

## Parte I

# Ruta más corta

## 1. Formulación de transbordo

### 1.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 1.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$o$  = Nodo de origen

$d$  = Nodo destino

### 1.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el path} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

### 1.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in N} x_{oj} = 1 \quad (1.2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{id} = 1 \quad (1.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = \sum_{(j,h) \in A} x_{jh} \quad \forall j \in N \setminus \{o, d\} \quad (1.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (1.5)$$

## Parte II

# Árbol de rutas más cortas

## 2. Formulación de flujo entero

### 2.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 2.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

### 2.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$f_{ij}$  = flujo que pasa por el arco  $(i, j)$

### 2.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot f_{ij} \quad (2.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{rj} = |N| - 1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = 1 + \sum_{(j,h) \in A} f_{jh} \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (2.3)$$

$$f_{ij} \leq (|N| - 1) \cdot x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (2.5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.6)$$

$$f_j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.7)$$

### 3. Formulación de flujo multicommodity

#### 3.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

#### 3.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

#### 3.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$f_{ij}^k$  = flujo que pasa por el arco  $(i, j)$  con dirección al nodo  $k$

#### 3.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot f_{ij}^k \quad (3.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{rj}^k = 1 \quad \forall k \in N \setminus \{r\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{(i,k) \in A} f_{ik}^k = 1 \quad \forall k \in N \setminus \{r\} \quad (3.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}^k = \sum_{(j,h) \in A} f_{jh}^k \quad \forall j, k \in N \setminus \{r\} : j \neq k \quad (3.4)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, k \in N \setminus \{r\} \quad (3.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.7)$$

$$f_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in N \setminus \{r\} \quad (3.8)$$

### Parte III

## El problema del minimum spanning tree MST

### 4. Formulaci3n de cl1sica

#### 4.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

#### 4.2. Par1metros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

#### 4.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el 1rbol de expansi3n} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

#### 4.4. Formulaci3n matem1tica

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (4.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = |N| - 1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N : |S| \geq 2 \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4.4)$$

## 5. Formulación de clásica II

### 5.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 5.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

### 5.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

### 5.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (5.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (5.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = |N| - 1 \quad (5.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N : |S| \geq 2 \quad (5.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (5.5)$$

## 6. Formulación de flujo entero

### 6.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 6.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

### 6.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$f_{ij} = \text{flujo que pasa por el arco } (i, j)$$

### 6.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (6.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{rj} = |N| - 1 \quad (6.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = 1 + \sum_{(j,h) \in A} f_{jh} \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (6.3)$$

$$f_{ij} \leq (|N| - 1) \cdot x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (6.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = |N| - 1 \quad (6.6)$$

$$\sum_{(i,j) \in A: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N : |S| \geq 2 \quad (6.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.8)$$

## 7. Formulación de flujo multicommodity

### 7.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 7.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

### 7.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$f_{ij}^k$  = flujo que pasa por el arco  $(i, j)$  con dirección al nodo  $k$

### 7.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (7.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(r,j) \in A} f_{rj}^k = 1 \quad \forall k \in N \setminus \{r\} \quad (7.2)$$

$$\sum_{(i,k) \in A} f_{ik}^k = 1 \quad \forall k \in N \setminus \{r\} \quad (7.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}^k = \sum_{(j,h) \in A} f_{jh}^k \quad \forall j, k \in N \setminus \{r\} : j \neq k \quad (7.4)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, k \in N \setminus \{r\} \quad (7.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (7.6)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = |N| - 1 \quad (7.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in A: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N : |S| \geq 2 \quad (7.8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (7.9)$$

## 8. Formulación de Miller-Tucker-Zemblin (MTZ)

### 8.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 8.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$

$r$  = Nodo de origen del árbol

### 8.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el árbol de expansión} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$t_j$  = número de arcos entre el nodo raíz y el nodo  $j$

### 8.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (8.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{r\} \quad (8.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = |N| - 1 \quad (8.3)$$

$$t_j \geq t_i + 1 - |N| \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A, j \neq r \quad (8.4)$$

$$t_r = 0 \quad (8.5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (8.6)$$

$$t_j \geq 0 \quad \forall j \in N \quad (8.7)$$



## Parte IV

# El problema de la p-mediana

## 9. Formulación clásica

### 9.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 9.2. Parámetros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$p$  = Cantidad de servidores a localizar

### 9.3. Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza un servidor en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el nodo } i \text{ al servidor } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

### 9.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot d_{ij} \quad (9.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in N} x_j = p \quad (9.2)$$

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (9.3)$$

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (9.4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (9.5)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (9.6)$$

## 10. Formulación de flujo entero

### 10.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

$\bar{A} = A \cup \{(0, j) : j \in N\}$

### 10.2. Parámetros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$p$  = Cantidad de servidores a localizar

### 10.3. Variables

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el nodo } i \text{ al servidor } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$f_{ij}$  = flujo que pasa por el arco  $(i, j)$

### 10.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \cdot d_{ij} \quad (10.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(0,j) \in \bar{A}} y_{0j} = p \quad (10.2)$$

$$\sum_{(0,j) \in \bar{A}} f_{0j} = |N| \quad (10.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{A}} f_{ij} = 1 + \sum_{(j,h) \in A} f_{jh} \quad \forall j \in N \quad (10.4)$$

$$f_{ij} \leq |N| \cdot x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (10.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{A}} y_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (10.6)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \bar{A} \quad (10.7)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \bar{A} \quad (10.8)$$

## 11. Formulación de flujo multicommodity

### 11.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 11.2. Parámetros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$p$  = Cantidad de servidores a localizar

### 11.3. Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza un servidor en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el nodo } i \text{ al servidor } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

### 11.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot d_{ij} \quad (11.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in N} x_j = p \quad (11.2)$$

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (11.3)$$

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (11.4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (11.5)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (11.6)$$

## Parte V

# El problema de la p-centro

## 12. Formulaci3n cl1sica

### 12.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 12.2. Par1metros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$p$  = Cantidad de servidores a localizar

### 12.3. Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza un servidor en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el nodo } i \text{ al servidor } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$W$  = Distancia m1xima entre un nodo de demanda y su servidor asignado

### 12.4. Formulaci3n matem1tica

$$\min W \tag{12.1}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in N} x_j = p \tag{12.2}$$

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \tag{12.3}$$

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A \tag{12.4}$$

$$W - \sum_{j \in N} d_{ij} \cdot y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in N \tag{12.5}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \tag{12.6}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \tag{12.7}$$

$$W \geq 0 \tag{12.8}$$

## Parte VI

# El problema del maximal covering

### 13. Formulaci3n cl3sica

#### 13.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

#### 13.2. Par3metros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$h_i$  = Demanda del nodo  $i$

$S$  = Radio de cobertura

$p$  = Cantidad de servidores a localizar

$C_i = \{j \mid d_{ij} \leq S\}$

#### 13.3. Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza el servidor en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del nodo } i \text{ es cubierta} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

#### 13.4. Formulaci3n matem3tica

$$\max \sum_{i \in N} y_i \cdot h_i \quad (13.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in C_i} x_j - y_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (13.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_j = p \quad (13.3)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (13.4)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (13.5)$$

## Parte VII

# El problema del set-covering

### 14. Formulaci3n cl3sica

#### 14.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

#### 14.2. Par3metros

$d_{ij}$  = Distancia entre el nodo de demanda  $i$  y el servidor candidato  $j$

$S$  = Radio de cobertura

$C_i = \{j \mid d_{ij} \leq S\}$

#### 14.3. Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza el servidor en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

#### 14.4. Formulaci3n matem3tica

$$\min \sum_{j \in N} x_j \tag{14.1}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j \in C_i} x_j \geq 1 \quad \forall i \in N \tag{14.2}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \tag{14.3}$$

## Parte VIII

# El problema del vendedor viajero

## 15. Formulación de Flujo Entero

### 15.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 15.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$   $d$  = nodo de origen

### 15.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el tour} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$f_{ij}$  = flujo enviado desde el nodo  $i$ , hacia el nodo  $j$

### 15.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (15.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (15.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (15.3)$$

$$\sum_{(d,j) \in A} f_{dj} = |N| - 1 \quad (15.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij} - \sum_{(j,h) \in A} f_{jh} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{d\} \quad (15.5)$$

$$f_{ij} \leq (|N| - 1) \cdot x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (15.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (15.7)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (15.8)$$

## 16. Formulación MTZ

### 16.1. Conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos

$A$  = Conjunto de arcos

### 16.2. Parámetros

$c_{ij}$  = costo asociado al arco  $(i, j)$   $d$  = nodo de origen

### 16.3. Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el tour} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$t_i$  = posición en que se recorre el nodo  $i$  en el tour

### 16.4. Formulación matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (16.1)$$

Sujeto a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (16.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (16.3)$$

$$t_j \geq t_i + 1 - |N| \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A, j \neq d \quad (16.4)$$

$$t_d = 0 \quad (16.5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (16.6)$$

$$t_i \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall i \in N \quad (16.7)$$