

Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

2 ноября 2024 г.

МИЭТ

Правила для логики высказываний

- Для \wedge :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$$

- Для \rightarrow :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$$

- Для \neg и \perp :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg E / \perp I \qquad \frac{\perp}{A} \perp E$$

- Для \vee :

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B} \vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B} \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} RAA \qquad \frac{A}{A} R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\frac{\forall x A(x)}{A(t)} \forall E$ и $\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists I$.
Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\frac{\forall x A(x)}{A(t)} \forall E$ и $\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists I$.
Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \text{произв. } a \\ \vdots \\ A(a) \end{array}} \quad \forall I \text{ и } \frac{\boxed{\begin{array}{c} \text{возьмём } a, \\ \text{т.ч. } A(a) \\ \vdots \\ B \end{array}} \quad \exists E}{\forall x A(x) \quad B} \exists E$$

Здесь a — новый параметр, как в δ .

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a . Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a . Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила $\exists E$: мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично $\forall E$.
- Удобно помечать подвывод, вводящий параметр, этим параметром.
- Есть упрощённые варианты $\forall I$ и $\exists E$ без подвыводов, но для них существенно сложнее сформулировать точные условия и доказать корректность и полноту. Мы их в этом курсе не рассматриваем.

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
\vdots	\vdots	
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
\vdots	\vdots	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\Rightarrow 1, 2-(n - 1)$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
\vdots	\vdots	
$n - 2$	$\exists xQ(x)$	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\Rightarrow I, 2-(n - 1)$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
4	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$\forall E, 1$
5	$Q(a)$	$\Rightarrow E, 3, 4$
$n - 2$	$\exists xQ(x)$	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\Rightarrow I, 2-(n - 1)$

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	Дано
2	$\exists x P(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
4	$\neg P(a)$	$\forall E, 1$
$n - 2$	\perp	$\neg E, 3, 4$
$n - 1$	\perp	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\neg \exists x P(x)$	$\neg I, 2-(n - 1)$

Пример 3

- Докажем $\forall x P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\forall x P(x) \wedge Q(x)}^{\text{дано}}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)}^{\forall E}}{P(a_1)}^{\wedge E}}{\forall x P(x)}^{\forall I a_1} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\forall x P(x) \wedge Q(x)}^{\text{дано}}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)}^{\forall E}}{Q(a_2)}^{\wedge E}}{\forall x Q(x)}^{\forall I a_2} \quad \frac{\forall x P(x) \quad \forall x Q(x)}{(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))}^{\wedge I}$$

- Можно ли оба раза использовать a_1 ?

Пример 3

- Докажем $\forall x P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$:

$\frac{\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{P(a_1) \wedge Q(a_1)} \text{ дано} \quad \forall E}{P(a_1)} \wedge E}{\forall x P(x)} \forall I a_1$	$\frac{\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{P(a_2) \wedge Q(a_2)} \text{ дано} \quad \forall E}{Q(a_2)} \wedge E}{\forall x Q(x)} \forall I a_2$
$\frac{\forall x P(x) \quad \forall x Q(x)}{(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))} \wedge I$	

- Можно ли оба раза использовать a_1 ? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

Пример 3 в линейной записи

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	a_1 произв. a_1	
3	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
$k - 1$	$P(a_1)$	$\wedge E, 3$
k	a_2 произв. a_2	
k	$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall E, 1$
$n - 3$	$Q(a_2)$	$\wedge E, k$
$n - 2$	$\forall x P(x)$	$\forall I, 2-(k - 1)$
$n - 1$	$\forall x Q(x)$	$\forall I, k-(n - 3)$
n	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, n - 2, n - 1$

ИЛИ

Пример 3 в линейной записи

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	a_1 произв. a_1	
3	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
$k - 1$	$P(a_1)$	$\wedge E, 3$
k	a_2 произв. a_2	
k	$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall E, 1$
$n - 3$	$Q(a_2)$	$\wedge E, k$
$n - 2$	$\forall x P(x)$	$\forall I, 2-(k - 1)$
$n - 1$	$\forall x Q(x)$	$\forall I, k-(n - 3)$
n	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, n - 2, n - 1$

или

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
7	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
8	a_1 произв. a_1	
5	$P(a_1)$	$\wedge E, 7$
6	a_1 произв. a_1	
6	$Q(a_1)$	$\wedge E, k$
3	$\forall x P(x)$	$\forall I, 8-5$
4	$\forall x Q(x)$	$\forall I, 6-6$
2	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, 3, 4$

Здесь важно, что строка 7 появилась после 5 и 6, иначе в них нельзя использовать a_1 .

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$:

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$:

$\frac{\exists x \forall y P(x, y)}{\exists x P(x, a_1)} \text{ дано}$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"><tr><td style="padding: 5px;">$\frac{\forall y P(a_2, y)}{P(a_2, a_1)} \text{ для } \exists E$</td></tr><tr><td style="padding: 5px;">$\frac{P(a_2, a_1)}{\exists x P(x, a_1)} \forall E$</td></tr></table>	$\frac{\forall y P(a_2, y)}{P(a_2, a_1)} \text{ для } \exists E$	$\frac{P(a_2, a_1)}{\exists x P(x, a_1)} \forall E$
$\frac{\forall y P(a_2, y)}{P(a_2, a_1)} \text{ для } \exists E$			
$\frac{P(a_2, a_1)}{\exists x P(x, a_1)} \forall E$			
$\frac{\exists x P(x, a_1)}{\forall y \exists x P(x, y)} \exists E \ a_2; \forall y P(a_2, y) \vdash$			

Пример 4 в линейной записи

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$ в линейной записи:

1		$\exists x \forall y P(x, y)$	Дано
2		a_1 произв. a_1	
3		a_2 $\forall y P(a_2, y)$	Дано
4		$P(a_2, a_1)$	$\forall E, 3$
$n - 2$		$\exists x P(x, a_1)$	$\exists I, 4$
$n - 1$		$\exists x P(x, a_1)$	$\exists E, 1, 3-(n - 2)$
n		$\forall y \exists x P(x, y)$	$\forall I, 2-(n - 1)$

Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре a_1).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x , y , ...
- Простой пример: докажем $\forall x P(x) \vdash \forall x P(f(x))$:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x, y, \dots
- Простой пример: докажем $\forall x P(x) \vdash \forall x P(f(x))$:

1	$\forall x P(x)$	Дано
2	a	произв. a
$n - 1$	$P(f(a))$	$\forall E, 1$
n	$\forall x P(f(x))$	$\forall I, 2-(n - 1)$

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\frac{}{t = t} = I \quad \frac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \quad \frac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t , $A[s]$

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\frac{}{t = t} = I \quad \frac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \quad \frac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t , $A[s]$ — та же формула с заменой t на s .
- Не обязательно заменять все вхождения t .
- Вместо правил можно было бы ввести аксиомы:
 $\forall x \, x = x$ и $\forall x \forall y (x = y \wedge A[x] \rightarrow A[y])$.

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства
 $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$:

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства

$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$:

1	a, b	произв. a, b	
2		$a = b$	Дано
3		$b = b$	$=I$
$n - 2$		$b = a$	$=E(s, t: b, A[t]: b = \underline{b}), 2, 3$
$n - 1$		$a = b \rightarrow b = a$	$\Rightarrow E, 2-(n - 2)$
n		$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$	$\forall I, 1-(n - 1)$

- Подчёркиванием в $=E$ выделено заменяемое вхождение терма.

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).
- Много дополнительных задач с решениями на английском можно найти в [этом документе](#).