

Натуральная дедукция (естественный вывод)

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

31 октября 2024 г.

МИЭТ

Правила натуральной дедукции

- Для \wedge :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$$

- Для \rightarrow :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$$

- Для \neg и \perp :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg E / \perp I \qquad \frac{\perp}{A} \perp E$$

- Для \vee :

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \vee B} \vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}{A \vee B} \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} RAA \qquad \frac{A}{A} R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Для \forall :

$$\frac{\vdots}{A(a)} \quad \forall I \qquad \frac{\forall x A(x)}{A(t)} \quad \forall E$$

- Для \exists :

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \quad \exists I \qquad \frac{\begin{array}{c} A(a) \\ \vdots \\ \exists x A(x) \end{array} \quad B}{B} \quad \exists E$$

- t в $\forall E$ и $\exists I$ — произвольный терм (в наших примерах всегда просто параметр). Они соответствуют типу γ в деревьях истинности.
- a в $\forall I$ и $\exists E$ — новый параметр, которого нет в уже построенной части доказательства. Они соответствуют типу δ .

Пример

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
\vdots	\vdots	
2	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	

Пример

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
3	$\exists xP(x)$	Дано
\vdots	\vdots	
4	$\exists xQ(x)$	
2	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 3-4$

Пример

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
3	$\exists xP(x)$	Дано
5	$a \quad P(a)$	Дано
\vdots	\vdots	
6	$\exists xQ(x)$	
4	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 3, 5-6$
2	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 3-4$

Пример

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Дано
3	$\exists xP(x)$	Дано
5	$a \quad P(a)$	Дано
7	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$\forall E, 1$
8	$Q(a)$	$\rightarrow E, 5, 7$
6	$\exists xQ(x)$	$\exists I, 8$
4	$\exists xQ(x)$	$\exists E, 3, 5-6$
2	$\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	$\rightarrow I, 3-4$

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	
3	$\exists x P(x)$	
5	a	$P(a)$
6	$\neg P(a)$	$\forall E, 1$
7	\perp	$\neg E, 5, 6$
4	\perp	$\exists E, 3, 5-7$
2	$\neg \exists x P(x)$	$\neg I, 3-4$