Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

2 ноября 2024 г.

МИЭТ

Правила для логики высказываний

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E$$

- Для $\to$:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\ \to I \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ \to E$$

- Для $\neg$ и $\bot$:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}\ \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\ \neg E/\bot I \qquad \frac{\bot}{A}\ \bot E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B}\ \vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B}\ \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{A}\ RAA \qquad \frac{A}{A}\ R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.
- $$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\text{произв. } a\\ \vdots\\ A(a)\end{array}}}{\forall x\, A(x)}\ \forall I \quad\text{и}\quad \dfrac{\exists x\, A(x) \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{возьмём } a,\\ \text{т.ч. } A(a)\\ \vdots\\ B\end{array}}}{B}\ \exists E$$

  Здесь a — новый параметр, как в δ.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила $\exists E$: мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично $\vee E$.
- Удобно помечать подвывод, вводящий параметр, этим параметром.

- Есть упрощённый вариант $\exists E$, не вводящий подвывод, но он усложняет определение контрмоделей для недоказумых секвенций и мы его не используем.

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\exists x P(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
$\vdots$	$\vdots$	
$n-2$	$\exists x Q(x)$	
$n-1$	$\exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–($n-2$)
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2		$\exists x P(x)$	Дано
3	a	$P(a)$	Дано
4		$P(a) \to Q(a)$	$\forall$E, 1
5		$Q(a)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
$n-2$		$\exists x Q(x)$	
$n-1$		$\exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–($n-2$)
n		$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$			Дано
2		$\exists x P(x)$		Дано
3		a	$P(a)$	Дано
4			$\neg P(a)$	$\forall$E, 1
$n-2$			$\bot$	$\neg$E, 3, 4
$n-1$		$\bot$		$\exists$E, 2, 3–($n-2$)
n	$\neg \exists x P(x)$			$\neg$I, 2–($n-1$)

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$:

$$
\dfrac{
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)}\,\forall E}{P(a_1)}\,\wedge E}
\;\;\forall I\, a_1
\qquad
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)}\,\forall E}{Q(a_2)}\,\wedge E}
\;\;\forall I\, a_2
}{}
$$

$$
\dfrac{\forall x\, P(x) \qquad \forall x\, Q(x)}{(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))}\,\wedge I
$$

- Можно ли оба раза использовать a_1?

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$:

$$
\dfrac{
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\;\text{дано}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)}\;\forall\text{E}}{P(a_1)}\;\wedge\text{E}}}{\forall x\, P(x)}\;\forall I\, a_1
\qquad
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\;\text{дано}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)}\;\forall\text{E}}{Q(a_2)}\;\wedge\text{E}}}{\forall x\, Q(x)}\;\forall I\, a_2
}{(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))}\;\wedge\text{I}
$$

- Можно ли оба раза использовать a_1? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \land Q(x)$	Дано
2	a_1	произв. a_1	
3		$P(a_1) \land Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\land$E, 3
k	a_2	произв. a_2	
k		$P(a_2) \land Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\land$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–($k-1$)
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–($n-3$)
n		$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$	$\land$I, $n-2$, $n-1$

или

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \land Q(x)$	Дано
2	a_1	произв. a_1	
3		$P(a_1) \land Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\land$E, 3
k	a_2	произв. a_2	
k		$P(a_2) \land Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\land$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–($k-1$)
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–($n-3$)
n		$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$	$\land$I, $n-2$, $n-1$

или

1		$\forall x\, P(x) \land Q(x)$	Дано
7		$P(a_1) \land Q(a_1)$	$\forall$E, 1
8	a_1	произв. a_1	
5		$P(a_1)$	$\land$E, 7
6	a_1	произв. a_1	
6		$Q(a_1)$	$\land$E, k
3		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 8–5
4		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, 6–6
2		$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$	$\land$I, 3, 4

Здесь важно, что строка 7 появилась после 5 и 6, иначе в них нельзя использовать a_1.

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x, y) \vdash \forall y \exists x\, P(x, y)$:

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$:

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\forall y\, P(x,y)}\;\text{дано} \qquad \boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall y\, P(a_2,y)}\;\text{для } \exists E}{P(a_2,a_1)}\;\forall \mathrm{E}}{\exists x\, P(x,a_1)}\;\exists \mathrm{I}}}{\exists x\, P(x,a_1)}\;\exists E\, a_2; \forall y\, P(a_2,y) \vdash}}{\forall y \exists x\, P(x,y)}\;\forall I\, a_1$$

Пример 4 в линейной записи

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x, y) \vdash \forall y \exists x\, P(x, y)$ в линейной записи:

1	$\exists x \forall y\, P(x, y)$	Дано
2	a_1 произв. a_1	
3	a_2 $\forall y\, P(a_2, y)$	Дано
4	$P(a_2, a_1)$	$\forall$E, 3
$n-2$	$\exists x\, P(x, a_1)$	$\exists$I, 4
$n-1$	$\exists x\, P(x, a_1)$	$\exists$E, 1, 3–$(n-2)$
n	$\forall y \exists x\, P(x, y)$	$\forall$I, 2–$(n-1)$

Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре a_1).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x, y, $\dots$
- Простой пример: докажем $\forall x\, P(x) \vdash \forall x\, P(f(x))$:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x, y, $\ldots$
- Простой пример: докажем $\forall x\, P(x) \vdash \forall x\, P(f(x))$:

1		$\forall x\, P(x)$	Дано
2	a	произв. a	
$n-1$		$P(f(a))$	$\forall$E, 1
n		$\forall x\, P(f(x))$	$\forall$I, 2–($n-1$)

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\dfrac{}{t = t} = I \qquad \dfrac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \qquad \dfrac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t, $A[s]$

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\dfrac{}{t = t} = I \qquad \dfrac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \qquad \dfrac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t, $A[s]$ — та же формула с заменой t на s.
- Не обязательно заменять все вхождения t.
- Вместо правил можно было бы ввести аксиомы: $\forall x\, x = x$ и $\forall x \forall y\ (x = y \wedge A[x] \to A[y])$.

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

1	a, b	произв. a, b	
2		$a = b$	Дано
3		$b = b$	=I
$n-2$		$b = a$	=E$(s, t : b, A[t] : b = \underline{b})$, 2, 3
$n-1$		$a = b \to b = a$	⇒E, 2–$(n-2)$
n		$\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$	∀I, 1–$(n-1)$

- Подчёркиванием в $=E$ выделено заменяемое вхождение терма.

Дополнительное чтение

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).