Ординалы

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

11 декабря 2024 г.

МИЭТ

Ординалы как множества

- $0 = \varnothing$
- $\forall \alpha : Ord \ \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
- $\forall A \subset Ord \ \sup A = \bigcup A$

Ординалы как множества

- $0 = \varnothing$
- $\forall \alpha : \mathit{Ord}\ \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
- $\forall A \subset \mathit{Ord}\ \ \sup A = \bigcup A$
- Например, $0 = \varnothing; 1 = \{0\} = \{\varnothing\}; 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \ldots$
- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Ординалы как множества

- $0 = \varnothing$
- $\forall \alpha : Ord\ \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
- $\forall A \subset Ord\ \ \sup A = \bigcup A$
- Например, $0 = \varnothing; 1 = \{0\} = \{\varnothing\}; 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \ldots$
- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$
- Всегда $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Ординалы как множества

- $0 = \varnothing$
- $\forall \alpha : Ord\ \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
- $\forall A \subset Ord\ \ \sup A = \bigcup A$
- Например, $0 = \varnothing; 1 = \{0\} = \{\varnothing\}; 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \ldots$
- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$
- Всегда $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.
- $\omega = \sup \omega = \sup\{\alpha | \alpha < \omega\}$. Такой ординал называется предельным.
- Дальше $\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot 4, \ldots, \omega^2, \ldots$
- $\omega \cdot 2 = \sup\{\omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$
- $\omega \cdot \omega = \sup\{\omega, \omega \cdot 2, \ldots\}$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
  - $\alpha + 0 = \alpha$
  - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
  - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
    - $\alpha + 0 = \alpha$
    - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
    - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

    - $\alpha \cdot 0 = 0$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
  - $\alpha + 0 = \alpha$
  - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
  - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha \cdot 0 = 0$
  - $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
  - $\alpha + 0 = \alpha$
  - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
  - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha \cdot 0 = 0$
  - $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
  - $\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta : A\}$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
  - $\alpha + 0 = \alpha$
  - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
  - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha \cdot 0 = 0$
  - $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
  - $\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha^0 = 1$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
  - $\alpha + 0 = \alpha$
  - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
  - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha \cdot 0 = 0$
  - $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
  - $\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta : A\}$

  - $\alpha^0 = 1$
  - $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

Арифметика ординалов

- $\alpha + \beta$: порядок на $\alpha \cup \beta'$ (копия β), все элементы α меньше всех элементов β'.
- $\alpha \cdot \beta$: лексикографический порядок на $\beta \times \alpha$ (сравнить первые элементы, если они равны, сравнить вторые).
- Рекурсивные определения:
    - $\alpha + 0 = \alpha$
    - $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
    - $\alpha + \sup A = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta : A\}$

    - $\alpha \cdot 0 = 0$
    - $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
    - $\alpha \cdot \sup A = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta : A\}$

    - $\alpha^0 = 1$
    - $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
    - $\alpha^{\sup A} = \sup\{\alpha^\beta \mid \beta : A\}$

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.
- $(\omega + 1)^2$

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.
- $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.
- $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$
- 2^ω

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.
- $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$
- $2^\omega = \omega$. Заметьте, что операции над ординалами не согласуются с операциями над мощностями, кроме конечных чисел.

Примеры

- Рекурсией и напрямую: $\omega + 2$ и $2 + \omega$, $\omega \cdot 2$ и $2 \cdot \omega$.
- $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$
- $2^\omega = \omega$. Заметьте, что операции над ординалами не согласуются с операциями над мощностями, кроме конечных чисел.

- Примеры выполняющихся свойств:
  - $0 + \alpha = \alpha$
  - $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (и для $\cdot$)
  - $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
  - $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha + \gamma$
  - $\beta > \gamma \Rightarrow \beta + \alpha \geq \gamma + \alpha$
  - $\dots$
- Примеры невыполняющихся свойств:
  - $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (и для $\cdot$)
  - $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$
  - $\beta > \gamma \Rightarrow \beta + \alpha > \gamma + \alpha$
  - $\dots$

Нормальная форма Кантора

- Нормальная форма Кантора: любое α единственным образом представляется как $\omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot c_k$, где:
  - $k \in \mathbb{N}$
  - $c_i \in \mathbb{N}$
  - $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \geq 0 \in Ord$

Нормальная форма Кантора

- Нормальная форма Кантора: любое α единственным образом представляется как $\omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot c_k$, где:
  - $k \in \mathbb{N}$
  - $c_i \in \mathbb{N}$
  - $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \geq 0 \in Ord$
- $\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$
- $\omega^{\varepsilon_0} =$

Нормальная форма Кантора

- Нормальная форма Кантора: любое α единственным образом представляется как $\omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot c_k$, где:
  - $k \in \mathbb{N}$
  - $c_i \in \mathbb{N}$
  - $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \geq 0 \in Ord$
- $\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$
- $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ (и это минимальный такой ординал).
- Дальше эта иерархия продолжается неограниченно.