

## 1 Деревья истинности для логики высказываний

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1.  $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2.  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3.  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
4.  $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
5.  $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
6. Сформулировать правила деревьев истинности для следующих операций: стрелка Пирса  $\downarrow$ , штрих Шеффера  $|$ , равносильность  $\equiv$ , сумма по модулю 2  $\oplus$  (она же исключающее или). Если какие-то из них незнакомы и не получится найти определение, напишите.

## 2 Натуральная дедукция для логики высказываний

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1.  $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ .
2.  $p \rightarrow q \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ .
3.  $p \equiv \neg \neg p$ .
- 4\*.  $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ .
5. Законы де Моргана (2 в обоих направлениях).
6.  $\vdash p \vee \neg p$  (использовать RAA и закон де Моргана для отрицания дизъюнкции).
7.  $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ .
- 8\*.  $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  (есть подсказка).
- 9\*. Составить правила введения и исключения для равносильности, суммы по модулю 2, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

## 3 Формализация утверждений в логике предикатов

Перевести на язык логики предикатов:

1. Мне скучно.
2. Иванов и Петров играют в шахматы.
3. Иванов и Петров слушают лекцию.
4. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.
5. Слон Бимбо больше собаки Ланды.
6. Кошки бывают только белые и серые.
7. Среднее арифметическое любых двух чисел больше их среднего геометрического (не используйте операции деления и извлечения корня, так как они не везде определены).
8. Уравнение  $x^2 - 3x + 2 = 0$  не имеет решений.
9. Функция  $f$  непрерывна в точке  $a$  (используйте определение предела через  $\varepsilon$  и  $\delta$ ).
10. Точки  $A, B, C$  являются вершинами равнобедренного треугольника.

11. Функция  $f$  принимает в том числе такие комплексные значения, которые не являются действительными.
12. У каждого положительного действительного числа есть ровно один положительный квадратный корень.
13. Число  $x$  простое (для групп, где не сделали на занятии).
14. Есть сколько угодно большие простые числа.
15. Последовательность  $a_0, a_1, \dots$  имеет более одной предельной точки.

## 4 Деревья истинности для логики предикатов

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1.  $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
2.  $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
3.  $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$
4.  $\neg \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\exists x A(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
5.  $\forall x \exists y P(x, y), \exists x \forall y Q(x, y) \vdash \exists x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$

Следующие формализовать как секвенции с двумя посылками:

6. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.
7. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.
8. Если бинарное отношение транзитивно и симметрично, то оно рефлексивно (здесь квантора по бинарным отношениям нет, просто обозначьте его как  $R(x, y)$ ).

Задачи с равенством и с функциями:

9.  $\forall x \exists! y f(x) = y$
10. Эквивалентность двух формализаций  $\exists! x P(x)$ :  
 $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge \forall y \forall z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z)$
- 11\*.  $\forall x \forall y (P(f(x), y) \vee Q(x, y)), \forall x \forall y (\neg P(x, g(y)) \vee Q(x, y)) \vdash \exists x \exists y Q(x, y)$

## 5 Натуральная дедукция для логики предикатов

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1.  $(\forall x P(x)) \rightarrow (\exists x P(x))$
2.  $\forall x P(x), \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$
3.  $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ .
4.  $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$
5.  $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
6.  $\forall x \exists y P(x, y), \exists x \forall y Q(x, y) \vdash \exists x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$
7. Убедитесь, что  $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$  нельзя доказать и постройте контрмодель.
8.  $\exists x P(f(x)) \vdash \exists x P(x)$
9.  $\forall x \exists! y f(x) = y$  (если не получится, сделайте упрощённый вариант с  $\exists y$ )

$$10. \forall x \forall y P(f(x), y), \forall x \forall y \neg P(x, g(y)) \vdash \perp$$

11\*. Эквивалентность двух формализаций  $\exists!x P(x)$ :

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge \forall y \forall z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z)$$

$$12*. \exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$$

$$13*. \forall x (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)), \forall x \exists y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$$

Для 12 и 13 есть подсказки.

## Подсказки

2.8: можно использовать задачу 7 или закон исключённого третьего.

5.12: можно использовать закон исключённого третьего для  $\forall y P(y)$ .

5.13: так как  $\forall x \exists y R(x, y)$ , то для этого  $y$  также верно  $R(y, x)$ , а из  $R(x, y)$  и  $R(y, x)$  заключаем  $R(x, x)$ .