1 Деревья истинности для логики высказываний

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $((p \to q) \to p) \to p$
4. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
5. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$
6. Сформулировать правила деревьев истинности для следующих операций: стрелка Пирса $\downarrow$, штрих Шеффера $|$, равносильность $\equiv$, сумма по модулю 2 $\oplus$ (она же исключающее или). Если какие-то из них незнакомы и не получится найти определение, напишите.

2 Натуральная дедукция для логики высказываний

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.
2. $p \to q \wedge r \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$.
3. $p \equiv \neg\neg p$.

4*. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$.

5. Законы де Моргана (2 в обоих направлениях).
6. $\vdash p \vee \neg p$ (использовать RAA и закон де Моргана для отрицания дизъюнкции).
7. $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

8*. $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$ (подсказка: можно использовать задачу 7 или закон исключённого третьего).

9*. Составить правила введения и исключения для равносильности, суммы по модулю 2, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

3 Формализация утверждений в логике предикатов

Перевести на язык логики предикатов:

1. Мне скучно.
2. Иванов, Петров и Васильев играют в домино.
3. Иванов, Петров и Васильев слушают лекцию.
4. Среднее арифметическое x и y больше их среднего геометрического.
5. 5 не является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.
6. Слон Бимбо больше собаки Ланды.
7. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.
8. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.
9. Кошки бывают только белые и серые.
10. Функция f принимает в том числе такие комплексные значения, которые не являются действительными.

11. У каждого положительного действительного числа есть ровно один положительный квадратный корень.

12. Число x простое (для групп, где не сделали на занятии).

13. Есть сколько угодно большие простые числа.

4 Деревья истинности для логики предикатов

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

2. $\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \vdash (\exists x\ P(X)) \lor (\forall x\ Q(x))$

3. $\exists x\ P(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

4. $\neg\exists x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash (\exists x\ A(x)) \land (\forall x\ Q(x))$

5. $\forall x \exists y\ P(x,y), \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \land Q(x,y))$

   Следующие формализовать как секвенции с двумя посылками:

6. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.

7. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.

8. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
   $\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (P(y) \to x = y) \equiv (\exists x\ P(x)) \land \forall y, z\ (P(y) \land P(z) \to y = z)$

5 Натуральная дедукция для логики предикатов

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ P(x))$

2. $\exists x\ P(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

3. Правила де Моргана для кванторов (любые 2 из 4).

4. $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash (\exists x\ P(x)) \land (\exists x\ Q(x))$

5. $\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \vdash (\exists x\ P(X)) \lor (\forall x\ Q(x))$

6. $\forall x \exists y\ P(x,y), \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \land Q(x,y))$

7. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
   $\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (P(y) \to x = y) \equiv (\exists x\ P(x)) \land \forall y, z\ (P(y) \land P(z) \to y = z)$

8. Убедитесь, что $\exists x\ P(x) \vdash \forall x\ P(x)$ нельзя доказать и постройте контрмодель.

$9^\star$. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

$10^\star$. $\forall x\ R(x,y) \to R(y,x), \quad \forall xyz\ R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z), \quad \forall x \exists y\ R(x,y) \vdash \forall x\ R(x,x)$
Подсказка: так как $\forall x \exists y\ R(x,y)$, то для этого y также верно $R(y,x)$, а из $R(x,y)$ и $R(y,x)$ заключаем $R(x,x)$.