Натуральная дедукция (естественный вывод)

Математическая логика и теория алгоритмов

Алексей Романов
19 сентября 2024 г.
МИЭТ

Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.

Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если

Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны,

Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны, B тоже истинна.
- Соответственно, $\vdash B$ («B выводится») истинна тогда, когда B

Секвенции

- Выражение $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ называется секвенцией и читается «из $A_1, \ldots, A_n$ выводится B».
- Удобно считать, что слева множество формул (порядок и повторения неважны).
- Оно может быть пустым.
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если на всех тех наборах, на которых $A_1, \ldots, A_n$ истинны, B тоже истинна.
- Соответственно, $\vdash B$ («B выводится») истинна тогда, когда B тождественно истинна.

Правила натуральной дедукции

- Для $\wedge$:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E$$

- Для $\rightarrow$:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}}{A \rightarrow B}\ \rightarrow I \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ \rightarrow E$$

- Для $\neg$ и $\bot$:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg A}\ \neg I \qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\ \neg E\,/\,\bot I \qquad \frac{\bot}{A}\ \bot E$$

- Для $\vee$:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I \qquad \frac{A \vee B \quad \boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}}{C}\ \vee E \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \end{array}}}{A \vee B}\ \vee I' \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg B \\ \vdots \\ A \end{array}}}{A \vee B}\ \vee I'$$

- Остальные:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{A}\ RAA \qquad \frac{A}{A}\ R$$

- I обозначает правила введения (Introduction), E — правила исключения (Elimination). Например, $\wedge I$ это правило «введения конъюнкции». Можете также писать как В$\wedge$.

Пример

1	$(p \wedge q) \wedge r$	Дано
2	$p \wedge q$	$\wedge$E, 1
$n-4$	q	$\wedge$E, 2
$n-3$	r	$\wedge$E, 1
$n-2$	p	$\wedge$E, 2
$n-1$	$q \wedge r$	$\wedge$I, $n-2$, $n-4$
n	$p \wedge (q \wedge r)$	$\wedge$I, $n-3$, $n-1$

Пример

n	$p \to (q \to p)$	$\to$I, 1–$n-1$

Пример

1	p	Дано
$n-1$	$q \to p$	$\to$I, 2–3
n	$p \to (q \to p)$	$\to$I, 1–$n-1$

Пример

1	p	Дано
2	q	Дано
3	p	R, 1
$n-1$	$q \to p$	$\to$I, 2–3
n	$p \to (q \to p)$	$\to$I, 1–$n-1$

Допустимые правила

- Выше доказали $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$.
- Это можно превратить в доказательство $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$ для любых формул A, B, C. Как?

Допустимые правила

- Выше доказали $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$.
- Это можно превратить в доказательство $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$ для любых формул A, B, C. Как?
- Это даёт новое *допустимое правило*:

$$\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)} \wedge A$$

- И так для каждой секвенции, которую докажем! Например

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\neg E \qquad \frac{A}{\neg\neg A} \neg\neg I \qquad \frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C} \to T$$

  и т.д.
- У каких-то из этих правил есть обозначения, как выше, но можно просто пометить соотвествующей секвенцией.