Введение в логику высказываний

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

25 сентября 2020 г.

МИЭТ

Предмет математической логики

- Математическая логика — раздел математики, изучающий математические обозначения, формальные системы, доказуемость математических суждений, природу математического доказательства в целом, вычислимость и прочие аспекты оснований математики (из Wikipedia).
- Разделы нашего курса:
  - Логика высказываний
  - Логика предикатов
  - Теория множеств
  - Теория алгоритмов (если успеем)
- Курс очень короткий и каждый раздел будет на базовом уровне.

Предмет математической логики

- Математическая логика — раздел математики, изучающий математические обозначения, формальные системы, доказуемость математических суждений, природу математического доказательства в целом, вычислимость и прочие аспекты оснований математики (из Wikipedia).
- Разделы нашего курса:
  - Логика высказываний
  - Логика предикатов
  - Теория множеств
  - Теория алгоритмов (если успеем)
- Курс очень короткий и каждый раздел будет на базовом уровне.
- Сегодня — логика высказываний (далее ЛВ).

Высказывания

- Высказывания — предложения, которые могут быть истинны или ложны.
- Например: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».
- Но не вопросы, императивные предложения и т.д.

Высказывания

- Высказывания — предложения, которые могут быть истинны или ложны.
- Например: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».
- Но не вопросы, императивные предложения и т.д.
- Оба эти высказывания *простые* или *атомарные*, так как не содержат более простых.
- Их внутренняя структура в ЛВ не рассматривается.

Высказывания

- Высказывания — предложения, которые могут быть истинны или ложны.
- Например: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».
- Но не вопросы, императивные предложения и т.д.
- Оба эти высказывания *простые* или *атомарные*, так как не содержат более простых.
- Их внутренняя структура в ЛВ не рассматривается.
- Мы можем комбинировать простые высказывания с помощью *логических связок* $\wedge$ («и», конъюнкция), $\vee$ («или», дизъюнкция), $\rightarrow$ («если…то…», импликация), $\neg$ («не», отрицание).

Высказывания

- Высказывания — предложения, которые могут быть истинны или ложны.
- Например: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».
- Но не вопросы, императивные предложения и т.д.
- Оба эти высказывания *простые* или *атомарные*, так как не содержат более простых.
- Их внутренняя структура в ЛВ не рассматривается.
- Мы можем комбинировать простые высказывания с помощью *логических связок* $\wedge$ («и», конъюнкция), $\vee$ («или», дизъюнкция), $\to$ («если…то…», импликация), $\neg$ («не», отрицание).
- Например, «в огороде бузина, а в Киеве дядька» = «в огороде бузина» $\wedge$ «в Киеве дядька».

Язык логики высказываний

- Язык ЛВ — это *формальный язык*, то есть множество последовательностей символов определённого алфавита, построенных по определённым правилам.

Язык логики высказываний

- Язык ЛВ — это *формальный язык*, то есть множество последовательностей символов определённого алфавита, построенных по определённым правилам.
- Алфавит ЛВ состоит из:
  - *Пропозициональных переменных* $p, q, r, p_1, \ldots$ Множество всех переменных обозначим Var_{Prop}.
  - Символов $\wedge, \vee, \to, \neg$ (иногда включают также $\leftrightarrow$).
  - Скобок (,).

Язык логики высказываний

- Язык ЛВ — это *формальный язык*, то есть множество последовательностей символов определённого алфавита, построенных по определённым правилам.
- Алфавит ЛВ состоит из:
  - *Пропозициональных переменных* $p, q, r, p_1, \ldots$ Множество всех переменных обозначим Var_{Prop}.
  - Символов $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ (иногда включают также $\leftrightarrow$).
  - Скобок (,).
- Формулы ЛВ (множество *Prop*):
  - Каждая переменная — формула ($Var_{Prop} \subset Prop$).
  - Если A — формула, то $\neg A$ тоже ($\forall A : Prop\ \neg A \in Prop$).
  - Если A и B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \rightarrow B)$ тоже ($\forall A, B : Prop\ (A \wedge B) \in Prop, \ldots$).
  - Других формул нет.

Язык логики высказываний

- Язык ЛВ — это *формальный язык*, то есть множество последовательностей символов определённого алфавита, построенных по определённым правилам.
- Алфавит ЛВ состоит из:
  - *Пропозициональных переменных* $p, q, r, p_1, \ldots$ Множество всех переменных обозначим Var_{Prop}.
  - Символов $\wedge, \vee, \to, \neg$ (иногда включают также $\leftrightarrow$).
  - Скобок (,).
- Формулы ЛВ (множество *Prop*):
  - Каждая переменная — формула ($Var_{Prop} \subset Prop$).
  - Если A — формула, то $\neg A$ тоже ($\forall A : Prop\ \neg A \in Prop$).
  - Если A и B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \to B)$ тоже ($\forall A, B : Prop\ (A \wedge B) \in Prop, \ldots$).
  - Других формул нет.
- Заметьте, что A и B не принадлежат языку ЛВ. Это *метапеременные*, т.е. переменные *метаязыка*, на котором мы описываем ЛВ.

Доказательства свойств формул по индукции

- Данное определение формул ЛВ — *индуктивное* (какие ещё индуктивные определения вы знаете?).
- Соответственно, если мы хотим доказать, что какое-то свойство P выполняется для всех формул ($\forall A : Prop\ P(A)$), достаточно показать, что:

Доказательства свойств формул по индукции

- Данное определение формул ЛВ — *индуктивное* (какие ещё индуктивные определения вы знаете?).
- Соответственно, если мы хотим доказать, что какое-то свойство P выполняется для всех формул $(\forall A : Prop\ P(A))$, достаточно показать, что:
  - оно верно для всех переменных, $\forall v : Var_{Prop}\ P(v)$ (v это снова метапеременная, не переменная ЛВ).
  - если A — формула и $P(A)$ верно, то верно и $P(\neg A)$, $\forall A : Prop\ (P(A) \to P(\neg A))$.
  - Если A и B — формулы и $P(A)$ и $P(B)$ верны, то $P(A \wedge B)$, $P(A \vee B)$ и $P(A \to B)$ верны.

Доказательства свойств формул по индукции

- Данное определение формул ЛВ — *индуктивное* (какие ещё индуктивные определения вы знаете?).
- Соответственно, если мы хотим доказать, что какое-то свойство P выполняется для всех формул $(\forall A : Prop\ P(A))$, достаточно показать, что:
  - оно верно для всех переменных, $\forall v : Var_{Prop}\ P(v)$ (v это снова метапеременная, не переменная ЛВ).
  - если A — формула и $P(A)$ верно, то верно и $P(\neg A)$, $\forall A : Prop\ (P(A) \to P(\neg A))$.
  - Если A и B — формулы и $P(A)$ и $P(B)$ верны, то $P(A \wedge B)$, $P(A \vee B)$ и $P(A \to B)$ верны.
- Пример: покажите, что число открывающих скобок в любой формуле равно числу закрывающих.

Доказательства свойств формул по индукции

- Данное определение формул ЛВ — *индуктивное* (какие ещё индуктивные определения вы знаете?).
- Соответственно, если мы хотим доказать, что какое-то свойство P выполняется для всех формул ($\forall A : Prop\ P(A)$), достаточно показать, что:
  - оно верно для всех переменных, $\forall v : Var_{Prop}\ P(v)$ (v это снова метапеременная, не переменная ЛВ).
  - если A — формула и $P(A)$ верно, то верно и $P(\neg A)$, $\forall A : Prop\ (P(A) \to P(\neg A))$.
  - Если A и B — формулы и $P(A)$ и $P(B)$ верны, то $P(A \wedge B)$, $P(A \vee B)$ и $P(A \to B)$ верны.
- Пример: покажите, что число открывающих скобок в любой формуле равно числу закрывающих.
- Более важный: теорема о единственности прочтения. По формуле можно однозначно определить, какая операция была последней в её построении и к каким формулам она была применена.

Соглашения об опускании скобок

- TODO

Семантика логики высказываний

- Пока мы говорили только о *синтаксисе* языка ЛВ, т.е. какие комбинации символов в нём допустимы.
- *Семантика* или *интерпретация* формального языка описывает соответствие между объектами языка и тем, что они обозначают.
- У одного языка может быть много интерпретаций. Даже у такого простого, как язык ЛВ. Но мы посмотрим только на стандартную.
- Напомним, что высказывания могут быть истинны (обозначим как 1) или ложны (0). $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ — множество значений истинности.
- *Оценка* σ это функция $Var_{Prop} \to \mathbb{B}$. Каждую оценку можно продолжить на всё *Prop* рекурсивно:
  - $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
  - $\ldots$
- Заметьте, что $\neg/\wedge/\ldots$ слева — символы языка ЛВ, а справа — операции булевой алгебры.

Свойства формул

- Теперь среди всех формул A можно выделить
  - *тождественно истинные* (обозначаем как $\models A$): $\forall\sigma\ \sigma(A) = 1$;
  - *тождественно ложные*: $\forall\sigma\ \sigma(A) = 0$;
  - *выполнимые*: $\exists\sigma\ \sigma(A) = 1$;
  - *опровержимые*: $\exists\sigma\ \sigma(A) = 0$.

Свойства формул

- Теперь среди всех формул A можно выделить
  - *тождественно истинные* (обозначаем как $\vDash A$): $\forall\sigma\ \sigma(A) = 1$;
  - *тождественно ложные*: $\forall\sigma\ \sigma(A) = 0$;
  - *выполнимые*: $\exists\sigma\ \sigma(A) = 1$;
  - *опровержимые*: $\exists\sigma\ \sigma(A) = 0$.
- Формулы A и B *эквивалентны* (обозначаем $A \equiv B$), если $\forall\sigma\ \sigma(A) = \sigma(B)$.

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \land q)$:
  1. $p \to (q \to p \land q) = 0$ Дано

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \land q)$:

1.	$p \to (q \to p \land q) = 0$ ✓	Дано
2.	$p = 1$	1
3.	$q \to p \land q = 0$	1

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \wedge q)$:

1.	$p \to (q \to p \wedge q) = 0$ ✓	Дано
2.	$p = 1$ ✓	1
3.	$q \to p \wedge q = 0$	1

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \land q)$:

1.	$p \to (q \to p \land q) = 0$ ✓	Дано
2.	$p = 1$ ✓	1
3.	$q \to p \land q = 0$ ✓	1
4.	$q = 1$ ✓	3
5.	$p \land q = 0$	3

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \land q)$:

1.	$p \to (q \to p \land q) = 0$ ✓	Дано
2.	$p = 1$ ✓	1
3.	$q \to p \land q = 0$ ✓	1
4.	$q = 1$ ✓	3
5.	$p \land q = 0$	3
6.	$p = 0 \qquad q = 0$	5

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \wedge q)$:

1.	$p \to (q \to p \wedge q) = 0$ ✓	Дано
2.	$p = 1$ ✓	1
3.	$q \to p \wedge q = 0$ ✓	1
4.	$q = 1$ ✓	3
5.	$p \wedge q = 0$	3
6.	$p = 0 \qquad q = 0$	5
	$\underset{2,6}{\times} \qquad \underset{4,6}{\times}$	

Пример дерева истинности

- Начнём с примера. Нужно доказать $p \to (q \to p \wedge q)$:

- Пусть $p \to (q \to p \wedge q) = 0$.
- Тогда $p = 1$ и $q \to p \wedge q = 0$.
- Тогда $q = 1$ и $p \wedge q = 0$.
- Отсюда $p = 0$ или $q = 0$. Но оба невозможны!
- Значит, $p \to (q \to p \wedge q) = 0$ невозможно.
- $p \to (q \to p \wedge q)$ тождественно истинно!

Правила деревьев истинности

- Формулы со знаком ($A = 0$ или $A = 1$) делятся на 4 типа:
  - Атомарные (слева переменная).
  - Слева отрицание.
  - α ведут себя как «и»: $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
  - β ведут себя как «или»: $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$.

Правила деревьев истинности

- Формулы со знаком ($A = 0$ или $A = 1$) делятся на 4 типа:
  - Атомарные (слева переменная).
  - Слева отрицание.
  - α ведут себя как «и»: $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
  - β ведут себя как «или»: $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$.

- Правила:

$$\begin{array}{c} \neg A = 1(0) \\ | \\ A = 0(1) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \beta_1 \qquad \beta_2 \end{array}$$

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$A \wedge B = 1$	$A = 1$	$B = 1$	$A \wedge B = 0$	$A = 0$	$B = 0$
$A \vee B = 0$	$A = 0$	$B = 0$	$A \vee B = 1$	$A = 1$	$B = 1$
$A \to B = 0$	$A = 1$	$B = 0$	$A \to B = 1$	$A = 0$	$B = 1$

Правила деревьев истинности

- Формулы со знаком ($A = 0$ или $A = 1$) делятся на 4 типа:
  - Атомарные (слева переменная).
  - Слева отрицание.
  - α ведут себя как «и»: $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
  - β ведут себя как «или»: $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$.

- Правила:

$$\begin{array}{c} \neg A = 1(0) \\ | \\ A = 0(1) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array}$$

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$A \wedge B = 1$	$A = 1$	$B = 1$	$A \wedge B = 0$	$A = 0$	$B = 0$
$A \vee B = 0$	$A = 0$	$B = 0$	$A \vee B = 1$	$A = 1$	$B = 1$
$A \to B = 0$	$A = 1$	$B = 0$	$A \to B = 1$	$A = 0$	$B = 1$

Построение дерева истинности

- Идея в поиске контрпримера для формулы (или секвенции), которую хотим доказать.
- Для доказательства формулы A мы начинаем с уравнения $A = 0$.
- Для секвенции $A_1, A_2, \ldots \vdash B$ начинаем с

Построение дерева истинности

- Идея в поиске контрпримера для формулы (или секвенции), которую хотим доказать.
- Для доказательства формулы A мы начинаем с уравнения $A = 0$.
- Для секвенции $A_1, A_2, \ldots \vdash B$ начинаем с $A_1 = 1, A_2 = 1, \ldots, B = 0$ (пишем их в столбик).
- Для эквивалентности $A \equiv B$ строим 2 дерева:

Построение дерева истинности

- Идея в поиске контрпримера для формулы (или секвенции), которую хотим доказать.
- Для доказательства формулы A мы начинаем с уравнения $A = 0$.
- Для секвенции $A_1, A_2, \ldots \vdash B$ начинаем с $A_1 = 1, A_2 = 1, \ldots, B = 0$ (пишем их в столбик).
- Для эквивалентности $A \equiv B$ строим 2 дерева: $A = 1, B = 0$ и $A = 0, B = 1$.

Построение дерева истинности

- Идея в поиске контрпримера для формулы (или секвенции), которую хотим доказать.
- Для доказательства формулы A мы начинаем с уравнения $A = 0$.
- Для секвенции $A_1, A_2, \ldots \vdash B$ начинаем с $A_1 = 1, A_2 = 1, \ldots, B = 0$ (пишем их в столбик).
- Для эквивалентности $A \equiv B$ строим 2 дерева: $A = 1, B = 0$ и $A = 0, B = 1$.

- На каждом шаге:
  - Выбираем неразобранное уравнение (не отмечено ✓).
  - Применяем правила с предыдущего слайда.
  - Результаты дописываются в конец всех открытых ветвей под ним.
  - Отмечаем как разобранное.

Построение дерева истинности (2)

- Ветвь, в которой одновременно есть $A = 1$ и $A = 0$ для какой-то формулы A, называется *закрытой*.
- В ней можно дальше ничего не писать.

- Дерево *закрыто*, если все его ветви закрыты.
- В этом случае уравнения, с которых начали, не имеют решений!
- Значит, исходная формула/секвенция не имеет контрпримера и она тождественно истинна.

Построение дерева истинности (2)

- Ветвь, в которой одновременно есть $A = 1$ и $A = 0$ для какой-то формулы A, называется *закрытой*.
- В ней можно дальше ничего не писать.

- Дерево *закрыто*, если все его ветви закрыты.
- В этом случае уравнения, с которых начали, не имеют решений!
- Значит, исходная формула/секвенция не имеет контрпримера и она тождественно истинна.

- Если какая-то ветвь закончилась (нет неразобранных строк), но не закрылась, то мы нашли контрпример к исходной формуле и она *не* тождественно истинна.

Построение дерева истинности (2)

- Ветвь, в которой одновременно есть $A = 1$ и $A = 0$ для какой-то формулы A, называется *закрытой*.
- В ней можно дальше ничего не писать.

- Дерево *закрыто*, если все его ветви закрыты.
- В этом случае уравнения, с которых начали, не имеют решений!
- Значит, исходная формула/секвенция не имеет контрпримера и она тождественно истинна.

- Если какая-то ветвь закончилась (нет неразобранных строк), но не закрылась, то мы нашли контрпример к исходной формуле и она *не* тождественно истинна.

- Порядок применения влияет только на размер дерева, но не на результат.
- Выгоднее сначала применять правила без ветвления.

Пример незакрытого дерева

- Проверим $(p \to r) \vee (q \to r) \to (p \vee q \to r)$:

1.	$(p \to r) \vee (q \to r) \to (p \vee q \to r) = 0$ ✓						Дан
2.	$(p \to r) \vee (q \to r) = 1$ ✓						1
3.	$p \vee q \to r = 0$ ✓						1
4.	$p \vee q = 1$ ✓						3
5.	$r = 0$ ✓						3
6.	$p \to r = 1$ ✓			$q \to r = 1$ ✓			2
7.	$p = 1$ ✓		$q = 1$ ✓	$p = 1$ ✓		$q = 1$ ✓	4
8.			⋮			⋮	
9.	$p = 0$ ✓	$r = 1$ ✓		$q = 0$ ✓	$r = 1$ ✓		6
	× 7,8	× 5,8			× 5,8		

- В законченной ветви $p = 1, q = 0, r = 0$. На этом наборе строка 1 выполняется, значит,

Пример незакрытого дерева

- Проверим $(p \to r) \vee (q \to r) \to (p \vee q \to r)$:

1.	$(p \to r) \vee (q \to r) \to (p \vee q \to r) = 0$ ✓				Дан
2.	$(p \to r) \vee (q \to r) = 1$ ✓				1
3.	$p \vee q \to r = 0$ ✓				1
4.	$p \vee q = 1$ ✓				3
5.	$r = 0$ ✓				3
6.	$p \to r = 1$ ✓		$q \to r = 1$ ✓		2
7.	$p = 1$ ✓	$q = 1$ ✓	$p = 1$ ✓	$q = 1$ ✓	4
8.		$\vdots$		$\vdots$	
9.	$p = 0$ ✓ $r = 1$ ✓		$q = 0$ ✓ $r = 1$ ✓		6
	$\times$ 7,8 $\times$ 5,8		$\times$ 5,8		

- В законченной ветви $p = 1, q = 0, r = 0$. На этом наборе строка 1 выполняется, значит, формула не тождественно истинна.

Корректность и полнота

- Формальная система *корректна* для какого-то свойства, если все выводимые в этой системе формулы (или другие объекты) имеют это свойство.
- Формальная система *полна* для какого-то свойства, если все объекты с этим свойством выводимы.

Корректность и полнота

- Формальная система *корректна* для какого-то свойства, если все выводимые в этой системе формулы (или другие объекты) имеют это свойство.
- Формальная система *полна* для какого-то свойства, если все объекты с этим свойством выводимы.

- В приложении к деревьям истинности:
- Теорема о корректности деревьев истинности для логики высказываний: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Теорема о полноте деревьев истинности для логики высказываний: если A тождественно истинна, то для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности.
- Можно доказать больше: любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.

Доказательство теоремы о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Доказательство: от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.

Доказательство теоремы о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Доказательство: от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима (есть оценка, для которой все уравнения в этой ветви истинны одновременно).

Доказательство теоремы о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Доказательство: от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима (есть оценка, для которой все уравнения в этой ветви истинны одновременно).
- Лемма: если в дереве есть выполнимая ветвь, после применения правил такая ветвь тоже есть. Доказательство отдельно для правил $\neg$, α и β (используя $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$ и $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$).

Доказательство теоремы о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Доказательство: от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима (есть оценка, для которой все уравнения в этой ветви истинны одновременно).
- Лемма: если в дереве есть выполнимая ветвь, после применения правил такая ветвь тоже есть. Доказательство отдельно для правил $\neg$, α и β (используя $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$ и $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$).
- Значит, сколько не применяем правила к исходному дереву, на каждом шаге есть выполнимая ветвь.

Доказательство теоремы о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Доказательство: от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима (есть оценка, для которой все уравнения в этой ветви истинны одновременно).
- Лемма: если в дереве есть выполнимая ветвь, после применения правил такая ветвь тоже есть. Доказательство отдельно для правил $\neg$, α и β (используя $\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$ и $\beta \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$).
- Значит, сколько не применяем правила к исходному дереву, на каждом шаге есть выполнимая ветвь.
- Закрытая ветвь не может быть выполнима, значит, на каждом шаге есть открытая ветвь.
- Значит, дерево не может быть закрыто.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.
- Пусть есть дерево с законченной открытой ветвью $\mathcal{B}$.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.
- Пусть есть дерево с законченной открытой ветвью $\mathcal{B}$.
- Рассмотрим оценку

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v = 1 \in \mathcal{B} \\ 0, \text{ если } v = 0 \in \mathcal{B} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Лемма: все уравнения в $\mathcal{B}$ выполняются на оценке σ.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.
- Пусть есть дерево с законченной открытой ветвью $\mathcal{B}$.
- Рассмотрим оценку

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v = 1 \in \mathcal{B} \\ 0, \text{ если } v = 0 \in \mathcal{B} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Лемма: все уравнения в $\mathcal{B}$ выполняются на оценке σ.
- Доказательство по индукции: для переменных по определению σ, и для случаев $\neg$, α и β.
- Для β: $\beta \in \mathcal{B} \Rightarrow \beta_1 \in \mathcal{B} \vee \beta_2 \in \mathcal{B}$ (т.к. β разобрана в $\mathcal{B}$) $\Rightarrow \sigma(\beta_1) = 1 \vee \sigma(\beta_2) = 1$ (по предположению индукции) $\Rightarrow \sigma(\beta) = 1$.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.
- Пусть есть дерево с законченной открытой ветвью $\mathcal{B}$.
- Рассмотрим оценку

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v = 1 \in \mathcal{B} \\ 0, \text{ если } v = 0 \in \mathcal{B} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Лемма: все уравнения в $\mathcal{B}$ выполняются на оценке σ.
- Доказательство по индукции: для переменных по определению σ, и для случаев $\neg$, α и β.
- Для β: $\beta \in \mathcal{B} \Rightarrow \beta_1 \in \mathcal{B} \vee \beta_2 \in \mathcal{B}$ (т.к. β разобрана в $\mathcal{B}$) $\Rightarrow \sigma(\beta_1) = 1 \vee \sigma(\beta_2) = 1$ (по предположению индукции) $\Rightarrow \sigma(\beta) = 1$.
- Для α аналогично, но $\wedge$ вместо $\vee$.

Доказательство теоремы о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то любое законченное дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: снова от противного.
- Пусть есть дерево с законченной открытой ветвью $\mathcal{B}$.
- Рассмотрим оценку

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v = 1 \in \mathcal{B} \\ 0, & \text{если } v = 0 \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

- Лемма: все уравнения в $\mathcal{B}$ выполняются на оценке σ.
- Доказательство по индукции: для переменных по определению σ, и для случаев $\neg$, α и β.
- Для β: $\beta \in \mathcal{B} \Rightarrow \beta_1 \in \mathcal{B} \vee \beta_2 \in \mathcal{B}$ (т.к. β разобрана в $\mathcal{B}$) $\Rightarrow \sigma(\beta_1) = 1 \vee \sigma(\beta_2) = 1$ (по предположению индукции) $\Rightarrow \sigma(\beta) = 1$.
- Для α аналогично, но $\wedge$ вместо $\vee$.
- В частности, $\sigma(A) = 0$ и A не тождественно истинна.