Введение в логику предикатов

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов
31 октября 2024 г.
МИЭТ

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Свойства (например «_ круглое» в «Земля круглая») — тоже предикаты, но *унарные*.

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Свойства (например «_ круглое» в «Земля круглая») — тоже предикаты, но *унарные*.

Ещё пример: $2 + 2 = 5$. Здесь 2 и 5 —

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Свойства (например «_ круглое» в «Земля круглая») — тоже предикаты, но *унарные*.

Ещё пример: $2 + 2 = 5$. Здесь 2 и 5 — константы, $=$ —

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Свойства (например «_ круглое» в «Земля круглая») — тоже предикаты, но *унарные*.

Ещё пример: $2 + 2 = 5$. Здесь 2 и 5 — константы, $=$ — предикат, а $+$ —

Структура атомарных высказываний

Вспомним примеры простых высказываний с прошлой лекции: $4 < 5$, «Волга впадает в Балтийское море».

4, 5, «Волга» и «Балтийское море» здесь *константы*, обозначающие какие-то объекты.

$<$ и «_ впадает в _» — *предикаты*, обозначающие отношения между объектами. Оба предиката *бинарные* (или *двухместные*).

Свойства (например «_ круглое» в «Земля круглая») — тоже предикаты, но *унарные*.

Ещё пример: $2 + 2 = 5$. Здесь 2 и 5 — константы, $=$ — предикат, а $+$ — *функция*.

$2 + 2$ — *терм*, обозначает объект (как и константы).

В *n*-местный предикат можно подставить *n* термов и получить высказывание.

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные —

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — x, y, z_3, $\ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — x, y, z_3, $\ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Термы —

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Термы — $x, (y + 2) \cdot z, \ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — x, y, z_3, $\ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Термы — x, $(y + 2) \cdot z$, $\ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.

Формулы —

Сигнатуры, термы, формулы

Сигнатура Σ — конечные или счётные множества константных $Const_\Sigma$, функциональных Fun_Σ и предикатных $Pred_\Sigma$ символов. Для каждого символа из Fun_Σ и $Pred_\Sigma$ задано число аргументов (*арность*).

Переменные — $x, y, z_3, \ldots$. Обозначают какие-то объекты (не истину/ложь, как p, q, r). Множество Var не зависит от сигнатуры.

Термы — $x, (y + 2) \cdot z, \ldots$ Выражения, значения которых — объекты. Строятся из переменных и константных символов применением функциональных. Множество термов над Σ: $Term_\Sigma$.

Формулы — $x = y + 1$; $\forall x\ x \neq x^2$ ... Вот их значения истина и ложь. *Атомарные формулы* строятся из термов применением предикатных символов, а остальные применением связок $\wedge/\vee/\ldots$ и кванторов $\forall$ и $\exists$ к формулам. Множество формул над Σ: $Form_\Sigma$.

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

Носитель (или *универсум*):

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

- *Носитель* (или *универсум*): множество $\bar{M}$.
- Для каждого символа $c : Const_{\Sigma}$[1]:

[1] Я пишу $:$ вместо $\in$ для объявления новой переменной.

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

- *Носитель* (или *универсум*): множество $\bar{M}$.
- Для каждого символа $c : Const_\Sigma$[1]: элемент $c_M : \bar{M}$.
- Для $f : Fun_\Sigma$:

[1] Я пишу $:$ вместо $\in$ для объявления новой переменной.

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

- *Носитель* (или *универсум*): множество $\bar{M}$.
- Для каждого символа $c : Const_\Sigma$[1]: элемент $c_M : \bar{M}$.
- Для $f : Fun_\Sigma$: функция $f_M : M^{arity(f)} \to M$.
- Для $P : Pred_\Sigma$:

[1] Я пишу $:$ вместо $\in$ для объявления новой переменной.

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

- *Носитель* (или *универсум*): множество $\bar{M}$.
- Для каждого символа $c : Const_{\Sigma}$[1]: элемент $c_M : \bar{M}$.
- Для $f : Fun_{\Sigma}$: функция $f_M : M^{arity(f)} \to M$.
- Для $P : Pred_{\Sigma}$: предикат $P_M : M^{arity(P)} \to \{0, 1\}$.

Оценка — значение переменных в модели, $\sigma : Var \to \bar{M}$. Или $V \to \bar{M}$, где $V \subset Var$.

Важно: символы сигнатуры сами по себе ничего не говорят об их интерпретации! $+_M$ может быть $-$ или $\cdot$ или $x, y \mapsto \int_x^y t dt$.

[1] Я пишу $:$ вместо $\in$ для объявления новой переменной.

Модели

Модель M сигнатуры Σ состоит из:

- *Носитель* (или *универсум*): множество $\bar{M}$.
- Для каждого символа $c : Const_\Sigma$[1]: элемент $c_M : \bar{M}$.
- Для $f : Fun_\Sigma$: функция $f_M : M^{arity(f)} \to M$.
- Для $P : Pred_\Sigma$: предикат $P_M : M^{arity(P)} \to \{0, 1\}$.

Оценка — значение переменных в модели, $\sigma : Var \to \bar{M}$. Или $V \to \bar{M}$, где $V \subset Var$.

Важно: символы сигнатуры сами по себе ничего не говорят об их интерпретации! $+_M$ может быть $-$ или $\cdot$ или $x, y \mapsto \int_x^y t dt$.

Одно исключение: если есть $=$, то $=_M$ это равенство на $\bar{M}$.

[1] Я пишу $:$ вместо $\in$ для объявления новой переменной.

Значения термов и формул

σ расширяется на $Term_\Sigma \to ???$ и на $Form_\Sigma \to ???$ по индукции:

Значения термов и формул

σ расширяется на $Term_\Sigma \to \bar{M}$ и на $Form_\Sigma \to \{0,1\}$ по индукции:

$\sigma(c) = c_M$.

$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Значения термов и формул

σ расширяется на $Term_\Sigma \to \bar{M}$ и на $Form_\Sigma \to \{0, 1\}$ по индукции:

$\sigma(c) = c_M$.

$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(P(t_1, \ldots, t_n)) = P_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(A \wedge B) = \sigma(A) \wedge \sigma(B)$ (аналогично для $\neg$/$\vee$/$\to$).

Значения термов и формул

σ расширяется на $Term_\Sigma \to \bar{M}$ и на $Form_\Sigma \to \{0,1\}$ по индукции:

$\sigma(c) = c_M$.

$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(P(t_1, \ldots, t_n)) = P_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(A \wedge B) = \sigma(A) \wedge \sigma(B)$ (аналогично для $\neg$/$\vee$/$\to$).

Для кванторов нужно сначала определить $\sigma_{v \mapsto a}$ (где v переменная, а a — объект из $\bar{M}$):

$$\sigma_{v \mapsto a}(v) = a$$

$$\sigma_{v \mapsto a}(u) = \sigma(u) \text{ для остальных переменных } u.$$

Значения термов и формул

σ расширяется на $Term_\Sigma \to \bar{M}$ и на $Form_\Sigma \to \{0, 1\}$ по индукции:

$\sigma(c) = c_M$.

$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(P(t_1, \ldots, t_n)) = P_M(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

$\sigma(A \wedge B) = \sigma(A) \wedge \sigma(B)$ (аналогично для $\neg$/$\vee$/$\to$).

Для кванторов нужно сначала определить $\sigma_{v \mapsto a}$ (где v переменная, а a — объект из $\bar{M}$):

$$\sigma_{v \mapsto a}(v) = a$$
$$\sigma_{v \mapsto a}(u) = \sigma(u) \text{ для остальных переменных } u.$$

Теперь

$$\sigma(\forall v\ A) = \begin{cases} 1, \text{ если } \forall a : \bar{M}\ \sigma_{v \mapsto a}(A) = 1 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

и аналогично для $\exists$.

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной —

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной —

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной — любое другое.

Переменная свободна в формуле, если имеет какие-то свободные вхождения.

Замкнутая формула (или *предложение*) — формула без свободных переменных.

Почему это важно? Какая между ними разница?

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной — любое другое.

Переменная свободна в формуле, если имеет какие-то свободные вхождения.

Замкнутая формула (или *предложение*) — формула без свободных переменных.

Почему это важно? Какая между ними разница?

$\sigma(\forall/\exists v \ \ldots)$ не зависит от $\sigma(v)$.

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной — любое другое.

Переменная свободна в формуле, если имеет какие-то свободные вхождения.

Замкнутая формула (или *предложение*) — формула без свободных переменных.

Почему это важно? Какая между ними разница?

$\sigma(\forall / \exists v \ \ldots)$ не зависит от $\sigma(v)$.

Отсюда можно доказать, что значение формулы A зависит только от значений свободных переменных A, но не от связанных.

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной — любое другое.

Переменная свободна в формуле, если имеет какие-то свободные вхождения.

Замкнутая формула (или *предложение*) — формула без свободных переменных.

Почему это важно? Какая между ними разница?

$\sigma(\forall / \exists v \ \ldots)$ не зависит от $\sigma(v)$.

Отсюда можно доказать, что значение формулы A зависит только от значений свободных переменных A, но не от связанных.

А значение замкнутой формулы?

Свободные и связанные переменные

Связанное вхождение переменной — v под квантором по этой же переменной $\forall v / \exists v$.

Свободное вхождение переменной — любое другое.

Переменная свободна в формуле, если имеет какие-то свободные вхождения.

Замкнутая формула (или *предложение*) — формула без свободных переменных.

Почему это важно? Какая между ними разница?

$\sigma(\forall / \exists v\ \ldots)$ не зависит от $\sigma(v)$.

Отсюда можно доказать, что значение формулы A зависит только от значений свободных переменных A, но не от связанных.

А значение замкнутой формулы? Вообще не зависит от оценки, только от модели.

Свободные и связанные переменные (2)

Связанную переменную можно переименовать, не изменив смысла и значения формулы.

Вместо свободной переменной можно подставить произвольный терм, вместо связанной нельзя.

Переменные с одним названием, связанные разными кванторами, это по сути разные переменные. Пример: $x = 3 \wedge (\exists x\ x = 0) \wedge \forall x\ (x > 0 \to x^2 > 0)$.

В математике переменные могут связываться не только кванторами:

Свободные и связанные переменные (2)

Связанную переменную можно переименовать, не изменив смысла и значения формулы.

Вместо свободной переменной можно подставить произвольный терм, вместо связанной нельзя.

Переменные с одним названием, связанные разными кванторами, это по сути разные переменные. Пример: $x = 3 \wedge (\exists x \; x = 0) \wedge \forall x \; (x > 0 \to x^2 > 0)$.

В математике переменные могут связываться не только кванторами:

$$\lim_{x \to \dots} \dots \qquad \int_{\dots}^{\dots} \dots dx \qquad \{x | \dots\}$$

все связывают x.

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x \; (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула?

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \land \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она?

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она? Да.

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она? Да.

Как насчёт незамкнутой формулы $P(x) \to \forall x\ Q(x)$?

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она? Да.

Как насчёт незамкнутой формулы $P(x) \to \forall x\ Q(x)$?

Истинна при $\sigma(x) = 0,\ \sigma(x) = 1$, ложна при $\sigma(x) = 2$.

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она? Да.

Как насчёт незамкнутой формулы $P(x) \to \forall x\ Q(x)$?

Истинна при $\sigma(x) = 0,\ \sigma(x) = 1$, ложна при $\sigma(x) = 2$.

Для простоты можно писать $x = 0$ вместо $\sigma(x) = 0$.

Примеры

Рассмотрим пример.

Формула (замкнутая): $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Возьмём произвольную модель из 3 элементов:

$\bar{M} = \{0, 1, 2\}$.

Как можно задать предикаты P и Q?

x	0	1	2
P(x)	0	0	1
Q(x)	1	0	1

Истинна ли формула? Да.

Попробуем другую формулу на той же модели:

$\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \land \exists x\ \neg P(x)$. Истинна ли она? Да.

Как насчёт незамкнутой формулы $P(x) \to \forall x\ Q(x)$?

Истинна при $\sigma(x) = 0,\ \sigma(x) = 1$, ложна при $\sigma(x) = 2$.

Для простоты можно писать $x = 0$ вместо $\sigma(x) = 0$.

Ничего не изменится, если $\bar{M} = \{a, b, c\}$, какие-то абстрактные объекты.

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:
Формула: $\forall x \exists y\ (P(x, y) \to P(x, x))$.
Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.
Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y\ (P(x,y) \to P(x,x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула?

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y\ (P(x,y) \to P(x,x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула? Да.

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y\ (P(x,y) \to P(x,x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула? Да.

Слегка поменяем: $\forall x\ ((\exists y\ P(x,y)) \to P(x,x))$. Эта формула

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y\ (P(x,y) \to P(x,x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула? Да.

Слегка поменяем: $\forall x\ ((\exists y\ P(x,y)) \to P(x,x))$. Эта формула ложна.

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y \; (P(x, y) \to P(x, x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула? Да.

Слегка поменяем: $\forall x \; ((\exists y \; P(x, y)) \to P(x, x))$. Эта формула ложна.

На бесконечных моделях работает так же, но мы не можем просто перечислить все значения переменных, чтобы найти значение формулы!

Примеры

Ещё пример с бинарным предикатом:

Формула: $\forall x \exists y\ (P(x, y) \to P(x, x))$.

Возьмём $\bar{M} = \{a, b, c\}$.

Какой таблицей задаётся бинарный предикат?

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	1	0

Истинна ли формула? Да.

Слегка поменяем: $\forall x\ ((\exists y\ P(x, y)) \to P(x, x))$. Эта формула ложна.

На бесконечных моделях работает так же, но мы не можем просто перечислить все значения переменных, чтобы найти значение формулы!

Вместо механического процесса приходится думать.

На практике для больших конечных тоже.

Формализация

Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.

Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».

Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете

Формализация

Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.

Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».

Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x \; \forall y$ x любит y

Формализация

Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.

Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».

Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.

Формализация

Часто возникает задача: дано утверждение (математическое или в терминах «реального мира»), нужно записать его в виде формулы данной сигнатуры.

Пример: «Кто-то любит всех на свете». Универсум: люди, предикат $Loves(x, y)$ для «x любит y».

Кто-то любит всех на свете $\equiv \exists x$ x любит всех на свете $\equiv \exists x\ \forall y$ x любит y $\equiv \exists x\ \forall y\ Loves(x, y)$.

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный):

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.

Можно ли то же самое записать без $\cdot$?

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.

Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.

Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.

Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.

Ещё примеры формализации

«x делится на 2». Универсум: натуральные числа.

Если предположили что-то вроде $x/2 \in \mathbb{N}$: это не подойдёт. Почему?

Например, $\mathbb{N}$ это не объект нашего универсума. А если $\in \mathbb{N}$ рассматривать как единый предикатный символ, он верен для всех объектов!

Более того, если $/$ — функциональный символ, то он должен иметь значение в нашем универсуме для любых аргументов. Есть варианты логики, которые снимают это ограничение, но мы их не изучаем.

Ответ (возможный): $\exists y\ x = 2 \cdot y$.

Можно ли то же самое записать без $\cdot$? Да! $\exists y\ x = y + y$.

Вот «x делится на y» без $\cdot$ записать уже не получится.

Формализация со свободными переменными

У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.

Может и сразу быть дано такое утверждение.

Формализация со свободными переменными

У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.

Может и сразу быть дано такое утверждение.

В результате должна получиться формула с теми же свободными переменными (и какими угодно связанными).

Формализация со свободными переменными

У нас на предыдущих слайдах появлялись утверждения с переменными (например, «x любит всех на свете») в промежуточных результатах.

Может и сразу быть дано такое утверждение.

В результате должна получиться формула с теми же **свободными** переменными (и какими угодно связанными).

Если в формуле есть «лишние» свободные переменные или связана одна из тех, что есть в формализуемом утверждении, это заведомо неверный ответ.

Многосортная логика предикатов

Часто удобно одновременно говорить о нескольких разных типах объектов. Пример: числа, множества чисел и функции в мат. анализе. Тогда

К сигнатуре добавляется набор *сортов*. Каждый сорт обозначает какое-то множество объектов.

У функциональных и предикатных символов кроме числа аргументов задан сорт каждого, у функциональных ещё и сорт результата.

Применение символов к аргументам не тех сортов считается бессмысленным (т.е. его результат не является термом/формулой).

Каждая переменная имеет сорт: $x : S$. Сорт термов определяется по индукции.

В моделях есть носитель для каждого сорта.

Многосортную логику можно свести к односортной, добавив по предикату для каждого сорта, но формулы при этом усложняются.

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$$v[v \mapsto t] = t$$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$$v[v \mapsto t] = t$$
$$u[v \mapsto t] =$$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] =$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)
$f(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] =$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)
$f(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] = f(t_1[v \mapsto t], \ldots, t_n[v \mapsto t])$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)
$f(t_1, \dots, t_n)[v \mapsto t] = f(t_1[v \mapsto t], \dots, t_n[v \mapsto t])$
$P(t_1, \dots, t_n)[v \mapsto t] =$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)
$f(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] = f(t_1[v \mapsto t], \ldots, t_n[v \mapsto t])$
$P(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] = P(t_1[v \mapsto t], \ldots, t_n[v \mapsto t])$

Подстановки

Попробуем определить результат замены переменной v на терм t в терм s и в формулу A: $s[v \mapsto t]$ и $A[v \mapsto t]$. Должно получиться

$$\sigma(s[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(s)$$
$$\sigma(A[v \mapsto t]) = \sigma_{v \mapsto \sigma(t)}(A)$$

(понятен ли смысл этого?).

Первые шаги очевидны:

$v[v \mapsto t] = t$
$u[v \mapsto t] = u$ (u — переменная, кроме v)
$c[v \mapsto t] = c$ (c — константа)
$f(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] = f(t_1[v \mapsto t], \ldots, t_n[v \mapsto t])$
$P(t_1, \ldots, t_n)[v \mapsto t] = P(t_1[v \mapsto t], \ldots, t_n[v \mapsto t])$
$(\neg A)[v \mapsto t] = \neg(A[v \mapsto t])$ (аналогично для $\wedge / \vee / \to$)

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.

Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] =$$

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.
Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\, A)[v \mapsto t] = \forall v\, A$$

Формула не меняется!

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.

Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!

Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] =$$

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.

Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!

Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] = \forall u\ (A[v \mapsto t])$$

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.

Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!

Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] = \forall u\ (A[v \mapsto t])$$

Но рассмотрим пример «x делится на 2» $\equiv \exists y\ x = 2 \cdot y$.

При замене x на y должно получиться

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.
Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!
Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] = \forall u\ (A[v \mapsto t])$$

Но рассмотрим пример «x делится на 2» $\equiv \exists y\ x = 2 \cdot y$.
При замене x на y должно получиться «y делится на 2». Если попробуем правило выше, получится

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.
Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!
Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] = \forall u\ (A[v \mapsto t])$$

Но рассмотрим пример «x делится на 2» $\equiv \exists y\ x = 2 \cdot y$.
При замене x на y должно получиться «y делится на 2». Если попробуем правило выше, получится
$\exists y\ y = 2 \cdot y$,

Подстановки с кванторами

Для формул с кванторами всё сложнее.
Если квантор по той же переменной:

$$(\forall v\ A)[v \mapsto t] = \forall v\ A$$

Формула не меняется!
Если переменные разные, можно предположить

$$(\forall u\ A)[v \mapsto t] = \forall u\ (A[v \mapsto t])$$

Но рассмотрим пример «x делится на 2» $\equiv \exists y\ x = 2 \cdot y$.
При замене x на y должно получиться «y делится на 2». Если попробуем правило выше, получится $\exists y\ y = 2 \cdot y$, явно не выражающая «y делится на 2».
Если в A связаны какие-то переменные терма t, то перед подстановкой их нужно сначала переименовать:

$$(\exists y\ x = 2 \cdot y)[x \mapsto y] = (\exists y'\ x = 2 \cdot y')[x \mapsto y] = \exists y'\ y = 2 \cdot y'$$