# Натуральная дедукция (естественный вывод)

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов

31 октября 2024 г.

МИЭТ

# Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится $B$».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.

# Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится $B$».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если

# Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится $B$».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны,

# Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится $B$».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны, $B$ тоже истинна.
- Соответственно, $\vdash B$ («$B$ выводится») истинна тогда, когда $B$

# Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится $B$».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны, $B$ тоже истинна.
- Соответственно, $\vdash B$ («$B$ выводится») истинна тогда, когда $B$ тождественно истинна.

# Правила натуральной дедукции

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge E$$

- Для $\to$:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}}{A \to B}\to I \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\to E$$

- Для $\neg$ и $\bot$:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg A}\neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\neg E / \bot I \qquad \frac{\bot}{A}\bot E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ C\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}B\\ \vdots\\ C\end{array}}}{C}\vee E \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ B\end{array}}}{A \vee B}\vee I' \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg B\\ \vdots\\ A\end{array}}}{A \vee B}\vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{A}RAA \qquad \frac{A}{A}R$$

- $I$ обозначает правила введения (Introduction), $E$ — правила исключения (Elimination). Например, $\wedge I$ это правило «введения конъюнкции». Можете также писать как В$\wedge$.

# Пример

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(p \wedge q) \wedge r$ | Дано |
| 2 | $p \wedge q$ | $\wedge$E, 1 |
| $n-4$ | $q$ | $\wedge$E, 2 |
| $n-3$ | $r$ | $\wedge$E, 1 |
| $n-2$ | $p$ | $\wedge$E, 2 |
| $n-1$ | $q \wedge r$ | $\wedge$I, $n-2$, $n-4$ |
| $n$ | $p \wedge (q \wedge r)$ | $\wedge$I, $n-3$, $n-1$ |

## Пример

$$
\begin{array}{l|ll}
n & p \to (q \to p) & \Rightarrow\mathrm{I},\ 1\text{–}(n-1)
\end{array}
$$

# Пример

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p$ | Дано |
| $n-1$ | $q \to p$ | $\Rightarrow$I, 2–3 |
| $n$ | $p \to (q \to p)$ | $\Rightarrow$I, 1–($n-1$) |

# Пример

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad\quad p$ | Дано |
| 2 | $\quad\quad\quad q$ | Дано |
| 3 | $\quad\quad\quad p$ | R, 1 |
| $n-1$ | $\quad\quad q \to p$ | $\Rightarrow$I, 2–3 |
| $n$ | $p \to (q \to p)$ | $\Rightarrow$I, 1–$(n-1)$ |

# Допустимые правила

- Выше доказали $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$.
- Это можно превратить в доказательство $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$ для любых формул $A, B, C$. Как?

# Допустимые правила

- Выше доказали $(p \land q) \land r \vdash p \land (q \land r)$.
- Это можно превратить в доказательство $(A \land B) \land C \vdash A \land (B \land C)$ для любых формул $A, B, C$. Как?
- Это даёт новое *допустимое правило*:

$$\frac{(A \land B) \land C}{A \land (B \land C)} \land A$$

- И так для каждой секвенции, которую докажем! Например

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\neg E \qquad \frac{A}{\neg\neg A} \neg\neg I \qquad \frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C} \to T$$

  и т.д.
- У каких-то из этих правил есть обозначения, как выше, но можно просто пометить соотвествующей секвенцией.