1 Деревья истинности для логики высказываний

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $((p \to q) \to p) \to p$
4. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
5. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$
6. Сформулировать правила деревьев истинности для следующих операций: стрелка Пирса $\downarrow$, штрих Шеффера $|$, равносильность $\equiv$, сумма по модулю 2 $\oplus$ (она же исключающее или). Если какие-то из них незнакомы и не получится найти определение, напишите.

2 Натуральная дедукция для логики высказываний

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.
2. $p \to q \wedge r \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$.
3. $p \equiv \neg\neg p$.

4*. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$.

5. Законы де Моргана (2 в обоих направлениях).
6. $\vdash p \vee \neg p$ (использовать RAA и закон де Моргана для отрицания дизъюнкции).
7. $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

8*. $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$ (есть подсказка).

9*. Составить правила введения и исключения для равносильности, суммы по модулю 2, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

3 Формализация утверждений в логике предикатов

Перевести на язык логики предикатов:

1. Мне скучно.
2. Иванов и Петров играют в шахматы.
3. Иванов и Петров слушают лекцию.
4. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.
5. Слон Бимбо больше собаки Ланды.
6. Кошки бывают только белые и серые.
7. Среднее арифметическое любых двух чисел больше их среднего геометрического (не используйте операции деления и извлечения корня, так как они не везде определены).
8. Уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ не имеет решений.
9. Функция f непрерывна в точке a (используйте определение предела через ε и δ).
10. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.

11. Функция f принимает в том числе такие комплексные значения, которые не являются действительными.

12. У каждого положительного действительного числа есть ровно один положительный квадратный корень.

13. Число x простое (для групп, где не сделали на занятии).

14. Есть сколько угодно большие простые числа.

15. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ имеет более одной предельной точки.

4 Деревья истинности для логики предикатов

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

2. $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x\ P(X)) \vee (\forall x\ Q(x))$

3. $\exists x\ P(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

4. $\neg\exists x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash (\exists x\ A(x)) \wedge (\forall x\ Q(x))$

5. $\forall x \exists y\ P(x,y), \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \wedge Q(x,y))$

   Следующие формализовать как секвенции с двумя посылками:

6. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.

7. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.

8. Если бинарное отношение транзитивно и симметрично, то оно рефлексивно (здесь квантора по бинарным отношениям нет, просто обозначьте его как $R(x,y)$).

   Задачи с равенством и с функциями:

9. $\forall x \exists! y\ f(x) = y$

10. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
    $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to x = y)) \equiv (\exists x\ P(x)) \wedge \forall y \forall z\ (P(y) \wedge P(z) \to y = z)$

11*. $\forall x \forall y\ (P(f(x), y) \vee Q(x,y)),\ \forall x \forall y\ (\neg P(x, g(y)) \vee Q(x,y)) \vdash \exists x \exists y\ Q(x,y)$

5 Натуральная дедукция для логики предикатов

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ P(x))$

2. $\forall x\ P(x), \exists x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

3. $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.

4. $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x))$

5. $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$

6. $\forall x \exists y\ P(x,y),\ \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \wedge Q(x,y))$

7. Убедитесь, что $\exists x\ P(x) \vdash \forall x\ P(x)$ нельзя доказать и постройте контрмодель.

8. $\exists x\ P(f(x)) \vdash \exists x\ P(x)$

9. $\forall x \exists! y\ f(x) = y$ (если не получится, сделайте упрощённый вариант с $\exists y$)

10. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
$\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (P(y) \to x = y)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land \forall y \forall z\ (P(y) \land P(z) \to y = z)$

11. $\forall x \forall y\ P(f(x), y),\ \forall x \forall y\ \neg P(x, g(y)) \vdash \bot$

12*. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

13*. $\forall x\ (R(x, y) \to R(y, x)),\quad \forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z)),\quad \forall x \exists y\ R(x, y) \vdash \forall x\ R(x, x)$

Для 12 и 13 есть подсказки.

Подсказки

2.8: можно использовать задачу 7 или закон исключённого третьего.

5.12: можно использовать закон исключённого третьего для $\forall y\ P(y)$.

5.13: так как $\forall x \exists y\ R(x, y)$, то для этого y также верно $R(y, x)$, а из $R(x, y)$ и $R(y, x)$ заключаем $R(x, x)$.