Теория множеств
Вполне упорядоченные множества и аксиома выбора

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

21 ноября 2023 г.

МИЭТ

Отношения порядка

- Напомню: бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве A называется *отношением (частичного, нестрогого) порядка*, если оно:
  - Рефлексивно: $\forall x : A\ x \preccurlyeq x$
  - Антисимметрично: $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \to x = y$
  - Транзитивно: $\forall x, y, z : A\ x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z$
- Если ещё $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$, то это *отношение линейного порядка*.
- Пара $(A, \preccurlyeq)$ называется *частично (соотв. линейно) упорядоченным множеством*, сокращённо ЧУМ (ЛУМ).
- $x \prec y$, если $x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$.

Отношения порядка

- Напомню: бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве A называется *отношением (частичного, нестрогого) порядка*, если оно:
  - Рефлексивно: $\forall x : A\ x \preccurlyeq x$
  - Антисимметрично: $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \to x = y$
  - Транзитивно: $\forall x, y, z : A\ x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z$
- Если ещё $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$, то это *отношение линейного порядка*.
- Пара $(A, \preccurlyeq)$ называется *частично (соотв. линейно) упорядоченным множеством*, сокращённо ЧУМ (ЛУМ).
- $x \prec y$, если $x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$.
- x — *наименьший элемент* A, если $\forall y : A\ x \preccurlyeq y$, и *минимальный*, если $\neg\exists y : A\ y \prec x$.
- Для ЛУМ минимальный и наименьший одно и то же, а для ЧУМ нет.

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.
- Если A — ЛУМ из n элементов, то оно изоморфно $\{1, \ldots, n\}$.

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.
- Если A — ЛУМ из n элементов, то оно изоморфно $\{1, \ldots, n\}$.
- Доказательство: в A есть наименьший элемент. Обозначим его a_1 и сопоставим с 1. $A \setminus \{a_1\}$ снова конечно и линейно упорядочено.

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.
- Если A — ЛУМ из n элементов, то оно изоморфно $\{1, \dots, n\}$.
- Доказательство: в A есть наименьший элемент. Обозначим его a_1 и сопоставим с 1. $A \setminus \{a_1\}$ снова конечно и линейно упорядочено. Выберем из него наименьший a_2 и сопоставим с 2. И т.д.

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.
- Если A — ЛУМ из n элементов, то оно изоморфно $\{1, \ldots, n\}$.
- Доказательство: в A есть наименьший элемент. Обозначим его a_1 и сопоставим с 1. $A \setminus \{a_1\}$ снова конечно и линейно упорядочено. Выберем из него наименьший a_2 и сопоставим с 2. И т.д.
- Следствие: два равномощных конечных ЛУМ изоморфны.
- Для бесконечных это не так! Например,

Порядковые изоморфизмы

- Биекция $f : A \to B$ между двумя ЧУМ называется *порядковым изоморфизмом*, если $\forall x, y : A\ x \preccurlyeq_A y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$.
- В этой лекции все изоморфизмы порядковые, дальше это слово опускаем.
- Если A — ЛУМ из n элементов, то оно изоморфно $\{1, \ldots, n\}$.
- Доказательство: в A есть наименьший элемент. Обозначим его a_1 и сопоставим с 1. $A \setminus \{a_1\}$ снова конечно и линейно упорядочено. Выберем из него наименьший a_2 и сопоставим с 2. И т.д.
- Следствие: два равномощных конечных ЛУМ изоморфны.
- Для бесконечных это не так! Например, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не изоморфны (почему?).

Фундированные и вполне упорядоченные множества

- Вспомните *принцип полной индукции* на $\mathbb{N}$:

Фундированные и вполне упорядоченные множества

- Вспомните *принцип полной индукции* на $\mathbb{N}$: Пусть $P(x)$ свойство натуральных чисел, и можно доказать, что если оно верно для всех $y \prec x$, то оно верно для x. Тогда оно верно для всех натуральных чисел. Формально: $\forall x\ (\forall y < x\ P(y)) \to P(x)) \to \forall x\ P(x)$

Фундированные и вполне упорядоченные множества

- Вспомните *принцип полной индукции* на $\mathbb{N}$: Пусть $P(x)$ свойство натуральных чисел, и можно доказать, что если оно верно для всех $y \prec x$, то оно верно для x. Тогда оно верно для всех натуральных чисел. Формально: $\forall x\ (\forall y < x\ P(y)) \to P(x)) \to \forall x\ P(x)$
- Для каких ещё ЧУМ он выполняется?
- Теорема: следующие 3 утверждения равносильны для любого ЧУМ A:
    1. В любом непустом подмножестве A есть минимальный элемент.
    2. В A нет бесконечных убывающих последовательностей $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$.
    3. Принцип полной индукции для A.
- Такое ЧУМ называется *фундированным*.

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — непустое множество без минимального элемента.

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — непустое множество без минимального элемента.
- $2 \Rightarrow 1$: Если B — непустое подмножество A без минимального элемента, то

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — непустое множество без минимального элемента.
- $2 \Rightarrow 1$: Если B — непустое подмножество A без минимального элемента, то возьмём его произвольный элемент и обозначим a_1.

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — непустое множество без минимального элемента.
- $2 \Rightarrow 1$: Если B — непустое подмножество A без минимального элемента, то возьмём его произвольный элемент и обозначим a_1. Так как он не минимальный, то есть $a_2 \prec a_1$.

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ нет бесконечных убывающих последовательностей

- $1 \Rightarrow 2$: Если $a_1 \succ a_2 \succ \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — непустое множество без минимального элемента.
- $2 \Rightarrow 1$: Если B — непустое подмножество A без минимального элемента, то возьмём его произвольный элемент и обозначим a_1. Так как он не минимальный, то есть $a_2 \prec a_1$. Аналогично есть $a_3 \prec a_2 \ldots$

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ принцип полной индукции

- $1 \Rightarrow 3$: Пусть $P(x)$ — свойство на A, для которого верно $\forall x\ (\forall y \prec x\ P(y)) \to P(x)$, но не $\forall x\ P(x)$. Рассмотрим $B = \{x : A \mid \neg P(x)\}$. Оно непусто. Так как A фундировано, в B есть минимальный элемент b. Но тогда

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ принцип полной индукции

- $1 \Rightarrow 3$: Пусть $P(x)$ — свойство на A, для которого верно $\forall x\ (\forall y \prec x\ P(y)) \to P(x)$, но не $\forall x\ P(x)$. Рассмотрим $B = \{x : A \mid \neg P(x)\}$. Оно непусто. Так как A фундировано, в B есть минимальный элемент b. Но тогда $\forall x : A\ x \prec b \Rightarrow x \notin B \Rightarrow P(x)$ и по предположению ППИ $P(b)$, то есть $b \notin B$. Противоречие!

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ принцип полной индукции

- $1 \Rightarrow 3$: Пусть $P(x)$ — свойство на A, для которого верно $\forall x\ (\forall y \prec x\ P(y)) \to P(x)$, но не $\forall x\ P(x)$. Рассмотрим $B = \{x : A \mid \neg P(x)\}$. Оно непусто. Так как A фундировано, в B есть минимальный элемент b. Но тогда $\forall x : A\ x \prec b \Rightarrow x \notin B \Rightarrow P(x)$ и по предположению ППИ $P(b)$, то есть $b \notin B$. Противоречие!
- $3 \Rightarrow 1$: Если B — подмножество A без минимального элемента, то рассмотрим $P(x) \Leftrightarrow x \notin B$. Имеем $(\forall y \prec x\ P(y)) \Rightarrow (\forall y \prec x\ y \notin B) \Rightarrow x \notin B$ (иначе x минимальный в B) $\Rightarrow P(x)$

Множество фундировано $\Leftrightarrow$ принцип полной индукции

- $1 \Rightarrow 3$: Пусть $P(x)$ — свойство на A, для которого верно $\forall x\ (\forall y \prec x\ P(y)) \to P(x)$, но не $\forall x\ P(x)$. Рассмотрим $B = \{x : A \mid \neg P(x)\}$. Оно непусто. Так как A фундировано, в B есть минимальный элемент b. Но тогда $\forall x : A\ x \prec b \Rightarrow x \notin B \Rightarrow P(x)$ и по предположению ППИ $P(b)$, то есть $b \notin B$. Противоречие!
- $3 \Rightarrow 1$: Если B — подмножество A без минимального элемента, то рассмотрим $P(x) \Leftrightarrow x \notin B$. Имеем $(\forall y \prec x\ P(y)) \Rightarrow (\forall y \prec x\ y \notin B) \Rightarrow x \notin B$ (иначе x минимальный в B) $\Rightarrow P(x)$. По ППИ $\forall x\ P(x) \Rightarrow \forall x\ x \notin B \Rightarrow B$ пусто.

Операции над ЧУМ

- Любое подмножество B ЧУМ A имеет *индуцированный порядок*.
- Если A и B непересекающиеся ЧУМ, то $A + B$ это $A \cup B$ с порядком

$$x \prec_{A+B} y \Leftrightarrow (x, y \in A \wedge x \prec_A y) \vee (x, y \in B \wedge x \prec_B y) \vee (x \in A \wedge y \in B)$$

- Порядок на $A \times B$ лексикографический, то есть

$$(a_1, b_1) \prec_{A \times B} (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \prec_A a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \prec_B b_2)$$

- Если A и B фундированы и/или линейны, то $A + B$ и $A \times B$ тоже. Доказательство как упражнение.

Вполне упорядоченные множества

- Фундированное ЛУМ называется *вполне упорядоченным*.
- Некоторые простые свойства:
- Любое непустое ВУМ имеет наименьший элемент.
- Если элемент x ВУМ не наибольший, то есть непосредственно следующий за ним $S(x)$ (или $x + 1$).
- У не-наименьшего элемента ВУМ может не быть непосредственно предыдущего. Такой элемент называется *предельным*.
- Любое ограниченное сверху подмножество ВУМ имеет супремум (точную верхнюю грань).
- Любое подмножество ВУМ само вполне упорядочено.

Начальные отрезки

- $B \subseteq A$ — *начальный отрезок* A, если любой элемент B меньше любого элемента $A \setminus B$. Равносильно: все элементы, меньшие какого-то элемента B, лежат в B.
- Это определение имеет смысл для любого ЛУМ, но нам интересно только для ВУМ.
- В том числе $\varnothing$ и A — начальные отрезки A.
- Если все элементы множества D — начальные отрезки ВУМ A, то $\bigcup D$ тоже начальный отрезок A.
- B — собственный начальный отрезок ВУМ A (т.е. $B \neq A$) $\Leftrightarrow \exists x : A\ B = \{y : A \mid y \prec x\}$. Обозначим $\{y : A \mid y \prec x\}$ как $A_{\prec x}$.
- Если B и C начальные отрезки ВУМ A, то $B \subseteq C \vee C \subseteq B$.

Теоремы о сравнении ВУМ

- Теорема: пусть A и B ВУМ. Тогда либо A изоморфно какому-то начальному отрезку B (возможно, самому B), либо наоборот.
- Теорема: ВУМ A никогда не изоморфно своему собственному начальному отрезку B.
- Доказательства: сейчас давать не буду, можно найти в книге Шеня-Верещагина.
- Следствие: любые ВУМ A и B либо изоморфны, либо ровно одно из них изоморфно собственному начальному отрезку другого.

Аксиома выбора

- Пусть A произвольное множество, все элементы которого — непустые множества. Тогда существует такая *функция выбора* $ch_A : A \to \bigcup A$, что $\forall B : A\ ch_A(B) \in B$.
- Эта аксиома не входила в исходную теорию Цермело–Френкеля ZF, её добавление даёт ZFC, которая сейчас является стандартным основанием для математики.
- Заметьте, что «дано непустое множество A, выберем в нём элемент» — не применение аксиомы выбора. Она нужна, чтобы сделать одновременно бесконечно много таких выборов и зафиксировать их.
- Эквивалентно: декартово произведение бесконечного множества непустых множеств непусто (его элементы и есть функции выбора на этом множестве).

Теорема Цермело

- На любом множестве A можно задать отношение вполне порядка $\preccurlyeq$.
- Идея доказательства (в подробностях разбирать не будем):
  1. Возьмём функцию выбора c на $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$.
  2. $a_0 = c(A)$ — минимальный элемент нашего порядка.
  3. Следующий за ним будет $c(A \setminus \{a_0\})$.
  4. И так далее: если уже определён порядок на B, то следующим элементом будет $c(A \setminus B)$.
  5. Этот процесс в конце концов исчерпает всё A, так как для любого $B \subsetneq A$ его можно продолжить.
- Примечание: например, на $\mathbb{R}$ задать такое отношение порядка явно (формулой ZFC с двумя свободными переменными) не получается.
- Следствие: любые два множества сравнимы по мощности (одно из них равномощно какому-то подмножеству другого).

Лемма Цорна

- *Цепь* в ЧУМ — такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы.
- Если в ЧУМ A любая цепь B имеет верхнюю грань ($\exists x : A \; \forall y : B \; y \preccurlyeq x$), то в A есть максимальный элемент.
- (Вспомните разницу между максимальным и наибольшим!)
- Доказательство здесь ещё сложнее.

Лемма Цорна

- *Цепь* в ЧУМ — такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы.
- Если в ЧУМ A любая цепь B имеет верхнюю грань ($\exists x : A\ \forall y : B\ y \preccurlyeq x$), то в A есть максимальный элемент.
- (Вспомните разницу между максимальным и наибольшим!)
- Доказательство здесь ещё сложнее.
- Можно немного усилить и показать, что для любого x в таком A есть максимальный y такой, что $y \succcurlyeq x$.

Лемма Цорна

- *Цепь* в ЧУМ — такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы.
- Если в ЧУМ A любая цепь B имеет верхнюю грань ($\exists x : A\ \forall y : B\ y \preccurlyeq x$), то в A есть максимальный элемент.
- (Вспомните разницу между максимальным и наибольшим!)
- Доказательство здесь ещё сложнее.
- Можно немного усилить и показать, что для любого x в таком A есть максимальный y такой, что $y \succcurlyeq x$.

- Типичное применение леммы Цорна: в любом линейном пространстве L есть базис.

Лемма Цорна

- *Цепь* в ЧУМ — такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы.
- Если в ЧУМ A любая цепь B имеет верхнюю грань ($\exists x : A \ \forall y : B \ y \preccurlyeq x$), то в A есть максимальный элемент.
- (Вспомните разницу между максимальным и наибольшим!)
- Доказательство здесь ещё сложнее.
- Можно немного усилить и показать, что для любого x в таком A есть максимальный y такой, что $y \succcurlyeq x$.

- Типичное применение леммы Цорна: в любом линейном пространстве L есть базис.
- Для доказательства возьмём $A = \{S \subset L \mid S$ линейно независимо$\}$ с порядком по включению.
- Верхняя грань любой цепи в нём — объединение.
- Максимальный элемент и будет базисом.

Эквивалентные формы аксиомы выбора

- Аксиома выбора, теорема Цермело и лемма Цорна эквивалентны (т.е. например, в *ZF* без АВ можно доказать, что из теоремы Цермело следует аксиома выбора:

Эквивалентные формы аксиомы выбора

- Аксиома выбора, теорема Цермело и лемма Цорна эквивалентны (т.е. например, в ZF без AB можно доказать, что из теоремы Цермело следует аксиома выбора: введём вполне порядок на $\bigcup A$ и выбираем из каждого $B \in A$ минимальный элемент в смысле этого порядка).
- Другие эквивалентные им утверждения:
- У каждого наложения есть правая обратная функция.
- В любом ЧУМ существует максимальная цепь (принцип максимума Хаусдорфа).
- Любое бесконечное A равномощно $A \times A$.
- В любом векторном пространстве есть базис.

Ординалы

- *Ординалы* можно определить по аналогии с мощностями: это классы эквивалентности ВУМ по отношению изоморфности (*порядковые типы*).
- То есть у любого ВУМ есть ординал, и ординалы изоморфных ВУМ равны.
- Но есть более удобное индуктивное определение:
  - $0 = \varnothing$ это ординал.
  - Если α ординал, то $\alpha + 1 = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ тоже ординал.
  - Если A множество, все элементы которого ординалы, то $\sup A = \bigcup A$ тоже ординал.
- *Предельный ординал* — такой, который не 0 и не следует ни за каким ординалом.
- То есть его можно получить только как супремум.
- С помощью аксиомы выбора, можно доказать, что любое ВУМ изоморфно одному из таких ординалов.
- Класс всех ординалов обозначается *Ord*.

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots =$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$.
- $\ldots$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega \cdot 2 = \sup\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\} =$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega \cdot 2 = \sup\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.
- $\omega \cdot 2 + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2\}$.
- $\ldots$

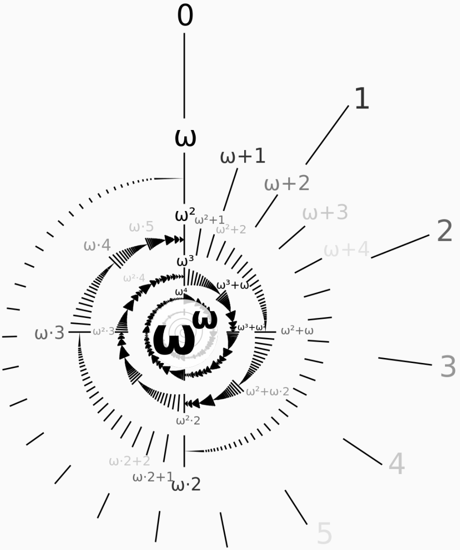
Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega \cdot 2 = \sup\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.
- $\omega \cdot 2 + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2\}$.
- $\ldots$
- $\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots\} =$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)

- $0 = \varnothing$.
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
- $2 = S(1) = \{0, 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = 0 \cup 1 \cup 2 \cup \ldots = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$.
- $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$.
- $\ldots$
- $\omega \cdot 2 = \sup\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.
- $\omega \cdot 2 + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2\}$.
- $\ldots$
- $\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots\} =$
  $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots\}$.
- $\ldots$

Структура счётных ординалов (до ω^ω)



Порядок на ординалах

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Каждый ординал равен множеству всех ординалов, меньших него: $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$.
- Легко доказать, что $\leq$ действительно отношение порядка: рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. И линейно.
- Более того, ординалы вполне упорядочены: в любом классе (не только множестве) ординалов есть наименьший.

Парадокс Бурали-Форти

- Ограничение «если A множество» в определении ординала-супремума существенное: множества всех ординалов не существует.
- Допустим, что Ord множество. Тогда $O = \sup Ord + 1$ ординал, но это не элемент Ord. Почему?

Парадокс Бурали-Форти

- Ограничение «если A множество» в определении ординала-супремума существенное: множества всех ординалов не существует.
- Допустим, что Ord множество. Тогда $O = \sup Ord + 1$ ординал, но это не элемент Ord. Почему?
- Например, потому что он больше всех элементов Ord.

Парадокс Бурали-Форти

- Ограничение «если A множество» в определении ординала-супремума существенное: множества всех ординалов не существует.
- Допустим, что Ord множество. Тогда $O = \sup Ord + 1$ ординал, но это не элемент Ord. Почему?
- Например, потому что он больше всех элементов Ord.
- Но тогда получится, что Ord содержит не все ординалы. Пришли к противоречию!

Арифметика над ординалами

- Операции над ординалами определяются по рекурсии:
    - $\alpha + 0 = \alpha$.
    - $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.
    - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta | \beta \in A\}$.
-
    - $\alpha \cdot 0 = 0$.
    - $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$.
    - $\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha \cdot \beta | \beta \in A\}$.
-
    - $\alpha^0 = 1$.
    - $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
    - $\alpha^{\sup A} = \sup\{\alpha^\beta | \beta \in A\}$.

Арифметика над ординалами

- Например, $1 + \omega = 1 + \sup\{0, 1, 2, \ldots\}$

Арифметика над ординалами

- Например, $1 + \omega = 1 + \text{sup}\{0, 1, 2, \dots\} = \text{sup}\{1, 2, 3, \dots\} = \bigcup\{1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, \dots\} = \omega$.
- Многие привычные свойства арифметики для ординалов сохраняются, но как видим, не все.

Кардиналы

- TODO
- Определение как частного случая ординала
- Определение $\aleph_\alpha$

Гипотеза континуума

- TODO
- Гипотеза континуума
- Обобщённая гипотеза континуума
- Независимость от *ZFC*