# Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов 31 октября 2024 г.

ТЕИМ

# Правила для логики высказываний

• Для ∧:

 $\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \wedge I \qquad \qquad \frac{A \wedge B}{A} \quad \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \quad \wedge E$ 

• Для →:

 $\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{B}{A \to B} \to I & \frac{A \to B \quad A}{B} \to E \end{array}$ 

• Для ¬ и ⊥:

• Для ∨:

• Остальные:

 $RAA \frac{A}{\Delta}$ 

2/12

### Правила натуральной дедукции для кванторов

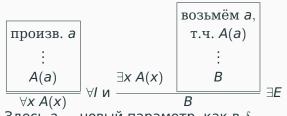
- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

## Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых:  $\frac{\forall x \ A(x)}{A(t)} \ \forall E \$ и  $\frac{A(t)}{\exists x \ A(x)} \$  $\exists I.$  Здесь t любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила аналоги типа  $\gamma$  в деревьях.

# Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых:  $\frac{\forall x \ A(x)}{A(t)} \ \forall E \$ и  $\frac{A(t)}{\exists x \ A(x)} \$  $\exists I.$  Здесь t любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила аналоги типа  $\gamma$  в деревьях.



Здесь a — новый параметр, как в  $\delta$ .

#### Пояснения к правилам

• Смысл правила  $\forall I$ : чтобы доказать  $\forall x \ A(x)$ , нужно доказать A(a) для *произвольного а*. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

#### Пояснения к правилам

- Смысл правила  $\forall I$ : чтобы доказать  $\forall x \ A(x)$ , нужно доказать A(a) для *произвольного а*. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила  $\exists E$ : мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично  $\vee E$ .
- Удобно помечать подвывод, вводящий параметр, этим параметром.
- Есть упрощённый вариант ∃Е, не вводящий подвывод, но он усложняет определение контрмоделей для недоказумых секвенций и мы его не используем.

$$orall x(P(x) o Q(x)) dash \exists x P(x) o \exists x Q(x)$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & \forall x(P(x) o Q(x)) & \text{Дано} \\ \vdots & \vdots & \\ n & \exists x P(x) o \exists x Q(x) \end{array}$$

$$orall x(P(x) o Q(x)) \vdash \exists x P(x) o \exists x Q(x)$$

1  $| \forall x(P(x) o Q(x)) |$  Дано
2  $| \exists x P(x) |$  Дано
 $\vdots$   $\vdots$   $n-1$   $| \exists x Q(x) |$   $\Rightarrow$  I,  $2$ - $(n-1)$ 

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

1  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  Дано

2  $\exists x P(x)$  Дано

3  $\Rightarrow P(a)$  Дано

 $\vdots$   $\Rightarrow x Q(x)$  Дано

 $\exists x Q(x)$   $\Rightarrow E, 2, 3-(n-2)$ 
 $\Rightarrow x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$   $\Rightarrow I, 2-(n-1)$ 

n

$$orall x(P(x) 
ightarrow Q(x)) dash \exists x P(x) 
ightarrow \exists x Q(x)$$

1  $| \forall x (P(x) 
ightarrow Q(x)) |$  Дано

2  $| \exists x P(x) |$  Дано

4  $| P(a) |$  Дано

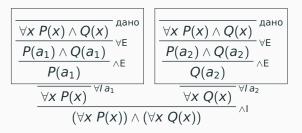
4  $| P(a) 
ightarrow Q(a) |$   $\forall E, 1$ 

5  $| Q(a) |$   $\Rightarrow E, 3, 4$ 
 $n-2 | \exists x Q(x) |$   $\exists x Q(x) |$   $\exists E, 2, 3-(n-2)$ 

 $\Rightarrow$ I, 2-(n - 1)

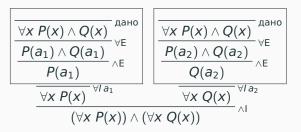
 $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ 

• Докажем  $\forall x \ P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x \ P(x)) \land (\forall x \ Q(x))$ :



• Можно ли оба раза использовать a<sub>1</sub>?

• Докажем  $\forall x \ P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x \ P(x)) \land (\forall x \ Q(x))$ :



• Можно ли оба раза использовать  $a_1$ ? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

# Пример 3 в линейной записи

1	$\forall x \ P(x) \land Q(x)$		Дано
2	a <sub>1</sub>	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	∀E, 1
k-1		$P(a_1)$	∧E, 2
k	a <sub>2</sub>	$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	∀E, 1
n – 3		$Q(a_2)$	∧E, <i>k</i>
n – 2	$\forall x P(x)$		$\forall$ I, 2-( $k-1$ )
n-1	$\forall x \ Q(x)$		$\forall$ I, <i>k</i> −( <i>n</i> − 3)
n	$\begin{vmatrix} \forall x P(x) \land Q(x) \\ a_1 & P(a_1) \land Q(a_1) \\ P(a_1) \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a_2 & P(a_2) \land Q(a_2) \\ Q(a_2) & \\ \forall x P(x) & \\ \forall x Q(x) & \\ (\forall x P(x)) \land (\forall x Q(x)) \end{vmatrix}$		$\wedge$ I, $n-2$ , $n-1$

или

# Пример 3 в линейной записи

				1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
				7	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	∀E, 1
1 $\forall x P(x) \land Q(x)$		Дано	5	$\begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} P(a_1)$	∧E, 7	
_	VX 7 (X) /\ Q(X)		дано	6	$\begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} Q(a_1)$	∧E, <i>k</i>
2	a <sub>1</sub>	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	∀E, 1	U		/\L, K
k – 1		$P(a_1)$	∧E, 2	3	$\forall x P(x)$	∀I, 5-5
			/ \ <b>_</b> / <b>_</b>	4	$\forall x \ Q(x)$	∀I, 6-6
k	a <sub>2</sub>	$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	∀E, 1	·	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	, i, o o
				2	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	∧I, 3, 4
n – 3		$Q(a_2)$	∧E, <i>k</i>		I	
n – 2	2 // 2(1)		VI 2 (k 1)	Здесь важно, что строка 7		
n-2	$\forall x P(x)$		$\forall I, 2-(k-1)$	появилась после 5 и 6,		
n-1	$\forall x \ Q(x)$		$\forall$ I, <i>k</i> −( <i>n</i> − 3)			
				иначе в них нельзя		
n	$(\forall x \ P(x)) \land (\forall x \ Q(x))$		$\wedge$ I, $n-2$ , $n-1$	использовать $a_1$ . Если		
или			использовать параметры			

только внутри подвыводов, которые их вводят, эта проблема не возникает. 8/12

• Доказываем  $\exists x \forall y \ P(x,y) \vdash \forall y \exists x \ P(x,y)$ :

• Доказываем  $\exists x \forall y \ P(x,y) \vdash \forall y \exists x \ P(x,y)$ :

$$\frac{\exists x \forall y \ P(x,y)}{\exists x \ P(x,a_1)} \xrightarrow{\exists E \ P(x,a_1)} \xrightarrow{\exists E \ P(x,a_1)} \exists E \ P(x,x) \vdash \exists E \$$

# Пример 4 в линейной записи

• Доказываем  $\exists x \forall y \; P(x,y) \vdash \forall y \exists x \; P(x,y)$  в линейной записи:

1 
$$\exists x \forall y \ P(x,y)$$
 Дано  
2  $a_1 \begin{vmatrix} a_2 \end{vmatrix} \forall y \ P(a_2,y)$  Дано  
3  $P(a_2,a_1)$   $\forall E, 2$   
 $n-2 \begin{vmatrix} \exists x \ P(x,a_1) \end{vmatrix} \exists I, 3$   
 $n-1 \begin{vmatrix} \exists x \ P(x,a_1) \end{vmatrix} \exists E, 1, 2-(n-2)$   
 $n \forall y \exists x \ P(x,y)$   $\forall I, 2-(n-1)$ 

#### Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре  $a_1$ ).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

#### Дополнительное чтение

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).