

Лабораторная работа 4 — Модель процесса

В задании 3 нет необходимости использовать Python, все вычисления производятся на листке.

1. Сэмплинг

Реализуйте три функции, каждая из которых генерирует сэмплы с нормальным распределением $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Входными параметрами этих функций должны быть среднее значение μ и дисперсия σ^2 нормального распределения. В качестве единственного источника случайности используйте сэмплы с равномерным распределением:

- В первой функции сгенерируйте сэмплы с нормальным распределением путем суммирования двенадцати (12) сэмплов с равномерным распределением.
- Во второй функции используйте выборку с отклонением.
- В третьей функции используйте преобразование Бокса-Мюллера. Этот метод позволяет генерировать сэмплы со стандартным (нормированным) нормальным распределением, используя два сэмпла с равномерным распределением $u_1, u_2 \in [0, 1]$:

$$x = \cos(2\pi u_1) \sqrt{-2 \log u_2}$$

Сравните время выполнения трех функций, используя встроенную функцию `timeit`. Сравните также время выполнения ваших функций со встроенной функцией `numpy.random.normal`.

Для каждого набора сэмплов вычислите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение, постройте гистограммы распределения и функции плотности вероятности.

2. Модель процесса на основе одометрии

- (a) Реализуйте модель процесса на основе одометрии. Функция должна принимать на вход три аргумента:

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \delta_{r1} \\ \delta_{r2} \\ \delta_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{x}_t — положение робота до начала движения, \mathbf{u}_t — показания одометрии, полученные роботом, $\boldsymbol{\alpha}$ — шумовые параметры модели процесса. Возвращаемым значением функции должно быть новое положение робота \mathbf{x}_{t+1} , предсказанное моделью.

Поскольку измерения одометрии не идеальны, в модели процесса необходимо учесть погрешность измерений. Чтобы получить случайный шум с нормальным распределением, используйте реализованные ранее методы сэмплинга.

- (b) Если применить модель процесса несколько раз, с одним и тем же начальным положением, показаниями одометрии и значениями шума, какой результат следует ожидать?
- (c) Запустите модель процесса 5000 раз со следующими значениями:

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix},$$

Постройте на одном графике получившиеся положения (x, y) для каждой из 5000 оценок.

3. Модель процесса на основе скорости

Пусть робот движется по круговой траектории с постоянными поступательной v и угловой w скоростями. Текущее положение робота — (x, y, θ) .

- (a) Выведите следующее выражение для центра окружности (x_c, y_c) :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v/w \sin \theta \\ v/w \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- (b) Пусть известны начальное (x, y, θ) и конечное (x', y', θ') положения робота, “соединенные” движением по окружности. Докажите, что центр окружности можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y - y' \\ x' - x \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Подсказка: рассмотрите прямую l , которая соединяет центр окружности и точку P на полпути между (x, y) и (x', y') . Как l и P связаны с двумя слагаемыми в формуле выше?

- (c) Покажите, что значение μ определяется выражением:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta}{(y - y') \cos \theta - (x - x') \sin \theta}$$