Натуральная дедукция (естественный вывод)

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

5 ноября 2020 г.

МИЭТ

Правила натуральной дедукции

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E$$

- Для $\rightarrow$:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ \rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ \rightarrow E$$

- Для $\neg$ и $\perp$:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A}\ \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp}\ \neg E/\perp I \qquad \frac{\perp}{A}\ \perp E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B}\ \vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B}\ \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A}\ RAA \qquad \frac{A}{A}\ R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Для $\forall$:

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A(a)\end{matrix}}{\forall x\, A(x)}\ \forall I \qquad\qquad \cfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$$

- Для $\exists$:

$$\cfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I \qquad\qquad \cfrac{\exists x\, A(x) \qquad \begin{matrix}A(a)\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{B}\ \exists E$$

- t в $\forall E$ и $\exists I$ — произвольный терм (в наших примерах всегда просто параметр). Они соответствуют типу γ в деревьях истинности.
- a в $\forall I$ и $\exists E$ — новый параметр, которого нет в уже построенной части доказательства. Они соответствуют типу δ.

Пример

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
$\vdots$	$\vdots$	
2	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	

Пример

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
3	$\quad \exists x P(x)$	Дано
$\vdots$	$\quad \vdots$	
4	$\quad \exists x Q(x)$	
2	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\to$I, 3–4

Пример

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
3	$\quad \exists x P(x)$	Дано
5	$\quad a \quad P(a)$	Дано
$\vdots$	$\quad\quad \vdots$	
6	$\quad\quad \exists x Q(x)$	
4	$\quad \exists x Q(x)$	$\exists$E, 3, 5–6
2	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\to$I, 3–4

Пример

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
3	$\quad \exists x P(x)$	Дано
5	$\quad a \quad P(a)$	Дано
7	$\qquad\quad P(a) \to Q(a)$	$\forall$E, 1
8	$\qquad\quad Q(a)$	$\to$E, 5, 7
6	$\qquad\quad \exists x Q(x)$	$\exists$I, 8
4	$\quad \exists x Q(x)$	$\exists$E, 3, 5–6
2	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\to$I, 3–4

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	
3	$\quad \exists x P(x)$	
5	$\quad a \quad P(a)$	
6	$\qquad \neg P(a)$	$\forall$E, 1
7	$\qquad \bot$	$\neg$E, 5, 6
4	$\quad \bot$	$\exists$E, 3, 5–7
2	$\neg \exists x P(x)$	$\neg$I, 3–4