Логика предикатов
Теории

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

6 ноября 2020 г.

МИЭТ

Классы моделей

- Практически всегда интересны не все модели данной сигнатуры, а какой-то их класс (или одна модель).
- Примеры больших классов моделей: графы, линейные пространства и т.д.
- Такие классы часто задаются наборами аксиом.
- Натуральные числа (в логике обычно включая 0) с операциями сложения и умножения — «стандартная модель» для сигнатуры арифметики.
- Действительные — для мат.анализа.
- Для конкретных моделей можно поставить вопрос: есть ли набор аксиом, полностью описывающих эту модель?

Теории

- *Теория* T — множество замкнутых формул какой-то сигнатуры σ_T, называемых *аксиомами* T.
- Дальше все модели и формулы — сигнатуры σ_T.

Теории

- *Теория* T — множество замкнутых формул какой-то сигнатуры σ_T, называемых *аксиомами* T.
- Дальше все модели и формулы — сигнатуры σ_T.
- Модель M называется *моделью* T, если в ней истинны все аксиомы T. Пишется $M \vDash T$.

Теории

- *Теория* T — множество замкнутых формул какой-то сигнатуры σ_T, называемых *аксиомами* T.
- Дальше все модели и формулы — сигнатуры σ_T.
- Модель M называется *моделью* T, если в ней истинны все аксиомы T. Пишется $M \vDash T$.
- Замкнутая формула A называется *теоремой* T или *выводимой из* T, если её можно доказать из аксиом T. Пишется $T \vdash A$.

Теории

- *Теория* T — множество замкнутых формул какой-то сигнатуры σ_T, называемых *аксиомами* T.
- Дальше все модели и формулы — сигнатуры σ_T.
- Модель M называется *моделью* T, если в ней истинны все аксиомы T. Пишется $M \models T$.
- Замкнутая формула A называется *теоремой* T или *выводимой из* T, если её можно доказать из аксиом T. Пишется $T \vdash A$.
- Переформулировка теоремы о корректности: $T \vdash A \Rightarrow$ A истинна во всех моделях T.
- Переформулировка теоремы о полноте: A истинна во всех моделях $T \Rightarrow T \vdash A$.

Некоторые простые свойства выводимости

- Рефлексивность: каждая аксиома T является её теоремой.

Некоторые простые свойства выводимости

- Рефлексивность: каждая аксиома T является её теоремой.
- Транзитивность: если все аксиомы T_1 — теоремы T_2, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.

Некоторые простые свойства выводимости

- Рефлексивность: каждая аксиома T является её теоремой.
- Транзитивность: если все аксиомы T_1 — теоремы T_2, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.
- Монотонность: если $T_1 \subset T_2$, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.

Некоторые простые свойства выводимости

- Рефлексивность: каждая аксиома T является её теоремой.
- Транзитивность: если все аксиомы T_1 — теоремы T_2, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.
- Монотонность: если $T_1 \subset T_2$, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.
- Теорема о дедукции: если $T \cup \{A\} \vdash B$, то $T \vdash A \to B$.

Некоторые простые свойства выводимости

- Рефлексивность: каждая аксиома T является её теоремой.
- Транзитивность: если все аксиомы T_1 — теоремы T_2, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.
- Монотонность: если $T_1 \subset T_2$, то все теоремы T_1 — теоремы T_2.
- Теорема о дедукции: если $T \cup \{A\} \vdash B$, то $T \vdash A \to B$.
- Заметили ли, что монотонность следует из рефлексивности и транзитивности?

Противоречивость теории

- Теория называется *противоречивой*, если в ней выводимы одновременно какая-то формула A и $\neg A$.
- В этом случае в ней выводимы все формулы (её сигнатуры).
- Противоречивая теория не имеет моделей.
- А непротиворечивая имеет.
- Переформулировка теоремы Лёвенгейма-Сколема: непротиворечивая теория имеет конечную или счётную модель.

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \wedge y = z \to x = z$

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \land y = z \to x = z$
- Для каждого n-местного функционального символа f:

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \land y = z \to x = z$
- Для каждого n-местного функционального символа f: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \wedge y = z \to x = z$
- Для каждого n-местного функционального символа f: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.
- Для каждого n-местного предикатного символа P:

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \land y = z \to x = z$
- Для каждого n-местного функционального символа f: $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n\ x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$.
- Для каждого n-местного предикатного символа P: $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n\ x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to (P(x_1, \dots, x_n) \to P(y_1, \dots, y_n))$.

Аксиомы равенства

- Пусть в сигнатуре есть предикат равенства $=$.
- Тогда *нормальная модель* — такая, в которой он интерпретируется как обычное равенство.
- Какие формулы истинны на всех нормальных моделях?
- $\forall x\ x = x$
- $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\ x = y \land y = z \to x = z$
- Для каждого n-местного функционального символа f: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.
- Для каждого n-местного предикатного символа P: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \to (P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$.
- Всё это *аксиомы равенства*.

Теорема о полноте для нормальных моделей

- Теорема о полноте для нормальных моделей: если в непротиворечивой теории выводимы все аксиомы равенства для её сигнатуры, то она имеет нормальную модель.
- Идея доказательства: есть модель по обычной теореме о полноте, но не обязательно нормальная.
- Интерпретация равенства в этой модели —

Теорема о полноте для нормальных моделей

- Теорема о полноте для нормальных моделей: если в непротиворечивой теории выводимы все аксиомы равенства для её сигнатуры, то она имеет нормальную модель.
- Идея доказательства: есть модель по обычной теореме о полноте, но не обязательно нормальная.
- Интерпретация равенства в этой модели — отношение эквивалентности.
- Можем взять множество классов эквивалентности по этому отношению (фактор-множество).
- Значения функций и предикатов на фактор-множестве задаются однозначно

Теорема о полноте для нормальных моделей

- Теорема о полноте для нормальных моделей: если в непротиворечивой теории выводимы все аксиомы равенства для её сигнатуры, то она имеет нормальную модель.
- Идея доказательства: есть модель по обычной теореме о полноте, но не обязательно нормальная.
- Интерпретация равенства в этой модели — отношение эквивалентности.
- Можем взять множество классов эквивалентности по этому отношению (фактор-множество).
- Значения функций и предикатов на фактор-множестве задаются однозначно (каким именно образом?).
- В теореме Лёвенгейма-Сколема и в теореме о компактности тоже можно потребовать, чтобы модель была нормальной.

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):
    1. $\forall x \, \neg E(x, x)$
    2. $\forall x \forall y \, E(x, y) \to E(y, x)$

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):
    1. $\forall x \, \neg E(x, x)$
    2. $\forall x \forall y \, E(x, y) \to E(y, x)$
- Вариант 2:
  - 2 сорта объектов: вершины V и рёбра E.
  - Предикат $I(v, e)$: вершина v инцидентна ребру e.
  - Аксиомы:

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):
    1. $\forall x\ \neg E(x, x)$
    2. $\forall x \forall y\ E(x, y) \to E(y, x)$
- Вариант 2:
  - 2 сорта объектов: вершины V и рёбра E.
  - Предикат $I(v, e)$: вершина v инцидентна ребру e.
  - Аксиомы:
    1. $\forall e : E\ \exists v_1 : V\ \exists v_2 : V\ I(v_1, e) \land I(v_2, e) \land v_1 \neq v_2 \land \forall v_3 : V(I(v_3, e) \to v_3 = v_1 \lor v_3 = v_2)$
    2. $\forall v_1 : V\ \forall v_2 : V\ \forall e_1 : E\ \forall e_2 : E\ I(v_1, e_1) \land I(v_2, e_1) \land I(v_1, e_2) \land I(v_2, e_2) \to e_1 = e_2$

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):
    1. $\forall x \; \neg E(x, x)$
    2. $\forall x \forall y \; E(x, y) \to E(y, x)$
- Вариант 2:
  - 2 сорта объектов: вершины V и рёбра E.
  - Предикат $I(v, e)$: вершина v инцидентна ребру e.
  - Аксиомы:
    1. $\forall e : E \; \exists v_1 : V \; \exists v_2 : V \; I(v_1, e) \wedge I(v_2, e) \wedge v_1 \neq v_2 \wedge \forall v_3 : V (I(v_3, e) \to v_3 = v_1 \vee v_3 = v_2)$
    2. $\forall v_1 : V \; \forall v_2 : V \; \forall e_1 : E \; \forall e_2 : E \; I(v_1, e_1) \wedge I(v_2, e_1) \wedge I(v_1, e_2) \wedge I(v_2, e_2) \to e_1 = e_2$
- Что изменится для обобщённых графов? Для ориентированных?

Пример: теория графов

- Мы можем описать графы несколькими возможными сигнатурами.
- Вариант 1:
  - 1 сорт объектов: вершины.
  - Предикат $E(x, y)$: вершины x и y смежны.
  - Аксиомы (кроме аксиом равенства):
    1. $\forall x\ \neg E(x, x)$
    2. $\forall x \forall y\ E(x, y) \to E(y, x)$
- Вариант 2:
  - 2 сорта объектов: вершины V и рёбра E.
  - Предикат $I(v, e)$: вершина v инцидентна ребру e.
  - Аксиомы:
    1. $\forall e : E\ \exists v_1 : V\ \exists v_2 : V\ I(v_1, e) \wedge I(v_2, e) \wedge v_1 \neq v_2 \wedge$ $\forall v_3 : V(I(v_3, e) \to v_3 = v_1 \vee v_3 = v_2)$
    2. $\forall v_1 : V\ \forall v_2 : V\ \forall e_1 : E\ \forall e_2 : E$ $I(v_1, e_1) \wedge I(v_2, e_1) \wedge I(v_1, e_2) \wedge I(v_2, e_2) \to e_1 = e_2$
- Что изменится для обобщённых графов? Для ориентированных?
- Какая теория выразительнее?

Формальные арифметики

- Рассмотрим теории первого порядка в языке арифметики. Обычно включают:
  - константу 0;
  - предикат равенства;
  - функции S (следующее число), $+$ и $\cdot$.
- Остальные константы, предикаты и функции выражаются через них.
- Сегодня рассмотрим в первую очередь арифметику Пеано.

Арифметика Пеано

- $\forall x\ S(x) \neq 0$
- $\forall x \forall y\ S(x) = S(y) \to x = y$
- $\forall x\ x + 0 = x$
- $\forall x\ x + S(y) = S(x + y)$
- $\forall x\ x \cdot 0 = 0$
- $\forall x\ x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
- Схема индукции: для каждой формулы $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ ($x, y_1, \ldots, y_n$ — все её свободные переменные):
  $\forall y_1 \ldots \forall y_n\ (A(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge$
  $\forall x\ (A(x, y_1, \ldots, y_n) \to A(S(x), y_1, \ldots, y_n)) \to$
  $\forall x\ A(x, y_1, \ldots, y_n))$

- В этой теории можно доказать все стандартные арифметические утверждения.

Нестандартные модели арифметики

- Пусть T — арифметическая теория, истинная на $\mathbb{N}$ (например, арифметика Пеано). Тогда у неё есть счётная модель, неизоморфная $\mathbb{N}$.
- Доказательство: добавим к сигнатуре арифметики константу c, а к T аксиомы $c > 0, c > 1, c > 2, \ldots$. Получим теорию T'.

Нестандартные модели арифметики

- Пусть T — арифметическая теория, истинная на $\mathbb{N}$ (например, арифметика Пеано). Тогда у неё есть счётная модель, неизоморфная $\mathbb{N}$.
- Доказательство: добавим к сигнатуре арифметики константу c, а к T аксиомы $c > 0, c > 1, c > 2, \ldots$. Получим теорию T'.
- Любое конечное подмножество T' имеет модель.
- Значит, по теореме о компактности T' имеет конечную или счётную модель.

Нестандартные модели арифметики

- Пусть T — арифметическая теория, истинная на $\mathbb{N}$ (например, арифметика Пеано). Тогда у неё есть счётная модель, неизоморфная $\mathbb{N}$.
- Доказательство: добавим к сигнатуре арифметики константу c, а к T аксиомы $c > 0, c > 1, c > 2, \ldots$. Получим теорию T'.
- Любое конечное подмножество T' имеет модель.
- Значит, по теореме о компактности T' имеет конечную или счётную модель.
- Конечной модели у T' быть не может, значит, модель счётная. Но она будет и моделью T.

Полные теории

- Непротиворечивая теория T называется *полной*, если для каждой замкнутой формулы A (её сигнатуры) либо $T \vdash A$, либо $T \vdash \neg A$.
- Пример: для любой модели M можно рассмотреть теорию $Th(M)$, аксиомы которой — все формулы, истинные в M. Она

Полные теории

- Непротиворечивая теория T называется *полной*, если для каждой замкнутой формулы A (её сигнатуры) либо $T \vdash A$, либо $T \vdash \neg A$.
- Пример: для любой модели M можно рассмотреть теорию $Th(M)$, аксиомы которой — все формулы, истинные в M. Она полна: если $M \models A$, то $Th(M) \vdash A$, а иначе $Th(M) \vdash \neg A$.
- Полна ли теория графов?

Полные теории

- Непротиворечивая теория T называется *полной*, если для каждой замкнутой формулы A (её сигнатуры) либо $T \vdash A$, либо $T \vdash \neg A$.
- Пример: для любой модели M можно рассмотреть теорию $Th(M)$, аксиомы которой — все формулы, истинные в M. Она полна: если $M \vDash A$, то $Th(M) \vdash A$, а иначе $Th(M) \vdash \neg A$.
- Полна ли теория графов? Нет. Например, формула $\exists x \exists y\ E(x, y)$ истинна в одних графах и ложна в других. Значит, ни она, ни её отрицание — не теоремы.

Полные теории

- Непротиворечивая теория T называется *полной*, если для каждой замкнутой формулы A (её сигнатуры) либо $T \vdash A$, либо $T \vdash \neg A$.
- Пример: для любой модели M можно рассмотреть теорию $Th(M)$, аксиомы которой — все формулы, истинные в M. Она полна: если $M \vDash A$, то $Th(M) \vdash A$, а иначе $Th(M) \vdash \neg A$.
- Полна ли теория графов? Нет. Например, формула $\exists x \exists y\ E(x, y)$ истинна в одних графах и ложна в других. Значит, ни она, ни её отрицание — не теоремы.
- Теоремы Гёделя о неполноте говорят, что никакая теория с разрешимым множеством аксиом, позволяющая доказать арифметику Робинсона, не может быть полна. Подробнее о них в конце курса, если успеем.

Разрешимые теории

- Теория T называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по замкнутой формуле A определяет, является ли она теоремой T.
- В прошлый раз упоминалось, что чистая логика предикатов (т.е. пустая теория) неразрешима.
- Как простой пример разрешимой теории приведём $Th(M)$ для конечной модели M.
- Ещё примеры неразрешимых теорий: теория полугрупп, $Th(\mathbb{N})$ (в сигнатуре $+, \cdot, =$), арифметика Робинсона (и любое её непротиворечивое расширение).
- Примеры разрешимых теорий: теория равенства (в сигнатуре только $=$, аксиомы равенства), $Th(\mathbb{C})$ в сигнатуре $+, \cdot, =$, арифметика Пресбургера (арифметика Пеано без умножения).