

Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

31 октября 2024 г.

МИЭТ

Правила для логики высказываний

- Для \wedge :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$$

- Для \rightarrow :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$$

- Для \neg и \perp :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg E / \perp I \qquad \frac{\perp}{A} \perp E$$

- Для \vee :

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B} \vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B} \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} RAA \qquad \frac{A}{A} R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\frac{\forall x A(x)}{A(t)} \forall E$ и $\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists I$.
Здесь t — любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\frac{\forall x A(x)}{A(t)} \forall E$ и $\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists I$.
Здесь t — любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

- | | | | |
|-------------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------|-------------|
| произв. a

\vdots

$A(a)$ | $\forall I$ и | возьмём a ,
т.ч. $A(a)$

\vdots

B | $\exists E$ |
| $\forall x A(x)$ | | B | |

Здесь a — новый параметр, как в δ .

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a . Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a . Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила $\exists E$: мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично $\forall E$.
- Удобно пометить подвывод, вводящий параметр, этим параметром.
- Есть упрощённый вариант $\exists E$, не вводящий подвывод, но он усложняет определение контрмоделей для недоказуемых секвенций и мы его не используем.

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
\vdots	\vdots	
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
\vdots	\vdots	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 2-(n - 1)$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
\vdots	\vdots	
$n - 2$	$\exists xQ(x)$	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 2-(n - 1)$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
2	$\exists xP(x)$	Дано
3	$a \quad P(a)$	Дано
4	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$\forall E, 1$
5	$Q(a)$	$\rightarrow E, 3, 4$
$n - 2$	$\exists xQ(x)$	
$n - 1$	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 2-(n - 1)$

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	Дано
2	$\exists x P(x)$	Дано
3	$a \mid P(a)$	Дано
4	$\neg P(a)$	$\forall E, 1$
$n - 2$	\perp	$\neg E, 3, 4$
$n - 1$	\perp	$\exists E, 2, 3-(n - 2)$
n	$\neg \exists x P(x)$	$\neg I, 2-(n - 1)$

Пример 3

- Докажем $\forall x P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$:

$\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{P(a_1) \wedge Q(a_1)} \forall E}{P(a_1)} \wedge E$	$\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{P(a_2) \wedge Q(a_2)} \forall E}{Q(a_2)} \wedge E$
$\forall x P(x)$	$\forall x Q(x)$
$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	

- Можно ли оба раза использовать a_1 ?

Пример 3

- Докажем $\forall x P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$:

$\frac{\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{\quad} \text{ дано}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)} \forall E}{P(a_1)} \wedge E$	$\frac{\frac{\frac{\forall x P(x) \wedge Q(x)}{\quad} \text{ дано}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)} \forall E}{Q(a_2)} \wedge E$
$\forall x P(x) \quad \forall I a_1$	$\forall x Q(x) \quad \forall I a_2$
$\frac{\forall x P(x) \quad \forall x Q(x)}{(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))} \wedge I$	

- Можно ли оба раза использовать a_1 ? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

Пример 3 в линейной записи

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	$a_1 \mid P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
$k - 1$	$\mid P(a_1)$	$\wedge E, 2$
k	$a_2 \mid P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall E, 1$
$n - 3$	$\mid Q(a_2)$	$\wedge E, k$
$n - 2$	$\forall x P(x)$	$\forall I, 2-(k - 1)$
$n - 1$	$\forall x Q(x)$	$\forall I, k-(n - 3)$
n	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, n - 2, n - 1$

ИЛИ

Пример 3 в линейной записи

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	$a_1 \mid P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
$k - 1$	$\mid P(a_1)$	$\wedge E, 2$
k	$a_2 \mid P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall E, 1$
$n - 3$	$\mid Q(a_2)$	$\wedge E, k$
$n - 2$	$\forall x P(x)$	$\forall I, 2-(k - 1)$
$n - 1$	$\forall x Q(x)$	$\forall I, k-(n - 3)$
n	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, n - 2, n - 1$

или

1	$\forall x P(x) \wedge Q(x)$	Дано
7	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall E, 1$
5	$a_1 \mid P(a_1)$	$\wedge E, 7$
6	$a_1 \mid Q(a_1)$	$\wedge E, k$
3	$\forall x P(x)$	$\forall I, 5-5$
4	$\forall x Q(x)$	$\forall I, 6-6$
2	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$	$\wedge I, 3, 4$

Здесь важно, что строка 7 появилась после 5 и 6, иначе в них нельзя использовать a_1 . Если использовать параметры только внутри подвыводов, которые их вводят, эта проблема не возникает.

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$:

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{
 \begin{array}{c}
 \frac{\overline{\exists x \forall y P(x, y)} \text{ дано}}{\exists x P(x, a_1)} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\forall y P(a_2, y)} \text{ для } \exists E}{P(a_2, a_1)} \forall E}{\exists x P(x, a_1)} \exists I \\
 \hline
 \exists x P(x, a_1) \quad \exists E a_2; \forall y P(a_2, y) \vdash \\
 \hline
 \forall y \exists x P(x, y) \quad \forall I a_1
 \end{array}
 }
 \end{array}$$

Пример 4 в линейной записи

- Доказываем $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$ в линейной записи:

1	$\exists x \forall y P(x, y)$		Дано
2	a_1	a_2 $\forall y P(a_2, y)$	Дано
3		$P(a_2, a_1)$	$\forall E, 2$
$n - 2$		$\exists x P(x, a_1)$	$\exists I, 3$
$n - 1$		$\exists x P(x, a_1)$	$\exists E, 1, 2-(n - 2)$
n	$\forall y \exists x P(x, y)$		$\forall I, 2-(n - 1)$

Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре a_1).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).