1 Деревья истинности для логики высказываний

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $((p \to q) \to p) \to p$
4. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
5. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$
6. Сформулировать правила деревьев истинности для следующих операций: стрелка Пирса $\downarrow$, штрих Шеффера $|$, равносильность $\equiv$, сумма по модулю 2 $\oplus$ (она же исключающее или). Если какие-то из них незнакомы и не получится найти определение, напишите.

2 Натуральная дедукция для логики высказываний

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.
2. $p \to q \wedge r \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$.
3. $p \equiv \neg\neg p$.

4*. $p \wedge q \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$.

5. Законы де Моргана (2 в обоих направлениях).
6. $\vdash p \vee \neg p$ (использовать RAA и закон де Моргана для отрицания дизъюнкции).
7. $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

8*. $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$ (есть подсказка).

9*. Составить правила введения и исключения для равносильности, суммы по модулю 2, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

3 Формализация утверждений в логике предикатов

Перевести на язык логики предикатов:

1. Мне скучно.
2. Иванов и Петров играют в шахматы.
3. Иванов и Петров слушают лекцию.
4. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.
5. Слон Бимбо больше собаки Ланды.
6. Кошки бывают только белые и серые.
7. Среднее арифметическое любых двух чисел больше их среднего геометрического (не используйте операции деления и извлечения корня, так как они не везде определены).
8. Уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ не имеет решений.
9. Функция f непрерывна в точке a (используйте определение предела через ε и δ).
10. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.

11. Функция f принимает в том числе такие комплексные значения, которые не являются действительными.

12. У каждого положительного действительного числа есть ровно один положительный квадратный корень.

13. Число x простое (для групп, где не сделали на занятии).

14. Есть сколько угодно большие простые числа.

15. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ имеет более одной предельной точки.

4 Деревья истинности для логики предикатов

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

2. $\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \vdash (\exists x\ P(X)) \lor (\forall x\ Q(x))$

3. $\exists x\ P(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

4. $\neg\exists x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash (\exists x\ A(x)) \land (\forall x\ Q(x))$

5. $\forall x \exists y\ P(x,y), \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \land Q(x,y))$

   Следующие формализовать как секвенции с двумя посылками:

6. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.

7. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.

8. Если бинарное отношение транзитивно и симметрично, то оно рефлексивно (здесь квантора по бинарным отношениям нет, просто обозначьте его как $R(x,y)$).

   Задачи с равенством и с функциями:

9. $\forall x \exists! y\ f(x) = y$

10. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
    $\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (P(y) \to x = y)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land \forall y \forall z\ (P(y) \land P(z) \to y = z)$

11*. $\forall x \forall y\ (P(f(x), y) \lor Q(x,y)),\ \forall x \forall y\ (\neg P(x, g(y)) \lor Q(x,y)) \vdash \exists x \exists y\ Q(x,y)$

5 Натуральная дедукция для логики предикатов

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ P(x))$

2. $\forall x\ P(x), \exists x\ (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\ Q(x)$

3. $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.

4. $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash (\exists x\ P(x)) \land (\exists x\ Q(x))$

5. $\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \vdash (\exists x\ P(x)) \lor (\forall x\ Q(x))$

6. $\forall x \exists y\ P(x,y),\ \exists x \forall y\ Q(x,y) \vdash \exists x \exists y\ (P(x,y) \land Q(x,y))$

7. Убедитесь, что $\exists x\ P(x) \vdash \forall x\ P(x)$ нельзя доказать и постройте контрмодель.

8. $\exists x\ P(f(x)) \vdash \exists x\ P(x)$

9. $\forall x \exists! y\ f(x) = y$ (если не получится, сделайте упрощённый вариант с $\exists y$)

10. $\forall x \forall y\ P(f(x), y),\ \forall x \forall y\ \neg P(x, g(y)) \vdash \bot$

11*. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x\ P(x)$:
$\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (P(y) \to x = y)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land \forall y \forall z\ (P(y) \land P(z) \to y = z)$

12*. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$

13*. $\forall x\ (R(x, y) \to R(y, x)),\quad \forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z)),\quad \forall x \exists y\ R(x, y) \vdash \forall x\ R(x, x)$

Для 12 и 13 есть подсказки.

6 Теория множеств: функции

1. Проверьте, является ли $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n^2+n+1$ а) вложением, б) наложением, в) биекцией.

2. Проверьте, является ли $f : \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$ а) вложением, б) наложением, в) биекцией.

3. Проверьте, является ли $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x+\sin x$ а) вложением, б) наложением, в) биекцией.

4. Пусть A, B множества. Рассмотрим $i : A \to B,\ i(x) = x$. Для каких A, B i будет а) функцией? б) вложением? в) наложением? г) биекцией?

5. Пусть A, B множества. Рассмотрим $f : A \times B \to B \times A,\ f(x, y) = (y, x)$. Показать, что это всегда биекция.

6. Пусть A множество. Рассмотрим $f : A \to \mathcal{P}(A),\ f(x) = \{x\}$. Для каких A f будет а) функцией? б) вложением? в) наложением? г) биекцией?

7. Пусть A, B, C множества, $f : A \to B, g : B \to C$ функции. Докажите:

   а) Если f и g вложения, то $g \circ f = x \mapsto g(f(x))$ вложение.

   б) Если f и g наложения, то $g \circ f$ наложение.

8. Пусть A, B, C, D множества, $f : A \to B, g : C \to D$ вложения.

   а) Если $A \cup B = C \cup D = \varnothing$, найдите вложение $h : A \cup B \to C \cup D$. Что изменится без этого дополнительного условия?

   б) Найдите вложение $h : A \times B \to C \times D$.

   в) Покажите, что если f и g наложения (и не обязательно вложения), то h из обоих предыдущих пунктов будут наложениями.

9. Пусть A множество. Найти биекцию между $\mathcal{P}(A)$ и $A \to \{0, 1\}$.

10*. Пусть A, B непустые множества, $f : A \to B$ функция. Докажите:

   а) $\exists g : B \to A\ \forall x : A\ g(f(x)) = x$ (g левая обратная к f) $\iff$ f вложение.

   б) $\exists g : B \to A\ \forall y : B\ f(g(y)) = y$ (g правая обратная к f) $\iff$ f наложение.

   в) Если $g, h : B \to A$, g левая обратная к f, и h правая обратная к f, то $g = h$.

11*. Пусть A, B, C множества. Найдите биекцию между $A \to (B \to C)$ и $A \times B \to C$.

12*. Определение упорядоченной пары по Куратовскому: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

   а) Докажите, что $(a, b) = (c, d) \iff a = c \land b = d$. Нужно учесть, что любые из a, b, c, d могут быть равны между собой.

   б) Определим $pr_1(A) = \bigcup \bigcap A$. Докажите, что $pr_1((a, b)) = a$. (Определение второй проекции существенно сложнее.)

Для 9 и 11 есть подсказки.

7 Теория множеств: мощности

1. Найдите мощность множества всех многочленов с рациональными коэффициентами.
2. Найдите мощность множества всех алгебраических чисел (действительных корней многочленов с рациональными коэффициентами). Используйте предыдущую задачу.
3. Докажите, что мощность любого отрезка равна мощности любого интервала.
4. Докажите, что мощности из предыдущей задачи равны $|\mathbb{R}|$.
5. Найдите мощность множества всех прямых на плоскости.
6. Найдите мощность множества всех невырожденных треугольников на плоскости.
7. Найдите мощность множества иррациональных чисел.
8. Найдите мощность множества строго возрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел.
9. Найдите мощность множества строго убывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел.
10. Найдите мощность множества нестрого убывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел.
11. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N} \to \{0, 1\}|$.
12. Найдите мощность множества всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
13. Найдите мощность множества всех вложений $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

14*. Докажите, что $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$ (построением явной биекции).

15*. Докажите, что мощность множества непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равна $\mathfrak{c}$.

Для 5 и 15 есть подсказки.

8 Теория множеств: ординалы

1. Докажите:
   а) Если A и B частично упорядочены, то $A + B$ и $A \times B$ частично упорядочены.
   б) Если A и B линейно упорядочены, то $A + B$ и $A \times B$ линейно упорядочены.
   в) Если A и B фундированы, то $A + B$ и $A \times B$ фундированы.
2. Приведите к нормальной форме Кантора: $(\omega + 2)(\omega + 1)\omega$.
3. Приведите к нормальной форме Кантора: $(\omega + 2)^3$.
4. Приведите к нормальной форме Кантора: $(\omega + 1)^{\omega+1}$.
5. Найдите контрпример к утверждению $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
6. Докажите, что $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
7. Докажите, что если $\alpha < \beta$, то
   а) $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
   б) $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (но не обязательно $<$).

8*. Докажите, что $\alpha + \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \omega \leq \beta$.

9*. Докажите, что:
   а) Ординалы вида ω^α нельзя представить как сумму двух меньших ординалов.
   б) Любые другие положительные ординалы можно так представить.

Подсказки

2.8: можно использовать задачу 7 или закон исключённого третьего.

5.12: можно использовать закон исключённого третьего для $\forall y\ P(y)$.

5.13: так как $\forall x \exists y\ R(x,y)$, то для этого y также верно $R(y,x)$, а из $R(x,y)$ и $R(y,x)$ заключаем $R(x,x)$.

6.9: $f : \mathcal{P}(A) \to (A \to \{0,1\}),\ f(B) = x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$. Остаётся доказать, что это действительно биекция (можно найти обратную функцию).

6.11: $f : (A \to (B \to C)) \to (A \times B \to C),\ f(g) = (x,y) \mapsto g(x)(y)$. Остаётся доказать, что это действительно биекция (можно найти обратную функцию).

7.5: точно ли вы задали произвольные прямые, включая параллельные обеим осям?

7.15: если две непрерывные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ совпадают на рациональных точках, то они совпадают на всей прямой (почему?).