

1 Деревья истинности для логики высказываний

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
4. $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
5. $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
6. Сформулировать правила деревьев истинности для следующих операций: стрелка Пирса \downarrow , штрих Шеффера $|$, равносильность \equiv , сумма по модулю 2 \oplus (она же исключающее или). Если какие-то из них незнакомы и не получится найти определение, напишите.

2 Натуральная дедукция для логики высказываний

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.
2. $p \rightarrow q \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.
3. $p \equiv \neg \neg p$.
4. $p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$.
5. Законы де Моргана (2 в обоих направлениях).
6. $\vdash p \vee \neg p$ (использовать RAA и закон де Моргана для отрицания дизъюнкции).
7. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
- 8*. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (подсказка: можно использовать задачу 7 или закон исключённого третьего).
- 9*. Составить правила введения и исключения для равносильности, суммы по модулю 2, стрелки Пирса и штриха Шеффера.

3 Формализация утверждений в логике предикатов

Перевести на язык логики предикатов:

1. Мне скучно.
2. Иванов, Петров и Васильев играют в домино.
3. Иванов, Петров и Васильев слушают лекцию.
4. Среднее арифметическое x и y больше их среднего геометрического.
5. 5 не является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.
6. Слон Бимбо больше собаки Ланды.
7. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.
8. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.
9. Кошки бывают только белые и серые.
10. Функция f принимает в том числе такие комплексные значения, которые не являются действительными.

11. У каждого положительного действительного числа есть ровно один положительный квадратный корень.
12. Число x простое (для групп, где не сделали на занятии).
13. Есть сколько угодно большие простые числа.

4 Деревья истинности для логики предикатов

Доказать или опровергнуть с помощью деревьев истинности:

1. $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
2. $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
3. $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$
4. $\neg \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\exists x A(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
5. $\forall x \exists y P(x, y), \exists x \forall y Q(x, y) \vdash \exists x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$

Следующие формализовать как секвенции с двумя посылками:

6. Не все политики мошенники. Все мошенники умны. Значит, некоторые политики глупы.
7. Те, кто что-то учил, решили некоторые задачи. Андрей не решил ни одной. Значит, он не учил ничего.
8. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x P(x)$:
 $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge \forall y, z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z)$

5 Натуральная дедукция для логики предикатов

Доказать с помощью натуральной дедукции:

1. Правила де Моргана для кванторов (любые 2 из 4).
2. $\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$
3. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$
4. $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
5. $\forall x \exists y P(x, y), \exists x \forall y Q(x, y) \vdash \exists x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$
6. Эквивалентность двух формализаций $\exists! x P(x)$:
 $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge \forall y, z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z)$
- 7*. $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$