Формализация утверждений в логике предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

2 октября 2024 г.

МИЭТ

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* —

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — x, y, z_3, $\ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.
- *Термы* —

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — x, y, z_3, $\ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.
- *Термы* — x, $(y + 2) \cdot z$, $\ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.
- *Термы* — $x, (y + 2) \cdot z, \ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.
- *Формулы* —

Сигнатуры, термы, формулы

- *Сигнатура* Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).
- *Переменные* — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.
- *Термы* — $x, (y + 2) \cdot z, \ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.
- *Формулы* — $x = y + 1$; $\forall x\ x \neq x^2\ \ldots$ Вот их значения истина и ложь. *Атомарные формулы* строятся из термов применением предикатных символов, а остальные применением связок $\wedge/\vee/\ldots$ и кванторов $\forall$ и $\exists$ к формулам. Множество формул над Σ: $Form_\Sigma$.

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv$

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv$

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv$

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x \, \forall y$ x любит y $\equiv \exists x \, \forall y \, Loves(x, y)$.
- Ещё пример в той же сигнатуре: «Всякая любовь взаимна».
- Ответ:

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.
- Ещё пример в той же сигнатуре: «Всякая любовь взаимна».
- Ответ: $\forall x\ \forall y\ (Loves(x, y) \to Loves(y, x))$ или

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.
- Ещё пример в той же сигнатуре: «Всякая любовь взаимна».
- Ответ: $\forall x\ \forall y\ (Loves(x, y) \to Loves(y, x))$ или $\forall x\ \forall y\ (Loves(x, y) \leftrightarrow Loves(y, x))$.

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x \, \forall y$ x любит y $\equiv \exists x \, \forall y \, Loves(x, y)$.
- Ещё пример в той же сигнатуре: «Всякая любовь взаимна».
- Ответ: $\forall x \, \forall y \, (Loves(x, y) \to Loves(y, x))$ или $\forall x \, \forall y \, (Loves(x, y) \leftrightarrow Loves(y, x))$.
- И ещё: «Кто-то не любит никого, кто любит его».
- Ответ:

Формализация

- Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.
- Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».
- Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.
- Ещё пример в той же сигнатуре: «Всякая любовь взаимна».
- Ответ: $\forall x\ \forall y\ (Loves(x, y) \to Loves(y, x))$ или $\forall x\ \forall y\ (Loves(x, y) \leftrightarrow Loves(y, x))$.
- И ещё: «Кто-то не любит никого, кто любит его».
- Ответ: $\exists x\ \forall y\ (Loves(y, x) \to \neg Loves(x, y))$.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный):

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\; x = 2 \cdot y$.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$?

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.
- Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.
- Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.
- Задание сложнее: «x — простое число».
- Ответ (возможный):

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.
- Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.
- Задание сложнее: «x — простое число».
- Ответ (возможный): $\forall y\ \forall z\ x = y \cdot z \to y = 1 \lor z = 1$.

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.
- Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.
- Задание сложнее: «x — простое число».
- Ответ (возможный): $\forall y\ \forall z\ x = y \cdot z \to y = 1 \lor z = 1$.
- Неправда! В чём ошибка?

Ещё примеры формализации

- «x делится на 2». Универсум: натуральные числа.
- Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?
- Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!
- Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.
- Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.
- Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.
- Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.
- Задание сложнее: «x — простое число».
- Ответ (возможный): $\forall y\ \forall z\ x = y \cdot z \to y = 1 \vee z = 1$.
- Неправда! В чём ошибка?
  $x \neq 1 \wedge \forall y\ \forall z\ x = y \cdot z \to y = 1 \vee z = 1$.

Формализация со свободными переменными

- У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.
- Может и сразу быть дано такое утверждение.

Формализация со свободными переменными

- У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.
- Может и сразу быть дано такое утверждение.
- В результате должна получиться формула с теми же свободными переменными (и какими угодно связанными).

Формализация со свободными переменными

- У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.
- Может и сразу быть дано такое утверждение.
- В результате должна получиться формула с теми же **свободными** переменными (и какими угодно связанными).
- Если в формуле есть «лишние» свободные переменные или связана одна из тех, что есть в формализуемом утверждении, это заведомо неверный ответ.

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1\ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1\ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?
- $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$.

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1\ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?
- $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$.
- А для случая $\exists x > 1\ x^2 > x$?

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1\ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?
- $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$.
- А для случая $\exists x > 1\ x^2 > x$?
- $\exists x\ (x > 1 \wedge x^2 > x)$.

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1 \ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?
- $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$.
- А для случая $\exists x > 1\ x^2 > x$?
- $\exists x\ (x > 1 \wedge x^2 > x)$.
- Убедитесь, что это работает, если заменить $x > 1$ и $x^2 > 1$ на любые другие

Ограниченные кванторы

- В математических текстах мы часто видим что-то вроде $\forall x > 1\ x^2 > x$. Но по нашему определению это не формула! В чём дело?
- Это сокращённая запись формулы, но какой?
- $\forall x\ (x > 1\ ?\ x^2 > x)$. Какую связку нужно поставить?
- $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$.
- А для случая $\exists x > 1\ x^2 > x$?
- $\exists x\ (x > 1 \wedge x^2 > x)$.
- Убедитесь, что это работает, если заменить $x > 1$ и $x^2 > 1$ на любые другие формулы.

∃!

- $\exists! x \, P(x)$ читается как

Существование и единственность

- $\exists! x\, P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что…»
- P здесь — формула со свободной переменной x.

Существование и единственность

- $\exists! x\, P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что…»
- P здесь — формула со свободной переменной x.
- Но в нашем языке такого символа нет.
- Может быть, $!$ — предикатный символ (или функциональный, или константный)?

Существование и единственность

- $\exists! x\ P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что…»
- P здесь — формула со свободной переменной x.
- Но в нашем языке такого символа нет.
- Может быть, ! — предикатный символ (или функциональный, или константный)? Тогда бы не получилась формула. После квантора может стоять только переменная.

Существование и единственность

- $\exists! x\, P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что…»
- P здесь — формула со свободной переменной x.
- Но в нашем языке такого символа нет.
- Может быть, $!$ — предикатный символ (или функциональный, или константный)? Тогда бы не получилась формула. После квантора может стоять только переменная.
- Это сокращение, как и ограниченные кванторы. Осталось его расшифровать.

Существование и единственность

- $\exists! x\, P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что…»
- P здесь — формула со свободной переменной x.
- Но в нашем языке такого символа нет.
- Может быть, $!$ — предикатный символ (или функциональный, или константный)? Тогда бы не получилась формула. После квантора может стоять только переменная.
- Это сокращение, как и ограниченные кванторы. Осталось его расшифровать.
- $\exists x\, (P(x) \wedge ???)$

Существование и единственность

- $\exists! x\ P(x)$ читается как «Существует единственное x такое, что...»
- P здесь — формула со свободной переменной x.
- Но в нашем языке такого символа нет.
- Может быть, ! — предикатный символ (или функциональный, или константный)? Тогда бы не получилась формула. После квантора может стоять только переменная.
- Это сокращение, как и ограниченные кванторы. Осталось его расшифровать.
- $\exists x\ (P(x) \wedge ???)$
- $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to x = y))$ или
- $(\exists x\ P(x)) \wedge \forall y, z\ (P(y) \wedge P(z) \to y = z)$

Многосортная логика предикатов

- Часто удобно одновременно говорить о нескольких разных типах объектов. Пример: числа, множества чисел и функции в мат. анализе. Тогда
- К сигнатуре добавляется набор *сортов*. Каждый сорт обозначает какое-то множество объектов.
- У функциональных и предикатных символов кроме числа аргументов задан сорт каждого, у функциональных ещё и сорт результата.
- Применение символов к аргументам не тех сортов считается бессмысленным (т.е. его результат не является термом/формулой).
- Каждая переменная имеет сорт: $x : S$. Сорт термов определяется по индукции.
- В моделях есть носитель для каждого сорта.
- Многосортную логику можно свести к односортной, добавив по предикату для каждого сорта, но формулы при этом усложняются.