Натуральная дедукция (естественный вывод) для логики предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

9 ноября 2024 г.

МИЭТ

Правила для логики высказываний

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge E$$

- Для $\rightarrow$:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\rightarrow E$$

- Для $\neg$ и $\perp$:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg A}\neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp}\neg E/\perp I \qquad \frac{\perp}{A}\perp E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}A\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}B\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee E \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \vee B}\vee I' \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg B\\ \vdots\\ A\end{array}}{A \vee B}\vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A}RAA \qquad \frac{A}{A}R$$

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.

Правила натуральной дедукции для кванторов

- Снова сохраняются правила из логики высказываний (на предыдущем слайде).
- Добавляются правила введения и исключения для кванторов.
- Начнём с простых: $\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall E$ и $\dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists I$.

  Здесь t — любой терм без свободных переменных (обычно просто параметр).
- Эти правила — аналоги типа γ в деревьях.
- $$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\text{произв. } a\\ \vdots\\ A(a)\end{array}}}{\forall x\, A(x)}\ \forall I \quad \text{и} \quad \dfrac{\exists x\, A(x) \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{возьмём } a,\\ \text{т.ч. } A(a)\\ \vdots\\ B\end{array}}}{B}\ \exists E$$

  Здесь a — новый параметр, как в δ. Обычно эти параметры не используются вне подвыводов.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.

Пояснения к правилам

- Смысл правила $\forall I$: чтобы доказать $\forall x\, A(x)$, нужно доказать $A(a)$ для *произвольного* a. Произвольность как раз обеспечивается тем, что это новый параметр и о нём ничего неизвестно.
- Смысл правила $\exists E$: мы временно даём название a тому объекту, существование которого утверждается. Правило немного аналогично $\vee E$.
- Удобно помечать подвывод, вводящий параметр, этим параметром.

- Есть упрощённые варианты $\forall I$ и $\exists E$ без подвыводов, но для них существенно сложнее сформулировать точные условия и доказать корректность и полноту. Мы их в этом курсе не рассматриваем.

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x(P(x) \to Q(x)) & \qquad \text{Дано} \\ \hline
\vdots & \vdots & \\
n & \exists x P(x) \to \exists x Q(x) &
\end{array}$$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
$\vdots$	$\quad \vdots$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–($n-1$)

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
3	$\quad a \quad P(a)$	Дано
$\vdots$	$\qquad \vdots$	
$n-2$	$\qquad \exists x Q(x)$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–$(n-2)$
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–$(n-1)$

Пример 1

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
3	$\quad a \quad P(a)$	Дано
4	$\quad\quad P(a) \to Q(a)$	$\forall$E, 1
5	$\quad\quad Q(a)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
$n-2$	$\quad\quad \exists x Q(x)$	
$n-1$	$\quad \exists x Q(x)$	$\exists$E, 2, 3–$(n-2)$
n	$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$	$\Rightarrow$I, 2–$(n-1)$

Пример 2

$$\forall y \neg P(y) \vdash \neg \exists x P(x)$$

1	$\forall y \neg P(y)$	Дано
2	$\quad \exists x P(x)$	Дано
3	$\quad\quad a \quad P(a)$	Дано
4	$\quad\quad\quad \neg P(a)$	$\forall$E, 1
$n-2$	$\quad\quad\quad \bot$	$\neg$E, 3, 4
$n-1$	$\quad \bot$	$\exists$E, 2, 3–$(n-2)$
n	$\neg \exists x P(x)$	$\neg$I, 2–$(n-1)$

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$:

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \land Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_1) \land Q(a_1)}\,\forall\text{E}}{P(a_1)}\,\land\text{E}}}{\forall x\, P(x)}\,\forall I\, a_1 \qquad \dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \land Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_2) \land Q(a_2)}\,\forall\text{E}}{Q(a_2)}\,\land\text{E}}}{\forall x\, Q(x)}\,\forall I\, a_2}{(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))}\,\land\text{I}$$

- Можно ли оба раза использовать a_1?

Пример 3

- Докажем $\forall x\, P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$:

$$
\dfrac{
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \land Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_1) \land Q(a_1)}\,\forall E}{P(a_1)}\,\land E}
}{\forall x\, P(x)}\,\forall I\, a_1
\qquad
\dfrac{
\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \land Q(x)}\,\text{дано}}{P(a_2) \land Q(a_2)}\,\forall E}{Q(a_2)}\,\land E}
}{\forall x\, Q(x)}\,\forall I\, a_2
$$

$$
\dfrac{\forall x\, P(x) \qquad \forall x\, Q(x)}{(\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))}\,\land I
$$

- Можно ли оба раза использовать a_1? Да, так как подвыводы независимы. Но незачем.

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	a_1	произв. a_1	
3		$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\wedge$E, 3
k	a_2	произв. a_2	
k		$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\wedge$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–$(k-1)$
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–$(n-3)$
n		$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$	$\wedge$I, $n-2$, $n-1$

или

Пример 3 в линейной записи

1		$\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$	Дано
2	a_1	произв. a_1	
3		$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall$E, 1
$k-1$		$P(a_1)$	$\wedge$E, 3
k	a_2	произв. a_2	
k		$P(a_2) \wedge Q(a_2)$	$\forall$E, 1
$n-3$		$Q(a_2)$	$\wedge$E, k
$n-2$		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 2–$(k-1)$
$n-1$		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, k–$(n-3)$
n		$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$	$\wedge$I, $n-2$, $n-1$

или

1		$\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$	Дано
9		$P(a_1) \wedge Q(a_1)$	$\forall$E, 1
5	a_1	произв. a_1	
6		$P(a_1)$	$\wedge$E, 9
7	a_1	произв. a_1	
8		$Q(a_1)$	$\wedge$E, k
3		$\forall x\, P(x)$	$\forall$I, 5–6
4		$\forall x\, Q(x)$	$\forall$I, 7–8
2		$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$	$\wedge$I, 3, 4

Здесь важно, что строка 9 появилась после подвыводов 5-6 и 7-8, иначе в них нельзя использовать a_1.

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x, y) \vdash \forall y \exists x\, P(x, y)$:

Пример 4

- Доказываем $\exists x \forall y\ P(x, y) \vdash \forall y \exists x\ P(x, y)$:

$$
\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{\exists x \forall y\ P(x,y)}\,\text{дано} \qquad \boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall y\ P(a_2, y)}\,\text{для } \exists E}{P(a_2, a_1)}\,\forall\mathrm{E}}{\exists x\ P(x, a_1)}\,\exists\mathrm{I}}}{\exists x\ P(x, a_1)}\,\exists E\ a_2; \forall y\ P(a_2, y) \vdash}}{\forall y \exists x\ P(x, y)}\,\forall I\ a_1
$$

Пример 4 в линейной записи

- Доказываем $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$ в линейной записи:

1			$\exists x \forall y\, P(x,y)$	Дано
2	a_1		произв. a_1	
3		a_2	$\forall y\, P(a_2,y)$	Дано
4			$P(a_2,a_1)$	$\forall$E, 3
$n-2$			$\exists x\, P(x,a_1)$	$\exists$I, 4
$n-1$			$\exists x\, P(x,a_1)$	$\exists$E, 1, 3–($n-2$)
n			$\forall y \exists x\, P(x,y)$	$\forall$I, 2–($n-1$)

Построение контрмодели

- Если формулу или секвенцию доказать не получается, можно предположить, что она неверна и попробовать построить контрмодель.
- Для дерева с вынесенными посылками выбираем вершину, а для линейной записи — строку, на которых застряли.
- Все видимые посылки должны быть истинны, а сама выбранная формула ложна.
- Значения предикатов должны быть заданы на всех параметрах этих формул (если они все без параметров, то на одном параметре a_1).
- Может понадобиться добавить ещё параметры.

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x, y, $\ldots$
- Простой пример: докажем $\forall x\, P(x) \vdash \forall x\, P(f(x))$:

Функциональные символы

- Пусть в сигнатуре есть функциональные символы или константы
- Тогда в правилах $\forall E$ и $\exists I$ можно использовать не только параметры, а произвольные термы, построенные из них: $f(a_1)$, $a_3 + 0$ и так далее.
- Но без свободных переменных x, y, $\ldots$
- Простой пример: докажем $\forall x\, P(x) \vdash \forall x\, P(f(x))$:

1	$\forall x\, P(x)$	Дано
2	a | произв. a	
$n-1$	| $P(f(a))$	$\forall$E, 1
n	$\forall x\, P(f(x))$	$\forall$I, 2–($n-1$)

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\dfrac{}{t = t} = I \qquad \dfrac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \qquad \dfrac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t, $A[s]$

Равенство

- Для равенства вводятся новые правила введения и исключения:
- $\dfrac{}{t = t} = I \qquad \dfrac{t = s \quad A[t]}{A[s]} = E \qquad \dfrac{s = t \quad A[t]}{A[s]} = E$
- t и s опять же термы без свободных переменных.
- $A[t]$ — формула, содержащая терм t, $A[s]$ — та же формула с заменой t на s.
- Не обязательно заменять все вхождения t.
- Вместо правил можно было бы ввести аксиомы: $\forall x\ x = x$ и $\forall x \forall y\ (x = y \wedge A[x] \to A[y])$.

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

1	a, b	произв. a, b	
2		$a = b$	Дано
3		$a = a$	=I
$n - 2$		$b = a$	=E $(\underline{a} = a)[a \mapsto b]$, 2, 3
$n - 1$		$a = b \to b = a$	$\Rightarrow$E, 2–$(n - 2)$
n		$\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$	$\forall$I, 1–$(n - 1)$

- Подчёркиванием в $= E$ выделено заменяемое вхождение терма.

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

1	a, b	произв. a, b	
2		$a = b$	Дано
3		$a = a$	=I
$n - 2$		$b = a$	=E $(\underline{a} = a)[a \mapsto b]$, 2, 3
$n - 1$		$a = b \to b = a$	⇒E, 2–$(n - 2)$
n		$\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$	∀I, 1–$(n - 1)$

- Подчёркиванием в $= E$ выделено заменяемое вхождение терма.
- Это даёт допустимое правило

Пример доказательства с равенством

- Докажем симметричность равенства $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$:

1	a, b произв. a, b	
2	$a = b$	Дано
3	$a = a$	=I
$n-2$	$b = a$	=E $(\underline{a} = a)[a \mapsto b]$, 2, 3
$n-1$	$a = b \to b = a$	$\Rightarrow$E, 2–$(n-2)$
n	$\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$	$\forall$I, 1–$(n-1)$

- Подчёркиванием в $=E$ выделено заменяемое вхождение терма.
- Это даёт допустимое правило $\dfrac{t = s}{s = t} = Symm$.

Дополнительное чтение

- Непейвода, 11.2.5 и 11.4.
- Гладкий, глава 10 (менее удобная система записи).
- Много дополнительных задач с решениями на английском можно найти в этом документе.