Логика предикатов
Деревья истинности

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

22 октября 2020 г.

МИЭТ

Доказательства в логике предикатов

- В логике предикатов естественно встаёт вопрос:
- Дана формула, тождественно истинна ли она?
- Что значит «Формула тождественно истинна»?

Доказательства в логике предикатов

- В логике предикатов естественно встаёт вопрос:
- Дана формула, тождественно истинна ли она?
- Что значит «Формула тождественно истинна»?
    - Замкнутая: истинна на всех моделях её сигнатуры.

Доказательства в логике предикатов

- В логике предикатов естественно встаёт вопрос:
- Дана формула, тождественно истинна ли она?
- Что значит «Формула тождественно истинна»?
    - Замкнутая: истинна на всех моделях её сигнатуры.
    - Со свободными переменными: можем навесить квантор всеобщности.

Доказательства в логике предикатов

- В логике предикатов естественно встаёт вопрос:
- Дана формула, тождественно истинна ли она?
- Что значит «Формула тождественно истинна»?
    - Замкнутая: истинна на всех моделях её сигнатуры.
    - Со свободными переменными: можем навесить квантор всеобщности.
- Варианты: эквивалентны ли две формулы? Является ли формула теоремой данной теории (это сложнее!)?

- Как это можно проверить?
- Нельзя просто перечислить все модели:

Доказательства в логике предикатов

- В логике предикатов естественно встаёт вопрос:
- Дана формула, тождественно истинна ли она?
- Что значит «Формула тождественно истинна»?
  - Замкнутая: истинна на всех моделях её сигнатуры.
  - Со свободными переменными: можем навесить квантор всеобщности.
- Варианты: эквивалентны ли две формулы? Является ли формула теоремой данной теории (это сложнее!)?

- Как это можно проверить?
- Нельзя просто перечислить все модели: их бесконечно (и даже несчётно) много!
- Можно расширить деревья истинности и натуральную дедукцию.
- Сегодня деревья истинности.

Правила деревьев истинности

- Правила для $\wedge$/$\vee$/$\to$/$\neg$ (типы α и β) сохраняются.
- Добавляются правила для формул с кванторами.
- Есть несколько способов, рассмотрим простейший.
- Добавляется бесконечное множество *параметров* $a_1, a_2, \ldots$, не зависящих от сигнатуры.
- Два новых типа формул:

Правила деревьев истинности

- Правила для $\wedge$/$\vee$/$\to$/$\neg$ (типы α и β) сохраняются.
- Добавляются правила для формул с кванторами.
- Есть несколько способов, рассмотрим простейший.
- Добавляется бесконечное множество *параметров* $a_1, a_2, \ldots$, не зависящих от сигнатуры.
- Два новых типа формул:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$	$\forall v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$
$\exists v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$	$\exists v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$

- Правила для них:

Правила деревьев истинности

- Правила для $\wedge$/$\vee$/$\rightarrow$/$\neg$ (типы α и β) сохраняются.
- Добавляются правила для формул с кванторами.
- Есть несколько способов, рассмотрим простейший.
- Добавляется бесконечное множество *параметров* $a_1, a_2, \ldots$, не зависящих от сигнатуры.
- Два новых типа формул:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$	$\forall v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$
$\exists v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$	$\exists v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$

- Правила для них:

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array}$$

t — замкнутый терм,
можно раскрыть много раз

Правила деревьев истинности

- Правила для $\wedge$/$\vee$/$\rightarrow$/$\neg$ (типы α и β) сохраняются.
- Добавляются правила для формул с кванторами.
- Есть несколько способов, рассмотрим простейший.
- Добавляется бесконечное множество *параметров* $a_1, a_2, \ldots$, не зависящих от сигнатуры.
- Два новых типа формул:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$	$\forall v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$
$\exists v\, A(v) = 0$	$A(t) = 0$	$\exists v\, A(v) = 1$	$A(t) = 1$

- Правила для них:

$$\begin{array}{c}\gamma\\ |\\ \gamma(t)\end{array}$$

t — замкнутый терм, можно раскрыть много раз

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \delta(a)\end{array}$$

a — новый (для ветви) параметр

Пояснения к правилам

- Смысл правила γ: утверждение, верное для всех объектов, верно в том числе для значения t.
- Смысл правила δ: мы даём название a тому объекту, существование которого утверждается.

Пояснения к правилам

- Смысл правила γ: утверждение, верное для всех объектов, верно в том числе для значения t.
- Смысл правила δ: мы даём название a тому объекту, существование которого утверждается.
- Обратите внимание, что $\forall x\, A(x) = 0$ читается как

Пояснения к правилам

- Смысл правила γ: утверждение, верное для всех объектов, верно в том числе для значения t.
- Смысл правила δ: мы даём название a тому объекту, существование которого утверждается.
- Обратите внимание, что $\forall x\, A(x) = 0$ читается как $(\forall x\, A(x)) = 0$, а не $\forall x\, (A(x) = 0)$.

Пояснения к правилам

- Смысл правила γ: утверждение, верное для всех объектов, верно в том числе для значения t.
- Смысл правила δ: мы даём название a тому объекту, существование которого утверждается.
- Обратите внимание, что $\forall x\, A(x) = 0$ читается как $(\forall x\, A(x)) = 0$, а не $\forall x\, (A(x) = 0)$.
- *Замкнутый терм* не содержит переменных. В случае без константных и функциональных символов это просто параметр.

Пояснения к правилам

- Смысл правила γ: утверждение, верное для всех объектов, верно в том числе для значения t.
- Смысл правила δ: мы даём название a тому объекту, существование которого утверждается.
- Обратите внимание, что $\forall x\, A(x) = 0$ читается как $(\forall x\, A(x)) = 0$, а не $\forall x\, (A(x) = 0)$.
- *Замкнутый терм* не содержит переменных. В случае без константных и функциональных символов это просто параметр.
- γ-формулы не помечаются $\checkmark$ при раскрытии, чтобы показать, что они могут быть повторно раскрыты. Только использованным термом.
- Для δ-формул параметр можно указать рядом с $\checkmark$, чтобы легко увидеть использованные параметры.

Пример дерева истинности

- Первый пример: одно из правил де Моргана для кванторов, $\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x))$.

1.	$\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x)) = 0$	Дано

Пример дерева истинности

- Первый пример: одно из правил де Моргана для кванторов, $\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x))$.

1.	$\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x)) = 0$ ✓	Дано
2.	$\neg(\forall x\, P(x)) = 1$ ✓	1
3.	$\exists x\, \neg P(x) = 0$	1
4.	$\forall x\, P(x) = 0$	2

Пример дерева истинности

- Первый пример: одно из правил де Моргана для кванторов, $\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x))$.

1.	$\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x)) = 0$ ✓	Дано
2.	$\neg(\forall x\, P(x)) = 1$ ✓	1
3.	$\exists x\, \neg P(x) = 0$	1
4.	$\forall x\, P(x) = 0$ ✓a_1	2
5.	$P(a_1) = 0$ ✓	4

Пример дерева истинности

- Первый пример: одно из правил де Моргана для кванторов, $\neg(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ \neg P(x))$.

1.	$\neg(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ \neg P(x)) = 0\ \checkmark$	Дано
2.	$\neg(\forall x\ P(x)) = 1\ \checkmark$	1
3.	$\exists x\ \neg P(x) = 0\ \backslash a_1$	1
4.	$\forall x\ P(x) = 0\ \checkmark a_1$	2
5.	$P(a_1) = 0\ \checkmark$	4
6.	$\neg P(a_1) = 0\ \checkmark$	3
7.	$P(a_1) = 1\ \checkmark$	6
	$\underset{5,7}{\times}$	

- Дерево закрылось, значит формула $\neg(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ \neg P(x))$

Пример дерева истинности

- Первый пример: одно из правил де Моргана для кванторов, $\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x))$.

1.	$\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x)) = 0$ ✓	Дано
2.	$\neg(\forall x\, P(x)) = 1$ ✓	1
3.	$\exists x\, \neg P(x) = 0 \setminus a_1$	1
4.	$\forall x\, P(x) = 0$ ✓a_1	2
5.	$P(a_1) = 0$ ✓	4
6.	$\neg P(a_1) = 0$ ✓	3
7.	$P(a_1) = 1$ ✓	6

$$\underset{5,7}{\times}$$

- Дерево закрылось, значит формула $\neg(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, \neg P(x))$ тождественно истинна.

Порядок действий

- Заметьте, что если сначала раскрыли бы строку 3 с параметром a_1, то в строке 4 пришлось бы использовать новый параметр a_2.
- И противоречия не получится, пока не раскроем строку 3 с a_2.

Порядок действий

- Заметьте, что если сначала раскрыли бы строку 3 с параметром a_1, то в строке 4 пришлось бы использовать новый параметр a_2.
- И противоречия не получится, пока не раскроем строку 3 с a_2.
- Также правила позволяют раскрыть строку 3 сколько угодно раз с разными параметрами и не дойти до строки 4.
- Тогда опять не получим противоречия.

Порядок действий

- Заметьте, что если сначала раскрыли бы строку 3 с параметром a_1, то в строке 4 пришлось бы использовать новый параметр a_2.
- И противоречия не получится, пока не раскроем строку 3 с a_2.
- Также правила позволяют раскрыть строку 3 сколько угодно раз с разными параметрами и не дойти до строки 4.
- Тогда опять не получим противоречия.
- Поэтому порядок раскрытия строк теперь важен для результата.

Порядок действий

- Заметьте, что если сначала раскрыли бы строку 3 с параметром a_1, то в строке 4 пришлось бы использовать новый параметр a_2.
- И противоречия не получится, пока не раскроем строку 3 с a_2.
- Также правила позволяют раскрыть строку 3 сколько угодно раз с разными параметрами и не дойти до строки 4.
- Тогда опять не получим противоречия.
- Поэтому порядок раскрытия строк теперь важен для результата.
- Сначала α и δ, потом β, потом γ.

Порядок действий

- Заметьте, что если сначала раскрыли бы строку 3 с параметром a_1, то в строке 4 пришлось бы использовать новый параметр a_2.
- И противоречия не получится, пока не раскроем строку 3 с a_2.
- Также правила позволяют раскрыть строку 3 сколько угодно раз с разными параметрами и не дойти до строки 4.
- Тогда опять не получим противоречия.
- Поэтому порядок раскрытия строк теперь важен для результата.
- Сначала α и δ, потом β, потом γ.
- Это не единственно возможный, но достаточно простой.

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$. Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \land Q(x) = 1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x)) = 0$	Дано

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \wedge Q(x) = 1$		Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) = 0$ ✓		Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0$	$\forall x\, Q(x) = 0$	2

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

$$
\begin{array}{llcl}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x) = 1} & \text{Дано} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) = 0\ \checkmark} & \text{Дано} \\
3. & \forall x\, P(x) = 0\ \checkmark a_1 & \forall x\, Q(x) = 0\ \checkmark a_1 & 2 \\
4. & P(a_1) = 0\ \checkmark & Q(a_1) = 0\ \checkmark & 3
\end{array}
$$

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

$$
\begin{array}{llll}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x\, P(x) \land Q(x) = 1 \setminus a_1} & \text{Дано} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x)) = 0 \checkmark} & \text{Дано} \\
3. & \forall x\, P(x) = 0 \checkmark a_1 & \forall x\, Q(x) = 0 \checkmark a_1 & 2 \\
4. & P(a_1) = 0 \checkmark & Q(a_1) = 0 \checkmark & 3 \\
5. & P(a_1) \land Q(a_1) = 1 & P(a_1) \land Q(a_1) = 1 & 1
\end{array}
$$

- В строке 3 можем использовать a_1 в обеих ветвях.
- Когда раскрываем строку 1, под ней две открытые ветви, результат пишем в обе.

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \wedge Q(x) = 1 \setminus a_1$		Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) = 0\ \checkmark$		Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0\ \checkmark a_1$	$\forall x\, Q(x) = 0\ \checkmark a_1$	2
4.	$P(a_1) = 0\ \checkmark$	$Q(a_1) = 0\ \checkmark$	3
5.	$P(a_1) \wedge Q(a_1) = 1\ \checkmark$	$P(a_1) \wedge Q(a_1) = 1\ \checkmark$	1
6.	$P(a_1) = 1\ \checkmark$	$Q(a_1) = 1\ \checkmark$	5
	$\times$ 4,6	$\times$ 4,6	

- Дерево закрылось, значит секвенция

- В строке 3 можем использовать a_1 в обеих ветвях.
- Когда раскрываем строку 1, под ней две открытые ветви, результат пишем в обе.

Пример дерева истинности (2)

- Ещё пример: $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \wedge Q(x) = 1 \setminus a_1$		Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) = 0\ \checkmark$		Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0\ \checkmark a_1$	$\forall x\, Q(x) = 0\ \checkmark a_1$	2
4.	$P(a_1) = 0\ \checkmark$	$Q(a_1) = 0\ \checkmark$	3
5.	$P(a_1) \wedge Q(a_1) = 1\ \checkmark$	$P(a_1) \wedge Q(a_1) = 1\ \checkmark$	1
6.	$P(a_1) = 1\ \checkmark$	$Q(a_1) = 1\ \checkmark$	5
	$\times$ 4,6	$\times$ 4,6	

- Дерево закрылось, значит секвенция тождественно истинна.
- В строке 3 можем использовать a_1 в обеих ветвях.
- Когда раскрываем строку 1, под ней две открытые ветви, результат пишем в обе.

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0$	Дано

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0$ ✓	Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0$	2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0$	2

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0$ ✓	Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0$ ✓a_1	2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0$ ✓a_2	2
5.	$P(a_1) = 0$ ✓	3
6.	$Q(a_2) = 0$ ✓	4

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1 \setminus a_1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0\ \checkmark$	Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0\ \checkmark a_1$	2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0\ \checkmark a_2$	2
5.	$P(a_1) = 0\ \checkmark$	3
6.	$Q(a_2) = 0\ \checkmark$	4
7.	$P(a_1) \vee Q(a_1) = 1$	1

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1 \setminus a_1$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0\ \checkmark$	Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0\ \checkmark a_1$	2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0\ \checkmark a_2$	2
5.	$P(a_1) = 0\ \checkmark$	3
6.	$Q(a_2) = 0\ \checkmark$	4
7.	$P(a_1) \vee Q(a_1) = 1\ \checkmark$	1
8.	$P(a_1) = 1\ \checkmark$ $\quad$ $Q(a_1) = 1\ \checkmark$	7 (ветвь закончена?)
	$\times$ 5,8	

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1 \setminus a_1, a_2$	Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0$ ✓	Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0$ ✓a_1	2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0$ ✓a_2	2
5.	$P(a_1) = 0$ ✓	3
6.	$Q(a_2) = 0$ ✓	4
7.	$P(a_1) \vee Q(a_1) = 1$ ✓	1
8.	$P(a_1) = 1$ ✓ $Q(a_1) = 1$ ✓	7
9.	× (5,8) $P(a_2) \vee Q(a_2) = 1$	1

Пример дерева истинности (3)

- $\forall x\, P(x) \vee Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x\, P(x) \vee Q(x) = 1 \setminus a_1, a_2$		Дано
2.	$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) = 0 \checkmark$		Дано
3.	$\forall x\, P(x) = 0 \checkmark a_1$		2
4.	$\forall x\, Q(x) = 0 \checkmark a_2$		2
5.	$P(a_1) = 0 \checkmark$		3
6.	$Q(a_2) = 0 \checkmark$		4
7.	$P(a_1) \vee Q(a_1) = 1 \checkmark$		1
8.	$P(a_1) = 1 \checkmark$	$Q(a_1) = 1 \checkmark$	7
9.	$\times$ 5,8	$P(a_2) \vee Q(a_2) = 1 \checkmark$	1
10.		$P(a_2) = 1 \checkmark$ | $Q(a_2) = 1 \checkmark$ $\times$ 6,10	9

- Дерево не закрылось!

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.
- В нашем случае атомы в ней $P(a_1) = 0$, $Q(a_2) = 0$, $Q(a_1) = 1$, $P(a_2) = 1$.
- По ним строим модель. В ней два объекта, которые так и обозначим: a_1 и a_2.

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.
- В нашем случае атомы в ней $P(a_1) = 0$, $Q(a_2) = 0$, $Q(a_1) = 1$, $P(a_2) = 1$.
- По ним строим модель. В ней два объекта, которые так и обозначим: a_1 и a_2.

x	a_1	a_2
$P(x)$	0	1
$Q(x)$	1	0

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.
- В нашем случае атомы в ней $P(a_1) = 0$, $Q(a_2) = 0$, $Q(a_1) = 1$, $P(a_2) = 1$.
- По ним строим модель. В ней два объекта, которые так и обозначим: a_1 и a_2.

x	a_1	a_2
$P(x)$	0	1
$Q(x)$	1	0

- Что делать, если бы в ветви не было атома с $P(a_1)$ (например)?

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.
- В нашем случае атомы в ней $P(a_1) = 0$, $Q(a_2) = 0$, $Q(a_1) = 1$, $P(a_2) = 1$.
- По ним строим модель. В ней два объекта, которые так и обозначим: a_1 и a_2.

x	a_1	a_2
$P(x)$	0	1
$Q(x)$	1	0

- Что делать, если бы в ветви не было атома с $P(a_1)$ (например)?
- Можем поставить туда любое значение.

Пример дерева истинности (3)

- Получили открытую ветвь, в которой:
  - все α-, β-, δ- и $\neg$-формулы раскрыты;
  - все γ-формулы раскрыты со всеми параметрами (и хотя бы с одним).
- Такая ветвь называется законченной.
- В нашем случае атомы в ней $P(a_1) = 0$, $Q(a_2) = 0$, $Q(a_1) = 1$, $P(a_2) = 1$.
- По ним строим модель. В ней два объекта, которые так и обозначим: a_1 и a_2.

x	a_1	a_2
$P(x)$	0	1
$Q(x)$	1	0

- Что делать, если бы в ветви не было атома с $P(a_1)$ (например)?
- Можем поставить туда любое значение.
- Снова видим, что x, связанные разными кванторами, по сути разные переменные (строки 5-6).

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x,y) \vdash \exists y \forall x\, P(x,y)$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x,y) = 1$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x,y) = 0$	Дано

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x, y) \vdash \exists y \forall x\, P(x, y)$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x, y) = 1 \setminus a_1$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x, y) = 0$	Дано
3.	$\exists y\, P(a_1, y) = 1 \checkmark a_2$	1
4.	$P(a_1, a_2) = 1 \checkmark$	3

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x,y) \vdash \exists y \forall x\, P(x,y)$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x,y) = 1 \setminus a_1$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x,y) = 0 \setminus a_2$	Дано
3.	$\exists y\, P(a_1,y) = 1 \checkmark a_2$	1
4.	$P(a_1,a_2) = 1 \checkmark$	3
5.	$\forall x\, P(x,a_2) = 0 \checkmark a_3$	2
6.	$P(a_3,a_2) = 0 \checkmark$	5 (ветвь закончена?)

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x, y) \vdash \exists y \forall x\, P(x, y)$.

  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x, y) = 1 \setminus a_1, a_3, \ldots$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x, y) = 0 \setminus a_2, \ldots$	Дано
3.	$\exists y\, P(a_1, y) = 1 \checkmark a_2$	1
4.	$P(a_1, a_2) = 1 \checkmark$	3
5.	$\forall x\, P(x, a_2) = 0 \checkmark a_3$	2
6.	$P(a_3, a_2) = 0 \checkmark$	5
7.	$\exists y\, P(a_3, y) = 1 \checkmark a_4$	1
8.	$\ldots$	

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x,y) \vdash \exists y \forall x\, P(x,y)$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x,y) = 1 \setminus a_1, a_3, \ldots$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x,y) = 0 \setminus a_2, \ldots$	Дано
3.	$\exists y\, P(a_1,y) = 1 \checkmark a_2$	1
4.	$P(a_1,a_2) = 1 \checkmark$	3
5.	$\forall x\, P(x,a_2) = 0 \checkmark a_3$	2
6.	$P(a_3,a_2) = 0 \checkmark$	5
7.	$\exists y\, P(a_3,y) = 1 \checkmark a_4$	1
8.	$\ldots$	

- На этот раз ситуация сложнее предыдущей.
- Противоречия нет, но и законченной ветви (в смысле прошлого слайда) тоже.
- По крайней мере после любого конечного числа шагов.

Пример дерева истинности (4)

- $\forall x \exists y\, P(x,y) \vdash \exists y \forall x\, P(x,y)$.
  Как думаете, тождественно истинна или нет?

1.	$\forall x \exists y\, P(x,y) = 1 \setminus a_1, a_3, \ldots$	Дано
2.	$\exists y \forall x\, P(x,y) = 0 \setminus a_2, \ldots$	Дано
3.	$\exists y\, P(a_1, y) = 1 \checkmark a_2$	1
4.	$P(a_1, a_2) = 1 \checkmark$	3
5.	$\forall x\, P(x, a_2) = 0 \checkmark a_3$	2
6.	$P(a_3, a_2) = 0 \checkmark$	5
7.	$\exists y\, P(a_3, y) = 1 \checkmark a_4$	1
8.	$\ldots$	

- На этот раз ситуация сложнее предыдущей.
- Противоречия нет, но и законченной ветви (в смысле прошлого слайда) тоже.
- По крайней мере после любого конечного числа шагов.
- Наверное, легко *увидеть*, что противоречия так и не получим, но как это *доказать*?

Бесконечные контрмодели

- В нашей ветви видны некоторые значения предиката:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
a_1	?	1	?	?	
a_2	?	?	?	?	
a_3	?	0	?	1	
a_4	?	?	?	?	
$\dots$					

- Как в терминах этой таблицы выглядят:
    - $\forall x \exists y\ P(x, y) = 1$?

Бесконечные контрмодели

- В нашей ветви видны некоторые значения предиката:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
a_1	?	1	?	?	
a_2	?	?	?	?	
a_3	?	0	?	1	
a_4	?	?	?	?	
$\dots$					

- Как в терминах этой таблицы выглядят:
  - $\forall x \exists y\ P(x, y) = 1$? В каждой строке есть 1.

Бесконечные контрмодели

- В нашей ветви видны некоторые значения предиката:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
a_1	?	1	?	?	
a_2	?	?	?	?	
a_3	?	0	?	1	
a_4	?	?	?	?	
$\dots$					

- Как в терминах этой таблицы выглядят:
  - $\forall x \exists y\ P(x, y) = 1$? В каждой строке есть 1.
  - $\exists y \forall x\ P(x, y) = 0$?

Бесконечные контрмодели

- В нашей ветви видны некоторые значения предиката:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
a_1	?	1	?	?	
a_2	?	?	?	?	
a_3	?	0	?	1	
a_4	?	?	?	?	
$\dots$					

- Как в терминах этой таблицы выглядят:
  - $\forall x \exists y\ P(x, y) = 1$? В каждой строке есть 1.
  - $\exists y \forall x\ P(x, y) = 0$? Нет столбца, где все 1. Помните, что это $(\exists y \forall x\ P(x, y)) = 0$, а не $\exists y \forall x\ (P(x, y) = 0)$!

Бесконечные контрмодели

- Видно, что расставить 0 и 1 на место ? произвольно нельзя, но вот вариант:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$
a_1	0	1	0	0	
a_2	0	0	1	0	
a_3	0	0	0	1	
a_4	0	0	0	0	
$\dots$					

Бесконечные контрмодели

- Видно, что расставить 0 и 1 на место ? произвольно нельзя, но вот вариант:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$
a_1	0	1	0	0	
a_2	0	0	1	0	
a_3	0	0	0	1	
a_4	0	0	0	0	
$\ldots$					

- Мы нашли бесконечный контрпример для этой секвенции, а есть ли конечный? Напомню условия:
- В каждой строке есть 1; нет столбца, где все 1.

Бесконечные контрмодели

- Видно, что расставить 0 и 1 на место ? произвольно нельзя, но вот вариант:

x \ y	a_1	a_2	a_3	a_4	...
a_1	0	1	0	0	
a_2	0	0	1	0	
a_3	0	0	0	1	
a_4	0	0	0	0	
...					

- Мы нашли бесконечный контрпример для этой секвенции, а есть ли конечный? Напомню условия:
- В каждой строке есть 1; нет столбца, где все 1.
- Конечно, есть. Например:

x \ y	a_1	a_2
a_1	1	0
a_2	0	1

Теорема о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Общий ход доказательства тот же, что для логики высказываний. Напомню:

Теорема о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Общий ход доказательства тот же, что для логики высказываний. Напомню:
- Доказательство от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима.
- Лемма: если в дереве есть выполнимая ветвь, после применения правил такая ветвь тоже есть.
- Значит, сколько не применяем правила к исходному дереву, на каждом шаге есть выполнимая ветвь.
- Закрытая ветвь не может быть выполнима, значит, на каждом шаге есть открытая ветвь.
- Значит, дерево не может быть закрыто.

Теорема о корректности

- Теорема: если для $A = 0$ есть закрытое дерево истинности, то A тождественно истинна.
- Общий ход доказательства тот же, что для логики высказываний. Напомню:
- Доказательство от противного. Если A не тождественно истинна, то $A = 0$ выполнимо.
- Значит, в исходном дереве единственная ветвь выполнима.
- Лемма: если в дереве есть выполнимая ветвь, после применения правил такая ветвь тоже есть.
- Значит, сколько не применяем правила к исходному дереву, на каждом шаге есть выполнимая ветвь.
- Закрытая ветвь не может быть выполнима, значит, на каждом шаге есть открытая ветвь.
- Значит, дерево не может быть закрыто.
- Остаётся только доказать основную лемму для правил γ и δ.

Основная лемма теоремы о корректности

- Ветвь $\mathcal{B}$ выполнима, т.е. есть модель M, в которой все уравнения из $\mathcal{B}$ истинны. Параметры имеют значения в этой модели, как константы.
- Случай γ с термом t: Рассмотрим $\forall v\ A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, $A(t) = 1$ тоже истинно в M. Для $\exists v\ A(v) = 0$ аналогично.

Основная лемма теоремы о корректности

- Ветвь $\mathcal{B}$ выполнима, т.е. есть модель M, в которой все уравнения из $\mathcal{B}$ истинны. Параметры имеют значения в этой модели, как константы.
- Случай γ с термом t: Рассмотрим $\forall v\ A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, $A(t) = 1$ тоже истинно в M. Для $\exists v\ A(v) = 0$ аналогично.
- Случай δ с параметром a_i: Рассмотрим $\exists v\ A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, есть $e \in \bar{M}$, для которого $A(e) = 1$

Основная лемма теоремы о корректности

- Ветвь $\mathcal{B}$ выполнима, т.е. есть модель M, в которой все уравнения из $\mathcal{B}$ истинны. Параметры имеют значения в этой модели, как константы.
- Случай γ с термом t: Рассмотрим $\forall v\ A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, $A(t) = 1$ тоже истинно в M. Для $\exists v\ A(v) = 0$ аналогично.
- Случай δ с параметром a_i: Рассмотрим $\exists v\ A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, есть $e \in \bar{M}$, для которого $A(e) = 1$ (строго говоря, $\sigma_{v \mapsto e}(A(v)) = 1$).
- Зададим M', которая отличается от M только тем, что параметр a_i имеет значение e. Тогда в M':
  - $A(a_i) = A(e) = 1$;
  - остальные уравнения из $\mathcal{B}$ истинны, так как

Основная лемма теоремы о корректности

- Ветвь $\mathcal{B}$ выполнима, т.е. есть модель M, в которой все уравнения из $\mathcal{B}$ истинны. Параметры имеют значения в этой модели, как константы.
- Случай γ с термом t: Рассмотрим $\forall v\, A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, $A(t) = 1$ тоже истинно в M. Для $\exists v\, A(v) = 0$ аналогично.
- Случай δ с параметром a_i: Рассмотрим $\exists v\, A(v) = 1$. По предположению, она истинна в M. Значит, есть $e \in \bar{M}$, для которого $A(e) = 1$ (строго говоря, $\sigma_{v \mapsto e}(A(v)) = 1$).
- Зададим M', которая отличается от M только тем, что параметр a_i имеет значение e. Тогда в M':
  - $A(a_i) = A(e) = 1$;
  - остальные уравнения из $\mathcal{B}$ истинны, так как не содержат a_i.

  Значит, все уравнения новой ветви истинны в M'.

Множества и лемма Хинтикки

- Перейдём к теореме о полноте.
- Для упрощения ограничимся случаем, когда в сигнатуре есть только предикатные символы, нет константных и функциональных.

Множества и лемма Хинтикки

- Перейдём к теореме о полноте.
- Для упрощения ограничимся случаем, когда в сигнатуре есть только предикатные символы, нет константных и функциональных.
- Множество уравнений H — *множество Хинтикки*, если есть множество параметров U такое, что
  1. $P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1 \notin H \vee P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0 \notin H$ для любого предикатного символа P и параметров $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ из U.
  2. $\alpha \in H \Rightarrow \alpha_1 \in H \wedge \alpha_2 \in H$.
  3. $\beta \in H \Rightarrow \beta_1 \in H \vee \beta_2 \in H$.
  4. $\gamma \in H \Rightarrow \forall a_i \in U\ \gamma(a_i) \in H$.
  5. $\delta \in H \Rightarrow \exists a_i \in U\ \delta(a_i) \in H$.

Множества и лемма Хинтикки

- Перейдём к теореме о полноте.
- Для упрощения ограничимся случаем, когда в сигнатуре есть только предикатные символы, нет константных и функциональных.
- Множество уравнений H — *множество Хинтикки*, если есть множество параметров U такое, что
  1. $P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1 \notin H \vee P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0 \notin H$ для любого предикатного символа P и параметров $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ из U.
  2. $\alpha \in H \Rightarrow \alpha_1 \in H \wedge \alpha_2 \in H$.
  3. $\beta \in H \Rightarrow \beta_1 \in H \vee \beta_2 \in H$.
  4. $\gamma \in H \Rightarrow \forall a_i \in U\ \gamma(a_i) \in H$.
  5. $\delta \in H \Rightarrow \exists a_i \in U\ \delta(a_i) \in H$.
- Лемма Хинтикки для логики первого порядка: любое множество Хинтикки имеет модель, носителем которой является U.

Лемма Хинтикки (доказательство)

- Как и для логики высказываний, задаём

$$P^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1 \in H \\ 0, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0 \in H \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Атомарные уравнения из H истинны в M по определению.

Лемма Хинтикки (доказательство)

- Как и для логики высказываний, задаём
$$P^M(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) = 1 \in H \\ 0, \text{ если } P(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) = 0 \in H \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$
- Атомарные уравнения из H истинны в M по определению.
- Индукцией по сложности покажем, что все остальные тоже.
- α и β как в логике высказываний.

Лемма Хинтикки (доказательство)

- Как и для логики высказываний, задаём
$$P^M(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) = 1 \in H \\ 0, \text{ если } P(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) = 0 \in H \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$
- Атомарные уравнения из H истинны в M по определению.
- Индукцией по сложности покажем, что все остальные тоже.
- α и β как в логике высказываний.
- Пусть $\gamma \in H$ имеет вид $\forall v\ A(v) = 1$. Тогда все $A(a_i) = 1 \in H$. Их сложность меньше, и они истинны в M по предположению индукции. Значит, $\forall v\ A(v) = 1$ истинно в M.

Лемма Хинтикки (доказательство)

- Как и для логики высказываний, задаём

$$P^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1 \in H \\ 0, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0 \in H \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Атомарные уравнения из H истинны в M по определению.
- Индукцией по сложности покажем, что все остальные тоже.
- α и β как в логике высказываний.
- Пусть $\gamma \in H$ имеет вид $\forall v\, A(v) = 1$. Тогда все $A(a_i) = 1 \in H$. Их сложность меньше, и они истинны в M по предположению индукции. Значит, $\forall v\, A(v) = 1$ истинно в M.
- Для $\exists v\, A(v) = 0$ аналогично.

Лемма Хинтикки (доказательство)

- Как и для логики высказываний, задаём

$$P^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1 \in H \\ 0, \text{ если } P(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0 \in H \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

- Атомарные уравнения из H истинны в M по определению.
- Индукцией по сложности покажем, что все остальные тоже.
- α и β как в логике высказываний.
- Пусть $\gamma \in H$ имеет вид $\forall v\, A(v) = 1$. Тогда все $A(a_i) = 1 \in H$. Их сложность меньше, и они истинны в M по предположению индукции. Значит, $\forall v\, A(v) = 1$ истинно в M.
- Для $\exists v\, A(v) = 0$ аналогично.
- Для δ тоже разбираем отдельно $\exists v\, A(v) = 1$ и $\forall v\, A(v) = 0$.

Систематические деревья

- В отличие от логики высказываний, порядок раскрытия уравнений в логике предикатов важен.
- То есть может оказаться, что в зависимости от этого порядка ветвь закроется или нет.
- Нужен способ гарантировать, что если противоречие есть, мы его найдём
- А если нет, то получим множество Хинтикки.
- Этот способ — систематические деревья.

Систематические деревья

- В отличие от логики высказываний, порядок раскрытия уравнений в логике предикатов важен.
- То есть может оказаться, что в зависимости от этого порядка ветвь закроется или нет.
- Нужен способ гарантировать, что если противоречие есть, мы его найдём
- А если нет, то получим множество Хинтикки.
- Этот способ — систематические деревья.
- На каждом шаге раскрываем самое верхнее нераскрытое уравнение. Если их несколько на одном уровне, то левое из них.
- Уравнения типа γ раскрываем сначала с параметром a_1, и добавляем под $\gamma(a_1)$ ещё одну копию γ.
- Когда до неё дойдём, раскроем с a_2 и добавим ещё копии…

Систематические деревья (2)

- Систематическое дерево *закончено* в любом из следующих случаев:
  1. оно закрыто;
  2. в нём не осталось неразобранных уравнений;
  3. оно бесконечно.
- Открытая ветвь в законченном систематическом дереве является множеством Хинтикки.
- Доказательство: если ветвь конечна, это следует сразу из определения.
- А если она бесконечна, то в систематической процедуре было сделано бесконечно много шагов.
- Так как число уравнений на каждом уровне конечно, то все уравнения до любого фиксированного уровня n будут разобраны за конечное число шагов.
- Значит, все уравнения бесконечной ветви разобраны. В том числе типа γ — со всеми параметрами.

Теорема о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то законченное систематическое дерево истинности для $A = 0$ закрыто.

Теорема о полноте

- Теорема: если A тождественно истинна, то законченное систематическое дерево истинности для $A = 0$ закрыто.
- Доказательство: если оно открыто, то его открытая ветвь — множество Хинтикки, содержащее $A = 0$.
- По лемме Хинтикки эта ветвь имеет модель.
- В этой модели $A = 0$.
- Значит, A не тождественно истинна.

Счётные модели

- Существенно, что построенная модель для множества Хинтикки конечна или *счётна*, то есть её элементы можно перенумеровать $\{a_1, a_2, \ldots\}$.[1]
- Пусть формула A выполнима (то есть имеет какую-то модель).
- Тогда $\neg A$ не тождественно истинна.
- Значит, систематическое дерево для $\neg A = 0$ или для $A = 1$ не может быть закрыто.
- Значит, A имеет конечную или счётную модель.

[1] Больше о счётных и несчётных множествах в следующем разделе.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

- Можно рассматривать деревья не для одного уравнения, а для множества, в том числе счётного.
- Позже увидим, что любое бесконечное множество уравнений логики предикатов счётно.
- Если множество счётное, то мы не можем начать с ветви, содержащей все уравнения.
- Вместо этого разрешаем кроме обычных правил расширения дерева добавлять уравнения из множества в конец открытой ветви.
- В построении систематического дерева будет изменение: после шага n добавим в конец всех открытых ветвей уравнение A_n.
- Доказательства выше работают по-прежнему.
- Получается теорема Лёвенгейма-Сколема: если счётное множество уравнений выполнимо, то оно выполнимо в конечной или счётной модели.

Теорема о компактности

- С другой стороны, если систематическое дерево для бесконечного множества уравнений закроется, то это случится после конечного количества шагов.
- При этом может быть использовано только конечное число уравнений исходного множества.
- Теорема о компактности: если множество уравнений невыполнимо, то у него есть конечное невыполнимое подмножество.

Последние замечания

- Есть варианты правил деревьев, которые позволят найти конечный контрпример в последнем примере, но их сложнее объяснить и понять.
- Краткое изложение в английской Википедии.

Последние замечания

- Есть варианты правил деревьев, которые позволят найти конечный контрпример в последнем примере, но их сложнее объяснить и понять.
- Краткое изложение в английской Википедии.

- Пока мы не можем это доказать, но логика предикатов неразрешима: нет алгоритма, который для любой формулы скажет, тождественно истинна ли она.
- Значит, в любой системе доказательств надо что-то придумывать (для некоторых формул), чисто механических действий недостаточно.