Отчет

Задание №2
Решение двумерного уравнения теплопроводности

(неявная схема, MPI)

выполнил
студент 510 группы ВМК МГУ
Кулагин Алексей

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу описания динамики распределения температуры на плоской поверхности прямоугольной пластины.

Данный процесс описывается уравнением теплопроводности с тремя независимыми переменными x, y, t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f\left(x,y,t\right), \quad (x,y) \in (a_1,b_1)\times(a_2,b_2), \tag{1}$$

где

$u(x,y,t)$ - искомая функция температуры,

$k(x,y)$ - функция распределения коэффициента температуропроводности,

$(x,y) \in (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ - область пространства, занимаемая пластиной.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задана температура в каждой точке пластины. Тогда граничные условия (первого рода) задаются уравнением:

$$u(x,y,0) = g_0(x,y). \tag{2}$$

Пусть, кроме того, температура на границах пластины задается функциями, зависящими от времени:

$$\begin{aligned} u(a_1,y,t) = g_{11}(t), \quad u(b_1,y,t) = g_{12}(t) \\ u(x,a_2,0) = g_{21}(t), \quad u(x,b_2,0) = g_{22}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Требуется определить значение функции $u(x,y,t)$ в момент времени $t = t_{max}$ $\forall (x,y) \in (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$, где $[0,\ t_{max}]$ - рассматриваемый промежуток времени.

2. Описание точного аналитического решения

Решение данной задачи будем производить с использованием метода конечных разностей.

Для аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностным введем пространственно-временную сетку

$$\Omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_t, \tag{4}$$

$$\omega_y = \left\{ y = i \cdot h_y, \quad i = 0, \ldots, n_y, \quad h_y = \frac{b_2 - a_2}{n_y} \right\}, \tag{5}$$

$$\omega_x = \left\{ x = j \cdot h_x, \quad j = 0, \ldots, n_x, \quad h_x = \frac{b_1 - a_1}{n_x} \right\}, \tag{6}$$

$$\omega_t = \left\{ t = k \cdot dt, \quad k = 0, \ldots, n_t, \quad dt = \frac{t_{max}}{n_t} \right\}, \tag{7}$$

$n_x,\ n_y,\ n_t$ - число узлов сетки по соответствующему направлению,

$[0,\ t_{max}]$ - рассматриваемый промежуток времени.

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{dt} = \frac{1}{dy}\left\{ k_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{dy} \ - \ k_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{dy} \right\} + \frac{1}{dx}\left\{ k_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{dx} \ - \ k_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}}{dx} \right\} + f_{ij}^{k+1}$$

$u_{i,j}^{0} = g_0\left(x_j, y_i\right),$

$u_{0,j}^{k} = g_{11}\left(t_k\right), \quad u_{n_y,j}^{k} = g_{12}\left(t_k\right), \quad u_{i,0}^{k} = g_{21}\left(t_k\right), \quad u_{i,n_x}^{k} = g_{22}\left(t_k\right),$

$k_{i\pm1/2,j} = \dfrac{2k_{i,j}k_{i\pm1,j}}{k_{i,j} + k_{i\pm1,j}}, \quad k_{i,j\pm1/2} = \dfrac{2k_{i,j}k_{i,j\pm1}}{k_{i,j} + k_{i,j\pm1}}, \quad k_{i,j} = k\left(x_j, y_i\right),$

$f_{ij}^{k} = f\left(x_j, y_i, t_k\right).$

Значение функции $u(x, y, t_{k+1})$ находится методом продольно-поперечной прогонки по направлениям x, y :

$$\frac{u_h^{k+\alpha/2} - u_h^{k+(\alpha-1)/2}}{dt} \ = \ \Lambda_{h,\alpha}^{k+\alpha/2} u_h^{k+\alpha/2} + \frac{1}{2} f_h^{k+1}, \quad \alpha = 1, 2$$

$t_{k+\alpha/2} \ = \ t_k + \alpha\tau/2.$

3. Описание метода решения и способа декомпозиции области

- рассматриваемая область разделяется на ленты (np лент, где np - число процессов). Каждый процесс содержит ny/np строк сетки
- каждый процесс производит продольную прогонку вдоль своей ленты, выставляя неблокирующие отправку и получение строк, являющихся граничными для других процессов (($i-1$)-й и ($i+1$)-й процессы, где i - номер текущего процесса).
- Закончив продольную прогонку внутренней области, процесс дожидается приема граничных строк соседних процессов. После чего, при наличии последних осуществляет прогонку своей верхней и нижней границ.
- Каждый процесс совершает продольную прогонку всех столбцов своей ленты (nx столбцов)
- Параллельная прогонка осуществляется каждым процессом сразу для всех столбцов: матрица параллельной прогонки отличается лишь правой частью - пересылка (nx+2)*8 байт ($i-1$)-му процессу.
- Каждый процесс решает (nx/np) уравнений для (nx/np) столбцов своей ленты, после чего отправляет их всем процессам

4. Описание используемой вычислительной системы

Расчеты проводились на вычислительной системе IBM Blue Gene/P факультета ВМК МГУ.

Интерконнект для операций «точка-точка»: коммуникационная сеть с топологией «трехмерный тор».

Основные характеристики:

- сеть общего назначения, объединяющие все вычислительные узлы
- вычислительный узел имеет двунаправленные связи с шестью соседями
- пропускная способность каждого соединения — 425 MB/s (5,1 GB/s для всех 12 каналов)
- латентность (ближайший сосед): 32-байтный пакет - 0,1 μs, 256-байтный пакет - 0,8 μs

Вычислительный узел:

- четыре микропроцессорных ядра PowerPC 450 (4-way SMP)
- пропускная способность памяти: 13,6 GB/sec
- 2 ГБ общей памяти
- 2 x 4 МБ кэш-памяти 2-го уровня
- асинхронные операции межпроцессорных обменов (выполняются параллельно с вычислениями)

Всего:

- 2048 вычислительных узлов
- 2048 процессоров (1 процессор на узел)
- 8192 ядра

Для расчетов последовательно использовались 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 и 256 ядер.

Глобальные коллективные операции и глобальные прерывания в ходе вычислений не применялись.

5. Аналитическая зависимость ожидаемого времени решения от параметров задачи и от параметров вычислительной системы

На одной итерации по времени:

Продольная прогонка: каждый процесс работает независимо. Число передаваемых / получаемых байт: (nx * 8) для первого и последнего процессов, (nx * 16) для остальных. Отправка/ожидание происходит в неблокирующем режиме в процессе прогонки.

Поперечная прогонка: каждый процесс выполняет поперечную прогонку для всех столбцов своей ленты, после чего передает данные, необходимые для параллельной прогонки, всем процессам. Число передаваемых байт: (3 * (nx-1) + nx + 2) * 8 для всей ленты + передача / прием (ny * 8) байт от каждого процесса (граничные решения X после решения им системы для своего блока - nx/np столблцов).

Эффективность падает при числе ядер большем 64, поскольку сперва выполняется поперечная прогонка всех столбцов ленты, а уже затем решение систем (своего блока: nx/np уравнений) каждым процессом. Результат: уменьшение эффективности. Оценка - в $\sqrt[4]{np}$ раз, где np - число ядер.

Время работы на p ядрах = время работы на одном ядре / $np \cdot \sqrt[4]{np}$ (что соответствует результатам раздела 7).

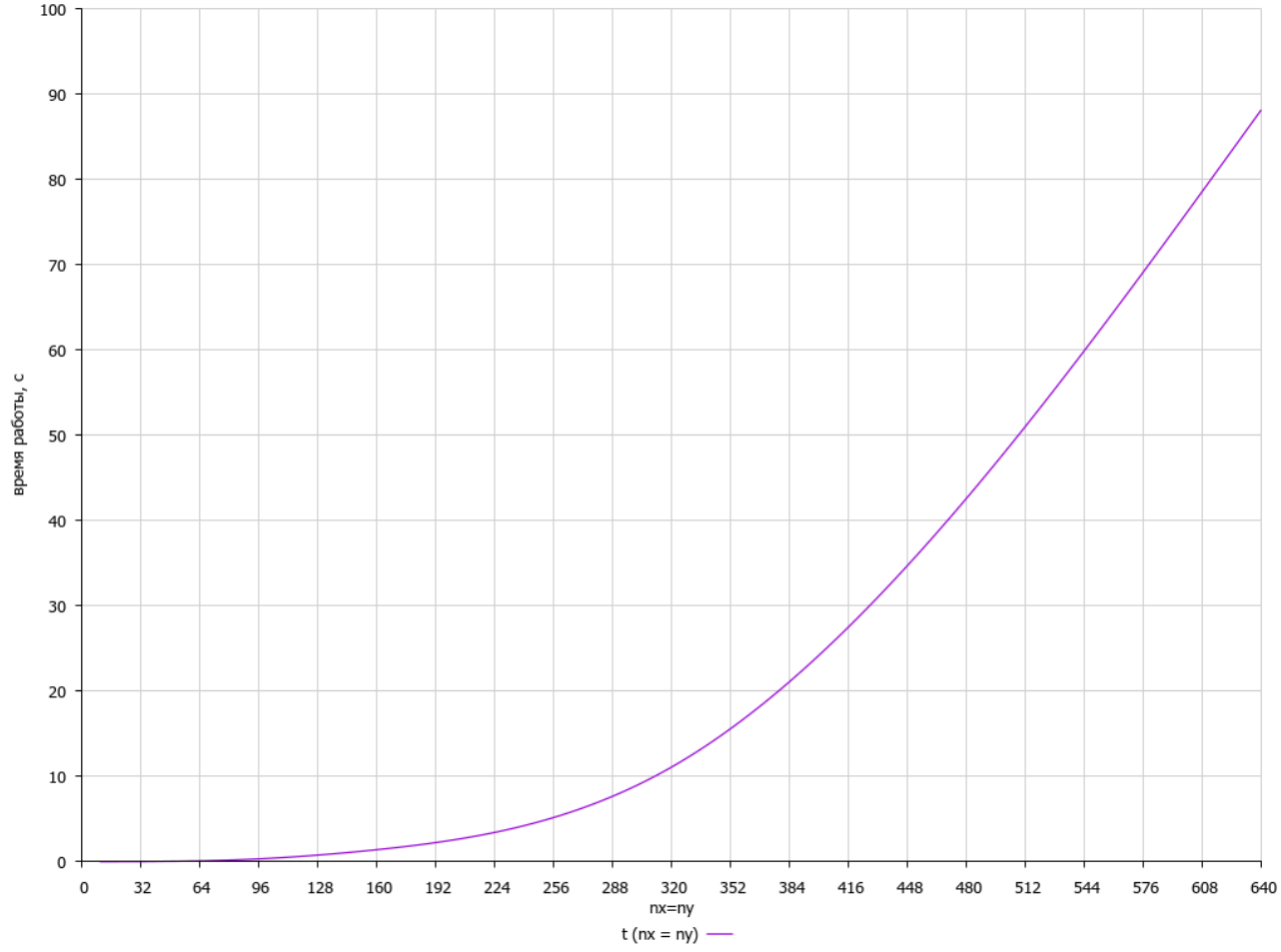
6. Сведения о значении ошибки (отклонения от точного решения) при выполнении расчетов на последовательности сгущающихся сеток

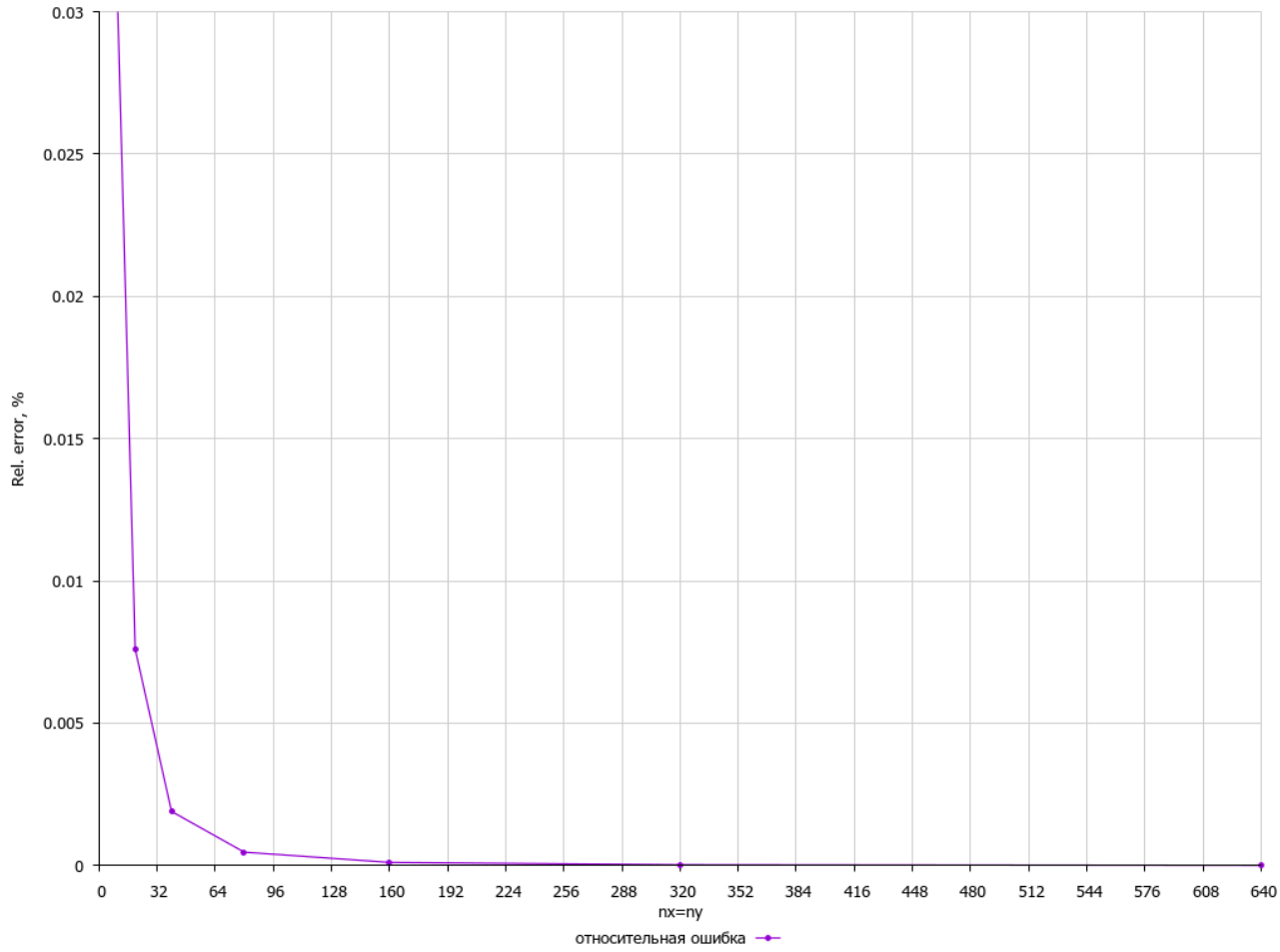
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f\left(x,y,t\right), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \quad t_{max} = 1$$

$k(x,y) = 1, \qquad f(x,y,t) = -exp(-t)\cdot(1-\pi^2)\cdot(sin(\pi x) + cos(\pi y))$

Точное решение: $u(x,y,t) = exp(-t)\cdot(sin(\pi x) + cos(\pi y)) + 10$

nx	ny	nt	Время работы, с	Abs. error	Rel. error
10	10	5	0.0005910000	0.0071110521	0.0317036691
20	20	10	0.0036400000	0.0016884379	0.0076918332
40	40	20	0.0250380000	0.0004175918	0.0019090978
80	80	40	0.1814900000	0.0001042791	0.0004764194
160	160	80	1.3973160000	0.0000260496	0.0001190516
320	320	160	11.0679420000	0.0000065114	0.0000297596
640	640	320	88.1342540000	0.0000016278	0.0000074397





Абсолютная ошибка: $Abs.\ error = \max\limits_{(a_1,b_2)\times(a_2,b_2)} \left\| u(x,y,t_{max}) - u_{exact}(x,y,t_{max}) \right\|$

Относительная ошибка: $Rel.\ error = \max\limits_{(a_1,b_2)\times(a_2,b_2)} \left\| \dfrac{Abs.\ error}{u_{exact}(x,y,t_{max})} \right\|$

Неявная разностная схема обладает первым порядком аппроксимации по dt и вторым порядком аппроксимации по dh (здесь: $dh = dx = dy$).

7. Таблицы и графики, содержащие сведения о размерах сеток, времени решения и эффективности распараллеливания

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f\left(x,y,t\right), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \quad t_{max} = 1$$

$$k(x,y) = 1, \qquad f(x,y,t) = -exp(-t)\cdot(1-\pi^2)\cdot(sin(\pi x) + cos(\pi y))$$

Точное решение: $u(x,y,t) = exp(-t)\cdot(sin(\pi x) + cos(\pi y)) + 10$

1) nx = 1000, ny = 1000, nt = 10

Число ядер	Время выполнения, с	Ускорение	Эффективность, %
1	21.340	1	100
2	11.416	1.869	93.460
4	6.108	3.493	87.335
8	2.808	7.599	94.989
16	1.421	15.013	93.834
32	0.740	28.831	90.098
64	0.447	47.642	74.441

```
edu-cmc-ski16-052@fen1:~/IMPLICIT_MPI> make accel
perl accel.pl
np              Time                    Speed Up                Efficiency, %           Abs. error              Rel. error
1               21.34000000             1                       100                     0.01021743              0.00105858
2               11.41655348             1.86921561199571        93.4607805997857        0.01021743              0.00105858
4               6.10865700              3.49340288708304        87.3350721770759        0.01021743              0.00105858
8               2.80820001              7.59917382095587        94.9896727619483        0.01021743              0.00105858
16              1.42138229              15.013554164939         93.8347135308686        0.01021743              0.00105858
32              0.74016574              28.8313803878575        90.0980637120545        0.01021743              0.00105858
64              0.44791619              47.6428413985215        74.4419396851898        0.01021743              0.00105858
```

2) nx = 2000, ny = 2000, nt = 10

Число ядер	Время выполнения, с	Ускорение	Эффективность, %
1	86.370	1	100
2	51.540	1.675	83.788
4	23.948	3.606	90.161
8	12.507	6.905	86.316
16	5.751	15.016	93.852
32	2.910	29.677	92.742
64	1.555	55.535	86.774
128	1.298	66.523	51.971

```
edu-cmc-ski16-052@fen1:~/IMPLICIT_MPI> make accel
perl accel.pl
np              Time                    Speed Up                Efficiency, %           Abs. error              Rel. error
1               86.37000000             1                       100                     0.01026958              0.00106405
2               51.54030490             1.6757758838947         83.7887941947352        0.01026958              0.00106405
4               23.94858354             3.60647634361093        90.1619085902731        0.01026958              0.00106405
8               12.50778247             6.90530077630939        86.3162597038674        0.01026958              0.00106405
16              5.75172039              15.0163766914268        93.8523543214172        0.01026958              0.00106405
32              2.91026589              29.6777006859672        92.7428146436476        0.01026958              0.00106405
64              1.55521196              55.5358383432185        86.7747474112789        0.01026958              0.00106405
128             1.29834320              66.5232428528913        51.9712834788213        0.01026958              0.00106405
```

3) nx = 4000, ny = 4000, nt = 10

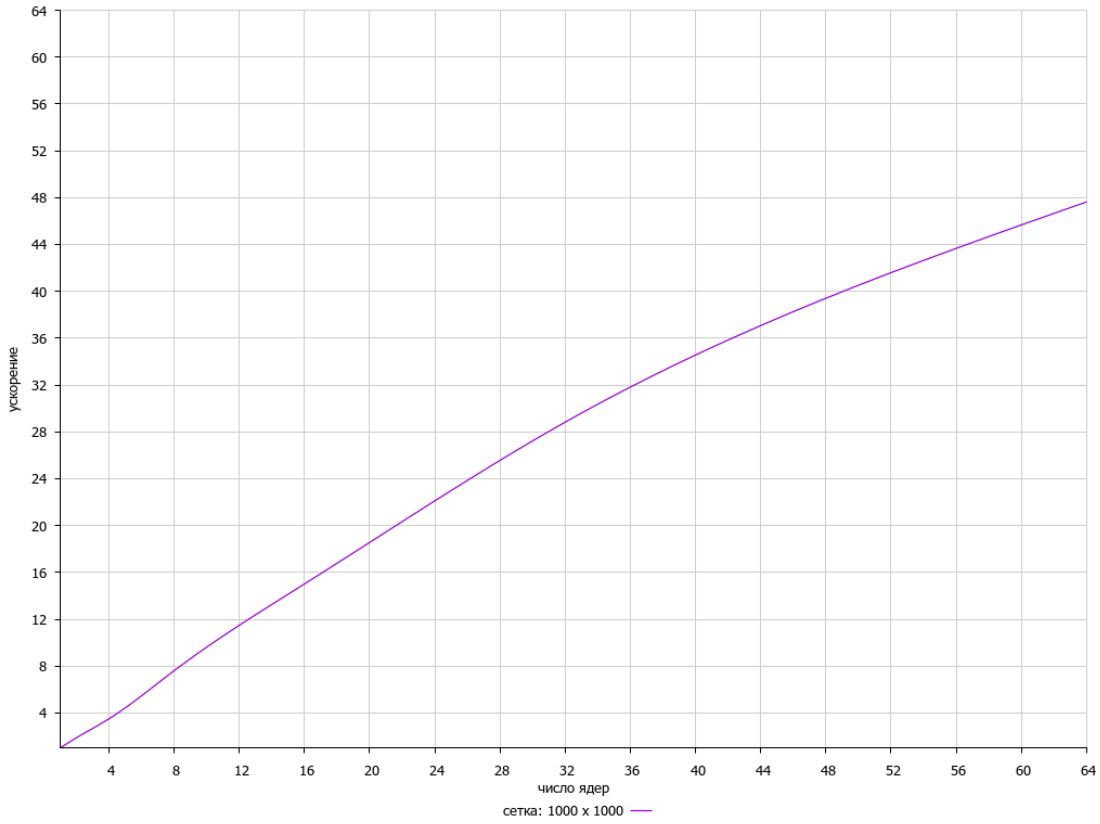
Число ядер	Время выполнения, с	Ускорение	Эффективность, %
1	351.000	1	100
2	207.917	1.688	84.408
4	105.789	3.317	82.948
8	52.076	6.740	84.250
16	25.461	13.785	86.157
32	11.628	30.184	94.327
64	6.523	53.807	84.073
128	4.159	84.385	65.926
256	5.652	62.092	24.254

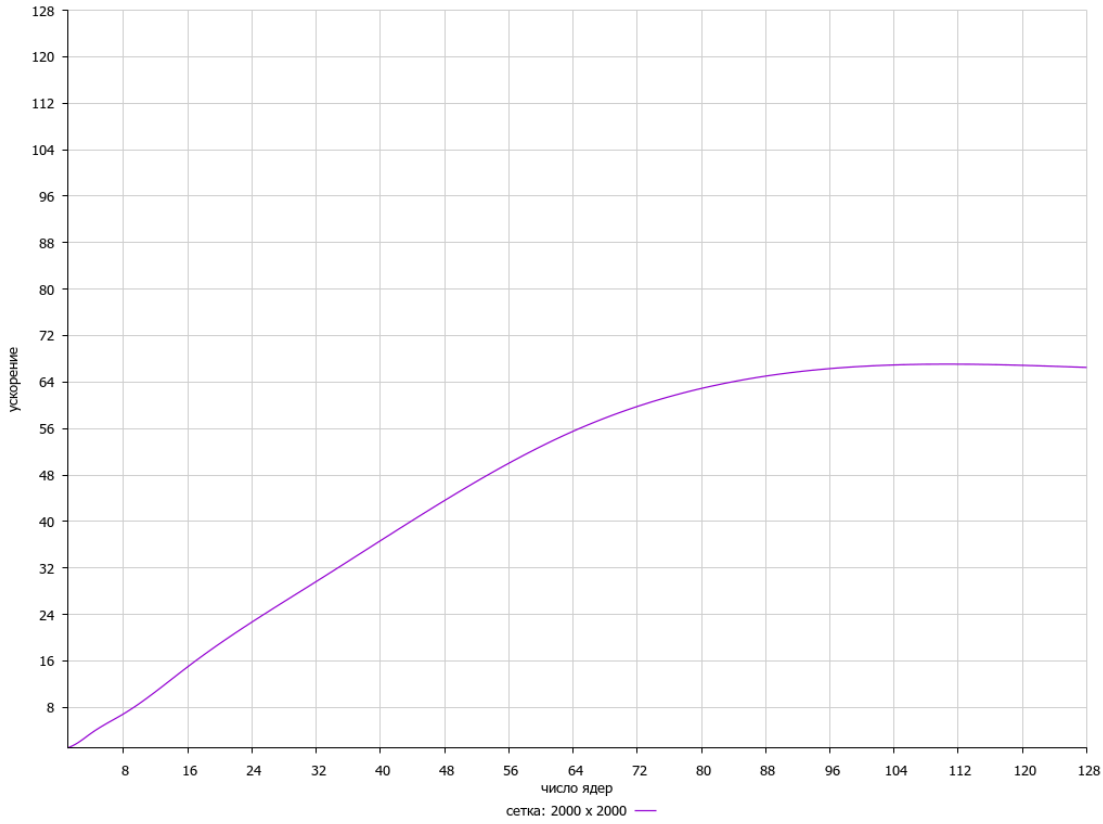
```
edu-cmc-ski16-052@fen1:~/IMPLICIT_MPI> make accel
perl accel.pl
np              Time                    Speed Up                Efficiency, %           Abs. error          Rel. error
1               351.00000000            1                       100                     0.01029575          0.00106680
2               207.91798740            1.68816562909843        84.4082814549214        0.01029575          0.00106680
4               105.78908212            3.31792272856522        82.9480682141304        0.01029575          0.00106680
8               52.07655438             6.74007726084892        84.2509657606115        0.01029575          0.00106680
16              25.46199179             13.7852530507002        86.157831566876         0.01029575          0.00106680
32              11.62841543             30.1846801150963        94.3271253596759        0.01029575          0.00106680
64              6.52329826              53.8071365144049        84.0736508037577        0.01029575          0.00106680
128             4.15947414              84.3856670785793        65.9263024051401        0.01029575          0.00106680
256             5.65286802              62.0923748366586        24.2548339205698        0.01029575          0.00106680
```

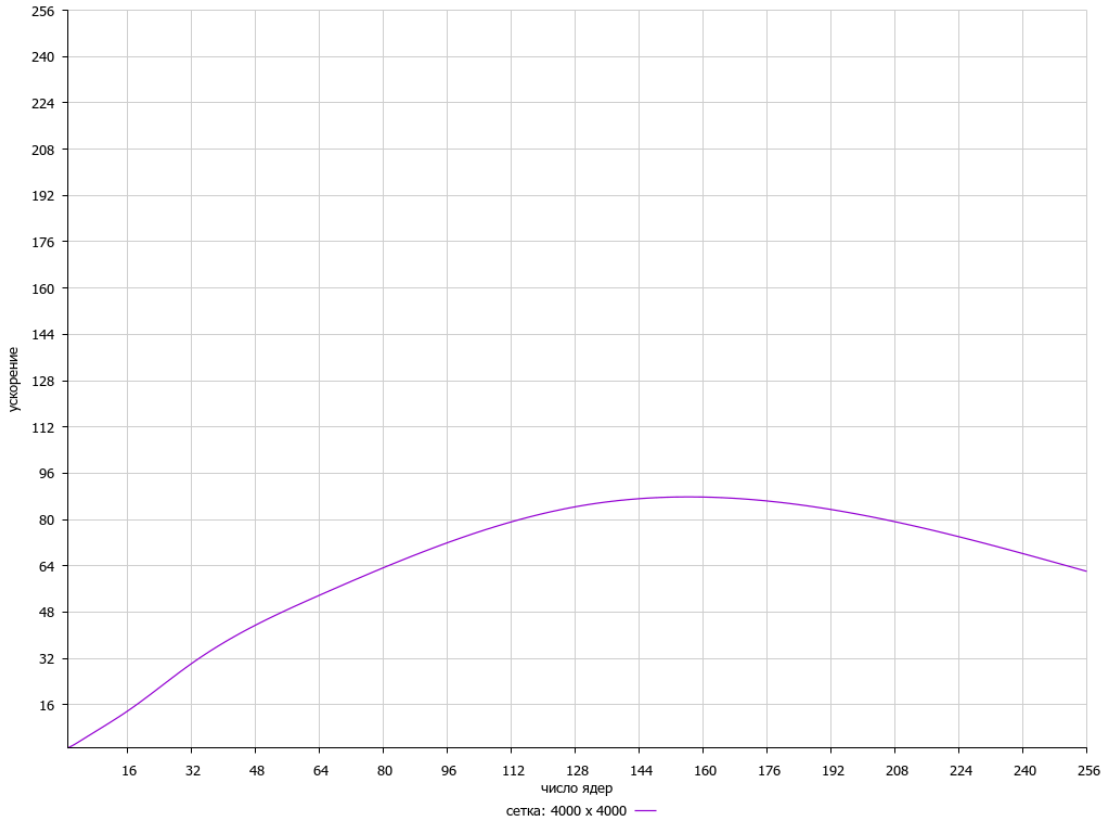
4) nx = 6000, ny = 6000, nt = 10

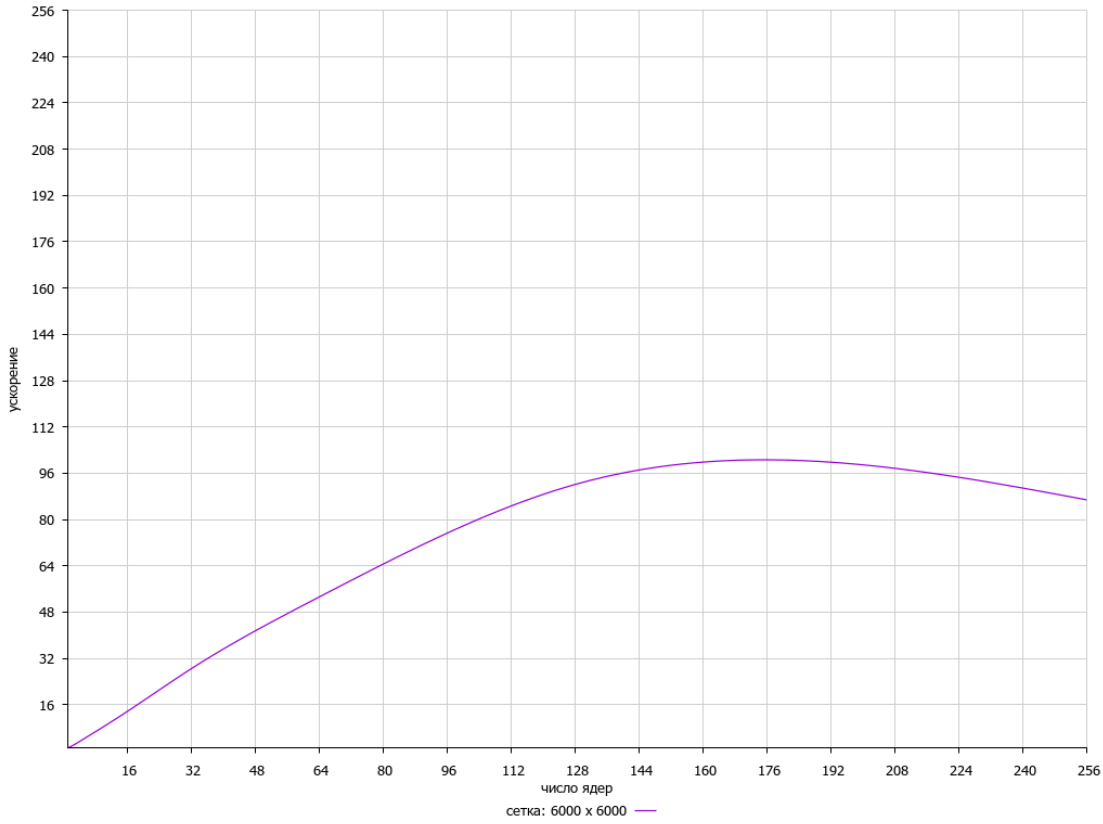
Число ядер	Время выполнения, с	Ускорение	Эффективность, %
1	789.010	1	100
2	471.086	1.674	83.743
4	240.844	3.276	81.900
8	118.509	6.657	83.221
16	57.550	13.709	85.686
32	27.719	28.463	88.949
64	14.817	53.247	83.199
128	8.566	92.106	71.958
256	9.090	86.798	33.905

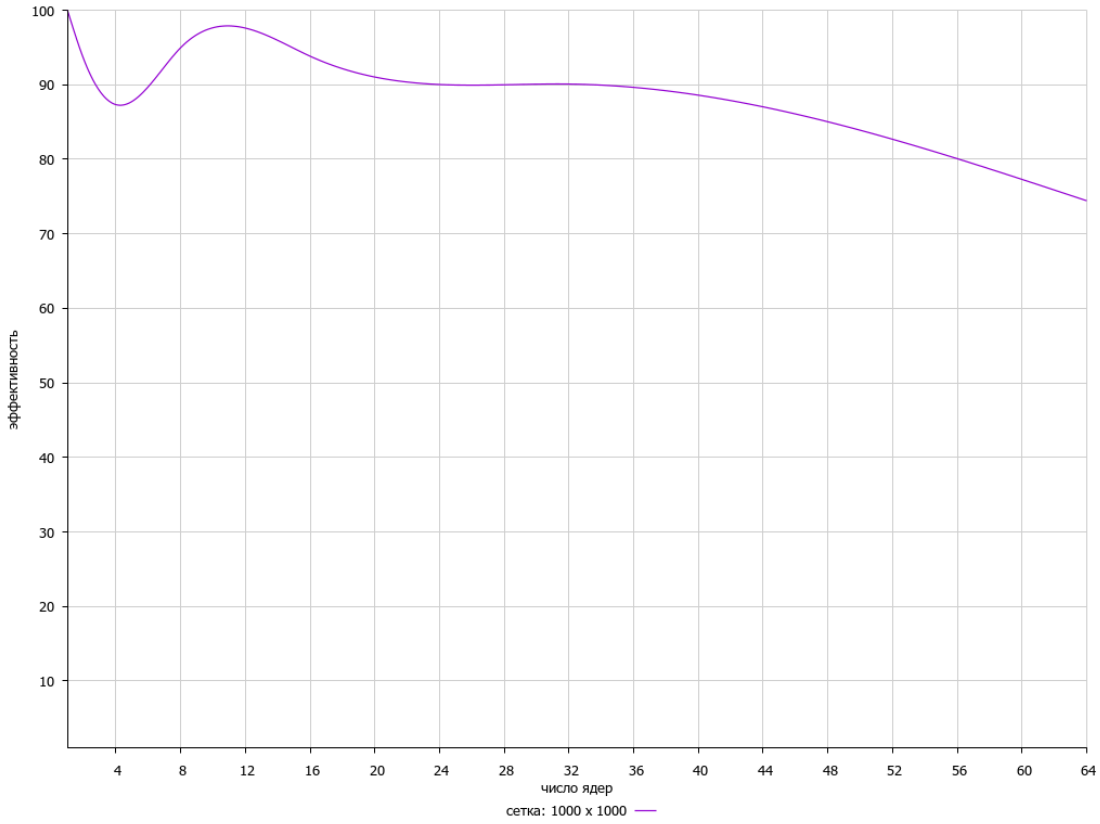
```
edu-cmc-ski16-052@fen1:~/IMPLICIT_MPI> make accel
perl accel.pl
np              Time                    Speed Up                Efficiency, %           Abs. error          Rel. error
1               789.01000000            1                       100                     0.01030449          0.00106771
2               471.08644281            1.6748730769954         83.7436538497698        0.01030449          0.00106771
4               240.84498903            3.27600753986092        81.9001884965229        0.01030449          0.00106771
8               118.50988182            6.65775704002807        83.2219630003509        0.01030449          0.00106771
16              57.55083118             13.709793304848         85.6862081552998        0.01030449          0.00106771
32              27.71967401             28.463898951891         88.9496842246595        0.01030449          0.00106771
64              14.81768515             53.2478583539076        83.1997786779806        0.01030449          0.00106771
128             8.56629470              92.1063339088719        71.9580733663062        0.01030449          0.00106771
256             9.09015877              86.7982639207522        33.9055718440438        0.01030449          0.00106771
```

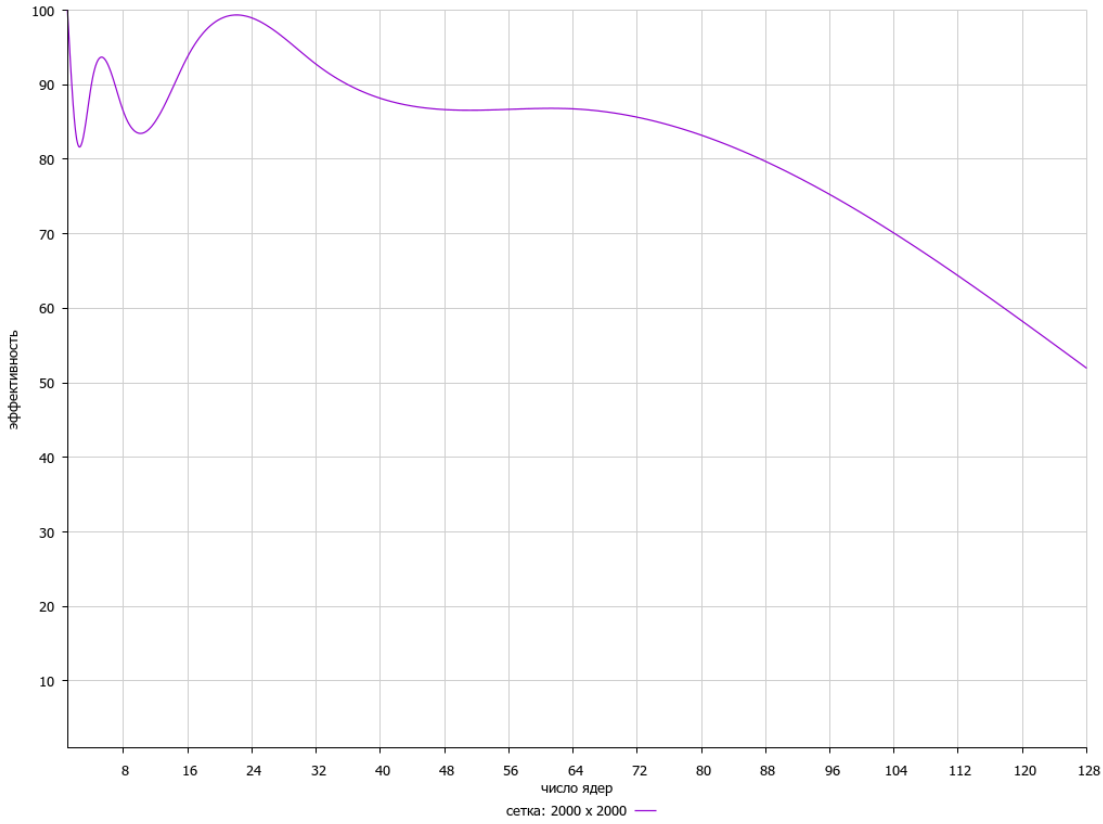

ускорение
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
64
число ядер
сетка: 1000 x 1000

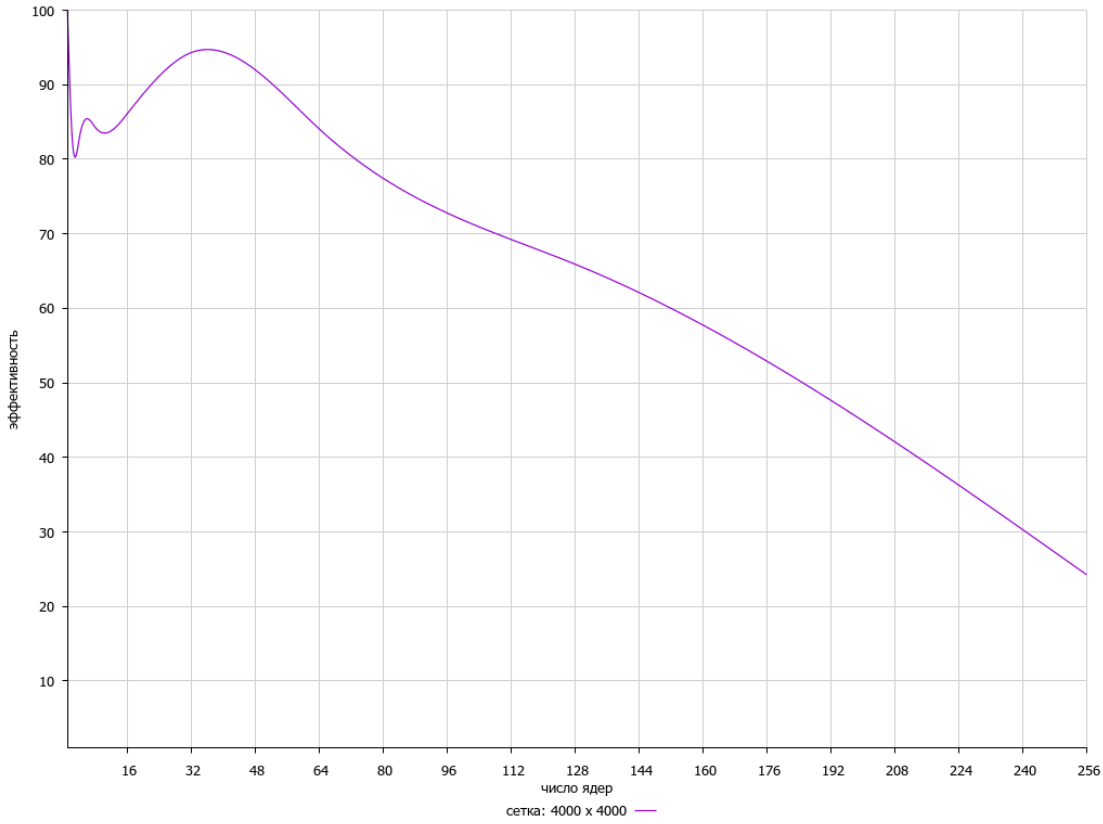

ускорение
128
120
112
104
96
88
80
72
64
56
48
40
32
24
16
8
8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
112
120
128
число ядер
сетка: 2000 x 2000

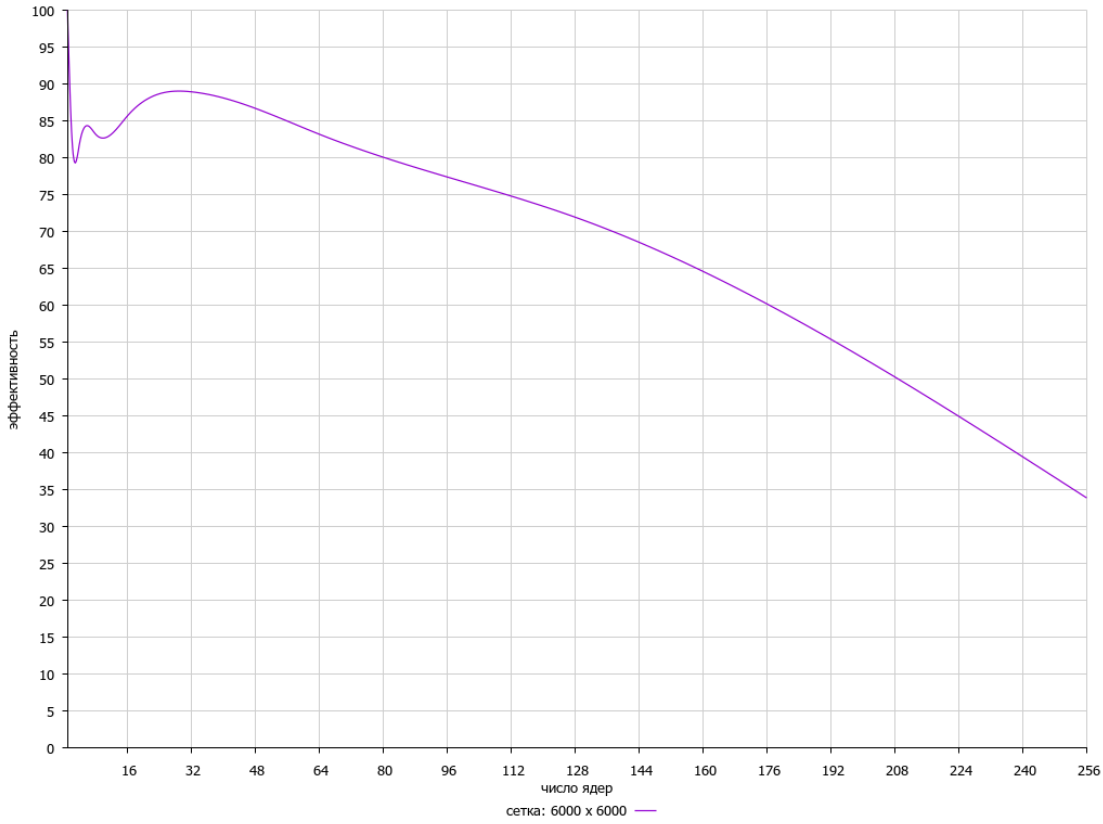

ускорение
256
240
224
208
192
176
160
144
128
112
96
80
64
48
32
16
16 32 48 64 80 96 112 128 144 160 176 192 208 224 240 256
число ядер
сетка: 4000 x 4000


ускорение
256
240
224
208
192
176
160
144
128
112
96
80
64
48
32
16
16 32 48 64 80 96 112 128 144 160 176 192 208 224 240 256
число ядер
сетка: 6000 x 6000


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
эффективность
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
64
число ядер
сетка: 1000 x 1000


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
эффективность
8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
112
120
128
число ядер
сетка: 2000 x 2000


эффективность
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
16
32
48
64
80
96
112
128
144
160
176
192
208
224
240
256
число ядер
сетка: 4000 x 4000


эффективность
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
16
32
48
64
80
96
112
128
144
160
176
192
208
224
240
256
число ядер
сетка: 6000 x 6000

8. Анализ полученных результатов

Параллельная программа хорошо масштабируется для числа процессов <= 64 (эффективность ≈ 0.9).

Эффективность падает при числе ядер большем 64, поскольку сперва выполняется поперечная прогонка всех столбцов ленты, а уже затем решение систем (своего блока: nx/np уравнений) каждым процессом с последующей рассылкой.

В силу чего, происходит уменьшение эффективности в $\sqrt[4]{np}$ раз.

9. Дополнительные материалы

Компиляция и запуск

Makefile

```
compile:
mpicxx implicit_single.cpp -o single.x;
mpicxx implicit_mpi.cpp -o mpi.x;

compile_O3:
mpicxx implicit_single.cpp -O3 -o single.x;
mpicxx implicit_mpi.cpp -O3 -o mpi.x;

compile_XL:
mpixlcxx implicit_single.cpp -o single.x;
mpixlcxx implicit_mpi.cpp -o mpi.x;

compile_XL_O4:
mpixlcxx implicit_single.cpp -O4 -o single.x;
mpixlcxx implicit_mpi.cpp -O4 -o mpi.x;

compile_XL_O5:
mpixlcxx implicit_single.cpp -O5 -o single.x;
mpixlcxx implicit_mpi.cpp -O5 -o mpi.x;

run1:
mpisubmit.bg -n 1 ./single.x data --stdout=1.out --stderr=1.err

run2:
mpisubmit.bg -n 2 ./mpi.x data --stdout=2.out --stderr=2.err

run4:
mpisubmit.bg -n 4 ./mpi.x data --stdout=4.out --stderr=4.err

run8:
mpisubmit.bg -n 8 ./mpi.x data --stdout=8.out --stderr=8.err

run16:
mpisubmit.bg -n 16 ./mpi.x data --stdout=16.out --stderr=16.err

run32:
mpisubmit.bg -n 32 ./mpi.x data --stdout=32.out --stderr=32.err

run64:
mpisubmit.bg -n 64 ./mpi.x data --stdout=64.out --stderr=64.err

run128:
mpisubmit.bg -n 128 ./mpi.x data --stdout=128.out --stderr=128.err

run256:
mpisubmit.bg -n 256 -w 00:10:00 ./mpi.x data --stdout=256.out --stderr=256.err

run512:
mpisubmit.bg -n 512 -w 00:05:00 ./mpi.x data --stdout=512.out --stderr=512.err

cancel:
llcancel -u edu-cmc-ski16-052

clean:
rm *.out *.err core* 2>/dev/null || echo > /dev/null

llq:
llq -u edu-cmc-ski16-052

accel:
perl accel.pl

run1_16:
```

```
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16; do make run$$i; done;

run1_16_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16; do make run$$i; done;

run1_16_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16; do make run$$i; done;

run1_32:
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16 32; do make run$$i; done;

run1_32_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16 32; do make run$$i; done;

run1_32_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16 32; do make run$$i; done;

run1_64:
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64; do make run$$i; done;

run1_64_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64; do make run$$i; done;

run1_64_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64; do make run$$i; done;

run1_64_XL_O4:
make cancel
make clean
make compile_XL_O4
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64; do make run$$i; done;

run1_64_XL_O5:
make cancel
```

```
make clean
make compile_XL_O5
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64; do make run$$i; done;

run1_128:
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128; do make run$$i; done;

run1_128_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128; do make run$$i; done;

run1_128_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128; do make run$$i; done;

run1_256:
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256; do make run$$i; done;

run1_256_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256; do make run$$i; done;

run1_256_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256; do make run$$i; done;

run1_512:
make cancel
make clean
make compile
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256 512; do make run$$i; done;

run1_512_O3:
make cancel
make clean
make compile_O3
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256 512; do make run$$i; done;

run1_512_XL:
make cancel
make clean
make compile_XL
make run1
for i in 2 4 8 16 32 64 128 256 512; do make run$$i; done;
```

Скрипт вывода времени работы, ускорения и эффективности вычислений для серии запусков (парсер выходных файлов):

accel.pl

```
use strict;
use warnings;

my $coeff = 80;

$coeff = $ARGV[0] if defined $ARGV[0];

my @files = ();

$files[$_] = (2 ** $_) for 0..10;

my %time = ();

my %accel = ();

my %param = ();

my %abs_err = ();
my %rel_err = ();

for my $name(@files){
    my $fh;

    open($fh, "<", $name.".out") or last;

    while(<$fh>){
        if(/^Time:\s+(.+)$/){
            $time{$name} = $1;
        }elsif(/^Abs. error:\s+(.+)$/){
            $abs_err{$name} = $1;
        }elsif(/^Rel. error:\s+(.+)$/){
            $rel_err{$name} = $1;
        }

        if(/^0:\s+(.+):\s+(.+)$/){
            $param{$1} = {} unless exists($param{$1});

            $param{$1}->{$name} = $2;
        }
    }

    close($fh);
}

if(keys %time){
    return unless defined $time{1};

    for(keys %time){
        $accel{$_} = $time{1} / $time{$_};
    }

    printf("%-15s %-25s %-25s %-25s %-20s %-20s\n", "np", "Time", "Speed Up", "Efficiency, %", "Abs. error", "Rel. error");

    for(sort {$a <=> $b} keys %time){
        printf("%-15s %-25s %-25s %-25s %-20s %-20s\n", $_, $time{$_}, $accel{$_}, ($accel{$_} / $_ * 100), $abs_err{$_}, $rel_e
    }
}else{
    print "No tasks completed\n";
}

print "\n";

if(keys %param){
    for my $i(sort {$a cmp $b} keys %param){
        return unless defined $param{$i}{1};
```

```
        my $h = $param{$i};

        my $show = 0;

        for(keys %{$h}){
            next if $h->{$_} == 0;

            if($h->{1} / $h->{$_} < $_ * $coeff / 100){
                $show = 1;
            }
        }

        if($show){
            printf("%-15s %-25s %-25s", "np", $i, "%");
            print "\n";

            for(sort {$a <=> $b} keys %{$h}){
                printf("%-15s %-25s %-25s\n", $_, $h->{$_}, $h->{1} / $h->{$_});
            }

            print "\n";
        }
    }
}
```

Пример использования:

`make run1_64_O3 (очистка очереди, компиляция, запуск на 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ядра)`
`make accel (вывод результатов)`

10. Приложение

Листинг программы

1) Последовательная версия

implicit_single.cpp

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cassert>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <ctime>
#include <mpi.h>

using namespace std;

// ------------------------
char* filename;
// ------------------------
double a1, b1;
double a2, b2;

double t_max;

int nx, ny, nt;

double dx, dy, dt;
double dx2, dy2;
double dt_1_2;

double* x;
double* y;
double* t;

double** u;
double** u_half;
// ------------------------
double *A_i, *B_i, *C_i;
double *A_j, *B_j, *C_j;
// ------------------------
double* F_i;
double* F_j;

double* X_i;
double* X_j;
// ------------------------
void print_grid();

void print_x();
void print_y();
void print_t();

void print_u();
void print_u_half();
void print_u_exact(int);
void print_error();

void free_memory();
// ------------------------

// BEGIN---------------------------------------- EXACT SOLUTION ---------------------------------------------
double u_exact(double x, double y, double t){
    // return exp(-t) * sin(M_PI * x) * cos(M_PI * y);
    return exp(-t) * (sin(M_PI * x) + cos(M_PI * y)) + 10;
}
// END------------------------------------------ EXACT SOLUTION ---------------------------------------------
```

```
// BEGIN---------------------------------------- F(x, y, t) ----------------------------------------------
double F(double x, double y, double t){
    // return exp(-t) * sin(M_PI * x) * cos(M_PI * y) * (2 * M_PI * M_PI - 1);
    return - exp(-t) * (sin(M_PI * x) + cos(M_PI * y)) * (1 - M_PI * M_PI);
}
// END------------------------------------------ F(x, y, t) ----------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- READ DATA ----------------------------------------------
void read_data(){
    FILE* f;

    f = fopen(filename, "r");

    if(f == NULL){
        cout << "Cannot open file \"" << filename << "\"" << endl;

        exit(1);
    }

    int count = fscanf(f, "%lf %lf %lf %lf %lf %d %d %d", &a1, &b1, &a2, &b2, &t_max, &nx, &ny, &nt);

    if(count < 8){
        cout << "Wrong data format in file \"" << filename << "\"" << endl << endl;
        cout << "Usage: a1 b1 a2 b2" << endl;
        cout << "       t_max" << endl;
        cout << "       nx ny nt" << endl;
        cout << endl;

        cout << "Example: 0 1 0 1" << endl;
        cout << "         1" << endl;
        cout << "         10 10 5" << endl;
        cout << endl;

        exit(1);
    }

    fclose(f);
}
// END------------------------------------------ READ DATA ----------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- THOMAS ALGORITHM ---------------------------------------
void solveMatrix(const int n, const double *_A, const double *_B, const double *_C, double *f, double *x){
    // ---------------------------
    double A[n];
    double B[n];
    double C[n];

    for(int i = 0; i < n; i++){
        A[i] = _A[i];
        B[i] = _B[i];
        C[i] = _C[i];
    }
    // ---------------------------
    double coeff;

    for(int i = 1; i < n; i++){
        coeff = A[i] / B[i-1];

        B[i] -= coeff * C[i-1];
        f[i] -= coeff * f[i-1];
    }

    x[n-1] = f[n-1] / B[n-1];

    for(int i = n-2; i >= 0; i--){
        x[i] = (f[i] - C[i] * x[i+1]) / B[i];
    }
}
// END------------------------------------------ THOMAS ALGORITHM ---------------------------------------
```

```
// BEGIN---------------------------------------- SET TRIAG COEFF ------------------------------------------
void set_triag_coeff(){
    A_i = new double[ny];
    B_i = new double[ny];
    C_i = new double[ny];

    for(int i = 0; i < ny; i++){
        A_i[i] = -1.0 / dy2;
        B_i[i] = 2.0 / dt + 2.0 / dy2;
        C_i[i] = -1.0 / dy2;
    }

    A_i[0] = 0;
    C_i[ny-1] = 0;
    // -------------------------------
    A_j = new double[nx];
    B_j = new double[nx];
    C_j = new double[nx];

    for(int i = 0; i < nx; i++){
        A_j[i] = -1.0 / dx2;
        B_j[i] = 2.0 / dt + 2.0 / dx2;
        C_j[i] = -1.0 / dx2;
    }

    A_j[0] = 0;
    C_j[nx-1] = 0;
}
// END------------------------------------------ SET TRIAG COEFF ------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- SET GRID ------------------------------------------------
void set_grid(){
    read_data();

    assert(a1 < b1);
    assert(a2 < b2);

    assert(t_max > 0);

    assert(nx > 0);
    assert(ny > 0);
    assert(nt > 0);

    dx = (b1 - a1) / nx;
    dy = (b2 - a2) / ny;
    dt = t_max / nt;

    dx2 = dx * dx;
    dy2 = dy * dy;

    dt_1_2 = dt / 2.0;

    try{
        x = new double[nx+1];
        y = new double[ny+1];
        t = new double[nt+1];

        u = new double*[ny+1];
        u_half = new double*[ny+1];

        for(int i = 0; i <= ny; i++){
            u[i] = new double[nx+1];
            u_half[i] = new double[nx+1];

            for(int j = 0; j <= nx; j++){
                u[i][j] = 0;
                u_half[i][j] = 0;
            }
        }
    }catch(std::bad_alloc){
        cout << "Cannot allocate memory" << endl;
```

```
        exit(1);
    }

    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        y[i] = a2 + i * dy;
    }

    for(int j = 0; j <= nx; j++){
        x[j] = a1 + j * dx;
    }

    for(int k = 0; k <= nt; k++){
        t[k] = k * dt;
    }
}
// END---------------------------------------- SET GRID ----------------------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- INITIAL CONDITIONS -------------------------------------------
double g_0(int j, int i){
    return u_exact(x[j], y[i], t[0]);
}

void set_initials(){
    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            u[i][j] = g_0(j, i);
        }
    }
}
// END---------------------------------------- INITIAL CONDITIONS -------------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- BOUNDARY CONDITIONS ------------------------------------------
void set_boundaries(double** _u, double _t){
    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        _u[i][0] = u_exact(x[0], y[i], _t);
        _u[i][nx] = u_exact(x[nx], y[i], _t);
    }

    for(int j = 0; j <= nx; j++){
        _u[0][j] = u_exact(x[j], y[0], _t);
        _u[ny][j] = u_exact(x[j], y[ny], _t);
    }
}
// END---------------------------------------- BOUNDARY CONDITIONS -------------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- SOLVE -------------------------------------------------------
void solve(){
    set_triag_coeff();

    F_i = new double[ny-1];
    F_j = new double[nx-1];

    X_i = new double[ny-1];
    X_j = new double[nx-1];

    set_initials();

    clock_t t1 = clock();

    for(int k = 0; k < nt; k++){
        double t_half = t[k] + dt_1_2;
        double t_k = t_half + dt_1_2;

        // BEGIN------------------------------- x-direction ------------------------------------------------
        set_boundaries(u_half, t_half);

        for(int i = 1; i < ny; i++){
            for(int j = 1; j < nx; j++){
                F_j[j-1] = (u[i+1][j] - 2 * u[i][j] + u[i-1][j]) / dy2 + F(x[j], y[i], t_half) + 2 * u[i][j] / dt;
```

```
                if(j == 1){
                    F_j[j-1] += u_exact(x[j-1], y[i], t_half) / dx2;
                }else if(j == nx-1){
                    F_j[j-1] += u_exact(x[j+1], y[i], t_half) / dx2;
                }
            }

            solveMatrix(nx-1, A_j, B_j, C_j, F_j, X_j);

            for(int j = 0; j < nx-1; j++){
                u_half[i][j+1] = X_j[j];
            }
        }
        // END---------------------------------- x-direction ------------------------------------------------

        // BEGIN-------------------------------- y-direction ------------------------------------------------
        set_boundaries(u, t_k);

        for(int j = 1; j < nx; j++){
            for(int i = 1; i < ny; i++){
                F_i[i-1] = (u_half[i][j-1] - 2 * u_half[i][j] + u_half[i][j+1]) / dx2 + F(x[j], y[i], t_half) + 2 * u_half[i][j]
            }

            F_i[0] += u_exact(x[j], y[0], t_k) / dy2;
            F_i[ny-2] += u_exact(x[j], y[ny], t_k) / dy2;

            solveMatrix(ny-1, A_i, B_i, C_i, F_i, X_i);

            for(int i = 0; i < ny-1; i++){
                u[i+1][j] = X_i[i];
            }
        }
        // END---------------------------------- y-direction ------------------------------------------------
    }

    clock_t t2 = clock();

    cout << "Time: " << (double)(t2 - t1) / (double)CLOCKS_PER_SEC << endl << endl;
}
// END---------------------------------------- SOLVE ------------------------------------------------------



int main(int argc, char** argv){
    cout << fixed << setprecision(8);

    if(argc < 2){
        cout << "Usage: ./a.out data" << endl;

        exit(1);
    }

    filename = argv[1];

    set_grid();

    solve();

    print_error();

    free_memory();

    return 0;
}



// BEGIN---------------------------------------- PRINT GRID ------------------------------------------------
void print_x(){
    cout << "x: ";
```

```
    for(int j = 0; j <= nx; j++){
        cout << x[j] << " ";
    }

    cout << endl << endl;
}

void print_y(){
    cout << "y: ";

    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        cout << y[i] << " ";
    }

    cout << endl << endl;
}

void print_t(){
    cout << "t: ";

    for(int k = 0; k <= nt; k++){
        cout << t[k] << " ";
    }

    cout << endl << endl;
}

void print_grid(){
    print_x();
    print_y();
    print_t();
}
// END---------------------------------------- PRINT GRID ------------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- PRINT SOLUTION ------------------------------------------
void print_u(){
    cout << "u:" << endl;

    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            cout << setw(12) << setprecision(8) << u[i][j] << " ";
        }

        cout << endl;
    }

    cout << endl;
}

void print_u_half(){
    cout << "u_half:" << endl;

    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            cout << setw(12) << setprecision(9) << u_half[i][j] << " ";
        }

        cout << endl;
    }

    cout << endl;
}

void print_u_exact(int k){
    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            cout << u_exact(x[j], y[i], t[k]) << " ";
        }

        cout << endl;
    }
```

```
    cout << endl;
}
// END---------------------------------------- PRINT SOLUTION ----------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- PRINT ERROR ----------------------------------------
void print_error(){
    double max_abs_error = 0;
    double max_rel_error = 0;

    for(int i = 1; i < ny; i++){
        for(int j = 1; j < nx; j++){
            double sln = u[i][j];

            double sln_e = u_exact(x[j], y[i], t[nt]);

            if(abs(sln_e) < 1e-10 || abs(sln) < 1e-10){
                continue;
            }

            double abs_error = abs(sln - sln_e);
            double rel_error = abs_error / abs(sln_e);

            max_abs_error = max(max_abs_error, abs_error);
            max_rel_error = max(max_rel_error, rel_error);
        }
    }

    cout << "Abs. error: " << setprecision(8) << max_abs_error << endl;
    cout << "Rel. error: " << setprecision(8) << max_rel_error << endl;
}
// END---------------------------------------- PRINT ERROR ----------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- FREE MEMORY ----------------------------------------
void free_memory(){
    // -------------------------
    delete[] x;
    delete[] y;
    delete[] t;
    // -------------------------
    delete[] A_i;
    delete[] B_i;
    delete[] C_i;
    // -------------------------
    delete[] A_j;
    delete[] B_j;
    delete[] C_j;
    // -------------------------
    for(int i = 0; i <= ny; i++){
        delete[] u[i];
        delete[] u_half[i];
    }

    delete[] u;
    delete[] u_half;
    // -------------------------
    delete[] F_i;
    delete[] F_j;

    delete[] X_i;
    delete[] X_j;
    // -------------------------
}
// END---------------------------------------- FREE MEMORY ----------------------------------------
```

2) Параллельная версия

implicit_mpi.cpp

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cassert>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <mpi.h>

#include "thomas_x.cpp"
#include "thomas_y.cpp"
#include "thomas_y_helper.h"

using namespace std;

// ------------------------
char* filename;
// ------------------------
double a1, b1;
double a2, b2;

double t_max;

int nx, ny, nt;

double dx, dy, dt;
double dx2, dy2;
double dt_1_2;

double* x;
double* y;
double* t;

double** u;
double** u_half;
// ------------------------
double *A_i, *B_i, *C_i;
double *A_j, *B_j, *C_j;
// ------------------------
int mpirank;
int mpisize;

bool rank_0;
bool rank_np;

int src_up, src_dn;
int dst_up, dst_dn;

int snd_up_tag, snd_dn_tag;
int rcv_up_tag, rcv_dn_tag;

MPI_Datatype row, row_1, column;
// ------------------------
int ny_per_node;
int ny_tail;

int my_ny;

int row_0_ny;
int row_n_ny;

double** u_up;
double** u_down;

double** u_left;
double** u_right;
// ------------------------
void print_grid();
```

```
void print_x();
void print_y();
void print_t();

void print_u();
void print_u_half();
void print_u_exact(int);
void print_error();

void free_memory();
// ------------------------

// BEGIN---------------------------------------- EXACT SOLUTION ---------------------------------------------
double u_exact(double x, double y, double t){
    // return exp(-t) * sin(M_PI * x) * cos(M_PI * y);
    return exp(-t) * (sin(M_PI * x) + cos(M_PI * y)) + 10;
}
// END------------------------------------------ EXACT SOLUTION ---------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- F(x, y, t) ------------------------------------------------
double F(double x, double y, double t){
    // return exp(-t) * sin(M_PI * x) * cos(M_PI * y) * (2 * M_PI * M_PI - 1);
    return - exp(-t) * (sin(M_PI * x) + cos(M_PI * y)) * (1 - M_PI * M_PI);
}
// END------------------------------------------ F(x, y, t) ------------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- READ DATA -------------------------------------------------
void read_data(){
    FILE* f;

    f = fopen(filename, "r");

    if(f == NULL){
        cout << "Cannot open file \"" << filename << "\"" << endl;

        exit(1);
    }

    int count = fscanf(f, "%lf %lf %lf %lf %lf %d %d %d", &a1, &b1, &a2, &b2, &t_max, &nx, &ny, &nt);

    if(count < 8){
        cout << "Wrong data format in file \"" << filename << "\"" << endl << endl;
        cout << "Usage: a1 b1 a2 b2" << endl;
        cout << "       t_max" << endl;
        cout << "       nx ny nt" << endl;
        cout << endl;

        cout << "Example: 0 1 0 1" << endl;
        cout << "         1" << endl;
        cout << "         10 10 5" << endl;
        cout << endl;

        exit(1);
    }

    fclose(f);
}
// END------------------------------------------ READ DATA -------------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- SET TRIAG COEFF -------------------------------------------
void set_triag_coeff(){
    A_i = new double[ny];
    B_i = new double[ny];
    C_i = new double[ny];

    for(int i = 0; i < ny; i++){
        A_i[i] = -1.0 / dy2;
        B_i[i] = 2.0 / dt + 2.0 / dy2;
        C_i[i] = -1.0 / dy2;
    }
```

```
    C_i[ny-1] = 0;
    // ------------------------------
    A_j = new double[nx];
    B_j = new double[nx];
    C_j = new double[nx];

    for(int i = 0; i < nx; i++){
        A_j[i] = -1.0 / dx2;
        B_j[i] = 2.0 / dt + 2.0 / dx2;
        C_j[i] = -1.0 / dx2;
    }

    C_j[nx-1] = 0;
}
// END---------------------------------------- SET TRIAG COEFF ----------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- SET GRID ----------------------------------------------------
void set_grid(){
    read_data();

    assert(a1 < b1);
    assert(a2 < b2);

    assert(t_max > 0);

    assert(nx > 0);
    assert(ny > 0);
    assert(nt > 0);

    dx = (b1 - a1) / nx;
    dy = (b2 - a2) / ny;
    dt = t_max / nt;

    dx2 = dx * dx;
    dy2 = dy * dy;

    dt_1_2 = dt / 2.0;
    // ------------------------------------------------
    ny_per_node = ((ny + 1) + 2 * (mpisize-1)) / mpisize;

    ny_tail = ((ny + 1) + 2 * (mpisize-1)) % mpisize;

    my_ny = ny_per_node - 1;

    if(mpirank < ny_tail)
        my_ny++;
    // ------------------------------------------------
    try{
        x = new double[nx+1];
        y = new double[my_ny+1];
        t = new double[nt+1];

        u = new double*[my_ny+1];
        u_half = new double*[my_ny+1];

        for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
            u[i] = new double[nx+1];
            u_half[i] = new double[nx+1];

            for(int j = 0; j <= nx; j++){
                u[i][j] = 0;
                u_half[i][j] = 0;
            }
        }
    }catch(std::bad_alloc){
        cout << "Cannot allocate memory" << endl;

        exit(1);
    }
    // ------------------------------------------------
    double y0 = 0;
```

```
    if(mpisize == 1){
        y0 = a2;
    }else if(!rank_0){
        int _y0 = 0;

        if(ny_tail){
            _y0 = (mpirank <= ny_tail) ? mpirank : ny_tail;
        }

        y0 = a2 + ((ny_per_node-2) * (mpirank) + _y0) * dy;
    }

    for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
        y[i] = y0 + i * dy;
    }
    // -------------------------------------------------
    for(int j = 0; j <= nx; j++){
        x[j] = a1 + j * dx;
    }

    for(int k = 0; k <= nt; k++){
        t[k] = k * dt;
    }
}
// END---------------------------------------- SET GRID ------------------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- INITIAL CONDITIONS ----------------------------------------
double g_0(int j, int i){
    return u_exact(x[j], y[i], t[0]);
}

void set_initials(){
    int i_1 = (rank_0) ? 0 : 1;
    int i_2 = (rank_np) ? (my_ny) : (my_ny-1);

    for(int i = i_1; i <= i_2; i++){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            u[i][j] = g_0(j, i);
        }
    }
}
// END---------------------------------------- INITIAL CONDITIONS ----------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- BOUNDARY CONDITIONS ----------------------------------------
void set_boundaries(double** _u, int k){
    if(!rank_0){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            _u[my_ny][j] = u_down[k][j];
        }
    }

    if(!rank_np){
        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            _u[0][j] = u_up[k][j];
        }
    }

    for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
        _u[i][0] = u_left[k][i];
        _u[i][nx] = u_right[k][i];
    }
}
// END---------------------------------------- BOUNDARY CONDITIONS ----------------------------------------

// BEGIN-------------------------------------- MPI_PREPARE -----------------------------------------------
void mpi_prepare(){
    MPI_Type_contiguous(nx, MPI_DOUBLE, &row);
    MPI_Type_commit(&row);

    MPI_Type_contiguous(nx-1, MPI_DOUBLE, &column);
```

```
    MPI_Type_commit(&column);

    MPI_Type_vector(nx-1, 1, mpisize, MPI_DOUBLE, &row_1);
    MPI_Type_commit(&row_1);

    src_dn = dst_dn = mpirank+1;
    src_up = dst_up = mpirank-1;

    snd_up_tag = 1000 * dst_up  + 2;
    snd_dn_tag = 1000 * dst_dn  + 0;

    rcv_up_tag = 1000 * mpirank  + 0;
    rcv_dn_tag = 1000 * mpirank  + 2;
}
// END---------------------------------------- MPI_PREPARE ------------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- PREPARE_BOUNDARIES ----------------------------------------
void prepare_boundaries(){
    u_up = new double*[(nt+1)*2];
    u_down = new double*[(nt+1)*2];
    u_left = new double*[(nt+1)*2];
    u_right = new double*[(nt+1)*2];

    for(int k = 0; k <= nt*2; k++){
        u_up[k] = new double[nx+1];
        u_down[k] = new double[nx+1];

        u_left[k] = new double[my_ny+1];
        u_right[k] = new double[my_ny+1];
    }

    for(int k = 0; k <= nt; k++){
        for(int j = 0; j < nx; j++){
            u_up[k*2][j] = u_exact(x[j], y[0], t[k]);
            u_down[k*2][j] = u_exact(x[j], y[my_ny], t[k]);

            if(k < nt){
                u_up[k*2+1][j] = u_exact(x[j], y[0], t[k]+dt_1_2);
                u_down[k*2+1][j] = u_exact(x[j], y[my_ny], t[k]+dt_1_2);
            }
        }

        for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
            u_left[k*2][i] = u_exact(x[0], y[i], t[k]);
            u_right[k*2][i] = u_exact(x[nx], y[i], t[k]);

            if(k < nt){
                u_left[k*2+1][i] = u_exact(x[0], y[i], t[k]+dt_1_2);
                u_right[k*2+1][i] = u_exact(x[nx], y[i], t[k]+dt_1_2);
            }
        }
    }
}
// END---------------------------------------- PREPARE_BOUNDARIES ----------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- SOLVE ----------------------------------------------------
void solve(){
    mpi_prepare();
    // --------------------------
    set_triag_coeff();
    // --------------------------
    double* F_j = new double[nx-1];

    double* X_j = new double[nx-1];
    // --------------------------
    prepare_boundaries();
    // ------------------------------------------------------
    set_initials();
    // ------------------------------------------------------
    double** A_nx_i = new double*[nx];
    double** B_nx_i = new double*[nx];
```

```
double** C_nx_i = new double*[nx];

double** F_nx_i = new double*[nx];

double** X_nx_i = new double*[nx];

for(int i = 0; i < nx; i++){
    A_nx_i[i] = new double[my_ny];
    B_nx_i[i] = new double[my_ny];
    C_nx_i[i] = new double[my_ny];

    F_nx_i[i] = new double[my_ny];

    X_nx_i[i] = new double[my_ny+1];
}
// -------------------------------------------------------
Helper* helper = new Helper(mpirank, mpisize, nx, my_ny, int(y[0] / dy));
// -------------------------------------------------------
MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
double t1 = MPI_Wtime();

for(int k = 0; k < nt; k++){
    double t_half = t[k] + dt_1_2;
    double t_k = t_half + dt_1_2;

    // BEGIN------------------------------- x-direction ------------------------------------------------
    MPI_Status st1, st2;

    MPI_Request req_snd_up, req_snd_dn;
    MPI_Request req_rcv_up, req_rcv_dn;

    if(mpisize != 1){
        if(!rank_0){
            MPI_Irecv(&u[0][1], 1, row, src_up, rcv_up_tag, MPI_COMM_WORLD, &req_rcv_up);
        }

        if(!rank_np){
            MPI_Irecv(&u[my_ny][1], 1, row, src_dn, rcv_dn_tag, MPI_COMM_WORLD, &req_rcv_dn);
        }
    }

    set_boundaries(u_half, 2*k+1);

    if(mpisize != 1){
        if(!rank_0){
            MPI_Isend(&u[1][1], 1, row,   dst_up, snd_up_tag, MPI_COMM_WORLD, &req_snd_dn);
        }

        if(!rank_np){
            MPI_Isend(&u[my_ny-1][1], 1, row,   dst_dn, snd_dn_tag, MPI_COMM_WORLD, &req_snd_up);
        }
    }

    for(int i = 2; i < my_ny-1; i++){
        u_half = thomas_x(u, A_j, B_j, C_j, F_j, X_j, k, i, t_half);
    }

    if(!rank_0){
        MPI_Wait(&req_rcv_up, &st1);
    }

    u_half = thomas_x(u, A_j, B_j, C_j, F_j, X_j, k, 1, t_half);

    if(!rank_np){
        MPI_Wait(&req_rcv_dn, &st2);
    }

    u_half = thomas_x(u, A_j, B_j, C_j, F_j, X_j, k, my_ny-1, t_half);
    // END--------------------------------- x-direction ------------------------------------------------

    // BEGIN------------------------------- y-direction ------------------------------------------------
```

```
        set_boundaries(u, k*2+2);

        for(int _i = 0; _i < my_ny; _i++){
            A_nx_i[1][_i] = A_i[_i];
            B_nx_i[1][_i] = B_i[_i];
            C_nx_i[1][_i] = C_i[_i];
        }

        for(int j = 1; j < nx; j++){
            for(int i = 1; i < my_ny; i++){
                F_nx_i[j][i-1] = (u_half[i][j-1] - 2 * u_half[i][j] + u_half[i][j+1]) / dx2 + F(x[j], y[i], t_half) + 2 * u_half
            }

            if(rank_0){
                F_nx_i[j][0] += u_up[2*k+2][j] / dy2;
            }else if(rank_np){
                F_nx_i[j][my_ny-2] += u_down[2*k+2][j] / dy2;
            }
        }

        X_nx_i = thomas_y(A_nx_i, B_nx_i, C_nx_i, F_nx_i, X_nx_i, helper);

        for(int j = 1; j < nx; j++){
            for(int i = 0; i < my_ny-1; i++){
                u[i+1][j] = X_nx_i[j][i];
            }
        }
        // END---------------------------------- y-direction ------------------------------------------------
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
    double t2 = MPI_Wtime();

    if(rank_0){
        cout << "nprocs: " << mpisize << endl;
        cout << "Time: " << (t2 - t1) << endl << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}
// END---------------------------------------- SOLVE ------------------------------------------------------



int main(int argc, char** argv){
    cout << fixed << setprecision(8);

    if(argc < 2){
        cout << "Usage: ./a.out data" << endl;

        exit(1);
    }

    filename = argv[1];

    MPI_Init(&argc, &argv);

    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &mpirank);
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &mpisize);

    rank_0 = (mpirank == 0);
    rank_np = (mpirank == mpisize-1);

    set_grid();

    solve();

    print_error();

    free_memory();
```

```
    MPI_Finalize();

    return 0;
}



// BEGIN---------------------------------------- PRINT GRID ----------------------------------------------
void print_x(){
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    if(rank_0){
        cout << "x: ";

        for(int j = 0; j <= nx; j++){
            cout << x[j] << " ";
        }

        cout << endl << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}

void print_y(){
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    for(int r = 0; r < mpisize; r++){
        if(r == mpirank){
            cout << "rank: " << r << endl;
            cout << "my_ny: " << my_ny << endl;
            cout << "y: ";

            for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
                cout << y[i] << " ";
            }

            cout << endl << endl;
        }

        MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}

void print_t(){
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    if(rank_0){
        cout << "t: ";

        for(int k = 0; k <= nt; k++){
            cout << t[k] << " ";
        }

        cout << endl << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}

void print_grid(){
    print_x();
    print_y();
    print_t();
}
// END------------------------------------------ PRINT GRID ----------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- PRINT SOLUTION ------------------------------------------
void print_u(){
```

```
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    if(mpirank == 0){
        cout << "u:" << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    for(int r = 0; r < mpisize; r++){
        if(r == mpirank){
            for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
                for(int j = 0; j <= nx; j++){
                    cout << setw(12) << setprecision(8) << u[i][j] << " ";
                }

                cout << endl;
            }

            cout << endl;
        }

        MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}

void print_u_half(){
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    cout << setprecision(8);

    if(mpirank == 0){
        cout << "u_half:" << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    for(int r = 0; r < mpisize; r++){
        if(r == mpirank){
            for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
                for(int j = 0; j <= nx; j++){
                    cout << setw(12) << setprecision(9) << u_half[i][j] << " ";
                }

                cout << endl;
            }

            cout << endl;
        }

        MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}

void print_u_exact(int k){
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    cout << setprecision(8);

    if(mpirank == 0){
        cout << "u_half:" << endl;
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    for(int r = 0; r < mpisize; r++){
        if(r == mpirank){
            for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
```

```
                for(int j = 0; j <= nx; j++){
                    cout << setw(12) << setprecision(9) << u_exact(x[j], y[i], t[k]) << " ";
                }

                cout << endl;
            }

            cout << endl;
        }

        MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
    }

    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}
// END---------------------------------------- PRINT SOLUTION ----------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- PRINT ERROR ----------------------------------------------
void print_error(){
    double max_abs_error = 0;
    double max_rel_error = 0;

    int i1, i2;
    int j1 = 0, j2 = nx;

    if(mpirank == 0){
        i1 = 0;
        i2 = my_ny-1;
    }else if(mpirank == mpisize-1){
        i1 = 1;
        i2 = my_ny;
    }else{
        i1 = 1;
        i2 = my_ny-1;
    }

    for(int i = i1; i <= i2; i++){
        for(int j = j1; j <= j2; j++){
            double sln = u[i][j];

            double sln_e = u_exact(x[j], y[i], t[nt]);

            if(abs(sln_e) < 1e-10 || abs(sln) < 1e-9){
                continue;
            }

            double abs_error = abs(sln - sln_e);
            double rel_error = abs_error / abs(sln_e);

            max_abs_error = max(max_abs_error, abs_error);
            max_rel_error = max(max_rel_error, rel_error);
        }
    }

    double* abs_err = new double[mpisize];
    double* rel_err = new double[mpisize];

    MPI_Gather(&max_abs_error, 1, MPI_DOUBLE, abs_err, 1, MPI_DOUBLE, 0, MPI_COMM_WORLD);
    MPI_Gather(&max_rel_error, 1, MPI_DOUBLE, rel_err, 1, MPI_DOUBLE, 0, MPI_COMM_WORLD);

    if(mpirank == 0){
        double max_abs_error = 0;
        double max_rel_error = 0;

        for(int i = 0; i < mpisize; i++){
            max_abs_error = max(abs_err[i], max_abs_error);
            max_rel_error = max(rel_err[i], max_rel_error);
        }

        cout << "Abs. error: " << setprecision(8) << max_abs_error << endl;
        cout << "Rel. error: " << setprecision(8) << max_rel_error << endl;
```

```
    }
}
// END---------------------------------------- PRINT ERROR ----------------------------------------------

// BEGIN---------------------------------------- FREE MEMORY ----------------------------------------------
void free_memory(){
    delete[] x;
    delete[] y;
    delete[] t;

    for(int i = 0; i <= my_ny; i++){
        delete[] u[i];
        delete[] u_half[i];
    }

    delete[] u;
    delete[] u_half;
}
// END---------------------------------------- FREE MEMORY ----------------------------------------------
```

thomas_x.cpp

```
#ifndef _THOMAS_X_
#define _THOMAS_X_

extern int nx;

extern double** u_left;
extern double** u_right;

extern double dx2;
extern double dy2;

extern double* x;
extern double* y;

extern double dt;

extern double F(double x, double y, double t);

// BEGIN---------------------------------------- THOMAS ALGORITHM ----------------------------------------//
void solveMMatrix(const int n, const double *_A, const double *_B, const double *_C, double *f, double *x){
    // ---------------------------
    double A[n];
    double B[n];
    double C[n];

    for(int i = 0; i < n; i++){
        A[i] = _A[i];
        B[i] = _B[i];
        C[i] = _C[i];
    }
    // ---------------------------
    double coeff;

    for(int i = 1; i < n; i++){
        coeff = A[i] / B[i-1];

        B[i] -= coeff * C[i-1];
        f[i] -= coeff * f[i-1];
    }

    x[n-1] = f[n-1] / B[n-1];

    for(int i = n-2; i >= 0; i--){
        x[i] = (f[i] - C[i] * x[i+1]) / B[i];
    }
}
// END---------------------------------------- THOMAS ALGORITHM ----------------------------------------//

extern double** u_half;

double** thomas_x(double** u, double* A_j, double* B_j, double* C_j, double* F_j, double* X_j, int k, int i, double t_half){
    #pragma omp parallel for
    for(int j = 1; j < nx; j++){
        F_j[j-1] = (u[i+1][j] - 2 * u[i][j] + u[i-1][j]) / dy2 + F(x[j], y[i], t_half) + 2 * u[i][j] / dt;
    }

    F_j[0] += u_left[2*k+1][i] / dx2;
    F_j[nx-2] += u_right[2*k+1][i] / dx2;

    solveMMatrix(nx-1, A_j, B_j, C_j, F_j, X_j);

    for(int j = 0; j < nx-1; j++){
        u_half[i][j+1] = X_j[j];
    }

    return u_half;
}

#endif
```

thomas_y.cpp

```
#ifndef THOMAS_CPP_
#define THOMAS_CPP_

#include <iostream>
#include <cstring>
#include <mpi.h>

#include "thomas_y_helper.h"

using namespace std;

extern int mpirank;
extern int mpisize;

extern bool rank_0;
extern bool rank_np;

extern int my_ny;
extern int nx;

extern int src_up, src_dn;
extern int dst_up, dst_dn;

extern int snd_up_tag, snd_dn_tag;
extern int rcv_up_tag, rcv_dn_tag;

extern MPI_Datatype row_1, column;

void solveMatrix(int n, double *a, double *b, double *c, double *f, double *x){
    double m;

    int i_prev;

    for(int i = 1; i < n; i++){
        i_prev = i-1;

        m = a[i] / b[i_prev];

        b[i] -= m * c[i_prev];
        f[i] -= m * f[i_prev];
    }

    x[n-1] = f[n-1] / b[n-1];

    for(int i = n-2; i >= 0; i--){
        x[i] = (f[i] - c[i] * x[i+1]) / b[i];
    }
}

void down(double** A, double** B, double** C, double** F_i, double** d_l, int i_down){
    double coeff;

    int i_next;

    for(int i = 0; i <= i_down; i++){
        i_next = i+1;
        // ---------------------------------------
        coeff = B[1][i];

        B[1][i] /= coeff;
        C[1][i] /= coeff;

        if(!rank_0)
            d_l[1][i] /= coeff;

        for(int J = 1; J < nx; J++){
            F_i[J][i] /= coeff;
        }
        // ---------------------------------------
        coeff = A[1][i];
```

```
        B[1][i_next] -= C[1][i] * coeff;
        A[1][i] -= B[1][i] * coeff;

        if(!rank_0)
            d_l[1][i_next] -= d_l[1][i] * coeff;

        for(int J = 1; J < nx; J++){
            F_i[J][i_next] -= F_i[J][i] * coeff;
        }
        // ----------------------------------------
    }

    coeff = B[1][i_down];

    B[1][i_down] /= coeff;
    A[1][i_down] /= coeff;
    C[1][i_down] /= coeff;

    if(!rank_0)
        d_l[1][i_down] /= coeff;

    for(int J = 1; J < nx; J++){
        F_i[J][i_down] /= coeff;
    }
}

void up(double** A, double** B, double** C, double** F_i, double** d_l, double** d_r, int i_down){
    double coeff;

    d_r[1][i_down-1] = C[1][i_down-1];

    C[1][i_down-1] = 0;

    int i_next;

    for(int i = i_down-2; i >= 0; i--){
        i_next = i+1;

        coeff = C[1][i];

        C[1][i] -= B[1][i_next] * coeff;

        if(!rank_0)
            d_l[1][i] -= d_l[1][i_next] * coeff;

        d_r[1][i] -= d_r[1][i_next] * coeff;

        for(int J = 1; J < nx; J++){
            F_i[J][i] -= F_i[J][i_next] * coeff;
        }
    }
}

double** thomas_y(double** A_i, double** B_i, double** C_i, double** F_i, double** X_i, Helper* helper){
    // ----------------------------------------
    int M = helper->M;

    int H = helper->H;
    int W = helper->W;

    int i_0 = helper->i_0;
    int i_down = helper->i_down;

    double** d_l = helper->d_l;
    double** d_r = helper->d_r;

    helper->flush();
    // ----------------------------------------
    int* block_size = helper->block_size;
```

```
int* block_start = helper->block_start;
int* block_fin = helper->block_fin;

int* block_shift = helper->block_shift;

int block_size_max = helper->block_size_max;
// ----------------------------------------
double A[nx][H];
double C[nx][H];
double F[nx][H];

double triple_dn[nx][3];
double triple_up[nx][3];

double sln[mpisize][block_size_max][H];
// ----------------------------------------
MPI_Request* req_sln_rcv = helper->req_sln_rcv;
MPI_Request* req_sln_snd = helper->req_sln_snd;

MPI_Status* stat_sln = helper->stat_sln;
// ----------------------------------------
if(!rank_np){
    MPI_Irecv(helper->triple_dn, nx+2, MPI_DOUBLE, src_dn, rcv_dn_tag * 1000, MPI_COMM_WORLD, &(helper->req_triple_down_rcv)
}

for(int r = 0; r < mpisize; r++){
    MPI_Irecv(sln[r], block_size[r] * H, MPI_DOUBLE, r, (r+1), MPI_COMM_WORLD, &req_sln_rcv[r]);

    MPI_Irecv(&A[1][r], 1, row_1, r, r * 3, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_rcv[r]);
    MPI_Irecv(&C[1][r], 1, row_1, r, r * 4, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_rcv[r + mpisize]);
    MPI_Irecv(&F[1][r], 1, row_1, r, r * 5, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_rcv[r + mpisize * 2]);
}
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
double* a_down_all = helper->a_down_all;
double* c_down_all = helper->c_down_all;
double* f_down_all = helper->f_down_all;
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
d_l[1][0] = A_i[1][0];
d_r[1][i_down] = B_i[1][i_down];
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
down(A_i, B_i, C_i, F_i, d_l, i_down);
up(A_i, B_i, C_i, F_i, d_l, d_r, i_down);

for(int J = 1; J < nx; J++){
    helper->triag_snd_buf[J] = F_i[J][0];
}

helper->triag_snd_buf[nx] = d_l[1][0];
helper->triag_snd_buf[nx+1] = d_r[1][0];

if(!rank_0){
    MPI_Isend(helper->triag_snd_buf, nx+2, MPI_DOUBLE, dst_up, snd_up_tag * 1000, MPI_COMM_WORLD, &(helper->req_triags_snd))
}

for(int J = 1; J < nx; J++){
    for(int i = 0; i < M; i++){
        C_i[J][i] = C_i[1][i];

        d_l[J][i] = d_l[1][i];
        d_r[J][i] = d_r[1][i];
    }
}
//------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
if(!rank_np){
    MPI_Wait(&(helper->req_triple_down_rcv), &(helper->stat_triple_down));
}

for(int J = 1; J < nx; J++){
    double coef;
```

```
    // ---------------------------------------
    triple_dn[J][0] = helper->triple_dn[nx];
    triple_dn[J][1] = helper->triple_dn[nx+1];
    triple_dn[J][2] = helper->triple_dn[J];
    // ---------------------------------------
    A_i[J][i_down] = A_i[1][i_down];
    B_i[J][i_down] = B_i[1][i_down];

    coef = C_i[J][i_down];

    B_i[J][i_down] -= triple_dn[J][0] * coef;
    F_i[J][i_down] -= triple_dn[J][2] * coef;

    triple_dn[J][1] *= -coef;
    // ---------------------------------------
    coef = B_i[J][i_down];

    A_i[J][i_down] /= coef;
    B_i[J][i_down] /= coef;
    C_i[J][i_down] /= coef;
    F_i[J][i_down] /= coef;

    f_down_all[J-1] = F_i[J][i_down];

    if(!rank_0){
        d_l[J][i_down] /= coef;

        a_down_all[J-1] = d_l[J][i_down];
    }

    triple_dn[J][1] /= coef;

    c_down_all[J-1] = triple_dn[J][1];

    d_r[J][i_down] /= coef;
    // ---------------------------------------
}

for(int i = 0; i < mpisize; i++){
    MPI_Isend(a_down_all, 1, column, i, mpirank * 3, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_snd[i]);
    MPI_Isend(c_down_all, 1, column, i, mpirank * 4, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_snd[i + mpisize]);
    MPI_Isend(f_down_all, 1, column, i, mpirank * 5, MPI_COMM_WORLD, &helper->req_diags_snd[i + mpisize * 2]);
}

MPI_Waitall(mpisize * 3, helper->req_diags_rcv, helper->stat_recv);
//-------------------------------------------------------------------------------------------------------------
for(int J = block_start[mpirank]; J < block_fin[mpirank]; J++){
    for(int i = 0; i < H; i++){
        helper->B[i] = 1;
    }

    solveMatrix(H, A[J], helper->B, C[J], F[J], helper->X);

    for(int i = 0; i < H; i++){
        sln[mpirank][J - block_shift[mpirank]][i] = helper->X[i];
    }
}

for(int r = 0; r < mpisize; r++){
    MPI_Isend(sln[mpirank], block_size[mpirank] * H, MPI_DOUBLE, r, (mpirank+1), MPI_COMM_WORLD, &req_sln_snd[r]);
}

int numdone;

int _mpisize = mpisize;

while(_mpisize--){
    MPI_Waitany(mpisize, req_sln_rcv, &numdone, stat_sln);

    int r = numdone;
```

```
        for(int J = block_start[r]; J < block_fin[r]; J++){
            if(rank_0){
                X_i[J][i_down] = sln[r][J-block_shift[r]][0];

                for(int i = M-2; i >= 0; i--){
                    X_i[J][i] = F_i[J][i] - X_i[J][i_down] * d_r[J][i];
                }
            }else{
                double _l = sln[r][J-block_shift[r]][mpirank-1];
                double _r = sln[r][J-block_shift[r]][mpirank];

                X_i[J][i_down] = _r;

                for(int i = M-2; i >= 0; i--){
                    X_i[J][i] = F_i[J][i] - (d_l[J][i] * _l + d_r[J][i] * _r);
                }
            }
        }
    }
    // ------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
    return X_i;
}

#endif
```

thomas_y_helper.h

```
#ifndef MPI_Helper_H
#define MPI_Helper_H

#include <mpi.h>

class Helper{

public:
    Helper(int _mpirank, int _mpisize, int _nx, int _my_ny, int _i_0){
        // -------------------------------------
        mpirank = _mpirank;
        mpisize = _mpisize;
        // -------------------------------------
        nx = _nx;
        my_ny = _my_ny;
        // -------------------------------------
        M = my_ny-1;

        H = mpisize;
        W = H + 1;
        // -------------------------------------
        i_0 = _i_0;
        i_down = M-1;
        // -------------------------------------
        req_diags_rcv = new MPI_Request[mpisize*3];
        req_diags_snd = new MPI_Request[mpisize*3];

        stat_recv = new MPI_Status[mpisize*3];
        // -------------------------------------
        req_sln_rcv = new MPI_Request[mpisize];
        req_sln_snd = new MPI_Request[mpisize];

        stat_sln = new MPI_Status[mpisize];
        // -------------------------------------
        B = new double[H];

        X = new double[H];
        // -------------------------------------
        triag_snd_buf = new double[nx+2];
        triple_dn = new double[nx+2];
        // -------------------------------------
        d_l = new double*[nx];
        d_r = new double*[nx];

        for(int i = 0; i < nx; i++){
            d_l[i] = new double[my_ny-1];
            d_r[i] = new double[my_ny-1];
        }
        // -------------------------------------
        block_size = new int[mpisize];

        block_start = new int[mpisize];
        block_fin = new int[mpisize];

        block_shift = new int[mpisize];

        for(int r = 0; r < mpisize; r++){
            block_size[r] = nx / mpisize;
        }

        block_size[mpisize-1] += nx % mpisize;

        block_start[0] = 1;

        for(int r = 1; r < mpisize; r++){
            block_start[r] = 0;

            for(int i = 0; i < r; i++){
                block_start[r] += block_size[i];
            }
```

```
    }

    block_fin[0] = block_size[0];

    for(int r = 1; r < mpisize; r++){
        block_fin[r] = block_start[r] + block_size[r];
    }

    block_shift[0] = 0;

    for(int r = 1; r < mpisize; r++){
        block_shift[r] = block_start[r];
    }

    block_size_max = 0;

    for(int r = 0; r < mpisize; r++){
        block_size_max = std::max(block_size_max, block_size[r]);
    }
    // ---------------------------
    a_down_all = new double[nx-1];
    c_down_all = new double[nx-1];
    f_down_all = new double[nx-1];
    // ---------------------------
}

~Helper(){
    // --------------------
    delete[] req_diags_rcv;
    delete[] req_diags_snd;

    delete[] stat_recv;
    // --------------------
    delete[] req_sln_rcv;
    delete[] req_sln_snd;

    delete[] stat_sln;
    // --------------------
    delete[] triag_snd_buf;
    delete[] triple_dn;
    // --------------------
    for(int i = 0; i < nx; i++){
        delete[] d_l[i];
        delete[] d_r[i];
    }

    delete[] d_l;
    delete[] d_r;
    // --------------------
    delete[] block_size;

    delete[] block_start;
    delete[] block_fin;

    delete[] block_shift;
    // --------------------
    delete[] a_down_all;
    delete[] c_down_all;
    delete[] f_down_all;
    // --------------------
}

void flush(){
    for(int J = 1; J < nx; J++){
        for(int i = 0; i < M; i++){
            d_l[J][i] = d_r[J][i] = 0;
        }
    }
}

// ----------------------
```

```
    int nx;
    int my_ny;
    // -----------------------
    int M;

    int H;
    int W;
    // -----------------------
    int i_0;
    int i_down;
    // -----------------------
    double** A;
    double* B;
    double** C;

    double** F;

    double* X;
    // -----------------------
    MPI_Request* req_diags_snd;
    MPI_Request* req_diags_rcv;

    MPI_Status* stat_recv;
    // -----------------------
    MPI_Request* req_sln_rcv;
    MPI_Request* req_sln_snd;

    MPI_Status* stat_sln;
    // -----------------------
    double* triag_snd_buf;
    double* triple_dn;
    // -----------------------
    double** d_l;
    double** d_r;
    // -----------------------
    MPI_Request req_triple_down_rcv;
    MPI_Request req_triags_snd;

    MPI_Status stat_triple_down;
    // -----------------------
    int* block_size;

    int* block_start;
    int* block_fin;

    int* block_shift;

    int block_size_max;
    // -----------------------
    double* a_down_all;
    double* c_down_all;
    double* f_down_all;
    // -----------------------

private:
    int mpirank;
    int mpisize;
};

#endif
```