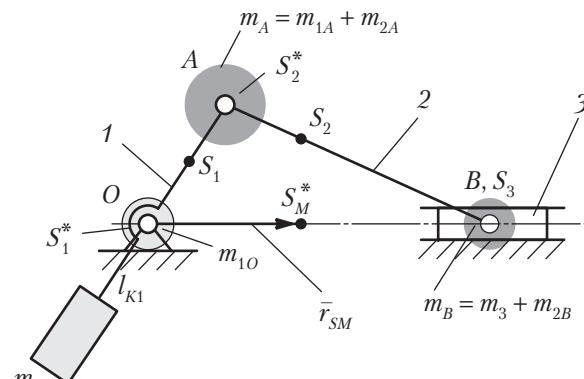


Рис. 10.11

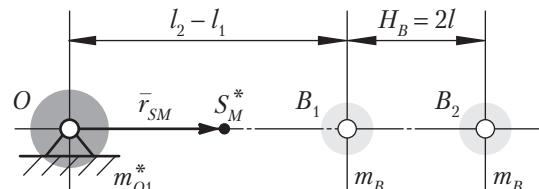


Рис. 10.12

### Частичное уравновешивание для случая, когда центр масс движется по дуге, хорда которой перпендикулярна оси направляющей ползуна

Каждое звено заменяется двумя сосредоточенными массами (рис. 10.13) с использованием систем уравнений (10.4) и (10.5).

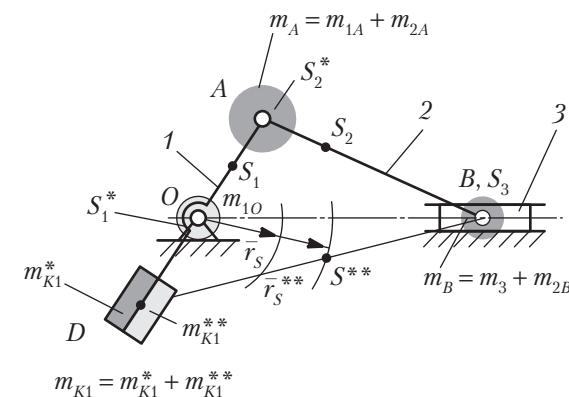


Рис. 10.13

Массы, размещенные в точках  $A$  и  $B$ , объединяются:

$$m_A = m_{1A} + m_{2A}, \quad m_B = m_{2B} + m_3.$$

Данный механизм уравновешивается корректирующей массой  $m_{K1}$ :

$$m_{K1} = m_{K1}^* + m_{K1}^{**}.$$

Корректирующая масса  $m_{K1}^*$  уравновешивает массу  $m_A$ :

$$m_{K1}^* = m_A \frac{l_1}{l_{K1}}.$$

Корректирующая масса  $m_{K1}^{**}$  уравновешивает массу  $m_B$ . Ее величина находится из условия, что центр масс  $m_{K1}^*$  и  $m_B$  расположены в точке  $O$ . Центр масс  $m_{K1}^{**}$  и  $m_B$  лежат на прямой  $BD$  и делят ее в отношении  $x/y$ , т.е.  $m_{K1}^{**}x = m_B y$ . Через отрезок  $OS^{**}$  проведем прямую, параллельную  $AB$ , и тогда из подобия треугольников найдем:

$$\frac{x}{y} = \frac{OA}{OD} = \text{const}; \quad m_{K1}^{**} = m_B \frac{OA}{OD} = m_B \frac{l_{OA}}{l_{OD}} = m_B \frac{l_{OA}}{l_{K1}}.$$

Суммарная корректирующая масса

$$m_{K1} = m_{K1}^* + m_{K1}^{**} = \frac{(m_A + m_B)l_1}{l_{K1}}.$$

Радиус-вектор центра масс находится из соотношений:

$$\frac{x}{OS^{**}} = \frac{x+y}{AB}; \quad OS^{**} = r_s^{**} = \frac{x}{x+y} AB = \frac{OD}{AD} AB;$$

$$r_s^{**} = \left( \frac{l_{K1}}{l_1 + l_{K1}} \right) l_2 = \text{const.}$$

### Эквивалентная схема

$$(m_{1A} + m_{2A} + m_{1O} + m_{K1}^*) r_s = (m_{B2} + m_3 + m_{K1}^{**}) (r_s^{**} - r_s);$$

$$r_s = \frac{(m_{B2} + m_3 + m_{K1}^{**})}{m_\Sigma} r_s^{**} = \text{const},$$

где  $m_\Sigma = m_3 + m_1 + m_2 + m_{K1}$ .

Такое уравновешивание (рис. 10.14) применяется для машин, установленных на высоком фундаменте.

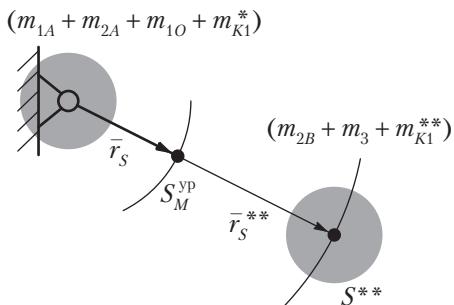


Рис. 10.14

## Лекция 11

### Неуравновешенность роторов и их балансировка

Рассматриваемая задача является вторым основным направлением в теории уравновешивания и несколько отличается от первой, уже разобранной. В ней рассматриваются условия рационального подбора масс звеньев механизма, которые обеспечили бы полное или частичное уменьшение динамических давлений на некоторые кинематические пары механизма. Уравновешивание (балансировка) вращающихся масс приобрело особое значение в современных условиях. Так, в турбинах и гироскопах частота вращения достигает 30 000 об/мин, веретена суперцентрифуг вращаются со скоростями до 50 000 об/мин и выше. При скоростях даже меньше указанных от небольшого смещения центра масс с геометрической оси вращения возникают совершенно непредвиденные конструктором значительные силы инерции, вызывающие появление больших динамических давлений в опорах, следствием чего является ряд нежелательных вибрационных явлений в машине, ее раме или даже фундаменте.

В теории уравновешивания **ротором** называют любое вращающееся материальное тело независимо от его технического назначения (коленчатый вал, рабочее колесо турбины, якорь электродвигателя, магнитный диск для записи информации в ЭВМ и т.д.)

Если вращение ротора сопровождается появлением динамических реакций его подшипников, что проявляется в виде вибрации станины, то такой ротор называется *неуравновешенным*. Источником этих динамических реакций является главным образом несимметричное распределение массы ротора по его объему.

В зависимости от взаимного расположения оси вращения  $O-O$  и главной центральной оси инерции (ГЦОИ)  $I-I$  различают следующие виды неуравновешенности рото-

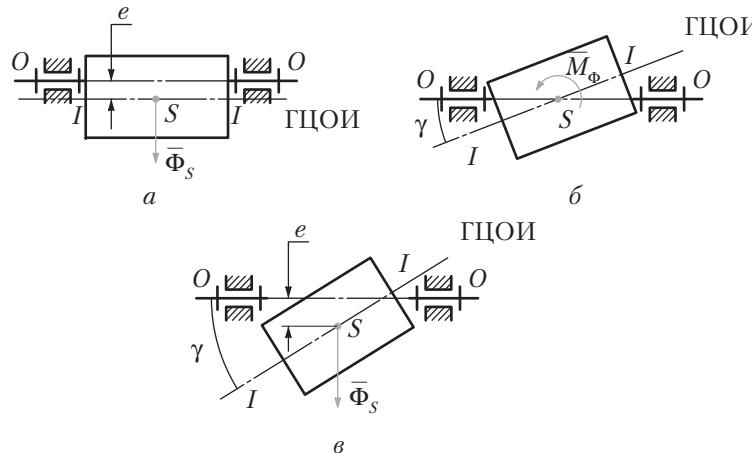


Рис. 11.1

ров: *статическую* (рис. 11.1, а), когда ось вращения и главная центральная ось инерции параллельны; *моментную* (рис. 11.1, б), когда оси пересекаются в центре масс ротора  $S$ ; *динамическую* (рис. 11.1, в), когда оси либо пересекаются вне центра масс, либо перекрещиваются.

Если масса ротора распределена относительно оси вращения равномерно, то главная центральная ось инерции совпадает с осью вращения и ротор является *уравновешенным*, или *идеальным*.

Различают две группы роторов: *жесткие* и *гибкие*.

Ротор относится к категории *жестких*, если на всем диапазоне скоростей вращения до значения рабочей (эксплуатационной) скорости деформации упругой линии вала ротора незначительны.

При значительных деформациях его следует считать гибким. В практике машиностроения большинство роторов характеризуются как жесткие. Жесткий ротор допустимо рассматривать как твердое тело, к которому при его исследовании применимы закономерности механики твердого тела.

Из теоретической механики известно, что давление вращающегося тела на его опоры в общем случае складывается из двух составляющих: *статической*, обусловленной действием заданных сил, и *динамической*, обусловленной ускоренным движением материальных частиц, из

которых состоит вращающееся тело (ротор). У неуравновешенного ротора динамическая составляющая не равна нулю.

При равномерном вращении ротора вокруг оси  $z$  (рис. 11.2) проекции динамической составляющей определяются следующим образом:

$$X_A + X_B = \Phi_x; \quad Y_A + Y_B = \Phi_y; \quad (11.1)$$

$$-X_A a + X_B b = M_{\Phi_y}; \quad Y_A a - Y_B b = M_{\Phi_x}. \quad (11.2)$$

Эти проекции главных векторов и главных моментов сил инерции подсчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \omega^2 m x_S; & \Phi_y &= \omega^2 m y_S; \\ M_{\Phi_x} &= -\omega^2 J_{yz}; & M_{\Phi_y} &= -\omega^2 J_{xz}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

В этих зависимостях:  $m$  — масса ротора;  $J_{yz}, J_{xz}$  — центробежные моменты инерции ротора относительно системы координат  $Oxyz$ .

Плоскость  $xOy$  проходит через центр масс ротора, а вся система вращается вместе с ротором. Отметим, что в рассматриваемой динамической задаче главный момент сил инерции ротора  $\bar{M}_\Phi$  есть величина векторная.

*Неуравновешенность ротора* (как следует из уравнений (11.3)) *возрастает пропорционально квадрату его угловой*

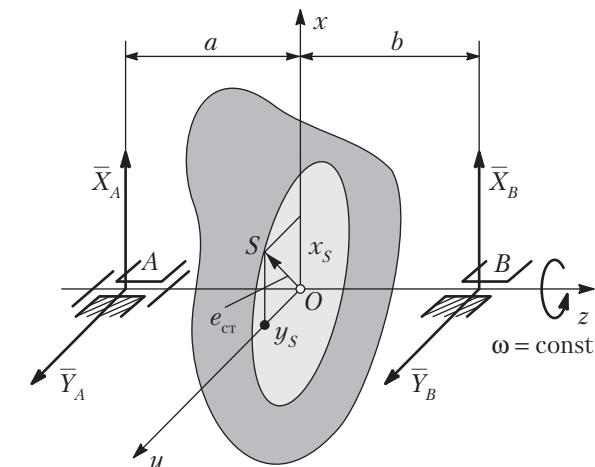


Рис. 11.2

скорости. Поэтому если быстроходные роторы неуравновешены, то они оказывают на свои опоры динамические давления, вызывающие вибрацию стойки и ее основания. Устранение этого вредного воздействия называется **балансировкой (уравновешиванием)** ротора. Решение данной задачи относится к динамическому проектированию машин.

Модуль главного вектора центробежных сил инерции ротора составит

$$\Phi = \omega^2 m \sqrt{x_s^2 + y_s^2}.$$

В векторном виде

$$\bar{\Phi} = \omega^2 m \bar{e}_{ct},$$

где  $e_{ct}$  — статический эксцентриситет массы ротора (радиус-вектор центра масс ротора).

Мерой статической неуравновешенности ротора является статический дисбаланс

$$\bar{D}_{ct} = m \bar{e}_{ct}. \quad (11.4)$$

Вектор  $\bar{D}_{ct}$  называется **главным вектором дисбалансов** ротора. Очевидно, что  $\bar{\Phi} = \omega^2 \bar{D}_{ct}$ .

Модуль главного момента центробежных сил инерции  $\bar{M}_\Phi$  ротора составит:

$$\bar{M}_\Phi = \omega^2 \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2} = \omega^2 \bar{M}_D. \quad (11.5)$$

Главный момент дисбалансов ротора

$$M_D = \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2}.$$

Так как неуравновешенность определяется конструктивными характеристиками ротора или механизма и не зависит от параметров движения, то при балансировке оперируют не инерционными силами  $\Phi$  и моментами  $M_\Phi$ , а пропорциональными им дисбалансами  $\bar{D}_{ct}$  и моментами дисбалансов  $\bar{M}_D$ .

**Балансировкой** называют процесс определения значений и угловых координат дисбалансов ротора и их уменьшения с помощью корректировки размещения его масс. Балансировка эквивалентна уравновешиванию системы инерционных сил, прикладываемых к подвижному ротору для его равновесия.

## Балансировка роторов при различных видах неуравновешенности

### Статическая неуравновешенность

Статическая неуравновешенность свойственна такому ротору, центр масс  $S$  которого не находится на оси вращения, но главная центральная ось инерции ( $I-I$ ) которого параллельна оси вращения. В этом случае  $\bar{e}_{ct} \neq 0$ , и главный вектор дисбалансов  $\bar{D}_{ct} \neq 0$ . Главный момент дисбалансов ротора  $\bar{M}_D \neq 0$ . Статическая неуравновешенность выражается только главным вектором дисбалансов. Он направлен радиально и вращается вместе с ротором (рис. 11.3).

Примером может служить коленчатый вал одноцилиндровой машины, ротор крыльчатки со смещенной осью вращения.

$$\begin{aligned}\bar{F}_A + \bar{F}_B &= \bar{G} + \bar{\Phi}_S; \\ \bar{\Phi}_S &= \omega^2 \bar{D}_{ct}; \quad \bar{\Phi}_S = \omega^2 m \bar{e}_{ct}.\end{aligned}$$

Величина  $\bar{\Phi}_S$  может значительно превышать  $G$ , если будут значительными  $\omega$  или  $e_{ct}$ . Например: если  $G = 10$  Н,  $m = G/g = 1$  кг,  $e_{ct} = 0,1$  мм,  $\omega = 100$  рад/с, то  $\bar{\Phi}_S = 10^4 \cdot 1 \cdot 0,1 = 10^3$  Н, т.е. в 1000 раз больше статической нагрузки ротора на его опоры.

Статическая неуравновешенность может быть устранена, если к ротору прикрепить добавочную массу  $m_k$ , так называемую корректирующую массу. Ее нужно разместить с таким расчетом, чтобы  $\bar{D}_k = m_k \bar{e}_k = -\bar{D}_{ct}$ . Корректирую-

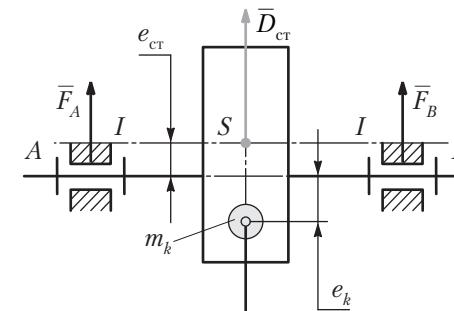


Рис. 11.3

щая масса определяется соотношением:  $m_k = D_k / e_k$ , где величиной  $e_k$  задаются из соображений удобства размещения противовесов. Направление вектора  $\bar{D}_k$  противоположно направлению  $\bar{D}_{ct}$ . Центр корректирующей массы должен находиться на линии действия вектора  $\bar{D}_{ct}$ , а вектор  $\bar{e}_k$  должен быть направлен в сторону, противоположную  $\bar{e}_{ct}$ .

Однако статическую балансировку не всегда конструктивно удается выполнить одной корректирующей массой. Так, для конструкции одноколенчатого вала применяют две плоскости коррекции, а пространство между этими плоскостями оставляют свободным для движения шатуна. В этом случае

$$\bar{D}_k = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 = m_1 \bar{e}_{k1} + m_2 \bar{e}_{k2}.$$

Обычно  $m_1 = m_2$ , а  $\bar{e}_{k1} = \bar{e}_{k2}$ .

### Моментная неуравновешенность

Моментная неуравновешенность имеет место в том случае, когда центр масс  $S$  находится на оси вращения, а главная центральная ось инерции  $I-I$  наклонена к оси вращения ротора под углом  $\gamma$  (рис. 11.4).

В этом случае  $\bar{e}_{ct} = 0$ , следовательно  $\bar{D}_{ct} = 0$ , так что моментная неуравновешенность выражается только лишь главным моментом дисбалансов  $\bar{M}_D$ , т.е. парой дисбалансов  $\bar{D}_{M1}$  и  $\bar{D}_{M2}$ , которая вращается вместе с ротором. Примером может служить двухколенчатый вал, для которого  $M_D = D_{M2} h$ . Опоры  $A$  и  $B$  нагружены парой сил  $(\bar{F}_A, \bar{F}_B)$ , векторы которых вращаются вместе с валом.

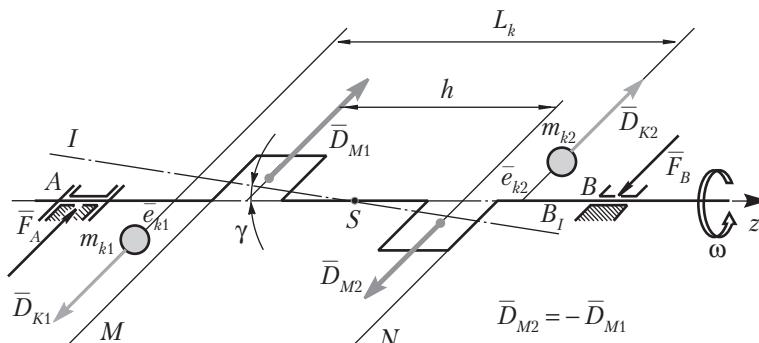


Рис. 11.4

Так как пара сил уравновешивается только парой, то устранить моментную неуравновешенность можно в том случае, если применить не менее чем две корректирующие массы. Их расположение в плоскостях коррекции и их величины должны быть такими, чтобы дисбалансы корректирующих масс  $m_{k1}$  и  $m_{k2}$  составили бы именно пару  $\bar{D}_{k1}$  и  $\bar{D}_{k2}$ . Массы выбираются и размещаются так, чтобы момент их дисбалансов  $\bar{M}_{Dk}$  был по величине равен, а по направлению противоположен моменту дисбалансов ротора:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{Dk} &= -\bar{M}_D, \\ \bar{M}_{Dk} &= \bar{D}_{k1} L_k + \bar{D}_{k2} L_k = \bar{M}_{Dk1} + \bar{M}_{Dk2},\end{aligned}$$

где  $\bar{D}_k = m_k \bar{e}_k$ .

### Динамическая неуравновешенность

Динамическая неуравновешенность является совокупностью двух предыдущих. При динамической неуравновешенности главная центральная ось инерции  $I-I$  пересекает ось вращения не в центре масс ротора точке  $S$  либо перекрещивается с ней; главный вектор дисбалансов  $\bar{D}_{ct}$  и главный момент дисбалансов  $\bar{M}_D$  не равны нулю (рис. 11.5):  $\bar{D}_{ct} \neq 0$ ,  $\bar{M}_D \neq 0$ , т.е. необходимо уравновесить вектор  $\bar{D}_{ct}$  и момент дисбалансов  $\bar{M}_D$ .

Для этого достаточно разместить на роторе две корректирующие массы  $m_{k1}$  и  $m_{k2}$  на расстояниях от оси вращения  $e_{k1}$  и  $e_{k2}$ , а от центра масс  $S$  соответственно на  $l_{k1}$  и  $l_{k2}$ . Массы выбираются и размещаются так, чтобы момент их

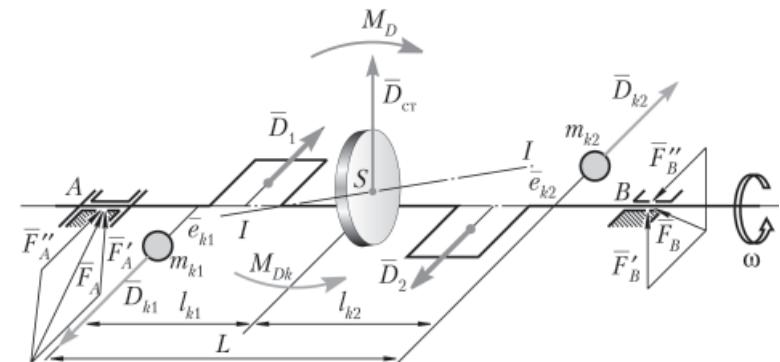


Рис. 11.5

дисбалансов  $\bar{M}_{Dk}$  был по величине равен, а по направлению противоположен моменту дисбалансов ротора  $\bar{M}_D$ :

$$\begin{aligned}\bar{M}_{Dk} &= -\bar{M}_D, \\ \bar{M}_{Dk} &= \bar{D}_{k1} l_{k1} + \bar{D}_{k2} l_{k2} = \bar{M}_{Dk1} + \bar{M}_{Dk2},\end{aligned}$$

где  $\bar{D}_{k1} = m_{ki} \bar{e}_{ki}$  и  $\bar{D}_{k2} = m_{ki} \bar{e}_{ki}$ , а векторная сумма дисбалансов была равна и противоположно направлена вектору  $\bar{D}_{ct}$ :

$$\bar{D}_{ct} = -\bar{D}_k = -(\bar{D}_{k1} + \bar{D}_{k2}).$$

В этих зависимостях величинами  $l_{ki}$  и  $e_{ki}$  задаются из условий удобства размещения противовесов на роторе, а величины  $m_{ki}$  рассчитываются.

Из вышеизложенного следует, что ликвидация всякой неуравновешенности — и статической, и моментной, и динамической — имеет своим результатом то, что главная центральная ось инерции ротора совмещается с его осью вращения, или аналитически  $\bar{D}_{ct} = 0$ ,  $\bar{M}_D = 0$ . В этом случае ротор называется полностью сбалансированным. Отметим важное свойство такого ротора: если ротор полностью сбалансирован для некоторого значения угловой скорости, то он сохраняет свою полную сбалансированность при любой другой угловой скорости, как *постоянной*, так и *переменной*.

### Статическая балансировка роторов при проектировании

При проектировании статически уравновешивают детали, имеющие небольшие осевые размеры и конструктивно неуравновешенные. Предположим, что необходимо сбалансировать деталь (кулачок) сложной конфигурации на этапе проектирования. Для этого разобьем его на ряд частей простой геометрической формы (рис. 11.6, *a*) и для каждой определим  $m_i$ ,  $\bar{e}_{Si}$ , а далее  $D_i$ , тогда для определения величины дисбаланса корректирующей массы необходимо решить векторное уравнение (рис. 11.6, *b*)

$$\sum D_i = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3 + \dots + \bar{D}_k = 0.$$

Технологически балансировку проводят посредством размещения специальных масс, закрепляемых винтами в специальных пазах, либо вы сверливают в «тяжелой»

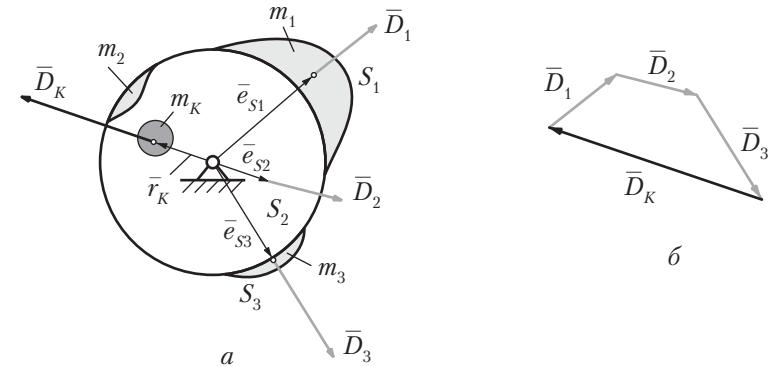


Рис. 11.6

части и т.д. Дисбаланс корректирующей массы определяется по формуле  $\bar{D}_k = m_k \bar{r}_k$ , где одна из величин задается (либо  $m_k$ , либо  $\bar{r}_k$ ), а вторая рассчитывается. Однако уравновешивания главного вектора сил инерции, т.е. сведения центра масс на ось вращения, недостаточно для полного уравновешивания системы инерционных сил, так как в этом случае главная центральная ось инерции тела может пересекать ось вращения ротора в центре масс, но не совпадать с нею.

### Динамическая балансировка роторов при проектировании

Динамическое уравновешивание при проектировании проводят с деталями и узлами, в которых массы распределены относительно оси вращения неравномерно, например детали типа коленчатого вала. Выполняя балансировку, можно было бы каждой неуравновешенной массе противопоставлять свою корректирующую массу. Однако такое решение не является целесообразным, так как в системе ротора почти всегда происходит частичное взаимное уравновешивание дисбалансов. Поэтому применяют другой метод.

Рассмотрим ротор, состоящий из деталей 1, 2 и 3. Эти детали делят на несколько дисков и в каждом диске, так же как при статическом уравновешивании, определяют величину и направление дисбаланса  $\bar{D}_i$ . На детали выбирают

две плоскости коррекции (I и II), и каждый вектор дисбаланса раскладывают на две составляющие, расположенные в плоскостях коррекции. Затем составляющие векторы дисбалансов в плоскостях коррекции суммируются и их равнодействующий дисбаланс уравновешивается соот-

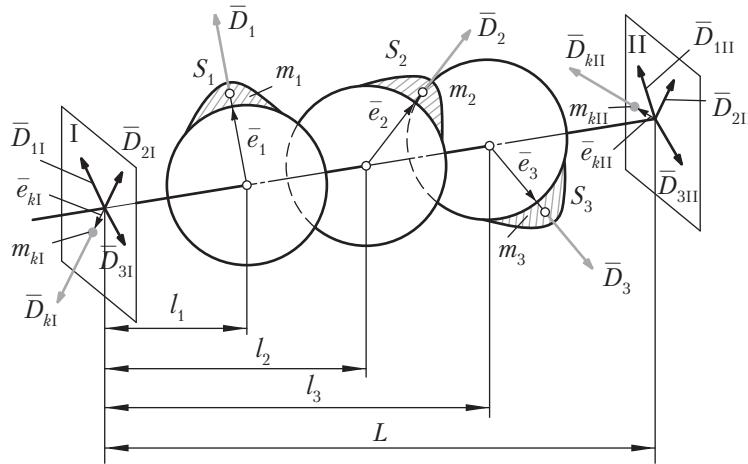


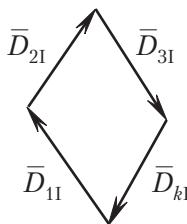
Рис. 11.7

ветствующей корректирующей массой  $m_{kl}$ . Пример такого уравновешивания изображен на рис. 11.7.

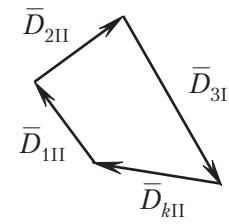
Распределительный вал (ротор) вращается в неподвижных опорах. Определим элементарные массы и положения их центров масс.

Для каждой плоскости коррекции составляется векторное уравнение:

$$\text{I} \quad \bar{D}_{11} + \bar{D}_{21} + \bar{D}_{31} + \bar{D}_{kl} = 0$$



$$\text{II} \quad \bar{D}_{1II} + \bar{D}_{2II} + \bar{D}_{3II} + \bar{D}_{kII} = 0$$



Пространственную систему векторов дисбалансов  $\bar{D}_1$ ,  $\bar{D}_2$  и  $\bar{D}_3$  заменяем двумя плоскими системами составляющих векторов дисбалансов  $\bar{D}_{1I}$ ,  $\bar{D}_{2I}$ ,  $\bar{D}_{3I}$ ,  $\bar{D}_{1II}$ ,  $\bar{D}_{2II}$ ,  $\bar{D}_{3II}$ , размещенных в плоскостях коррекции I и II. Условия приведения:

$$\begin{cases} \bar{D}_{1I} + \bar{D}_{3I} = \bar{D}_1, \\ D_{1II}L = D_{1I}l_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{D}_{2I} + \bar{D}_{3I} = \bar{D}_2, \\ D_{2II}L = D_{2I}l_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{D}_{3I} + \bar{D}_{3II} = \bar{D}_3, \\ D_{3II}L = D_{3I}l_3 \end{cases}.$$

$$m_{kl} = \frac{D_{kl}}{l_{kl}}, \quad m_{kII} = \frac{D_{kII}}{l_{kII}}.$$

Корректирующие массы  $m_{kl}$  и  $m_{kII}$  должны быть размещены в плоскостях I и II в местах, определяемых координатами  $\varphi_{kl}$ ,  $e_{kl}$  и  $\varphi_{kII}$ ,  $e_{kII}$ . Отметим, что вместо корректирующих масс (противовесов) можно применить так называемые антитроповесы. Это значит, что не корректирующая масса размещается на линии действия вектора дисбаланса, а диаметрально противоположно ей из ротора удаляется соответствующее количество материала (так называемое тяжелое место ротора).

## Основные методы виброзащиты. Виброизоляция

# Лекция 12

## Основы виброзащиты машин

Повышение быстроходности машин, характерное для развития машиностроения, неизбежно приводит к повышению уровня создаваемых динамических воздействий. Это проявляется в увеличении динамических напряжений в элементах машин, снижении их несущей способности, появлении усталостных напряжений.

Особенно сложны проблемы виброзащиты в современных транспортных средствах (летательные аппараты, колесные и гусеничные машины, морские суда и т.д.). Создатели новых машин могут по-разному подходить к решению проблемы виброзащиты. Так, защищая водителя от вибрационных воздействий, конструктор может пойти по пути снижения колебаний массы со всеми установленными на нем агрегатами или по пути уменьшения колебаний только одного сиденья механика-водителя. Очевидно, что во втором случае эффективность решения достигается более простыми техническими средствами, чем в первом случае.

**Виброзащита** — это совокупность методов и средств, уменьшающих вредное влияние вибраций. Создание виброзащитных устройств, позволяющих эффективно решать поставленные перед ними задачи при ограниченных массовых и геометрических характеристиках, является сложной технической задачей, решение которой оказывается возможной только при всестороннем учете характера возмущений и особенностей динамики создаваемых систем. Все это привело к возникновению и развитию большого самостоятельного раздела динамики машин — теории виброзащитных систем.

Уменьшение интенсивности колебаний объекта может быть достигнуто разными способами.

1. Уменьшением уровней механических воздействий, возбуждаемых источником (такой способ виброзащиты называется **снижением виброактивности источника**). Для этого осуществляют уравновешивание рычажных механизмов и балансировку роторов, о чём мы говорили на предыдущих лекциях.

2. Изменением конструкции объекта, при котором заданные механические воздействия будут вызывать менее интенсивные колебания объекта или отдельных его частей (этот метод называется **внутренней виброзащитой объекта**).

3. Присоединением к объекту дополнительной динамической системы, изменяющей характер его колебаний. Такая система называется **динамическим гасителем колебаний**, а метод защиты, основанный на ее применении, — **динамическим гашением колебаний**.

4. Установкой между объектом и источником колебаний дополнительной системы, изменяющей характер его колебаний. Этот метод виброзащиты называется **виброизоляцией**, а устройства, устанавливаемые между источником и объектом, — **виброизолаторами (виброизолирующими устройствами)**.

Действие виброизоляции сводится к ослаблению связей между источником и объектом; при этом уменьшаются динамические воздействия, передаваемые объекту.

Ослабление связей обычно сопровождается возникновением некоторых нежелательных явлений:

- увеличением статических смещений объекта относительно источника;
- увеличением амплитуд относительных колебаний при низкочастотных воздействиях.

Поэтому применение виброизоляции как метода виброзащиты в большинстве случаев связано с нахождением компромиссного решения, удовлетворяющего всей совокупности требований.

Давайте рассмотрим случай виброизоляции с помощью упругих амортизаторов.

Принципиальная схема виброзащитной системы представлена на рисунке 12.1.

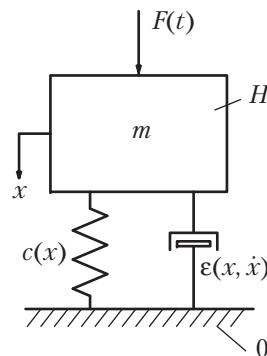


Рис. 12.1

### Случай силового возбуждения

Между основанием и амортизируемым объектом устанавливается упругий амортизатор (или упругие амортизаторы).

К амортизируемому объекту приложена внешняя сила ( $F(t)$ ). Ставится задача снизить динамические силы, передаваемые на основание, за счет введения в систему упругих амортизаторов.

Поведение системы описывается следующим дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = F(t) + R(x, \dot{x}), \quad (12.1)$$

где  $m$  — масса амортизированного объекта;  $x$  — обобщенная координата;  $F(t)$  — внешняя сила, приложенная к объекту;  $R(x, \dot{x})$  — сила, приложенная к массе со стороны упругого амортизатора.

Простейшим примером таких воздействий может служить гармоническая вынуждающая сила  $F = F_0(\sin \omega t + \varphi)$ , где  $F_0$  — амплитуда колебаний;  $\omega$  — круговая частота (рад/с);  $\omega t$  — фаза колебания;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — период колебаний, с;

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  — частота колебаний, Гц (рис. 12.2).

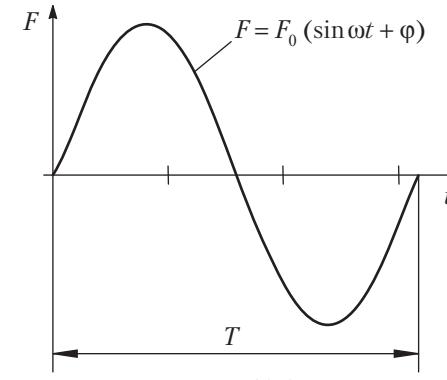


Рис. 12.2

В более сложных случаях воздействие на массу  $m$  может быть описано конечной (или бесконечной) суммой гармонических компонентов. Тогда

$$F(t) = \sum_{i=1}^N F_i (\sin \omega_i t + \varphi_i).$$

Такое вибрационное воздействие принято называть полигармоническим. Существует множество различных видов ударных воздействий, но о них из-за краткости курса мы говорить не будем, а рекомендуем обратиться к учебнику [1] 1987 года издания, параграфы 10.1—10.9. Ограничимся рассмотрением случая, когда на массу  $m$  действует гармоническая вынуждающая сила, описываемая уравнением

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (12.2)$$

### Этапы решения задач виброзащиты

Решение задач виброзащиты машин и механизмов включает следующие этапы:

- построение модели объекта;
- формирование критериев качества;
- изучение реакции объекта на заданное внешнее воздействие;
- сравнение по заданному критерию результирующих показателей с допустимыми величинами.

Простейшие задачи виброизоляции возникают в том случае, когда совокупность сил в реальном упругом амортизаторе

может быть с достаточной точностью описана как линейная функция координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$ :

$$R(x, \dot{x}) = -cx - \varepsilon\dot{x}. \quad (12.3)$$

Коэффициент  $c$  принято называть жесткостью амортизатора, а  $\varepsilon$  — коэффициент вязкого трения (демпфирования). С учетом (12.3) уравнение (12.1) примет вид

$$m\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + cx = F_0 \cos \omega t. \quad (12.4)$$

Обозначим  $\frac{c}{m} = \omega_0^2$ ;  $\frac{\varepsilon}{m} = 2n$  и перепишем (12.4) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (12.5)$$

Ограничимся анализом работы виброзащитной системы в установившемся режиме. В этом случае решение уравнения (12.5) может быть представлено в виде

$$x = A \cos(\omega t - \gamma), \quad (12.6)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний массы  $m$ ;  $\gamma$  — сдвиг фаз между колебаниями массы  $m$  и внешней силой  $F(t)$ . При этом амплитуда колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad (12.7)$$

и сдвиг фаз колебаний массы  $m_1$  и силы  $F(t)$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Оценку качества виброизоляции целесообразно проводить, сопоставляя амплитудное значение силы  $R_0$ , развиваемой в амортизаторе и, следовательно, передаваемой на основание, с амплитудным значением внешней силы  $F_0$ .

Отношение амплитудного значения силы  $R_0$  к амплитудному значению внешней силы  $F_0$  называется коэффициентом виброизоляции  $K_R = \frac{R_0}{F_0}$ .

Амплитудное значение силы, развиваемой в упругом амортизаторе, определяется по формуле

$$R_0 = \frac{F_0 \sqrt{c^2 + \varepsilon^2 \omega^2}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{F_0 \sqrt{\omega_0^4 + 4\omega^2 n^2}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}};$$

$$K_R = \frac{R_0}{F_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\omega^2 n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}. \quad (12.8)$$

Используя понятие **относительного коэффициента затухания**  $v = \frac{n}{\omega_0}$ , можно привести выражение  $K_R$  к виду, удобному для анализа:

$$K_R = \sqrt{\frac{1 + 4v^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4v^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (12.9)$$

Из анализа выражения (12.9) видно, что коэффициент виброизоляции  $K_R$  явным образом зависит от соотношения частот (вынужденной и собственной). Для различных соотношений  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  (расстройка) и  $v = \frac{n}{\omega_0}$  построены графики (см. рис. 12.3).

Условие эффективности виброзащиты  $K_R < 1$ : при любом значении  $v$  в диапазоне  $\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$ , причем чем меньше  $v$ , тем она эффективнее. На основании этого можно сделать вывод: виброизоляция эффективна для уменьшения вредного влияния вибраций в широком частном диапазоне.

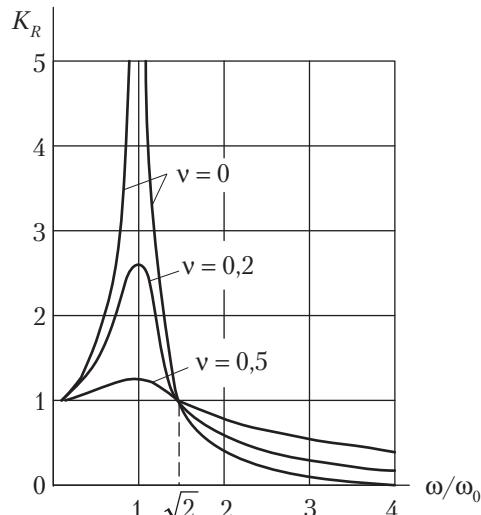


Рис. 12.3

### Кинематическое возбуждение $m \ll M$

Если перед проектировщиком ставится задача защиты объекта, находящегося на вибрирующем основании (рис. 12.4), то в простейшем случае, с учетом сделанных

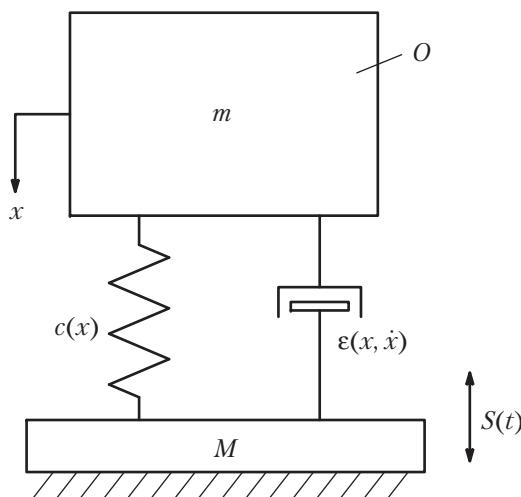


Рис. 12.4

выше предположений, данная задача сводится к анализу динамической схемы, представленной на рис. 12.1.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебание массы  $m$ , может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0,$$

где  $S(t)$  — перемещение основания  $M$ .

Данное уравнение можно представить в виде

$$m\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + cx = \varepsilon\dot{s} + cs = F(t). \quad (12.10)$$

Если  $S(t)$  представляет собой монохроматические колебания, то член  $F(t)$ , стоящий в правой части уравнения (12.10), приобретает смысл *гармонической возмущающей силы*. Очевидно, что анализ уравнения (12.10) аналогичен анализу уравнения (12.4), проведенному ранее. Совпадают и вытекающие из этого анализа рекомендации.

### Динамическое гашение колебаний

Динамический гаситель, присоединяемый к объекту, формирует дополнительные динамические воздействия, прикладываемые к объекту в точках присоединения гасителя. Динамическое гашение осуществляется при таком выборе параметров гасителя, при котором эти дополнительные воздействия частично уравновешивают (компенсируют) динамические воздействия, возбуждаемые источником.

Схема простейшего динамического виброгасителя представлена на рис. 12.5.

На массу  $m_1$ , упруго соединенную с основанием, действует приложенная сила  $F(t)$ . Эту силу будем в дальнейшем полагать монохроматической.

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Задача ставится следующим образом: *выяснить возможность снижения амплитуды колебаний массы  $m_1$  за счет введения дополнительной массы  $m_2$ , упруго соединенной с массой  $m_1$ .* С целью упрощения задачи полагаем, что система недиссипативна, т.е. рассеяния энергии в упругих связях не происходит.

Дифференциальные уравнения, описывающие движения масс  $m_1$  и  $m_2$ , могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (x_1 - x_2) &= F_0 \cos \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_1 - x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

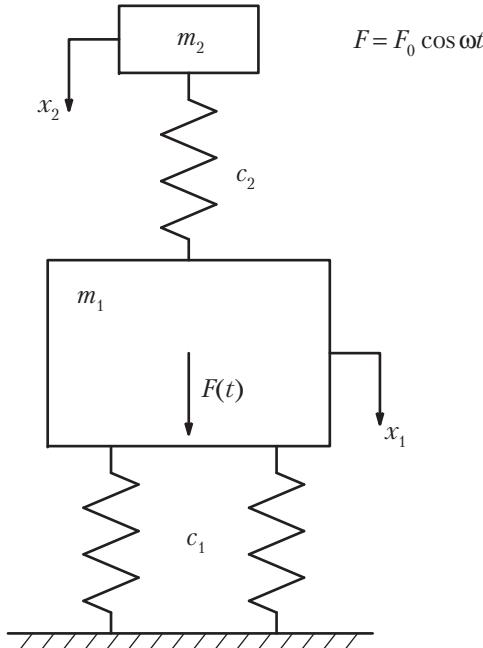


Рис. 12.5

Поскольку система недиссипативна, то колебания отдельных масс либо совпадают по фазе с внешней возмущающей силой, либо находятся с ней в противофазе (сдвиг  $180^\circ$ ).

Частное решение системы (12.11) может быть представлено в виде

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = \theta A \cos \omega t, \quad (12.12)$$

где  $\theta$  — коэффициент распределения амплитуд колебаний.

Величину  $\theta$  определяем, подставив соотношение (12.12) во второе уравнение (12.11):

$$\theta = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega^2}. \quad (12.13)$$

Для искомого периодического решения системы (12.11) справедливо равенство

$$x_2 = \theta x_1. \quad (12.14)$$

Подставляя (12.14) в первое уравнение системы (12.11), получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2(1-\theta))x_1 = F_0 \cos \omega t. \quad (12.15)$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений может быть сведено к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка вида (12.15).

Нетрудно получить

$$A = \frac{F_0}{c_1 + c_2(1-\theta) - m_1 \omega^2} = \frac{F_0(c_2 - m_2 \omega^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \quad (12.16)$$

Знаменатель дроби может обращаться в нуль при изменении параметров системы, т.е.

$$(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2 = 0.$$

Данное уравнение является частным уравнением системы. Это уравнение имеет два корня  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , являющихся частотами собственных колебаний системы. В нуль может обращаться и числитель дроби в правой части соотношения (12.16), т.е.

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0. \quad (12.17)$$

Обозначим эту частоту через  $\omega_A$ . Очевидно,  $\omega_A^2 = \frac{c_2}{m_2}$ .

При выполнении соотношения (12.17) амплитуда  $A$  колебаний массы  $m_1$  обращается в нуль, и, следовательно, масса  $m_1$  становится *неподвижной*. Это явление называется *антирезонансом*, а частота  $\omega_A$ , при которой это происходит, — *частотой антирезонанса*.

Частота антирезонанса совпадает с частотой собственных колебаний массы  $m_2$  при неподвижной массе  $m_1$ . Неподвижность массы  $m_1$  в точке антирезонанса гарантируется только выполнением соотношения (12.17).

Определим амплитуду колебаний массы  $m_2$ . Из соотношения (12.16) и (12.17) получим

$$\theta_A = \frac{F_0 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}.$$

$$\text{При } \omega = \omega_A = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \Rightarrow \theta_A = \frac{-F_0}{c_2}.$$

Очевидно, что если масса  $m_2$  оказывается малой, то при фиксированной  $\omega_A$  жесткость  $c_2$  также мала, большой оказывается амплитуда  $\theta_A$ . Чтобы ее уменьшить, приходится увеличивать массу  $m_2$ .

### Контрольные вопросы к лекциям 10–12

1. В чем состоит задача уравновешивания?
2. Какие виды неуравновешенности механизмов вы знаете? Объясните каждый из них.
3. Сформулируйте условия полного уравновешивания механизмов машины.
4. Что является мерой статической и динамической неуравновешенности?
5. Расскажите о методе замещающих масс при уравновешивании.
6. С какой целью и как устанавливаются корректирующие массы (противовесы)?
7. Как произвести полное статическое уравновешивание шарнирного четырехзвенника, кривошипно-ползунного механизма?
8. Сформулируйте, что такая статическая, моментная и динамическая неуравновешенность ротора.
9. В чем состоят причины дисбаланса вращающихся деталей?
10. На каком принципе работают станки для динамической балансировки?
11. В чем состоит вибрационная защита машин? Какие методы виброзащиты вы знаете?
12. Какой метод виброзащиты называется виброизоляцией? В чем суть этого метода? В каких случаях он эффективен?
13. Что такое динамическое гашение колебаний? В каких случаях оно применяется?

### Лекция 13

#### Основы геометро-кинематического синтеза механизмов с высшими кинематическими парами

В предыдущих лекциях рассматривались задачи синтеза механизмов с низшими парами. Эти пары обеспечивают передачу значительных сил, так как звенья пары обычно соприкасаются по поверхности. Но условие постоянного соприкосновения звеньев по поверхности ограничивает число возможных видов низших пар.

Значительно большие возможности для воспроизведения почти любого закона движения имеют механизмы с высшими кинематическими парами, так как условия касания взаимодействующих поверхностей звеньев высшей пары по линиям и точкам могут быть выполнены бесчисленным множеством различных поверхностей.

Механизмы с высшими кинематическими парами обладают по крайней мере тремя существенными достоинствами в сравнении с механизмами, содержащими только низшие кинематические пары:

во-первых, они могут воспроизводить любой заданный закон движения теоретически точно;

во-вторых, для реализации одного и того же закона движения может быть использован более простой по структуре механизм, содержащий меньшее количество звеньев и кинематических пар;

в-третьих, механизмы с высшими кинематическими парами могут быть менее чувствительными к погрешностям изготовления и монтажа как в отношении точности воспроизведения заданного закона движения, так и в отношении нагружочной способности.

При воспроизведении возвратного движения можно иметь одну пару сопряженных профилей (поверхностей).

Если же требуется воспроизвести непрерывное движение в одном направлении, то надо иметь несколько последовательно взаимодействующих пар сопряженных поверхностей, которые располагаются на выступах, называемых **зубьями**.

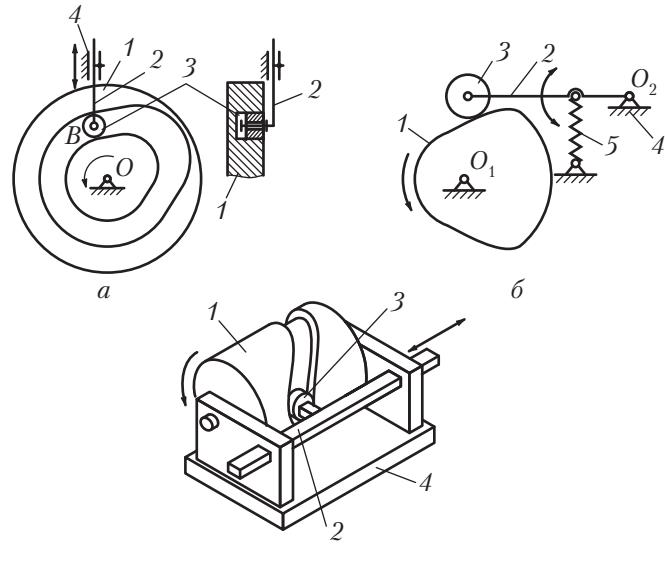


Рис. 13.1

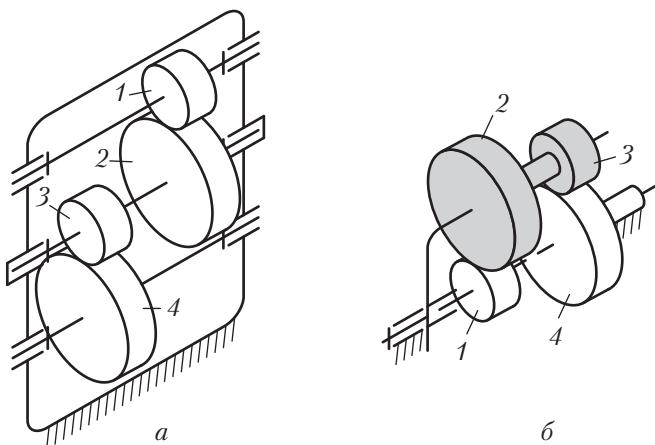


Рис. 13.2

К механизмам с высшими кинематическими парами относятся следующие:

1. Кулачковые механизмы (рис. 13.1).
2. Фрикционные механизмы (в том числе и планетарные) (рис. 13.2).

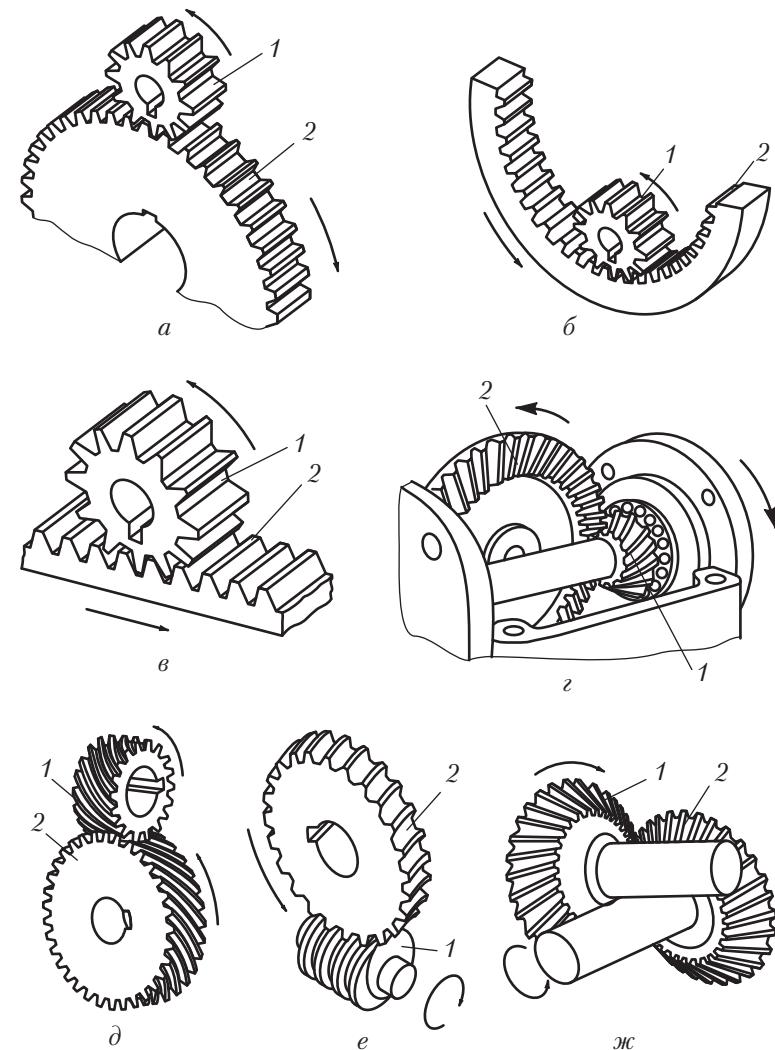


Рис. 13.3

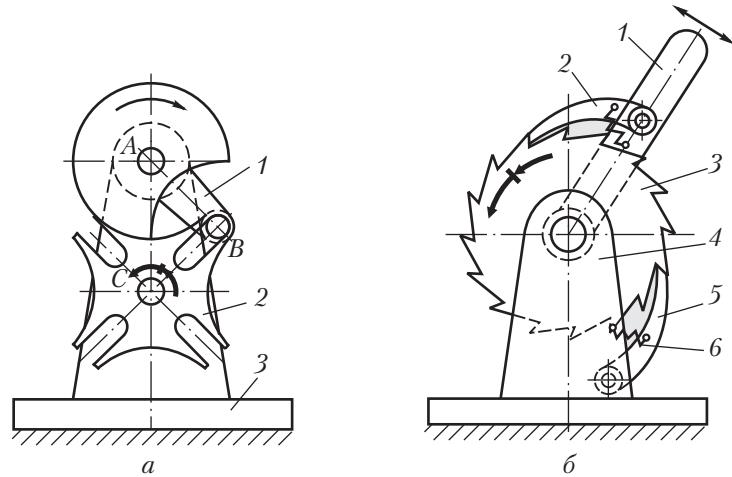


Рис. 13.4

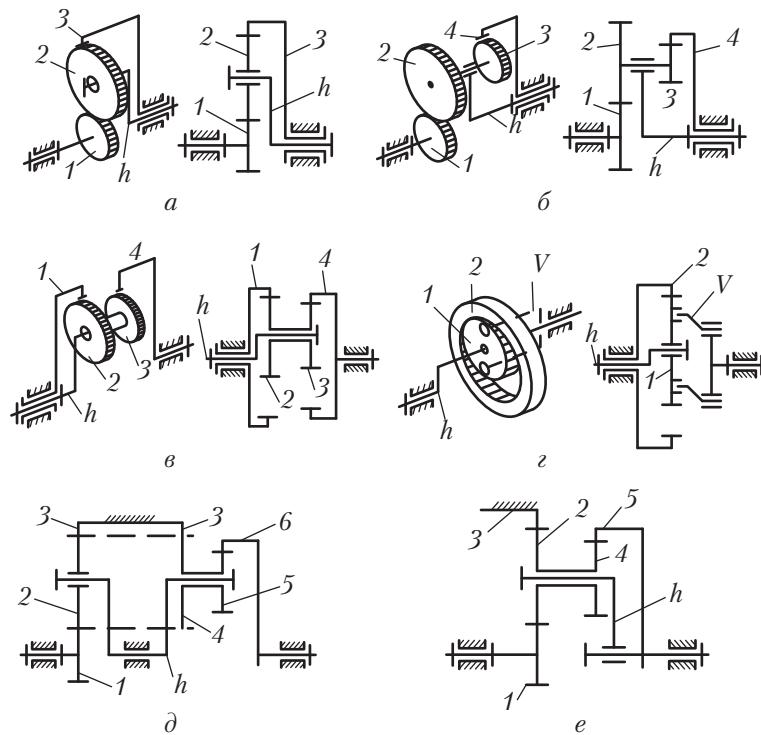


Рис. 13.5

3. Зубчатые передачи с неподвижными осями (рис. 13.3, а – ж).

4. Мальтийские механизмы (рис. 13.4, а) и другие механизмы (рис. 13.4, б) прерывистого действия.

5. Планетарные механизмы, в которых хотя бы одно звено имеет подвижную ось в пространстве (рис. 13.5, а – е).

Синтез зацепления состоит в нахождении сопряженных поверхностей по заданному закону их относительного движения. Для решения этой задачи используется основная теорема зацепления, устанавливающая связь между геометрией профилей (сопряженных поверхностей) и заданным законом их относительного движения.

Взаимодействующие поверхности звеньев высшей пары, обеспечивающие заданный закон их относительного движения, называются **сопряженными поверхностями**.

**Теорема:** *сопряженные поверхности должны быть выбраны так, чтобы в любой точке их контакта общая нормаль к ним была перпендикулярна вектору скорости точки контакта в заданном относительном движении поверхностей.*

В аналитическом виде условие основной теоремы зацепления записывается как условие перпендикулярности векторов:  $\bar{V}_{\text{отн}} \bar{n} = 0$ , где  $\bar{n}$  – орт нормали в точке контакта.

Теорема доказывается «от противного». Если условие теоремы не выполнено, т.е. общая нормаль  $n$  –  $n$  к выбранным поверхностям  $i$  и  $j$  не перпендикулярна относительной скорости  $V_{\text{отн}}$ , то имеется составляющая этой скорости,

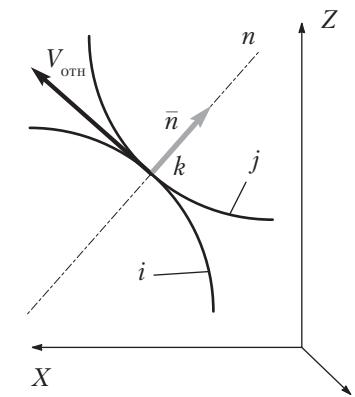


Рис. 13.6

направленная по общей нормали, и, следовательно, происходит либо отрыв одной поверхности от другой, либо вдавливание, что невозможно (рис. 13.6).

В общем случае контакт поверхностей может происходить в нескольких точках и по линиям (линейчатый контакт). При этом условие основной теоремы зацепления должно быть выполнено во всех точках контакта.

Зацепление, в котором оба звена совершают плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости, называется **плоским**. Для плоского зацепления вместо сопряженных поверхностей можно рассматривать **сопряженные профили**, т.е. кривые, получаемые в сечении сопряженных поверхностей плоскостью, параллельной плоскости движения.

Мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев плоского зацепления принято называть **полюсом зацепления**. Относительная скорость точки контакта профилей перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему эту точку с полюсом зацепления.

**Основная теорема плоского зацепления:** общая нормаль в контактной точке сопряженных профилей проходит через полюс зацепления и делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

На рис. 13.7, а показан общий случай взаимодействия двух плоских звеньев с произвольными, но сопряженными профилями. Они должны иметь общую нормаль  $n-n$  и общую касательную  $\tau-\tau$ . Общая нормаль пересекает линию центров в точке  $P$ , называемой **полюсом зацепления**. Точку  $K$  можно рассматривать как две слитные точки  $K_1$  и  $K_2$ , принадлежащие соответственно профилям первого и второго звеньев.

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{k1} = \omega_1 l_{01k}; \\ V_2 &= \bar{V}_{k2} = \bar{V}_{k1} + \bar{V}_{k2k1}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

$\bar{V}_2$  можно определить, используя условие существования высшей кинематической пары.

$$V_1^n = V_2^n = V^n,$$

т.е. равенство проекций скоростей на общую нормаль, обеспечивающее непрерывность контакта. Проецируя  $V_1$  и  $V_2$  на общую касательную, получим:  $V_1^\tau \neq V_2^\tau$ . Это означает, что контакт профилей осуществляется со скольжением.

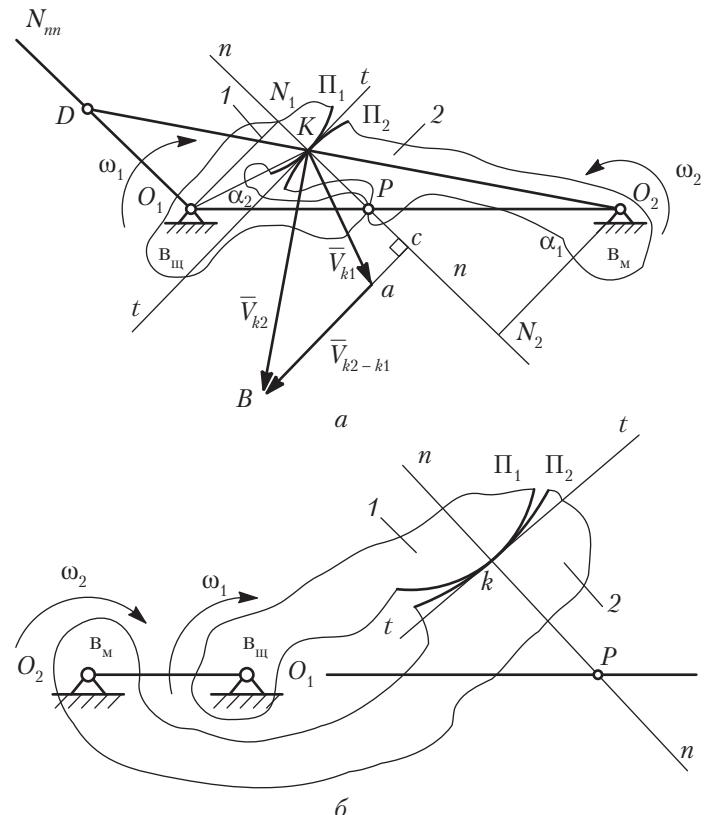


Рис. 13.7

Часть, что контакт профилей осуществляется со скольжением.

$$V_{ck} = V_{21} = V_2^\tau - V_1^\tau. \quad (13.2)$$

Установим связь между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\omega_1 r_1 \cos \alpha_1 = \omega_2 r_2 \cos \alpha_2; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1}. \quad (13.3)$$

Из подобия треугольников  $\Delta O_1 N_1 P$  и  $\Delta O_2 N_2 P$  имеем

$$\frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 P_2}{O_1 P_1} = \frac{N_2 P_2}{N_1 P_1} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (13.4)$$

Отсюда имеем:  $\frac{O_2 P}{O_1 P} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$  — эта зависимость для внешнегого зацепления.

У внутреннего зацепления (рис. 13.7, б) направления  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаковы, поэтому зависимость (13.4) имеет вид:  $\frac{O_2 P}{O_1 P} = +\frac{\omega_1}{\omega_2}$ . А в общем виде:

$$\frac{O_2 P}{O_1 P} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (13.5)$$

### Скорость скольжения профиля

Скорость скольжения профилей в высшей кинематической паре равна произведению скорости относительного вращения на расстояние от контактной точки до полюса зацепления:

$$\begin{aligned} V_{K_2 K_1} &= V_{ck} = V_{K_2} - V_{K_1}; \quad V_{ck} = V_{K_2}^\tau - V_{K_1}^\tau; \\ V_{ck} &= \omega_2 l_{KN_2} - \omega_1 l_{KN_1} = \omega_2 (l_{N_2 P} + l_{KP}) - \omega_1 (l_{N_1 P} - l_{KP}); \quad (13.6) \\ V_{ck} &= (\omega_2 + \omega_1) l_{KP}. \end{aligned}$$

Для внутреннего зацепления

$$V_{ck} = l_{KP} (\omega_2 - \omega_1). \quad (13.7)$$

В полюсе зацепления  $l_{KP} = 0$ , следовательно, и скорость скольжения равна нулю  $V_{ck} = 0$ , т.е. *профили перекатываются без скольжения*.

В случае цилиндрических передач рассматривают:

- а) внешнее зацепление  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O_2 P}{O_1 P}$  (рис. 13.8, а);
- б) внутреннее зацепление  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{O_2 P}{O_1 P}$ ,  $V_p = V_{p1} = V_{p2}$  (рис. 13.8, б);
- в) зацепление реечное  $V_{p2} = V_{p1} = \omega_1 r_{w1}$  (рис. 13.8, в).

Ввиду ограниченности объема курса предметом дальнейшего изучения будут прямозубые эвольвентные и косозубые

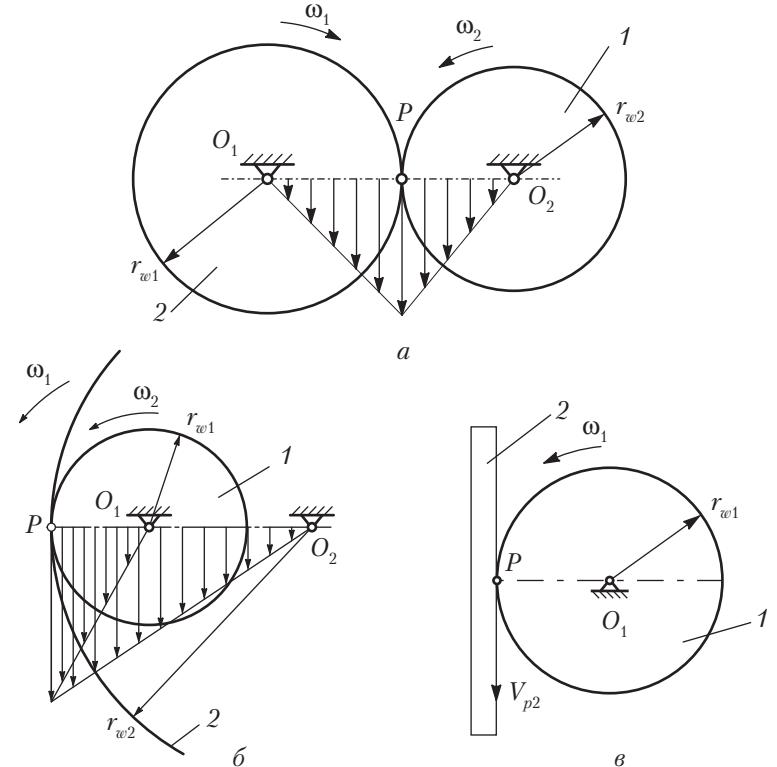


Рис. 13.8

зубчатые передачи, у которых  $u = \text{const}$ . Геометрию таких колес передачи определяет эвольвента окружности.

### Эвольвента окружности, ее свойства и уравнение

**Эвольвентой окружности** называется кривая, описываемая любой точкой прямой линии  $n-n$  при перекатывании ее без скольжения по окружности. При этом прямая линия называется *производящей прямой*, а окружность — *основной окружностью* (рис. 13.9).

Текущий радиус-вектор точки  $K_y$  эвольвенты обозначим через  $r_y$ .

Начальный радиус-вектор этой кривой равен радиусу  $r_b$  основной окружности.

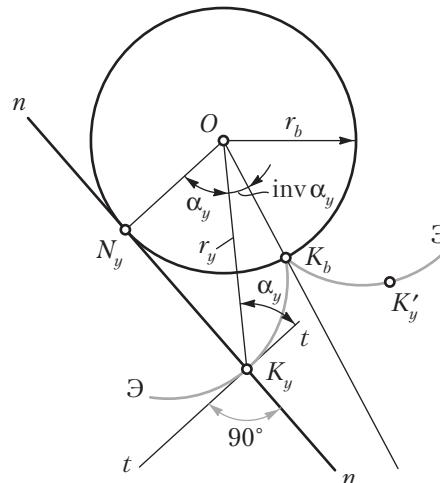


Рис. 13.9

Угол  $\alpha_y$  называется углом профиля.

Угол, образованный начальным радиусом-вектором эвольвенты  $OK_b$  и ее текущим радиусом  $OK_y$ , называется углом развернутости эвольвенты, или **эвольвентным углом**  $\text{inv } \alpha_y$ .

По построению эвольвенты имеем:

$K_b N_y = K_y N_y$ , подставив в это выражение значение дуги и отрезка, получим

$$r_b (\text{inv } \alpha_y + \alpha_y) = r_b \tan \alpha_y - \alpha_y, \text{ откуда } \text{inv } \alpha_y = \tan \alpha_y - \alpha_y. \quad (13.8)$$

Это уравнение выражает функциональную зависимость между углами  $\text{inv } \alpha_y$  и  $\alpha_y$ , измеренными в радианах.

Связь между  $r_y$ ,  $r_b$  и  $\alpha_y$  устанавливается из  $\Delta K_y O N_y$  зависимостью

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}. \quad (13.9)$$

Для геометрической теории зацепления важное значение имеют следующие свойства эвольвенты (см. рис. 13.9):

1) эвольвента — симметричная кривая с двумя ветвями, сходящимися в точке  $K_b$ , которая лежит на основной окружности;

2) эвольвента не имеет точек внутри основной окружности;

3) форма эвольвенты зависит только от радиуса основной окружности; при увеличении радиуса  $r_b$  радиус кривизны эвольвентного профиля постепенно увеличивается, при  $r_b = \infty$  эвольвента преобразуется в прямую;

4) нормаль к любой точке эвольвенты направлена по касательной к основной окружности;

5) центр кривизны эвольвенты лежит в точке касания нормали с основной окружностью.

### Эвольвентное зацепление

Пусть профиль зуба звена 1 очерчен по эвольвенте основной окружности радиуса  $r_{b1}$ , а профиль зуба звена 2 — по эвольвенте окружности радиуса  $r_{b2}$ . Центры вращения этих окружностей —  $O_1$  и  $O_2$ . Приведем в соприкосновение эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  в точке  $K$  (рис. 13.10, а).

Нормаль к  $\mathcal{E}_1$  является касательной к окружности радиусом  $r_{b1}$ , нормаль к  $\mathcal{E}_2$  — касательной к окружности радиусом  $r_{b2}$ . Так как в точке  $K$  эвольвенты касаются друг друга, то и линии  $N_1 K$  и  $N_2 K$ , а следовательно и  $N_1 N_2$  являются общей нормалью к эвольвентам  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , так как профили являются сопряженными.

Рассматривая новое положение эвольвент  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , приходим к аналогичному выводу.

Таким образом, линию  $N_1 N_2$  можно рассматривать как геометрическое место точек касания сопряженных профилей. В процессе зацепления, т.е. смены точек контакта, прямая  $N_1 N_2$  не меняет своего положения. Этим доказывается **первое** существенное свойство **эвольвентного зацепления**.

1. Эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточного отношения в процессе зацепления:

$$u_{21} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{O_2 P}{O_1 P} = \text{const.}$$

Точка пересечения общей нормали к эквивалентам с межосевой линией (полюс зацепления  $P$ ) занимает неизменное положение.

Центроиды в относительном движении звеньев представляют собой окружности. Эти окружности называются **поллоидными**, а для плоского зацепления — **начальными**.

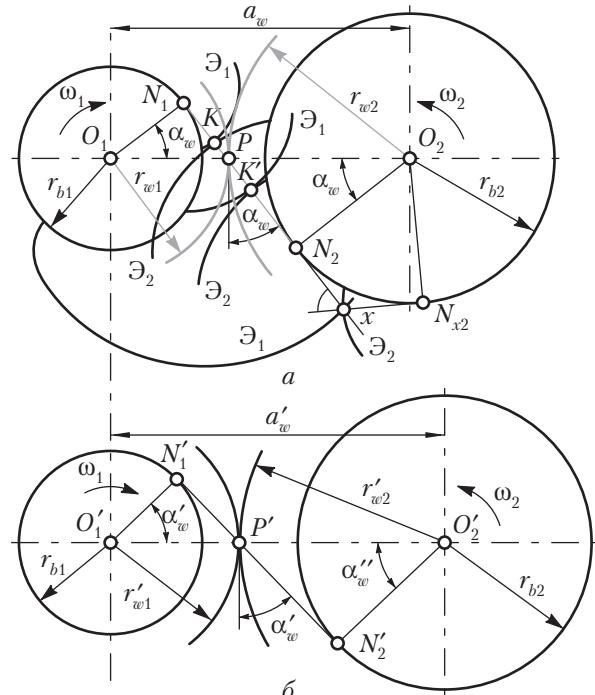


Рис. 13.10

По свойству центроид начальные окружности с радиусами  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  перекатываются без скольжения.

$$u_{21} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

Угол  $\alpha_w$  — угол между **линией зацепления** и прямой, перпендикулярной межосевой линии, называется **углом зацепления**.

$$r_{b1} = r_{w1} \cos \alpha_w; \quad r_{b2} = r_{w2} \cos \alpha_w;$$

$$r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w}; \quad r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w};$$

$$u_{21} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \pm \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

2. Из этих формул и рис. 13.10, б очевидно, что изменение межосевого расстояния  $a_w = r_{w1} + r_{w2}$  не влияет на величину передаточного отношения вследствие неизменности размеров основных окружностей.

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{O_2 P}{O_1 P} = - \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = - \frac{r_{b1} \cos \alpha_w}{r_{b2} \cos \alpha_w} = - \frac{r_{b2}}{r_{b1}};$$

$$u'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{O'_2 P'}{O'_1 P'} = - \frac{r'_{w2}}{r'_{w1}} = - \frac{r_{b1} \cos \alpha'_w}{r_{b2} \cos \alpha'_w} = - \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

3. При внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряженными только в пределах линии зацепления  $N_1 N_2$ .

Эвольвенты  $E_1$  и  $E_2$ , проходящие через точку  $x$ , расположенную вне участка  $N_1 N_2$  ниже точки  $N_2$  (см. рис. 13.10, а), не имеют общей нормали. Это означает, что эвольвенты в точке  $x$  не касаются, а пересекаются. То же произойдет выше точки  $N_1$  вне участка линии зацепления  $N_1 N_2$ .

### Контрольные вопросы и задания к лекции 13

- Что называется высшей кинематической парой?
- Назовите известные вам механизмы с высшими кинематическими парами.
- Как записывается условие существования высшей кинематической пары?
- Дайте определение основной теоремы зацепления.
- Дайте определение линии зацепления в эвольвентной передаче.
- Сформулируйте основные свойства эвольвенты.
- Запишите уравнения, описывающие эвольвенту.
- Что называется эвольвентной зубчатой передачей?
- Изменяется ли передаточное отношение в эвольвентной передаче при изменении межосевого расстояния?

## Лекция 14

### Цилиндрические зубчатые передачи

Передача непрерывного вращения от одного вала к другому с заданным передаточным отношением чаще всего осуществляется с помощью зубчатых механизмов. Зубчатые механизмы получили очень широкое применение как в машиностроении, так и в приборостроении благодаря большой надежности и точности в воспроизведении заданного закона движения. Если оси вращения валов параллельны, то применяется цилиндрическая зубчатая передача, аксиомами колес которой являются цилиндры. Такая передача относится к категории плоских механизмов. В лекциях 14–16 излагаются основы синтеза цилиндрической зубчатой передачи по заданному передаточному отношению. Эти основы называются геометрическим расчетом зубчатой передачи.

#### Элементы зубчатого колеса

Цилиндрические зубчатые передачи, как отмечалось ранее, могут быть *внешнего* и *внутреннего* зацеплений. Следует также указать *реечное* зацепление, разграничительное между внешним и внутренним зацеплениями. Простая зубчатая передача имеет два подвижных звена, которыми являются зубчатые колеса. Рассмотрим элементы зубчатого колеса (рис. 14.1).

Поверхность (1), отделяющая зубья от тела зубчатого колеса, называется *поверхностью впадин зубьев*. Поверхность (2), ограничивающая зубья со стороны, противоположной телу зубчатого колеса, — *поверхность вершин зубьев*. Пространство между двумя соседними зубьями (3) — *впадина*. Поверхность, ограничивающая зуб со стороны впадины (4), называется *боковой поверхностью зуба*.

Боковая поверхность состоит из *главной* (5) и *переходной* (6) поверхностей. Главная поверхность — это та часть

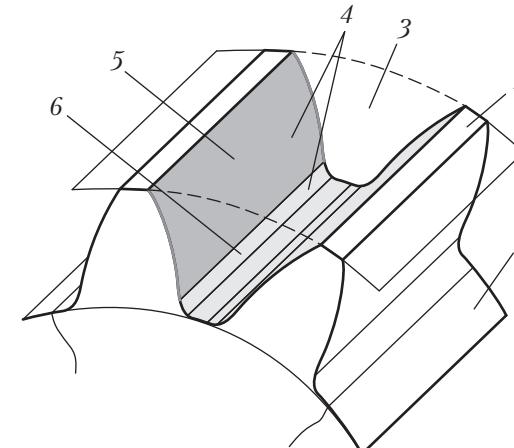


Рис. 14.1

боковой поверхности зуба, которая, взаимодействуя с главной поверхностью другого зуба, обеспечивает заданное передаточное отношение. Переходная поверхность соединяет главную поверхность с поверхностью впадин.

Главной поверхностью чаще всего является *эвольвентная* поверхность, так как среди цилиндрических передач особое распространение получили эвольвентные цилиндрические передачи. Объясняется это тем, что они имеют весьма значительные преимущества перед другими передачами. Так, эвольвентные передачи допускают, в определенных пределах, изменение межосевого расстояния, сохраняя при этом постоянство передаточного отношения, чего другие передачи не допускают, и обладают хорошими эксплуатационными качествами. Изготовление эвольвентных колес и инструмента для их нарезания является наиболее простым, что имеет очень важное практическое значение.

Рассмотрим образование эвольвентных поверхностей, которые будут являться главными поверхностями прямого и косого зубьев. На рис. 14.2, а в изометрии показана главная поверхность прямого зуба, которую можно представить как совокупность совершенно одинаковых эвольвент ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$ ), расположенных в плоскостях, перпендикулярных осям колеса. Эти эвольвенты являются траекториями точек образующей прямой  $KK'$ , принадлежащей плоскости  $N$ , которая перекатывается по основному цилиндуру 1 без скольжения.

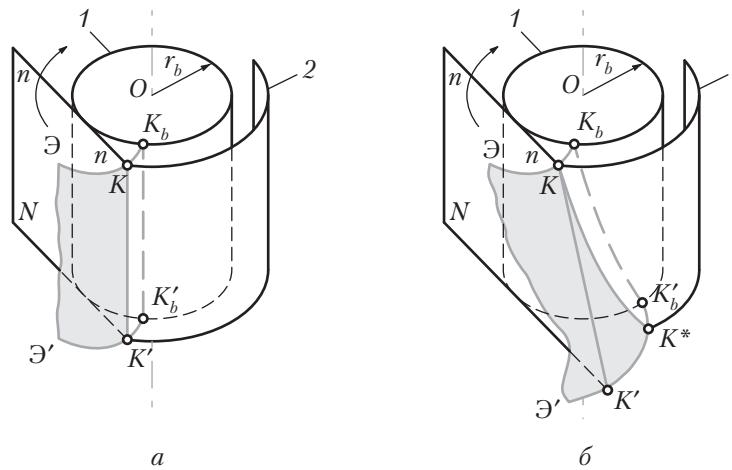


Рис. 14.2

Начальные точки всех эвольвент располагаются на образующей  $K_b K'_b$  основного цилиндра. Пересечение главной поверхности прямого зуба с любым соосным цилиндром 2 происходит по образующей этого цилиндра (например, прямая  $KK'$ ). Эта прямая параллельна оси колеса и называется линией прямого зуба. Главная поверхность прямого зуба является эвольвентной линейчатой цилиндрической поверхностью.

Главная поверхность косого зуба (рис. 14.2, б) также может быть представлена как совокупность одинаковых эвольвент ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$ ), расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси колеса; однако в этом случае образующая прямая  $KK'$  расположена на плоскости  $N$  под некоторым углом к оси колеса. Благодаря этому при перекатывании плоскости  $N$  по основному цилинду 1 без скольжения начальные точки эвольвент располагаются по винтовой линии  $K_b K'_b$  на основном цилиндре. В пересечении с любым соосным цилиндром 2 главная поверхность косого зуба образует винтовую линию  $KK^*$ , называемую линией косого зуба. Главная поверхность косого зуба является эвольвентной линейчатой винтовой поверхностью.

Таким образом, основное сходство главных поверхностей прямого и косого зубьев состоит в том, что в любом торцевом сечении, т.е. в сечении плоскостью, перпендикулярной оси колеса, они имеют эвольвенту.

На рис. 14.3, а изображено зубчатое колесо с внешними зубьями. Наибольший радиус  $r_a$  имеет окружность вершин. На рис. 14.3, б изображено зубчатое колесо с внутренними зубьями. В этом случае тело колеса имеет форму кольца, внутрь полости которого зубья обращены своими вершинами. Поэтому радиус  $r_a$  окружности вершин внутренних зубьев меньше радиуса  $r_f$  окружности впадин, который является, таким образом, наибольшим. На рис. 14.3, а, б изображены также эвольвентный профиль зуба, основная окружность, на базе которой он построен (радиус  $r_b$ ), а также делительная окружность радиуса  $r$  и окружность произвольного радиуса  $r_y$ .

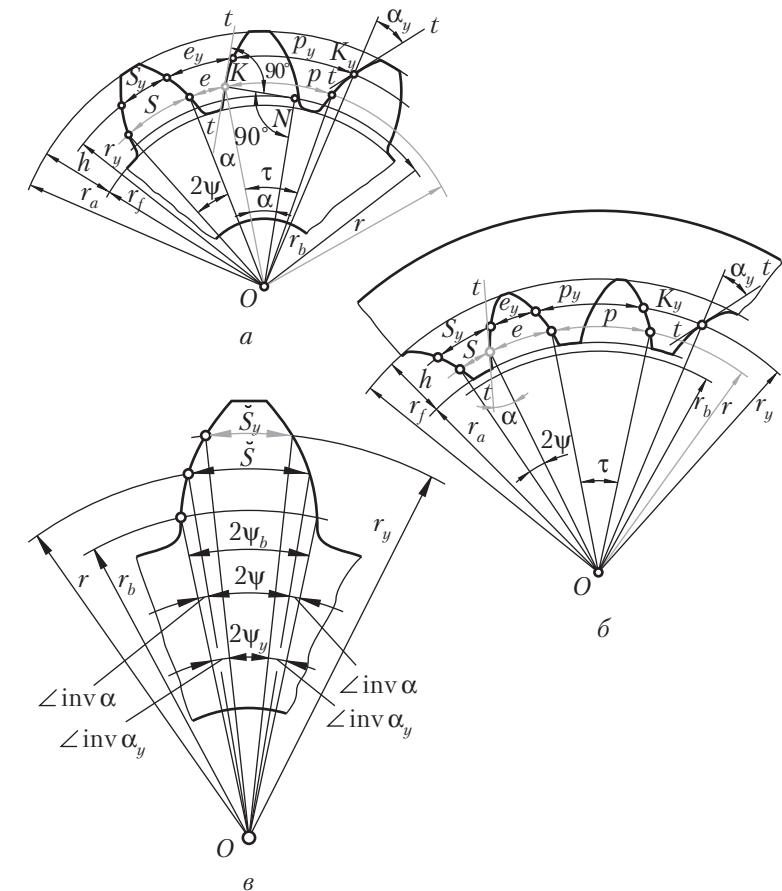


Рис. 14.3

На рис. 14.3, а буквой  $\alpha$  обозначен  $\angle KON$ , равный углу профиля зуба в точке  $K$ , находящейся на делительной окружности прямозубого колеса. Этот угол стандартизован и равен  $20^\circ$ . Таким образом, делительная окружность прямозубого колеса является той окружностью, которая пересекает профиль зуба в точке, для которой угол профиля равен стандартному углу  $\alpha = 20^\circ$ .

Если длину окружностей — делительной, основной и произвольного радиуса — поделить на число зубьев  $z$ , то получим расстояния между профилями двух соседних зубьев, называемые шагом, т.е. получим шаг по делительной окружности  $p$ , шаг по основной окружности  $p_b$  и шаг по окружности произвольного радиуса  $p_y$ . Дуги  $p$ ,  $p_b$  и  $p_y$  соответствуют одному и тому же угловому шагу  $\tau = p/r = p_b/r_b = p_y/r_y$ . Отсюда следует, что шаги пропорциональны радиусам соответствующих окружностей. Угловой шаг можно выразить и так:  $\tau = 360^\circ/z$ .

Важным элементом колеса является шаг по делительной окружности. Выразим длину делительной окружности через шаг  $p$  и число зубьев колеса  $z$ :  $2\pi r = pz$ . Отсюда диаметр делительной окружности  $d = (p/\pi)z = mz$ . Отношение  $p/\pi$  обозначают буквой  $m$  и называют модулем зубьев колеса (единица модуля — мм). Модуль стандартизован, причем стандарт предусматривает целый ряд значений модуля. Через модуль выражают радиус делительной окружности и все линейные размеры как колеса, так и передачи:

$$r = mz/2; \quad (14.1)$$

$$p = \pi m. \quad (14.2)$$

Радиус основной окружности находится из  $\Delta KON$  (см. рис. 14.3, а):

$$r_b = r \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha. \quad (14.3)$$

Радиус произвольной окружности колеса выражается следующим образом:

$$r_y = \frac{r \cos \alpha}{\cos \alpha_y} = \frac{mz}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_y}. \quad (14.4)$$

Так как шаги пропорциональны радиусам, то шаг по основной окружности

$$p_b = p \cos \alpha = \pi m \cos \alpha,$$

а шаг по окружности произвольного радиуса

$$p_y = \frac{p \cos \alpha}{\cos \alpha_y} = pm \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_y}. \quad (14.5)$$

Основными параметрами колес являются модуль  $m$  и число зубьев  $z$ . Размеры делительных окружностей характеризуют размеры колес и передачи. Поскольку модуль определяется из прочностного расчета, а число зубьев назначает конструктор, то для уменьшения габаритов зубчатой передачи надо уменьшать число зубьев ее колес (см. уравнение (14.1)).

Для колес с внутренними зубьями радиусы основной и делительной окружностей и шаги по этим окружностям определяют по тем же формулам, что и для колеса с внешними зубьями.

Шаг зубьев колеса по любой окружности можно представить как сумму толщины зуба  $s_y$  и ширины впадины  $e_y$ , т.е.

$$p_y = s_y + e_y;$$

$$p = s + e = \pi m.$$

Колеса одного и того же модуля, имеющие одно и то же число зубьев, могут отличаться друг от друга толщиной зуба по делительной окружности.

Различают:

1) колеса с равноделенным шагом, у которых по делительной окружности толщина зуба равна ширине впадины, и, следовательно, половине шага,

$$s = e = \pi m/2;$$

2) колеса, у которых  $s > e$ , т.е.  $s > \pi m/2$ ;

3) колеса, у которых  $s < e$ , т.е.  $s < \pi m/2$ .

На рис. 14.3, в изображены центральные углы  $2\psi$  и  $2\psi_y$ , соответствующие дуговым толщинам зуба  $s$  и  $s_y$ , а также эвольвентные углы  $\text{inv } \alpha$  и  $\text{inv } \alpha_y$ . Из рисунка следует:

$$\Psi_b = \psi + \text{inv } \alpha = \psi_y + \text{inv } \alpha_y,$$

отсюда

$$\Psi_y = \psi + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_y.$$

Выражая угловые толщины через линейные  $\Psi_y = s_y/(2r_y)$  и  $\psi = s/(2r)$  и подставляя их значения в уравнение, ранее

составленное для  $\Psi_y$ , получим формулу для определения толщины внешнего зуба:

$$s_y = r_y (s/r + 2\operatorname{inv} \alpha - 2\operatorname{inv} \alpha_y). \quad (14.6)$$

Аналогично составляется формула для определения толщины  $s_y$  внутреннего зуба:

$$s_y = r_y (s/r - 2\operatorname{inv} \alpha + 2\operatorname{inv} \alpha_y).$$

Если безгранично увеличивать число зубьев колеса, а следовательно, и радиусы всех окружностей, то в пределе при  $z = \infty$  все окружности преобразуются в параллельные прямые, а эвольвентный профиль зуба станет *прямолинейным*, что имеет очень важное практическое значение. При  $z = \infty$  получим зубчатую рейку (рис. 14.4). В любом месте прямолинейной части зуба рейки профильный угол будет одним и тем же, равным  $\alpha$ .

Прямая  $UU$ , по которой толщина зуба рейки в точности равна ширине впадины, т.е. равна половине шага, называется делительной прямой. Шаг зубьев рейки, измеренный по любой прямой, параллельной делительной, имеет одинаковое значение  $p = \pi m$ . Шаг рейки, замеренный по нормали  $n-n$  к ее профилю, равен  $\pi m \cos \alpha$ , т.е. равен шагу  $p_b$  по основной окружности колеса, модуль которого такой же, как и модуль рейки.

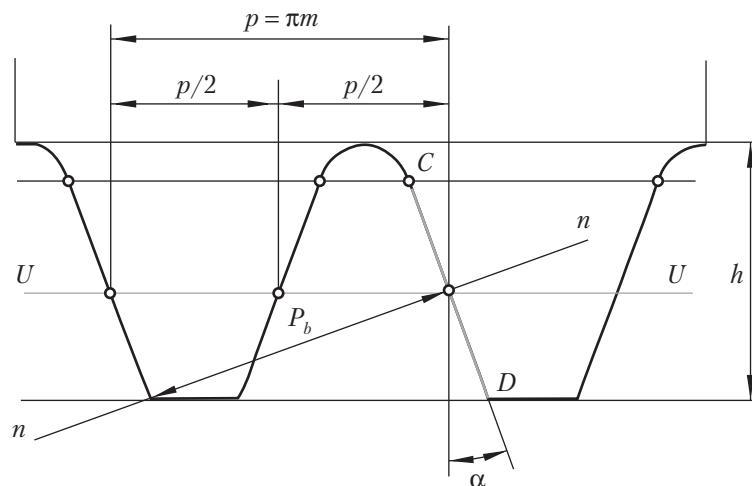


Рис. 14.4

## Основные положения станочного зацепления. Реечное станочное зацепление

**Способы изготовления зубчатых колес.** В настоящее время зубчатые колеса изготавливают способами *копирования* и *огибания*.

По первому способу изготавливают зубчатые колеса в основном только с равноделенным шагом. При этом большинство их выполняется с заведомой погрешностью. Второй способ — огибания — таких существенных недостатков не имеет: этим способом можно изготавливать самые разнообразные зубчатые колеса и притом теоретически точно. Поэтому способ огибания нашел распространение и представляет особый интерес.

При способе огибания заготовке, из которой изготавливают зубчатое колесо, и режущему инструменту, имеющему зубчатую форму (червячная фреза, гребенка, долбяк), сообщают на станке такие движения относительно друг друга, которые воспроизводят **процесс зацепления**. Это зацепление называют станочным.

Помимо движений, воспроизводящих процесс зацепления, инструменту сообщается еще технологическое движение резания. При этом режущие кромки инструмента описывают поверхность, называемую производящей. Укажем, что производящая поверхность и изготавливаемая боковая поверхность зуба являются взаимоогибающимися, откуда сам способ и получил свое наименование.

При расчете геометрических параметров элементов высшей кинематической пары учитывают технологические возможности изготовления деталей на формообразующих станках (металлорежущих, прокатных станах, прессах и т.д.). Геометрия соответствующего формообразующего инструмента тесным образом связана с **производящими поверхностями**. Для инструментов, осуществляющих процесс формообразования путем срезания стружки, такой производящей поверхностью является воображаемая поверхность, содержащая режущие кромки инструмента или образуемая при их главном движении, необходимом для резания. Если режущие кромки — прямые, а главное движение — прямолинейное, то производящей поверхностью является плоскость. Если режущие кромки криволинейные, а главное движение — прямолинейное, то производящей

поверхностью является цилиндрическая поверхность (например, эвольвентная поверхность для долбяков).

Зацепление проектируемой поверхности зубьев с производящей поверхностью, по аналогии с зацеплением нарезаемого колеса с производящей поверхностью режущего инструмента, называют **станочным зацеплением**. Этот термин был предложен В.А. Гавриленко — крупным ученым, обобщившим и развившим основные положения теории зацепления эвольвентных передач. Сущность станочного зацепления заключается в том, что производящая поверхность (поверхность режущих кромок инструмента) и проектируемая поверхность зуба («нарезаемого» колеса) имеют такое же относительное движение, какое имели бы зубчатые колеса при зацеплении друг с другом при взаимодействии аксоидных поверхностей.

При нарезании цилиндрических зубчатых колес оси производящего колеса (т.е. воображаемого зубчатого колеса, у которого боковые поверхности являются производящими поверхностями) и проектируемого («нарезаемого») колеса параллельны между собой и аксоидами являются цилиндры. Частным случаем является инструмент, называемый зуборезной гребенкой (рис. 14.5, а), или пара тарельчатых шлифовальных кругов (рис. 14.5, в). При бесконечно большом радиусе аксоида производящего колеса инструмент должен иметь бесконечно большое число зубьев, т.е. превратиться в рейку. В этом случае инструментом обычно являются червячная фреза (рис. 14.5, б) или абразивный червячный круг (рис. 14.5, г), у которых реечный производящий контур (рис. 14.5, д) расположен на винтовой поверхности. Если производящее колесо имеет конечное число зубьев, то режущими инструментами являются абразивный хон (рис. 14.5, е), долбяк (рис. 14.5, ж), которыми можно обрабатывать боковые поверхности зубьев колес с различными числами зубьев (рис. 14.5, з). Главным движением резания у долбяка, гребенки и абразивного хона является поступательное движение, а у червячной фрезы и шлифовальных кругов — вращательное движение.

В процессе движения огибания (обкатки) основной шаг инструмента по профильной нормали соответствует основному шагу проектируемого («нарезаемого») колеса. Процесс перехода от формообразования одного зуба к другому в процессе обкатки осуществляется автоматически при непрерывном относительном движении (см. рис. 14.5, д, з).

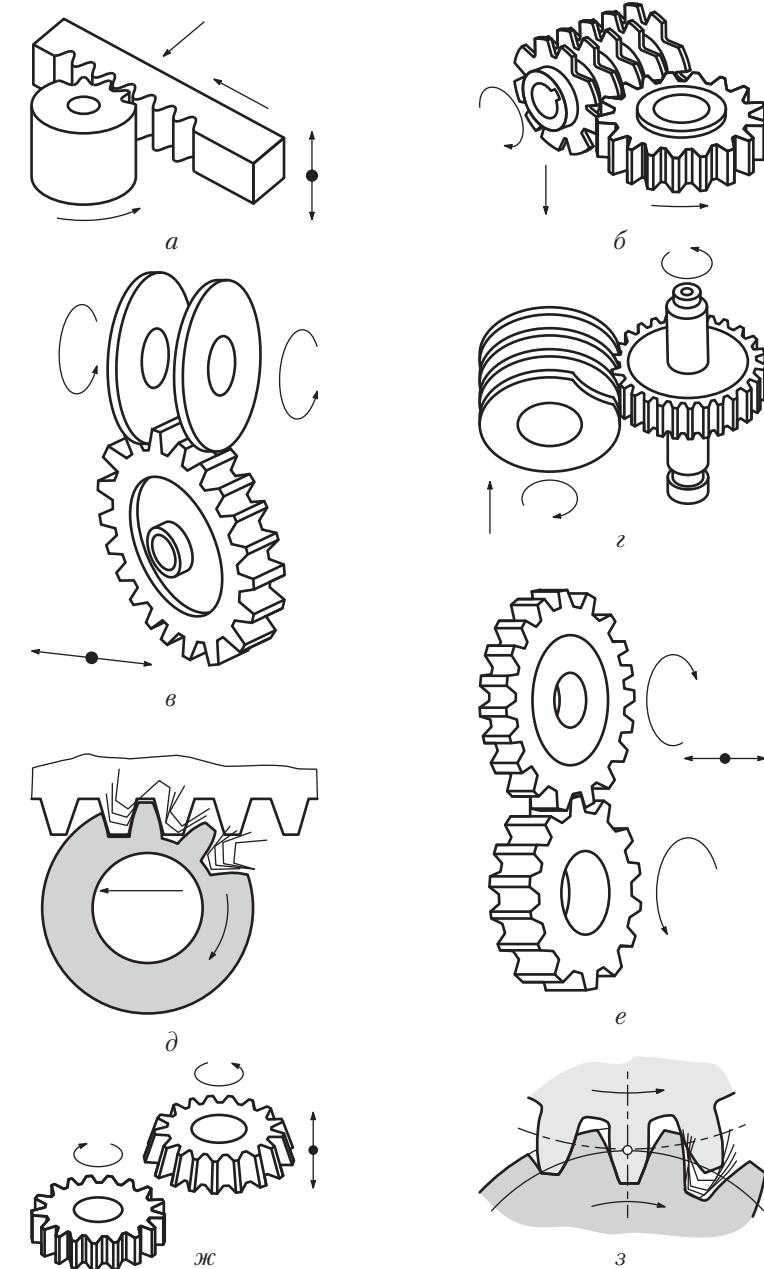


Рис. 14.5

Если производящую поверхность рассечь плоскостью, перпендикулярной оси нарезаемого колеса, то в сечении получим исходный производящий контур (ИПК). Станочное зацепление есть зацепление ИПК с профилем зуба нарезаемого колеса.

Рассмотрим реечное станочное зацепление, т.е. такое, когда ИПК имеет очертания зубчатой рейки. Эвольвентные кромки этого ИПК прямолинейны. Режущий инструмент (червячная фреза или гребенка), образующий своим главным движением эвольвентный реечный ИПК, обладает очень ценным свойством: его можно изготовить сравнительно дешево и точно. Геометрия зубьев нарезаемого колеса определяется параметрами ИПК реечного инструмента и его расположением по отношению к колесу.

**Исходный производящий контур эвольвентного реечного инструмента.** Форма и размеры ИПК стандартизованы. Эвольвентные части профиля зубьев ИПК (рис. 14.6, а) прямолинейны и наклонены к оси зуба под углом  $\alpha$ . Переходы от прямолинейной части зуба к основанию впадины и к вершине осуществлены по дуге радиусом  $p_0 = p_f$ . Точки сопряжения отмечены на ИПК буквами  $A, C, D, E$ . Прямолинейная часть  $CD$  является эвольвентной, а скругления  $AC$  и  $DE$  – неэвольвентной частью контура. Прямая, разделяющая зуб по высоте на две равные части, называется делительной. На ИПК отмечаются еще четыре линии, параллельные делительной прямой и проходящие по основаниям впадин зубьев, по их вершинам и через точки сопряжения  $C$  и  $D$ . Расстояния между этими прямыми выражают размеры зуба исходного производящего контура по высоте и измеряются соответственно величинами  $h_a^* = h_a m$  и  $C = c^* m$ , где  $h_a^*$  – коэффициент высоты зуба;  $c^*$  – коэффициент радиального зазора. Согласно стандарту  $h_a^* = 1,0$ ;  $c^* = 0,25$ . Прямые, проходящие через точки  $C$  и  $D$ , называются прямыми граничных точек.

Размерами вдоль делительной прямой являются шаг, толщина зуба и ширина впадины. Шаг  $p$  исходного производящего контура, измеренный по любой прямой, параллельной делительной, есть величина постоянная, равная  $\pi m$ , где  $m$  – стандартный модуль. Толщина зуба ИПК по делительной прямой равна ширине впадины  $s_0 = e_0 = \pi m / 2$ , а вместе они составляют шаг. Угол

профиля зуба стандартизован:  $\alpha = 20^\circ$ . Радиус скругления (дуги  $DE$ )

$$p_f = \frac{c^* m}{1 - \sin \alpha} \approx 0,4m. \quad (14.7)$$

Таким образом, ИПК реечного инструмента характеризуется четырьмя стандартными параметрами:  $m, \alpha, h_a^*, c^*$ .

**Реечное станочное зацепление и коэффициент смещения.** Реечное станочное зацепление, как и всякое зацепление, имеет начальные линии. Ими являются станочно-начальная прямая рейки и станочно-начальная окружность колеса, которые катятся друг по другу без скольжения. Можно показать, что в реечном станочном зацеплении радиус  $r_{w0}$  станочно-начальной окружности равен радиусу делительной окружности  $r$ .

Угол реечного станочного зацепления  $\alpha_{w0}$  равен профильному углу  $\alpha$  исходного производящего контура (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Отметим также, что угол профиля зуба колеса в точке, находящейся на делительной окружности, равен профильному углу  $\alpha$  исходного производящего контура.

На станке инструмент можно расположить по-разному относительно нарезаемого колеса. Поэтому в станочном зацеплении делительная прямая ИПК может располагаться различным образом по отношению к делительной окружности колеса: 1) может касаться делительной окружности – нулевая установка инструмента; 2) быть отодвинутой от нее – положительная установка; 3) пересекать ее – отрицательная установка.

Расстояние между делительной прямой и делительной окружностью называется **смещением инструмента**. Его выражают в виде произведения модуля  $m$  на коэффициент смещения  $x$  и ему присваивают знак. При нулевой установке смещение  $mx = 0, x = 0$ . При положительной установке  $mx > 0, x > 0$ . При отрицательной установке смещением является стрелка сегмента, которую делительная прямая отсекает от делительной окружности; в этом случае  $mx < 0, x < 0$ .

На рис. 14.6, а изображено реечное станочное зацепление при нарезании зубчатого колеса с положительным смещением и указаны все элементы производящего исходного контура, нарезаемого колеса и станочного зацепления.

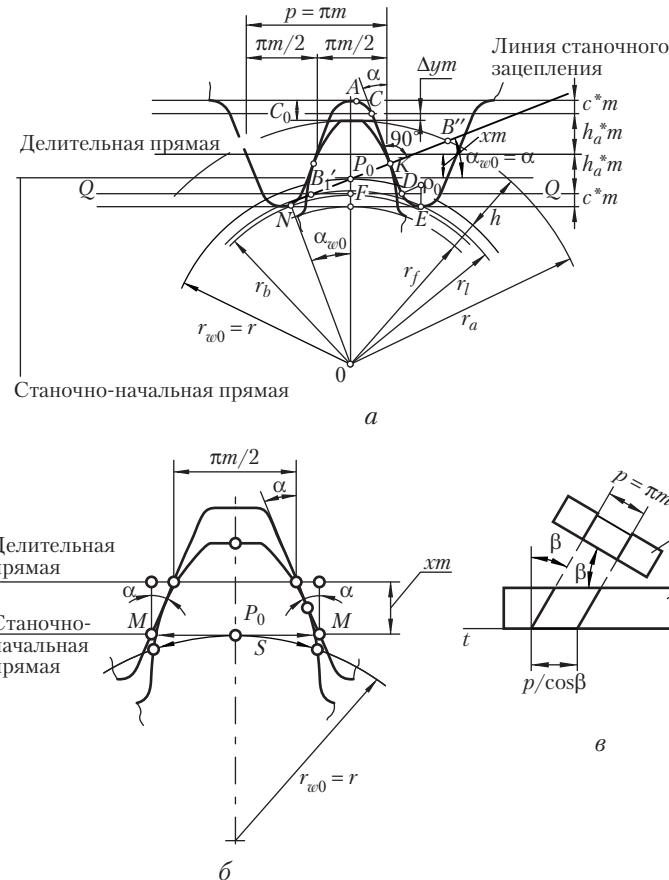


Рис. 14.6

Линия реечного станочного зацепления начинается в точке  $N$  и через полюс  $P_0$  уходит в бесконечность. Длина ее активной части ограничена точками  $B'_1$  и  $B''$ , находящимися на пересечении линии станочного зацепления с прямой  $QQ$  граничных точек и окружностью вершин (см. рис. 14.6, а).

Профиль зуба колеса имеет эвольвентную и неэвольвентную части. Переход эвольвентного профиля в неэвольвентный находится на окружности граничных точек колеса, радиус которой  $r_l = OB'_1$ .

Расстояние между окружностью вершин зубьев колеса и прямой впадин ИПК представляет собой станочный зазор

$C_0$ . Величина его складывается из двух частей:  $c^*m$ ,  $\Delta y m$ , где  $\Delta y$  — коэффициент уравнительного смещения.

**Размеры изготавляемого зубчатого колеса с внешними зубьями.** Диаметр вершин прямозубого колеса (см. рис. 14.6, а)

$$d_a = 2r_a = m(z + 2h_a^* + 2x - 2\Delta y). \quad (14.8)$$

Высота зуба из того же рисунка

$$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y). \quad (14.9)$$

Если  $x = 0$  (смещения инструмента нет) и  $\Delta y = 0$ , то  $d_a = m(z + 2h_a^*)$ ,  $h = m(2h_a^* + c^*)$ , и при стандартных значениях  $h_a^* = 1,0$  и  $c^* = 0,25$  получим  $d_a = m(z + 2)$  и  $h = 2,25m$ .

Станочно-начальная прямая перекатывается по станочно-начальной окружности (она же делительная) без скольжения. Поэтому толщина зуба  $s$  по делительной окружности нарезаемого колеса равна ширине  $MM$  впадины по станочно-начальной прямой ИПК (рис. 14.6, б).

Отрезок  $MM$  складывается из ширины впадины ИПК по делительной прямой  $e_0 = \pi m/2$  и двух катетов, каждый из которых равен  $xm \operatorname{tg} \alpha$ , поэтому

$$s = \pi m/2 + 2xm \operatorname{tg} \alpha. \quad (14.10)$$

Если инструмент установлен относительно колеса без смещения ( $xm = 0$ ), то  $s = \pi m/2$ ; значит, толщина зуба  $s$  по делительной окружности колеса равна ширине впадины  $e$ , так как  $s + e = \pi m$ . В этом случае получается колесо с равноделенным шагом  $s = e$ . Если  $xm > 0$ , то  $s > \pi m/2$  и, следовательно,  $s > e$ . Если  $xm < 0$ , то  $s < \pi m/2$ , и поэтому  $s < e$ .

При нарезании косозубых колес применяется тот же инструмент 1, что для прямозубых, но устанавливается он наклонно под углом  $\beta$  по отношению к торцевой плоскости  $t-t$  колеса (заготовки) (рис. 14.6, в). На этом рисунке показана развертка 2 делительного цилиндра косозубого колеса, в результате чего винтовые линии косого зуба преобразовались в прямые линии. В торцевой плоскости  $t-t$  косозубого колеса вследствие наклона инструмента шаг увеличивается и становится равным  $p/\cos \beta$ , а следовательно, и модуль в торцевой плоскости будет нестандартным, равным  $m/\cos \beta$ . Поэтому при расчете линейных размеров косозубого колеса по формулам, в которые входит стандартный модуль, вместо  $m$  следует подставлять  $m/\cos \beta$ , например делительный диаметр косозубого колеса  $d = zm/\cos \beta$ .

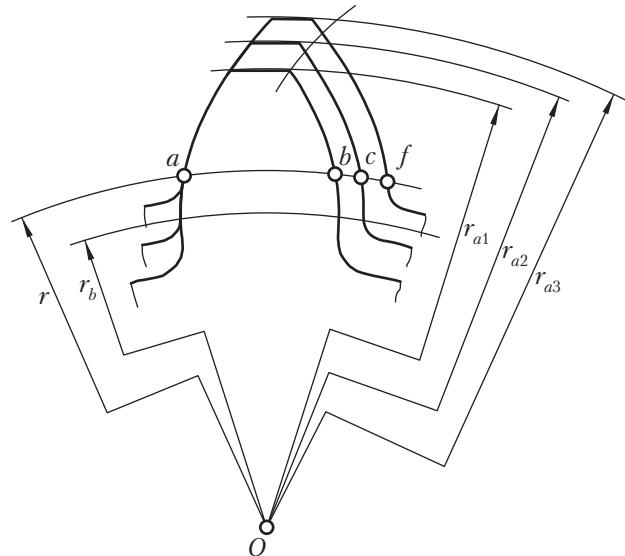


Рис. 14.7

Обратим внимание на размеры  $h_a^*m$ ,  $c^*m$ ,  $xm$ ,  $\Delta y^*m$ , перпендикулярные делительной прямой (см. рис. 14.6, а), которые принято называть размерами по высоте. На рис. 14.6, в эти размеры расположены перпендикулярно плоскости рисунка. Поэтому при повороте инструмента на угол  $\beta$  размеры по высоте не изменяются. Отсюда следует, что когда в уравнениях встречаются произведения  $h_a^*m$ ,  $c^*m$ ,  $xm$ ,  $\Delta y^*m$ , то их при расчете косозубой передачи можно подставлять в эти уравнения без всякого пересчета сомножителей. Так, например, формула диаметра вершин косозубого колеса может быть записана следующим образом:  $d_a = d + 2(h_a^*m + xm - \Delta y^*m)$ .

Угол профиля исходного производящего контура при нарезании косозубого колеса увеличивается по сравнению со стандартной величиной  $\alpha = 20^\circ$ , поскольку размеры по высоте не изменяются, а шаг в торцевом сечении увеличивается. Расчетный угол профиля  $\alpha_t$  исходного производящего контура при нарезании косозубых колес определяют по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}.$$

На рис. 14.7 сравниваются профили зубьев трех колес, имеющих одинаковые числа зубьев, нарезанных одним и тем же инструментом, но с различными смещениями:  $x_1 < x_2 < x_3$ . Колеса имеют одинаковые радиусы делительных и основных окружностей; следовательно, профили зубьев всех трех колес очерчены по одной и той же эвольвенте. Но толщины зубьев  $s_1$  (дуга  $ab$ ),  $s_2$  (дуга  $ac$ ),  $s_3$  (дуга  $af$ ) и радиусы окружностей вершин  $r_{a1}$ ,  $r_{a2}$ ,  $r_{a3}$  у колес будут разные. По мере увеличения  $x$  толщина зуба у основания увеличивается, а у вершины уменьшается, т.е. коэффициент смещения существенно влияет на форму зуба. Следовательно, назначая при проектировании тот или иной коэффициент смещения, можно влиять на форму зубьев колес и на качество зубчатой передачи, наделяя ее желательными свойствами.

#### Контрольные вопросы к лекции 14

1. Что называют зубчатым колесом?
2. Расскажите об основных элементах зубчатого колеса.
3. Запишите формулы окружного и углового шагов эвольвентного зубчатого колеса.
4. Какие методы изготовления зубчатых колес вы знаете?
5. В чем заключается сущность изготовления эвольвентных колес методом огибания?
6. Дайте определение станочного зацепления.
7. Выведите формулы для определения основных размеров зубчатого колеса ( $r_a$ ,  $s$ ,  $h$ ), используя схему станочного зацепления.

## Лекция 15

### Подрезание и заострение зуба

Согласно свойствам эвольвентного зацепления (см. лекцию 14) прямолинейная, т.е. эвольвентная, часть ИПК и эвольвентная часть профиля зуба колеса располагаются касательно друг к другу только на линии станочного зацепления, начинающейся в точке  $N$ . Левее этой точки прямолинейный участок ИПК не касается эвольвентного профиля зуба колеса, а пересекает его. Так как ИПК физически представляет собой тот след, который режущая кромка инструмента оставляет на материале изготавливаемого колеса, то указанное пересечение приводит к подрезанию зуба колеса у его основания (рис. 15.1). Подрезание уменьшает

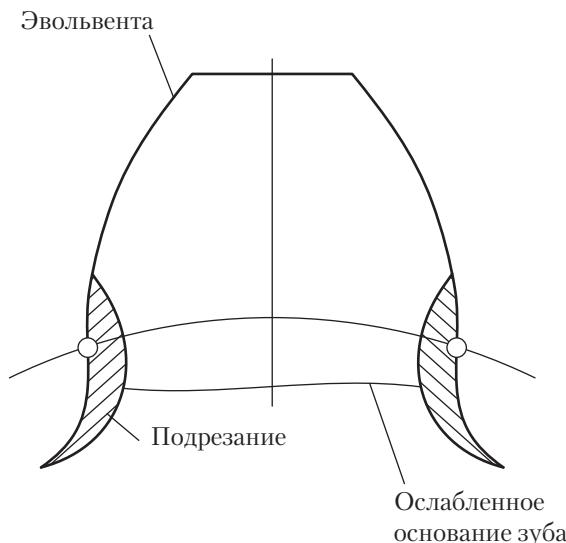


Рис. 15.1

эвольвентную часть профиля зуба колеса и *ослабляет* зуб в его опасном сечении.

Подрезание не происходит, когда граница  $B'_l$  активной части линии станочного зацепления располагается правее точки  $N$  (см. рис. 14.6, *a*), т.е. когда выполняется условие

$$P_0 N \geq P_0 B'_l. \quad (15.1)$$

Используя условие (15.1), определим минимальное число зубьев колеса, при котором они не будут подрезаны. Из  $\Delta P_0 ON$  (см. рис. 14.6, *a*) следует, что  $P_0 N = P_0 O \cdot \sin \alpha$ , а из  $\Delta P_0 FB'_l$ , — что  $P_0 B'_l = P_0 F / \sin \alpha$ .

Подставляя величины  $P_0 N$  и  $P_0 B'_l$  в условие (15.1) и решая относительно  $z$ , имеем

$$z \geq 2(h_a^* - x) / \sin^2 \alpha. \quad (15.2)$$

Если  $x = 0$ , то из этого выражения получается минимальное число зубьев колеса без смещения, которые не будут подрезаны реенным инструментом:

$$z_{\min} = 2h_a^* / \sin^2 \alpha. \quad (15.3)$$

При проектировании колес без смещения число зубьев необходимо брать равным или больше  $z_{\min}$ . В случае стандартного инструмента ( $h_a^* = 1,0$ ;  $\alpha = 20^\circ$ )  $z_{\min} \approx 17$ .

Для косозубых колес уравнение (15.3) приобретает вид

$$z_{\min} = 2h_a^* \cos \beta / \sin^2 \alpha.$$

Следовательно, косозубые колеса менее подвержены подрезанию зубьев, поскольку  $\alpha_t > \alpha$ , а  $\cos \beta < 1$ . В лекции 14 было указано, что для уменьшения габаритов зубчатых передач колеса следует проектировать с малым числом зубьев. Однако при  $z < 17$ , чтобы не произошло подрезания, колеса должны быть изготовлены со смещением инструмента. Выясним, каково же то минимальное смещение, при котором не получается подрезания зубьев. Оно определяется также из выражения (15.1), на основании которого, используя (15.2), можно записать:

$$\frac{z}{2} \sin^2 \alpha \geq h_a^* - x.$$

Подставляя сюда значение  $\sin^2 \alpha$  из (15.3) и решая относительно  $x$ , имеем

$$x \geq \frac{h_a^*(z_{\min} - z)}{z_{\min}}, \quad (15.4)$$

а переходя к минимальному значению  $x_{\min}$ , получим формулу

$$x_{\min} = \frac{h_a^*(z_{\min} - z)}{z_{\min}}. \quad (15.5)$$

Из зависимости (15.5) следует, что зубчатое колесо, имеющее  $z > z_{\min}$ , можно нарезать с положительным, нулевым и даже с отрицательным смещением, поскольку для такого колеса  $x_{\min} < 0$ . Для зубчатого колеса, у которого  $z = z_{\min}$ , можно взять положительное или нулевое смещение, а для колеса, у которого  $z < z_{\min}$ , — только положительное смещение.

Если увеличивать коэффициент смещения, то толщина зуба  $s_a$  у вершины будет уменьшаться. При некотором коэффициенте смещения, называемом максимальным ( $x_{\max}$ ), наступает заострение зуба ( $s_a = 0$ ). Опасность заострения особенно велика у колес с малым числом зубьев (меньше 15).

Для предотвращения излома вершины заостренного зуба коэффициент смещения назначают так, чтобы толщина  $s_a$  была бы не меньше  $0,2m$  ( $s_a > 0,2m$ ). Толщину зуба  $s_a$  при проектировании определяют по уравнению, положив  $r_y = r_a$  и  $\alpha_y = \alpha_a$ ; согласно уравнению (14.2)  $\cos \alpha_a = r_b/r_a$ .

### Эвольвентная зубчатая передача

**Элементы эвольвентной зубчатой передачи.** На рис. 15.2 показаны зубчатая передача внешнего зацепления  $\alpha_w$  (угол зацепления), полюс зацепления  $P$ , межосевое расстояние  $a_w$ , начальные окружности радиусами  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ . Эти элементы были рассмотрены ранее (в лекции 13) при знакомстве со свойствами эвольвентного зацепления.

В точках  $B'$  и  $B''$  линия зацепления пересекается окружностями вершин зубьев колес; в точке  $B'$  сопряженные

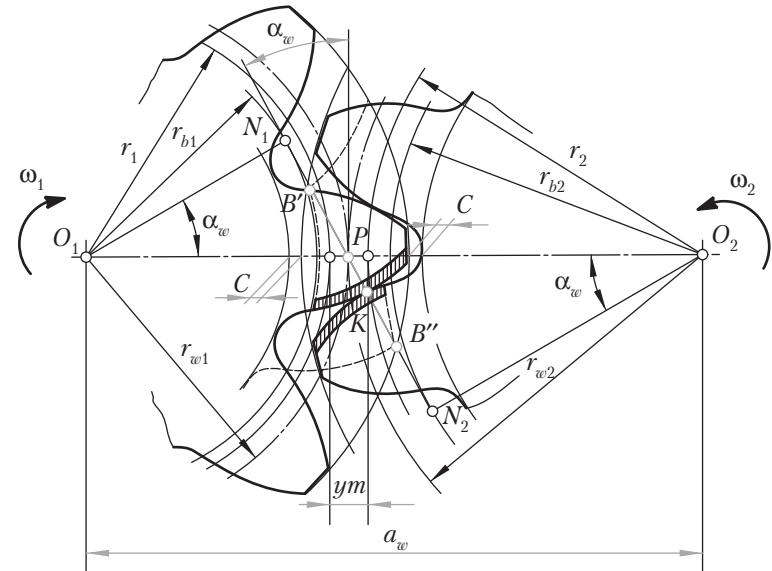


Рис. 15.2

профили входят в зацепление, а в точке  $B''$  выходят из зацепления. Процесс взаимодействия главных поверхностей сопряженных зубьев происходит на участке  $B'B''$  линии зацепления; эта часть линии зацепления называется активной линией зацепления. Зубчатая передача должна быть спроектирована так, чтобы участок  $B'B''$  укладывался в пределах линии зацепления  $N_1N_2$ . Если точки  $B'$  и  $B''$  выйдут за эти пределы, то в зубчатой передаче произойдет заклинивание.

При заданном направлении вращения только одна сторона зуба будет передавать и воспринимать усилие; ее называют рабочей стороной (профилем) зуба. В зацеплении участвуют активные профили зубьев, расположенные на рабочих сторонах зубьев, которые соответствуют активной линии зацепления. На рис. 15.2 активные профили заштрихованы.

Между окружностью вершин одного колеса и окружностью впадин другого имеется расстояние, которое называется радиальным зазором. На рис. 15.2 радиальный зазор отмечен буквой  $C$ , его величина выражается произведением коэффициента  $c^*$  на модуль, т.е.  $C = c^*m$ , где  $c^* = 0,25$ .

## Уравнения эвольвентной зубчатой передачи

При составлении уравнений для определения угла зацепления  $\alpha_w$  и межосевого расстояния  $a_w$  следует иметь в виду, что номинальные значения этих величин подсчитывают при условии, что зубья одного колеса входят во впадины другого плотно, без бокового зазора. Учтя это, а также то, что начальные окружности катятся друг по другу без скольжения, запишем  $s_{w1} = e_{w2}$  и  $s_{w2} = e_{w1}$ , где  $s_{w1}$  и  $s_{w2}$  — толщина зубьев, а  $e_{w1}$  и  $e_{w2}$  — ширина впадин по начальным окружностям колес зубчатой передачи.

Поскольку начальные окружности перекатываются без скольжения, то шаги  $p_{w1}$  и  $p_{w2}$  по этим окружностям равны друг другу:  $p_{w1} = p_{w2} = p_w$ .

Шаг  $p_w = s_{w1} + e_{w1}$ , или, поскольку  $s_{w2} = e_{w1}$ :

$$p_w = s_{w1} + s_{w2}. \quad (15.6)$$

С другой стороны, шаг по начальной окружности

$$p_w = \pi m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}.$$

Учитывая уравнения (14.2), (14.3) и (14.6), выразим толщину зубьев  $s_{w1}$  и  $s_{w2}$  по формуле (14.6) и подставим в (15.6). Проделав несложные преобразования, получим уравнение для определения угла зацепления:

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + 2x_\Sigma \operatorname{tg} \alpha / z_\Sigma, \quad (15.7)$$

где  $x_\Sigma = x_1 + x_2$ ,  $z_\Sigma = z_1 + z_2$ . После подсчета инволюты угла зацепления по уравнению (15.7) сам угол  $\alpha_w$  следует определить по таблице инволютной функции.

Межосевое расстояние зубчатой передачи

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}.$$

Учитывая зависимость (14.4), можно записать

$$r_w = \frac{mz}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

поэтому межосевое расстояние

$$a_w = \frac{mz}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (15.8)$$

Межосевое расстояние может быть выражено также следующим образом (см. рис. 15.2):

$$a_w = r_1 + r_2 + ym, \quad (15.9)$$

где  $ym$  — расстояние между делительными окружностями. Оно называется воспринимаемым смещением, а величина  $y$  — коэффициентом воспринимаемого смещения.

Приравнивая (15.8) и (15.9) и учитывая (14.3), получим формулу для определения коэффициента воспринимаемого смещения:

$$y = \frac{z_\Sigma}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (15.10)$$

При расчете косозубых передач применяют те же формулы, что и при расчете прямозубых, но вместо параметров  $m$  и  $\alpha$  берут  $m/\cos \beta$  и  $\alpha_t$ , а произведения  $x_\Sigma \operatorname{tg} \alpha$  и  $ym$  сохраняют без изменения.

Определим уравнительное смещение зубчатой передачи. При геометрическом проектировании передачи должны быть выполнены два условия: 1) зубья колес должны зацепляться друг с другом теоретически без бокового зазора; 2) между окружностями вершин и впадин зубчатых колес должен быть стандартный радиальный зазор  $C = c^*m = 0,25m$ .

Выполнение первого условия обеспечивается тем, что межосевое расстояние выражается через воспринимаемое смещение по формуле (15.9). Второе условие требует, чтобы

$$a_w = r_{a1} + c^*m + r_{f2}. \quad (15.11)$$

Совместное решение уравнений (15.9) и (15.11) дает

$$r_1 + ym + r_2 = r_{a1} + C + r_{f2}$$

или

$$r_1 + ym + r_2 = r_{a1} + C + r_{a2} - h.$$

Подставляя в это равенство значения  $r_{1,2}$ ,  $r_{a1,2}$  и  $h$  из лекции 14, после преобразования придем к выражению

$$ym = x_1 m - \Delta ym + x_2 m,$$

откуда получим  $\Delta y$  — коэффициент уравнительного смещения, упомянутый ранее,

$$\Delta y = x_\Sigma - y. \quad (15.12)$$

Итак, уравнительное смещение  $\Delta y$  (см. схему станочного зацепления) вводится для получения зубчатой передачи без бокового зазора на линии зацепления и со стандартной величиной радиального зазора.

Если зубчатая передача составлена из колес без смещений ( $x_1 = 0, x_2 = 0, x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$ ), то согласно уравнениям (15.7), (15.9), (15.10) и (15.12) такая передача будет характеризоваться следующими параметрами: угол зацепления  $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$ , коэффициент воспринимаемого смещения  $y = 0$ , коэффициент уравнительного смещения  $\Delta y = 0$ , межосевое расстояние  $a_w = r_1 + r_2 = m(z_1 + z_2)/2$ , т.е. равно сумме радиусов делительных окружностей. При указанных условиях радиусы начальных окружностей  $r_{w1} = mz_1/2 = r_1, r_{w2} = mz_2/2 = r_2$ , т.е. начальные окружности колес совпадают с их делительными окружностями.

**Особенности эвольвентной передачи внутреннего зацепления.** На рис. 15.3 изображена передача внутреннего зацепления. Меньшее колесо (шестерня), обозначенное 1, имеет внешние зубья; большее колесо, именуемое просто колесом и обозначенное 2, имеет внутренние зубья. Инструментом для изготовления колес с внутренними зубьями способом огибания является не реечный инструмент, а **долбяк** (инstrumentальное колесо), число зубьев и основные размеры которого стандартизованы. При изготовлении колес долбяком может произойти не только подрезание и

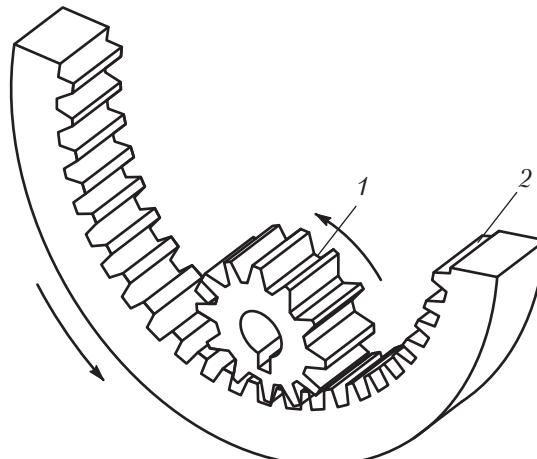


Рис. 15.3

заострение зубьев, но и срезание их у вершины. Предотвращение этого явления должно быть учтено при проектировании передачи внутреннего зацепления.

При внутреннем зацеплении в отличие от внешнего эвольвентные профили  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  пересекаются на участке  $N_1N_2$ . Кроме того, при внутреннем зацеплении может иметь место еще один вид пересечения эвольвент, если числа зубьев шестерни ( $z_1$ ) и колеса ( $z_2$ ) близки друг к другу.

В правильно спроектированной передаче внутреннего зацепления должны отсутствовать оба вида пересечения эвольвентных профилей. Это значит, что активная часть линии внутреннего зацепления должна целиком находиться вне отрезка  $N_1N_2$ . Кроме того, числа зубьев  $z_1$  и  $z_2$  должны подчиняться определенным ограничениям.

Для передачи, составленной из колес без смещений, нарезаемых стандартным долбяком, необходимо  $z_1 \geq 20$ ,  $z_2 \geq 85$ , а разность  $z_2 - z_1 \geq 8$ . Если передачу составить из колес со смещениями, то  $z_2$  и  $z_2 - z_1$  можно существенно уменьшить и сократить тем самым размеры всей передачи.

### Качественные показатели зубчатой передачи. Выбор расчетных коэффициентов смещения

Рассмотрим качественные показатели, которые дают возможность оценить передачу в отношении плавности и бесшумности зацепления, возможного износа и прочности зубьев, а также сравнить ряд передач по тем же показателям. Такая оценка важна для рационального назначения расчетных коэффициентов смещения при проектировании зубчатых передач.

**Коэффициент перекрытия** учитывает непрерывность и плавность зацепления в передаче. Такие качества передачи обеспечиваются перекрытием работы одной пары зубьев работой другой пары. Для этого каждая последующая пара зубьев должна войти в зацепление еще до того, как предшествующая пара выйдет из зацепления. О величине перекрытия судят по коэффициенту перекрытия, который выражают отношением угла торцевого перекрытия к угловому шагу. Угол торцевого перекрытия  $\Phi_\alpha$  — это угол поворота колеса от положения зубьев при входе в зацепление, когда они касаются в точке  $B'$ , до положения зубьев при выходе

из зацепления, когда они касаются в точке  $B''$  (рис. 15.4, а). Следовательно, коэффициент перекрытия прямозубой передачи

$$\varepsilon_a = \frac{\Phi_{a1}}{\tau_1} = \frac{\Phi_{a2}}{\tau_2}. \quad (15.13)$$

Здесь  $\tau_1 = 2\pi/z_1$  — угловой шаг;  $\Phi_{a1} = g_a/r_{b1}$ , где  $g_a = g_f + g_a$  — длина активной линии зацепления. Она складывается из

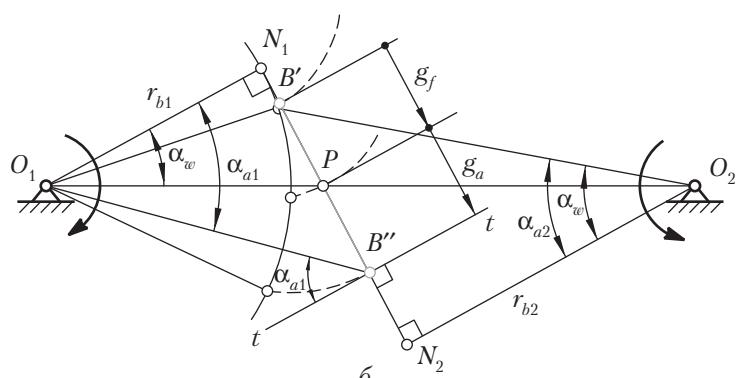
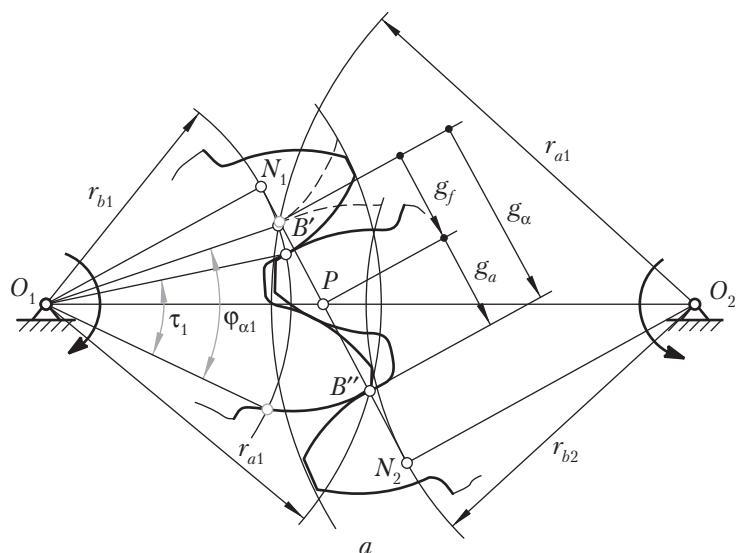


Рис. 15.4

длин дополюсной  $g_f$  и заполюсной  $g_a$  частей активной линии зацепления (см. рис. 15.4):

$$g_f = r_{b2} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w); \quad (15.14)$$

$$g_a = r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w). \quad (15.15)$$

Подстановка (15.14) и (15.15) в (15.13) с учетом (14.3) дает формулу для определения коэффициента перекрытия прямозубой передачи:

$$\varepsilon_a = \frac{z_1 \operatorname{tg} \alpha_{a1} + z_2 \operatorname{tg} \alpha_{a2} - (z_1 + z_2) \operatorname{tg} \alpha_w}{2\pi}. \quad (15.16)$$

Если при расчете по формуле (15.16) получится  $\varepsilon_a < 1$ , то в этом случае непрерывности процесса зацепления зубьев не будет: одна пара зубьев успеет выйти из зацепления еще до того, как следующая пара зубьев войдет в него. Поэтому минимально допустимым значением  $\varepsilon_a$  является 1,05, которое обеспечивает непрерывность процесса зацепления с 5%-ным запасом.

Важно отметить, что коэффициент перекрытия  $\varepsilon_a$  уменьшается при увеличении коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$ . Поэтому при проектировании передачи коэффициенты смещения надо назначать так, чтобы  $\varepsilon_a$  не получился бы меньше 1,05.

Продолжительность зацепления одной пары зубьев в косозубой передаче ( $\beta \neq 0$ ) больше, чем в прямозубой ( $\beta = 0$ ). Поэтому и коэффициент перекрытия косозубой передачи  $\varepsilon_\gamma$  больше  $\varepsilon_a$  и подсчитывается по формуле

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_a + \varepsilon_\beta. \quad (15.17)$$

В этой сумме слагаемое  $\varepsilon_a$  определяется по формуле (15.16). Второе слагаемое  $-\varepsilon_\beta = b/p_t$ . Здесь  $b = \psi m$  — ширина зубчатого колеса;  $\psi$  — коэффициент ширины зубчатого колеса, назначаемый из условий прочности и износостойкости зуба;  $p_t = \pi m / \sin \beta$  — осевой шаг косого зуба. Подставив  $b$  и  $p_t$  в выражение для  $\varepsilon_\beta$ , получим

$$\varepsilon_\beta = \psi \sin \beta / \pi. \quad (15.18)$$

Как непосредственно следует из уравнений (15.17) и (15.18), коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\gamma$  косозубой передачи ( $\beta \neq 0$ ) больше коэффициента перекрытия  $\varepsilon_a$  прямозубой ( $\beta = 0$ ), что является достоинством косозубой передачи.

**Коэффициент скольжения** учитывает влияние геометрических и кинематических факторов на величину проскальзывания профилей в процессе зацепления. Наличие скольжения при одновременном нажатии одного профиля на другой приводит к износу профилей. Коэффициенты скольжения выражаются формулами

$$\lambda_1 = v_{\text{ск}} / v_{K1-K}; \quad \lambda_2 = v_{\text{ск}} / v_{K2-K},$$

где  $v_{\text{ск}}$  — скорость скольжения;  $v_{K1-K}$  и  $v_{K2-K}$  — скорости перемещения точек контакта по профилям зубьев первого и второго колеса.

За время одного оборота колеса с меньшим числом зубьев  $z_1$  второе колесо не завершает полный оборот. Следовательно, его зубья в  $u_{12}$  раз реже вступают в контакт, чем зубья первого колеса, и поэтому меньше изнашиваются. Для того чтобы сравнивать интенсивность износа зубьев по коэффициентам скольжения, разделим  $\lambda_2$  на  $u_{12} = w_1/w_2 = z_2/z_1$ :

$$\lambda_1 = v_{\text{ск}} / v_{K1-K}; \quad \lambda_2 = v_{\text{ск}} / (v_{K2-K} u_{12}).$$

Расчетные формулы для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют такой вид:

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{u_{12}}\right) \frac{l_K}{l_K + l_{p1}}; \quad \lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{u_{12}}\right) \frac{l_K}{l_K - l_{p2}}, \quad (15.19)$$

где  $l_K$  — величина алгебраическая, выражающая расстояние от полюса зацепления  $P$  до текущего положения точки  $K$  контакта пары зубьев (см. рис. 15.2);  $l_{p1}$  и  $l_{p2}$  — абсолютные значения длин отрезков  $PN_1$  и  $PN_2$ .

В процессе зацепления точка контакта  $K$  зубьев движется вдоль линии зацепления от положения  $B'$  (вход зубьев в зацепление) до положения  $B''$  (выход зубьев из зацепления). Отсюда следует, что расстояние  $l_K$  изменяется от значения ( $-B'P$ ) до нуля и затем от нуля до значения ( $+B''P$ ). Поэтому, как вытекает из формул (15.19), коэффициенты скольжения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также изменяются в процессе зацепления. Наибольшее значение  $\lambda_1$  приобретает в положении  $B'$ , а  $\lambda_2$  — в положении  $B''$  (рис. 15.5).

Коэффициенты скольжения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  зависят от коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$ . Воздействуя на  $x_1$  и  $x_2$ , конструктор получает значения коэффициентов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , отвечающие условиям эксплуатации.

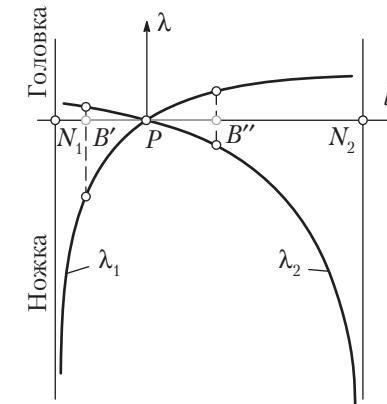


Рис. 15.5

**Коэффициент удельного давления** учитывает влияние геометрии зубьев (радиусов кривизны их профилей) на величину контактных напряжений, возникающих в местах соприкосновения зубьев. При чрезмерном нагружении контактные напряжения могут быть столь значительны, что вызовут выкрашивание материала на рабочей поверхности зубьев.

Контактные напряжения определяются по формуле Герца

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{Q}{b}} E \frac{1}{\rho},$$

где  $Q$  — сила взаимодействия зубьев;  $b$  — ширина зубчатых колес;  $E = 2E_1E_2/(E_1 + E_2)$  — приведенный модуль упругости их материалов;  $\rho$  — приведенный радиус кривизны эвольвентных профилей в точке контакта, посредством которого определяется влияние геометрии зуба на контактные напряжения.

Для текущего момента зацепления зубьев (см. рис. 15.2)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2},$$

или согласно свойствам эвольвентных профилей

$$\frac{1}{\rho} = \frac{N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}.$$

Коэффициентом удельного давления называется отношение

$$\vartheta = \frac{m}{\rho} = \frac{m N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}. \quad (15.20)$$

Коэффициент  $\vartheta$  — величина безразмерная, не зависящая от модуля  $m$ , так как  $\rho$  пропорционален модулю.

Поскольку точка  $K$  контакта зубьев движется вдоль линии зацепления, расстояние  $N_1 K$  увеличивается, а расстояние  $N_2 K$  уменьшается (см. рис. 15.2). Поэтому, как следует из уравнения (15.20), коэффициент удельного давления  $\vartheta$  изменяется в процессе зацепления. График этого изменения представлен на рис. 15.6.

Подставив коэффициент  $\vartheta$  в формулу Герца, получим:

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{Q}{b}} \frac{E}{m} \sqrt{\vartheta}.$$

Коэффициент удельного давления  $\vartheta$  уменьшается при увеличении коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$ . Поэтому конструктор может снижать контактные напряжения, назначая коэффициенты смещения  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы коэффициент  $\vartheta$  имел возможно меньшее значение.

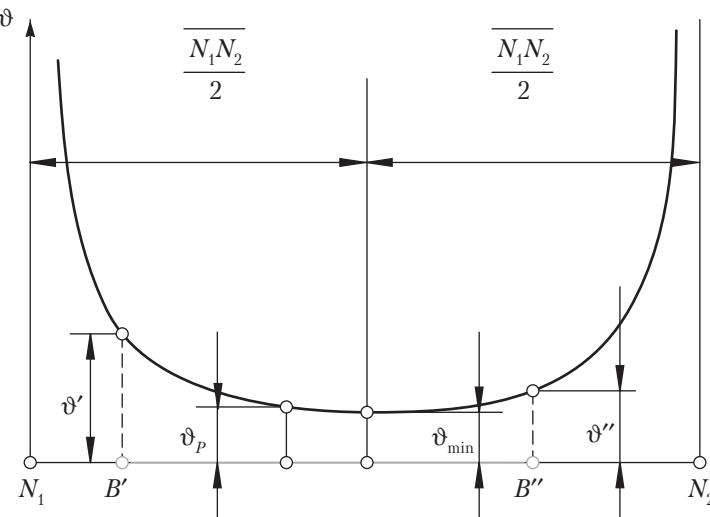


Рис. 15.6

**Выбор расчетных коэффициентов смещения для передач внешнего зацепления.** При назначении коэффициентов смещения  $x_1$  и  $x_2$  для любой передачи должны быть выполнены следующие три условия: 1) отсутствие подрезания; 2) отсутствие заострения; 3) непрерывность зацепления. Первое условие применительно к шестерне выполняется, если ее коэффициент смещения  $x_1$  превосходит свой минимальный уровень  $x_{\min 1}$ . Второе и третье условия ограничивают коэффициент смещения  $x_1$  шестерни верхними пределами  $x'_{\max 1}$  и  $x''_{\max 1}$ . Эти пределы неодинаковы, и для расчета зубчатой передачи важен тот  $x_{\max 1}$ , который имеет меньшее значение. Таким образом, коэффициент смещения  $x_1$  шестерни надо назначать так, чтобы соблюдалось соотношение  $x_{\min 1} < x_1 \leq x_{\max 1}$ . То же самое следует сказать и о коэффициенте смещения  $x_2$  колеса,  $x_{\min 2} < x_2 \leq x_{\max 2}$ .

Внутри указанных пределов коэффициенты смещения  $x_1$  и  $x_2$  надо назначать так, чтобы зависящие от них качественные показатели передачи, характеризующие ее свойства (плавность хода, износстойкость, прочность), имели бы оптимальные значения. При этом надо учитывать конкретные условия работы передачи: быстроходность, характер нагрузки, наличие или отсутствие закрытой масляной ванны, материалы шестерни и колеса и вид их термообработки и др.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 15

1. Запишите условия отсутствия подрезания в станочном зацеплении.
2. Что такое  $z_{\min}$ ? Выведите формулу для определения  $z_{\min}$ .
3. Что такое  $x_{\min}$ ? Выведите формулу для  $x_{\min}$ .
4. Выведите формулу для определения угла зацепления эвольвентной передачи внешнего зацепления.
5. Какая эвольвентная передача называется передачей без смещения?
6. По каким признакам классифицируют зубчатые передачи?
7. Перечислите основные качественные показатели цилиндрической эвольвентной передачи.
8. Что такое коэффициент торцевого перекрытия? Выведите формулу для  $\epsilon_\alpha$ .
9. Как записывается формула для коэффициента осевого перекрытия  $\epsilon_\gamma$ ?

## Лекция 16

### Цилиндрическая передача, составленная из колес с косыми зубьями

Переходя к изучению косозубых передач, отметим прежде всего, что косые зубья располагаются на цилиндрах обоих колес по винтовым линиям (рис. 16.1). Если цилиндры развернуть на плоскость, то косые зубья (на развертке) окажутся расположенными по наклонным параллельным прямым. Так же будут расположены и косые зубья рейки.

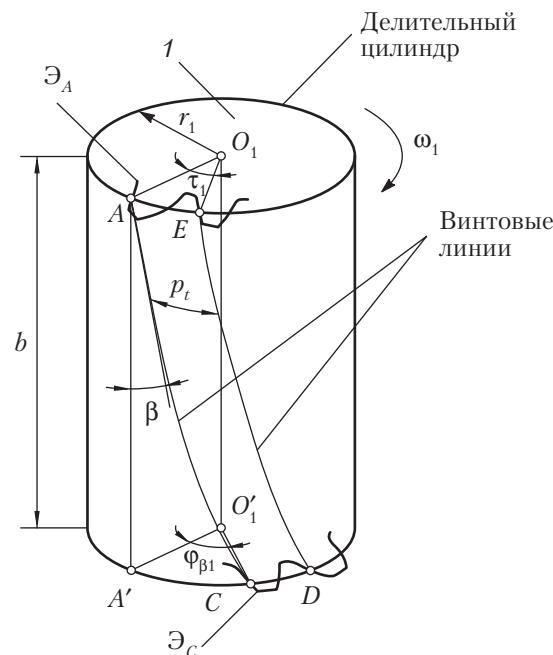


Рис. 16.1

Косозубые колеса, как и прямозубые, изготавливаются способом обкатки (см. лекцию 14), в основу которого положен процесс станочного зацепления. Для нарезания применяется тот же стандартный инструмент, но устанавливается он на станке наклонно, под углом  $\beta$  (рис. 16.2). Поэтому производящая зубчатая поверхность, которую в своем технологическом движении 3 описывают режущие кромки инструмента — гребенки Г, тоже будет наклонной. На рис. 16.2 производящая поверхность показана схематично в виде наклонно проецирующих линий. А так как эта поверхность (если ее мысленно сделать материальной) образует зубья воображаемой производящей рейки ПР, то, следовательно, зубья рейки получатся косыми. Наглядно процесс обкатки можно представить себе как качение изготовленного колеса по производящей рейке ПР, имеющей косые зубья, наклоненные под углом  $\beta$ .

Такой же наклон получат зубья изготовленного колеса на его станочно-начальном цилиндре. А так как в реечном

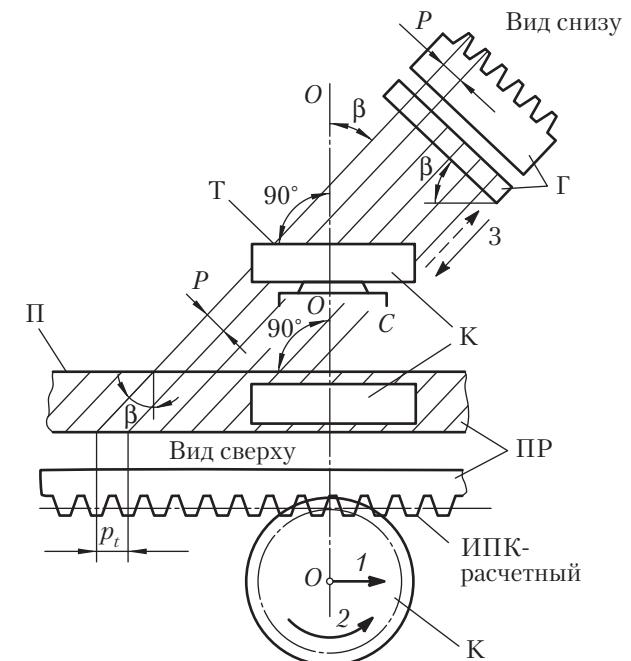


Рис. 16.2

станочном зацеплении делительный цилиндр совпадает со станочно-начальным, то именно на делительном цилиндре зубья получатся расположеными под углом  $\beta$  (см. рис. 16.1), на который наклонен инструмент на станке.

Из сравнения рис. 16.1 и 16.2 видно, что движения обкаты 1 и 2 при изготовлении как прямозубых, так и косозубых колес одинаковы. Отсюда следует весьма важный вывод: все принципиальные положения, касающиеся станочного зацепления прямозубого колеса с прямозубой производящей рейкой (см. лекцию 14), справедливы также для станочного зацепления косозубого колеса с косозубой производящей рейкой.

Вместе с тем процесс изготовления косозубых колес имеет и свои особенности, вытекающие из того, что инструмент установлен на станке наклонно. Определим, каким будет в этих новых условиях исходный производящий контур (ИПК), вступающий в станочное зацепление с профилем нарезаемых зубьев. Для этого рассечем наклонную зубчатую производящую поверхность плоскостью  $\Pi$ , перпендикулярной оси  $OO$  колеса; в сечении получим искомый ИПК.

Нетрудно заметить, что благодаря наклону инструмента параметры полученного ИПК будут отличаться от параметров стандартного ИПК, который образуется при пересечении производящей поверхности плоскостью  $\Pi$ , ей перпендикулярной. Например, шаг  $p_t$  нового ИПК составит  $p_t = p/\cos \beta$  (см. рис. 16.2), где  $p$  — шаг стандартного ИПК. Поэтому  $m_t = m/\cos \beta$ , где  $m$  — стандартный модуль инструмента. Чтобы в дальнейшем отличать стандартные параметры  $m, \alpha, h_a, c^*$  от расчетных, будем присваивать последним индекс  $t$ :  $m_t, \alpha_t, h_{at}, c_t^*$ . Следовательно, особенность станочного зацепления при изготовлении косозубых колес состоит в том, что благодаря наклонной установке инструмента ИПК не является больше стандартным, а становится расчетным.

Здесь надо сделать принципиально важное добавление. Расчетный реечный ИПК (см. рис. 16.2), как и стандартный, имеет прямолинейные, т.е. эвольвентные, кромки. Поэтому в торцевой плоскости  $T$  косозубого колеса (см. рис. 16.2), как и в любой, ей параллельной, зубья при изготовлении получают эвольвентный профиль. Но именно в этих плоскостях, перпендикулярных осям вращения колес проектируемой передачи, и происходит сам процесс зацепления профилей ее зубьев. Значит, косозубая цилиндрическая

передача является эвольвентной передачей. Отсюда следует еще один важный вывод: все теоретические положения и зависимости, полученные ранее для прямозубой эвольвентной передачи, полностью справедливы и для косозубой, но сформированной на базе расчетного ИПК. Поэтому математическая структура всех ранее составленных формул сохранится, но написание их будет иметь ту особенность, что всюду вместо стандартных параметров  $m, \alpha, h_a, c^*$  в них надо подставлять расчетные параметры  $m_t, \alpha_t, h_{at}^*, c_t^*$ , зависящие от угла  $\beta$ . Например:

прямозубая передача

$$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha;$$

$$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y)$$

косозубая передача

$$r_b = \frac{m_t z}{2} \cos \alpha_t;$$

$$h = m_t(2h_{at}^* + c_t^* - \Delta y)$$

и т.п.

Укажем (без вывода) формулы перехода от стандартных параметров к расчетным:

$$\begin{aligned} m_t &= \frac{m}{\cos \beta}; & \operatorname{tg} \alpha_t &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \\ h_{at}^* &= h_a^* \cos \beta; & c_t^* &= c^* \cos \beta. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Косое направление зубьев наделяет цилиндрическую передачу особыми свойствами. Рассмотрим их. Благодаря наклону зуба он выходит из зацепления не сразу весь целиком, а постепенно. После того как профиль  $\mathcal{E}_A$  выйдет из зацепления, шестерня 1 повернется еще на угол  $\Phi_{\beta 1}$  до момента выхода из зацепления профиля  $\mathcal{E}_C$  (см. рис. 16.1). Продолжительность зацепления одной пары зубьев в косозубой передаче большая, чем в прямозубой, в которой зуб выходит из зацепления одновременно по всей своей длине. Поэтому угол поворота  $\Phi_{\gamma 1}$  шестерни 1 за время полного зацепления одной пары косых зубьев составит уже не  $\Phi_{\alpha 1}$ , как в зацеплении прямых зубьев, а

$$\Phi_{\gamma 1} = \Phi_{\alpha 1} + \Phi_{\beta 1}.$$

Коэффициентом перекрытия косозубой передачи называют отношение  $\varepsilon_\gamma = \Phi_{\gamma 1}/\tau_1 = \Phi_{\gamma 2}/\tau_2$ . Раскроем его:

$$\varepsilon_\gamma = \Phi_{\gamma 1}/\tau_1 = \Phi_{\alpha 1}/\tau_1 + \Phi_{\beta 1}/\tau_1 = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta.$$

Слагаемое  $\epsilon_\alpha$ , называемое коэффициентом торцевого перекрытия, подсчитывается по уравнению (15.8). Слагаемое  $\epsilon_\beta$  — коэффициент осевого перекрытия — определяется так:  $\epsilon_\beta = \varphi_{\beta_1}/\tau_1 = AC/AE = b \operatorname{tg} \beta/p_t$  (см. рис. 16.1).

Подставив  $p_t = \pi m_t$ , получим

$$\epsilon_\gamma = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\pi m_t}. \quad (16.2)$$

Теперь окончательно запишем формулу для определения коэффициента перекрытия косозубой передачи:

$$\epsilon_\gamma = \frac{z_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\pi m_t}. \quad (16.3)$$

В прямозубой передаче (где  $\beta = 0$ ) коэффициент осевого перекрытия  $\epsilon_\beta = 0$ , так что  $\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha$ . Следовательно, коэффициент перекрытия косозубой передачи (где  $\beta \neq 0$ ) больше, а иногда и значительно больше коэффициента перекрытия прямозубой, что является достоинством косозубой передачи. Профессор Л. Н. Решетов рекомендует угол  $\beta$  назначать так, чтобы получить для  $\epsilon_\beta$  целое значение — 1, реже — 2; это уменьшит износ зубьев.

Для косозубых колес уравнение (15.2) приобретает вид

$$z_{\min}^{\text{koc}} = \frac{2h_{at}}{\sin^2 \alpha_t}.$$

Так как согласно формулам (15.2)  $h_{at} < h_a$ ,  $\alpha_t > \alpha$ ,  $z_{\min}^{\text{koc}} < z_{\min}$ , т.е. косозубые колеса менее подвержены подрезанию, чем прямозубые.

Л. Н. Решетов рассчитал и изготовил косозубую передачу, шестерня которой имеет всего один не пораженный подрезом зуб. Этим он наглядно и убедительно продемонстрировал возможность создания малогабаритных зубчатых передач (в том числе и прямозубых) путем снижения чисел зубьев менее  $z_{\min}$ , не опасаясь их подрезания.

В лекциях 13–16 была кратко изложена геометрическая теория цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи, которую с исчерпывающей полнотой разработал профессор В. А. Гавриленко [10] — основатель научной школы по зубчатым передачам.

### Особенности точечного круговинтового зацепления Новикова

В эвольвентном зацеплении взаимодействие рабочих поверхностей зубьев происходит по прямой линии. Поэтому неточность взаимного расположения колес и их деформации под нагрузкой приводят к концентрации напряжений на определенных участках контактных линий. Для того чтобы увеличить нагрузочную способность зацепления, необходимо увеличить радиусы кривизны рабочих поверхностей зубьев, т.е. увеличить диаметры зубчатых колес. Для устранения указанных недостатков эвольвентных передач М. Л. Новиков предложил способы образования сопряженных поверхностей зубьев, имеющих точечный контакт. Им разработаны и реализованы на практике цилиндрические передачи, в которых выпуклые поверхности начальных головок зубьев одного колеса взаимодействуют с вогнутыми поверхностями начальных ножек зубьев другого колеса (рис. 16.3). Такие колеса образуют зацепление Новикова с *одной линией зацепления*.

В отличие от цилиндрических эвольвентных передач начальный контакт таких криволинейных поверхностей зубьев осуществляется лишь в одной точке  $K$  на линии зацепления  $KK$ , расположенной параллельно осям колес и полюсной линии  $PP$ . Линия зацепления проецируется на торцевую плоскость в точку  $K$ ; поля зацепления в этих пределах не существует. Так как начальный контакт зубьев осуществляется в одной точке ( $\epsilon_\alpha = 0$ ), то для обеспечения непрерывности зацепления передачи Новикова выполняются только косозубыми ( $\beta = 8^\circ\text{--}22^\circ$ ) с коэффициентом осевого перекрытия  $\epsilon_\beta > 1$ .

Другое отличие передачи Новикова от эвольвентных состоит в том, что перекатывание зубьев в процессе зацепления происходит не по высоте, а по их длине (направление перемещения точки  $K$  на рис. 16.3 показано стрелкой) и скорость перемещения точки начального контакта значительно больше ее окружной скорости. Последнее способствует образованию в контакте относительно толстого гидродинамического масляного слоя, снижению потерь на трение и уменьшению износа. В действительности из-за упругой контактной деформации зубьев под

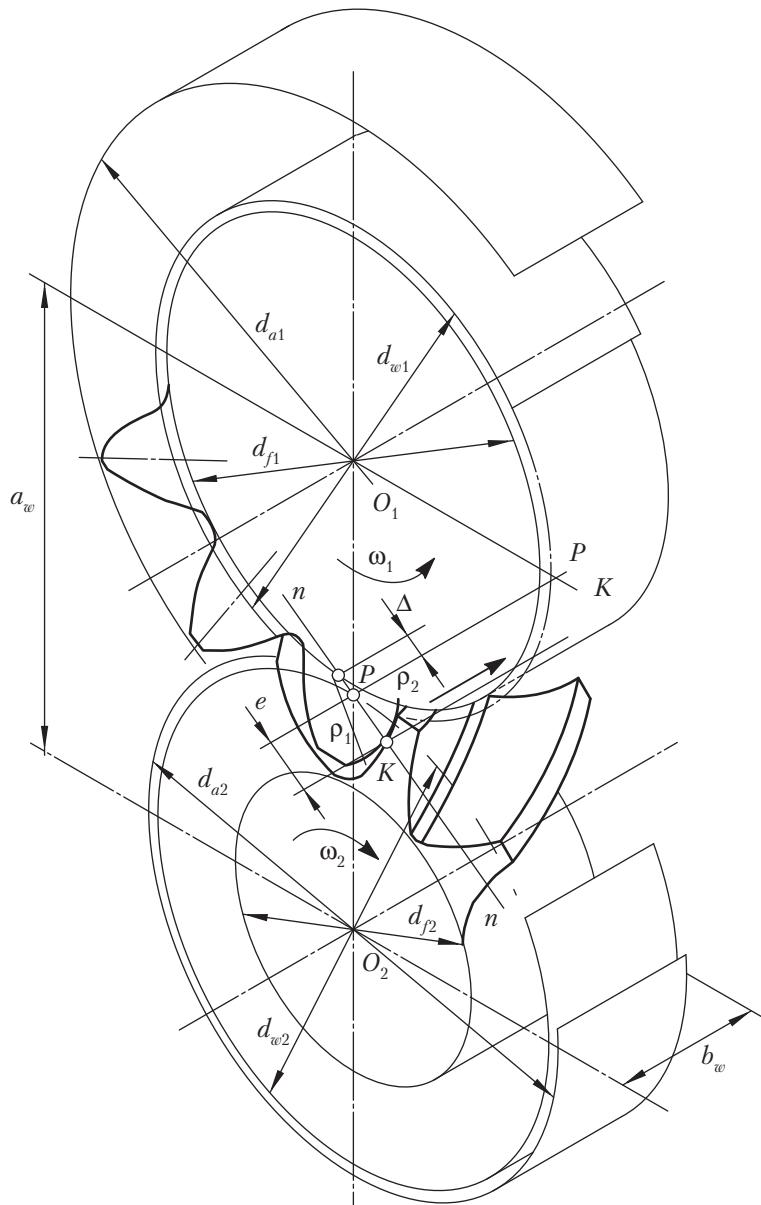


Рис. 16.3

нагрузкой их взаимодействие происходит через площадку, размеры которой быстро увеличиваются в результате приработки.

С целью увеличения нагрузочной способности зацепления Новикова круговинтовые зубья на каждом колесе выполняют таким образом, чтобы головки зубьев обоих колес были выпуклыми, а ножки — вогнутыми и связаны между собой небольшим участком, очерченным переходной кривой. Такие передачи имеют две линии зацепления  $KK$  и  $K'K'$ , расположенные параллельно осям вращения колес и полюсной линии (рис. 16.4). Одна линия зацепления  $K'K'$  находится перед полюсом  $P$ , другая  $KK$  — за полюсом. Каждая линия зацепления образуется перемещением общей точки контакта начальной ножки зуба одного зубчатого колеса с начальной головкой зуба парного колеса. Этот вариант зацепления Новикова с *двумя линиями зацепления* называется *дозаполюсным*.

Геометрия зубьев зацепления Новикова определяется исходным контуром зацепления. Параметры элементов исходных контуров, радиусы кривизны и другие размеры зубьев выбираются в таких соотношениях, чтобы обеспечить наивыгоднейшие условия работы зацепления и требуемую прочность зубьев. Для зацепления Новикова с одной линией зацепления необходимы два исходных контура: один для *выпуклых*, другой для *вогнутых* зубьев (рис. 16.5, а). Боковые стороны контура очерчены дугами окружности. Исходные контуры выпуклого и вогнутого профилей (контур зубьев рейки) по делительной прямой  $a-a$  образуют плотное сопряжение. Необходимый боковой зазор в зацеплении достигается за счет утонения зубьев выпуклого колеса.

Параметры исходного контура зацеплений Новикова с двумя линиями зацепления (рис. 16.5, б) регламентируются ГОСТ 15023–76. Как и в исходном контуре с одной линией зацепления, профили зубьев в нормальном сечении очерчены дугами окружности и сопрягаются между собой прямолинейным участком. Геометрические параметры определяются через нормальный модуль  $m_n$ .

Модули зацепления выбирают в соответствии со значениями, установленными ГОСТ 14186–69.

Непрерывность вращения ведомого колеса в зубчатом механизме с зацеплением Новикова обеспечивается за счет осевого перекрытия. Коэффициент осевого перекрытия

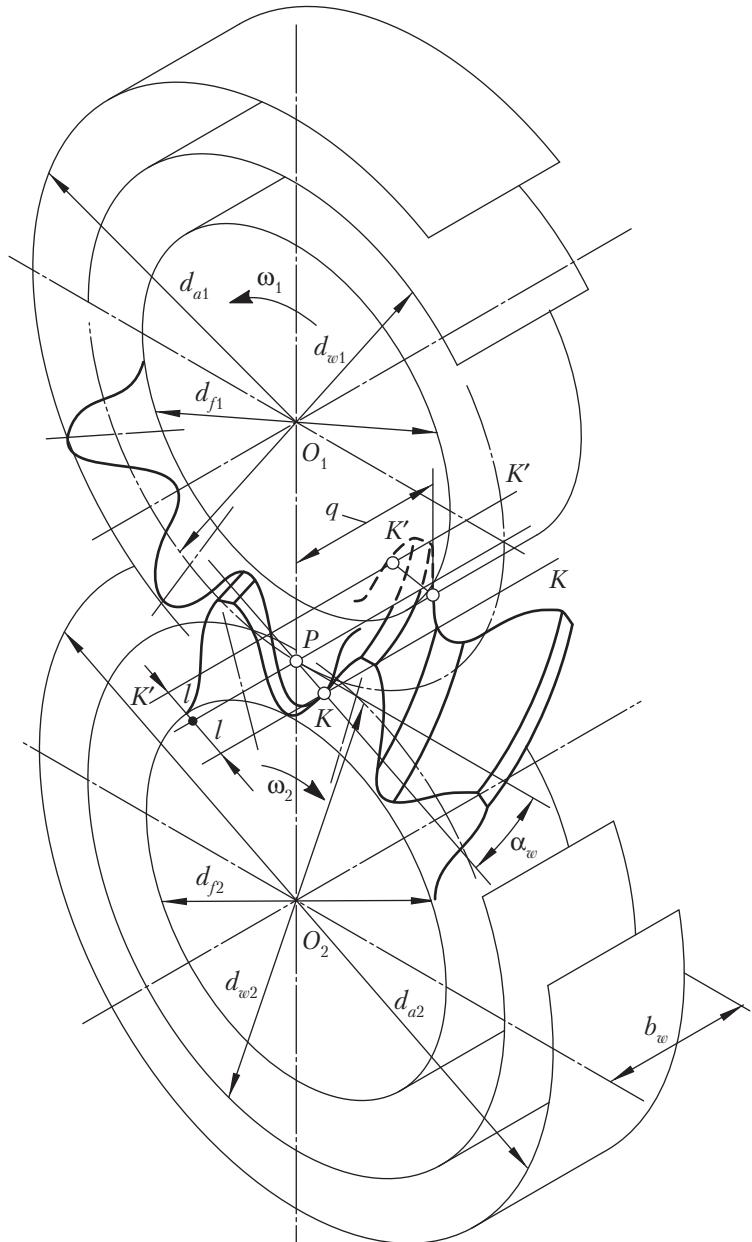


Рис. 16.4

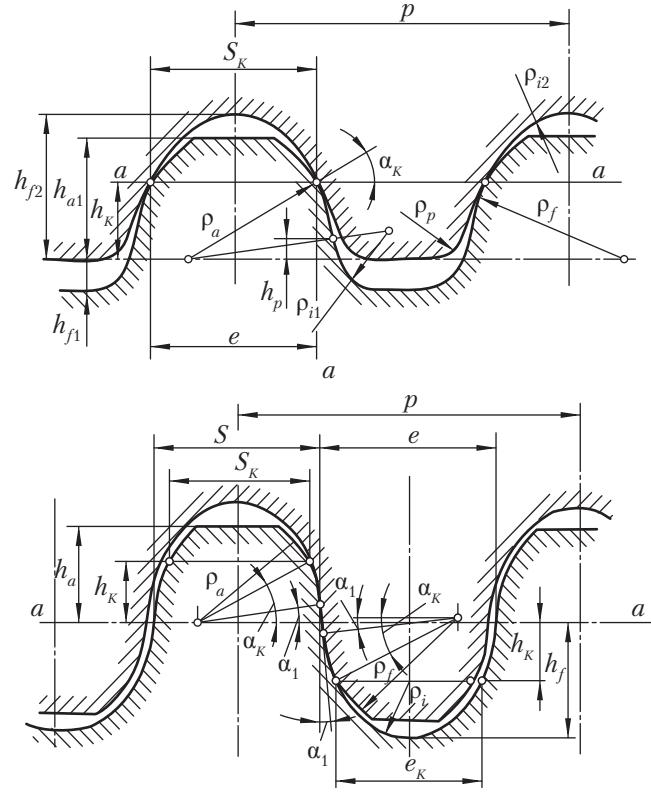


Рис. 16.5

определяется отношением рабочей ширины зацепления  $b_w$  к осевому шагу  $p_x$  (рис. 16.6):

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w}{p_x} = \frac{b_w \sin \beta}{\pi m_x}. \quad (16.4)$$

В механизме с одной линией зацепления в контакте будут находиться то одна, то две пары зубьев. Двухпарное зацепление будет иметь место на участках зубьев, имеющих длину  $(b_w - \pi m_x)$ , расположенных вблизи торцов. Для обеспечения необходимого коэффициента перекрытия  $\varepsilon_\beta = 1,15...1,35$  чаще всего принимают углы наклона зубьев  $\beta = 10-20^\circ$ .

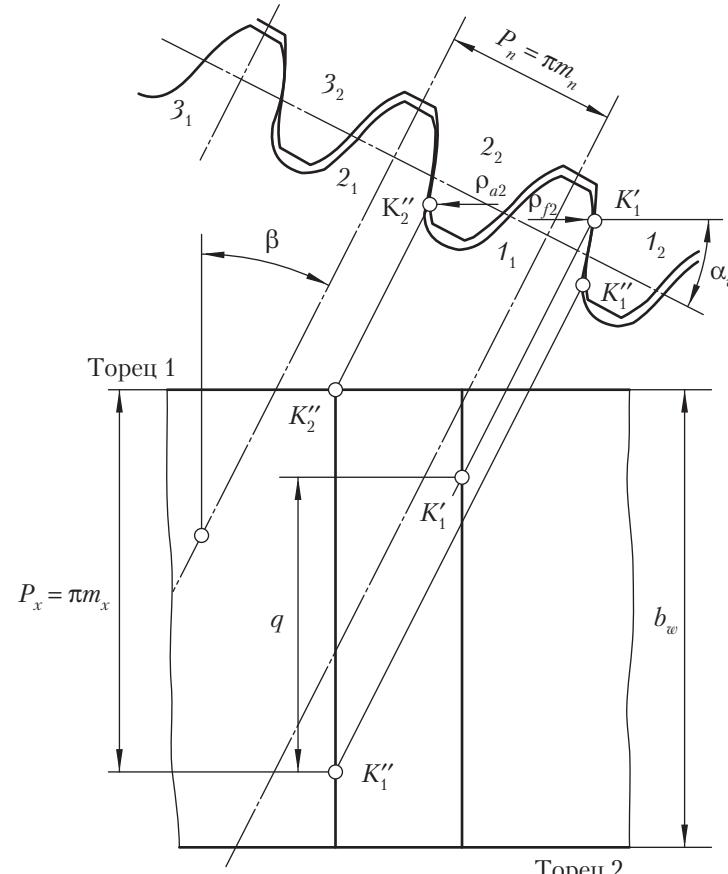


Рис. 16.6

В дозаполюсном зацеплении при коэффициенте перекрытия  $\varepsilon_\beta = 1,15\dots 1,2$  обеспечивается как минимум две зоны контакта. Это позволяет ширину зубчатых венцов делать на 30–40% меньше, чем в зацеплении с одной линией зацепления.

При проектировании зубчатого механизма с круговинтовыми зубьями и параллельными осями вращения задаются межосевым расстоянием  $a_w$ , передаточным отношением  $U_{12}$  и вариантом зацепления. Формулы для определения основных размеров передач Новикова и эвольвентных косозубых передач совпадают.

Диаметр делительного цилиндра, совпадающего с начальным:

$$d = \frac{m_n z}{\cos \beta}. \quad (16.5)$$

Диаметры окружностей вершин:

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1}^* m_n; \quad d_{a2} = d_2 + 2h_{a2}^* m_n. \quad (16.6)$$

Диаметры окружностей впадин:

$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1}^* m_n; \quad d_{f2} = d_2 - 2h_{f2}^* m_n. \quad (16.7)$$

Межосевое расстояние передачи:

$$a_w = m_n \frac{(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta}. \quad (16.8)$$

Ширина зубчатого венца шестерни:

$$b = b_w = p_x \varepsilon_\beta. \quad (16.9)$$

### Контрольные вопросы и задания к лекции 16

1. Каковы особенности цилиндрических косозубых колес?
2. Как нарезают косозубые цилиндрические колеса?
3. Каковы преимущества косозубых эвольвентных передач по сравнению с прямозубыми?
4. Как влияет угол наклона зубьев на качественные показатели косозубого зацепления?
5. Какие модули зацепления различают для косозубых колес и какова зависимость между ними? Какой модуль стандартизован и почему?
6. Почему зацепление Новикова не может быть прямозубым?
7. Укажите отличие передачи Новикова от эвольвентной.
8. Сравните достоинства и недостатки зубчатой передачи с зацеплением Новикова и эвольвентной зубчатой передачи.

## Лекция 17

### Сложные зубчатые и планетарные механизмы

**Сложными зубчатыми механизмами** называются механизмы с зубчатыми передачами с числом зубчатых колес больше двух. Это могут быть механизмы с оригинальными структурными схемами или механизмы, образованные последовательным и (или) параллельным соединением простейших типовых зубчатых механизмов. Механизмы, в которых кинематические цепи образуют один или несколько замкнутых контуров и в которых входной поток механической мощности в процессе передачи и преобразования делится на несколько потоков, а затем суммируется на выходном звене, называются **многопоточными механизмами**. Распределение передаваемых усилий по нескольким кинематическим парам уменьшает нагрузку на элементы пар и позволяет существенно уменьшать габаритные размеры и массу механизмов. Многозонный контакт звеньев механизма существенно увеличивает жесткость механизма, а также, за счет осреднения ошибок и зазоров, уменьшает мертвый ход и кинематическую погрешность механизма. Однако за счет образования в структуре механизма внутренних контуров число избыточных связей в механизме увеличивается. Поэтому при изготовлении и сборке механизма необходимо либо повышать точность изготовления деталей, либо увеличивать зазоры в кинематических парах.

Сложные зубчатые механизмы, в которых ось хотя бы одного колеса подвижна, называются **планетарными механизмами**. К типовым планетарным механизмам относятся:

- однорядный планетарный механизм;
- двухрядный планетарный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями.

Элементы планетарного механизма имеют специальные названия:

- зубчатое колесо с внешними зубьями, расположенное в центре механизма, называется солнечным;
- колесо с внутренними зубьями называют короной, или эпициклом;
- колеса, оси которых подвижны, называют сателлитами;
- подвижное звено, на котором установлены сателлиты, называют водилом. Звено водила принято обозначать не цифрой, а латинской буквой  $h$ .

В табл. 17.1 приведены структурные схемы типовых планетарных механизмов, а также диапазоны рекомендуемых передаточных отношений  $U$  и ориентировочные значения КПД при этих передаточных отношениях.

Таблица 17.1

#### Типовые планетарные механизмы

№	Структурная схема механизма	$U$ редуктора	КПД
1		$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$ 3...10	0,97...0,99
2		$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ 7...16	0,96...0,98
3		$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ $\frac{1}{25} \dots \frac{1}{150}$	0,9...0,3
4		$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ $\frac{1}{25} \dots \frac{1}{150}$	0,9...0,3

## Кинематическое исследование рядного зубчатого механизма аналитическим и графическим методами

Рядным зубчатым механизмом называется сложный зубчатый механизм с неподвижными осями колес, образованный последовательным соединением нескольких простых зубчатых механизмов. Рассмотрим кинематику рядного механизма, составленного из двух зубчатых передач: одной внешнего зацепления и одной внутреннего зацепления. Схема механизма изображена на рис. 17.1.

Напоминание: для вращательного движения твердого тела относительно оси, проходящей через точку  $A$ , примем для размеров масштаб  $\mu_l$ , мм/м, а для линейных скоростей — масштаб  $\mu_v$ , мм/м · с<sup>-1</sup>. Угловая скорость звена  $i$  равна

$$\omega_i = \frac{V_B}{l_{AB}} = \frac{\mu_l}{\mu_v} \frac{BB'}{AB} = \frac{\mu_l}{\mu_v} \operatorname{tg} \psi_i = c \operatorname{tg} \psi_i.$$

Таким образом, при графическом кинематическом анализе угловая скорость звена равна произведению тангенса

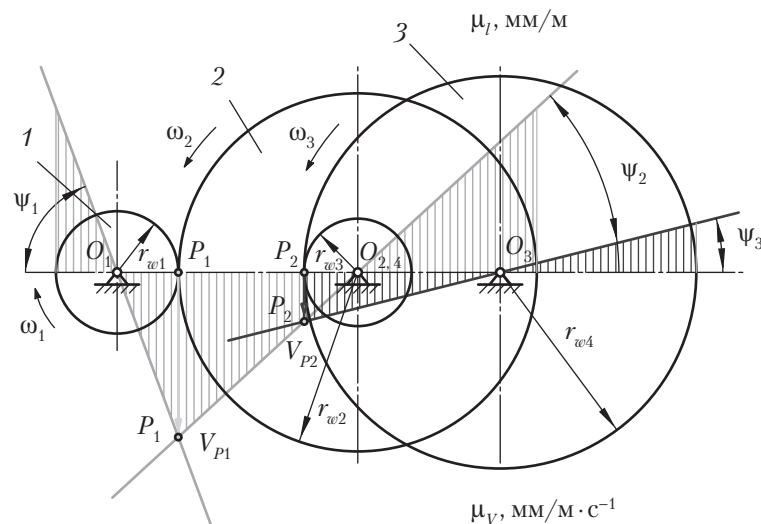


Рис. 17.1

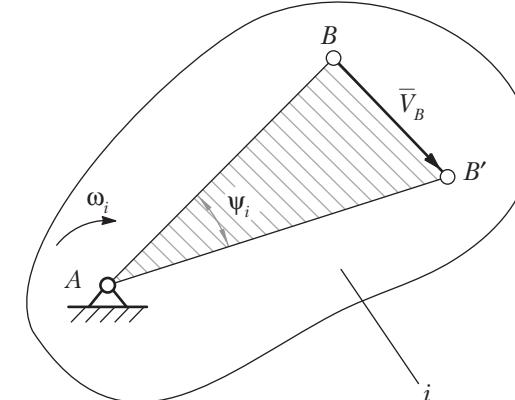


Рис. 17.2

угла наклона прямой распределения линейных скоростей на отношение масштабов длин и скоростей (рис. 17.2).

**Аналитическое исследование кинематики рядного механизма.** Из основной теоремы зацепления для первой пары зубчатых колес с внешним зацеплением можно записать

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -\frac{z_2}{z_1};$$

для второй пары зубчатых колес с внутренним зацеплением

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_{w4}}{r_{w3}} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Передаточное отношение механизма в целом будет равно

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = u_{12} u_{23} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Передаточное отношение сложного рядного зубчатого механизма, образованного из нескольких соединенных последовательно простых зубчатых механизмов, равно произведению передаточных отношений этих механизмов.

**Графическое исследование кинематики рядного механизма.** Изобразим в масштабе  $\mu_l$ , мм/м, кинематическую

схему рядного зубчатого механизма. Нанесем на эту схему линейную скорость точки  $P_1$ , изобразив ее в произвольном масштабе  $\mu_V$ ,  $\text{мм}/\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$  отрезком  $P_1P'_1$ . Соединим конец этого отрезка точку  $P'_1$  центрами вращения колес 1 и 2 точками  $O_1$  и  $O_2$  и получим прямые, определяющие распределение линейных скоростей этих звеньев, для точек, лежащих на линии центров. Эти прямые образуют с линией центров соответственно углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Точка  $P_2$  является точкой касания начальных окружностей колес 3 и 4. Так как в точке касания начальных окружностей линейные скорости звеньев 2 и 3 равны, а распределение линейных скоростей по линии центров для звена 2 известно, то можно определить отрезок  $P_2P'_2$ , который изображает скорость точки  $P_2$  в масштабе  $\mu_V$ ,  $\text{мм}/\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Соединив прямой точку  $P'_2$  с центром вращения звена 3, получим прямую распределения линейных скоростей для точек звена 3, лежащих на линии центров. Угол, который образует эта прямая с линией центров, обозначим  $\psi_3$ . Угловые скорости звеньев определяются из этой графической расчетной схемы по формулам

$$\omega_1 = \frac{\mu_l}{\mu_V} \operatorname{tg} \psi_1 = c \operatorname{tg} \psi_1; \quad \omega_3 = \frac{\mu_l}{\mu_V} \operatorname{tg} \psi_3 = c \operatorname{tg} \psi_3.$$

Передаточное отношение рассматриваемого рядного зубчатого механизма будет равно

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_3}.$$

### Формула Виллиса

Формула Виллиса выводится на основании основной теоремы зацепления и устанавливает соотношение между угловыми скоростями зубчатых колес в планетарном механизме. Рассмотрим простейший планетарный механизм с одним внешним зацеплением (рис. 17.3). Число подвижностей в этом механизме равно:

$$W_{\text{пл}} = 3n - 2p_1 - 1p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2,$$

т.е. для получения определенности движения звеньев механизма необходимо сообщить независимые движения двум

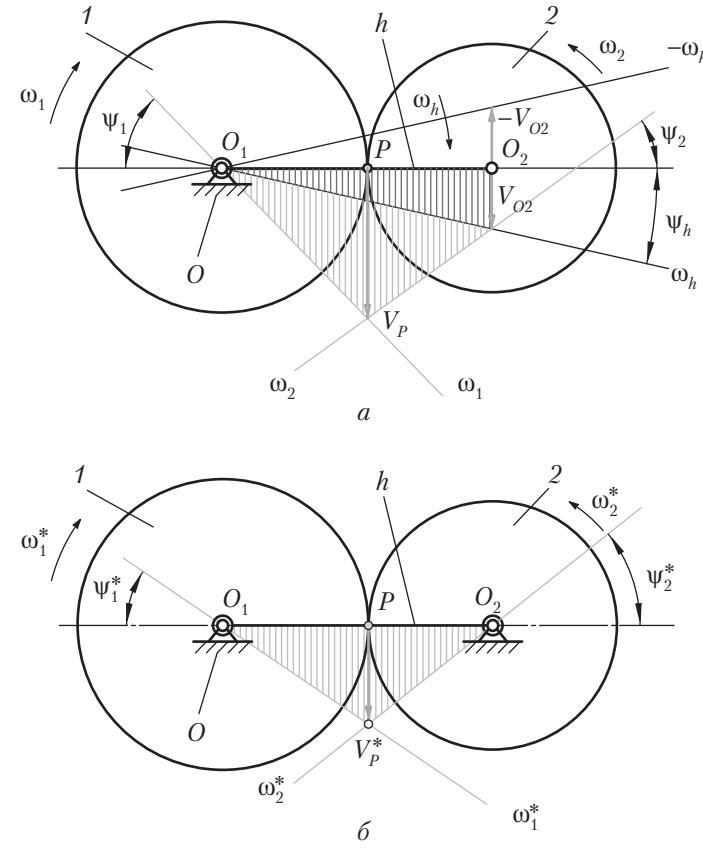


Рис. 17.3

его звеньям. Рассмотрим движение звеньев механизма относительно стойки и относительно водила. Обозначение угловых скоростей звеньев в каждом из рассматриваемых движений приведены в табл. 17.2.

Таблица 17.2

### Скорости движения звеньев механизма

Движение механизма	Звено 1	Звено 2	Звено 3( $h$ )	Звено 0( $h$ )
Относительно стойки	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_h$	$\omega_0 = 0$
Относительно водила	$\omega_1^* = \omega_1 - \omega_h$	$\omega_2^* = \omega_2 - \omega_h$	$\omega_h - \omega_h = 0$	$-\omega_h$

В движении звеньев относительно водила угловые скорости звеньев равны угловым скоростям в движении относительно стойки минус угловая скорость водила. Если в движении относительно стойки ось зубчатого колеса 2 подвижна (см. рис. 17.3, а), то в движении относительно водила оси обоих зубчатых колес неподвижны (см. рис. 17.3, б). Поэтому к движению относительно водила можно применить основную теорему зацепления.

То есть можно записать выражение, которое называется формулой Виллиса для планетарных механизмов:

$$\frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} = \frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_1 - \omega_h} = -\frac{z_1}{z_2}.$$

### Кинематическое исследование типовых планетарных механизмов графическим и аналитическим методами

#### Двухрядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением

Дано: кинематическая схема механизма,  $\omega_1$ ,  $r_i$ , числа зубьев колес —  $z_i$ .

Определить: передаточное отношение механизма.

**Аналитическое определение передаточного отношения.** В планетарном редукторе, изображенном на рис. 17.4, а, на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

- $z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;
- $z_3$ , который зацепляется с внутренним зубчатыми венцом  $z_4$  звена 3.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес с числами зубьев  $z_1$  и  $z_2$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} = -\frac{z_2}{z_1};$$

для внутреннего зацепления колес с числами зубьев  $z_4$  и  $z_3$

$$\frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = \frac{z_4}{z_3}.$$

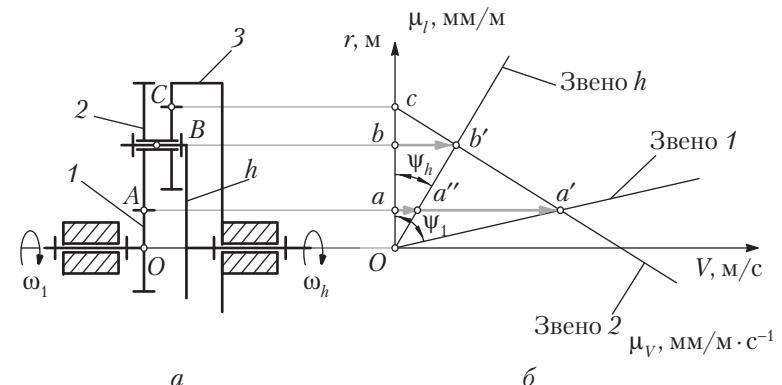


Рис. 17.4

Перемножим правые и левые части этих уравнений и получим

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} \frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3},$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = 0$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_h} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

**Графическое определение передаточного отношения.** В системе координат  $r_i O V_i$  построим треугольники распределения линейных скоростей звеньев (рис. 17.4, б). Для этого из точки  $A$  с ординатой  $r_i$  в выбранном произвольном масштабе  $\mu_V$ ,  $\text{мм}/\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$  отложим отрезок  $a-a'$ . Через конец этого отрезка и начало координат проведем прямую, которая определит распределение скоростей для точек звена 1, лежащих на оси  $r_i$ . Эта прямая образует с осью  $r_i$  угол  $\psi_1$ . Так как в точке  $C$  скорости звеньев 2 и 3 равны между собой и равны нулю, то, соединяя точку  $C$  прямой с точкой  $a'$ , получим линию распределения скоростей для звена 2. Так как точка принадлежит звеньям 2 и  $h$ , то ее скорость определяется по лучу  $c-a'$  для радиуса, равного  $r_B = (r_1 + r_2)$ , что в масштабе  $\mu_V$ ,  $\text{мм}/\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$  соответствует отрезку  $b-b'$ .

Соединяя точку  $b'$  с началом координат прямой, найдем линию распределения скоростей для водила. Эта линия образует с осью  $r_i$  угол  $\psi_h$ . Передаточное отношение планетарного механизма, определенное по данным графическим построениям, можно записать так:

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_h} = \frac{aa'}{aa''}.$$

### Однорядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением

Механизм изображен на рис. 17.5, а, б.

**Аналитическое определение передаточного отношения.** По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес с числами зубьев  $z_1$  и  $z_2$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} = -\frac{z_2}{z_1};$$

для внутреннего зацепления колес с числами зубьев  $z_2$  и  $z_3$

$$\frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = \frac{z_3}{z_2}.$$

Перемножим правые и левые части этих уравнений и получим

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_3}{z_1};$$

$$= 0$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_h} = -\frac{z_3}{z_1};$$

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 + \frac{z_3}{z_1}.$$

**Графическое определение передаточного отношения** (рис. 17.5, б).

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_h} = \frac{aa'}{aa''}.$$

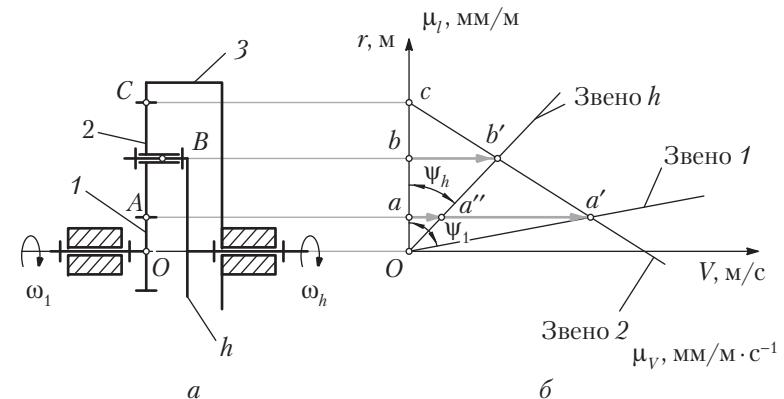


Рис. 17.5

### Двухрядный механизм с двумя внешними зацеплениями

**Аналитическое определение передаточного отношения.** В планетарном редукторе, изображенном на рис. 17.6, а, на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

- $z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;
- $z_3$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_4$  звена 3.

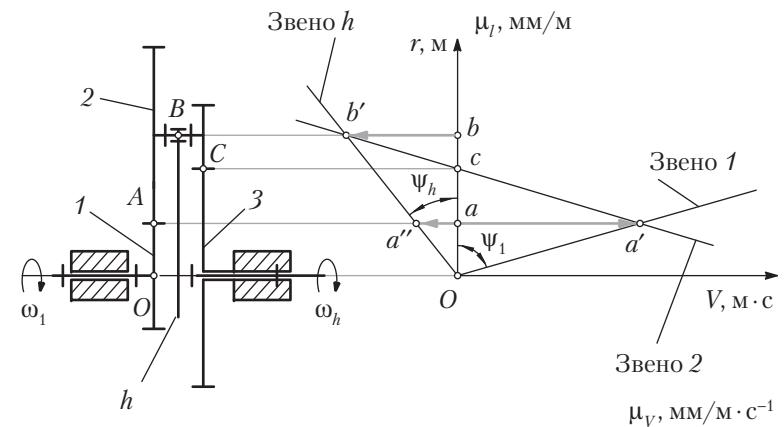


Рис. 17.6

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес с числами зубьев  $z_2$  и  $z_1$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} = -\frac{z_2}{z_1};$$

для внешнего зацепления колес с числами зубьев  $z_4$  и  $z_3$

$$\frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножим правые и левые части этих уравнений и получим

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\cancel{\omega_2 - \omega_h}} \frac{\cancel{\omega_2 - \omega_h}}{\cancel{\omega_3 - \omega_h}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$= 0$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_h} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

**Графическое определение передаточного отношения** (рис. 17.6, б).

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_h} = \frac{aa'}{aa''}.$$

### Двухрядный механизм с двумя внутренними зацеплениями

**Аналитическое определение передаточного отношения.** В планетарном редукторе, изображенном на рис. 17.7, а, на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

- $z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;
- $z_3$ , который зацепляется с внутренним зубчатым венцом  $z_4$  звена 3.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внутреннего зацепления колес с числами зубьев  $z_2$  и  $z_1$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} = \frac{z_2}{z_1};$$

для внутреннего зацепления колес с числами зубьев  $z_4$  и  $z_3$

$$\frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножим правые и левые части этих уравнений и получим

$$\frac{\cancel{\omega_1 - \omega_h}}{\cancel{\omega_2 - \omega_h}} \frac{\cancel{\omega_2 - \omega_h}}{\cancel{\omega_3 - \omega_h}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$= 0$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_h} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

**Графическое определение передаточного отношения** (рис. 17.7, б).

$$u_{1h}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_h} = \frac{bb'}{bb''}.$$

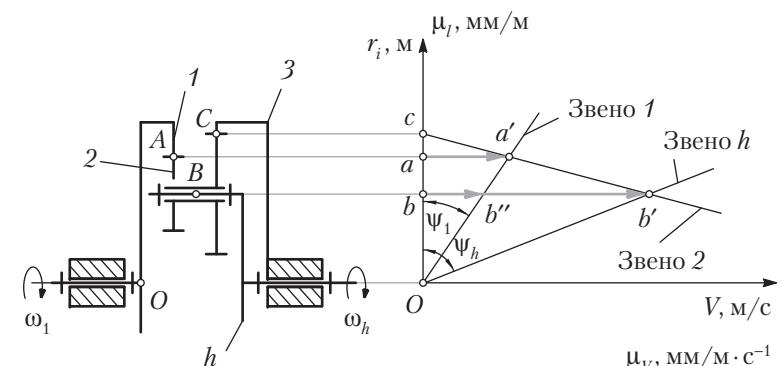


Рис. 17.7

### Контрольные вопросы и задания к лекции 17

1. Какой зубчатый механизм называется сложным?
2. Какой механизм называется планетарным?
3. Как определить передаточное отношение одной из схем планетарного механизма аналитическим способом?
4. Какова цель применения метода обращения движения при кинематическом анализе планетарного механизма?
5. Как используется графический (аналитический) метод для определения угловых скоростей зубчатых колес планетарных механизмов?

### Лекция 18

#### Проектирование многопоточных планетарных механизмов. Постановка задачи синтеза

При проектировании многопоточных планетарных механизмов необходимо кроме требований технического задания выполнять ряд условий, связанных с особенностями планетарных и многопоточных механизмов. Задача проектирования и в этом случае может быть разделена на структурный и кинематический синтез механизма. При структурном синтезе определяется структурная схема механизма, при кинематическом — определяются числа зубьев колес, так как радиусы зубчатых колес прямо пропорциональны числам зубьев

$$r_i = \frac{mz_i}{2}.$$

Для типовых механизмов первая задача сводится к выбору схемы из набора типовых схем. При этом руководствуются рекомендуемым для схемы диапазоном передаточных отношений и примерными оценками ее КПД. Для рассматриваемых схем эти данные приведены в табл. 17.1. После выбора схемы механизма необходимо определить сочетание чисел зубьев его колес, которые обеспечат выполнение условий технического задания. Для редуктора — это передаточное отношение и величина момента сопротивления на выходном валу. Передаточное отношение задает условия выбора относительных размеров зубчатых колес — чисел зубьев колес; крутящий момент задает условия выбора абсолютных размеров — модулей зубчатых зацеплений. Так как для определения модуля необходимо выбрать материал зубчатой пары и вид его термообработки, то на первых этапах проектирования принимают модуль зубчатых колес

равным единице, т.е. решают задачу кинематического синтеза механизма в относительных величинах.

При кинематическом синтезе (подборе чисел зубьев колес) задача формулируется так: для выбранной схемы планетарного механизма при заданном числе силовых потоков (или числе сателлитов  $k$ ) и заданном передаточном отношении  $u$  необходимо подобрать числа зубьев колес  $z_i$ , которые обеспечивают выполнение ряда условий.

### Условия подбора чисел зубьев. Вывод расчетных формул для условий соосности, соседства и сборки

Условия, которые необходимо выполнить при подборе чисел зубьев колес типового планетарного механизма:

- заданное передаточное отношение с требуемой точностью;
- соосность входного и выходного валов механизма;
- свободное размещение (соседство) нескольких сателлитов;
- сборка механизма при выбранных числах зубьев колес;
- отсутствие подрезания зубьев с внешним зацеплением;
- отсутствие заклинивания зубьев во внутреннем зацеплении;
- минимальные относительные габариты механизма.

Рассмотрим эти условия подробнее на примере двухрядного планетарного механизма с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 18.1).

1. Обеспечение заданного передаточного отношения с требуемой точностью. Принимаем требуемую точность  $\pm 5\%$ , тогда для рассматриваемой схемы механизма

$$u_{1h} = \left[ 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \right] (0,95...1,05).$$

2. Обеспечение соосности входного и выходного валов. Для этого необходимо, чтобы межосевое расстояние в передаче внешнего зацепления (первый ряд) равнялось меж-

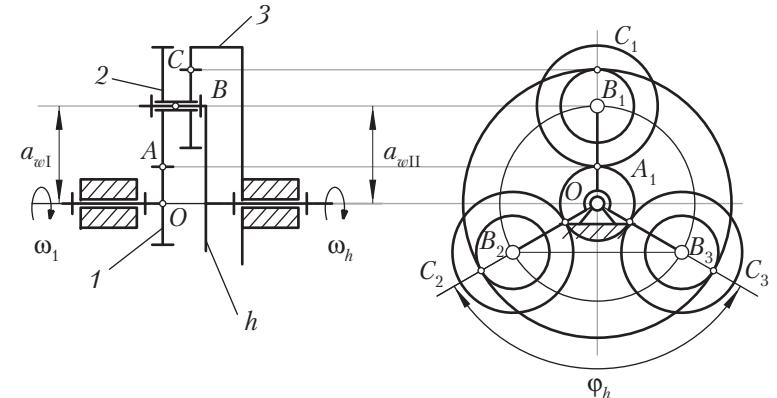


Рис. 18.1

осевому расстоянию в передаче внутреннего зацепления (второй ряд), т.е.

$$\begin{aligned} a_{wI} &= a_{wII}; \quad a_{wI} = r_{w1} + r_{w2} = r_1 + r_2; \\ a_{wII} &= r_{w4} - r_{w3} = r_4 - r_3. \end{aligned}$$

Обычно в планетарных механизмах применяются зубчатые колеса без смещения, для которых  $x_i = 0$  и  $r_{wi} = r_i = z_i m / 2$ .

Тогда

$$r_1 + r_2 = r_4 - r_3 \Rightarrow m_1(z_1 + z_2) = m_{II}(z_4 - z_3).$$

Принимаем, что  $m_1 = m_{II} = m$ , и получаем условие соосности для данной схемы механизма

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3.$$

3. Обеспечение условия соседства сателлитов (при числе сателлитов  $k > 1$ ). Сателлиты размещаются на окружности радиуса  $a_w$ . Вершины зубьев сателлитов не будут мешать движению друг друга, если выполняется условие

$$\max(d_{a_{2,3}}) < l_{B2B3}.$$

Для зубчатых колес без смещения ( $h_a^* = 1$ ,  $x_{2,3} = 0$ ,  $2\Delta y = 0$ ) максимальный из диаметров сателлитов равен

$$\begin{aligned} \max(d_{a_{2,3}}) &= \max[(z_{2,3} + 2h_a^* + 2x_{2,3} - 2\Delta y)m] = \\ &= \max[(z_{2,3} + 2)m]. \end{aligned}$$

Расстояние между осями сателлитов

$$\begin{aligned} l_{B2B3} &= 2a_w \sin(\varphi_h/2) = 2(r_1 + r_2) \sin(\pi/k) = \\ &= (z_1 + z_2) m \sin(\pi/k). \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в неравенство и получим условие соседства

$$\begin{aligned} \max[(z_{2,3} + 2)m] &= (z_1 + z_2)m \sin(\pi/k); \\ \sin(\pi/k) &= \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)]. \end{aligned}$$

4. Обеспечение возможности сборки механизма с подобранными числами зубьев колес при заданном числе сателлитов  $k > 1$ . Для вывода формулы условия сборки воспользуемся следующим методом.

Допустим, что все сателлиты устанавливаются на оси водила в одном и том же положении — точке  $B_1$ . После установки первого сателлита зубья колес  $z_1$  и  $z_4$  определенным образом установились относительно зубьев венцов сателлита. Тогда установить второй сателлит в этом же положении будет можно, если после поворота водила на угол  $\varphi_h$  колесо  $z_1$  повернется на целое число угловых шагов  $B$ . При этом зубья колес  $z_1$  и  $z_4$  установятся относительно зубьев венцов сателлита так же, как и при установке первого сателлита.

Угол поворота водила

$$\varphi_h = 2\pi/k.$$

Угловой шаг первого колеса

$$\tau_1 = 2\pi/z_1.$$

Угол, на который повернется первое колесо при повороте водила на угол  $\varphi_h$ ,

$$\varphi_1 = \varphi_h u_{1h} \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi u_{1h}/k.$$

Число угловых шагов  $\tau_1$  в угле

$$\varphi_1 \Rightarrow B = \varphi_1 \tau_1,$$

где  $B$  — произвольное целое число.

Подставляем все эти выражения в формулу для  $B$  и после преобразований получаем

$$2\pi u_{1h} z_1 / (k \cdot 2\pi) = B \Rightarrow u_{1h} z_1 / k = B.$$

Поворачивать водило можно на угол  $\varphi_h$  плюс произвольное число  $p$  полных оборотов водила, т.е.

$$\varphi_h = 2\pi/k + 2\pi p = 2\pi/k(1 + kp).$$

С учетом этого формула для условия сборки примет следующий вид:

$$U_{1h} z_1 / k (1 + kp) = B.$$

5. Обеспечение отсутствия подрезания зубьев колес с внешними зубьями. Это условие обеспечивается, если для всех колес с внешними зубьями выполняется неравенство  $z_i > z_{\min}$ .

6. Обеспечение отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении. Это условие для передачи внутреннего зацепления, состоящей из колес без смещения, можно обеспечить при выполнении следующих неравенств:

$$\begin{aligned} z_{c \text{ внеш. зуб}} &> 20, \quad z_{c \text{ внутр. зуб}} > 85; \\ z_d &= z_{c \text{ внутр. зуб}} - z_{c \text{ внеш. зуб}} > 8. \end{aligned}$$

7. Обеспечение минимальных габаритов механизма. Для рассматриваемой схемы условие обеспечения минимального габаритного размера  $R$  можно записать так:  $R = \min [\max(z_1 + 2z_2), (k_K z_4)]$ , где  $k_K$  — коэффициент, учитывающий особенности конструкции зубчатого колеса с внутренними зубьями.

### Подбор чисел зубьев по методу сомножителей

Рассмотрим один из методов, используемых при подборе чисел зубьев планетарного редуктора, — метод сомножителей. Метод позволяет объединить в расчетные формулы некоторые из условий подбора (условия 1, 2, 5 и 6). Выполнение остальных условий для выбранных чисел зубьев проверяется. Из первого условия выразим внутреннее передаточное отношение механизма. Внутренним называют передаточное отношение механизма при остановленном водиле, т.е. механизма с неподвижными осями или рядного механизма.

$$u_{14}^h = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{u_{1h}}{(0,95 \dots 1,05) - 1} = \frac{BD}{AC}.$$

Разложим внутреннее передаточное отношение  $u_{14}^h$  на сомножители — некоторые целые числа  $A, B, C$  и  $D$ . При этом сомножитель  $A$  соответствует числу зубьев  $z_1$ ,  $B = z_2$ ,  $C = z_3$  и  $D = z_4$ . Сомножители могут быть произвольными целыми числами, комбинация  $(BD)/(AC)$  которых равна  $u_{14}^h$ .

Для рассматриваемой схемы желательно придерживаться следующих диапазонов изменения отношений между сомножителями:

$$B/A = z_2/z_1 = 1\dots 6 \text{ — внешнее зацепление;}$$

$$D/C = z_4/z_3 = 1,1\dots 8 \text{ — внутреннее зацепление.}$$

Включим в рассмотрение условие соосности

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3$$

и выразим его через сомножители

$$a(A+B) = b(D-C).$$

Если принять, что коэффициенты  $a$  и  $b$  равны

$$a = (D - C);$$

$$b = (A + B),$$

то выражение превращается в тождество.

Из этого тождества можно записать:

$$z_1 = (D - C)Aq;$$

$$z_3 = (A + B)Cq;$$

$$z_2 = (D - C)Bq;$$

$$z_4 = (A + B)Dq,$$

где  $q$  — произвольный множитель, выбором которого обеспечиваем выполнение условий 5 и 6.

Зубья колес планетарного механизма, рассчитанные по этим формулам, удовлетворяют условиям 1, 2, 5 и 6. Проверяем эти зубья по условиям 3 (соседства) и 4 (сборки) и, если они выполняются, считаем этот вариант одним из возможных решений. Если после перебора рассматриваемых сочетаний сомножителей получим несколько возможных решений, то проводим их сравнение по условию 7. Решением задачи будет сочетание чисел зубьев, обеспечивающее минимальный габаритный размер  $R$ .

### Примеры подбора чисел зубьев для типовых планетарных механизмов

1. Двухрядный планетарный редуктор с одним внешним и с одним внутренним зацеплением.

Дано: схема планетарного механизма,  $u_{1h} = 13$ ,  $k = 3$ .

Определить:  $z_i$  (числа зубьев колес редуктора).

Внутреннее передаточное отношение механизма

$$u_{1h}^h = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{u_{1h}}{(0,95\dots 1,05)-1} = 12 = \frac{BD}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \dots$$

Для первого сочетания сомножителей:

$$z_1 = (D - C)Aq = (4 - 1) \cdot 1q = 3q; \quad z_1 = 18 > 17;$$

$$z_2 = (D - C)Bq = (4 - 1) \cdot 3q = 9q; \quad q = 6; \quad z_2 = 54 > 17;$$

$$z_3 = (A + B)Cq = (3 + 1) \cdot 1q = 4q; \quad z_3 = 24 > 20;$$

$$z_4 = (A + B)Dq = (3 + 1) \cdot 4q = 16q; \quad z_4 = 96 > 85.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/3) > (54 + 2)/(18 + 54);$$

0,866 > 0,77 — условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h} z_1 / k)(1 + kp) = B;$$

$$(13 \cdot 18/3)(1 + 3p) = B \text{ — целое при любом } p.$$

Условие сборки тоже выполняется, т.е. получен первый вариант решения.

Габаритный размер  $R = (18 + 2 \cdot 54) = 126$ .

Для второго сочетания сомножителей:

$$z_1 = (D - C)Aq = (6 - 1) \cdot 1q = 5q; \quad z_1 = 45 > 17;$$

$$z_2 = (D - C)Bq = (6 - 1) \cdot 2q = 10q; \quad q = 9; \quad z_2 = 90 > 17;$$

$$z_3 = (A + B)Cq = (2 + 1) \cdot 1q = 3q; \quad z_3 = 27 > 20;$$

$$z_4 = (A + B)Dq = (2 + 1) \cdot 68q = 18q; \quad z_4 = 162 > 85.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/3) > (90 + 2)/(45 + 90);$$

$0,866 > 0,681$  — условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h}z_1/k)(1 + kp) = B;$$

$$(12 \cdot 45/3)(1 + 3p) = B \text{ — целое при любом } p.$$

Условие сборки тоже выполняется, и получен второй вариант решения.

Габаритный размер  $R = (45 + 2 \cdot 90) = 225$ .

Для третьего сочетания сомножителей:

$$z_1 = (D - C)Aq = (3 - 1) \cdot 1q = 2q; \quad z_1 = 18 > 17;$$

$$z_2 = (D - C)Bq = (3 - 1) \cdot 4q = 8q; \quad q = 9; \quad z_2 = 72 > 17;$$

$$z_3 = (A + B)Cq = (1 + 4) \cdot 1q = 5q; \quad z_3 = 45 > 20;$$

$$z_4 = (A + B)Dq = (1 + 4) \cdot 3q = 15q; \quad z_4 = 135 > 85.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/3) > (70 + 2)/(18 + 72);$$

$0,866 > 0,8$  — условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h}z_1/k)(1 + kp) = B;$$

$$(14 \cdot 18/3)(1 + 3p) = B \text{ — целое при любом } p.$$

Условие сборки тоже выполняется, и получен третий вариант решения.

Габаритный размер  $R = (18 + 2 \cdot 72) = 162$ .

Из рассмотренных трех вариантов наименьший габаритный размер получен в первом. Этот вариант и будет решением нашей задачи.

2. Однорядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением (рис. 18.2).

Дано: схема планетарного механизма,  $u_{1h} = 7$ ;  $k = 3$ .

Определить:  $z_i$  (числа зубьев колес редуктора).

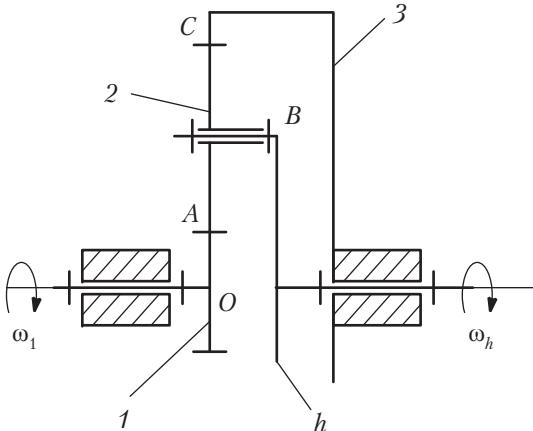


Рис. 18.2

Для однорядного планетарного механизма задача подбора чисел зубьев может решаться без применения метода сомножителей. Для этого задаемся для первого колеса числом зубьев больше 17 и кратным  $u_{1h}$  или  $k$ .

В нашем примере принимаем

$$z_1 = 18 > 17.$$

Тогда из формулы передаточного отношения можно определить число зубьев третьего колеса:

$$u_{1h} = (1 + z_3/z_1)(0,95...1,05);$$

$$z_3 = [u_{1h}/(0,95...1,05) - 1]z_1;$$

$$z_3 = [7/(0,95...1,05) - 1] \cdot 18 = 108.$$

Число зубьев второго колеса определим из условия соосности:

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2;$$

$$z_2 = (z_3 - z_1)/2 = (108 - 18)/2 = 45.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_2 + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/3) > (45 + 2)/(18 + 45);$$

$0,866 > 0,73$  — условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h} z_1 / k) (1 + kp) = B;$$

$(7 \cdot 18/3)(1 + 3p) = B$  – целое при любом  $p$  (условие сборки выполняется).

В данном случае нет необходимости сравнивать варианты по габаритам, так как мы приняли минимально допустимую величину  $z_1$ , то получим редуктор минимальных размеров.

3. Двухрядный механизм с двумя внешними зацеплениями (рис. 18.3).

Дано: схема планетарного механизма,  $u_{h1} = -24$ ;  $k = 3$ .

Определить:  $z_i$  (числа зубьев колес мультипликатора).

Внутреннее передаточное отношение механизма:

$$u_{1h} = 1/u_{h1};$$

$$u_{1h}^h = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1 - u_{1h}}{(0,95 \dots 1,05)} = \frac{25}{24} = \frac{BD}{AC} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 1}{12 \cdot 2} = \dots$$

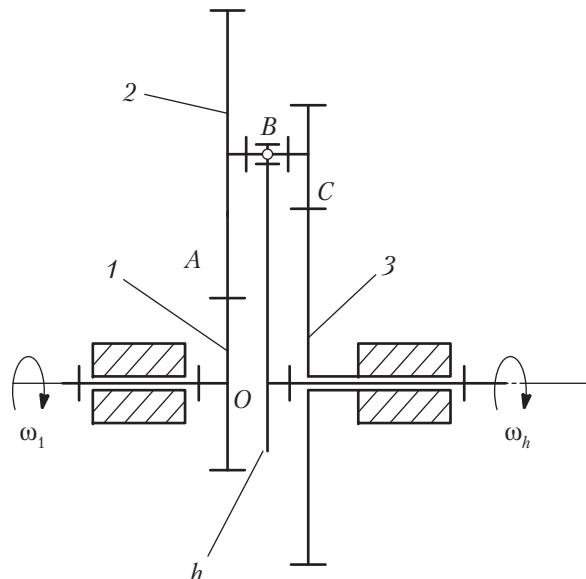


Рис. 18.3

Условие соосности для этой схемы

$$z_1 + z_2 = z_4 + z_3;$$

Выразим его через сомножители:

$$\alpha(A + B) = \beta(D + C).$$

Принимаем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = (D + C), \quad \beta = (A + B)$$

и получаем для сочетания сомножителей:

$$z_1 = (D + C)Aq = (1 + 2) \cdot 12q = 36q; \quad z_1 = 36 > 17;$$

$$z_2 = (D + C)Bq = (1 + 2) \cdot 25q = 75q; \quad q = 1; \quad z_2 = 75 > 17;$$

$$z_3 = (A + B)Cq = (12 + 25) \cdot 2q = 74q; \quad z_3 = 74 > 17;$$

$$z_4 = (A + B)Dq = (12 + 25) \cdot 1q = 37q; \quad z_4 = 37 > 17.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/3) > (75 + 2)/(36 + 75);$$

$0,866 > 0,694$  – условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h} z_1 / k) (1 + kp) = B;$$

$$[18/(-24 \cdot 3)](1 + 3p) = B \text{ – целое при } p = 1.$$

Условие сборки тоже выполняется, т.е. получен первый вариант решения.

Габаритный размер

$$R = (36 + 2 \cdot 75) = 186.$$

Аналогичным образом рассматриваются другие сочетания сомножителей, и из вариантов, удовлетворяющих первым шести условиям, выбирается тот, который обеспечивает наименьшие габариты.

4. Двухрядный механизм с двумя внутренними зацеплениями.

Дано: схема планетарного механизма (рис. 18.4),  $u_{h1} = 55$ ;  $k = 2$ .

Определить:  $z_i$  (числа зубьев колес редуктора).

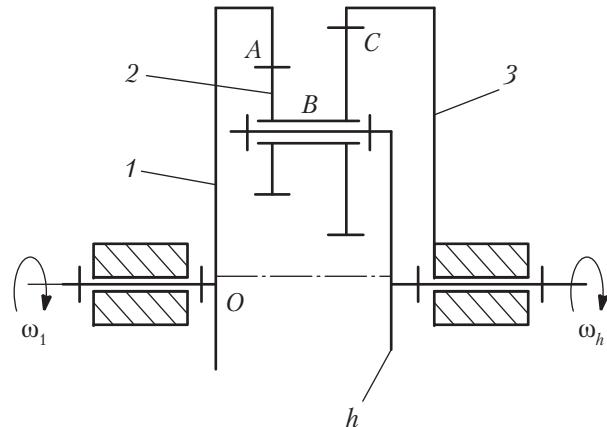


Рис. 18.4

Внутреннее передаточное отношение механизма:

$$u_{1h} = 1/u_{h1};$$

$$u_{1h}^h = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1 - u_{1h}}{(0,95...1,05)} = \frac{54}{55} = \frac{BD}{AC} = \frac{6 \cdot 9}{11 \cdot 5} = \frac{18 \cdot 3}{55 \cdot 1} = \dots$$

Условие соосности для этой схемы

$$z_1 - z_2 = z_4 - z_3.$$

Выразим его через сомножители:

$$\alpha(A - B) = \beta(D - C).$$

Принимаем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  из условия тождественности:

$$\alpha = (D - C), \quad \beta = (A - B)$$

и получаем для сочетания сомножителей:

$$z_1 = (D - C)Aq = (3 - 1) \cdot 55q = 110q; \quad z_1 = 110 > 85;$$

$$z_2 = (D - C)Bq = (3 - 1) \cdot 18q = 36q; \quad q = 1; \quad z_2 = 36 > 20;$$

$$z_3 = (A - B)Cq = (55 - 18) \cdot 1q = 37q; \quad z_3 = 37 > 20;$$

$$z_4 = (A - B)Dq = (55 - 18) \cdot 3q = 111q; \quad z_4 = 111 > 85.$$

Проверка условия соседства:

$$\sin(\pi/k) > \max[(z_{2,3} + 2)/(z_1 + z_2)];$$

$$\sin(\pi/2) > (37 + 2)/(110 - 36);$$

$1,0 > 0,527$  — условие выполняется.

Проверка условия сборки:

$$(u_{1h} z_1 / k)(1 + kp) = B;$$

$$[110/(55 \cdot 2)](1 + 3p) = B \text{ — целое при любом } p.$$

Условие сборки тоже выполняется, т.е. получен первый вариант решения.

Аналогичным образом рассматриваются другие сочетания сомножителей, и из вариантов, удовлетворяющих первым шести условиям, выбирается тот, который обеспечивает наименьшие габариты.

### Оптимальный синтез планетарных механизмов при автоматизированном проектировании

При автоматизированном проектировании с помощью компьютера можно за относительно небольшой промежуток времени получить большое количество возможных решений задачи. Сопоставляя эти решения между собой, находят то, которое удовлетворяет всем требованиям наилучшим образом. При этом перебор вариантов осуществляется в пределах заданных ограничений на параметры (в данном случае на числа зубьев колес) по какой-либо стратегии или чаще случайным образом. Программы оптимального синтеза могут использовать рассмотренные выше методы (например, метод сомножителей), а могут просто перебирать допустимые сочетания параметров и проверять их на соответствие заданным условиям. Использование компьютерных программ для синтеза планетарных механизмов позволяет сократить время проектирования и существенно улучшить качественные показатели спроектированных механизмов.

## Планетарные дифференциальные механизмы с $W = 2$

На практике в качестве дифференциальных механизмов с  $W = 2$  наиболее часто применяются планетарные зубчатые механизмы, или, как их еще называют, планетарные дифференциалы. Это название справедливо для механизмов, в которых входной энергетический поток разделяется на два выходных потока. Если выходные энергетические потоки суммируются на выходе в один выходной поток, то такие механизмы следует называть суммирующими, или интегральными.

Все рассмотренные типовые схемы механизмов можно выполнить с двумя степенями свободы. Рассмотрим в качестве примера двухрядный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением (рис. 18.5, а).

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес  $z_2$  и  $z_1$

$$(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = -z_2/z_1;$$

для внутреннего зацепления колес  $z_4$  и  $z_3$

$$(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = z_4/z_3.$$

Перемножим правые и левые части этих уравнений и получим соотношение между угловыми скоростями механизма с двумя степенями свободы:

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} \frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = u_{13}^{(h)};$$

$$u_{13}^{(h)} \omega_3 - u_{13}^{(h)} \omega_h = \omega_1 - \omega_h;$$

$$\omega_1 - (1 + u_{13}^{(h)}) \omega_h - u_{13}^{(h)} \omega_3 = 0.$$

Чтобы из механизма с двумя степенями свободы получить одноподвижный механизм, необходимо либо остановить одно из подвижных звеньев, либо связать между собой функционально (например, простой зубчатой передачей) два подвижных звена. Механизмы, образованные по

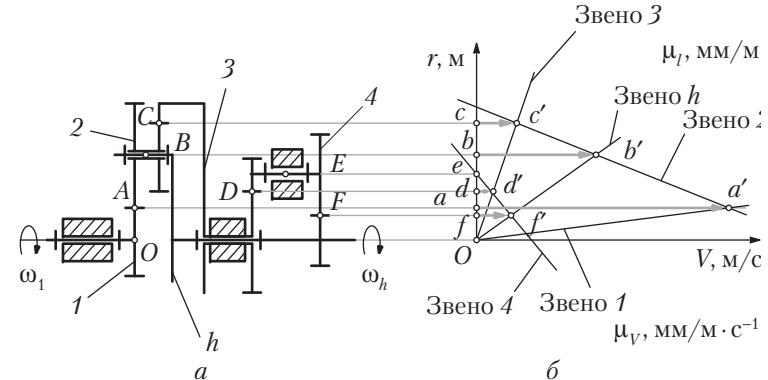


Рис. 18.5

второму способу, называются замкнутыми дифференциалами. Схема такого замкнутого дифференциального механизма приведена на рис. 18.5.

## Контрольные вопросы и задания к лекции 18

- Как формулируется задача кинематического синтеза планетарного механизма?
- Какие основные условия необходимо выполнить при синтезе многосателлитного планетарного механизма? Перечислите их.
- Запишите условие соседства для однорядного планетарного механизма с  $K = 3$ .
- Как обеспечивается условие сборки многосателлитного планетарного механизма?
- Как определяются числа зубьев (любой из схем) планетарного механизма методом сомножителей?
- Определите числа зубьев однорядного планетарного механизма с  $u_{1h} = 5$  и  $K = 3$ .
- Как устанавливаются кинематические зависимости в дифференциальном планетарном механизме графическим способом?

## Лекция 19

### Волновые зубчатые передачи

Волновая зубчатая передача — механизм, содержащий зацепляющиеся между собой гибкое и жесткое зубчатые колеса и обеспечивающий преобразование и передачу движения благодаря деформированию гибкого колеса (рис. 19.1).

Волновая зубчатая передача (ВЗП) состоит из трех основных элементов (рис. 19.1, а, б, в): гибкого колеса 1, жесткого колеса 2 и генератора волн  $h$ . Ее можно рассматривать как конструктивную разновидность планетарной передачи с внутренним зацеплением, характерной особенностью которой является использование сателлита (гибкого колеса), деформируемого в процессе передачи движения. Гибкое зубчатое колесо представляет собой тонкостенную оболочку, один конец которой соединен с валом и сохраняет цилиндрическую форму, а на другом нарезан зубчатый венец с числом зубьев  $z_r$ . При сборке этот конец оболочки деформируется на  $2w_0$  генератором волн. Контуру деформированного гибкого колеса образует относительно недеформированного две волны деформации (рис. 19.1, в). Размер по сечению Б—Б называют большой осью, а по В—В — малой осью кривой деформации. В зоне большой оси деформации происходит зацепление зубьев гибкого и жесткого колес. Для обеспечения симметрии нагружения волновой зубчатой передачи обычно используют две волны деформации и четные числа зубьев колес, которые связаны соотношением  $z_* - z_r = 2$ .

Гибкое колесо 1 поджато к жесткому 2 роликами 3, расположенными на водиле  $h$ . Такой генератор называют *роликовым*. Роликовый генератор волн может быть преобразован в дисковый генератор волн при значительном увеличении диаметров роликов 3 (рис. 19.2, а) и расположении их в параллельных плоскостях. Чтобы задать

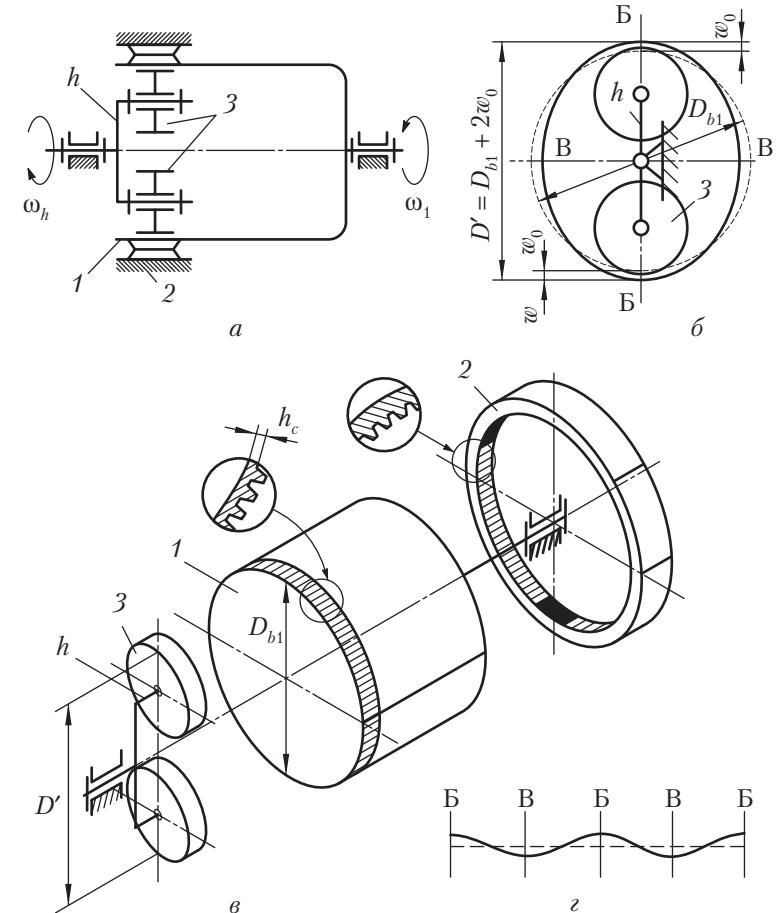


Рис. 19.1

зубчатому венцу гибкого колеса определенную принудительную форму деформации, генератор нужно выполнить в виде симметричного кулачка специального профиля. Такой генератор называют *кулачковым* (рис. 19.2, в). На кулачок 1 напрессовывают гибкий подшипник 2, чтобы уменьшить трение между гибким колесом 3 и генератором волн. Дисковые и кулачковые генераторы волн применяют в высоко-нагруженных передачах. Кроме механических генераторов волн применяют также электромагнитные, пневматические и гидравлические генераторы.

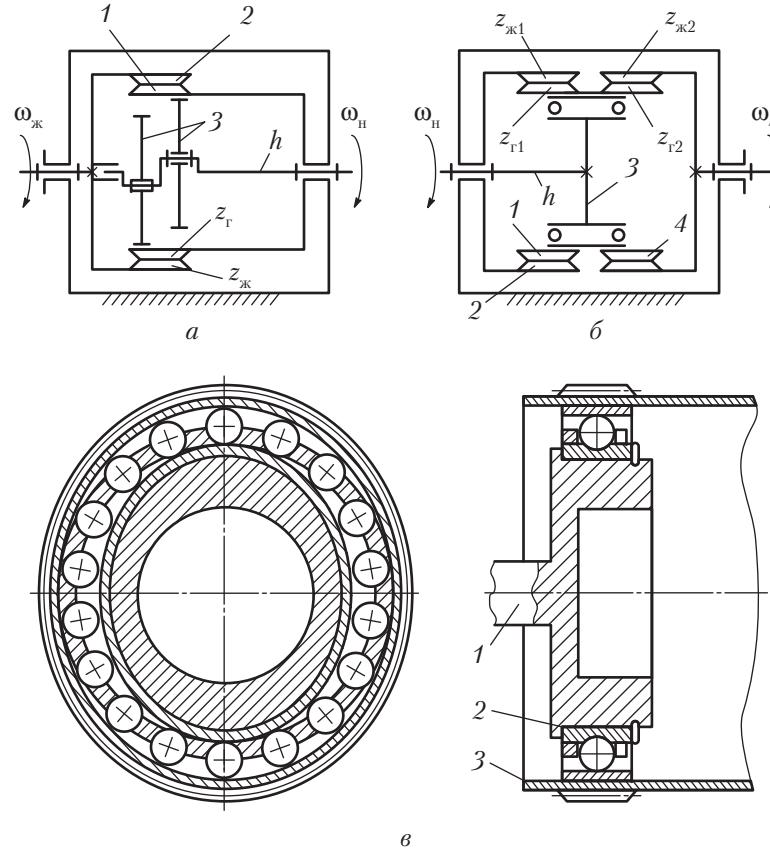


Рис. 19.2

### Кинематика волновой передачи

При вращении генератора волн обе волны деформации перемещаются по периметру гибкого колеса. В результате каждый зуб гибкого колеса за один оборот генератора волн дважды входит в зацепление с зубьями жесткого колеса. Если числа зубьев колес равны  $z_{\text{ж}}$  и  $z_r$ , а угловые шаги  $\tau_{\text{ж}} = 2\pi/z_{\text{ж}}$  и  $\tau_r = 2\pi/z_r$ , то передаточное отношение такой передачи можно подсчитать следующим образом. При остановленном жестком колесе после полного оборота генератора волн  $\varphi_h = 2\pi$ , вал гибкого колеса повернется в

противоположном движению генератора направлении на угол, равный  $\varphi_{\text{ж}} = 2\pi(z_r - z_{\text{ж}})/z_r$ .

Переходя от углов поворота к угловым скоростям, получаем передаточное отношение ВЗП от генератора волн к гибкому колесу при неподвижном жестком:

$$u_{hr}^{(ж)} = \frac{\omega_h}{\omega_{\text{ж}}} = \frac{\varphi_h}{\varphi_{\text{ж}}} = \frac{2\pi z_r}{2\pi(z_r - z_{\text{ж}})} = -\frac{z_r}{z_{\text{ж}} - z_r}. \quad (19.1)$$

В ВЗП с остановленным гибким колесом при повороте генератора волн на угол  $\varphi_{\text{ж}} = 2\pi$  жесткое колесо повернется в том же направлении на угол  $\varphi_{\text{ж}} = 2\pi(z_{\text{ж}} - z_r)/z_{\text{ж}}$ . В этом случае передаточное отношение от генератора волн к жесткому колесу при неподвижном гибком

$$u_{hж}^{(r)} = \frac{\omega_h}{\omega_{\text{ж}}} = \frac{\varphi_h}{\varphi_{\text{ж}}} = \frac{2\pi z_{\text{ж}}}{2\pi(z_{\text{ж}} - z_r)} = \frac{z_{\text{ж}}}{z_{\text{ж}} - z_r}. \quad (19.2)$$

Волновая передача может быть двухступенчатой (рис. 19.2, б). В этом случае гибкое колесо 1 выполняется в виде кольца с двумя зубчатыми венцами  $z_{r1}$  и  $z_{r2}$ , которые входят в зацепление с жесткими колесами 2 и 4, имеющими соответственно  $z_{\text{ж}1}$  и  $z_{\text{ж}2}$  зубьев. Если жесткое колесо 2 неподвижно, то движение от вала генератора волн преобразуется с помощью двух волновых зацеплений и передается на выходной вал, соединенный с жестким колесом 4. Передаточное отношение двухступенчатой ВЗП определяется формулой

$$u_{h4}^{(2)} = \frac{z_{r1} z_{\text{ж}2}}{z_{r1} z_{\text{ж}2} - z_{\text{ж}1} z_{r2}}. \quad (19.3)$$

### Особенности волнового зацепления

Гибкое колесо ВЗП при его нагружении изменяет свою начальную форму. Это происходит из-за наличия зазоров и упругости элементов, взаимодействующих с гибким колесом. Изменение формы гибкого колеса 1 ограничено с внешней стороны жестким колесом 2, а с внутренней — генератором волн  $h$ . Гибкое колесо, опирающееся на генератор волн в пределах участков постоянной кривизны  $2\beta$  (рис. 19.3),

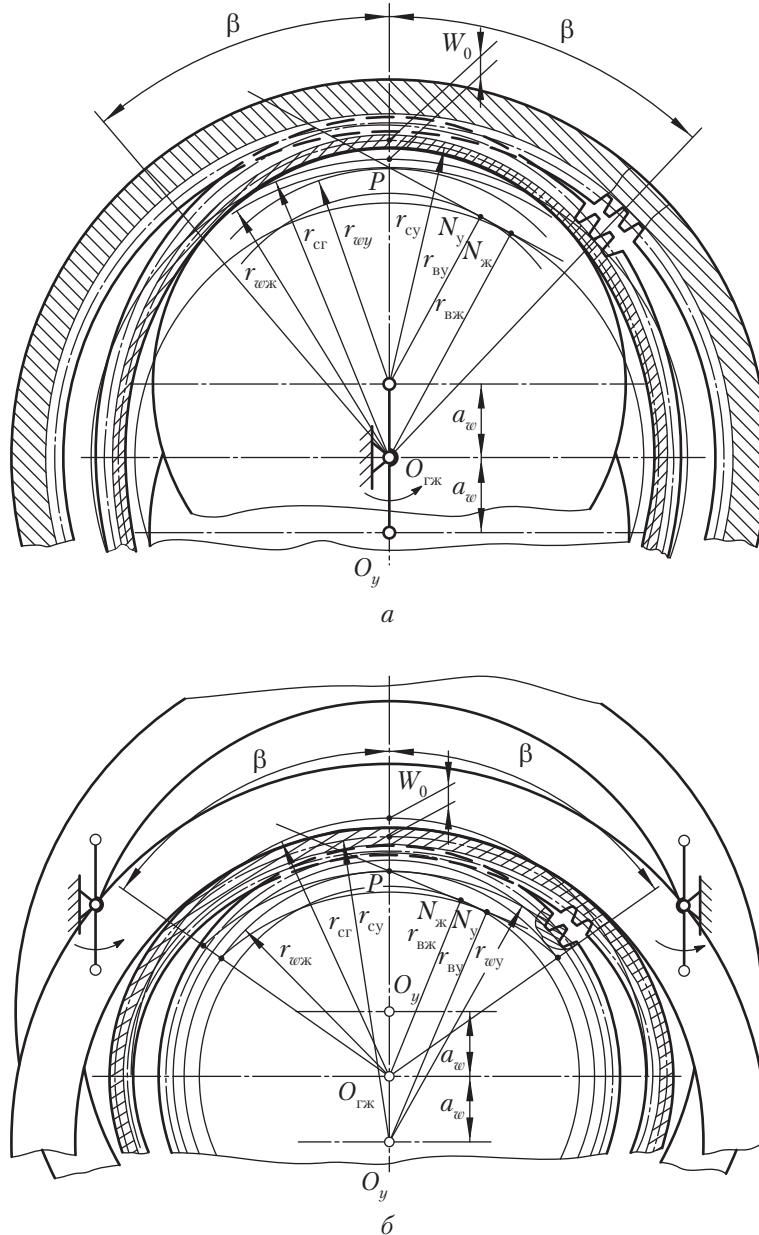


Рис. 19.3

стремится принять форму жесткого колеса. С увеличением момента, закручивающего гибкое колесо, зоны выбранных зазоров в зацеплении увеличиваются, что приводит к увеличению числа пар зубьев в зацеплении. Благодаря многопарности зацепления (нагрузку могут передавать до 40% всех пар зубьев) нагрузочная способность ВЗП выше, чем планетарной. КПД волновой передачи также выше, потому что в зацеплении зубья почти не перемещаются при прилегании гибкого колеса к жесткому. При стальных гибких колесах в одноступенчатых волновых передачах можно получить передаточное отношение 60–320, а КПД равным 0,85...0,80. Двухступенчатые ВЗП обеспечивают передаточные отношения от  $2 \cdot 10^3$  до  $10^4$  и более при КПД от 0,7 до 0,1.

Многопарность и многозонность волнового зацепления приводят к значительному усреднению ошибок изготовления и сборки, в результате чего обеспечивается высокая кинематическая точность ВЗП.

Относительно небольшая величина радиальной деформации гибкого колеса позволяет выполнить его в виде колоколообразной оболочки и изготовить герметичные ВЗП, передающие вращение через герметичную перегородку без подвижных уплотнений.

Наиболее ответственные детали ВЗП – гибкий подшипник и гибкое колесо. Гибкое колесо имеет тонкостенное донышко, допускающее осевые перемещения торца цилиндрической оболочки при ее деформировании с другого края. Длину гибкого колеса выбирают от 0,5 до  $1,1d_{cr}$ , где  $d_{cr}$  – диаметр недеформированной серединной поверхности гибкого колеса. Толщину  $h_c$  гибкого колеса под зубчатым венцом выбирают примерно равной  $0,01d_{cr}$ .

### Методика проектирования ВЗП

Существует несколько методов расчета геометрических параметров волновых зубчатых передач. Настоящая методика, разработанная на кафедре теории механизмов и машин МГТУ им. Н.Э. Баумана, основывается на предположении, что конструкции генераторов волн рассматриваемых передач обеспечивают постоянную кривизну срединного слоя деформированного гибкого колеса в пределах зон зацепления, ограниченных центральными углами  $2\beta$

(см. рис. 19.3, а). Вне этих зон гибкое колесо имеет свободную форму деформации. На участке постоянной кривизны зацепление в волновой передаче рассматривается как внутреннее эвольвентное зацепление жесткого колеса с числом зубьев  $z_{\text{ж}}$  и условного, имеющего параметры гибкого и расчетное число зубьев  $z_y$ .

Исходными параметрами для расчета являются передаточное отношение передачи, ее схема, номинальный крутящий момент на выходном валу, частота вращения генератора волн, срок службы передачи, прочностные характеристики гибкого колеса. Проектировочный расчет заключается в определении диаметра срединной поверхности гибкого колеса по изгибной прочности, из расчета на выносливость или из расчета заданного коэффициента крутильной жесткости [16]. Большой из вычисленных диаметров берется за основу для определения модуля зацепления  $m' = d_{\text{cr}}/z_r$ , который округляется до ближайшего стандартного значения.

Делительные диаметры колес и толщина  $h_c$  обода гибкого колеса под зубчатым венцом определяются по формулам:

$$\begin{aligned} d_r &= mz_r; \quad d_{\text{ж}} = mz_{\text{ж}}; \\ h_c &= (60 + z_r/5)mz_r \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Основным варьируемым параметром является относительная радиальная деформация гибкого колеса по большей оси:

$$\frac{w_0}{r_{\text{cr}}} = \left( \frac{z_{\text{ж}} - z_r}{z_r} \right) \gamma, \quad (19.5)$$

где  $\gamma = 0,9 \dots 1,2$  — коэффициент относительной радиальной деформации.

Расчетное число зубьев условного колеса равно

$$z_y = \frac{z_r}{1 \pm K_{\beta}(w_0/r_{\text{cr}})}. \quad (19.6)$$

В формуле (19.6), как и во всех последующих, содержащих двойные знаки арифметических действий, верхний знак относится к внутреннему деформированию гибкого колеса дисковым или кулачковым генератором волн, нижний — к

внешнему деформированию кольцевым генератором (см. рис. 19.3, б):

$$K_{\beta} = \frac{(4\beta/\pi) - (4/\pi)\cos\beta - 2\sin\beta}{\pi/2 - \beta - \sin\beta\cos\beta}, \quad (19.7)$$

где  $\beta$  — угловая координата участка постоянной кривизны ( $40^\circ < \beta < 65^\circ$ ).

Далее определяем радиус срединной окружности деформированного гибкого колеса (см. рис. 19.3):

$$r_{\text{cy}} = m(z_r/2 + h_{\alpha}^* + c^* + h_c/2m + x_r), \quad (19.8)$$

где  $h_{\alpha}^*$ ,  $c^*$  — параметры исходного контура;  $x_r$  — коэффициент смещения исходного контура:

$$x_r = (h_{\alpha}^* + c^* + h_c/2m)\delta, \quad (19.9)$$

где  $\delta = 1,0 \dots 1,4$  — коэффициент смещения.

При изменении величин  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  в указанных диапазонах их возможного изменения можно провести оптимизацию качества зацепления. Целевой функцией является теоретический коэффициент перекрытия.

Радиус срединной окружности недеформированного гибкого колеса

$$r_{\text{cr}} = \frac{z_r}{z_y} r_{\text{cy}}. \quad (19.10)$$

Межосевое расстояние передачи, равное эксцентриситету установки деформирующих дисков, равно

$$a_w = e = \pm r_{\text{cr}} (1 \pm w_0/r_{\text{cr}}) \pm r_{\text{cy}}. \quad (19.11)$$

Тогда угол зацепления волновой передачи

$$\alpha_w = \arccos \left( \frac{\pm(z_{\text{ж}} - z_y)m \cos\alpha}{2a_w} \right). \quad (19.12)$$

Жесткое колесо в передачах с дисковым или кулачковым генератором внутреннего деформирования, имеющее внутренние зубья, обрабатывается долбяком с числом зубьев  $z_0$ . Угол станочного зацепления жесткого колеса и долбяка

$$\operatorname{inv}\alpha_{w_0\text{ж}} = \operatorname{inv}\alpha - \left( \frac{(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_w)(z_{\text{ж}} - z_y) - 2x_r \operatorname{tg}\alpha}{z_{\text{ж}} - z_0} \right), \quad (19.13)$$

коэффициент смещения жесткого колеса

$$x_{\infty} = \left[ (\cos \alpha / \cos \alpha_{w_0 \infty}) - 1 \right] \frac{z_{\infty} - z_0}{2}. \quad (19.14)$$

Остальные параметры и исполнительные размеры элементов волновой передачи рассчитывают так же, как зубчатой передачи внутреннего эвольвентного зацепления.

**Области применения ВЗП.** Отмеченные достоинства волновой передачи определяют наиболее рациональные области ее применения: силовые и кинематические приводы общего назначения с большим передаточным отношением, задающие и исполнительные механизмы повышенной кинематической точности, быстродействующие приводы систем автоматического управления и регулирования, электромеханические приводы промышленных роботов, приводы для передачи движения в герметизированное пространство в химической, атомной и космической технике.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 19

1. Как устроена и работает волновая зубчатая передача (ВЗП)? Назовите ее основные элементы.
2. В чем отличие волновой зубчатой передачи от планетарной? Укажите достоинства и недостатки ВЗП.
3. Как происходит передача движения в ВЗП от ведущего звена к ведомому?
4. Какова разность чисел зубьев жесткого и гибкого колес волновой передачи?
5. Какие профили зубьев колес используются в ВЗП?
6. Как определяется передаточное отношение в ВЗП?

## Лекция 20

### Пространственные зубчатые передачи. Коническая зубчатая передача

В многих машинах осуществление требуемых движений механизмов связано с необходимостью передавать вращение с одного вала на другой при условии, что оси этих валов либо пересекаются, либо скрещиваются. В таких условиях применяют соответственно или коническую, или гиперболоидную зубчатую передачу.

Конической зубчатой передачей называется зубчатая передача с пересекающимися осями, у зубчатых колес которой аксионные, начальные и делительные поверхности конические. Угол  $\Sigma$  между осями  $OO_1$  и  $OO_2$  шестерни и колеса называется межосевым углом (рис. 20.1).

Если угол между осями равен  $90^\circ$ , то коническую зубчатую передачу называют **ортогональной**. В общем случае в неортогональной передаче угол, дополненный до  $180^\circ$  к

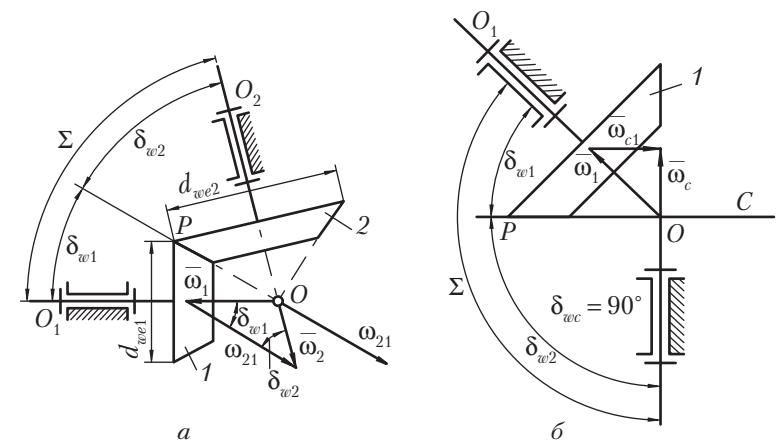


Рис. 20.1

углу между векторами угловых скоростей  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  звеньев 1 и 2, называют **межосевым углом**  $\Sigma$  (рис. 20.1, а).

Связь между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  угловых скоростей 1 и 2 определяется соотношением

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}. \quad (20.1)$$

Если через точку  $O$  пересечения осей  $O_1O$  и  $O_2O$  пропустить вектор  $\bar{\omega}_{21}$ , то он совпадет с мгновенной осью  $OP$  относительного движения ведущего и ведомого звеньев и определит конические поверхности аксоидов, называемых начальными конусами. При обозначении параметров, относящихся к начальному конусу, используют индекс  $w$ . Углы  $\delta_{w1}$  и  $\delta_{w2}$  начальных конусов определяют при решении векторного соотношения (20.1) с использованием теоремы синусов (см. рис. 20.1, а):

$$\frac{\sin \delta_{w1}}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_{w2}}{\omega_1}. \quad (20.2)$$

Отношение модулей угловых скоростей  $|\bar{\omega}_1|$  и  $|\bar{\omega}_2|$  является передаточным отношением:

$$u_{12} = \frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|} = \frac{\sin \delta_{w2}}{\sin \delta_{w1}}. \quad (20.3)$$

При заданных межосевом угле  $\Sigma$  и передаточном отношении  $u_{12}$  углы начальных конусов определяют при совместном решении соотношений (20.2) и (20.3):

$$\begin{aligned} u_{12} &= \frac{\sin \delta_{w2}}{\sin \delta_{w1}} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_{w1})}{\sin \delta_{w1}} = \\ &= \frac{\sin \Sigma \cos \delta_{w1} - \cos \Sigma \sin \delta_{w1}}{\sin \delta_{w1}} = \frac{\sin \Sigma}{\operatorname{tg} \delta_{w1}} - \cos \Sigma. \end{aligned}$$

Искомые углы  $\delta_{w1}$  и  $\delta_{w2}$  начальных конусов находят по формулам:

$$\delta_{w1} = \arctg \left( \frac{\sin \Sigma}{u_{12} + \cos \Sigma} \right) = \arctg \left( \frac{\sin \Sigma}{z_2/z_1 + \cos \Sigma} \right); \quad (20.4)$$

$$\delta_{w2} = \Sigma - \delta_{w1}. \quad (20.5)$$

Для ортогональной передачи при  $\Sigma = 90^\circ$  соотношения (20.4) и (20.5) имеют частный вид:

$$\begin{aligned} \delta_{w1} &= \arctg \left( \frac{1}{u_{12}} \right) = \arctg \left( \frac{z_1}{z_2} \right); \\ \delta_{w2} &= \arctg u_{12} = \arctg \left( \frac{z_2}{z_1} \right). \end{aligned} \quad (20.6)$$

Частным случаем неортогональной передачи является плоская коническая передача, в которой поверхность одного из начальных колес является плоскостью, и угол при вершине  $\delta_{wc} = 90^\circ$  (рис. 20.1, б).

Параметры, относящиеся к плоскому коническому колесу, обозначают с добавлением индекса  $c$  (например: число зубьев плоского колеса  $z_c$ , угловая скорость  $\omega_c$ ). Формирование колес, размеров зубьев и расположение их элементов проводят относительно базовой конической поверхности на каждом колесе, называемой **делительным конусом**. При проектировании конических передач углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  делительных конусов принимают совпадающими с углами  $\delta_{w1}$  и  $\delta_{w2}$  начальных конусов, что упрощает расчетные соотношения. Зубья образуют на колесе зубчатый венец, который располагается между конусом вершин с углом  $\delta_a$  и конусом впадин с углом  $\delta_f$  (рис. 20.2). При изготовлении заготовок

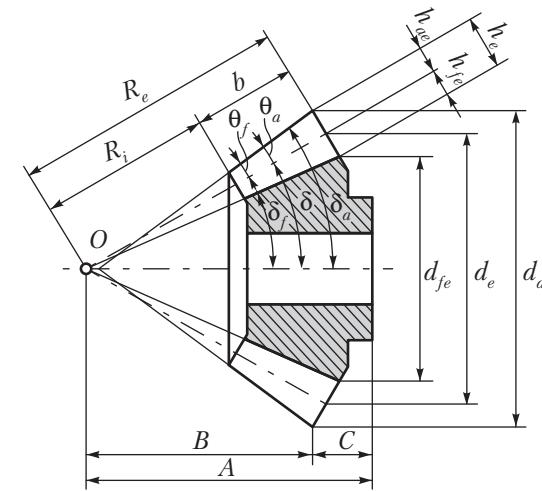


Рис. 20.2

и колес используют базовое расстояние  $A$  и размеры  $B$  до вершины конуса и  $C$  — до базовой плоскости.

Поверхность, отделяющая зуб от впадины, называется боковой поверхностью зуба. Пересечение боковой поверхности зуба с соосной поверхностью называют **линией зуба**. Линия зуба может совпадать с образующей делительного соосного конуса (прямые зубья) или иметь угол  $\beta$  наклона линии зуба на делительной поверхности. Различают виды конических колес, отличающихся по форме линий зубьев на развертке делительного конуса (рис. 20.3):  $a$  — с прямыми;

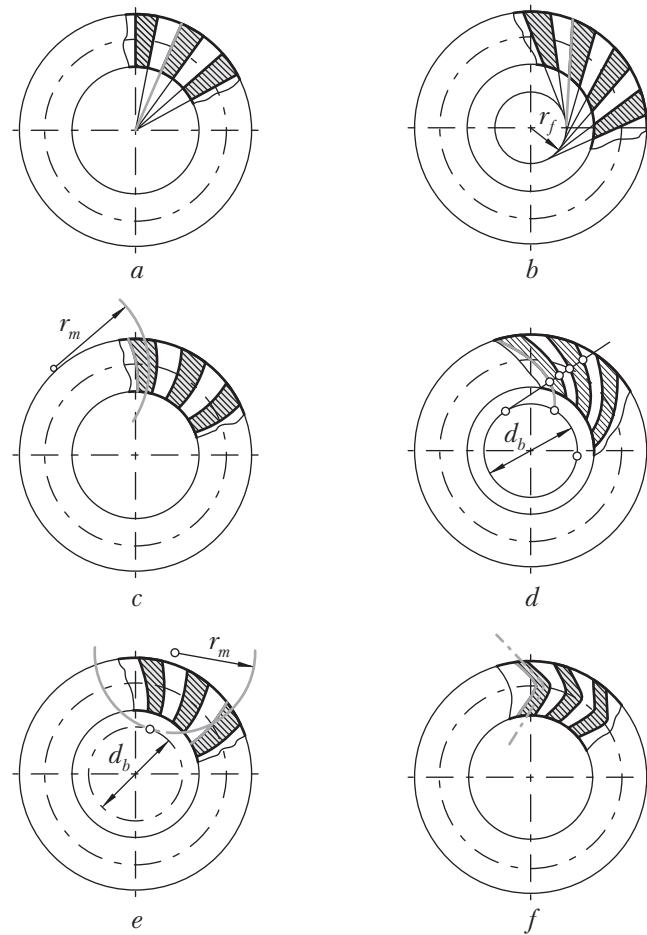


Рис. 20.3

$b$  — тангенциальными;  $c$  — круговыми;  $d, e, f$  — криволинейными зубьями. Прямозубые передачи используют для работы при легких нагрузках и невысоких скоростях (обычно при частоте вращения  $< 1000$  об/мин). Для работы в режиме максимальных нагрузок, при высоких скоростях и для обеспечения максимальной плавности работы и бесшумности используют передачи с криволинейными зубьями.

Образование боковой поверхности зубьев можно проследить по рис. 20.4. Плоскость  $\Pi$  касается основного конуса и перекатывается по нему без скольжения. Любая прямая  $KL$  на обкатывающейся плоскости  $\Pi$  в пространстве описывает коническую эвольвентную поверхность, а любая точка ( $K, L$  или др.) описывает траекторию, расположенную на сфере определенного радиуса, называемую сферической эвольвентой. В каждом сферическом сечении на боковой

Внешняя  
сферическая эвольвента

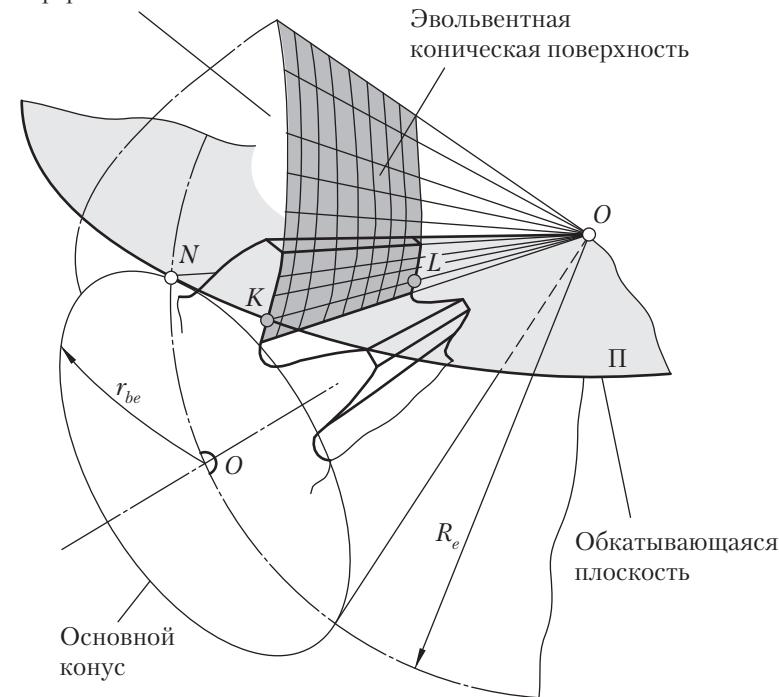


Рис. 20.4

поверхности зуба можно выделить линию пересечения, называемую профилем зуба. Профили зубьев в сечениях конического колеса отличаются друг от друга. Различают торцевые сечения: внешнее, среднее, внутреннее и текущее. При обозначении параметров в том или ином сечении добавляют соответствующий индекс (см. рис. 20.2), например, для внешнего сечения —  $e$ , для среднего —  $m$ , для внутреннего —  $i$ , для текущего —  $x$ .

Радиус  $R_e$  внешнего торцевого сечения называют внешним конусным расстоянием. Расстояние между внешним и внутренним торцевыми сечениями конического колеса называют шириной зубчатого венца и обозначают  $b$  (см. рис. 20.2).

Взаимодействие сопряженных эвольвентных конических поверхностей при заданных начальных конусах представляет коническое эвольвентное зацепление (рис. 20.5).

Полюсная прямая  $PO$ , лежащая в плоскости  $N_1O_2N_2$ , касательной к основным конусам, может рассматриваться как образующая боковых поверхностей зубьев. Любые сопряженные сферические эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  имеют линию

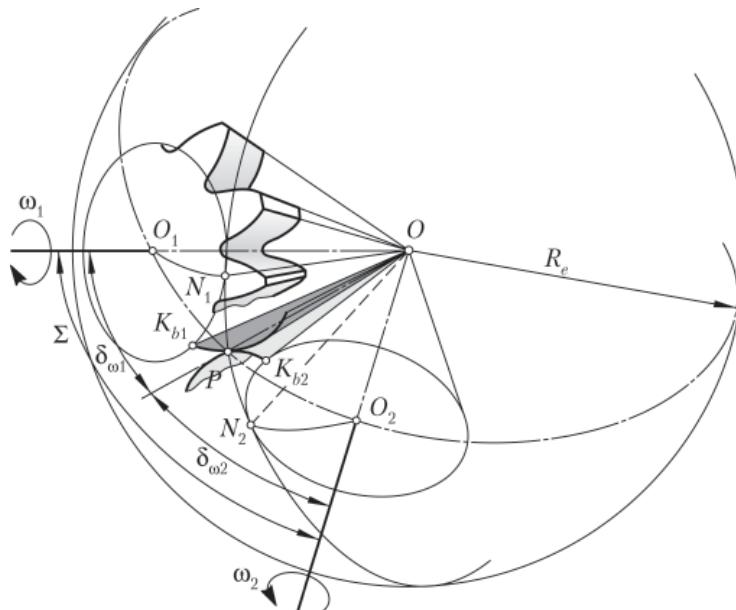


Рис. 20.5

зашепления, расположенную на сфере (например,  $N_1PN_2$ ) и являющуюся дугой большого круга сферы.

Взаимодействие сферических эвольвент описать в аналитической форме довольно сложно. Учитывая, что высотные размеры зубьев невелики по сравнению с радиусом сферы и профили зубьев расположены на узком сферическом поясе, используют инженерную методику расчета, которая заключается в использовании дополнительных конусов (рис. 20.6).

Дополнительным делительным конусом называют осную коническую поверхность, образующая которой (например,  $PO_{v1}$  или  $PO_{v2}$  на рис. 20.6) перпендикулярна образующей делительного конуса конического зубчатого колеса. Введение дополнительных конусов позволяет рассматривать взаимодействие профилей зубьев не на сфере, а на поверхности соприкасающихся со сферой дополнительных конусов. Если дополнительные конусы развернуть на плоскость, то профили зубьев становятся плоскими кривыми, достаточно близкими к обычным эвольвентам, соответствующим определенным размерам основных окружностей,

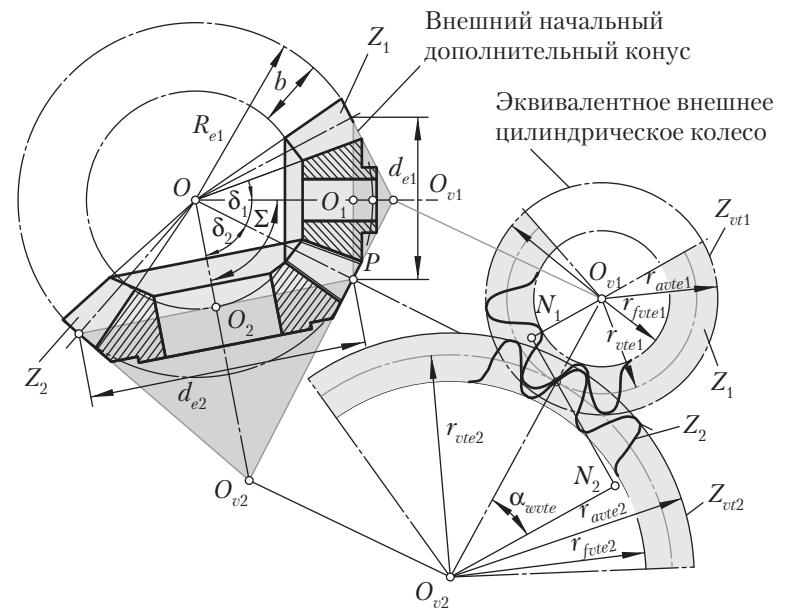


Рис. 20.6

радиусы  $O_{ve1}N_1$  и  $O_{ve2}N_2$ , которых находят для эквивалентной цилиндрической передачи. Параметры эквивалентной цилиндрической передачи имеют дополнительный индекс  $vt$ . Каждое из зубчатых колес такой передачи называют **эквивалентным цилиндрическим зубчатым колесом** с числами зубьев  $z_{vt1}$  и  $z_{vt2}$  в отличие от чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$  на конических колесах.

Связь между числами зубьев  $z_1$  и  $z_{vt1}$  или  $z_2$  и  $z_{vt2}$  легко установить при рассмотрении размеров концентрических окружностей конического и эквивалентного цилиндрического колес:

$$\begin{aligned} r_{vte1} &= 0,5d_{e1}/\cos\delta_1 = 0,5m_e z_1/\cos\delta_1 = 0,5m_e z_{vt1}; \\ r_{vte2} &= 0,5d_{e2}/\cos\delta_2 = 0,5m_e z_2/\cos\delta_2 = 0,5m_e z_{vt2}. \end{aligned}$$

**Внешний окружной модуль**  $m_e$ , соответствующий расстоянию между одноименными профилями соседних зубьев по дуге концентрической окружности конического колеса на внешнем торце, равен модулю эквивалентной цилиндрической передачи. Поэтому числа зубьев  $z_{vt1}$  и  $z_{vt2}$  можно выразить соотношениями

$$z_{vt1} = z_1/\cos\delta_1; \quad z_{vt2} = z_2/\cos\delta_2. \quad (20.7)$$

В общем случае числа  $z_{vt1}$  и  $z_{vt2}$  являются дробными и в процессе расчета не округляются, а вычисляются с точностью до 0,01.

Передаточное отношение эквивалентной цилиндрической передачи определяется следующим соотношением

$$u_{v12} = \frac{z_{vt2}}{z_{vt1}} = \frac{z_2/\cos\delta_2}{z_1/\cos\delta_1} = u_{12} \frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}. \quad (20.8)$$

Угол зацепления  $\alpha_{wvte}$  эквивалентной цилиндрической передачи, радиусы  $r_{ate1}$  и  $r_{ate2}$  окружностей вершин, радиусы  $r_{fote1}$  и  $r_{fote2}$  окружностей впадин (см. рис. 20.6) рассчитывают по формулам, аналогичным выведенным ранее для цилиндрических эвольвентных передач.

При расчете конических передач с криволинейной линией зуба (см. рис. 20.3) эквивалентная цилиндрическая передача является не прямозубой, а имеет винтовые зубья. Поэтому профили зубьев рассматривают в соответствующих нормальных сечениях. Прямозубое цилиндрическое зубчатое колесо, размеры и форма зубьев которого в основном

сечении практически идентичны размерам и форме зубьев конического зубчатого колеса с тангенциальными и криволинейными зубьями в сечении, нормальному к средней линии зуба, называют **биэквивалентным цилиндрическим колесом**, число зубьев которого обозначают  $z_{vn}$  (соответственно  $z_{vn1}$  и  $z_{vn2}$ ).

С достаточной для практических расчетов точностью коэффициент формы зубьев таких конических колес оценивают по аналогии с биэквивалентным цилиндрическим колесом, число зубьев которого:

$$z_{vn1} = \frac{z_1}{\cos\delta_1 \cos^3 \beta_n}; \quad z_{vn2} = \frac{z_2}{\cos\delta_2 \cos^3 \beta_n}, \quad (20.9)$$

где  $\beta_n$  — угол наклона средней линии зуба, соответствующий внешнему, среднему, внутреннему или другим расчетным нормальным сечениям зуба конического зубчатого колеса.

Геометрия боковых поверхностей и профилей зубьев теснейшим образом связана с технологией изготовления конических колес. Способ копирования фасонного профиля инструмента для образования профиля на коническом колесе не может быть использован, ибо размеры впадины конического колеса изменяются по мере приближения к вершине конуса. В связи с этим такие инструменты, как модульная дисковая фреза, пальцевая фреза, фасонный шлифовальный круг, могут использоваться только для черновой прорезки впадин или для образования впадин колес не выше 8-й степени точности.

Для нарезания более точных конических колес используют способ обкатки в станочном зацеплении нарезаемой заготовки с воображаемым производящим колесом. Боковые поверхности производящего колеса образуются за счет движения режущих кромок инструмента в процессе главного движения резания, обеспечивающего срезание припуска. Преимущественное распространение получили инструменты с прямолинейным лезвием. При прямолинейном главном движении прямолинейное лезвие образует **плоскую производящую поверхность**. Такая поверхность не может образовать эвольвентную коническую поверхность со сферическими эвольвентными профилями. Получаемые сопряженные конические поверхности, отличающиеся от эвольвентных конических поверхностей, называют

квазиэвольвентными (по старой терминологии — октоидальными).

Производящие колеса могут быть *плоскими* с  $\delta_{woc} = 90^\circ$  (рис. 20.7, а, б) или *плосковершинными* с  $\delta_{woc} = 90^\circ - \theta_{fwo1}$  (рис. 20.7, в) при одном и том же угле  $\delta_{wo1}$  при вершине аксоидного конуса станочного зацепления.

В первых двух случаях образуемые квазиэвольвентные конические колеса будут сопряженными, ибо производящие плоские колеса образуют совпадающую пару, у

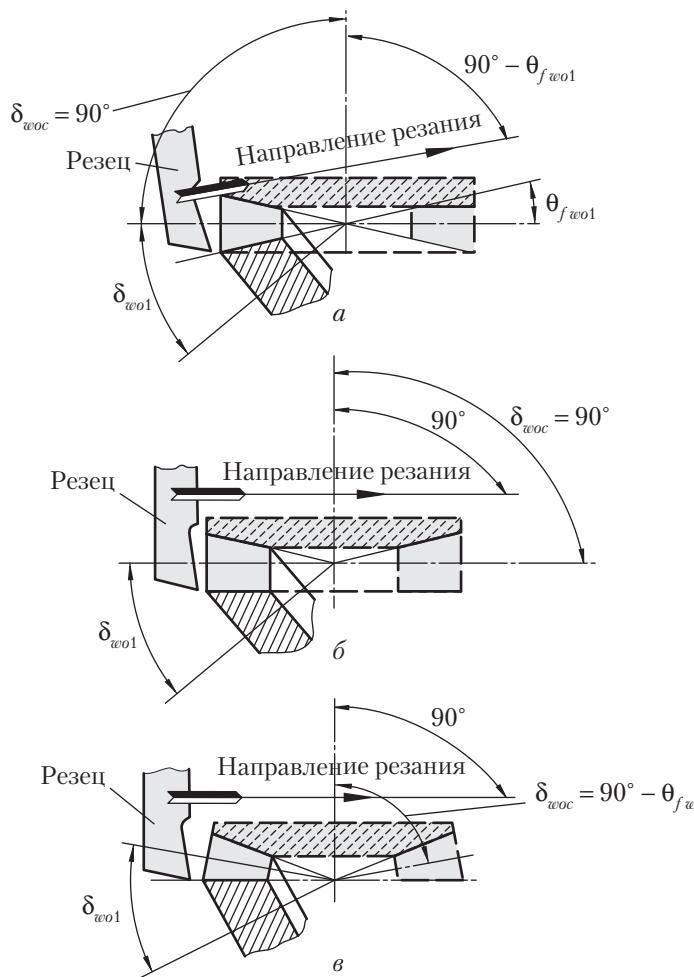


Рис. 20.7

которой боковые производящие поверхности зубьев могут совпадать при наложении во всех своих точках (как отлива и форма или шаблон и контршаблон). Однако станок, реализующий схему станочного зацепления по рис. 20.7, а, должен иметь поворотные направляющие, допускающие установку резцовых направляющих под углом  $(90^\circ - \theta_{fwo1})$ , где  $\theta_{fwo1}$  — угол ножки зуба нарезаемого колеса в станочном зацеплении. Это усложняет конструкцию станка и используется ограниченно.

В случае движения резцов без учета угла  $\theta_{fwo1}$  (см. рис. 20.7, б) высота ножки зуба по мере приближения к вершине конуса остается неизменной, что ослабляет зуб и приводит иногда к подрезу ножки.

Большинство моделей станков использует *плосковершинное производящее колесо*, у которого вершины зубьев расположены в плоскости, а угол аксоидного конуса в станочном зацеплении рассчитывается с учетом угла  $\theta_{fwo1}$  ножки зуба нарезаемого колеса. Два плосковершинных колеса не образуют совпадающую производящую пару, и поэтому нарезаемые квазиэвольвентные колеса будут несопряженными. Эти погрешности являются незначительными и ими обычно пренебрегают.

Расчетная схема, приведенная на рис. 20.8, позволяет на базе станочного зацепления конического колеса с

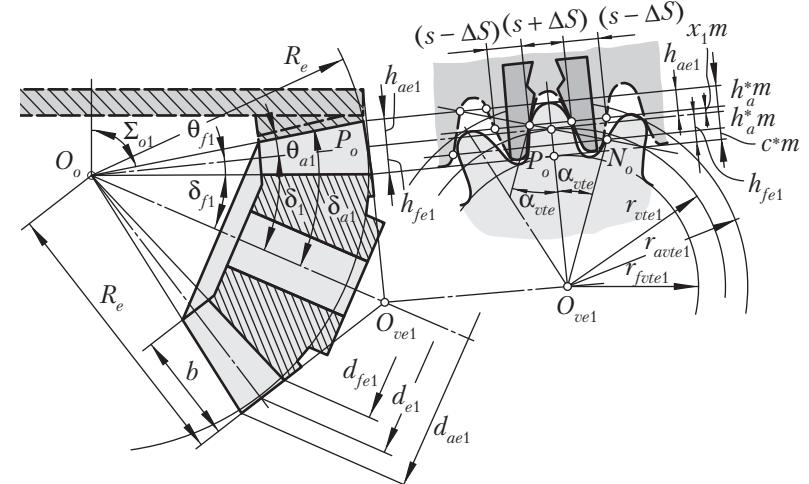


Рис. 20.8

производящим плосковершинным колесом перейти к эквивалентному станочному зацеплению с теоретическим исходным контуром. Исходный контур, совпадающий с реальным контуром, принят в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубьев конических колес, регламентирован по ряду параметров:  $\alpha = 20^\circ$ ;  $h_a^* = 1,2$ ;  $c^* = 0,2$ ;  $\rho \leq 0,3$ . Однако с учетом особенностей методов нарезания зубьев эти параметры можно изменять в пределах использования стандартного инструмента. Так, например, можно допускать неравенство толщины зуба и ширины впадины по делительной прямой за счет относительного расположения соседних резцов; не требуется строгого соответствия номинального модуля резцов модулю нарезаемого колеса. Внешний модуль может быть нестандартным и даже дробным. Можно изменять угол  $\alpha$  за счет наклона резцов.

Расчет параметров конической передачи проводят в такой последовательности (см. рис. 20.8):

число зубьев плоского колеса

$$z_c = \frac{1}{\sin \Sigma} \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos \Sigma}; \quad (20.10)$$

при  $\Sigma = 90^\circ$

$$z_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}; \quad (20.11)$$

внешнее конусное расстояние

$$R_e = 0,5m_e z_c; \quad (20.12)$$

ширина зубчатого венца  $b \leq 0,3R_e$  или  $b \leq 10m_e$ ; коэффициент ширины зубчатого венца  $k_{be} = b/R_{we} = 0,2 \div 0,3$ ;

угол делительного конуса

$$\delta_1 = \arctg(\sin \Sigma / (z_2/z_1 + \cos \Sigma)); \quad (20.13)$$

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1; \quad (20.14)$$

при  $\Sigma = 90^\circ$

$$\delta_1 = \arctg(z_1/z_2); \quad (20.15)$$

коэффициент смещения исходного контура  $x_1 = 0 \div 0,6$  в зависимости от числа зубьев  $z_1$  и передаточного отношения передачи;  $x_2 = -x_1$ ;

$$x_1 \geq x_{1\min} = 1,068 - 0,058z_1/\cos \delta_1; \quad (20.16)$$

коэффициент изменения расчетной толщины зуба исходного контура

$$x_{\tau_1} = 0,03 - 0,008(z_2/z_1 - 2,5); \quad x_{\tau_2} = -x_{\tau_1}. \quad (20.17)$$

Расчет параметров зубчатых колес проводят по следующим расчетным формулам, вывод которых основан на расчетной схеме (см. рис. 20.8):

внешняя высота головки зуба

$$h_{ae1} = (h_a^* + x_1)m_e; \quad h_{ae2} = 2h_a^*m_e - h_{ae1}; \quad (20.18)$$

внешняя высота ножки зуба

$$h_{fe1} = h_{ae2} + c^*m_e; \quad h_{fe2} = h_{ae1} + c^*m_e; \quad (20.19)$$

внешняя высота зуба

$$h_e = h_{ae} + h_{fe}; \quad (20.20)$$

внешняя окружная толщина зуба

$$s_{e1} = (0,5\pi + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha + x_{\tau_1})m_e; \\ s_{e2} = \pi m_e - s_{e1}; \quad (20.21)$$

угол ножки зуба

$$\theta_{f1} = \operatorname{arctg}(h_{fe1}/R_e); \quad (20.22)$$

$$\theta_{f2} = \operatorname{arctg}(h_{fe2}/R_e); \quad (20.23)$$

угол головки зуба

$$\theta_{a1} = \theta_{f2}; \quad \theta_{a2} = \theta_{f1}; \quad (20.24)$$

угол конуса вершин

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}; \quad \delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}; \quad (20.25)$$

угол конуса впадин

$$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}; \quad \delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}; \quad (20.26)$$

внешний делительный диаметр

$$d_{e1} = m_e z_1; \quad d_{e2} = m_e z_2; \quad (20.27)$$

внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae1} \cos \delta_1; \\ d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae2} \cos \delta_2. \quad (20.28)$$

При выборе исходных данных учитывают заданные передаточное отношение  $u_{12}$  и его допустимое отклонение в связи с тем, что числа зубьев — целые числа.

Рекомендуется назначать числа зубьев колес в пределах от 12 до 100.

Для прямозубых конических передач передаточные отношения рекомендуется назначать:  $u_{12} < 5$  — для редуктора,  $u_{12} \geq 0,35$  — для мультиплексора.

Параметры исходного контура стандартизированы в соответствии с ГОСТ 13754—81.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 20

1. Для каких целей используются конические зубчатые передачи?
2. Укажите достоинства и недостатки конических зубчатых передач.
3. Каковы особенности расчета геометрии конических колес и передач?
4. Расскажите об особенностях технологии зуборезания конических колес.
5. Как определяются углы вершин начальных конусов в конической прямозубой передаче при известных передаточном отношении и межосевом угле?

## Лекция 21

### Гиперболоидные зубчатые передачи

Гиперболоидной зубчатой передачей называется передача со скрещивающимися осями, аксонидами зубчатых колес которой являются однополостные гиперболоиды вращения, оси которых не пересекаются.

Для обеспечения точечного касания линий зубьев можно применить более простые по форме поверхности, чем гиперболоиды вращения, что упрощает изготовление зубчатых колес. Например, круглые цилиндры, касающиеся друг друга только в одной точке, лежащей на линии кратчайшего расстояния между осями колес, или конусы с несовпадающими вершинами.

Гиперболоидная зубчатая передача, у зубчатых колес которой начальные поверхности — круглые цилиндры, называется *винтовой* зубчатой передачей. Если в качестве начальных поверхностей зубчатых колес применить конусы с несовпадающими вершинами, то получим *гипоидную* зубчатую передачу (см. рис. 13.3, ж).

*Червячная* передача представляет собой гиперболоидную передачу, у зубчатых колес которой начальные и делительные поверхности отличны от конических и шестерня — червяк 1 (см. рис. 13.3, е) имеет винтовые зубья, а второе звено 2 называется червячным колесом.

*Винтовая зубчатая передача* (рис. 21.1) представляет собой гиперболоидную передачу, у зубчатых колес которой начальные поверхности, сливающиеся с делительными, — цилиндрические, а оси скрещиваются под произвольным углом  $\Sigma$ . В большинстве случаев применяют передачи с межосевым углом  $\Sigma = \beta_{w1} \pm \beta_{w2} = 90^\circ$ , где  $\beta_{w1}$  и  $\beta_{w2}$  — углы наклона линий зубьев (винтовых линий) по начальным цилиндрам; верхний знак соответствует одноименному направлению винтовых линий, нижний — разноименному.

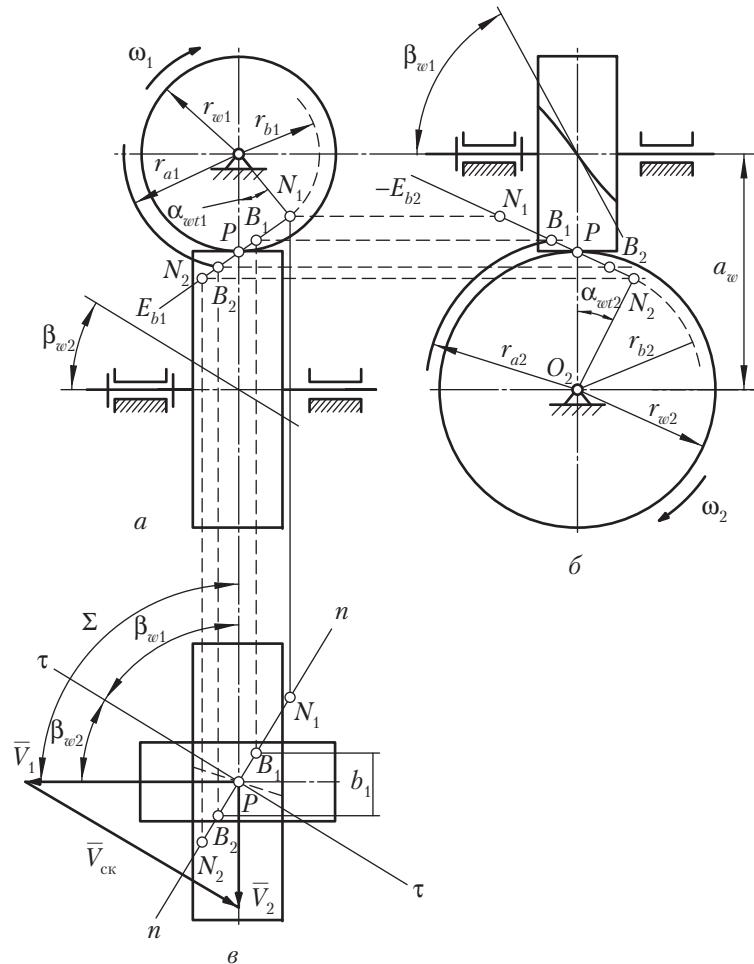


Рис. 21.1

В отличие от косозубых цилиндрических передач для винтовых зубчатых колес не является обязательным равенство углов наклона винтовых линий и разноименность их направлений.

На рис. 21.1 показаны три проекции начальных цилиндров винтовой передачи с радиусами  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  и концентричные им основные цилиндры с радиусами  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ . Винтовые линии на начальных цилиндрах показаны в положении

касания в точке  $P$  — полюсе зацепления,  $n-n$  — нормаль к ним. Общая касательная  $\tau-\tau$  составляет с осями колес соответственно углы  $\beta_{w1}$  и  $\beta_{w2}$ , сумма которых равна  $\Sigma$ .

Касательно к основным цилиндрам через полюс зацепления  $P$  проходят образующие плоскости  $E_{b1}$  и  $E_{b2}$ , в которых расположены прямолинейные образующие, боковые поверхности зубьев, составляющие углы  $\beta_{b1}$  и  $\beta_{b2}$ , с осями колес. В передачах со скрещивающимися осями производящие плоскости пересекаются по прямой, представляющей собой геометрическое место точек контакта боковых поверхностей зубьев, называемых линией зацепления. Предельные точки  $N_1$  и  $N_2$  линии зацепления отмечены на основных цилиндрах. Активная длина линии зацепления определяется точками  $B_1$  и  $B_2$  пересечения линии зацепления поверхностью цилиндров вершин зубьев колес с радиусами  $r_{a1}$  и  $r_{a2}$ .

Для колес 1 и 2, вращающихся соответственно с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , на рис. 21.1, в представлен план скоростей, построенный при расположении колеса 1 над колесом 2. Исходя из равенства нормальных составляющих  $V_1^n$ , окружных скоростей в точке касания начальных цилиндров, справедливо соотношение

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2} \cos \beta_{w2}}{r_{w1} \cos \beta_{w1}}. \quad (21.1)$$

Из этого следует положение, характерное для винтовых передач: заданное передаточное отношение  $U_{12}$  можно осуществить, выбирая произвольно отношение  $r_{w2}/r_{w1}$  или  $\cos \beta_{w1}/\cos \beta_{w2}$ .

Если передача образована винтовыми колесами с правым и левым направлением винтовых линий, то знак в равенстве (21.1) будет отрицательным. Формула (21.1) свидетельствует о многозначности решения задачи осуществления заданного передаточного отношения. Из ряда вариантов следует выбрать тот, который дает лучшие качественные показатели зацепления винтовых линий.

В нормальном сечении шаг и модуль колес винтовой передачи одинаковы, поэтому для передачи, у которой начальные и делительные цилинды сливаются, имеем  $p = p_{w1} = p_{w2} = p = \pi m$ ; в торцевых же сечениях модули различные:  $m/\cos \beta_{w1}$  и  $m/\cos \beta_{w2}$ .

Радиусы делительных и начальных цилиндров определяются по формулам:

$$r_{w1} = r_1 = \frac{mz_1}{2\cos\beta_{w1}}; \quad r_{w2} = r_2 = \frac{mz_2}{2\cos\beta_{w2}}. \quad (21.2)$$

$$a_{w1} = r_{w1} + r_{w2} = \frac{m}{2} \left[ \frac{z_1}{\cos\beta_{w1}} + \frac{z_2}{\cos\beta_{w2}} \right]. \quad (21.3)$$

Все исполнительные размеры определяются по формулам для косозубых колес (см. лекцию 16).

Скорость скольжения боковых поверхностей зубьев в направлении общей касательной к винтовым поверхностям зубьев для контактной точки, совпадающей с полюсом  $P$  (см. рис. 21.1), определяется по формуле

$$V_{ck} = \frac{V_1}{\sin\beta_{w1}} = \frac{\omega_1 r_{w1}}{\sin\beta_{w1}} = \omega_1 \frac{mz_1}{2\cos\beta_{w1}\sin\beta_{w1}}. \quad (21.4)$$

Вследствие точечного контакта рабочих поверхностей рассматриваемых передач в сочетании со значительным скольжением их нагружочная способность мала, поэтому винтовые передачи применяют большей частью в приборостроении.

*Червячная зубчатая передача*, являющаяся частным случаем гиперболоидной, используется для передачи вращения между скрещивающимися осями с постоянным отношением скоростей звеньев.

В подавляющем большинстве случаев угол скрещивания осей выбирается равным  $90^\circ$ . Известны две разновидности червячного зацепления: а) с цилиндрическим червяком (рис. 21.2, *б*) (поверхность витков такого червяка является геликоидом); б) с глоноидным червяком (рис. 21.2, *в*), по форме которого зацепление названо глоноидным. В зависимости от направления линии витка червячные передачи бывают с правым и левым направлением линии витка. В зависимости от формы винтовой поверхности червяка передачи бывают с архimedовым (архимедова спираль), конволютным (удлиненная или укороченная эвольвента) или эвольвентным червяком. Червячное колесо есть косозубое колесо с зубчатым венцом специальной горловидной формы, охватывающим червяк и образующим как бы

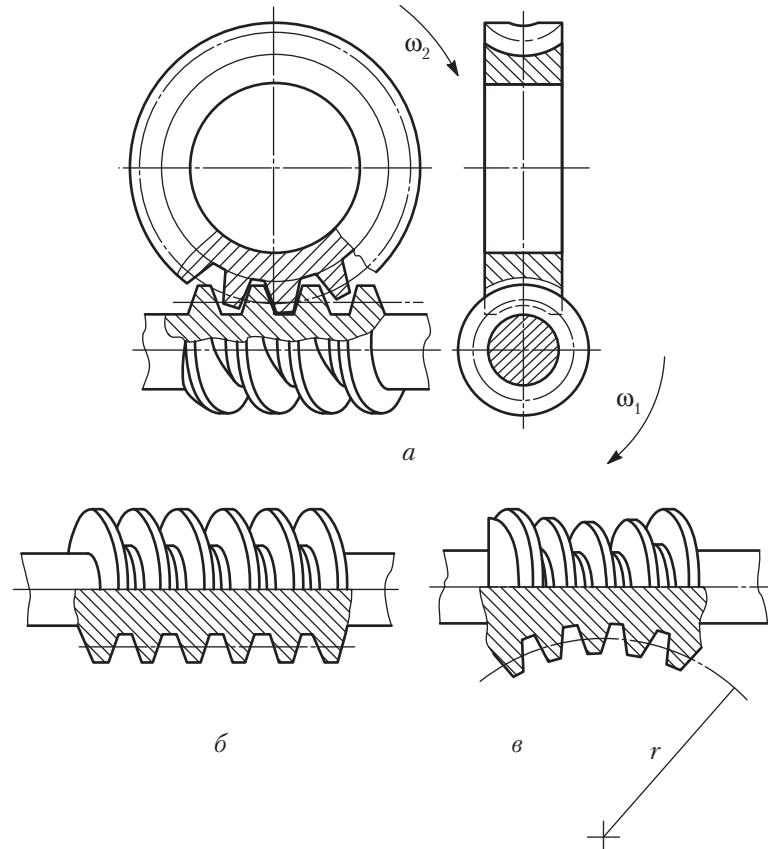


Рис. 21.2

бесконечную гайку. Работу червячной передачи можно представить как непрерывное ввинчивание винта-червяка в бесконечную гайку — червячное колесо. Червяк, как правило, является ведущим звеном, а червячное колесо — ведомым. Обратная передача движения (за редким исключением) неосуществима из-за эффекта самоторможения. На рис. 21.2, *а* представлена червячная зубчатая передача с червяком цилиндрической формы.

В отличие от винтовой передачи, составленной из цилиндрических колес с винтовыми зубьями, в червячном зацеплении поверхности зубьев имеют не точечное, а линейное касание, что позволяет использовать такое зацепление

для передачи значительных нагрузок. Другим важным достоинством червячной передачи является возможность обеспечения большого передаточного отношения — от 20 до 500. Кроме того, червячная передача, как и другие косозубые передачи, обладает высокой плавностью и бесшумностью вращения.

Однако червячные передачи имеют следующие существенные недостатки.

1. КПД этих передач по сравнению с КПД других многочисленных передач весьма низок — 0,5–0,7.

2. Повышенное скольжение контактирующих профилей вызывает их износ и требует применения для венцов червячных колес антифрикционных материалов.

3. Значительное выделение теплоты в зоне зацепления червяка с колесом требует интенсивного охлаждения передачи.

4. Большое осевое усилие на червяк требует постановки червяка на подшипники, способные воспринимать большие осевые реакции.

**Нарезание червяков и червячных колес.** По ГОСТ 18498–73 введены обозначения различных видов червяков. Например, архimedов червяк обозначается как червяк ZA, конволютный — червяк ZN, эвольвентный — червяк ZJ и т.д. Каждый из них требует особого способа нарезания. Нарезание червяков осуществляется либо резцами на токарно-винторезных станках, либо модульными фрезами на резьбоффрезерных станках.

Если резец, имеющий в сечении форму трапеции, установить на токарно-винторезном станке (рис. 21.3, а) так, чтобы верхняя плоскость резца A—A проходила через ось червяка (положение 1), то при нарезании получится винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую — архimedову спираль, а червяк будем называть архimedовым. Архimedов червяк в осевом сечении имеет прямолинейный профиль витка, аналогичный инструментальной рейке. Угол между боковыми поверхностями профиля витка у стандартных (по ГОСТ 19036–81) червяков  $\alpha = 20^\circ$ .

Если же резец повернуть на угол подъема винтовой линии червяка  $\gamma$  (положение 2) так, чтобы верхняя плоскость резца A—A была перпендикулярна винтовой линии, то при нарезании получится винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую —

конволюту, а червяк соответственно будем называть конволютным.

Для нарезания эвольвентных червяков используются два резца (рис. 21.3, б).

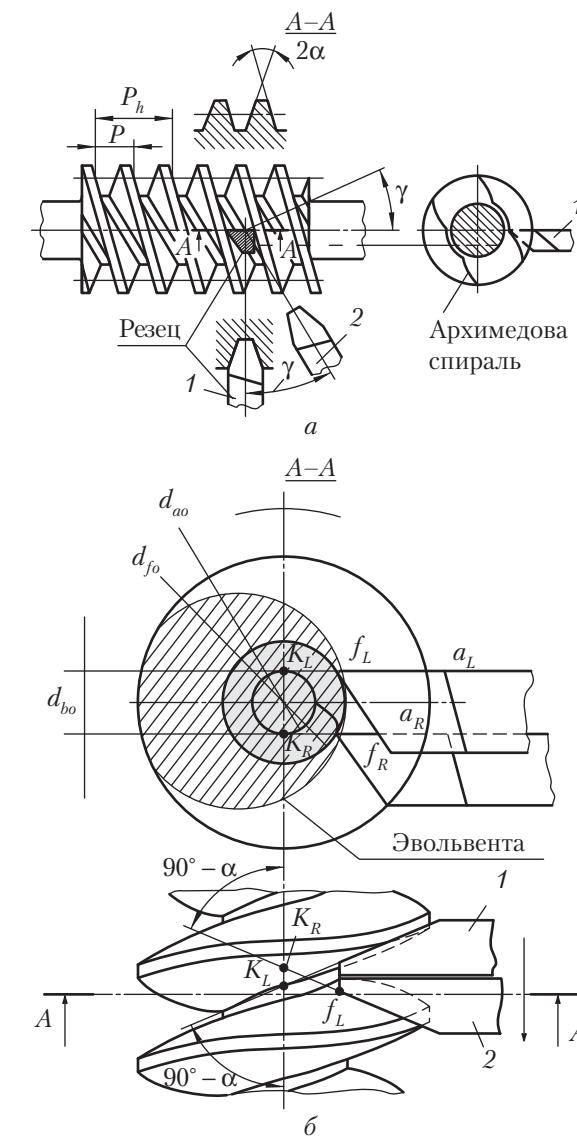


Рис. 21.3

Резец 1 с правой режущей кромкой, установленный выше оси червяка на расстоянии радиуса основного цилиндра  $d_{bo}/2$ , образует левую поверхность витка. Резец 2, установленный ниже оси червяка на расстоянии радиуса основного цилиндра, образует правую поверхность витка червяка. Режущие кромки  $a_L - f_L$  и  $a_R - f_R$  совпадают с образующими прямыми, а в результате при нарезании получается винтовая поверхность, которая в сечении, перпендикулярном оси червяка, дает кривую — эвольвенту окружности.

Червячные колеса чаще всего нарезают червячными фрезами, причем червячная фреза должна представлять собой копию червяка, с которым будет зацепляться червячное колесо. Станочное зацепление червячного колеса и фрезы воспроизводит рабочее зацепление червячной передачи. Работоспособность червячной передачи зависит от твердости и чистоты винтовой поверхности червяка, поэтому после нарезания резьбы и термообработки червяки шлифуют, а иногда и полируют.

**Кинематические и геометрические соотношения в червячной передаче.** Червячная передача характеризуется передаточным числом  $i_{12} = z_2/z_1$ , где  $z_2$  — число зубьев колеса (обычно  $z_2 = 18 - 300$ );  $z_1$  — число витков червяка (обычно  $z_1 = 1 - 4$ ), а также передаточным отношением  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = u_{12}$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — угловые скорости соответственно червяка и колеса.

Геометрические размеры червячной передачи определяются межосевым расстоянием  $a_w$ , которое зависит от диаметров червяка и колеса (рис. 21.4) и регламентируется ГОСТ 2144—76.

Главными параметрами червяка являются модуль  $m$  и коэффициент диаметра  $q$ . Модулем червяка называют линейную величину, в  $\pi$  раз меньшую расчетного шага червяка. Расчетным шагом червяка является делительный осевой шаг витков. У одновиткового червяка расчетным шагом является делительный ход витка, равный расстоянию между одноименными профилями данного витка по образующей делительного цилиндра. Коэффициент диаметра  $q$  равен отношению делительного диаметра червяка к его модулю:  $q = d_1/m$ .

Модули и коэффициенты  $q$  регламентируются стандартом по ГОСТ 19672-74. Чтобы червяк не был слишком тонким,  $q$  увеличивают с уменьшением модуля.

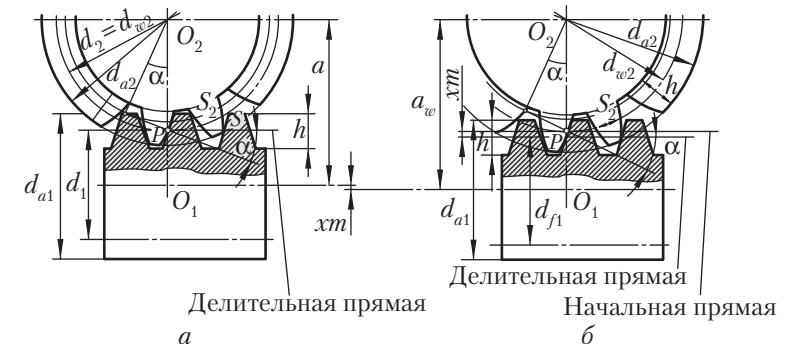


Рис. 21.4

Окружности, определяющие размеры червяка в средней торцевой плоскости, называются средними концентрическими. Различают окружности: делительную, диаметром  $d_1$ , начальную, диаметром  $d_{w1}$ , вершин витков —  $d_{a1}$ , впадин —  $d_{f1}$  принадлежащие соответственно поверхностям: делительной, начальной, вершин витков и впадин. Диаметр делительного цилиндра червяка выбирают кратным осевому модулю червяка:  $d_1 = mq$ .

Начальный диаметр червяка без смещения равен делительному  $d_{w1} = d_1$ . Если коэффициент смещения исходного производящего контура инструмента при нарезании червячного колеса  $x \neq 0$ , то начальный цилиндр червяка уже не сливается с его делительным цилиндром:

$$d_{w1} = m(q + 2x).$$

Наклон винтовой линии витка по делительному цилинду определяют делительным углом подъема  $\gamma$  из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{pz_1}{\pi d_1} = \frac{mz_1}{d_1} = \frac{z_1}{q}.$$

Высота головки  $h_{a1}$  и ножки  $h_{f1}$  витков определяется по формулам:

$$h_{a1} = h_a^* m; \quad h_{f1} = h_f^* m,$$

где коэффициент высоты головки  $h_a^* = 1$ , коэффициент высоты ножки для архимедовых и конволютных червяков  $h_f^* = 1, 2$ , а для эвольвентных  $h_f^* = (1 + 0,2 \cos \gamma)$ .

Диаметр вершин витков червяка

$$d_{a1} = m(q + 2h_a^*).$$

Диаметр цилиндра впадин

$$d_{f1} = d_1 - 2h_f^*m.$$

Толщина витка по делительному цилиндру

$$s_1 = \frac{\pi m}{2}.$$

На основании ранее выведенных в лекциях 14 и 15 формул для эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи основные размеры червячного колеса в среднем сечении и червячной передачи определяют по следующим формулам:

диаметр делительной окружности

$$d_2 = mz_2;$$

диаметр окружности вершин зубьев

$$d_{a2} = m(z_2 + 2x + 2h_a^*);$$

диаметр окружности впадин

$$d_{f2} = m(z_2 + 2x - 2h_f^*);$$

высота зуба

$$h = m(h_a^* + h_f^*);$$

толщина зуба по делительной окружности

$$s_2 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha\right);$$

межосевое расстояние зубчатой передачи

$$a_w = m\left(\frac{q + z_2}{2} + x_2\right).$$

Смещение червяка в основном выполняют с целью вписывания передачи в стандартное межосевое расстояние. Коэффициент смещения  $x$  исходного производящего контура инструмента выбирают в пределах  $\pm 1$ . Предпочтительно

использовать положительные смещения, при которых повышается прочность зубьев колеса.

### Контрольные вопросы и задания к лекции 21

1. Какие пространственные передачи относятся к гиперболоидным?
2. Чем отличается гиперболоидная передача от червячной?
3. Какие виды винтовых передач используются в машинах? Укажите их достоинства и недостатки.
4. Какие виды червячных передач используются в машинах?
5. Расскажите о способах изготовления червяков и червячных колес.
6. Какими особенностями кинематики червячных передач вызвано скольжение зубьев?
7. Какие главные параметры характеризуют червяк? Дайте их определения.

## Лекция 22

### Кулачковые механизмы

Кулачковые механизмы, подобно другим механизмам, служат для преобразования одного вида движения (на входе), изменяющегося по определенному закону, в другой вид движения (на выходе) иного закона с одновременным преобразованием передаваемых силовых параметров (сил, моментов).

Кулачковые механизмы обладают некоторыми важными свойствами, которых нет у рассмотренных ранее рычажных механизмов. С их помощью можно легко получать прерывистые движения ведомого звена, т.е. его движение с остановками, и практически любой закон движения ведомого звена, который определяется в основном профилем кулачка.

Кинематическая цепь простейшего кулачкового механизма состоит из двух подвижных звеньев (кулачка и толкателя), образующих высшую кинематическую пару, и стойки, с которой каждое из этих звеньев входит в низшую кинематическую пару.

**Ведущим звеном** механизма обычно является **кулачок**, который в большинстве случаев совершает непрерывное вращательное движение. Кулачок обладает сложным профилем, форма которого зависит от заданной схемы механизма и закона движения ведомого звена.

**Ведомое звено**, называемое **толкателем**, совершает возвратно-прямолинейное и возвратно-вращательное движение относительно стойки.

#### Виды кулачковых механизмов. Их достоинства и недостатки

На рис. 22.1 даны примеры механизмов. Кулачок 1 образует высшую кинематическую пару с толкателем 2 (см. рис. 22.1 *a*, *b*, *г*, *е*) или с роликом 4, шарнирно установленным

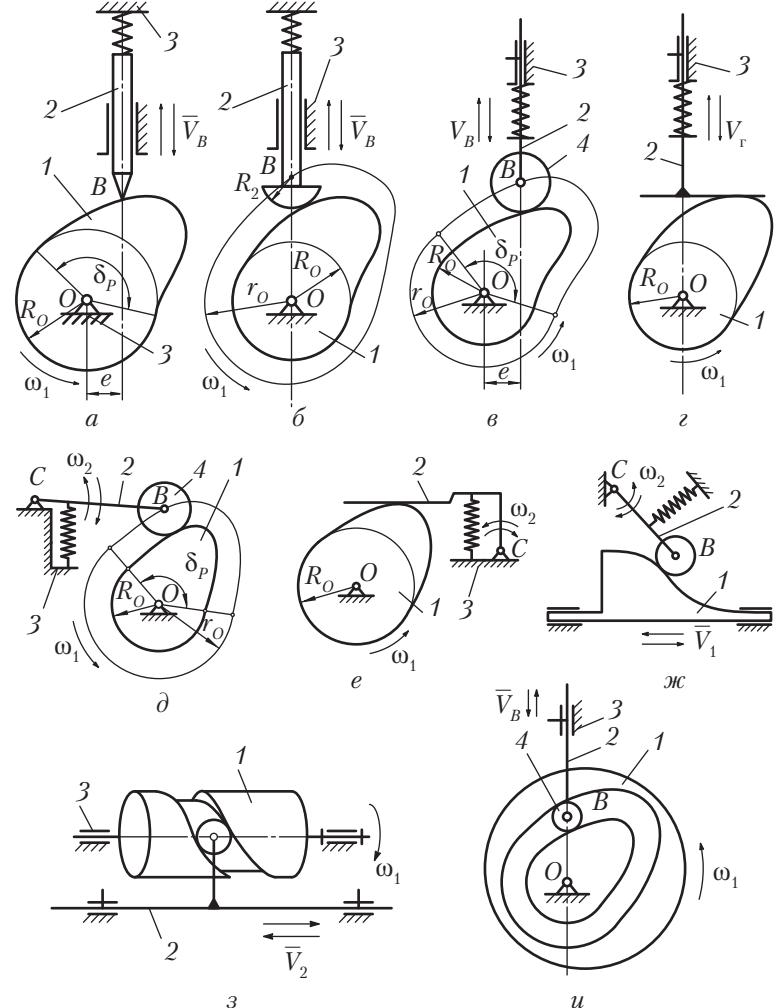


Рис. 22.1

на толкателе (см. рис. 22.1, *в*, *д*, *ж*, *з*, *и*). Контакт звеньев может быть линейным или точечным. Постоянное соприкосновение элементов высшей кинематической пары осуществляется, как правило, под действием пружины (силовое замыкание). В некоторых механизмах на кулачке выполняют паз (см. рис. 22.1, *з*, *и*), внутри которого перемещается ро-

лик толкателя (геометрическое замыкание); такие кулачки сложнее изготовить, они имеют большие габариты.

Обычно кулачок совершает вращательное движение, которое преобразуется в возвратно-поступательное прямолинейное или в возвратно-вращательное движение толкателя. В некоторых механизмах кулачок совершает возвратно-поступательное движение (см. рис. 22.1, ж). В плоских кулачковых механизмах, как правило, применяются дисковые кулачки (см. рис. 22.1, а – е, и), в пространственных – цилиндрические (см. рис. 22.1, з), конические, сферические, глобоидальные. Для снижения износа элементов высшей кинематической пары и для уменьшения потерь на трение вместо заостренных толкателей (см. рис. 22.1, а) применяют толкатели с закругленным концом (см. рис. 22.1, б), плоские (см. рис. 22.1, е) или роликовые (см. рис. 22.1, в, д, ж, з, и).

В плоских механизмах с прямолинейно движущимся толкателем последний может быть центральным (см. рис. 22.1, г, и) или внеосным (см. рис. 22.1, а, в).

Кулачковые механизмы широко используются в самых различных машинах, где требуется автоматически осуществлять согласованные движения выходных звеньев: в металорежущих станках, в автоматах и автоматических линиях, для привода клапанов двигателей и других энергетических машин; во многих приборах и аппаратах. Однако основной недостаток кулачковых механизмов — возможность возникновения больших контактных напряжений в высшей паре — не позволяет применять их в главных кинематических цепях для передачи большой мощности. Поэтому кулачковые механизмы, как правило, используют во вспомогательных цепях, выполняющих функции управления, где передаваемые мощности невелики.

Наибольшее распространение получили кулачковые механизмы с прямолинейно движущимся роликовым толкателем (см. рис. 22.1, в) и с коромысловым роликовым толкателем (см. рис. 22.1, д).

### Понятие центрового профиля кулачка

При кинематическом исследовании и проектировании механизмов с роликовым или закругленным толкателем вводят понятие центрового (или теоретического) профиля

кулачка (на рис. 22.1 б, в, д он показан тонкой линией). Центровой профиль проходит через центр В ролика или закругления и эквидистантен конструктивному профилю кулачка. Это дает возможность условно исключить ролик из состава механизма или ликвидировать закругление толкателя и рассматривать точку В как точку, находящуюся на конце толкателя и непосредственно контактирующую с центральным профилем, заменившим конструктивный. В результате схема механизма упрощается. Например, вместо схемы на рис. 22.1, в рассматривают схему, представленную на рис. 22.1, а. Такой переход от конструктивного профиля кулачка к центровому допустим, так как не изменяется закон движения толкателя.

Структурная формула Чебышева  $W = 3n - 2p_n - p_v$  позволяет рассчитывать число степеней свободы кулачковых механизмов. Например, для механизмов с роликовым толкателем (см. рис. 22.1, в, д, ж, и)  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 1 = 2 = 1 + 1 = W_{och} + W_m$ .

Полученное число степеней свободы  $W = 2$  включает одну  $W_{och} = 1$  и одну местную  $W_m = 1$ . Основная — это независимое движение (вращение), которое задается кулачку и преобразуется в требуемое движение толкателя. Местная — это вращение ролика вокруг своей оси, не оказывающее никакого влияния на процесс преобразования основного движения.

Механизм с толкателем без ролика (см. рис. 22.1, а, б, г, е), а также условные механизмы с центральным (теоретическим) профилем кулачка имеют только одну, основную степень свободы:  $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1 = W_{och}$ .

### Угол давления и его влияние на работоспособность механизма

В соответствии с направлением движения толкателя — от центра вращения кулачка или к центру — различают четыре фазы цикла работы кулачкового механизма: удаление, дальнее стояние, сближение и ближнее стояние.

Движение толкателя 2 на фазе его удаления происходит под действием силы  $F_{21}$ , действующей со стороны кулачка 1 (рис. 22.2, а). При этом толкатель, преодолевая силу сопротивления  $F_{2C}$  и силу трения  $F_{2T}$  в направляющих

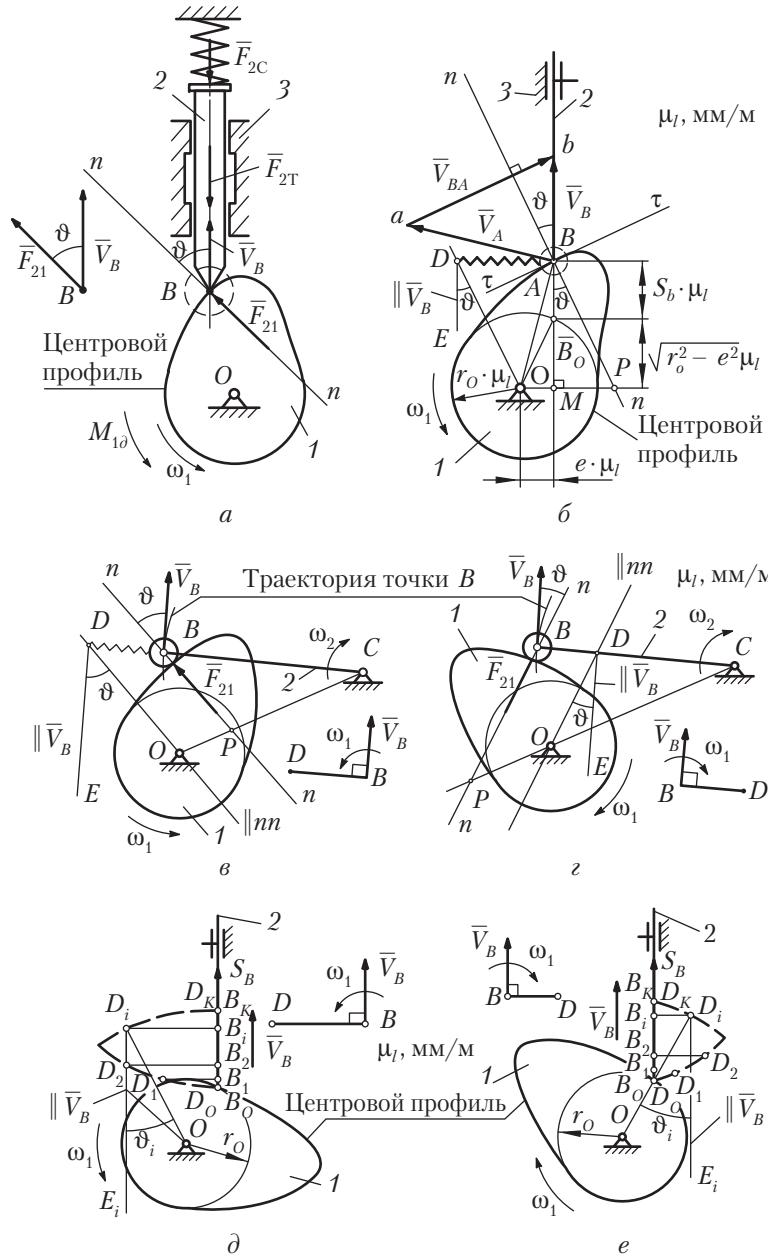


Рис. 22.2

стойки (на рис. 22.2, а  $\bar{F}_{2T}$  условно показана на оси толкателя), перемещается со скоростью  $\bar{V}_B$ . Сила  $\bar{F}_{21}$  в механизме с роликовым толкателем направлена практически по нормали  $n-n$  к центровому профилю кулачка, так как трение качения в паре кулачок–ролик незначительно.

Угол  $\vartheta$  между вектором силы, действующей со стороны ведущего звена на ведомое, и вектором скорости точки ведомого звена, в которой приложена сила, называется **углом давления** (см. рис. 22.2, а).

Несовпадение направления движущей силы  $\bar{F}_{21}$  и направления движения толкателя на фазе его удаления вызывает перекос толкателя в направляющих стойках. Чем больше угол давления, тем сильнее прижат толкатель к направляющим, тем больше трение в них и их износ. При этом увеличение силы трения  $\bar{F}_{2T}$  вызывает необходимость увеличить движущую силу  $\bar{F}_{21}$ , в результате чего возрастают изгибные и контактные напряжения в звеньях механизма. При большем значении угла давления сила трения  $\bar{F}_{2T}$  настолько увеличивается, что толкатель заклинивается в направляющих и остается неподвижным, сколько большой ни была бы движущая сила  $\bar{F}_{21}$  — механизм становится *неработоспособным*. Угол давления, при котором происходит заклинивание, называется **углом заклинивания**.

В механизмах с коромысловым толкателем (см. рис. 22.1) увеличение угла давления на фазе удаления также нежелательно, а при больших углах  $\vartheta$  механизм становится неработоспособным.

На фазе сближения, когда кулачок не является ведущим звеном и толкатель перемещается от пружины (в механизмах с силовым замыканием), заклинивания не происходит.

### Взаимосвязь угла давления и размеров кулачкового механизма

Величина угла давления  $\vartheta$  изменяется в течение цикла и зависит от геометрических и кинематических параметров кулачкового механизма. Для того чтобы записать эту зависимость в аналитической форме, на схеме кулачкового механизма (см. рис. 22.2, б) выполняют следующие построения. Через центр  $O$  вращения кулачка проводят прямую  $OP$ , перпендикулярную вектору скорости  $\bar{V}_B$  точ-

ки  $B$  толкателя, и строят план скоростей, решая графически уравнение сложного движения двух точек

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad (22.1)$$

верт  $\perp OA$   $\perp nn$

где  $\bar{V}_A$  — скорость точки  $A$  центрового профиля, геометрически совпадающей в данный момент с точкой  $B$  толкателя;  $\bar{V}_{BA}$  — скорость в относительном движении контактирующих точек  $B$  и  $A$  высшей пары, образованной толкательем 2 и кулачком 1. Эта скорость, согласно свойству высших пар, направлена по касательной  $\tau-\tau$ , т.е. перпендикулярно нормали  $n-n$ . Из подобия двух треугольников с взаимно перпендикулярными сторонами ( $\Delta ABA \sim \Delta OPA$ )

следует соотношение  $\frac{OP}{OA} = \frac{V_B}{V_A}$ ; следовательно,

$$OP = OA \frac{V_B}{V_A} = OA \frac{V_B}{\omega_1 OA / \mu_l} = \mu_l \frac{V_B}{\omega_1} = \mu_l V_{qB}. \quad (22.2)$$

Здесь  $V_{qB} = \frac{V_B}{\omega_1}$  — передаточная функция скорости точки  $B$ .

Тангенс угла давления  $\vartheta$  определяют из  $\Delta BMR$  (см. рис. 22.2, б)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{MP}{MB} = \frac{OP - \mu_l e}{MB_0 + B_0 B} = \\ &= \frac{\mu_l (V_{qB} - e)}{\mu_l \left( \sqrt{r_0^2 - e^2} + s_B \right)} = \frac{V_{qB} - e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_B}; \end{aligned} \quad (22.3)$$

здесь  $r_0$  — начальный радиус кулачка,  $e$  — эксцентриситет (внеосность);  $s_B$  — перемещение точки  $B$  толкателя (из начального положения  $B_0$ ). Знак «минус» в числителе относится к механизму, в котором толкатель расположен правее центра  $O$  вращения кулачка (правый эксцентриситет). В случае левого эксцентриситета — в числителе знак «плюс». Окончательная формула

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{V_{qB} \mp e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_B} \quad (22.4)$$

показывает, что при прочих равных условиях (т.е. при постоянном эксцентриситете  $e$  и заданных изменениях  $V_{qB}$  и  $s_B$ ) уменьшение начального радиуса  $r_0$  вызывает увеличение угла давления (так как  $r_0$  в знаменателе). И наоборот, чтобы уменьшить угол давления, приходится увеличивать габариты кулачкового механизма. Взаимосвязь угла давления и размеров в кулачковом механизме с коромысловым толкателем аналогична.

В процессе проектирования кулачкового механизма стремятся уменьшить размеры его звеньев за счет увеличения угла давления  $\vartheta$ , учитывая при этом, что увеличение угла давления  $\vartheta$  возможно лишь до некоторого максимального допустимого предела (допустимого угла давления  $\vartheta_{\text{доп}}$ , гарантирующего надежную и долговечную работу механизма). Таким образом, обязательным условием проектирования является выполнение неравенства

$$\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}. \quad (22.5)$$

В механизмах с силовым замыканием (см. рис. 22.1, а — ж) это условие должно выполняться только на фазе удаления, когда кулачок является ведущим звеном. В механизмах с геометрическим замыканием (см. рис. 22.1, з, и) обязательное условие (22.5) необходимо выполнять и на фазе удаления, и на фазе сближения.

Величина допустимого угла давления значительно меньше величины угла заклинивания. Многолетняя практика рекомендует следующие значения  $\vartheta_{\text{доп}}$ : для механизмов с прямолинейно движущимся роликовым толкателем  $\vartheta_{\text{доп}} = 30^\circ \dots 35^\circ$ , для механизмов с коромысловым толкателем (см. рис. 22.2, в, г)  $\vartheta_{\text{доп}} = 40^\circ \dots 50^\circ$ .

### Свойство отрезка передаточной функции и правило его построения

Как было показано (см. рис. 22.2, б), отрезок  $OP$  в масштабе  $\mu_l$  кинематической схемы механизма изображает передаточную функцию  $V_{qB}$  скорости точки  $B$  толкателя. Равный ему отрезок  $BD$  получают построением параллелограмма  $OPBD$ : проводят через точку  $B$  прямую, перпендикулярную вектору скорости  $\bar{V}_B$ , а через центр вращения

кулачка — прямую, параллельную нормали  $n-n$ . Этот отрезок, также изображающий в масштабе  $\mu_l$  передаточную функцию  $V_{qB}$

$$BD = \mu_l V_{qB} = \mu_l \frac{V_B}{\omega_1}, \quad (22.6)$$

называется *отрезком передаточной функции*. Согласно построению он перпендикулярен скорости точки  $B$  ( $BD \perp \bar{V}_B$ ); начальной его точкой считают точку  $B$  на толкателе, конечной — точку  $D$ . Проведенная через точку  $D$  и параллельная скорости  $\bar{V}_B$  прямая  $DE$  (см. рис. 22.2, б) образует с прямой  $OD$  угол, равный углу давления  $\vartheta$  (как углы с соответственно параллельными сторонами).

Следовательно, прямая, соединяющая центр вращения кулачка с концом отрезка передаточной функции скорости точки  $B$  толкателя, составляет с прямой, параллельной этой скорости, угол, равный углу давления  $\vartheta$  (а с отрезком передаточной функции — угол  $\vartheta = 90^\circ$ ). Это свойство отрезка передаточной функции используется при проектировании кулачковых механизмов и с прямолинейно движущимся, и с коромысловым толкателем. Однако оно справедливо только тогда, когда передаточная функция  $V_{qB} = \frac{V_B}{\omega_1}$  (имеющая размерность длины) изображена отрезком  $BD$  именно в том же масштабе  $\mu_p$ , в котором выполнена кинематическая схема кулачкового механизма.

Кинематическая схема механизма с коромысловым толкателем при разных направлениях вращения кулачка 1 дана на рис. 22.2, в, г. Вектор скорости  $\bar{V}_B$  точки  $B$  толкателя 2 образует с вектором силы  $\bar{F}_{21}$ , действующей на толкатель со стороны кулачка (и направленной по нормали  $n-n$  к профилю кулачка), угол давления  $\vartheta$ . Отрезок  $BD$  передаточной функции перпендикулярен вектору  $\bar{V}_B$ , его конец — точка  $D$  — находится на прямой, проходящей через центр  $O$  вращения кулачка параллельно  $n-n$  (см. рис. 22.2, в, г). Эта прямая  $OD$  образует с прямой  $DE$ , параллельной скорости  $\bar{V}_B$ , угол  $\vartheta$ , равный углу давления (углы с параллельными сторонами).

Сопоставление рис. 22.2, б, в, г позволяет сформулировать правило построения отрезка  $BD$ : вектор  $\bar{V}_B$ , повернутый на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega_1$  кулачка,

указывает, с какой стороны по отношению к траектории точки  $B$  должен быть расположен отрезок  $BD$ . Его величина в масштабе  $\mu_l$  кинематической схемы механизма рассчитывается по формуле (22.6). Кинематическая схема механизма с прямолинейно движущимся толкателем при разных направлениях вращения кулачка 1 дана на рис. 22.2, д, е. На фазе удаления точки  $B$  толкателя перемещается вверх от  $B_0$  до  $B_K$ ; при этом скорость толкателя изменяется от нуля (в положении  $B_0$ ) — через свое наибольшее значение — до нуля (в положении  $B_K$ ). Аналогично изменяется и отрезок  $BD$  передаточной функции, так как его величина, согласно (22.6), пропорциональна скорости  $V_B$  (при постоянной угловой скорости  $\omega_1$  кулачка 1). Для ряда положений точки  $B$  ( $B_1, B_2 \dots B_{K-1}$ ) рассчитаны величины отрезков передаточной функции ( $B_1D_1, B_2D_2 \dots B_{K-1}D_{K-1}$ ). Затем эти отрезки отложены перпендикулярно траектории  $\bar{V}_B$  (перпендикулярно траектории  $B_0B_K$ ) в соответствии со сформулированным выше правилом, т.е. слева от траектории точки  $B$  на рис. 22.2, д и справа — на рис. 22.2, е. Кривую, соединяющую точки  $D_0, D_1, \dots D_i \dots D_K$  (траекторию точки  $D$  — конца отрезка передаточной функции) рассматривают как график  $(V_{qB}, s_B)$ , выполненный в одинаковом масштабе и для передаточной функции  $V_{qB}$ , и для  $s_B$  — координаты (или перемещения) точки  $B$ .

Согласно свойству отрезка передаточной функции угол давления  $\vartheta_i$  в произвольном положении механизма равен  $\angle OD_i E_i$  (см. рис. 22.2, д, е) между прямой  $D_i E_i$ , параллельной вектору  $V_B$  (т.е. перпендикулярной  $B_i D_i$ ), и отрезком  $O_i D_i$ , соединившим центр  $O$  вращения кулачка с концом  $D_i$  отрезка передаточной функции.

Таким образом, величины углов давления  $\vartheta$  зависят от положения центра кулачка по отношению к построенному на траектории точки  $B$  графику  $(V_{qB}, s_B)$ . Поэтому для выполнения обязательного условия проектирования  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  центр вращения кулачка следует располагать в некоторой области, границы которой определяются (при заданной величине допустимого угла давления) после построения графика  $(V_{qB}, s_B)$ .

## Лекция 23

### Проектирование кулачкового механизма с прямолинейно движущимся роликовым толкателем

Кулачковый механизм предназначен для перемещения толкателя по определенному закону, который задается при проектировании. Первый этап проектирования состоит в определении положения центра вращения кулачка по отношению к траектории точки  $B$  толкателя; одновременно определяют величину начального радиуса  $r_0$  кулачка, при котором наибольший угол давления в кулачковом механизме не превышает допустимого значения, т.е. выполняется обязательное условие проектирования:  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$ . Второй этап проектирования — построение профиля кулачка (центрового, а затем и конструктивного).

Исходными данными для проектирования являются:

- 1) закон изменения скорости  $V_B$  толкателя 2 в зависимости от угла поворота  $\varphi_1$  кулачка 1 (рис. 23.1, а);
- 2) принципиальная схема кулачкового механизма (рис. 23.1, б);
- 3) максимальное перемещение толкателя  $h$  (его ход);
- 4) угловая скорость кулачка 1  $\omega_1 = \text{const}$  и ее рабочее направление (допускается возможность реверса кулачка, т.е. изменение направления его вращения, например, при ремонте или наладке машины);
- 5) полный фазовый угол  $\varphi_p$  поворота кулачка, равный углу рабочего профиля кулачка  $\delta_p$  (рис. 23.1, б, в);
- 6) допустимый угол давления  $\vartheta_{\text{доп}}$ ;
- 7) внеосность (эксцентриситет)  $e$  задается из конструктивных соображений (но может и не быть задана).

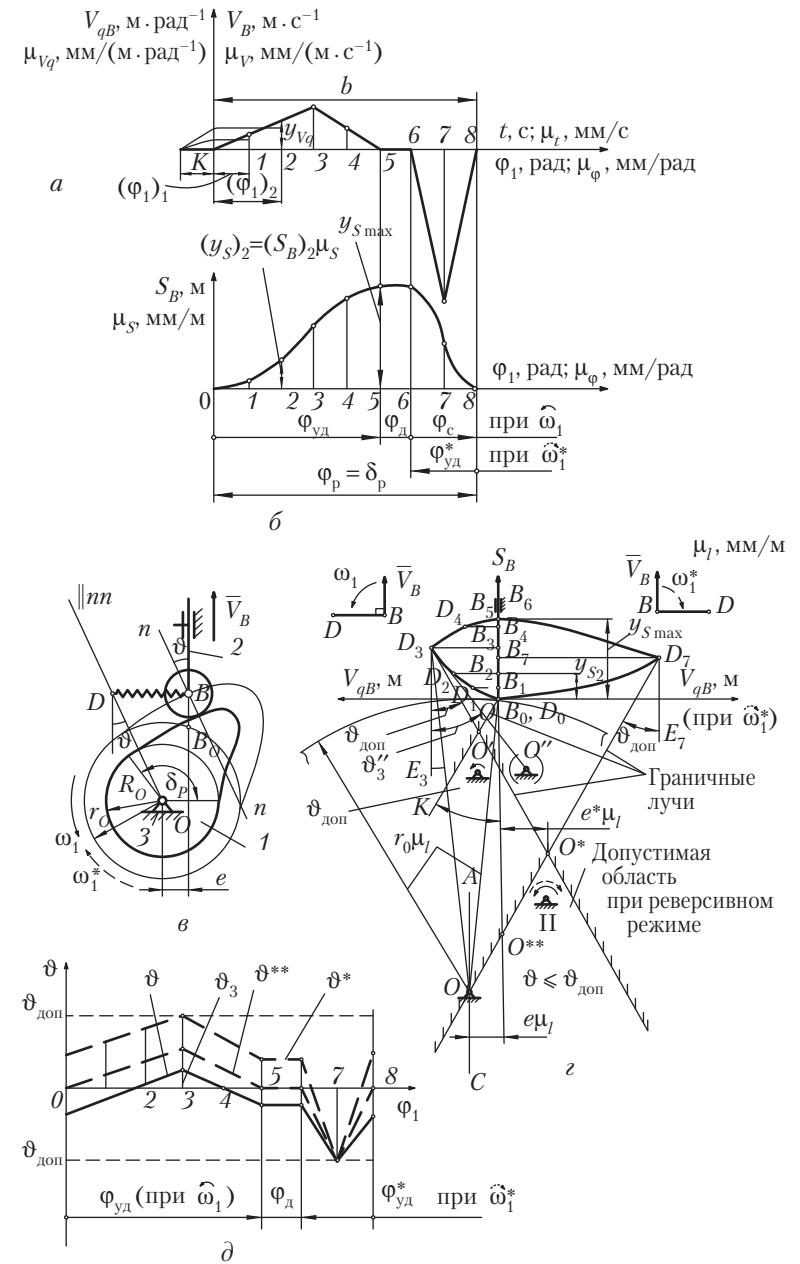


Рис. 23.1

### Построение графика перемещения толкателя

Исходным для проектирования является график  $(V_B, \varphi_1)$ , который при заданном условии ( $\omega_1 = \text{const}$ ) можно рассматривать двояко: или как зависимость  $(V_B, t)$ , так как угол поворота  $\varphi_1 = \omega_1 t$ , или как график  $(V_{qB}, \varphi_1)$ , так как  $V_{qB} = \frac{V}{\omega_1}$

(см. рис. 23.1, а).

График перемещения толкателя (см. рис. 23.1, б) строят графическим интегрированием заданной зависимости  $(V_{qB}, \varphi_1)$ , поскольку  $s_B = \int_0^t V_B dt$ , или же  $s_B = \int_0^{\varphi_1} V_{qB} d\varphi_1$ .

Масштабы по осям графиков рассчитывают по формулам  $\mu_\varphi = \frac{180^\circ b}{\varphi_p^\circ \pi}$ , мм/рад;  $\mu_t = \omega_1 \mu_\varphi$ , мм/с;  $\mu_s = \frac{Y_{s \max}}{h}$ , мм/м;  $\mu_v = k \frac{\mu_s}{\mu_t}$ , мм/(м · с<sup>-1</sup>),  $\mu_{vq} = k \frac{\mu_s}{\mu_\varphi}$ , мм/(м · рад<sup>-1</sup>), в которых  $k$  — отрезок интегрирования;  $Y_{s \max}$  — максимальная ордината графика перемещений;  $b$  — база графиков;  $\varphi_p^\circ$  — полный фазовый угол в градусах. На рис. 23.1, б отмечены фазовые углы поворота кулачка при рабочем направлении его вращения (против часовой стрелки): угол удаления  $\varphi_{уд}$ , угол  $\varphi_d$  дальнего стояния и угол сближения  $\varphi_c$ . В случае реверса кулачка угол  $\varphi_c$  становится углом удаления  $\varphi_{уд}^*$  при повороте кулачка на этот угол толкатель удаляется от центра его вращения на величину хода  $h$ .

### Построение области допустимого расположения центра вращения кулачка

Первый этап проектирования — определение области расположения центра вращения кулачка и величины радиуса  $r_0$  — начинают с построения графика  $(V_{qB}, \varphi_1)$  в выбранном масштабе  $\mu_l$ , мм/м (рис. 23.1, г). Так как в рассматриваемом механизме (см. рис. 23.1, б) траектория точки  $B$  прямолинейная, то отрезки  $B_0 B_1 = \mu_l (S_B)_1$ ,  $B_0 B_2 = \mu_l (S_B)_2, \dots, B_0 B_i = \mu_l (S_B)_i$  откладывают по прямой линии — на оси  $S_B$

(см. рис. 23.1, г) от начала координат (от начального положения  $B_0$  точки  $B$ ), используя при этом график  $(S_B, \varphi_1)$ . Величины  $B_i D_i$  отрезков передаточной функции определяют по одной из формул:

$$B_i D_i = \mu_l \frac{Y_{B_i}}{\omega_1} = \frac{\mu_l}{\mu_v \omega_1} y_{vi} \quad \text{или} \quad B_i D_i = \mu_l V_{qB_i} = \frac{\mu_l}{\mu_{vq}} y_{vqi}; \quad (23.1)$$

при этом *масштаб*  $\mu_l$  здесь *тот же*, что и для расчета отрезков перемещения  $B_0 B_i$ .

Если схема рассматриваемого механизма предусматривает силовое замыкание высшей кинематической пары, то условие  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  должно выполняться только на фазе удаления (см. лекцию 22). Поэтому расчеты по формуле (23.1) и соответствующие построения выполняют только для этой фазы, т.е. для положений от 0 до 5 (см. фазовый угол  $\varphi_{уд}$  на рис. 23.1, б); при этом в положениях 0 и 5  $V_{qB} = 0$  (см. рис. 23.1, а) и  $B_0 D_0 = B_5 D_5 = 0$ . Отрезки  $B_i D_i$  передаточной функции откладывают перпендикулярно траектории точки  $B$  (перпендикулярно оси  $S_B$ ) в соответствии с правилом их построения, т.е. слева от траектории  $B_0 B_5$  точки  $B$  (см. рис. 23.1, г), поскольку вектор скорости  $\vec{V}_B$  на фазе удаления толкателя (вверх), повернутый на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega_1$  (против часовой стрелки), показал это направление. Кривая  $D_0(B_0) - D_1 - D_2 - \dots - D_5(B_5)$  является графиком  $(V_{qB}, S_B)$  для фазы удаления при рабочем направлении вращения кулачка.

Для выполнения условия  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  из крайних точек  $D_0$  и  $D_3$  построенного графика проводят два граничных луча:  $B_0 K$  под углом  $\vartheta_{\text{доп}}$  к продолжению траектории точки  $B$  и  $D_3 O^*$  под углом  $\vartheta_{\text{доп}}$  к прямой  $D_3 E_3$ , перпендикулярной отрезку  $B_3 D_3$  (т.е. параллельной скорости  $\vec{V}_B$ ). Если выбрать центр вращения кулачка в области I, образованной этими лучами ниже точки пересечения (например, в точке  $O'$ ), то при вращении кулачка против часовой стрелки угол давления  $\vartheta$  в положениях 0...5 не превысит допустимого значения  $\vartheta_{\text{доп}}$ . Это значит, что область I является областью допустимого расположения центра вращения кулачка, но только при рабочем направлении его угловой скорости (против часовой стрелки). Если же центр вращения кулачка выбрать вне этой области, например в точке  $O''$ , то для некоторых положений толкателя угол давления превысит допустимый;

например, для положения  $B_3$  точки  $B$  угол давления  $\vartheta_3''$ , согласно свойству отрезка передаточной функции, равняется  $\angle O''D_3E_3$ , который больше  $\vartheta_{\text{доп}}$  (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ).

Для того чтобы предусмотреть возможность выполнения условия  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$ , также и в случае реверса кулачка (его вращения в противоположную сторону — по часовой стрелке), когда удаление толкателя соответствует углу  $\varphi^*$  от положения 8 до положения 6 (см. рис. 23.1,  $\delta$ ), строят правую часть графика ( $V_{qB}, s_B$ ). Здесь (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ) отрезок  $B_7D_7$  отложен справа от траектории точки  $B$  также в соответствии с известным уже правилом: вектор скорости толкателя при его удалении (вверх), условно повернутый на  $90^\circ$  по направлению вращения кулачка, направлен вправо. Границный луч, проведенный из точки  $D_7$  под углом  $\vartheta_{\text{доп}}$  к прямой  $D_7E_7$ , перпендикулярной отрезку  $B_7D_7$ , пересекается в точке  $O^*$  с лучом, проведенным ранее из  $D_3$ . Эти граничные лучи не должны пересекать график ( $V_{qB}, S_B$ ), они только касаются его, а иначе для некоторых положений механизма не будет выполнено условие  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$ .

Область II (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ), образованная граничными лучами ниже точки их пересечения, является областью допустимого расположения центра вращения кулачка при реверсивном режиме. Если центр вращения кулачка расположить в пределах этой области, то при обоих направлениях вращения кулачка в любом положении толкателя *будет выполнено* обязательное условие проектирования прямой  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$ , так как угол между прямой, соединяющей этот центр с любой точкой  $D_i$  графика ( $V_{qB}, S_B$ ), и перпендикуляром к отрезку  $B_iD_i$  всегда меньше допустимого  $\vartheta_{\text{доп}}$  (может быть равен ему, если центр находится на граничном луче).

### Выбор положения центра вращения кулачка, определение его начального радиуса

В том случае, когда требуется спроектировать реверсивный кулачковый механизм минимальных размеров, центр вращения кулачка выбирают в точке  $O^*$  пересечения граничных лучей (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ). При этом расстояние от  $O^*$  до начального положения  $B_0$  точки  $B$  толкателя определит в масштабе  $\mu_l$  величину начального радиуса  $r_0^*$  центрального профиля кулачка:

профиля кулачка:  $r_0^* = \frac{O^*B_0}{\mu_l}$ . Толкатель в этом случае внеосный с левым эксцентризитетом  $e^*$ , который на рис. 23.1,  $\varepsilon$  изображен отрезком  $e^*\mu_l$ .

Если же проектируется механизм с центральным толкателем ( $e = 0$ ), то центр вращения кулачка назначают на продолжении траектории точки  $B$ , чтобы ось толкателя (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ) проходила через этот центр. Выбор центра вращения в точке  $O^{**}$  (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ) дает минимальную величину начального радиуса  $r_0^{**}$  кулачка для механизма с центральным толкателем:  $r_0^{**} = \frac{O^{**}B_0}{\mu_l}$ .

Согласно рис. 23.1,  $\varepsilon$  требуется спроектировать механизм с правым эксцентризитетом  $e$ , величина которого определяется конструктивными соображениями. В этом случае центр вращения кулачка выбирают в допустимой области на прямой  $AC$ , параллельной оси толкателя и отстоящей от нее на расстоянии  $e\mu_l$ . Минимальный начальный радиус  $r_0$  центрального профиля получают, назначив центр  $O$

(см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ) на граничном луче; тогда  $r_0 = \frac{OB_0}{\mu_l}$ . Если

найденная величина начального радиуса  $r_0$  (а также  $r_0^*$  или  $r_0^{**}$ ) недостаточна для обеспечения прочности звеньев кулачкового механизма, то центр вращения кулачка назначают дальше от начальной точки  $B_0$ , сохраняя при этом заданную величину внеосности  $e$ .

На рис. 23.1,  $\delta$  даны графики изменения углов давления в трех кулачковых механизмах (для трех рассмотренных вариантов выбора центра вращения кулачка): графики  $(\vartheta^*, \varphi_1)$ ,  $(\vartheta^{**}, \varphi_1)$  и  $(\vartheta, \varphi_1)$  для механизмов с центрами вращения кулачков соответственно в точках  $O^*$ ,  $O^{**}$  и  $O$ . Углы давления для каждого положения механизма найдены согласно рассмотренному в лекции 22 свойству отрезка передаточной функции. Например, для механизма с центром вращения кулачка в точке  $O$  угол  $\vartheta_3$  в положении 3 (см. рис. 23.1,  $\varepsilon$ ) найден как угол между прямой  $OD_3$ , соединившей центр  $O$  с концом  $D_3$  отрезка передаточной функции, и прямой  $D_3E_3$ , параллельной направлению скорости толкателя, т.е.  $\angle OD_3E_3 = \vartheta_3$ . Если бы центр вращения кулачка был расположен на прямой  $AC$  ниже точ-

ки  $O$  (далее от точки  $B_0$ ), то угол давления в положении 3 был бы меньше, чем  $\angle \hat{O}D_3E_3$ , т.е. при увеличении начального радиуса  $r_0 = \mu_l OB_0$  уменьшился бы угол давления. Аналогичный вывод был сделан ранее при анализе формулы (22.4).

### Построение центрового и конструктивного профилей кулачка

Исходными данными для выполнения второго этапа проектирования кулачкового механизма с прямолинейно движущимся толкателем — для построения профиля кулачка — являются: а) график перемещений ( $S_B, \varphi_1$ ) точки  $B$  толкателя (см. рис. 23.1, б и 23.2, а, б) начальный радиус  $r_0$  кулачка, найденный из условия  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  с учетом конструктивных требований (см. рис. 23.1, г, в) эксцентрикитета  $e$  толкателя; в рассматриваемом примере — правый, но может быть задан и равным нулю.

Для построения центрового профиля кулачка используют метод обращения движения: условно всему механизму сообщают вращение вокруг оси  $O$  кулачка с угловой скоростью  $(-\omega_1)$ , равной по абсолютной величине угловой скорости  $\omega_1$  кулачка 1, но противоположно ей направленной. Кулачок при этом останавливается, а стойка 3, ранее неподвижная ( $\omega_3 = 0$ ), начинает вращаться (см. рис. 23.2, б) и в обращенном движении имеет угловую скорость  $\omega_3^* = -\omega_1$ . При этом вращении ось  $MN$  толкателя 2, установленного в направляющих стойки с эксцентрикитетом  $e$ , поворачивается вместе со стойкой по часовой стрелке на углы  $\varphi_{MN}^* = \varphi_3^* = (-\varphi_1)$ , равные по абсолютной величине углу  $\varphi_1$  поворота кулачка в его прямом (т.е. истинном) движении. Угол поворота оси  $MN$

$$\varphi_{MN}^* = \varphi_3^* = (-\varphi_1). \quad (23.2)$$

Ось  $MN$  при этом остается на постоянном расстоянии  $e$  от центра  $O$  (таким образом, ось всегда касается окружности радиуса  $e$ ). Уравнение (23.2) называют *уравнением обращения движения*.

Построение начинают с произвольного выбора точки  $B_0$  на окружности радиусом  $r_0 \mu_l$  (рис. 23.2, в), через которую проводят ось  $M_0N_0$  толкателя, касающуюся справа

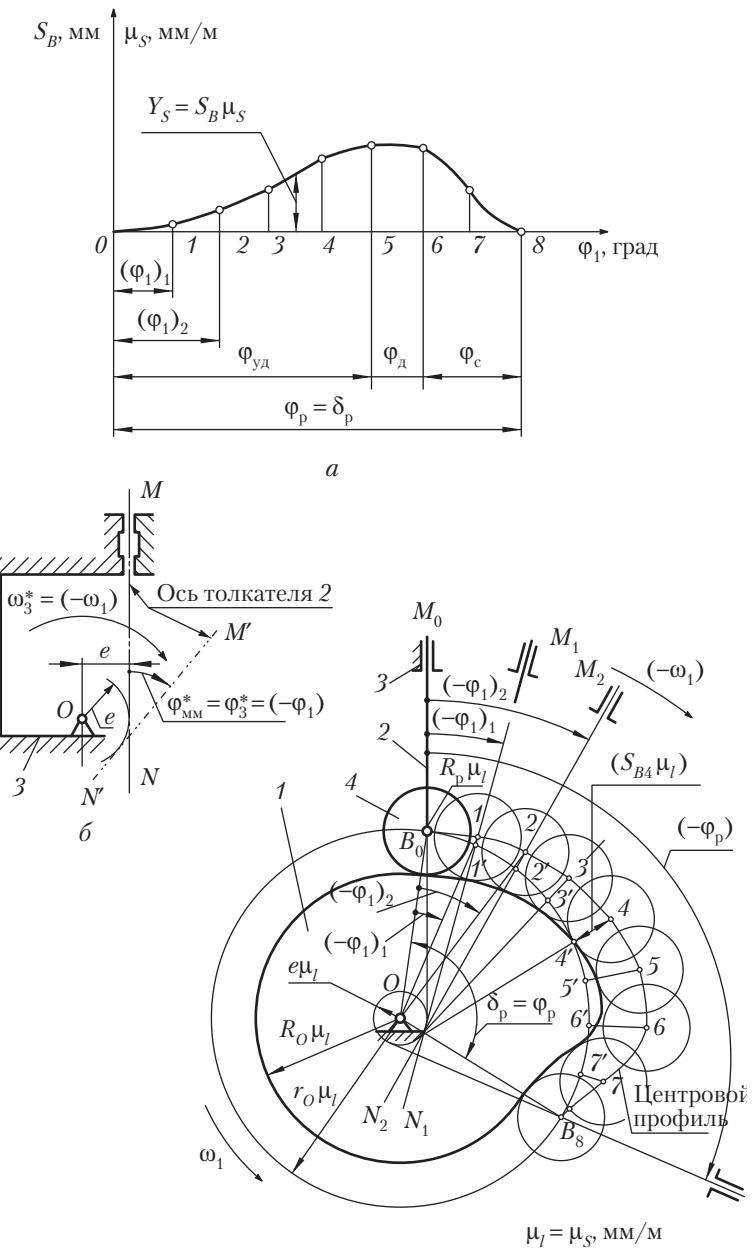


Рис. 23.2

(так как эксцентризитет задан правый) окружности радиусом  $e\mu_l$ . Здесь  $\mu_l$  — масштаб построения, принятый равным  $\mu_s$  (см. рис. 23.2, а). Тем самым определяется начальное положение толкателя 2 с центром его ролика в точке  $B_0$ . Далее, согласно (23.2), ось  $MN$  толкателя поворачивают в направлении обращенного движения стойки на углы  $(\varphi_{MN}^*)_1 = -\varphi_1$ ,  $(\varphi_{MN}^*)_2 = -\varphi_2$ , ...,  $(\varphi_{MN}^*)_8 = -\varphi_p$ , равные по абсолютной величине углам  $(-\varphi_1)_1$ ,  $(-\varphi_1)_2$ , ...,  $\varphi_p$  поворота кулачка (см. рис. 23.2, а). С целью упрощения построения углы  $(-\varphi_1)_1$ ,  $(-\varphi_1)_2$  и т.д. откладывают от прямой  $OB_0$ , отмечая на окружности радиусом  $r_0\mu_l$  точки 1', 2'' и т.д. (см. рис. 23.2, в). Через эти точки проводят прямые, касательные к окружности радиусом  $e\mu_l$ , являющиеся положениями оси  $MN$  толкателя по отношению к кулачку. От точек 1', 2' и т.д. откладывают отрезки  $(1' - 1) = (S_B)_1\mu_l = y_{s1}$ ;  $(2' - 2) = (S_B)_2\mu_l = y_{s2}$  и т.д., представляющие собой перемещения точки  $B$  толкателя в масштабе чертежа  $\mu_l$  (ординаты  $y_{s1}$ ,  $y_{s2}$ , ... берут с графика  $(S_B, \varphi)$  на рис. 23.2, а). Точки  $B_0$ , 1, 2, ..., 7,  $B_7$  — это положения, которые должен занимать центр  $B$  ролика толкателя по отношению к кулачку; следовательно, через эти точки проходит центровой профиль кулачка (см. рис. 23.2, в).

Конструктивный профиль кулачка эквидистантен центрому; его точки отстоят от центрового профиля на расстоянии, равном радиусу  $R_p$  ролика 4. Конструктивный профиль строят как огибающую к окружностям радиусом  $R_p\mu_l$ , центры которых расположены на центральном профиле кулачка (см. рис. 23.2, в). Радиус ролика назначают из конструктивных соображений обычно в диапазоне  $R_p = (0,2...0,4)r_0$ ; но он всегда должен быть меньше минимального радиуса кривизны центрального профиля. Начальный радиус  $R_0$  конструктивного профиля определяют как разность:  $R_0 = r_0 - R_p$ .

### Проектирование кулачкового механизма с коромысловым роликовым толкателем

Исходными данными для проектирования кулачкового механизма с коромысловым толкателем являются:

1) принципиальная схема кулачкового механизма (рис. 23.3, а);

2) закон изменения скорости  $V_B$  центра  $B$  ролика толкателя 2 в зависимости от угла  $\varphi_1$  поворота кулачка 1 (см. рис. 23.1, а);

3) длина  $l_{CB}$  толкателя 2 (см. рис. 23.3, а);

4) путь  $h_B$  точки  $B$  толкателя по ее дуговой траектории от одного крайнего положения в другое (или максимальный угол поворота толкателя);

5) угловая скорость кулачка и ее направление (при этом допускается возможность реверса кулачка);

6) полный фазовый угол  $\varphi_p$  поворота кулачка:  $\varphi_p = \varphi_{уд} + \varphi_d + \varphi_c$  (см. рис. 23.1, б и рис. 23.3, в);

7) допустимый угол давления  $\vartheta_{доп}$ .

Этапы проектирования механизма с коромысловым толкателем те же, что и для механизма с прямолинейно движущимся толкателем: 1) определение основных размеров кулачкового механизма, а именно начального радиуса  $r_0$  кулачка и межосевого расстояния  $a = l_{OC}$ , при которых выполняется обязательное условие проектирования  $\vartheta \leq \vartheta_{доп}$ ; 2) построение профиля кулачка.

### Определение основных размеров кулачкового механизма

Для определения области допустимого расположения центра вращения кулачка строят график  $(V_{qB}, S_B)$  на базе траектории точки  $B$ . Исходным для этого построения является заданный на рис. 23.1, а график  $(V_{qB}, \varphi_1)$ , который при  $\omega_1 = \text{const}$  можно рассматривать или как график  $(V_B, t)$  изменения скорости  $V_B$  точки  $B$  во времени, или как график  $(V_{qB}, \varphi_1)$  изменения передаточной функции скорости точки  $B$ . Поэтому график  $(S_B, \varphi_1)$  значений дуговых координат точки  $B$  толкателя строят графическим интегрированием зависимости  $(V_{qB}, \varphi_1)$  (см. рис. 23.1, а, б); масштабы рассчитывают по формулам, приведенным в лекции 22.

Как и для механизма с прямолинейно движущимся толкателем, при построении графика  $(V_{qB}, S_B)$  все линейные размеры откладывают в одном масштабе  $\mu_l$  (который на рис. 23.3, б принят равным  $\mu_s$  на рис. 23.1, б). Длину толкателя 2 на рис. 23.3, б изображают отрезком  $CB_0 = l_{CB}\mu_l$ , а передаточную функцию скорости точки  $B$  — отрезками  $B_iD_i$ , рассчитанными по одной из формул (23.1).

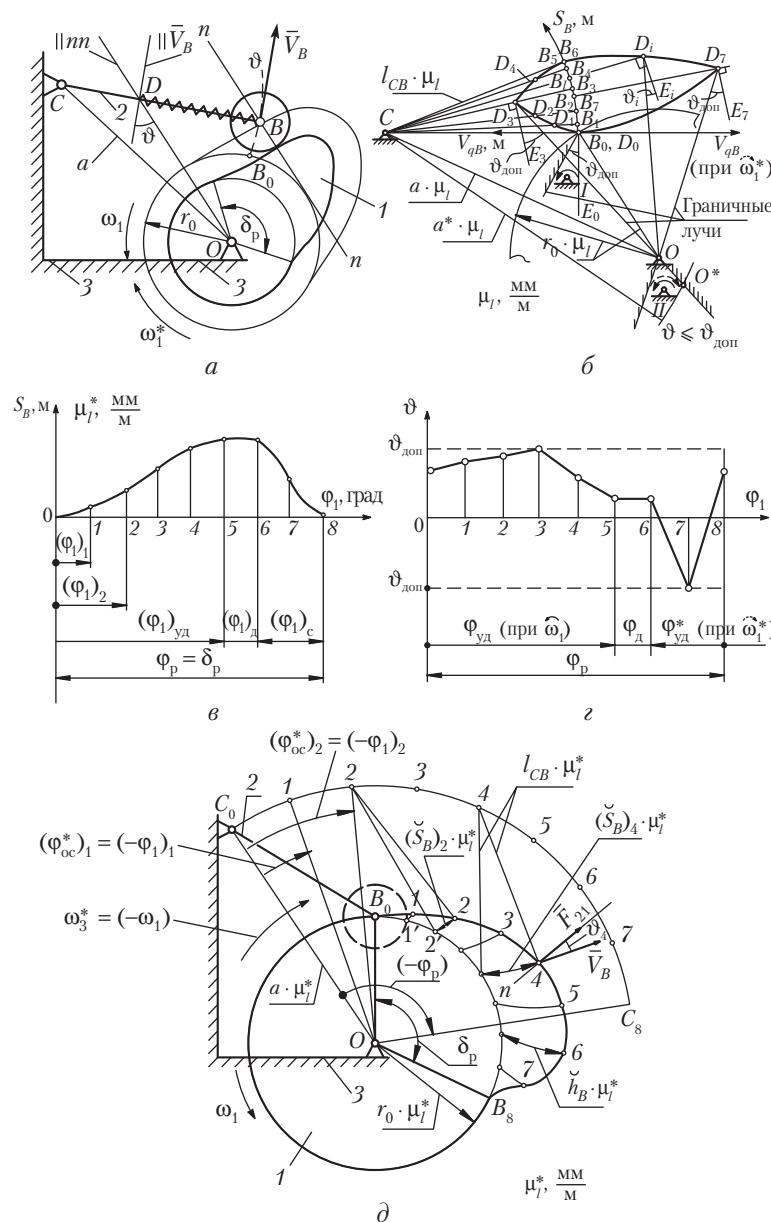


Рис. 23.3

От начального положения  $B_0$  на траектории точки  $b$  в масштабе  $\mu_l$  откладывают ее дуговые координаты, используя график  $(S_B, \varphi_1)$  на рис. 23.1, б; например,  $B_0B_2 = (S_B)_2\mu_l = y_{S2}$  и т.д. (рис. 23.3, б). Отрезки  $B_1D_1, B_2D_2, \dots$  для фазы удаления (позиции 0...5) строят перпендикулярно скорости  $\bar{V}_B$ , т.е. вдоль толкателя и, согласно правилу построения этих отрезков (см. рис. 22.2, б), слева от траектории точки  $B$ , так как рабочее направление вращения кулачка — против часовой стрелки. График  $(V_{qB}, S_B)$  для фазы удаления проходит через точки  $D_0, D_1, D_2, \dots, D_5$  — концы отрезков передаточной функции (см. рис. 23.3, б). Для выполнения условия  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  на фазе удаления толкателя из крайних точек  $D_0$  и  $D_3$  полученного графика проводят два граничных луча под углом  $\vartheta_{\text{доп}}$  к прямым  $D_0E_0$  и  $D_3E_3$ , перпендикулярным толкателю в его положениях  $CB_0$  и  $CB_3$  соответственно (а значит, параллельным направлению скорости  $\bar{V}_B$  в этих положениях толкателя).

Если выбрать центр вращения кулачка в области I, образованной граничными лучами ниже точек их пересечения (см. рис. 23.3, б), то при вращении кулачка против часовой стрелки угол давления не превысит своего допустимого значения ( $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$ ). Для того чтобы предусмотреть выполнение этого условия также и при реверсе кулачка (при его вращении по часовой стрелке), когда удаление толкателя происходит на фазе  $\varphi_{\text{уд}}^*$  (см. рис. 23.3, б), строят правую часть графика, используя правило построения отрезков  $BD$  (см. рис. 22.2, г). Граничный луч, проведенный из точки  $D_7$  под углом  $\vartheta_{\text{доп}}$  к прямой  $D_7E_7$ , перпендикулярной отрезку  $B_7D_7$ , дает точку  $O$  пересечения с лучом, проведенным из  $D_3$  (см. рис. 23.3, б). Эти лучи не должны пересекать график  $(V_{qB}, S_B)$ .

Область II, образованная граничными лучами ниже точек их пересечения (см. рис. 23.3, б), — есть область допустимого расположения центра вращения кулачка при реверсивном режиме. Назначение центра вращения кулачка в пределах этой области гарантирует выполнение обязательного условия проектирования  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  в любом положении механизма.

Если условием проектирования являются минимальные габариты механизма, то центр  $O$  вращения кулачка назна-

чают в точке пересечения лучей, тогда  $r_0 = \frac{OB_0}{\mu_l}$  и  $a = \frac{OC}{\mu_l}$

(см. рис. 23.3, б). Если же межосевое расстояние  $a^*$  задано, то центр вращения кулачка выбирают на дуге радиуса  $a^*\mu_l$ , например в точке  $O^*$ , тогда  $r_0^* = \frac{B O^*}{\mu_l}$ . При этом центр вращения должен быть обязательно в пределах области II. Полученная величина начального радиуса  $r_0$  (или  $r_0^*$ ) должна быть достаточной для обеспечения прочности кулачка, его вала и ролика.

Согласно свойству отрезка передаточной функции угол между прямой, проведенной из центра вращения  $O$  в любую точку  $D_i$  графика  $(V_{qB}, S_B)$  прямой  $D_iE_i$ , перпендикулярной отрезку  $B_iD_i$ , а следовательно, параллельной скорости  $\bar{V}_B$ , равен углу давления в  $i$ -м положении механизма (см. рис. 22.2, в, г). Определив углы давления в различных положениях, строят график  $(\vartheta, \phi_1)$ , который показывает, что условие  $\vartheta \leq \vartheta_{\text{доп}}$  при реверсивном режиме работы кулачкового механизма выполняется (см. рис. 23.3, г).

### Построение профиля кулачка

Исходными данными для выполнения второго этапа проектирования — построения профиля кулачка — являются график дуговых координат  $(S_B, \phi_1)$  точки  $B$  толкателя 2 (см. рис. 23.3, в), а также найденные на первом этапе начальный радиус  $r_0$  кулачка и межосевое расстояние  $a = l_{OC}$  (см. рис. 23.3, б).

Для построения профиля кулачка используют метод обращения движения: чтобы условно остановить вращающийся кулачок (см. рис. 23.3, а), сообщают всему механизму вращение вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $(-\omega_1)$ , равной по абсолютной величине угловой скорости кулачка, но противоположно ей направленной. Неподвижная стойка 3 ( $\omega_3 = 0$ ) в обращенном движении получает угловую скорость  $\omega_3^* = (-\omega_1)$ . С этой скоростью условно вращается по часовой стрелке принадлежащий стойке отрезок  $OC = a\mu_l^*$ . Уравнение обращения движения имеет вид

$$\Phi_{OC}^* = \Phi_3^* = -\Phi_1. \quad (23.3)$$

В обращенном движении точка  $C$  описывает окружность радиусом  $a\mu_l^*$ , где  $\mu_l^*$  — масштаб построения (рис. 23.3, д).

На этой окружности в произвольной точке отмечают начальное положение  $C_0$  центра  $C$  поворота толкателя. Затем, согласно уравнению (23.3), отрезок  $OC$  поворачивают в направлении обращенного движения стойки на углы  $(\Phi_{OC}^*)_1 = (-\Phi_1)_1, (\Phi_{OC}^*)_2 = (-\Phi_1)_2, \dots, (\Phi_{OC}^*)_8 = -\Phi_p$ , равные по абсолютной величине углам  $(\Phi_1)_1, (\Phi_1)_2, \dots, \Phi_p$  поворота кулачка и отмечают на траектории точки  $C$  ее положения 1, 2, ...,  $C_8$ . Для каждого из отмеченных положений проводят дуги радиусом  $l_{CB}\mu_l^*$  и на них от точек 1', 2', 3', ..., расположенных на окружности радиуса  $r_0\mu_l^*$ , откладывают дуговые координаты  $(1' - 1) = (S_B)_1\mu_l^*, (2' - 2) = (S_B)_2\mu_l^*$  и т.д. точки  $B$  толкателя. С этой целью используют график  $(S_B, \Phi_1)$  на рис. 23.3, в. Точки  $B_0, 1, 2, \dots, 7, B_8$ , соединенные плавной кривой, образуют центровой профиль кулачка (см. рис. 23.3, д). Построение конструктивного профиля, эквидистантного центровому, проводят аналогично построению, выполненному на рис. 23.2, в.

Изложенный выше метод проектирования применяется не только для кулачковых механизмов с роликовым толкателем, но и для механизмов, в которых толкатель 2 выполнен со скруглением на конце (см. рис. 22.1, б). Конструктивный профиль кулачка в таком механизме также эквидистантен центровому, и его точки отстоят от центрового профиля на расстояние, равное радиусу  $R_2$  кривизны скругления.

### Контрольные вопросы и задания к лекциям 22, 23

- Назовите особенности кулачковых механизмов, обусловившие их широкое применение в различных машинах и приборах.
- Каковы недостатки кулачковых механизмов?
- Изобразите схемы наиболее распространенных плоских и пространственных кулачковых механизмов.
- Как подразделяются кулачковые механизмы по способу замыкания высшей пары?
- Перечислите основные фазы движения толкателя кулачкового механизма и соответствующие им углы поворота кулачка.
- Расскажите об основных этапах синтеза кулачковых механизмов.
- Какие законы движения толкателя рационально применять в быстроходных кулачковых механизмах и почему?

8. Как определить положение центра вращения кулачка в механизме с поступательно движущимся толкателем при заданном допустимом угле давления?

9. Как определить положения центра вращения кулачка при заданном допустимом угле давления и межосевом расстоянии в механизме с качающимся толкателем?

10. Из каких соображений выбирается величина радиуса ролика кулачкового механизма?

11. Как по теоретическому (центровому) профилю кулачка построить конструктивный профиль?

## **Лекция 24**

### **Манипуляционные роботы**

Робототехника — новое направление науки и техники, связанное с созданием и применением робототехнических систем. Робот, являющийся одним из основных объектов изучения в этой науке, представляет собой автоматическую машину для воспроизведения двигательных и интеллектуальных функций человека. Существуют различные классы роботов, среди которых важнейшими являются автоматические манипуляционные роботы. Частный вид этих роботов — промышленные роботы.

На сегодняшний день промышленные роботы и подобное им оборудование являются практически единственным средством автоматизации мелкосерийного производства. Важная особенность промышленных роботов состоит в том, что они позволяют наиболее просто совместить в едином цикле как транспортные, так и основные технологические операции, что позволяет создать на базе универсального оборудования гибкие автоматизированные производства.

Среди всех частей промышленного робота исполнительное устройство — механизм, обеспечивающий движение рабочего органа, — имеет определяющее значение. Именно от этого устройства во многом зависят такие важные характеристики робота, как быстродействие, маневренность, точность позиционирования, возможность работы в стесненных пространствах.

### **Классификация, назначение и области применения**

История механики богата примерами, которые свидетельствуют о постоянном стремлении человека создать механизмы и устройства, подобные живым существам. Это стремление обусловлено многими причинами, среди которых

не последнее место занимает желание заменить человека при выполнении сложной и вредной работы. В 1940-х гг. в связи с потребностями атомной технологии появились манипуляторы, основное назначение которых — выполнение разнообразных технологических операций с радиоактивными веществами. Применение таких устройств позволило удалить человека из опасной зоны, за ним остались только функции дистанционного управления. Первыми такой манипулятор разработали сотрудники Аргонской национальной лаборатории США. Манипулятор под названием Master-Slave состоял из исполнительной механической руки (Slave), помещаемой в опасную для человека зону, и задающей механической руки (Master), которой в безопасной зоне манипулировал оператор. Исполнительная рука отличалась от задающей только наличием схватов. Связь между ними осуществлялась кинематическими передачами так, что звенья исполнительной руки копировали движение звеньев задающей. Отсюда название манипулятора — копирующий.

В наше время на смену малоэффективным устройствам прошлого пришли более эффективные автоматически действующие робототехнические устройства. В основе создания современных робототехнических устройств лежат новые технологии, получившие развитие лишь во второй половине XX в.: вычислительная техника и информатика. Робототехнические устройства стали важным средством комплексной автоматизации промышленного производства, они позволяют наиболее просто совместить в едином цикле как погрузочно-разгрузочные, так и основные технологические операции. Наиболее важные применения автоматических роботов связывают с разработкой и созданием автоматизированных участков, цехов и заводов.

Точного и однозначного определения робота не существует. Скорее всего можно говорить о целой группе определений. Наиболее полно *сущность роботов можно отразить, определив их как программируемые устройства (машины), предназначенные для воспроизведения рабочих функций руки человека в процессе его трудовой деятельности*. Понятие «программируемые» играет немаловажную роль: оно показывает, что действие робота не сводится к решению какой-то одной задачи, его функции можно целенаправленно изменять. Большинство современных роботов включают в

себя компьютеры, которые помогают реализовать заданные программные действия.

В данной лекции рассматриваются манипуляционные роботы. *Манипуляционным роботом называют техническое устройство (машину), предназначенное для выполнения работ универсального характера, исполнительными устройствами которого служат манипуляторы (механические руки)*. В зависимости от степени участия человека в управлении манипуляционные роботы подразделяются на три типа: автоматические, биотехнические и интерактивные.

*Автоматические манипуляционные роботы* возникли и развились из систем программного управления станками. Процесс управления их действиями может происходить с участием и без непосредственного участия человека. Функциональная схема автоматического манипуляционного робота представлена на рис. 24.1. Манипуляционный робот состоит из манипулятора, исполнительных устройств, устройств чувствования, устройств связи с оператором и ЭВМ. Манипулятор имитирует движения руки человека и представляет собой многозвездный разомкнутый механизм с одноподвижными вращательными и поступательными кинематическими парами. Число степеней подвижности

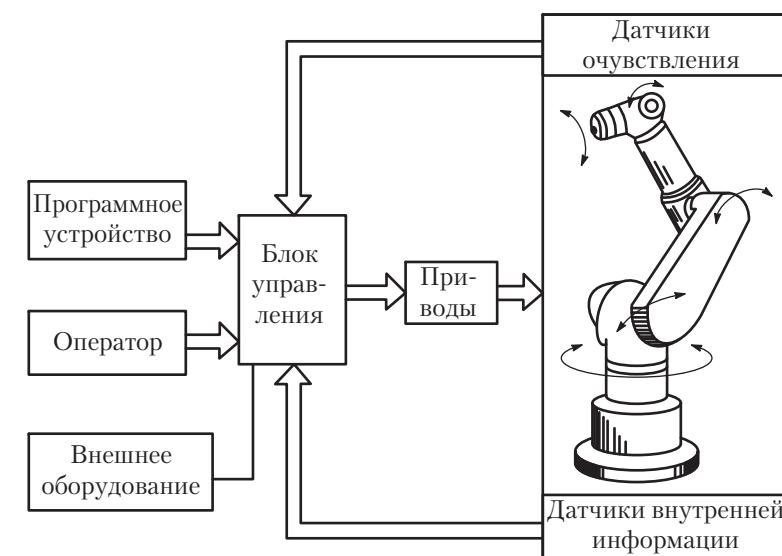


Рис. 24.1

манипуляторов изменяется в пределах от 3 до 10. Функцию кисти в манипуляторе выполняет так называемый схват, конструкция которого предусматривает выполнение операций с определенным типом объектов манипулирования. Информационная система предназначена для сбора информации о состоянии внешней среды. В качестве ее элементов используются телевизионные, ультразвуковые, тактильные и другие датчики. Управляющая система служит для выработки законов управления приводами исполнительных органов на основании созданных алгоритмов и собранной информации.

В автоматических манипуляционных роботах можно выделить три разновидности в зависимости от связи с человеком-оператором: программные, адаптивные и интеллектуальные. *Программные роботы* работают по жесткой программе, заложенной в устройстве памяти, однако их можно перенастраивать на работу с другой жесткой программой действий. Их также называют автоматическими программными манипуляторами, или промышленными роботами. Простота изменения программы, т.е. возможность переобучения промышленных роботов новым операциям, сделала этих роботов достаточно универсальными и гибко перенастраиваемыми на различные классы задач. *Адаптивные роботы* отличаются от программных большим количеством внешних (оптических, телевизионных, тактильных) и внутренних датчиков. Системы управления роботами этого типа более сложные, не ограничиваются только работой по жесткой программе движения и могут в зависимости от внешних условий несколько корректировать ее. Как правило, они требуют для своей реализации управляющую ЭВМ. Важной частью адаптивных роботов является их развитое программное обеспечение, предназначенное для обработки информации, поступающей от внешних и внутренних датчиков и оперативного изменения программы движения. Благодаря способности воспринимать изменения во внешней среде и приспосабливаться к существующим условиям функционирования адаптивные роботы могут манипулировать с неориентированными деталями произвольной формы и производить сборочные операции. Характерной особенностью *интеллектуальных роботов* является их способность вести диалог с человеком, распознавать и анализировать сложные ситуации, планировать движения манипулятора и осуществлять их реализацию в условиях

ограниченной информации о внешней среде. Все это обеспечивается совершенством управляющих систем, включающих в себя элементы искусственного интеллекта, способность к обучению и адаптации в процессе работы.

*Биотехнические манипуляционные роботы* берут свое начало от копирующих и командных механических систем. Операции, которые могут выполнять роботы этого типа, являются менее определенными, чем технологические операции, осуществляемые автоматическими роботами. Широкое распространение они получили при работе с радиоактивными материалами.

Управление манипуляторами этого типа роботов осуществляется оператором, а ЭВМ используется для облегчения его работы.

Различают три разновидности управления биотехническими манипуляционными роботами: копирующее, командное и полуавтоматическое. *Копирующее управление* осуществляется с помощью задающего устройства, кинематически подобного исполнительной руке робота. Такие системы называют копирующими манипуляторами. Человек-оператор перемещает задающее устройство, а манипулятор повторяет эти движения одновременно по всем степеням подвижности. В случае *командного управления* оператор с командного устройства дистанционно задает движение звеньям манипулятора путем поочередного включения соответствующих приводов. При *полуавтоматическом управлении* оператор, манипулируя управляющей рукояткой, имеющей несколько степеней свободы, задает движение схвата манипулятора. ЭВМ по сигналу от управляющей рукоятки формирует сигналы управления на приводы всех звеньев манипулятора. Существуют также биотехнические системы, в которых управление манипулятором осуществляется при помощи биоимпульсов от соответствующих мышц человеческой руки.

*Интерактивные манипуляционные роботы* отличаются активным участием человека в процессе управления, которое выражается в различных формах взаимодействия его с ЭВМ. Здесь также различают три разновидности управления: автоматизированное, супервизорное и диалоговое.

При *автоматизированном управлении* простые операции робот выполняет без управляющего воздействия со стороны оператора, а остальные — при участии оператора в биотехническом режиме. *Супервизорное управление* отличается

тем, что весь цикл операций разбивается на части, выполняемые манипуляционным роботом автоматически, но переход от одной части к другой осуществляется оператором путем подачи соответствующих команд. При *диалоговом управлении* оператору и ЭВМ представляется возможность совместно принимать решения и управлять манипулятором в сложных ситуациях.

### Кинематические схемы, структура и технические характеристики манипуляторов

Первый вопрос, с которым сталкивается создатель манипулятора, — выбор его кинематической схемы, структуры его скелета. В процессе выполнения операций с объектами манипулирования в большинстве случаев манипуляторы имитируют движение рук человека. Поэтому структурная схема манипулятора должна обладать кинематическими характеристиками, аналогичными характеристикам руки человека. Подвижности, имеющиеся у руки человека (без учета подвижностей пальцев), можно обеспечить с помощью пространственной кинематической цепи, у которой к неподвижному звену 4 (аналог — лопатка) посредством различных кинематических пар присоединяются звенья (рис. 24.2): трехподвижной парой *A* — звено 1 (плечо); одноподвижной парой *B* — звено 2 (предплечье); трехподвижной парой *C* — звено 3 (кисть). Используя для оценки степени подвижности руки человека формулу Малышева без учета движения кисти (пальцев и фаланг), получим  $W = 7$ ; с учетом всех звеньев и в самой кисти имеем  $W = 27$ .

Опыт работы с неориентированными объектами показывает, что манипулятор должен иметь по крайней мере семь (и более) степеней подвижности. Три степени необходимы для перемещения инструмента в любую точку зоны обслуживания, а три — для ориентации инструмента, например схватка электрода, краскораспылителя и т.п. Как минимум одна степень подвижности должна быть у схвата.

Каждая степень подвижности манипуляционного робота управляется индивидуальным приводом, в результате чего исполнительный орган получает направленное, вполне определенное движение. В современных манипуляторах используют электромеханические, гидравлические, пневматические или комбинированные приводы.

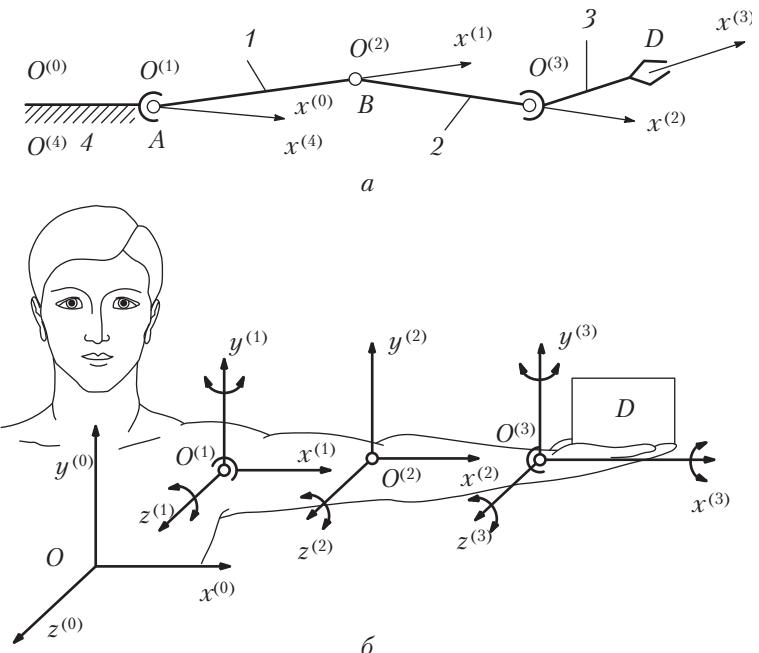


Рис. 24.2

Поскольку манипулятор предназначен для замены физических функций руки человека, у робота можно выделить три основные группы движений: глобальные, региональные и локальные.

Глобальные движения осуществляются путем перемещения подвижного основания робота с помощью двигательной системы. В стационарных роботах глобальные движения отсутствуют. Их станины неподвижно крепятся к полу, кронштейну или потолку возле технологического оборудования.

Региональные движения — перемещения схвата робота в различные зоны рабочего пространства, определяемого размерами звеньев манипулятора.

Локальные движения — перемещения схвата, соизмеримые с его размерами, в частности ориентация в малой зоне рабочего пространства.

Иногда глобальные и региональные движения называют транспортирующими движениями, а локальные — ориентирующими.

Существует большое количество схем манипуляторов, различным образом реализующих региональные движения, но наиболее распространенными в промышленности являются пять следующих схем с одноподвижными кинематическими парами:

- манипулятор, функционирующий в декартовой (прямоугольной) системе координат (рис. 24.3), прост в управлении и отличается высокой точностью действий. Схват манипулятора поступательно перемещается вдоль трех основных осей:  $x$ ,  $y$  и  $z$  (т.е. слева направо, вперед-назад и вверх-вниз);
- манипулятор, работающий в цилиндрической системе координат (рис. 24.4). Его схват может выдвигаться и втягиваться, а также перемещаться вверх и вниз вдоль стойки. Кроме того, весь узел манипулятора может поворачиваться вокруг оси основания, но не на полный оборот, что позволяет ему выполнять операции в окружающей цилиндрической зоне;
- манипулятор, действующий в сферической (или полярной) системе координат (рис. 24.5). Его схват может выдвигаться и втягиваться. Вертикальные перемещения манипулятора достигаются путем поворота его в вертикальной плоскости в «плечевом» суставе. Весь узел манипулятора

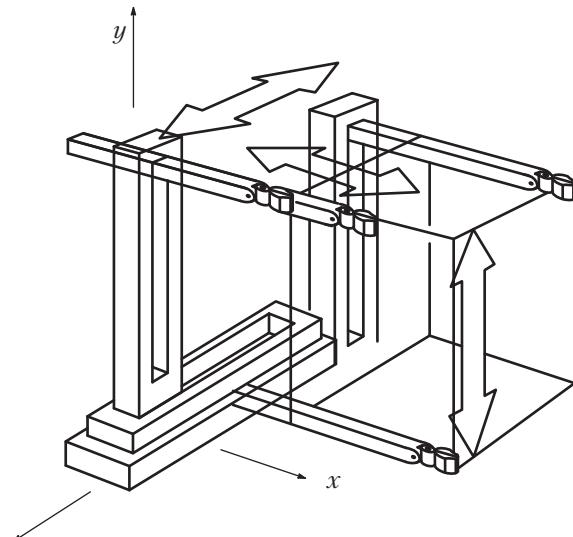


Рис. 24.3

может также поворачиваться вокруг оси основания. Зона действия подобного манипулятора представляет усеченную сферу. Первые модели промышленных роботов были сконструированы именно по этому принципу;

- шарнирный манипулятор (рис. 24.6), действующий в ангулярной системе координат, не имеет поступательных кинематических пар, а имеет только вращательные

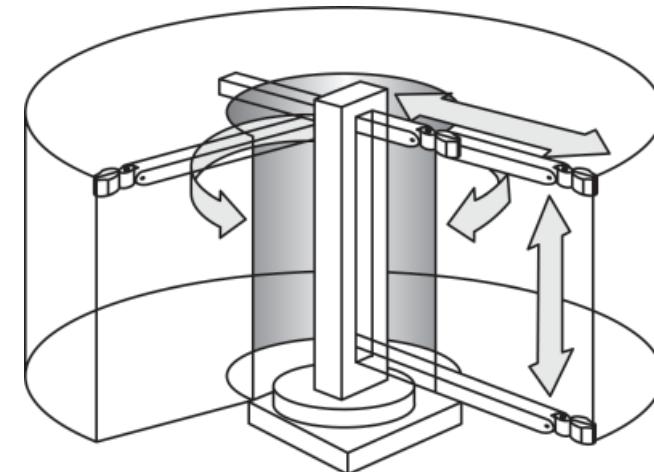


Рис. 24.4

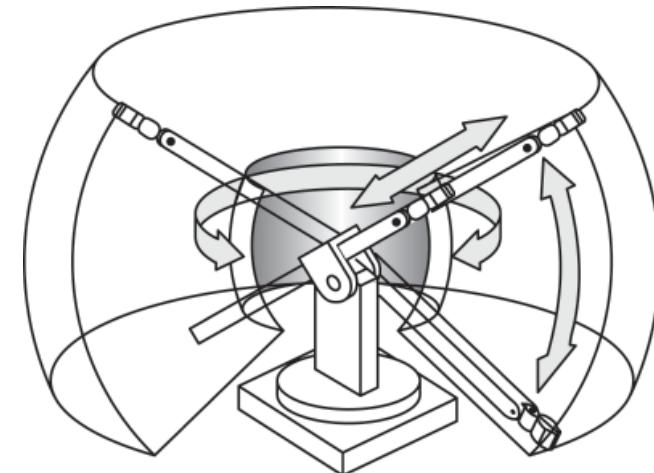


Рис. 24.5

кинематические пары. Манипулятор такого типа очень напоминает руку человека, поскольку имеет «плечевое» и «локтевое» сочленения, а также «запястье». Его зона обслуживания значительно больше, чем у роботов других типов. Он способен обходить препятствия гораздо более разнообразными путями и даже складываться, но вместе с тем он исключительно сложен в управлении;

- своеобразную схему имеет манипулятор системы SCARA (рис. 24.7), представляющий собой вариант манипулятора с цилиндрической системой координат. Все кинематические пары этого манипулятора располагаются в горизонтальной плоскости, благодаря чему механизм способен разворачиваться подобно складной ширме. Его зона обслуживания имеет цилиндрическую форму.

Перспективными представляются роботы еще двух типов. Первый из них, «Spine» (рис. 24.8), спроектирован специалистами фирмы «Спайн роботикс». В нем используется длинный хоботоподобный манипулятор, состоящий из множества чечевицеобразных дисков, которые соединены между собой двумя парами тросов, обеспечивающих натяжение. Тросы соединены с поршнями гидравлических цилиндров, которые, создавая натяжение, вызывают перемещение манипулятора. Специальные датчики передают

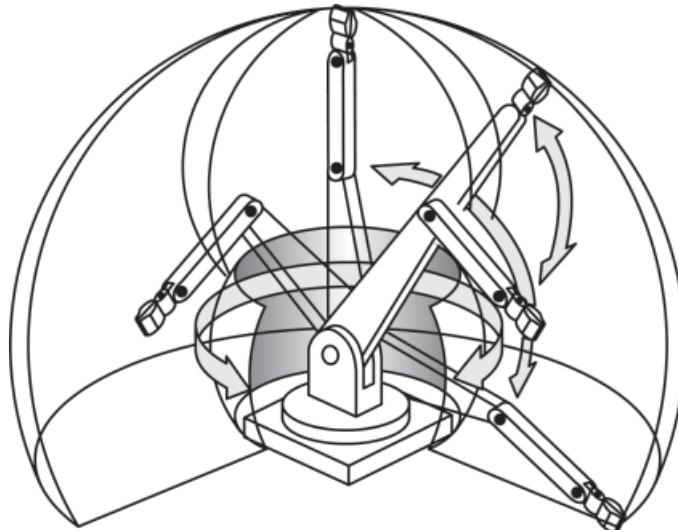


Рис. 24.6

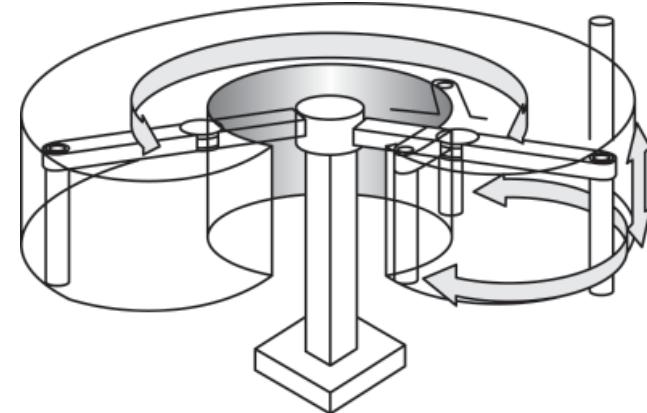


Рис. 24.7

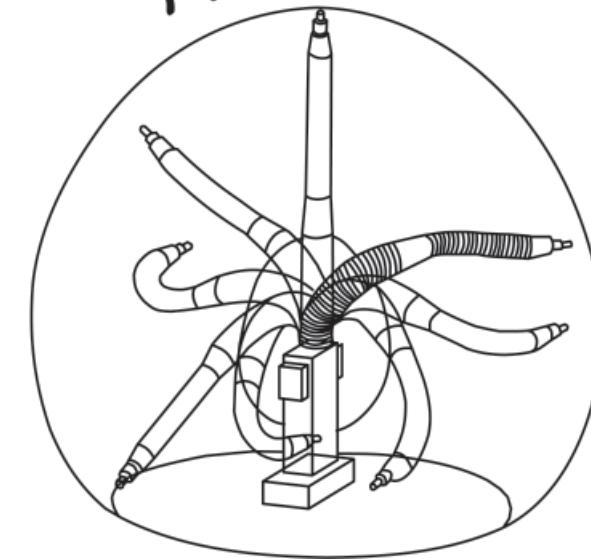


Рис. 24.8

на систему управления информацию о положении манипулятора и его кисти. Такой робот отличается чрезвычайно большой гибкостью, значительным радиусом действия и высокой маневренностью.

Другой робот маятникового типа, IR B1000, разработан специалистами фирмы ASEA; его манипулятор подвешен подобно маятнику с двойным карданным подвесом и может перемещаться по направляющим относительно продольной и поперечной осей (рис. 24.9). По утверждению специалистов фирмы ASEA, это устройство движется в 1,5 раза быстрее, чем традиционные манипуляторы, что обеспечивает высокую производительность.

Кинематическая цепь, реализующая локальные движения, называется кистью робота, поскольку она выполняет функции, аналогичные функциям кисти руки человека. Назначение кисти — обеспечить ориентирующие движения. Для удержания объекта манипулирования кисть снабжается схватом. Существует столько же типов схватов, сколько и областей применения роботов. Конструкции схватов могут представлять собой устройства от обычных клещей для захвата предметов двумя или несколькими губками до специально сконструированных схватов, в гнезда которых устанавливаются сменные инструменты для выполнения ряда технологических операций, таких, как сверление, нарезание резьбы, сварка, резка, окраска и т.д.

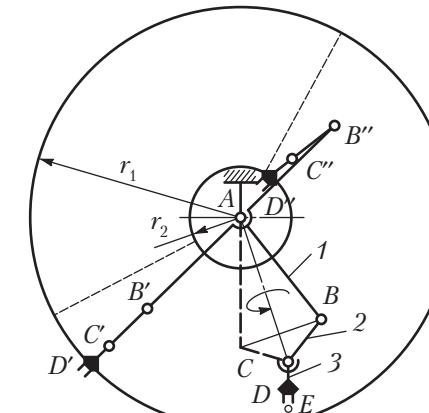
Рассмотрим основные геометро-кинематические и структурные характеристики манипуляторов, к которым прежде всего относят число степеней подвижности, форму и размеры рабочей зоны, маневренность, угол и коэффициент сервиса.

Число степеней подвижности схвата манипулятора можно подсчитать как сумму подвижностей всех пар открытой кинематической цепи. Сказанное не противоречит формуле Малышева (3.1) для пространственных механизмов, так как в открытых цепях число подвижных звеньев всегда равно числу кинематических пар.

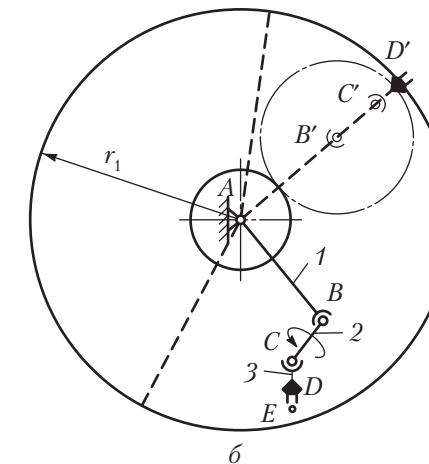
Для рассмотренных механизмов манипуляторов с одноподвижнымиарами (рис. 24.3—24.7) можно использовать формулу

$$W = 6n - 5p_1 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3,$$

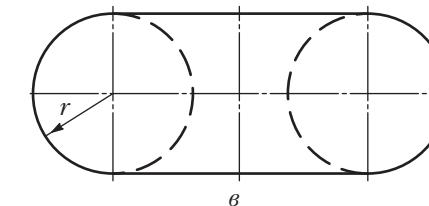
где  $n$  — число подвижных звеньев;  $p_1$  — число одноподвижных пар.



а



б



в

Рис. 24.9

Под маневренностью манипулятора понимают число его степеней подвижности при неподвижном схвате. Маневренность характеризует возможность кинематической цепи манипулятора занимать разные положения при одном и том же расположении схвата. Маневренность манипулятора зависит не только от вида и числа кинематических пар, но и от их расположения. Так, манипулятор, изображенный на рис. 24.9, *а*, имеет маневренность, равную единице, — это групповая подвижность, означающая возможность совместного вращения звеньев 1, 2 вокруг оси *AC*, проходящей через центры сферических пар. Маневренность, равная единице, в этом случае означает, что к заданной точке *E* в заданном направлении *CE* схват может подойти при различных положениях остальных звеньев 1, 2, геометрическим местом которых будут конические поверхности с вершинами в точках *A* и *C* и образующими *AB* и *CB*.

Если пары *A* и *B* поменять местами (рис. 24.9, *б*), то число степеней подвижности по формуле Малышева останется прежним:

$$W = 6n - \sum(6 - i)p_i = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1;$$

но это местная подвижность, означающая возможность вращения звена 2 вокруг оси *BC*, при этом маневренность будет равна нулю, поскольку в данном случае схват может подойти к заданной точке *E* рабочей зоны в заданном направлении *CE* только при одном-единственном положении звеньев 1, 2.

Повышенная маневренность увеличивает возможности для выполнения сложных операций с объектом манипулирования наиболее рациональным путем в условиях наличия препятствий в рабочей зоне, но усложняет задачу управления таким роботом, поскольку приводит к неоднозначному решению задачи расчета обобщенных координат.

Для некоторых геометрических характеристик промышленных роботов ГОСТ 25686—85 вводит ряд определений.

*Исполнительным устройством* называют устройство, выполняющее все двигательные функции робота.

*Рабочий орган* — составная часть исполнительного устройства для непосредственного выполнения технологических операций или вспомогательных переходов.

*Рабочее пространство* манипулятора — часть физического пространства, в котором может находиться исполнительное устройство при функционировании манипулятора.

*Рабочая зона* — пространство, в котором может находиться рабочий орган. Не в любой точке рабочей зоны схват может занимать произвольное положение из-за конструктивных ограничений на углы поворота в шарнирах, поэтому рабочая зона реально уменьшается до зоны обслуживания.

*Зона обслуживания* — пространство, в котором рабочий орган выполняет свои функции в соответствии с назначением.

Для манипулятора, изображенного на рис. 24.9, *а*, рабочая зона — пространство между сферами радиусом  $r_1 = AD'$  и радиусом  $r_2 = AD''$ , а зона обслуживания — лишь часть такого пространства (штриховая линия на рис. 24.9, *а*); для манипулятора, изображенного на рис. 24.9, *б*, рабочая зона — тор (кольцо кругового сечения) с размерами  $r_1 = AD'$  и  $r = B'D'$  (рис. 24.9, *б*), а зона обслуживания — часть такого тора (штрихованная линия на рис. 24.9, *б*).

Манипулятор с тремя поступательными парами (см. рис. 24.3) имеет рабочую зону в виде прямоугольного параллелепипеда. Для манипулятора с одной вращательной и двумя поступательными парами (см. рис. 24.4) рабочая зона — кольцевой цилиндрический сектор.

В общем случае для каждой точки рабочей зоны манипулятора существует некоторый телесный угол  $\Psi$  — угол сервиса, внутри которого схват может подойти к этой точке. Как известно, величина телесного угла определяется отношением площади сферы, вырезанной телесным углом, к квадрату радиуса сферы, поэтому максимальное значение

$$\text{телесного угла } \Psi_{\max} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ ср (стериан).}$$

Отношение угла  $\Psi$  к его максимальному значению  $\theta = \Psi(4\pi)$  называют коэффициентом сервиса в данной точке. Величина  $\theta$  может изменяться от нуля для точек на границе рабочей зоны, где схват может быть подведен в единственном направлении, до единицы для точек зоны полного сервиса, где схват может быть подведен в любом направлении.

Определение значения коэффициента сервиса  $\theta$  связано с анализом движения звеньев механизма манипулятора при различных фиксированных положениях центра схвата.

Методику вычисления  $\theta$  рассмотрим на примере манипулятора с двумя сферическими и одной вращательной парами (см. рис. 24.9, *а*). Для определения угла сервиса  $\Psi$  в

некоторой точке  $E$  рабочей зоны рассмотрим механизм манипулятора как пространственный четырехзвенник со сферическими парами  $A, C, D$  и вращательной парой  $B$ ; точка  $D$  центра схвата совпадает с заданной точкой  $E$  на линии 4 (рис. 24.10,  $a$ ). Сперва определим возможные положения звена  $CD$  (схваты) в плоскости чертежа, а затем все его возможные положения в пространстве путем вращения плоского четырехзвенника относительно условной стойки  $AD$  длиной  $r$ , совпадающей с осью  $x$  пространственной системы координат  $Oxyz$ .

В области, где коэффициент сервиса  $\theta = 1$ , угол сервиса  $\psi = 4\pi$ . Следовательно, точка  $C$  должна иметь возможность занять любое положение на сфере радиусом  $DC = l_3$  с центром в точке  $D$ . Для этого в плоском четырехзвеннике звено  $CD$  должно быть кривошипом, т.е. поворачиваться на полный оборот. Как известно (см. лекцию 5), условие существования кривошипа состоит в том, что сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев должна быть меньше суммы длин остальных звеньев. Если, например, звено 1 самое длинное, а звено 3 самое короткое, то  $l_1 + l_3 \leq r + l_2$ , откуда  $r_{\min} = r_1 = l_1 - l_2 + l_3$  (рис. 24.10,  $b$ ).

Если самое длинное звено  $AD' = r$ , а самое короткое звено 3, то  $r + l_3 \leq l_1 + l_2$ , откуда  $r_{\max} = r_2 = l_1 + l_2 - l_3$ .

В пределах от  $r_1$  до  $r_2$  коэффициент сервиса  $\theta = 1$  (зона II на рис. 24.10,  $b$ ).

Если же звено 3 является коромыслом, то  $\theta < 1$ . В предельных положениях, когда звенья 1, 2, 3 находятся на одной прямой  $Ax$ ,  $\theta = 0$ . Это имеет место при  $r = r_0 = l_1 - l_2 - l_3$  и при  $r = r_3 = l_1 + l_2 + l_3$ . Следовательно, в зонах I и III на рис. 24.10,  $b$   $\theta < 1$ .

В любой промежуточной точке зон I или III, например, в точке  $D'$ , можно определить коэффициент сервиса  $\theta$  следующим образом. Найдя максимально возможный угол поворота  $\Phi_m$  коромысла  $C'D'$ , когда звенья  $AB'$  и  $B'C'$  находятся на одной прямой, определим поверхность сферического сектора радиусом  $R = l_3$  и углом  $\varphi = \Phi_m$  (рис. 24.10,  $c$ ). Формулу поверхности  $S$  шарового сектора получим путем суммирования элементарных поверхностей  $dS = 2\pi R \sin \varphi R d\varphi$  в пределах от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \Phi_m$ .

$$S = \int_0^{\Phi_m} 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos \Phi_m).$$

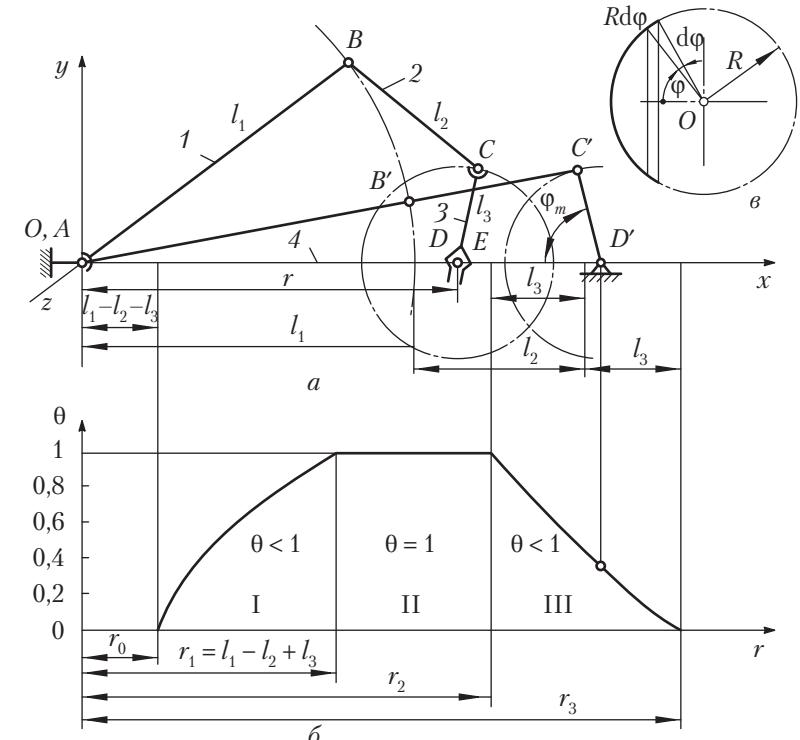


Рис. 24.10

В нашем случае  $R = l_3$  и  $S = 2\pi l_3^2 (1 - \cos \Phi_m)$ ; следовательно,

$$\theta = \frac{\Psi}{4\pi} = \frac{S/l_3^2}{4\pi} = \frac{1 - \cos \Phi_m}{2}.$$

На рис. 24.10,  $a$  при  $r = AD' \cos \Phi_m \approx 0,24$  коэффициент сервиса  $\theta = 0,38$ . Для манипулятора, изображенного на рис. 24.10,  $a$ , график зависимости  $\theta$  от  $r$  представлен на рис. 24.10,  $b$ . Подобные графики нужны не только при исследовании имеющегося манипулятора, но и при проектировании кинематических схем манипуляторов по заданным условиям.

К техническим показателям, характеризующим промышленные роботы, также относятся грузоподъемность, быстродействие, точность позиционирования, энергетические затраты и т.д.

## Лекция 25

### Задачи о положениях манипуляторов

При решении задач проектирования и управления промышленными роботами приходится определять как положения звеньев относительно неподвижной системы координат (абсолютные положения звеньев), так и их относительные положения (например, обобщенные координаты). Эти задачи известны в робототехнике соответственно как прямая и обратная задачи о положениях.

Для исследования движения исполнительного механизма манипулятора в пространстве наибольшее распространение получил метод преобразования координат с матричной формой записи. Он позволяет упорядочить выполняемые действия и сократить математические выкладки. При этом методе выбирают число систем координат, равное числу элементов звеньев, образующих кинематические пары. Неподвижная система координат  $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$  обычно связывается со стойкой, а с каждой кинематической парой — подвижная система, одна из осей которой связана с характерным элементом звена, например осевой линией. Для примера на рис. 24.2, а показаны координатные оси  $O^{(1)}x^{(1)}, O^{(2)}x^{(2)}, O^{(3)}x^{(3)}, O^{(4)}x^{(4)}$  (или  $O^{(0)}x^{(0)}$ ) — четырехзвенной открытой кинематической цепи из звеньев 1, 2, 3, 4, моделирующей структуру руки человека (см. рис. 24.2, б). Ось  $z^{(i)}$  направляют вдоль оси кинематической пары, а ось  $y^{(i)}$  дополняет правую систему координат  $O^{(i)}x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ .

Применение метода преобразования координат для решения прямой задачи о положениях проиллюстрируем на примере кинематической схемы промышленного робота (рис. 25.1). Четыре подвижных звена 1, 2, 3 и 4 образуют четыре одноподвижные пары, из которых три вращательные и одна поступательная. Число степеней подвижности робота равно четырем:

$$W = 6n - 5p_1 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4.$$

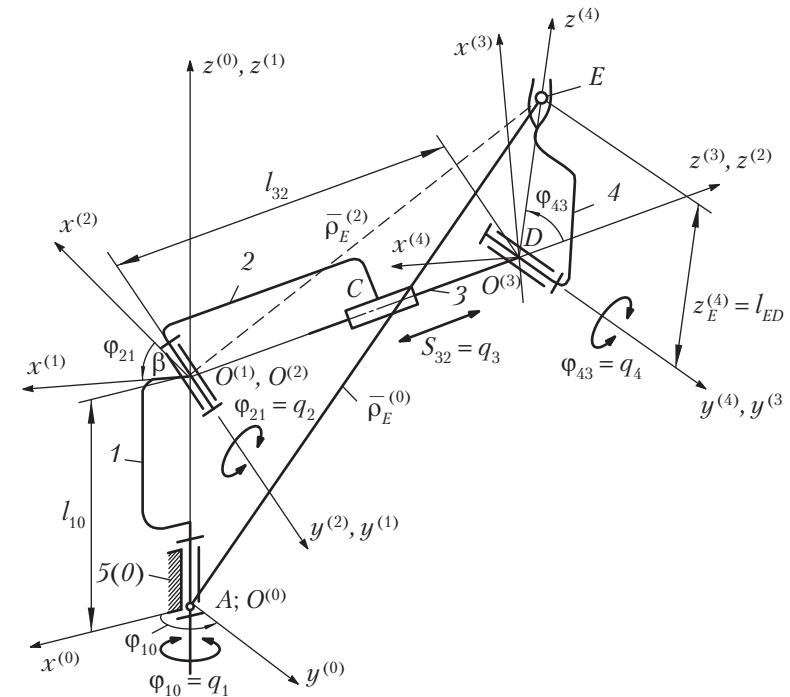


Рис. 25.1

Поэтому для решения прямой задачи о положениях должны быть заданы четыре обобщенные координаты: относительные углы поворота звеньев  $\varphi_{10} = q_1(t)$ ,  $\varphi_{21} = q_2(t)$ ,  $\varphi_{43} = q_4(t)$  и относительное перемещение вдоль оси звена 3  $S_{32} = q_3(t)$  (см. рис. 25.1).

Требуется определить радиус-вектор  $\rho_E^{(0)}$  точки E схватка относительно неподвижной системы координат  $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ , связанной со стойкой 5 (или 0). Оси систем координат ориентированы относительно элементов кинематических пар следующим образом:

ось  $z^{(0)}$  неподвижной системы координат стойки направлена вдоль оси вращательной пары A;

со звеном 1 связана система  $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ , имеющая смещение  $l_{10}$  начала координат  $O^{(2)}$  вдоль оси  $z^{(1)}$ . Ось  $z^{(1)}$  совпадает с осью  $z^{(0)}$ , а ось  $y^{(1)}$  направлена по оси вращательной кинематической пары B;

со звеном 2 связана система  $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ , имеющая начало координат  $O^{(2)}$ , совпадающее с точкой  $O^{(1)}$ . Ось  $y^{(2)}$

совпадает с осью  $y^{(1)}$ , т.е. с осью вращательной кинематической пары  $B$ ;

начало координат системы  $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$  имеет смещение  $l_{32}$  относительно точки  $O^{(2)}$  вдоль оси  $z^{(2)}$ . Ось  $z^{(3)}$  выбрана совпадающей с осью  $z^{(2)}$ ;

координата  $z^{(4)}$  точки  $E$  схвата 4 задана в системе  $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$ , ось  $y^{(4)}$  которой направлена по оси вращательной кинематической пары  $D$ .

Для определения радиус-вектора  $\vec{r}_E^{(0)}$  необходимо разрешить матричное уравнение перехода к системе координат  $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ :

$$\vec{r}_E^{(0)} = T_{40} \vec{r}_E^{(4)} = T_{43} T_{32} T_{21} T_{10} \vec{r}_E^{(4)}. \quad (25.1)$$

Достоинство метода проявляется в случае специального выбора подвижных систем координат. Если координатные оси совмещать с осью вращательной пары или направлением поступательной пары, то матрицы перехода существенно упрощаются.

Координаты точки  $E$  в трехмерном пространстве записываются в виде столбцевых матриц:

$$\vec{r}_E^{(4)} = \begin{vmatrix} x_E^{(4)} \\ y_E^{(4)} \\ z_E^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{ED} \end{vmatrix} \text{ или } \vec{r}_E^{(0)} = \begin{vmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ z_E^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Здесь  $T_{10}^{(2)}$  — матрица перехода от системы  $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$  к системе  $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$  (элементарная матрица поворота вокруг оси  $z$  и смещения вдоль оси  $z$ ):

$$T_{10}^{(2)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{21}^{(y)}$  — матрица перехода от системы  $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$  к системе  $O^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$  (элементарная матрица поворота относительно оси  $y$ ):

$$T_{21}^{(y)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{32}^{(x)}$  — матрица перехода от системы  $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$  к системе  $O^{(2)}x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$  (элементарная матрица перемещения вдоль оси  $x$ ):

$$T_{32}^{(x)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$T_{43}^{(y)}$  — матрица перехода от системы  $O^{(4)}x^{(4)}y^{(4)}z^{(4)}$  к системе  $O^{(3)}x^{(3)}y^{(3)}z^{(3)}$  (элементарная матрица поворота вокруг оси  $x$ ):

$$T_{43}^{(y)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{43} & 0 & \sin\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{43} & 0 & \cos\varphi_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставив эти матрицы в формулу (25.1), получим координаты точки  $E$  в системе  $O^{(0)}x^{(0)}y^{(0)}z^{(0)}$ . Развернутые формулы, определяющие положение точки  $E$  схвата, ввиду громоздкости не приведены. При решении конкретных задач на ЭВМ целесообразно воспользоваться библиотекой стандартных подпрограмм для выполнения элементарных операций с матрицами.

Для определения скорости и ускорения точек звеньев пространственных механизмов манипуляторов при использовании метода преобразования координат имеют в виду, что радиус-вектор  $\vec{r}_E^{(0)}$ , например, точки  $E$  есть векторная функция обобщенных координат:

$$\vec{r}_E^{(0)} = \vec{r}_E(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n),$$

поэтому скорость  $v_E$  точки  $E$  определяется по соотношению

$$v_E = \frac{d\vec{r}_E}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_E}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (25.2)$$

или

$$v_{Ex} = \dot{x}_E^{(0)} = \frac{dx_E^{(0)}}{dt}; \quad v_{Ey} = \dot{y}_E^{(0)} = \frac{dy_E^{(0)}}{dt}; \quad v_{Ez} = \dot{z}_E^{(0)} = \frac{dz_E^{(0)}}{dt}; \quad (25.3)$$

$$v_E = \sqrt{v_{Ex}^2 + v_{Ey}^2 + v_{Ez}^2}.$$

Абсолютную угловую скорость  $j$ -го звена относительно стойки находят сложением угловых скоростей при относительном движении звеньев:

$$\bar{\omega}_{j0} = \sum_{i=1}^j \bar{\omega}_{i/(i-1)}; \quad (25.4)$$

индекс  $i (i - 1)$  указывает на порядковые номера звеньев, участвующих в относительном движении, например:

$$\bar{\omega}_{40} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{43}.$$

Решения обратных задач о положениях манипуляторов в явном виде имеют важное значение как при проектировании, так и при управлении. При проектировании такие решения позволяют оценить влияние конструктивных параметров на процесс движения, при управлении — построить быстродействующие алгоритмы управления.

### Контрольные вопросы и задания к лекциям 24, 25

1. Что такое манипулятор, автооператор, промышленный робот?
2. Для чего предназначены промышленные роботы?
3. В чем заключаются особенности структуры кинематических цепей манипуляторов промышленных роботов?
4. От чего зависят двигательные возможности манипулятора промышленного робота?
5. Что такое подвижность манипулятора? Как она определяется?
6. Дайте определение рабочего пространства, зоны обслуживания манипулятора и его маневренности (на любом примере).

## Лекция 26

(для самостоятельной работы)

### Силовой расчет механизмов с учетом трения в кинематических парах

Способность контактирующих поверхностей (КП) звеньев сопротивляться их относительному движению называется внешним **трением**. Трение обусловлено неидеальным состоянием контактирующих поверхностей (микронеровности, загрязнения, окисные пленки и т.п.) и силами межмолекулярного сцепления. Трение в кинематических парах характеризуется силами трения и моментами сил трения. Силой трения называется касательная составляющая реакции в КП (составляющая, направленная по касательной к контактирующим поверхностям), которая всегда направлена против вектора скорости относительного движения звеньев.

Различают следующие виды трения:

- **трение покоя** проявляется в момент, когда два тела, находящиеся в состоянии относительного покоя, начинают относительное движение (касательную составляющую, возникающую в зоне контакта до начала относительного движения, в условиях, когда она меньше силы трения покоя, будем называть силой сцепления; максимальная величина силы сцепления равна силе трения покоя);
- **трение скольжения** появляется в КП при наличии относительного движения звеньев; для большинства материалов трение скольжения меньше трения покоя;
- **трение качения** появляется в высших КП при наличии относительного вращательного движения звеньев вокруг оси или точки контакта;
- **трение верчения** возникает при взаимодействии торцевых поверхностей звеньев вращательных КП (подпятники).

Основные положения силового расчета с учетом трения такие же, как и расчета без учета трения. Это объясняется тем, что наличие трения не изменяет число неизвестных в кинематических парах. В кинематических парах добавляются силы трения и моменты сил трения.

Вспомним основные положения силового расчета.

Силовой анализ механизмов основывается на решении прямой задачи динамики — по заданному закону движения определить действующие силы.

Заданными обычно считаются:

- закон движения начальных (начального) звеньев;
- внешние силы, приложенные к звеньям механизма.

Подлежат определению только реакции в кинематических парах. Иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считаются неизвестными, тогда в силовой анализ также входит определение величин этих сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев.

При решении обеих задач используется **принцип Д'Аламбера**, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции.

Уравнения равновесия в этом случае называют **уравнениями кинетостатики**.

Для плоской схемы число неизвестных, определяемых из какой-либо системы уравнений  $N_F = 2p_{\text{н}} + p_{\text{в}} + W_{\text{пл}}$ , должно совпадать с числом уравнений  $N_y = 3n$ , т.е.  $N_F = N_y$ .

$$3n = 2p_{\text{н}} + p_{\text{в}} + W_{\text{пл}}.$$

Это условие совпадает с условием равенства нулю числа степеней свободы, т.е. кинетостатически определимыми группами являются структурные группы Ассура.

Для пространственной схемы это условие запишется в виде

$$6n_r = 5p_V + 4p_{IV} + 3p_{III} + 2p_{II} + 1p_I,$$

или

$$6n_r = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 1p_5.$$

Система сил для пространственной схемы должна быть пространственной, а для плоской схемы действующих сил должна быть плоской.

В случае кинетостатической определимости плоский механизм не должен иметь избыточных связей. Наличие избыточных связей увеличивает число неизвестных составляющих реакций, и для их определения дополнительно к уравнениям кинетостатики должны быть составлены уравнения деформаций (перемещений).

### Силы в низших кинематических парах с учетом трения

При наличии трения скольжения сила взаимодействия звеньев отклоняется от общей нормали к соприкасающимся поверхностям на угол трения  $\varphi_t$ .

Тангенс угла трения численно равен коэффициенту трения скольжения  $\tan \varphi_t = f$ .

В **поступательной паре** (рис. 26.1) сила  $\bar{F}_{12}$  воздействия звена 2 на звено 1 отклоняется от нормали  $n-n$  на угол трения  $\varphi_t$ . При этом вектор силы  $\bar{F}_{12}$  составляет тупой угол ( $90^\circ + \varphi_t$ ) с вектором скорости  $\bar{V}_{12}$ , с которой звено 1 движется относительно звена 2. Силу  $\bar{F}_{12}$  можно разложить на нормальную силу  $\bar{N}_{12}$  и касательную  $\bar{F}_{12}^T$ . Касательная составляющая  $\bar{F}_{12}^T$  — сила трения — направлена против относительной скорости. В этом проявляется тормозящее

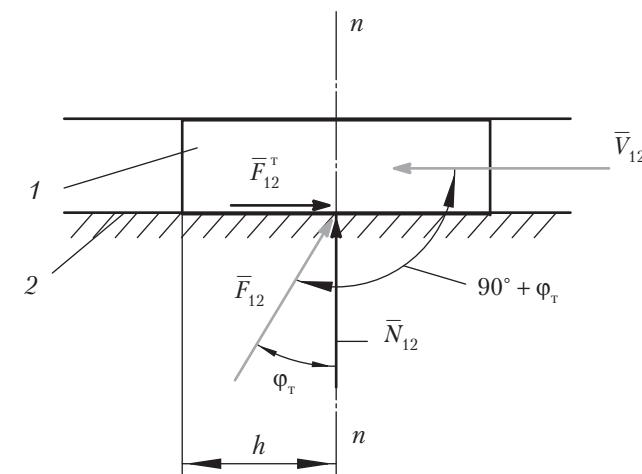


Рис. 26.1

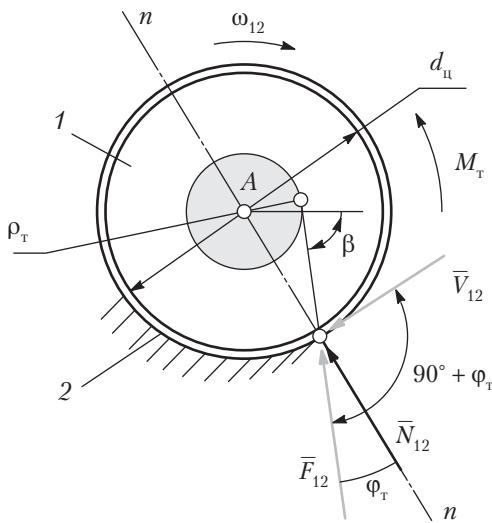


Рис. 26.2

действие трения. Координата  $h$  точки приложения силы  $\bar{F}_{12}$  неизвестна и определяется в процессе силового расчета.

$$F_{12} = N_{12}f,$$

так как  $\operatorname{tg} \phi_t = f$ .

Во вращательной паре (рис. 26.2) сила  $\bar{F}_{12}$  также отклоняется от нормали  $n-n$ , а потому проходит не через центр шарнира, а касательно кругу трения, центр которого совпадает с центром шарнира — точкой  $A$ .

Радиус круга трения

$$\rho_t = \frac{d_u}{2} \sin \phi_t.$$

Так как  $\phi_t$  мал, то  $\sin \phi_t \approx \operatorname{tg} \phi_t$  и тогда

$$\rho_t \approx \frac{d_u}{2}f.$$

Сила  $\bar{F}_{12}$  действия звена 2 на звено 1 отклоняется и создает момент трения  $M_T = F_{12}\rho_t$ , направленный противоположно угловой скорости относительного движения  $\omega_{12}$ . В этом проявляется тормозящее действие трения в шарнире.

## Силы в высших кинематических парах с учетом трения

В плоском механизме высшая пара в отличие от низшей допускает два относительных движения: звенья 1 и 2 могут скользить по отношению друг другу и перекатываться друг по другу. Поэтому и трение в высшей паре проявляется в виде трения скольжения и трения качения (рис. 26.3).

Смещение реакции  $N_{12}$ , равное  $k$ , — это коэффициент трения качения, который очень мал.

Момент трения качения

$$M_F = k N_{12}.$$

Трение скольжения проявляется в высших парах также, как и в низших: сила взаимодействия двух тел отклоняется от нормали на угол трения и составляет с вектором относительной скорости тупой угол, равный  $(90^\circ + \phi_t)$ .

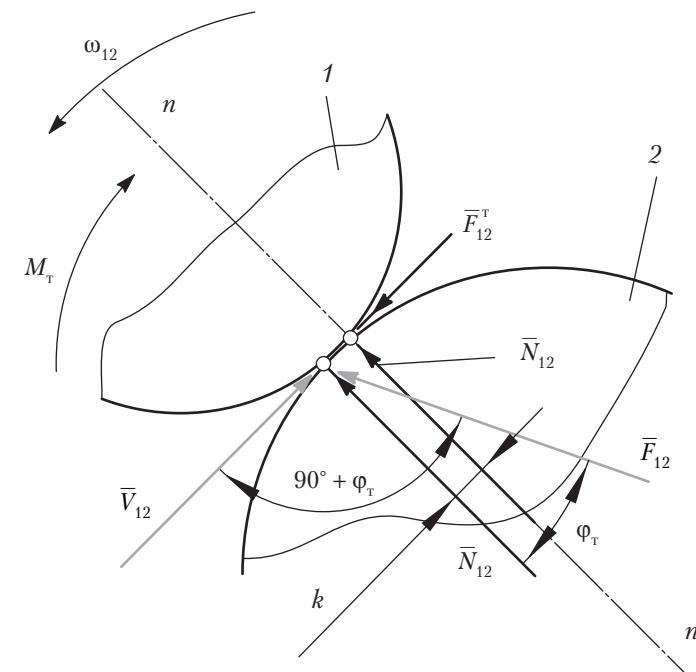


Рис. 26.3

## Учет сил трения при силовом расчете механизмов

Существуют различные методики учета сил трения:

- обобщенная (через коэффициент полезного действия);
- методика последовательных приближений.

Рассмотрим подробнее второй метод. Наличие трения, как уже было сказано выше, не изменяет числа неизвестных в кинематических парах. Следовательно, структурные группы Ассура и при учете трения сохраняют свою статическую определяемость. Поэтому силовой расчет проводится по структурным группам с использованием уравнений кинетостатики, в которые должны быть включены силы трения и моменты трения. Последнее обстоятельство, однако, в большинстве случаев очень сильно усложняет вычисления. Чтобы снизить их сложность, И. И. Артоболевский предложил применить метод последовательных приближений. В этом случае первое решение осуществляется без учета сил трения, далее вводят трение условно, умножая нормальные составляющие сил из первого решения. Рассмотрим пример определения сил с учетом трения в кинематических парах на примере кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

Дано: схема механизма (рис. 26.4);  $\omega_1, \varepsilon_1; F_2; m_1, J_{1S}, m_2; f_{13}, f_{12}, f_{23}$ .

Определить: силы в кинематических парах.

В начале проводился силовой расчет кулачкового механизма без учета сил трения, т.е. в первом приближении, в результате чего были получены силы взаимодействия во всех кинематических парах. Для выполнения силового расчета во втором приближении необходимо определить моменты и силы трения во всех кинематических парах и включить их в силовой расчет. Расчет проводится в том же порядке, что и в первом приближении.

Картина сил, приложенных к толкателю, показана на рис. 26.5.

Помимо известных и расчетных сил  $\bar{F}_2, \bar{G}_2, \bar{\Phi}_{S_2}$  к толкателю приложены искомые внутренние силы: в высшей КП  $\bar{F}_{21}$ ; в низшей КП  $\bar{F}_U, \bar{F}_W$  (эти силы показаны с учетом относительных скоростей  $\bar{V}_{21}$  и  $\bar{V}_{23}$ ).

Узел сил ( $\bar{F}_{21}, \bar{F}_2, \bar{G}_2$  и  $\bar{\Phi}_{S_2}$ ) расположен вне стойки в точке  $D$ , поэтому силовое воздействие стойки на толкатель выражается двумя силами  $\bar{F}_U$  и  $\bar{F}_W$ , приложенными к краям гнезда, к которым будет прижат толкатель. Эти силы направлены под углами  $(90^\circ + \phi_{23})$  к вектору  $\bar{V}_{23}$ .

Равнодействующая  $\bar{F}_{23}$  сил  $\bar{F}_U$  и  $\bar{F}_W$  проходит через точку  $H$  (пересечение линий действия сил) и через узел сил (точка  $D$ ) и составляет угол  $(90^\circ + \psi)$  с вектором  $\bar{V}_{23}$ .

Уравнение сил, приложенных к толкателью, имеет вид

$$\underline{\bar{F}_2} + \underline{\bar{G}_2} + \underline{\bar{\Phi}_{S_2}} + \underline{\bar{F}_{21}} + \underline{\bar{F}_W} + \underline{\bar{F}_U} = 0, \quad (26.1)$$

или после замены равнодействующей силой  $\bar{F}_{23}$  сил  $\bar{F}_U$  и  $\bar{F}_W$ :

$$\underline{\bar{F}_2} + \underline{\bar{G}_2} + \underline{\bar{\Phi}_{S_2}} + \underline{\bar{F}_{21}} + \underline{\bar{F}_{23}} = 0. \quad (26.2)$$

Значения неизвестных сил находятся из плана сил, представленного на рис. 26.6. План сил должен быть выполнен строго в масштабе  $\mu_F$ . Картина сил, приложенных к кулачку, показана на рис. 26.7. К кулачку приложены известные

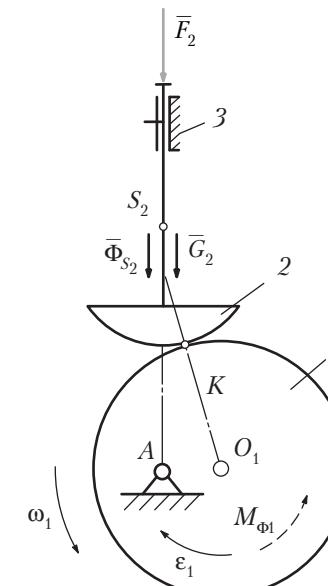


Рис. 26.4

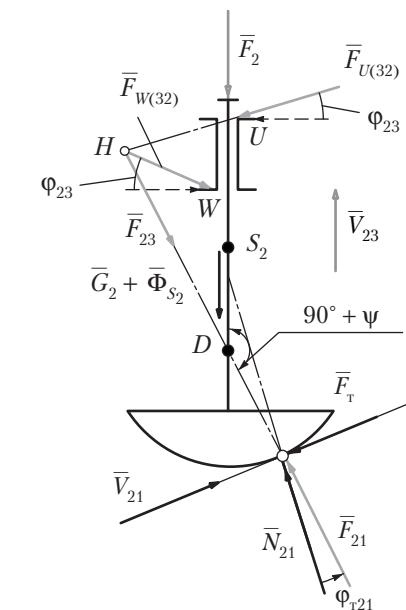


Рис. 26.5

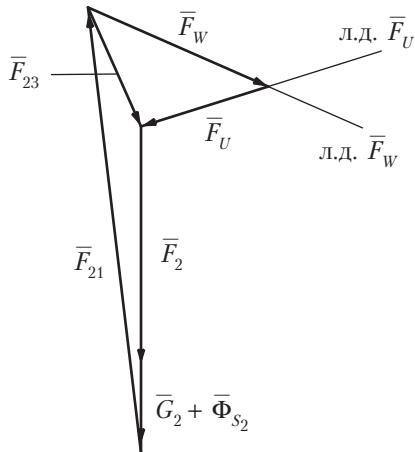


Рис. 26.6

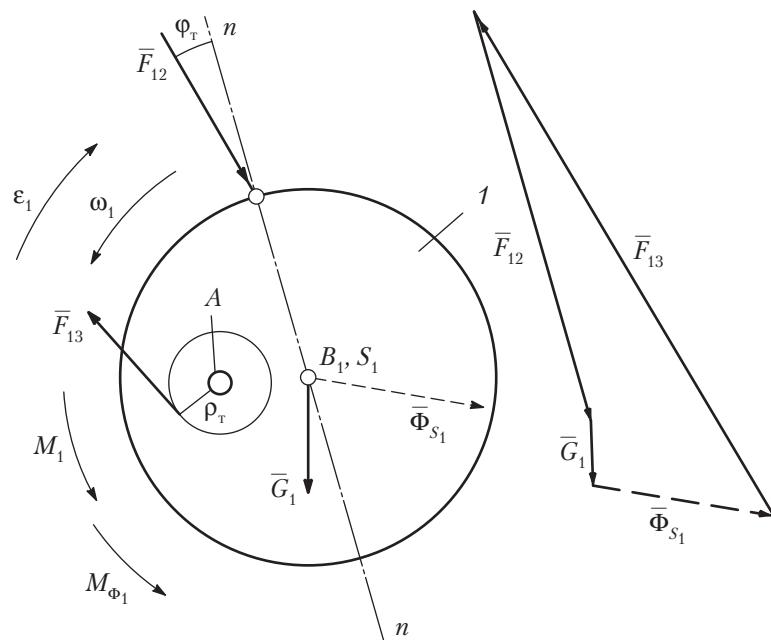


Рис. 26.7

Рис. 26.8

внешние силы  $\bar{G}_1$  и  $\bar{\Phi}_{S1} = -m_1 \bar{a}_{S1}$ , известный внешний момент  $M_{\Phi S_1} = -\varepsilon_1 J_{1s}$ , а также известная сила  $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ . К кулачку также приложены искомый момент  $M_1$  и искомая сила  $\bar{F}_{13}$ , с которой стойка через КП  $A$  воздействует на кулачок. Сила приходит касательно кругу трения. Направление  $M(F_{13})$  противоположно направлению  $\omega_1$ .

Составим уравнение кинетостатического равновесия кулачка:

$$\underline{\underline{G}_1} + \underline{\underline{\Phi}_{S1}} + \underline{\underline{F}_{12}} + \underline{\underline{F}_{13}} = 0.$$

Данное векторное уравнение решается графически методом планов. На рис. 26.8 представлен план сил, выполненный строго в масштабе.

Неизвестный момент  $M_1$  находится из уравнения моментов  $\sum M_A = 0$ .

$$\underline{\underline{M}_1} + \underline{\underline{M}_A(G_1)} + \underline{\underline{M}_A(\Phi_{S1})} + \underline{\underline{M}_{\Phi S_1}} + \underline{\underline{M}_A(F_{12})} + \underline{\underline{M}_A(F_{13})} = 0.$$

Плечи для определения моментов берутся непосредственно с чертежа механизма.

В результате силового расчета, выполненного во втором приближении, получены уточненные значения сил, действующих в кинематических парах. По полученным во втором приближении значениям сил можно определить моменты трения в шарнирах и силу трения в поступательной паре, а затем проделать расчет в третьем приближении. В результате получим еще более точные, более близкие к окончательному результату значения. Процесс последовательных приближений можно продолжать и дальше в зависимости от требуемой точности расчета. Однако опыт показывает, что достаточно второго приближения. Метод является приближенным и может применяться только в тех случаях, когда имеет место процесс сходимости и каждое последующее приближение дает меньшее изменение приращения силы или момента, чем предыдущее.

*Учебное издание*

**Тимофеев Геннадий Алексеевич**

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН  
КУРС ЛЕКЦИЙ**

Руководитель направления *Д. К. Лабин*

Редактор *Т. А. Садчикова*

Корректор *В. Ш. Мерзлякова*

Компьютерная верстка *Н. В. Глищинская*

Формат 84×108 1/32. Гарнитура «Petersburg». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 18,4. Тираж 1000 экз. Заказ №

**ООО ИД Юрайт**

140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: [publish@urait.ru](mailto:publish@urait.ru) [www.urait.ru](http://www.urait.ru)