# Натуральная дедукция (естественный вывод)

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

19 сентября 2024 г.

ТЕИМ

- Выражение  $A_1, \ldots, A_n \vdash B$  называется секвенцией и читается «из  $A_1, \ldots, A_n$  выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.

- Выражение  $A_1, ..., A_n \vdash B$  называется секвенцией и читается «из  $A_1, ..., A_n$  выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- A<sub>1</sub>,...,A<sub>n</sub> ⊢ В истинна, если

- Выражение  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  называется секвенцией и читается «из  $A_1, \dots, A_n$  выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1,\ldots,A_n \vdash B$  истинна, если на всех тех наборах, на которых  $A_1,\ldots,A_n$  истинны,

- Выражение  $A_1, ..., A_n \vdash B$  называется секвенцией и читается «из  $A_1, ..., A_n$  выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, ..., A_n \vdash B$  истинна, если на всех тех наборах, на которых  $A_1, ..., A_n$  истинны, B тоже истинна.
- Соответственно,  $\vdash B$  («B выводится») истинна тогда, когда B

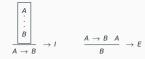
- Выражение  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  называется секвенцией и читается «из  $A_1, \dots, A_n$  выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, ..., A_n \vdash B$  истинна, если на всех тех наборах, на которых  $A_1, ..., A_n$  истинны, B тоже истинна.
- Соответственно,  $\vdash B$  («B выводится») истинна тогда, когда B тождественно истинна.

# Правила натуральной дедукции

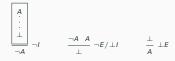
• Для ∧:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \ \wedge I \qquad \qquad \frac{A \wedge B}{A} \ \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \ \wedge E$$

• Для  $\rightarrow$ :



• Для ¬ и ⊥:



• Для ∨:

• Остальные:



I обозначает правила введения (Introduction), E — правила исключения (Elimination).
 Например, ∧I это правило «введения конъюнкции». Можете также писать как В ∧.

1	$(p \land q) \land r$	Дано
2	$ \begin{array}{c c} \hline p \wedge q \\ q \\ r \\ p \\ q \wedge r \\ p \wedge (q \wedge r) \end{array} $	∧E, 1
<i>n</i> – 4	9	∧E, 2
<i>n</i> – 3	r	∧E, 1
<i>n</i> – 2	p	∧E, 2
n-1	$q \wedge r$	∧I, $n - 2$ , $n - 4$
n	$p \wedge (q \wedge r)$	∧I, $n - 3$ , $n - 1$

$$n \qquad \qquad p 
ightarrow (q 
ightarrow p) \qquad 
ightarrow$$
I, 1- $n-1$ 

1	p	Дано
2	q	Дано
3	p	R, 1
<i>n</i> – 1	igg  q  o p	ightarrowI, 2-3
n	p  o (q  o p)	ightarrowI, 1- $n-1$

## Допустимые правила

- Выше доказали  $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$ .
- Это можно превратить в доказательство  $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$  для любых формул A, B, C. Как?

## Допустимые правила

- Выше доказали  $(p \land q) \land r \vdash p \land (q \land r)$ .
- Это можно превратить в доказательство  $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$  для любых формул A, B, C. Как?
- Это даёт новое допустимое правило:

$$\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)} \wedge A$$

И так для каждой секвенции, которую докажем!
 Например

$$\frac{\neg \neg A}{A} \neg \neg E$$
  $\frac{A}{\neg \neg A} \neg \neg I$   $\frac{A \to B}{A \to C} \xrightarrow{A \to C} \to T$  и т.д.

• У каких-то из этих правил есть обозначения, как выше, но можно просто пометить соотвествующей секвенцией.