



Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики

Кулагин Алексей Владимирович

**Кубитовое представление модели  
Тависа-Каммингса**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**  
д.ф.-м.н., профессор  
Ю. И. Ожигов

Москва, 2016

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>3 Цели и задачи</b>	<b>6</b>
<b>4 Выбор базиса</b>	<b>7</b>
<b>5 Унитарная динамика модели ТС</b>	<b>8</b>
<b>6 Оценка разности решений (RWA и точного) в зависимости от параметров</b>	<b>14</b>
<b>7 Унитарная динамика модели ТСН</b>	<b>16</b>
<b>8 Проблема «which way?»</b>	<b>18</b>
<b>9 Описание программного модуля</b>	<b>24</b>
<b>10 Заключение</b>	<b>27</b>

# 1 Введение

Модель Тависа-Каммингса представляет собой квантово-механическую систему, описывающую взаимодействие двух или более атомов с модой электромагнитного поля в полости идеального оптического резонатора.

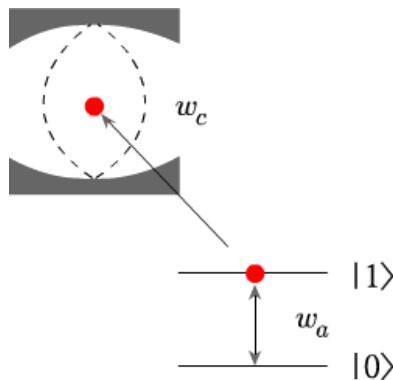


Рис. 1: Двухуровневый атом в полости оптического резонатора

Интерес к данной модели обусловлен возможностью создания на её основе логических элементов квантового компьютера [1, 2]. Кроме того, модель ТС весьма широко используется для описания квантовых эффектов взаимодействия вещества и света [3].

В настоящей работе рассматриваются системы двухуровневых атомов. Практически, это соответствует набору кубитов, размещённых в полости оптического резонатора.

Разработанный в рамках данной работы программный модуль позволяет вычислять временную эволюцию модели Тависа-Каммингса, а также модели Тависа-Каммингса-Хаббарда для случая двух взаимодействующих полостей.

С его помощью было произведено сравнение точного решения и решения RWA для одной полости, исследована разность этих решений в зависимости от характерных параметров атомов, а также воспроизведён эффект «which way?», о котором более подробно будет сказано в соответствующей главе.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим  $N$  **идентичных** двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой электромагнитного поля в идеальном резонаторе.

Атомы взаимодействуют с электромагнитным полем полости, испуская или поглощая фотон. При поглощении фотона атом возбуждается, при испускании — переходит в основное состояние.

Обозначим:  $|0\rangle$  — основное состояние атома

$|1\rangle$  — возбуждённое состояние атома

Введём также следующие операторы:

$a^+, a$  — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды  
 $\sigma_i^+, \sigma_i$  — повышающий и понижающий операторы  $i$ -го атома

$$\begin{aligned} a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle & \sigma^+|0\rangle &= |1\rangle & \sigma^+|1\rangle &= 0 \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle & \sigma|1\rangle &= |0\rangle & \sigma|0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

В представлении взаимодействия такая система описывается гамильтонианом Тависа-Каммингса:

$$H_{TC} = \underbrace{hw_c a^+ a}_{H_{field}} + \underbrace{hw_a \sum_{i=1}^N \sigma_i^+ \sigma_i}_{H_{atoms}} + \underbrace{hg \sum_{i=1}^N (\sigma_i^+ + \sigma_i)(a^+ + a)}_{H_{int}} \quad (1)$$

$h$  — постоянная Планка

$w_c$  — частота фотонов в полости

$w_a$  — частота атомного перехода

$g$  — константа взаимодействия двухуровневого атома с полем

$|w_c - w_a| \ll w_c + w_a$  (условие применимости модели ТС)

Пренебрегая членами  $\sigma^+ a^+$  и  $\sigma a$ , не сохраняющими энергию, перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$H_{TC} \approx H_{RWA} = \underbrace{hw_c a^+ a}_{H_{field}} + \underbrace{hw_a \sum_{i=1}^N \sigma_i^+ \sigma_i}_{H_{atoms}} + \underbrace{hg \sum_{i=1}^N (\sigma_i^+ a + \sigma_i a^+)}_{H_{int}} \quad (2)$$

Приближение (2) называется *приближением вращающейся волны* (rotating wave approximation), или RWA, и имеет место при условии

$$\frac{g}{w_c} \approx \frac{g}{w_a} \ll 1 \quad (3)$$

Модель Тависа-Каммингса можно обобщить на случай двух и более взаимодействующих полостей (фотоны могут перелетать из полости в полость).

Такая система называется моделью Тависа-Каммингса-Хаббарда и её гамильтониан в представлении взаимодействия имеет следующий вид:

$$H_{TCN} = \sum_{j=1}^J \left( \underbrace{hw_{c_j} a_j^+ a_j}_{H_{field}} + \underbrace{hw_{a_j} \sum_{i=1}^N \sigma_{i,j}^+ \sigma_{i,j}}_{H_{atoms}} + \underbrace{hg_j \sum_{i=1}^N (\sigma_{i,j}^+ + \sigma_{i,j})(a_j^+ + a_j)}_{H_{int}} \right) + \mu \sum_{j=1}^J (a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1}) \quad (4)$$

$J$  – количество взаимодействующих полостей

последнее слагаемое в формуле (4) отвечает за перелёт фотонов между полостями (параметр  $\mu$  характеризует частоту перелёта)

Аналогичным образом определяется гамильтониан ТСН в приближении врашающейся волны:

$$H_{TCN}^{RWA} = \sum_{j=1}^J \left( \underbrace{hw_{c_j} a_j^+ a_j}_{H_{field}} + \underbrace{hw_{a_j} \sum_{i=1}^N \sigma_{i,j}^+ \sigma_{i,j}}_{H_{atoms}} + \underbrace{hg_j \sum_{i=1}^N (\sigma_{i,j}^+ a_j + \sigma_{i,j} a_j^+)}_{H_{int}} \right) + \mu \sum_{j=1}^J (a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1}) \quad (5)$$

В настоящей работе производится моделирование системы ТСН для случая двух взаимодействующих полостей ( $J = 2$ ).

Модели ТС и ТСН в случае идеального резонатора обладают унитарной динамикой, которая описывается оператором временной эволюции  $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ .

В начальный момент времени система задаётся чистым состоянием.

В момент времени  $t$  её состояние имеет вид:  $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle$

### **3 Цели и задачи**

В настоящей работе были поставлены и решены следующие задачи:

1. Разработка и отладка компьютерной модели Тависа-Каммингса с произвольным числом атомов, а также модели Тависа-Каммингса-Хаббарда для систем из двух взаимодействующих полостей в случае:

приближения RWA

точного решения

2. Сравнение точного решения и решения RWA модели Тависа-Каммингса

Установление количественной степени расхождения точного решения и решения RWA в зависимости от параметров идентичных атомов для одной полости

3. Задача «which way?»

Определение наиболее вероятного направления перехода квантового состояния для одной полости в приближении RWA для неидентичных атомов

## 4 Выбор базиса

В качестве базисного вектора пространства квантовых состояний будем использовать вектор  $|ph\ at_1\ at_2\ ... \ at_n\rangle$ , где

$ph$  – количество фотонов в полости

$at_i$  – уровень возбуждения  $i$ -го атома (0 или 1)

К примеру,  $|211\rangle$  – это квантовое состояние, представленное двумя атомами в возбуждённом состоянии в полости, содержащей 2 фотона.

Базис пространства квантовых состояний задаётся набором базисных векторов, которые упорядочены лексикографически:

$$\{|0\ 0\ ... \ 0\ 0\rangle\ ... \ |0\ 1\ ... \ 1\ 1\rangle\ |1\ 0\ ... \ 0\ 0\rangle\ ... \ |ph_{max}\ 0\ ... \ 0\ 0\rangle\} \quad (6)$$

$ph_{max}$  – максимальное количество фотонов в полости

Пример построения гамильтониана Тависа-Каммингса в базисе (6):

(1 полость, 1 фотон, 1 атом)

$$H = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & hw_a & g & 0 \\ 0 & g & hw_c & 0 \\ g & 0 & 0 & h(w_c + w_a) \end{pmatrix}$$

$$H_{RWA} = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & hw_a & g & 0 \\ 0 & g & hw_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(w_c + w_a) \end{pmatrix}$$

Отличительной особенностью точного решения от решения RWA является возможность увеличения (уменьшения) уровня атома с одновременным рождением (уничтожением) фотона в полости резонатора.

Аналогичным образом определяется базисный вектор в случае двух взаимодействующих полостей:

$$|ph^{(1)}\ at_1^{(1)}\ at_2^{(1)}\ ... \ at_n^{(1)}\ ph^{(2)}\ at_1^{(2)}\ at_2^{(2)}\ ... \ at_n^{(2)}\rangle$$

(верхний индекс обозначает номер соответствующей полости)

## 5 Унитарная динамика модели ТС

В данной главе представлены примеры работы программного модуля по построению унитарной динамики модели Тависа-Каммингса.

На рис. 2-5 продемонстрирована эволюция квантовой системы, состоящей из двух атомов с уровнями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  (простейший случай, RWA).

В начальный момент времени в полости содержится 1 фотон.

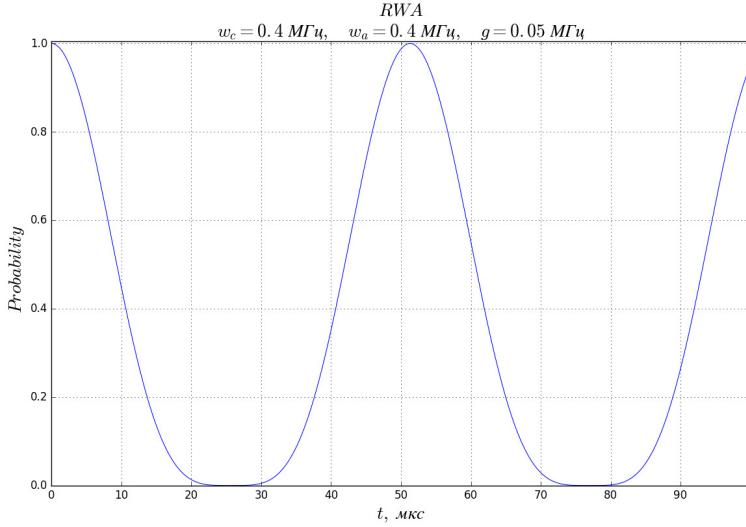


Рис. 2:  $|101\rangle$  (начальное состояние)

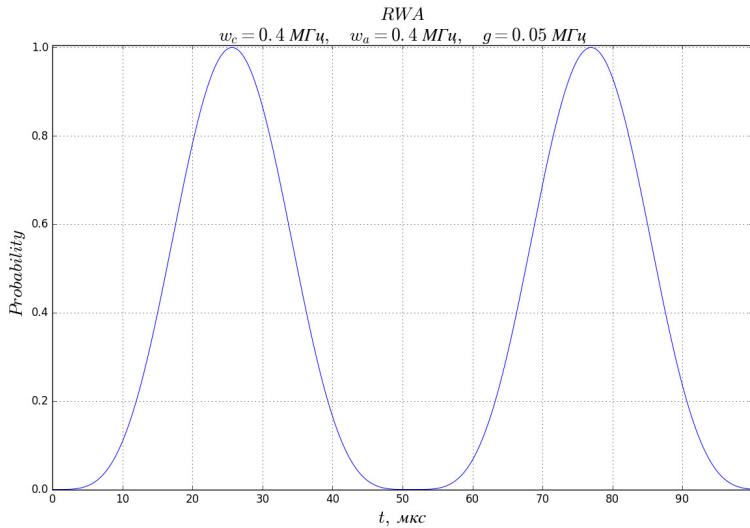


Рис. 3:  $|110\rangle$

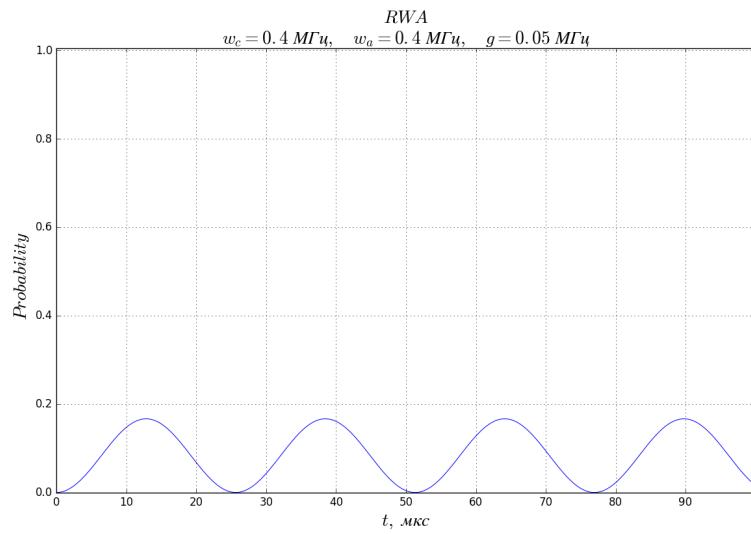


Рис. 4:  $|011\rangle$

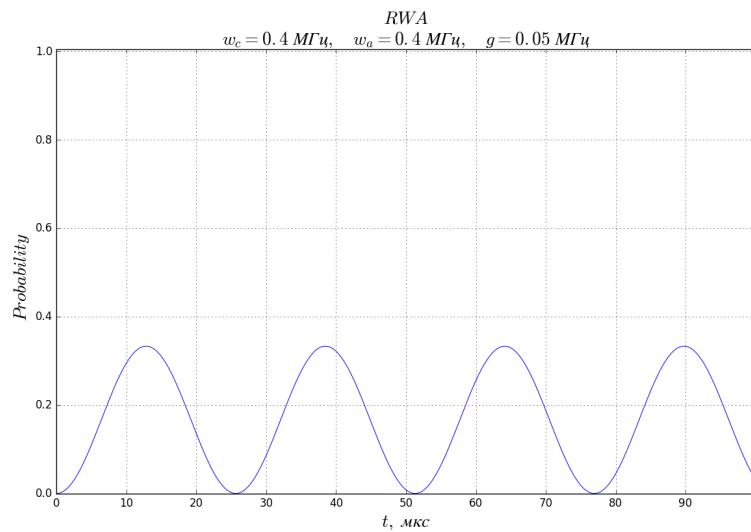


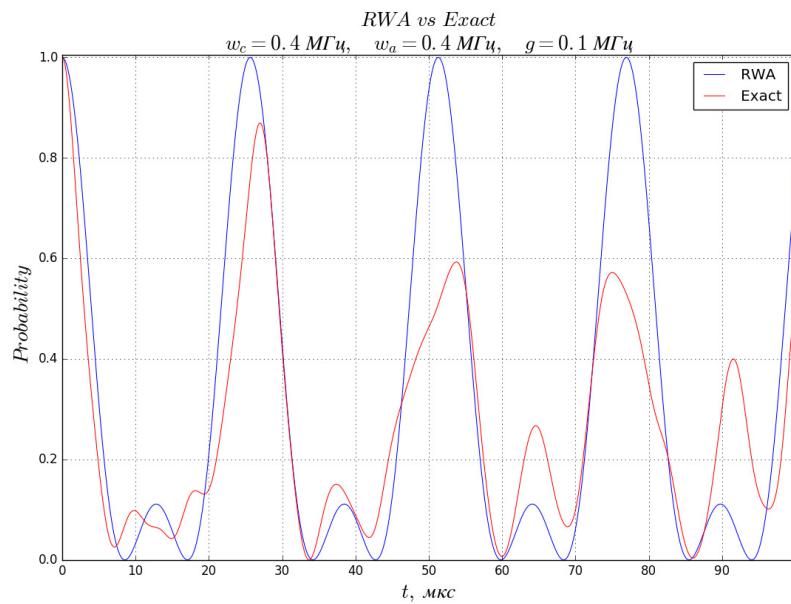
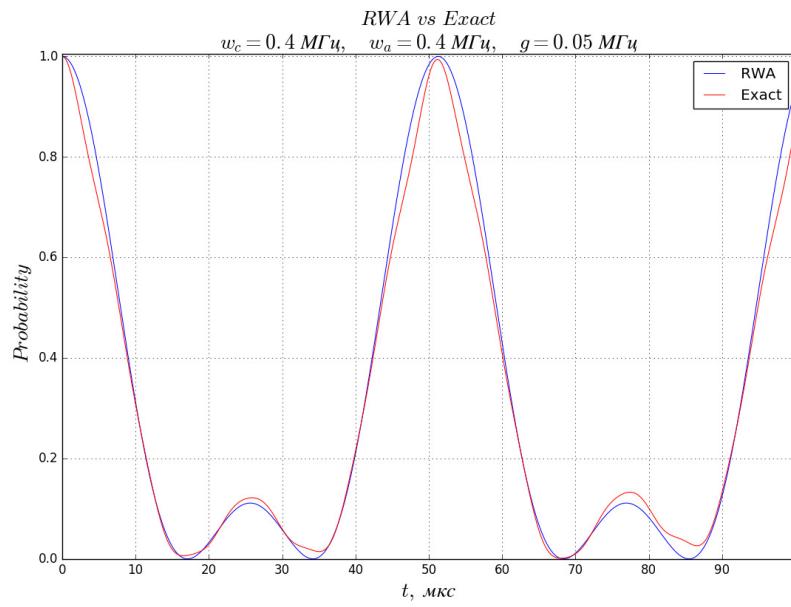
Рис. 5:  $|200\rangle$

Далее производится сравнение решения RWA и точного решения для более сложных систем при различных значениях константы  $g$  взаимодействия атомов с полем.

Для простоты будем рассматривать системы с нулевой расстройкой:  $w_c = w_a$ .

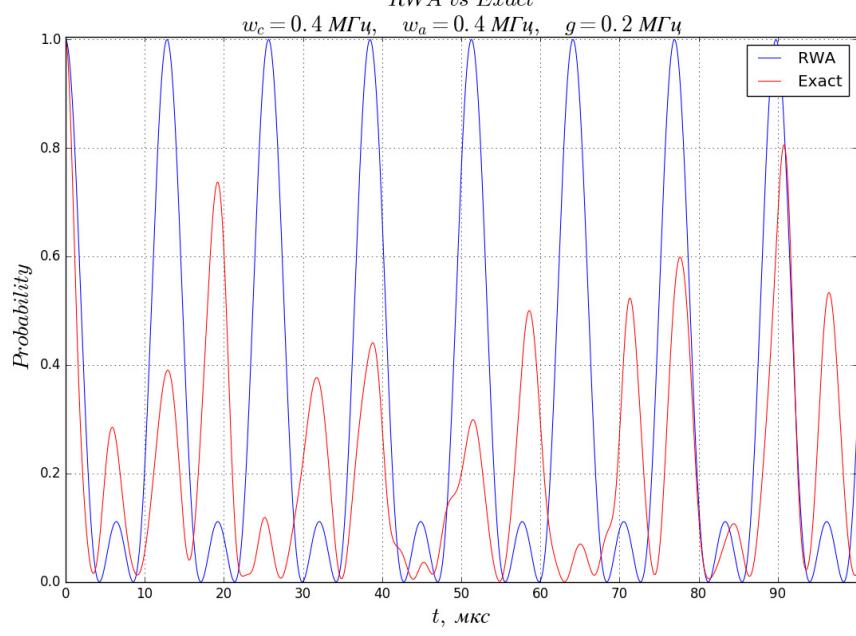
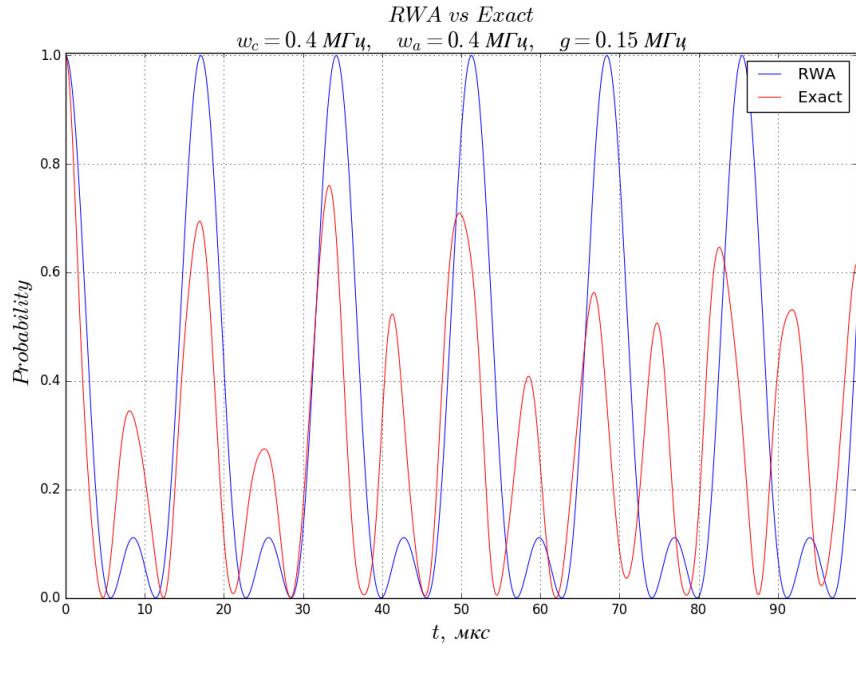
Состояние:  $|200\rangle$

(максимум в полости: 16 фотонов; 2 атома; начальное состояние:  $|200\rangle$ )



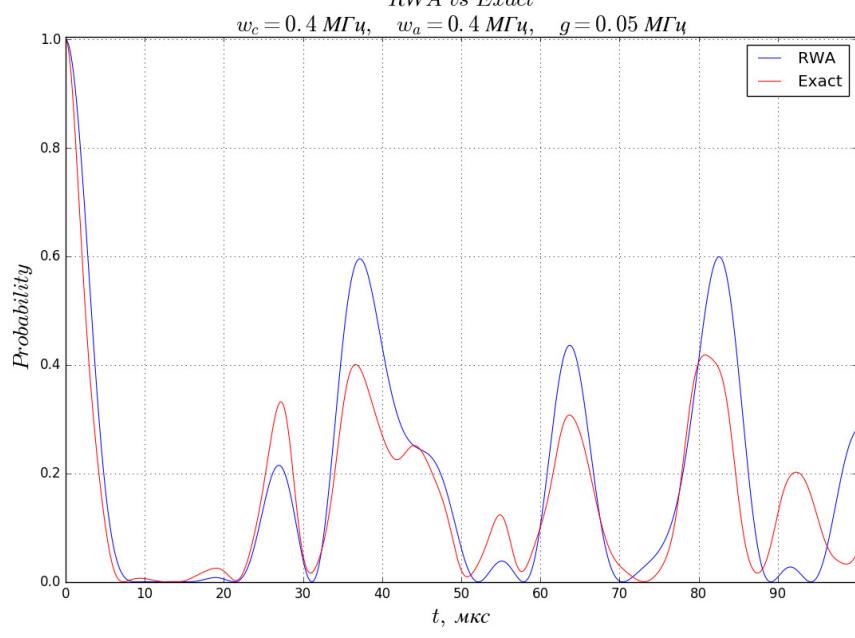
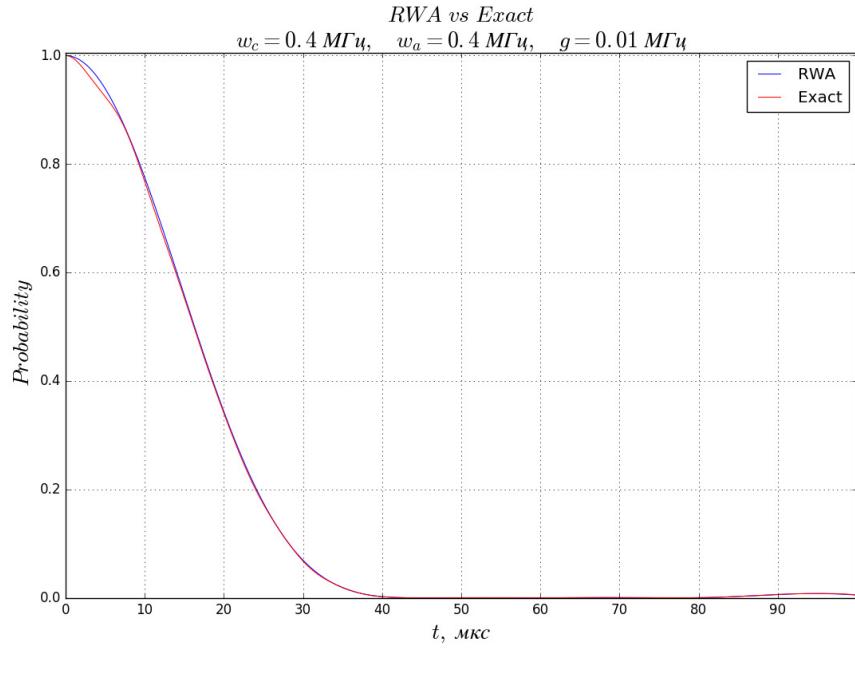
Состояние:  $|200\rangle$

(максимум в полости: 16 фотонов; 2 атома; начальное состояние:  $|200\rangle$ )



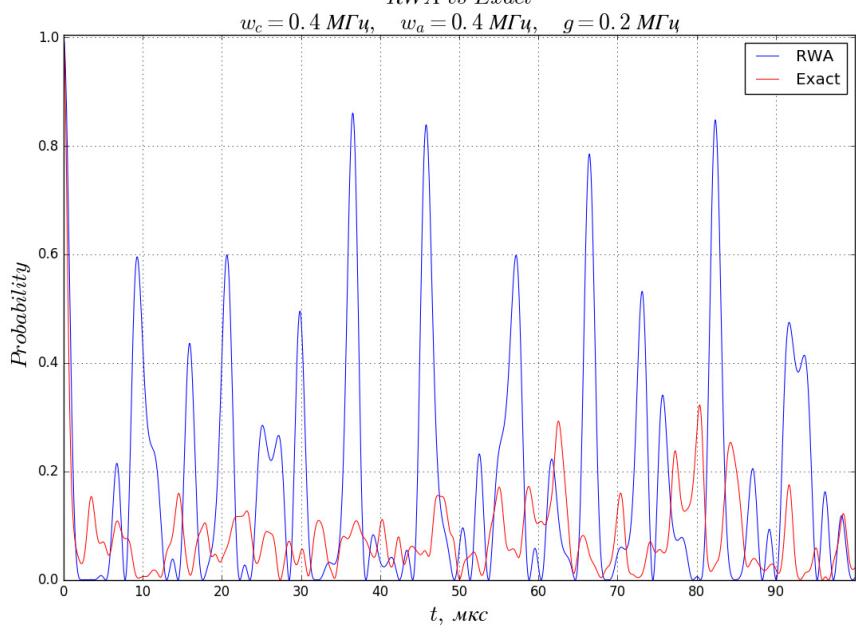
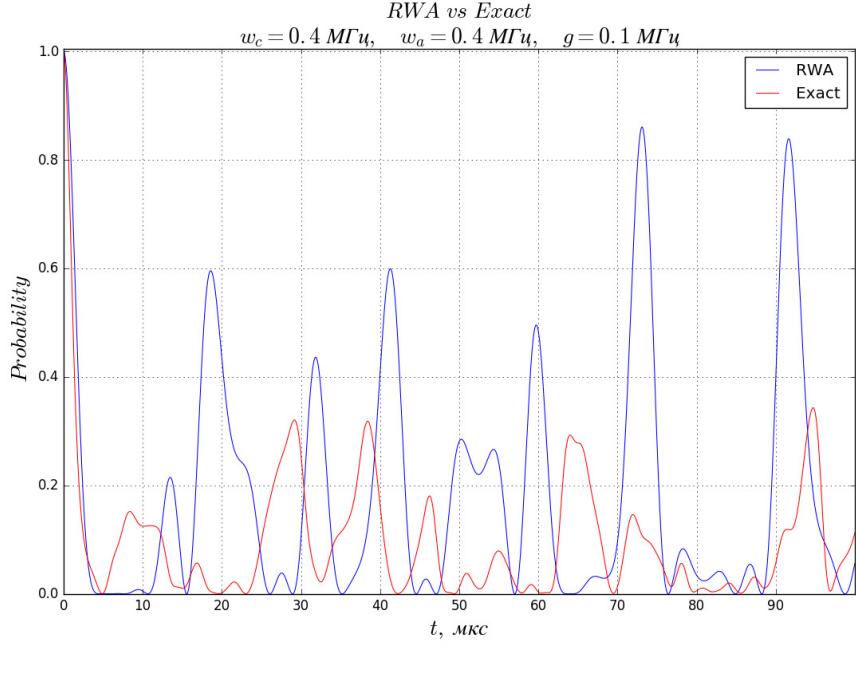
Состояние:  $|500000\rangle$

(максимум в полости: 32 фотона; 5 атомов; начальное состояние:  $|500000\rangle$ )



Состояние:  $|500000\rangle$

(максимум в полости: 32 фотона; 5 атомов; начальное состояние:  $|500000\rangle$ )



## 6 Оценка разности решений (RWA и точного) в зависимости от параметров

Для оценки количественной степени расхождения решений RWA и точного будем использовать меру Фробениуса матриц плотности  $\rho(t)$  и  $\rho_{RWA}(t)$  квантового состояния в момент времени  $t$ .

Норма Фробениуса:  $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^+ A)}$

На рис. 6-8 представлены графики зависимости  $\max_t \text{Abs}(\|\rho(t)\| - \|\rho_{RWA}(t)\|)$  от величины  $(g/w_c)$ , определяющей применимость приближения RWA для модели Тависа-Каммингса (выберем  $w_c = w_a$ ).

Для представленных ниже систем можно считать, что решения RWA и точное совпадают (практически неотличимы) при  $(g/w_c) < 0.01$  (произведённая оценка).

Состояние:  $|10\rangle$   
(максимум в полости: 8 фотонов; 1 атом; начальное состояние:  $|10\rangle$ )

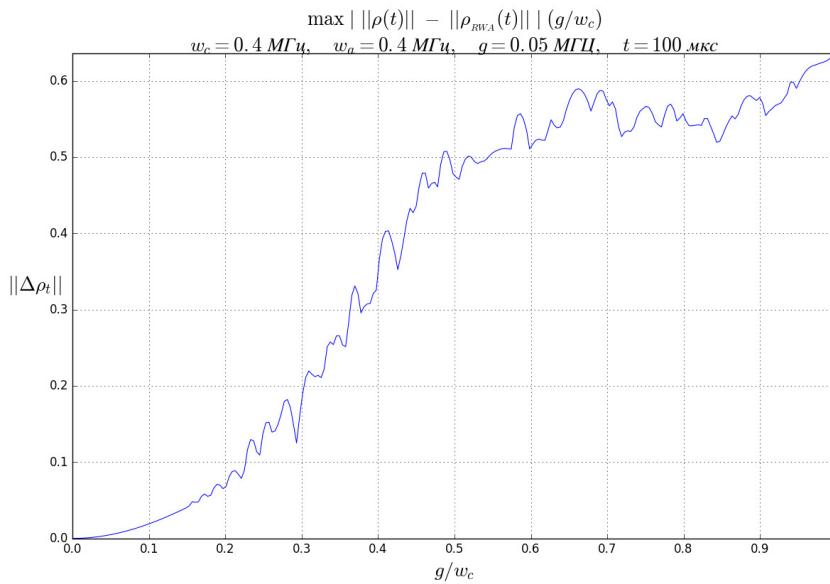


Рис. 6

Состояние:  $|200\rangle$   
 (максимум в полости: 16 фотонов; 2 атома, начальное состояние:  $|200\rangle$ )

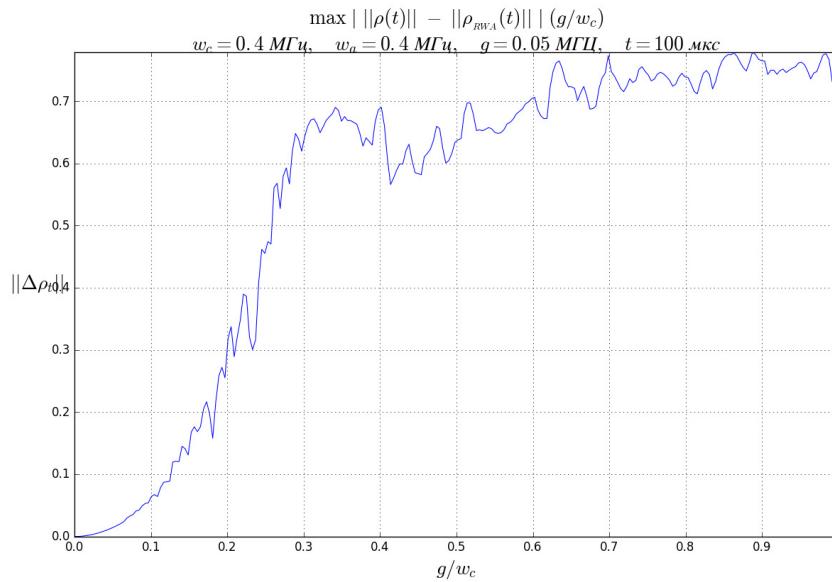


Рис. 7

Состояние:  $|40000\rangle$   
 (максимум в полости: 32 фотона; 4 атома, начальное состояние:  $|40000\rangle$ )

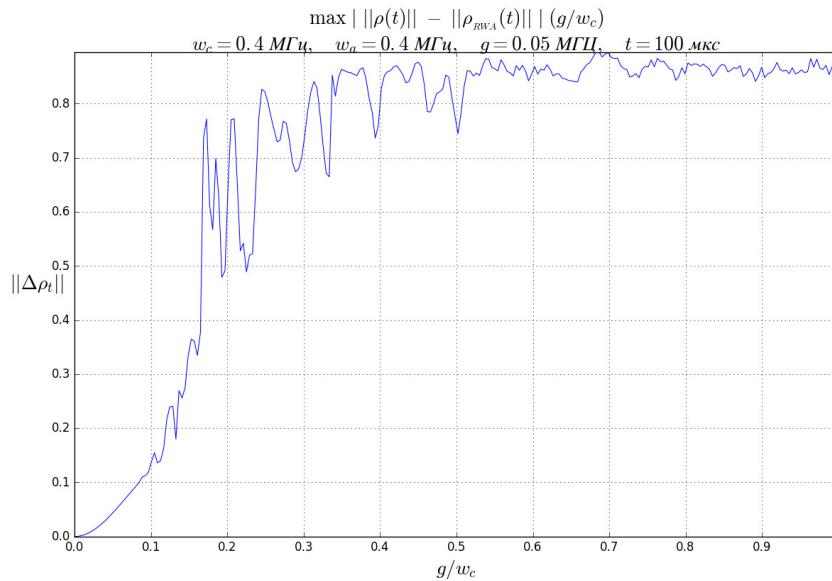


Рис. 8

## 7 Унитарная динамика модели ТСН

В данной главе представлены примеры работы программного модуля по построению унитарной динамики модели Тависа-Каммингса-Хаббарда для случая двух взаимодействующих полостей.

На рис. 9-11 продемонстрирована эволюция совместного состояния следующей квантовой системы: 2 полости, содержащие по 2 атома с уровнями  $|0\rangle$ ,  $|0\rangle$ .

В начальный момент времени каждая полость содержит 2 фотона.

Максимальное количество фотонов в каждой полости - 10.

Для простоты будем использовать системы с нулевой расстройкой  $w_{c_1} = w_{a_1}$ ,  $w_{c_2} = w_{a_2}$  при значениях  $g_1 = g_2$ .

Исследования зависимости разницы решений RWA и точного от параметров двух полостей в рамках данной работы не проводилось.

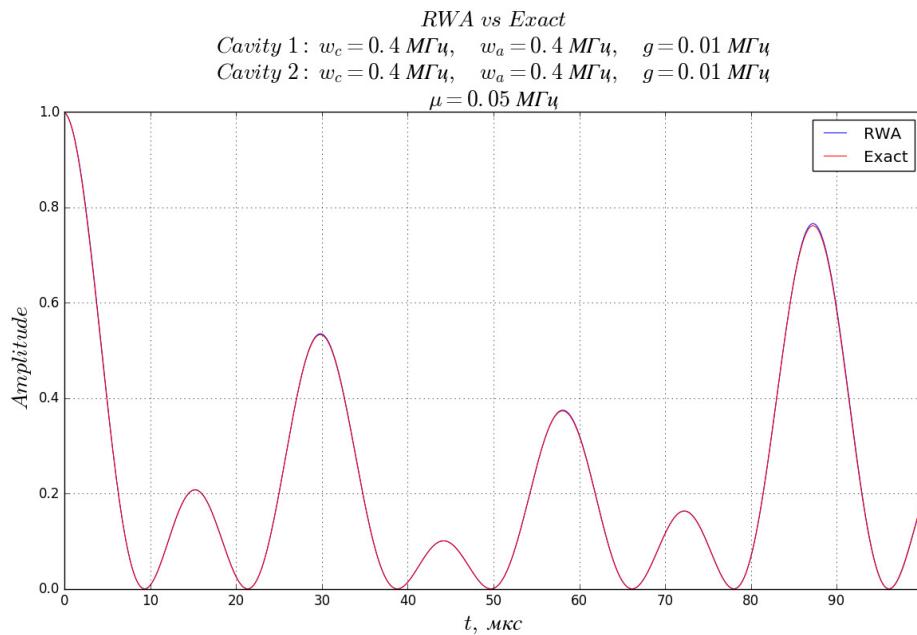


Рис. 9

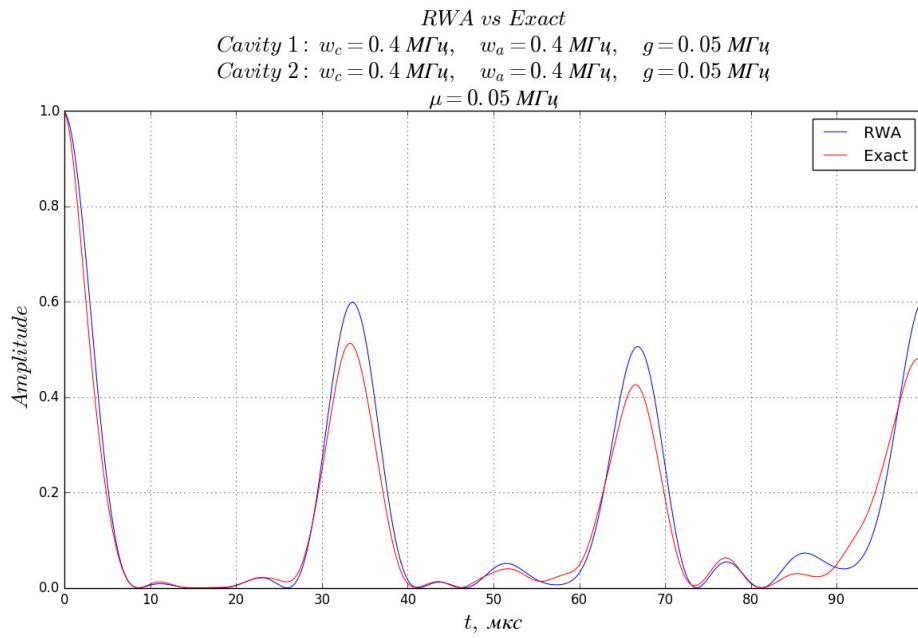


Рис. 10

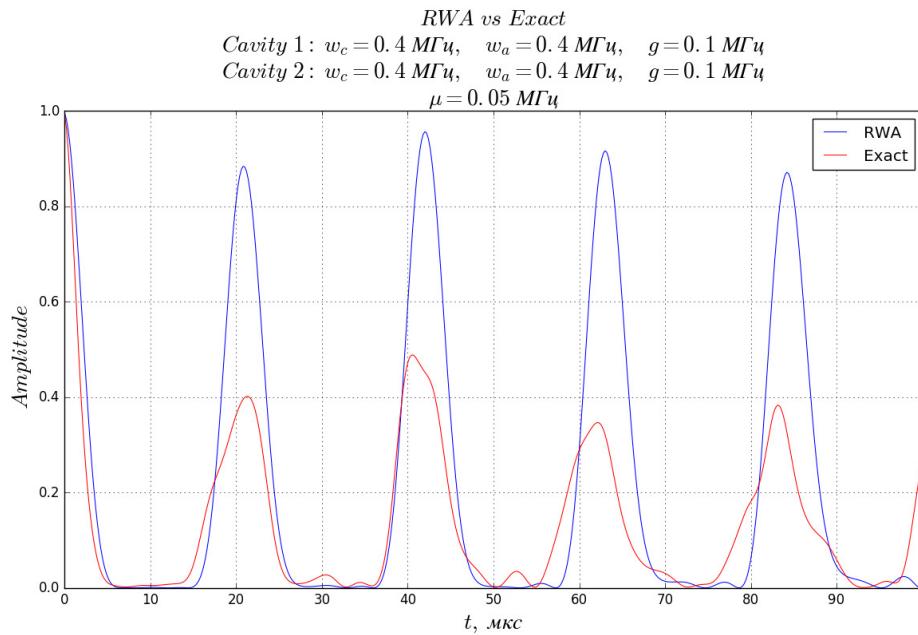


Рис. 11

## 8 Проблема «which way?»

Рассмотрим систему  $N$  **неидентичных** двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой электромагнитного поля в полости оптического резонатора.

Гамильтониан такой системы в приближении врачающейся волны будет иметь вид:

$$H_{RWA} = \underbrace{hw_c a^\dagger a}_{H_{field}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N h w_{a_i} \sigma_i^+ \sigma_i}_{H_{atoms}} + \underbrace{h \sum_{i=1}^N g_i (\sigma_i^+ a + \sigma_i a^\dagger)}_{H_{int}} \quad (7)$$

$w_{a_i}$  — частота атомного перехода  $i$ -го атома

$g_i$  — константа взаимодействия  $i$ -го атома с полем

Рассмотрим полость, содержащую 3 атома с уровнями  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$ .

Пусть изначально полость не содержит фотонов.

Начальное квантовое состояние:  $|0\rangle_{ph}|010\rangle$ .

Для этого состояния доступны следующие переходы:

$$\begin{aligned} |0\rangle_{ph}|010\rangle &\rightarrow |1\rangle_{ph}|000\rangle \rightarrow |0\rangle_{ph}|100\rangle \\ |0\rangle_{ph}|010\rangle &\rightarrow |1\rangle_{ph}|000\rangle \rightarrow |0\rangle_{ph}|001\rangle \end{aligned}$$

Поставим вопрос о нахождении наиболее вероятного перехода для начального квантового состояния в зависимости от частот перехода  $w_{a_i}$  и констант взаимодействия  $g_i$  атомов полости (проблема «which way?»):

$$|100\rangle \xleftarrow{?} |010\rangle \xrightarrow{?} |001\rangle$$

Для этого выберем  $w_{a_1} = w_{a_2} = w_{a_3}$  и  $g_1 = g_2 = g_3$ .

После чего в одном случае будем изменять частоту перехода  $w_{a_3}$ , а в другом — константу взаимодействия  $g_3$  для третьего атома.

$$w_{a_1} > w_{a_3}, \quad g_1 = g_3$$

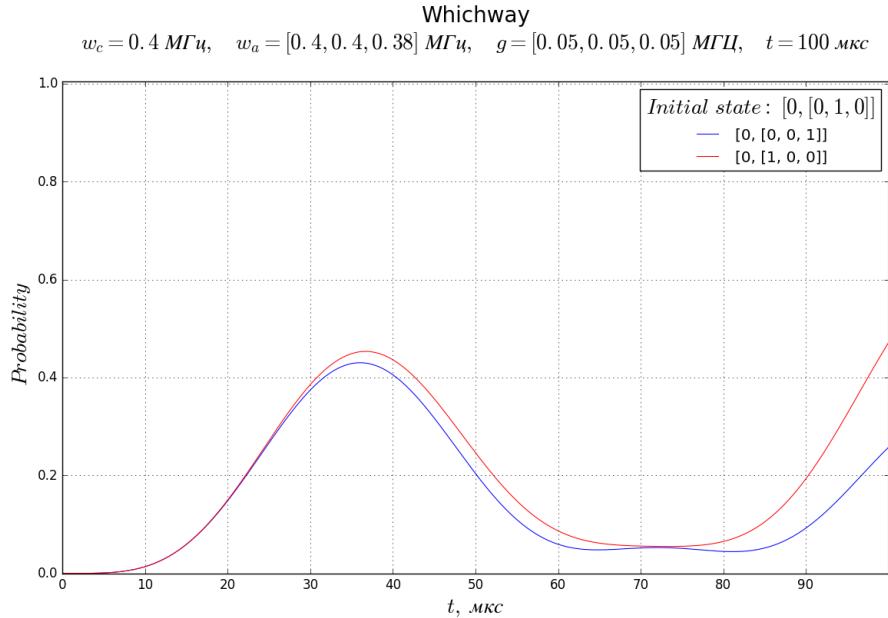


Рис. 12

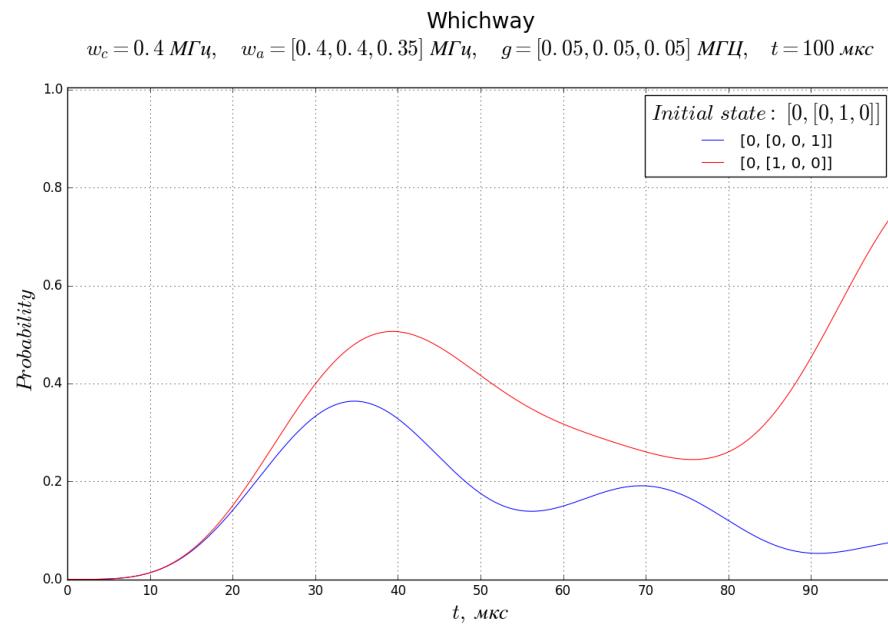


Рис. 13

$$w_{a_1} < w_{a_3}, \quad g_1 = g_3$$

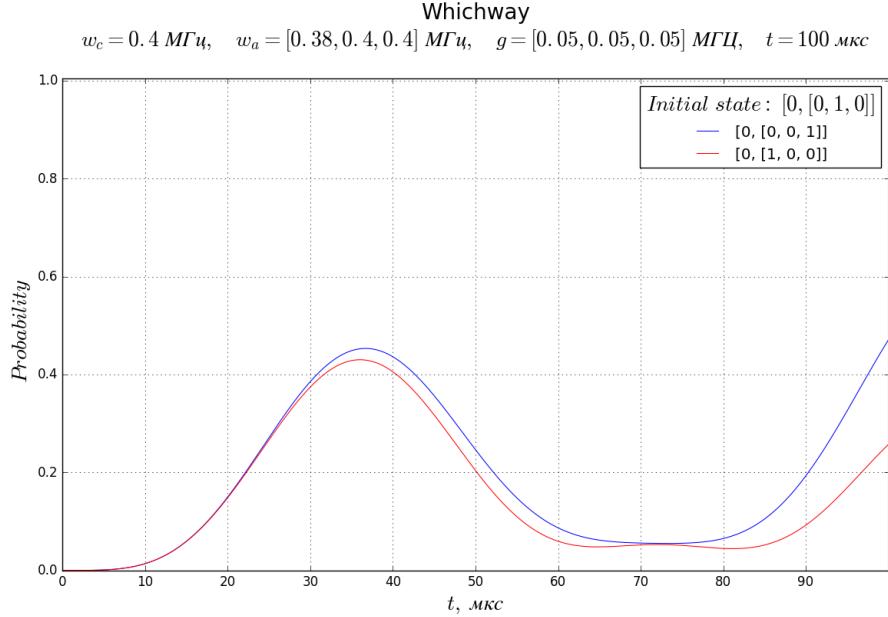


Рис. 14

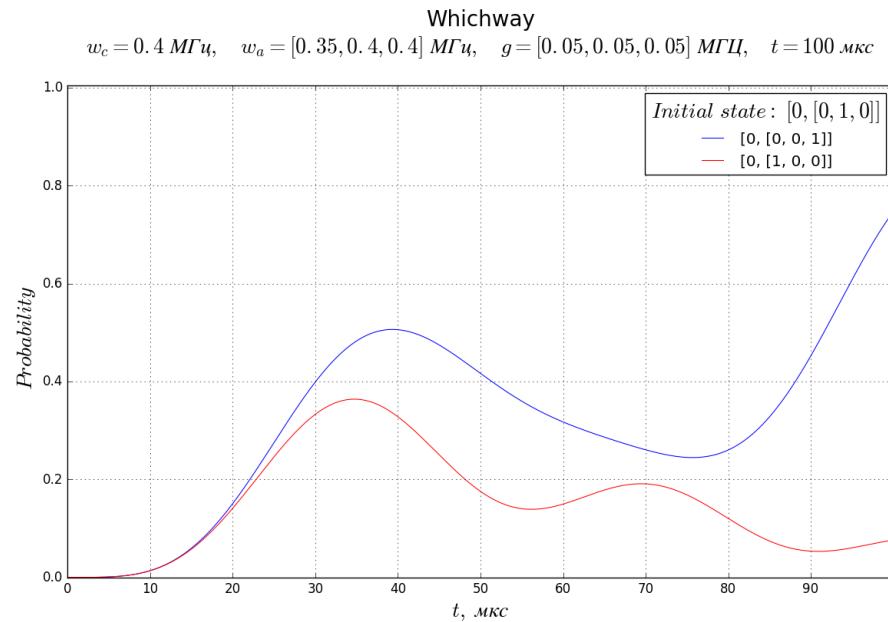


Рис. 15

$$w_{a_1} = w_{a_3}, \quad g_1 < g_3$$

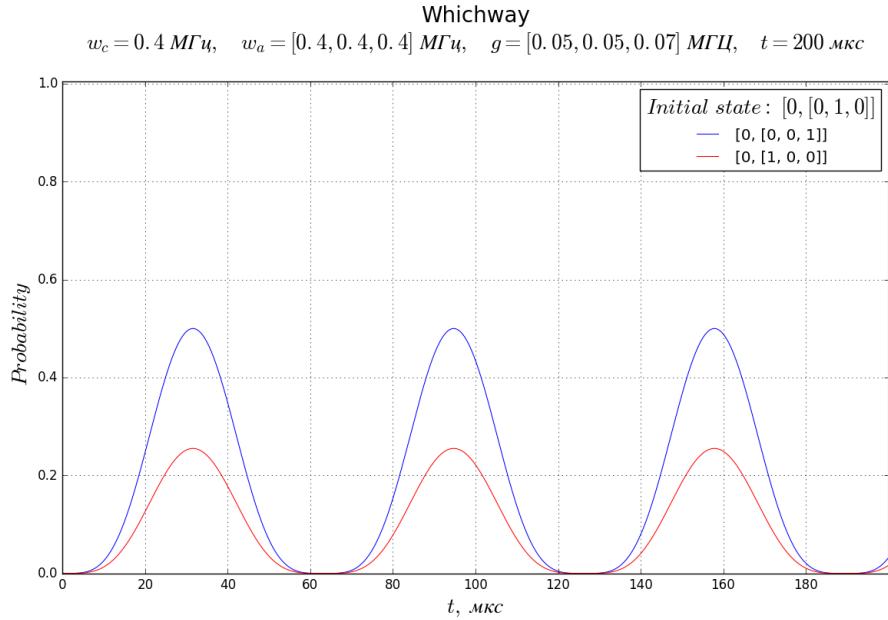


Рис. 16

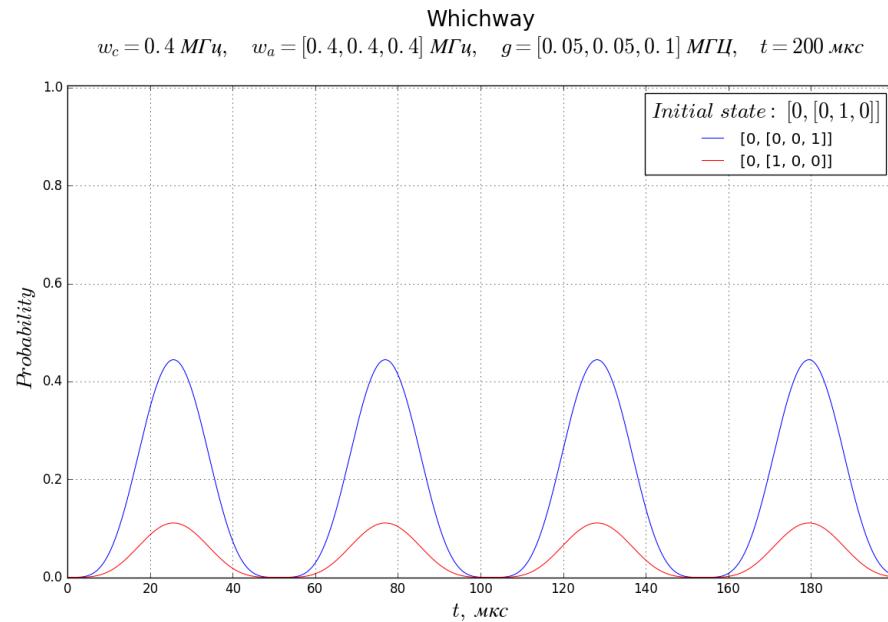


Рис. 17

$$w_{a_1} = w_{a_3}, \quad g_1 > g_3$$

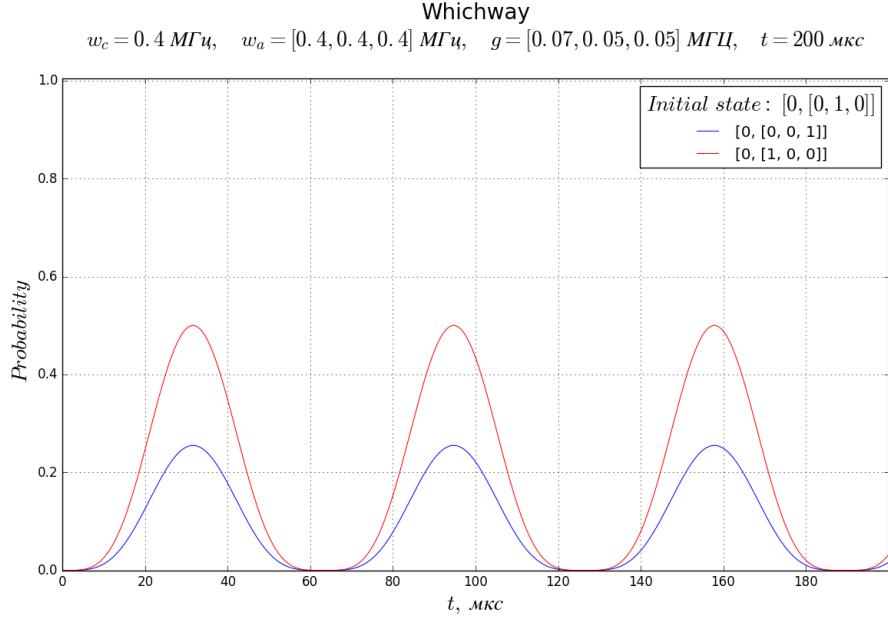


Рис. 18

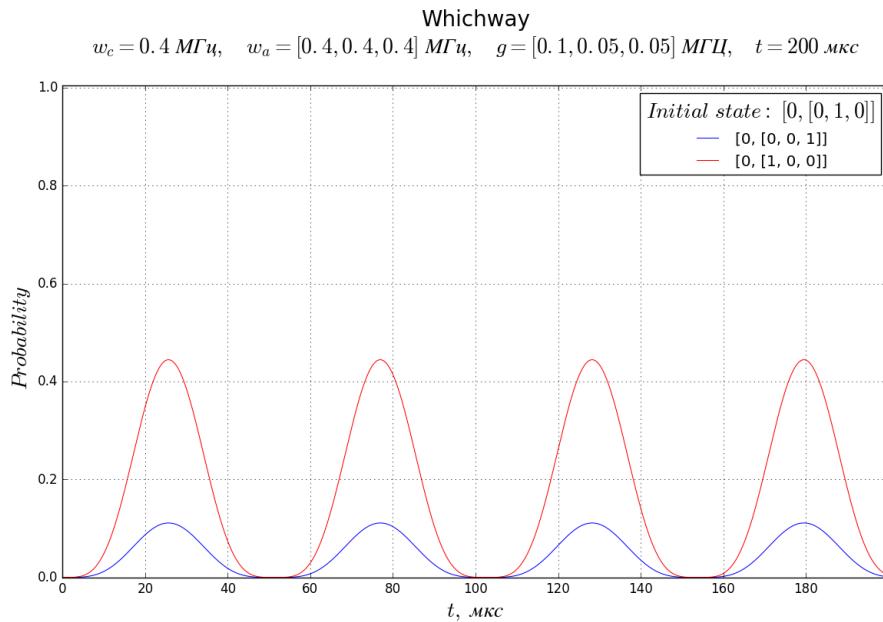


Рис. 19

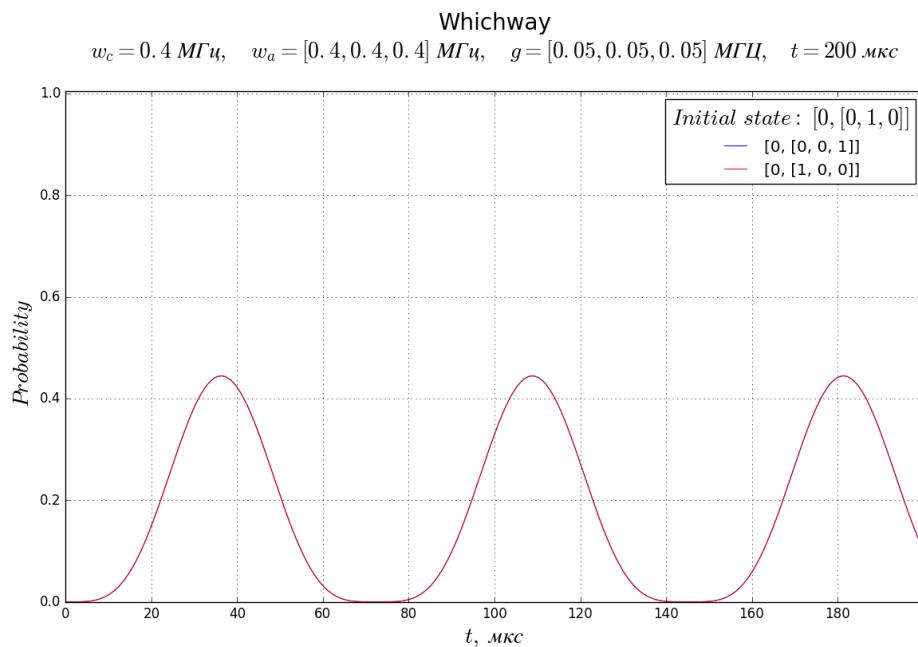


Рис. 20

Из представленных выше графиков можно сделать вывод о том, что увеличение частоты атомного перехода  $w_{a_i}$  способствуют возрастающей вероятности возбуждения соответствующего атома фотоном полости (рис. 12-15, 20).

Аналогичный вывод имеет место для константы  $g_i$  взаимодействия атома с полем (рис. 16-19, 20).

## 9 Описание программного модуля

В рамках данной работы был разработан программный модуль для построения унитарной динамики систем Тависа-Каммингса, а также систем Тависа-Каммингса-Хаббарда для случая двух взаимодействующих полостей.

Модуль реализован на языке Python для операционных систем семейства UNIX с использованием библиотек NumPy, SciPy и графического фреймворка PyQt.

На рис. 21-24 представлены снимки фрагментов пользовательского интерфейса.

Интерфейс позволяет пользователю задавать

- максимальное количество фотонов в полости
- количество атомов
- частоту фотонов
- частоты атомного перехода
- константу взаимодействия "атом-поле"
- частоту перелёта фотона между полостями (для TCH)
- начальное квантовое состояние, представленное в полости
- состояние, для которого требуется построить унитарную эволюцию
- временной интервал
- тип решения: "RWA / точное"

Максимальное число фотонов в полости ограничено 60, число атомов - 6.

Данные параметры определены в конфигурационном файле и при необходимости могут быть изменены пользователем.

Все исходные коды модуля доступны по ссылке: <https://github.com/alexfsu/TCM.git>

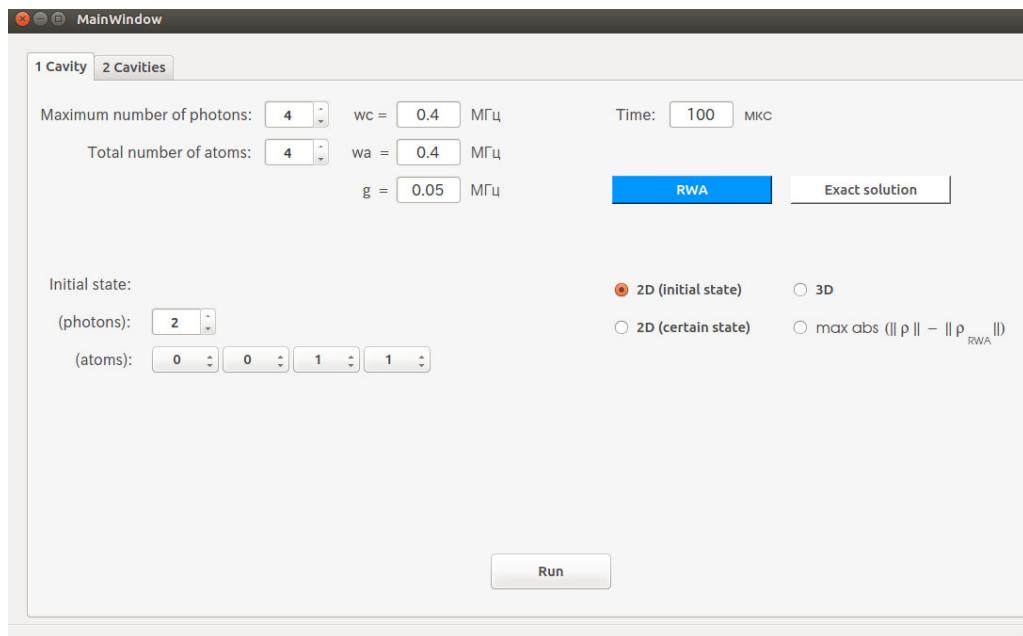


Рис. 21

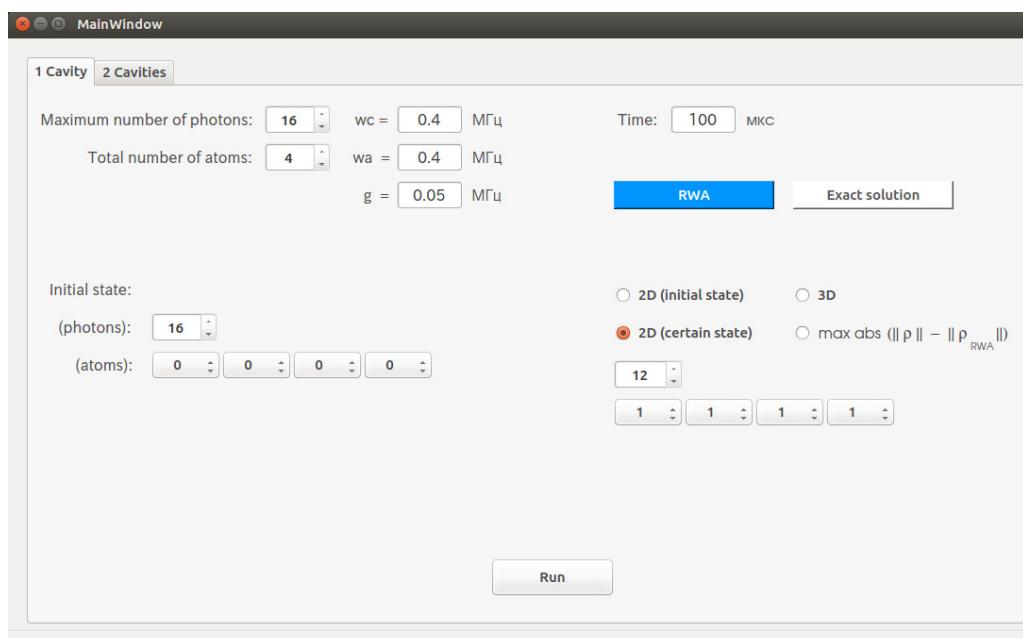


Рис. 22

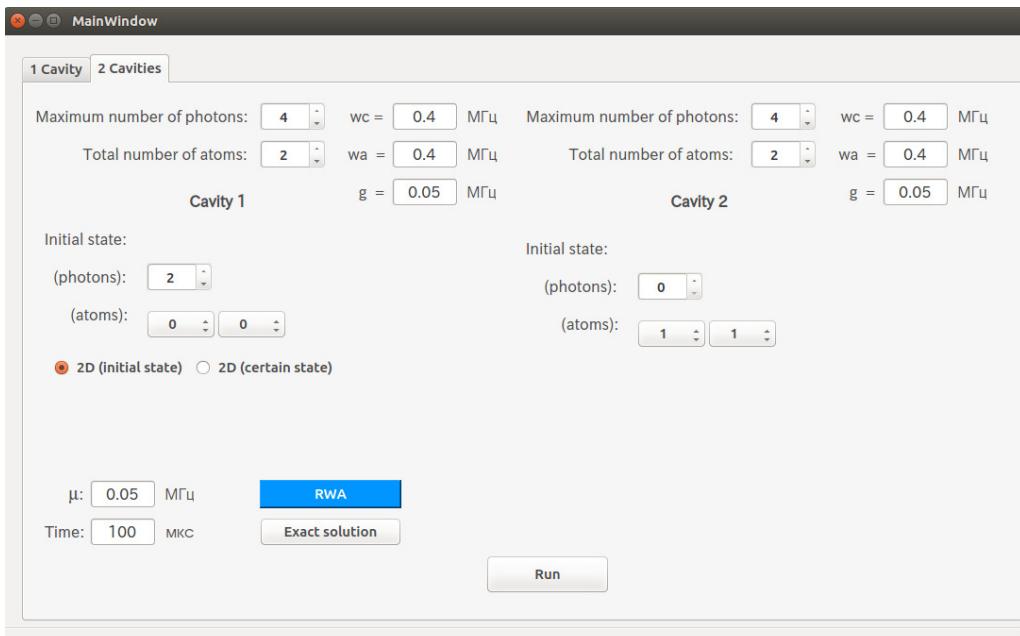


Рис. 23

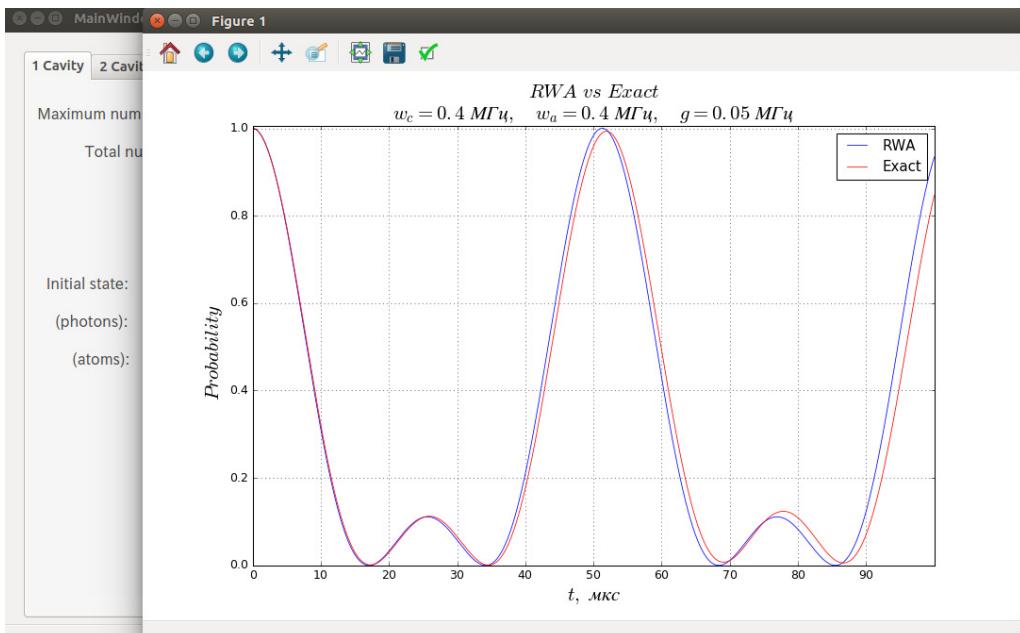


Рис. 24

## 10 Заключение

Реализована программа на языке Python, осуществляющая численное моделирование унитарной динамики моделей Тависа-Каммингса и Тависа-Каммингса-Хаббарда для двух полостей.

Графический интерфейс позволяет пользователю варьировать параметры системы, визуализировать эволюцию квантовых состояний как в случае RWA-приближения, так и в случае точного решения.

Также в рамках работы был численно воспроизведен эффект «which way?» и установлено влияние характерных параметров атома на вероятность его возбуждения фотоном полости (на примере квантового состояния  $|0\rangle_{ph}|010\rangle$ ):

- увеличение частоты атомного перехода  $w_a$  способствует возрастающей вероятности возбуждения соответствующего атома фотоном полости

Направление преимущественного возбуждения:

$$|010\rangle \rightarrow |001\rangle \text{ при } w_1 < w_3$$

$$|010\rangle \rightarrow |100\rangle \text{ при } w_1 > w_3$$

- увеличение константы  $g$  взаимодействия атома с полем также способствует возрастающей вероятности возбуждения соответствующего атома фотоном полости

Направление преимущественного возбуждения:

$$|010\rangle \rightarrow |001\rangle \text{ при } g_1 < g_3$$

$$|010\rangle \rightarrow |100\rangle \text{ при } g_1 > g_3$$

## **Список литературы**

- [1] M. Lemus, Y. Ozhigov, N. Skovoroda: Reliability of optical gate array for C-Sign operator. arXiv:1506.08381v1 [quant-ph] 28 Jun 2015.
- [2] H. Azuma: Quantum computation with the Jaynes-Cummings model. arXiv:0808.3027v7 [quant-ph] 15 Aug 2011.
- [3] S. Ghoreishi, M. Sarbishaei, K. Javidan: Entanglement between Two Tavis-Cummings Systems with N=2. International Journal of Theoretical and Mathematical Physics 2012, 2(6): 187-195.
- [4] M. Janowicz, A. Orlowski: Two-photon Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation. 2003
- [5] M. Mirzaee, M. Batavani: Atom–field entanglement in the Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation. Department of Physics, Faculty of Science, Arak University, 2015
- [6] S. Agarwal, S.M. Hashemi Rafsanjani and J.H. Eberly: Two Qubits Tavis-Cummings Model Beyond the Rotating Wave Approximation. University of Rochester, Rochester, New York, 2011