Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

31 октября 2024 г.

МИЭТ

Правила для логики высказываний

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E$$

- Для $\to$:

$$\frac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \to B}\ \to I \qquad\qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ \to E$$

- Для $\neg$ и $\bot$:

$$\frac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{\neg A}\ \neg I \qquad\qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\ \neg E/\bot I \qquad\qquad \frac{\bot}{A}\ \bot E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I \qquad\qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\ \vee E \qquad\qquad \frac{\begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \vee B}\ \vee I' \qquad \frac{\begin{matrix} \neg B \\ \vdots \\ A \end{matrix}}{A \vee B}\ \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{matrix} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{A}\ RAA \qquad\qquad \frac{A}{A}\ R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.
- $$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\text{произв. } a\\ \vdots\\ A(a)\end{array}}}{\forall x\, A(x)}\ \forall I \quad\text{и}\quad \dfrac{\exists x\, A(x) \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{возьмём } a,\\ \text{т.ч. } A(a)\\ \vdots\\ B\end{array}}}{B}\ \exists E$$

  Здесь a — новый параметр, как в δ.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного a*. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила $\exists E$: мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично $\vee E$.
- Удобно помечать подвывод, вводящий параметр, этим параметром.

- Есть упрощённый вариант $\exists E$, не вводящий подвывод, но он усложняет определение контрмоделей для недоказумых секвенций и мы его не используем.

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\exists x P(x)$	Дано
3	a $P(a)$	Дано
$\vdots$	$\vdots$	
$n-2$	$\exists x Q(x)$	
$n-1$	$\exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–($n-2$)
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
3	$\quad a \quad P(a)$	Дано
4	$\quad\quad P(a) \to Q(a)$	$\forall$E, 1
5	$\quad\quad Q(a)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
$n-2$	$\quad\quad \exists x Q(x)$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–($n-2$)
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
3	$\quad a \quad P(a)$	Дано
4	$\quad\quad \neg P(a)$	$\forall$E, 1
$n-2$	$\quad\quad \bot$	$\neg$E, 3, 4
$n-1$	$\quad \bot$	$\exists$E, 2, 3–$(n-2)$
n	$\neg \exists x P(x)$	$\neg$I, 2–$(n-1)$

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$:

$$
\dfrac{
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)}\,\forall\text{E}}{P(a_1)}\,\wedge\text{E}}}{\forall x\, P(x)}\,\forall I\, a_1
\qquad
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)}\,\forall\text{E}}{Q(a_2)}\,\wedge\text{E}}}{\forall x\, Q(x)}\,\forall I\, a_2
}{(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))}\,\wedge\text{I}
$$

- Можно ли оба раза использовать a_1?

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_1) \wedge Q(a_1)}\,\forall E}{P(a_1)}\,\wedge E}
}{\forall x\, P(x)}\,\forall I\, a_1
\qquad
\dfrac{
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \wedge Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_2) \wedge Q(a_2)}\,\forall E}{Q(a_2)}\,\wedge E}
}{\forall x\, Q(x)}\,\forall I\, a_2
}{(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))}\,\wedge I
$$

- Можно ли оба раза использовать a_1? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	a_1	$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\wedge$E, 2
k	a_2	$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\wedge$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–($k-1$)
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–($n-3$)
n		$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$	$\wedge$I, $n-2$, $n-1$

или

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \land Q(x)$	Дано
2	a_1	$P(a_1) \land Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\land$E, 2
k	a_2	$P(a_2) \land Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\land$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–($k-1$)
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–($n-3$)
n		$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$	$\land$I, $n-2$, $n-1$

или

1		$\forall x\, P(x) \land Q(x)$	Дано
7		$P(a_1) \land Q(a_1)$	$\forall$E, 1
5	a_1	$P(a_1)$	$\land$E, 7
6	a_1	$Q(a_1)$	$\land$E, k
3		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 5–5
4		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, 6–6
2		$(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$	$\land$I, 3, 4

Здесь важно, что строка 7 появилась после 5 и 6, иначе в них нельзя использовать a_1. Если использовать параметры только внутри подвыводов, которые их вводят, эта проблема не возникает.

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y \exists x\ P(x,y)$:

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$:

$$
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{\exists x \forall y\, P(x,y)}\,\text{дано} \qquad \boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall y\, P(a_2,y)}\,\text{для } \exists E}{P(a_2,a_1)}\,\forall\mathrm{E}}{\exists x\, P(x,a_1)}\,\exists\mathrm{I}}}{\exists x\, P(x,a_1)}\,\exists E\; a_2; \forall y\, P(a_2,y) \vdash}}{\forall y \exists x\, P(x,y)}\,\forall I\; a_1
$$

Пример 4 в линейной записи

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$ в линейной записи:

1		$\exists x \forall y\, P(x,y)$	Дано
2	a_1	a_2	$\forall y\, P(a_2,y)$	Дано
3			$P(a_2,a_1)$	$\forall$E, 2
$n-2$			$\exists x\, P(x,a_1)$	$\exists$I, 3
$n-1$		$\exists x\, P(x,a_1)$		$\exists$E, 1, 2–($n-2$)
n	$\forall y \exists x\, P(x,y)$			$\forall$I, 2–($n-1$)

Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре a_1).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

Дополнительное чтение

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).