<u>ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ</u>

GROUP 107

Μέλη Ομάδας:

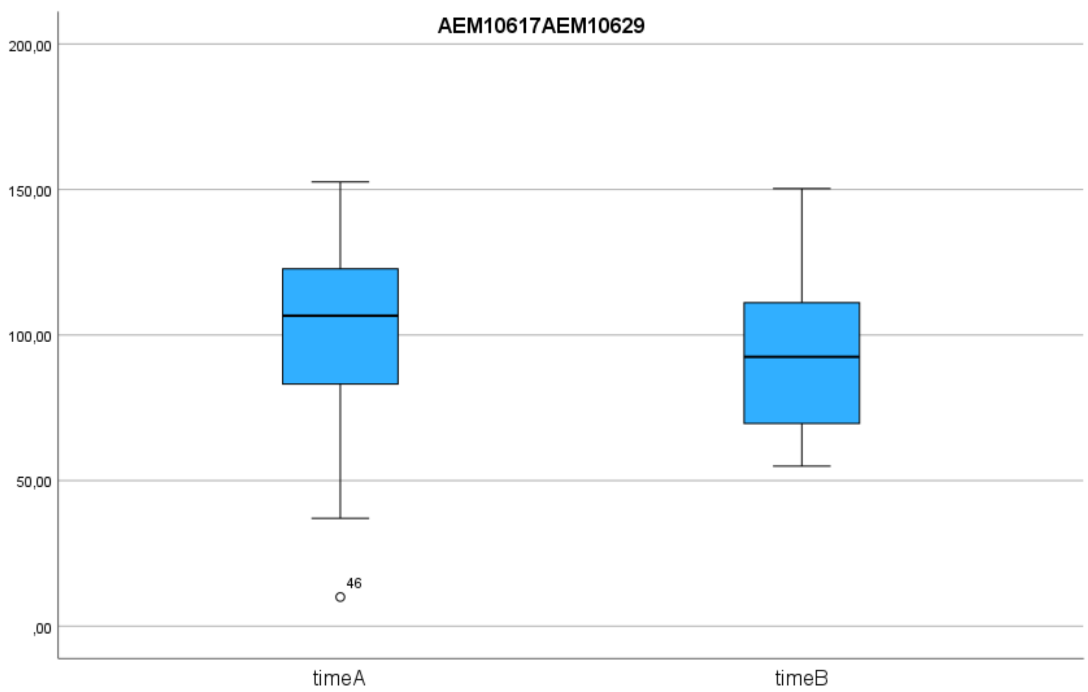
1) Αλεξιάδης Απόστολος, Α.Ε.Μ. : 10617

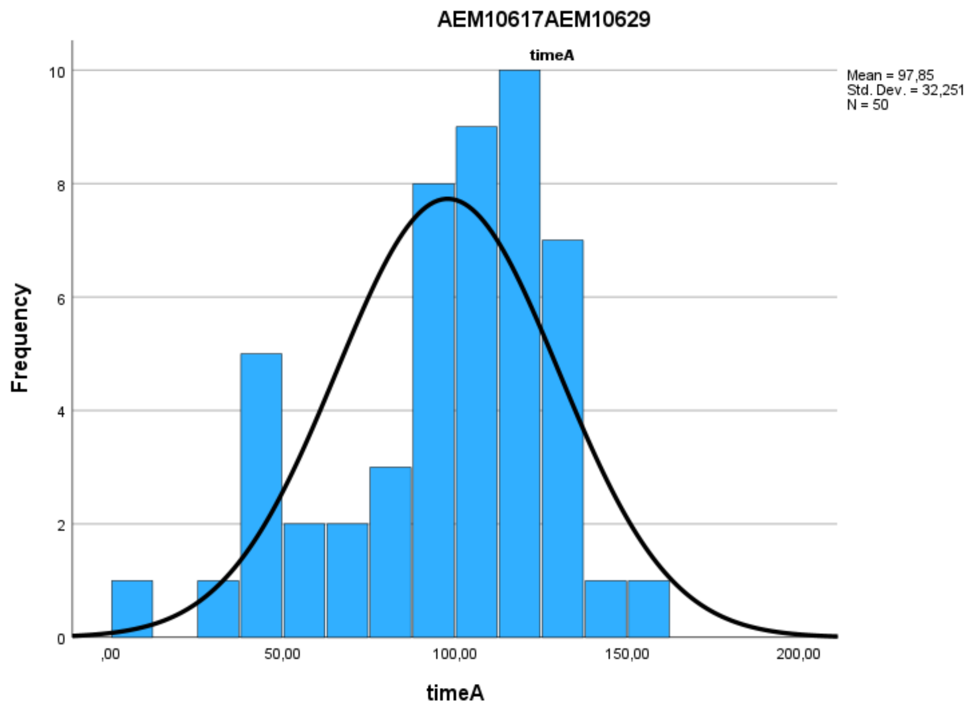
2) Γαλαζούλας Αλέξανδρος, Α.Ε.Μ. : 10629

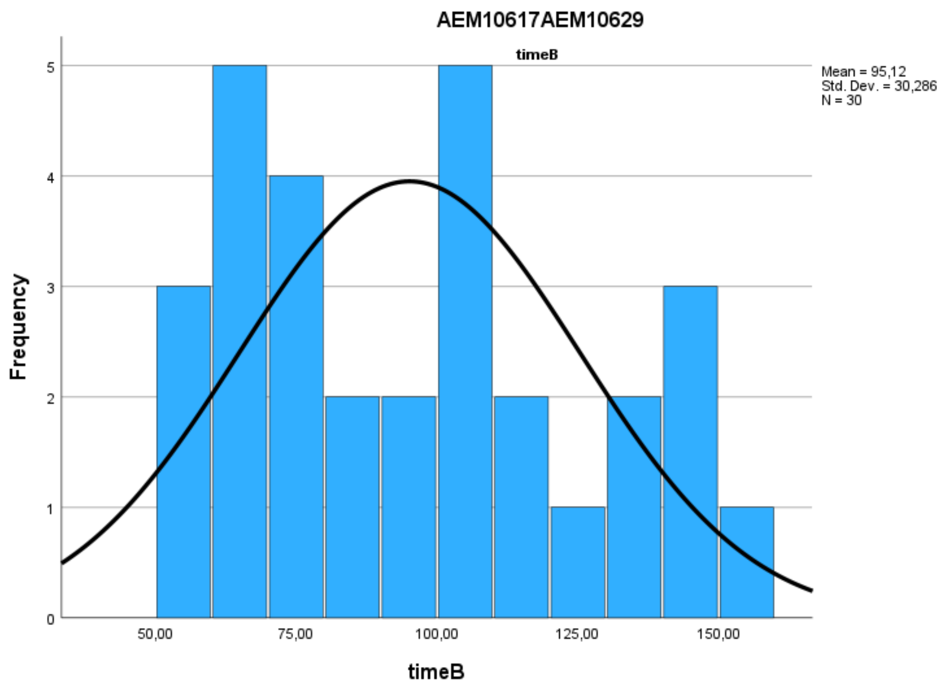
Μελέτη Α

1)

Για το δείγμα των χρόνων επίλυσης του γρίφου του παίχτη Α (απεικονίζεται ως timeA στα διαγράμματα) και του δικού μου (απεικονίζεται ως timeB), προκύπτουν τα παρακάτω θηκογράμματα, ιστογράμματα και ο πίνακας με τα μέτρα κεντρικής τάσης (μέση τιμή και διάμεσος) και μεταβλητότητας (διασπορά, τυπική απόκλιση, εύρος δεδομένων, πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο) από το SPSS:




AEM10617AEM10629
timeA
Mean = 97,85
Std. Dev. = 32,251
N = 50
Frequency
0
2
4
6
8
10
,00
50,00
100,00
150,00
200,00
timeA


AEM10617AEM10629
timeB
Mean = 95,12
Std. Dev. = 30,286
N = 30
Frequency
0
1
2
3
4
5
50,00
75,00
100,00
125,00
150,00
timeB

AEM10617AEM10629

		timeA	timeB
N	Valid	50	30
	Missing	0	20
Mean		97,8506	95,1230
Median		106,6450	92,4900
Std. Deviation		32,25100	30,28571
Variance		1040,127	917,224
Range		142,62	95,30
Percentiles	25	81,7525	68,6500
	50	106,6450	92,4900
	75	123,0175	113,3825

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε από τις παραπάνω αναπαραστάσεις οι δύο κατανομές μπορούν να προσεγγιστούν από την κανονική κατανομή, έχοντας ωστόσο επιφυλάξεις για την ακρίβεια της, εφόσον και οι 2 υπολείπονται ενός κριτηρίου. Συγκεκριμένα, από το θηκόγραμμα του χρόνου επίλυσης του γρίφου του παίκτη Α, ενώ η δειγματική διάμεσος δεν είναι κοντά ούτε στο Q_1 ούτε στο Q_3 και το εύρος των δύο ακραίων τεταρτομορίων δε διαφέρει σημαντικά, υπάρχει μία ακραία τιμή (η 46). Όσον αφορά το θηκόγραμμα του χρόνου επίλυσης του γρίφου από εμένα, ενώ ικανοποιεί το κριτήριο της δειγματικής διαμέσου και δεν υπάρχουν ακραίες τιμές σε αυτό, το εύρος των ακραίων τεταρτομορίων φαίνεται να διαφέρει αρκετά (ο επάνω μύστακας έχει μεγαλύτερο μήκος από τον κάτω). Παρόλα αυτά και οι 2 χρόνοι μπορούν να προσεγγιστούν από την κανονική κατανομή όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στα 2 ιστογράμματα.
Ενώ η δειγματική μέση τιμή είναι περίπου ίδια για τις δύο κατανομές, η δειγματική διάμεσος διαφέρει αρκετά, με αυτή του παίκτη Α να είναι μεγαλύτερη, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι ο παίκτης Α χρειάζεται, κατά μέσο όρο, περισσότερο χρόνο για να λύσει το γρίφο από τον παίκτη Β. Η μεταβλητότητα είναι περίπου ίδια και στις δύο κατανομές.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι ο χρόνος επίλυσης του γρίφου και από τους δύο παίκτες ακολουθεί κανονική κατανομή, με μεγαλύτερη ακρίβεια για τον παίκτη Α, αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι έχει 20 περισσότερες παρατηρήσεις σε σχέση με τον παίκτη Β. Αυτό σημαίνει, ότι είναι πιο λογικό να μη δώσω τόση βαρύτητα στην ακραία τιμή του timeA και σίγουρα όχι όση θα δώσω στην ανισότητα των μυστάκων του timeB.

2)

Παρακάτω εισάγεται η ανάλυση για να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση του χρόνου επίλυσης του γρίφου για τους 2 παίκτες.

2) $1-a=0{,}95 \Rightarrow a=0{,}05 \Rightarrow a/2=0{,}025 \rightarrow 1-a/2=0{,}975$

• <u>Για τον παίκτη Α:</u> $n=50$, $s=32{,}25$, $s^2=1040{,}13$

• $\chi^2_{49,\,0{,}975}=71{,}42$

• $\chi^2_{49,\,0{,}025}=32{,}36$

Άρα, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση σ του χρόνου επίλυσης του γρίφου από τον παίκτη Α είναι

$$\left[\sqrt{\frac{49\cdot 1040{,}13}{71{,}42}}\,,\ \sqrt{\frac{49\cdot 1040{,}13}{32{,}36}}\right]=$$

$$=[26{,}71\,,\ 39{,}69]$$

• <u>Για τον παίκτη Β:</u> $n=30$, $s^2=917{,}22$, $s=30{,}29$

• $\chi^2_{29,\,0{,}975}=45{,}72$

• $\chi^2_{29,\,0{,}025}=16{,}05$

Άρα, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση σ του χρόνου επίλυσης του γρίφου από τον παίκτη Β είναι:

$$\left[\sqrt{\frac{29\cdot 917{,}22}{45{,}72}}\,,\ \sqrt{\frac{29\cdot 917{,}22}{16{,}05}}\right]=$$

$$=[24{,}12\,,\ 40{,}71].$$

Η μεταβλητότητα του χρόνου επίλυσης του γρίφου από τους δύο παίκτες είναι περίπου ίδια, με αυτή του παίκτη Β να είναι λίγο μεγαλύτερη(κατά 3 λεπτά), δηλαδή έχει λύσει το γρίφο σε χρονικά διαστήματα που διαφέρουν περισσότερο μεταξύ τους σε σχέση με τον Α.

3)

Εκτίμηση του μέσου χρόνου επίλυσης του γρίφου για τους δύο παίκτες με βάση το κάθε ένα από τα δύο δείγματα με διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 90%:

AEM10617AEM10629

	Test Value = 0						
			Significance			90% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	One-Sided p	Two-Sided p	Mean Difference	Lower	Upper
timeA	21,454	49	<,001	<,001	97,85060	90,2039	105,4973
timeB	17,203	29	<,001	<,001	95,12300	85,7279	104,5181

Στο επίπεδο 90%, η ακρίβεια υστερεί λίγο και ειδικότερα για την εκτίμηση του χρόνου του Β, αν σκεφτεί κανείς αυτά που αναφέρθηκαν στο ερώτημα 1 (μικρότερο δείγμα και διαφορά στο μήκος των μυστάκων) και ότι εδώ χρησιμοποιείται προσέγγιση κανονικής κατανομής. Ωστόσο, αν θεωρήσω μικρό το σφάλμα μπορώ να πω ότι ο μέσος χρόνος επίλυσης του sudoku στο επίπεδο <<Very Hard>> του παίκτη Β είναι περίπου ίσος με αυτόν του παίκτη Α, με πιθανότητα να είναι μικρότερος, καθώς ο μέσος χρόνος επίλυσης του γρίφου από τον παίκτη Β μπορεί να βρίσκεται έως και 5 λεπτά πιο κάτω από αυτόν του Α (κάτω όριο στο διάστημα εμπιστοσύνης του Β είναι το 85 ενώ για τον Α το 90).

Εκτίμηση του μέσου χρόνου επίλυσης του γρίφου για τους δύο παίκτες με βάση το κάθε ένα από τα δύο δείγματα με διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95%:

AEM10617AEM10629

	Test Value = 0						
			Significance			95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	One-Sided p	Two-Sided p	Mean Difference	Lower	Upper
timeA	21,454	49	<,001	<,001	97,85060	88,6850	107,0162
timeB	17,203	29	<,001	<,001	95,12300	83,8141	106,4319

Στο επίπεδο 95%, η ακρίβεια να βρίσκεται ο μέσος χρόνος επίλυσης του γρίφου και των δύο παικτών στο εκάστοτε διάστημα που απεικονίζεται πάνω αυξάνεται, ωστόσο η παραμένουν οι αμφιβολίες για την προσέγγιση της κανονικής κατανομής όπως πάνω. Αγνοώντας τούτη την επιφύλαξη, μπορώ να καταλήξω στο ίδιο συμπέρασμα που κατέληξα χρησιμοποιώντας το 90% διάστημα εμπιστοσύνης, ότι οι δύο μέσες τιμές των χρόνων επίλυσης κυμαίνονται περίπου στο ίδιο εύρος, άρα είναι περίπου ίσες, με πιθανότητα αυτή του Β να είναι μικρότερη λόγω των 5 λεπτών διαφορά του κάτω ορίου των δ.ε. .

Χρησιμοποιώντας το επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, μπορώ να πω ότι κανένας από τους 2 παίκτες δε μπορεί να θεωρηθεί <<καλός>>, αφού ο Α δε θα έχει μέσο χρόνο κάτω από 88 λεπτά (με πιθανότητα 95%) και ο Β δε θα έχει μέσο χρόνο κάτω από 83 λεπτά (με πιθανότητα 95%), γνωρίζοντας ότι το κατώφλι του μέσου χρόνου επίλυσης για να θεωρείται <<καλός>> ένας παίχτης του γρίφου Sudoku στο επίπεδο <<Very hard>> βρίσκεται στα 40 λεπτά.

4)

Σύγκριση της απόδοσής μου με αυτή του Α, υποθέτοντας ότι η μεταβλητότητα (διασπορά) του χρόνου επίλυσης του γρίφου είναι ίδια για εμένα και τον παίχτη Α (άρα χρησιμοποιώ την πρώτη σειρά του πίνακα):

<u>Επίπεδο εμπιστοσύνης 90%:</u>

AEM10617AEM10629

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means							
						Significance				90% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	One-Sided p	Two-Sided p	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
time	Equal variances assumed	,001	,982	,375	78	,355	,709	2,72760	7,28261	-9,39521	14,85041
	Equal variances not assumed			,381	64,277	,352	,705	2,72760	7,16775	-9,23472	14,68992

<u>Επίπεδο εμπιστοσύνης 95%:</u>

AEM10617AEM10629

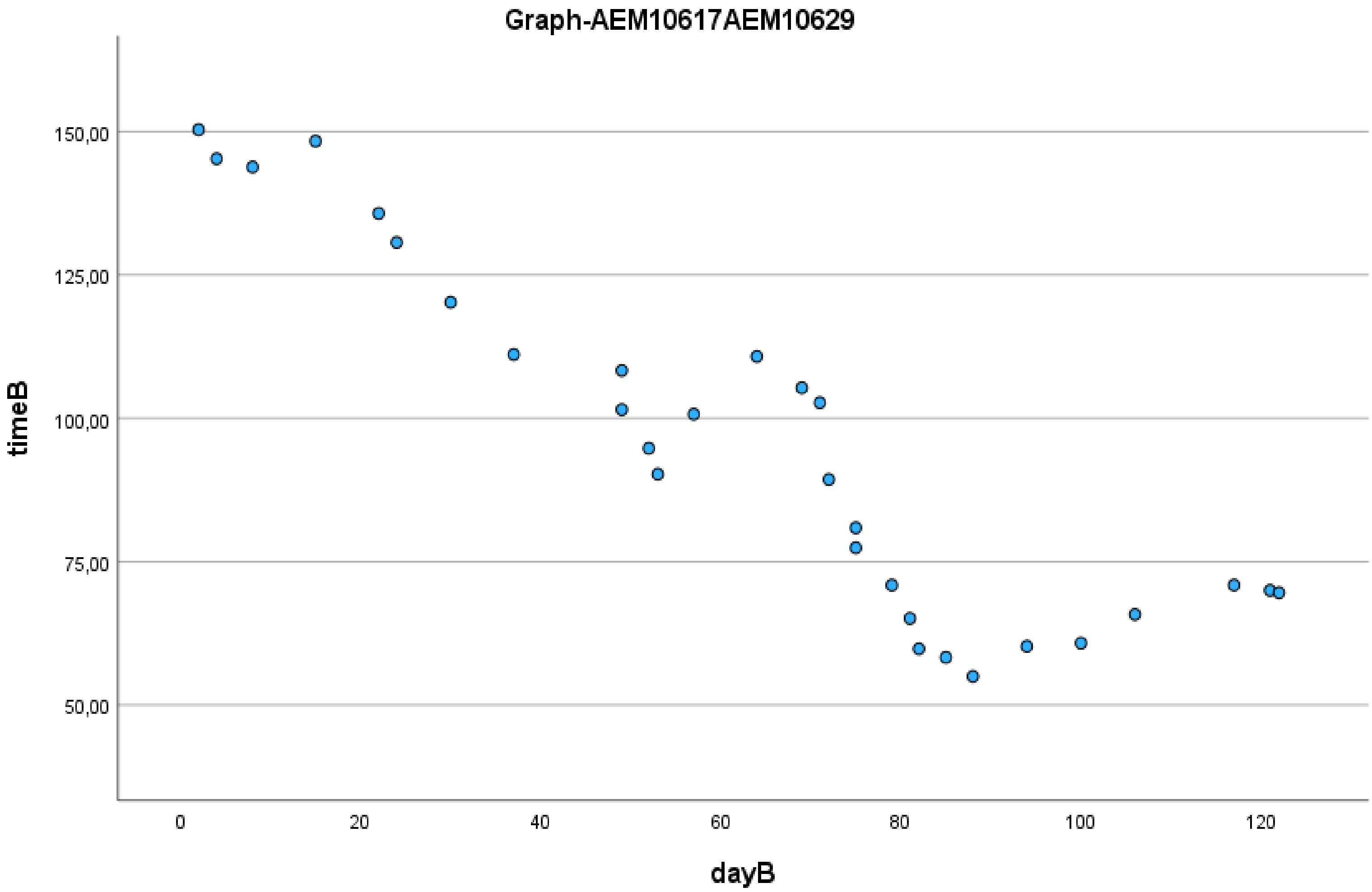
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means							
						Significance				95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	One-Sided p	Two-Sided p	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
time	Equal variances assumed	,001	,982	,375	78	,355	,709	2,72760	7,28261	-11,77096	17,22616
	Equal variances not assumed			,381	64,277	,352	,705	2,72760	7,16775	-11,59044	17,04564

Και στις 2 παραπάνω περιπτώσεις έχω πάρει τη διαφορά της μέσης τιμής του πρώτου μείον του δεύτερου και διακρίνω ότι το 0 εμπεριέχεται και στις δύο με το διάστημα πάνω από το 0 να είναι μεγαλύτερο και στις δύο περιπτώσεις (στην περίπτωση του 90% δ.ε. το διάστημα πάνω από το 0 είναι κατά 5 λεπτά πιο πάνω από το κάτω ενώ στην αντίστοιχη του 95%, κατά 6 λεπτά). Έτσι, κατανοώ ότι η διαφορά των 2 μέσων τιμών επίλυσης του Sudoku δεν είναι στατιστικά σημαντική, έχοντας ωστόσο στο νου μου ότι υπάρχει πιθανότητα η μέση τιμή του Β να υστερεί της Α, όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.

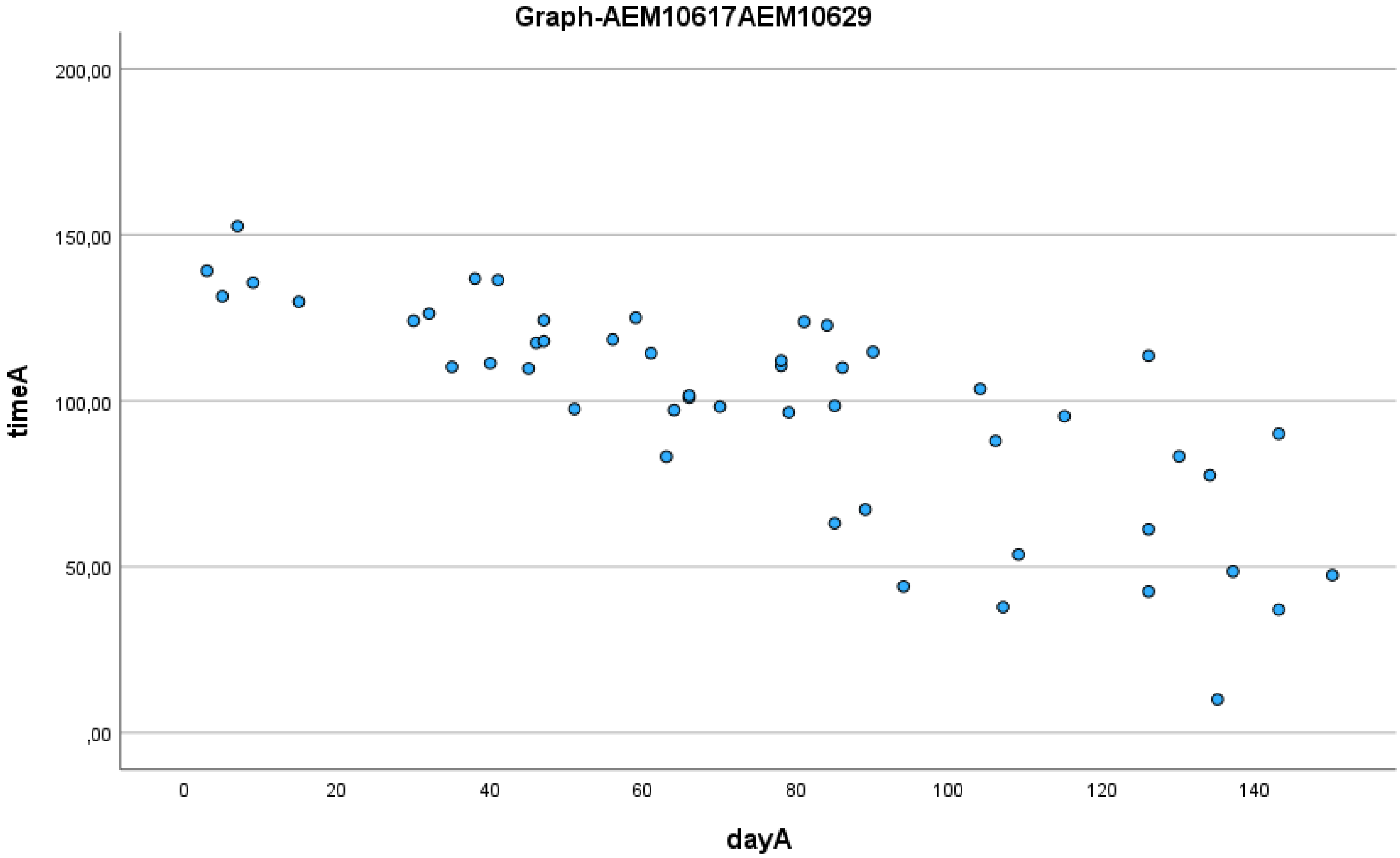
ΜΕΛΕΤΗ Β

5)

Διάγραμμα διασποράς του δικού μας δείγματος :



Διάγραμμα διασποράς του δείγματος του παίκτη Α :



Για τους παρακάτω πίνακες: ο δεξιά αφορά το δείγμα του Α, ο αριστερά το δικό μας.

Correlations-AEM10617AEM10629

		timeB	dayB
timeB	Pearson Correlation	1	-,913**
	Sig. (2-tailed)		<,001
	N	30	30
dayB	Pearson Correlation	-,913**	1
	Sig. (2-tailed)	<,001	
	N	30	30

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Correlations-AEM10617AEM10629

		timeA	dayA
timeA	Pearson Correlation	1	-,781**
	Sig. (2-tailed)		<,001
	N	50	50
dayA	Pearson Correlation	-,781**	1
	Sig. (2-tailed)	<,001	
	N	50	50

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Άρα όσον αφορά τον συντελεστή συσχέτισης είναι ρ_B=-0.913 για το δείγμα μας και ρ_A= - 0.781 για το δείγμα του παίκτη Α.

Βασιζόμενοι στα διαγράμματα διασποράς μπορούμε να αποφανθούμε και για τις δύο περιπτώσεις πως υφίσταται μια γραμμική αρνητική συσχέτιση του χρόνου επίλυσης του sudoku (αρνητική δεδομένου και του αρνητικού προσήμου του συντελεστή συσχέτισης), η οποία δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή (δεν βλέπουμε αφενός μεν να σχηματίζεται μια ξεκάθαρη ευθεία, αφετέρου δε οι συντελεστές συσχέτισης δεν είναι πολύ κοντά στη μονάδα κατά απόλυτη τιμή) για τον παίκτη Α, σε αντίθεση με το δικό μας δείγμα στο οποίο είναι ισχυρή (βλέπουμε ότι $|\rho_B|>0,9$ και εικονικά να σχηματίζεται μία ευθεία). Παρατηρούμε πως το δικό μας δείγμα παρουσιάζει ισχυρότερη συσχέτιση από το αντίστοιχο του παίκτη Α, εφόσον το ρ_B απέχει πολύ λιγότερο από το -1 συγκρινόμενο με το ρ_A.

Συμπερασματικά, θεωρώντας τον αριθμό της ημέρας ως έναν δείκτη εμπειρίας μπορούμε να πούμε και για τους δύο παίκτες ότι εν γένει φαίνεται πως με την πάροδο του χρόνου, αποκτώντας δηλαδή περισσότερη εμπειρία στο παιχνίδι, βελτιώνεται η επίδοσή τους και επιλύουν τους γρίφους γενικά πιο γρήγορα σε σχέση με τις αρχικές τους προσπάθειες, όπως εξάλλου είναι αναμενόμενο.

6)

Για το δείγμα του Α:

Model Summary-AEM10617AEM10629

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,781[a]	,610	,602	20,34129

a. Predictors: (Constant), dayA

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	145,318	6,184		23,497	<,001
	dayA	-,622	,072	-,781	-8,670	<,001

a. Dependent Variable: timeA

Για το δείγμα το δικό μας:

Model Summary-AEM10617AEM10629

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,913[a]	,833	,827	12,58493

a. Predictors: (Constant), dayB

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	145,893	4,868		29,970	<,001
	dayB	-,800	,068	-,913	-11,830	<,001

a. Dependent Variable: timeB

Με βάση τους πίνακες ‘Coefficients[a]’ μπορούμε να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Για τον παίκτη Α: ψ_A=145.318-0.622χ_A

Για εμάς: ψ_B=145.893-0.8χ_B

Όπου ψ_ι: η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή ο χρόνος επίλυσης, και χ_ι: η ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή ο «δείκτης εμπειρίας», για ι=Α,Β (αναλόγως για τον κάθε παίκτη).

Στους πίνακες ‘Model summary’, μπορούμε να δούμε την τυπική απόκλιση σφάλματος (Std.error of the estimate) για κάθε περίπτωση επίσης: 20.34129 για τον παίκτη Α, 12.58493 για εμάς.

Παρατηρούμε επίσης το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης (R Square), το οποίο πολλαπλασιασμένο με 100 μας δίνει το ποσοστό μεταβλητότητας που μπορούμε να ερμηνεύσουμε για την μία μεταβλητή γνωρίζοντας την άλλη. Οπότε για τον παίκτη Α έχουμε 0.61, δηλαδή το 61% από την μεταβλητότητα του χρόνου επίλυσης το ξέρουμε μέσω του «δείκτη εμπειρίας», ενώ αντίστοιχα για εμάς έχουμε 0.833, άρα και το αντίστοιχο ποσοστό είναι 83.3%. Το ποσοστό είναι αρκετά υψηλό για το δικό μας δείγμα (πλησιάζει το 100%), άρα μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα γενικά κατάλληλο μοντέλο για προβλέψεις, εν αντιθέσει με το μοντέλο για τον παίκτη Α, που δεν είναι και ιδιαίτερα κατάλληλο, αφού το 0.61 είναι αρκετά απομακρυσμένο από τη μονάδα.

Όσον αφορά τώρα την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τις δυο περιπτώσεις υπάρχει μια κάποια διαφορά μεταξύ του -0.622 και του -0.8. Άρα ο παίκτης Α φαίνεται πως έχει πιο αργή βελτίωση όσον αφορά τις επιδόσεις του, εφόσον έχει μικρότερη κατά απόλυτη τιμή κλίση (σχηματίζει γωνία 31.88^o με τον οριζόντιο άξονα) σε σχέση με εμάς (38.66^o η αντίστοιχη γωνία).

7)

Προφανώς και το πρώτο και το τρίτο τέταρτο του συνολικού χρόνου του δείγματος είναι εντός των ορίων στα οποία τα μοντέλα μας ισχύουν (εμφανώς δεν ξεπερνούν ούτε τα 150 του παίκτη Α, ούτε τα 122 δικά μας).

Ας υπολογίσουμε πρώτα τις ζητούμενες τιμές για τον δείκτη εμπειρίας (σε περίπτωση που προκύψουν δεκαδικά, θα στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω, θα θεωρούμε δηλαδή τον αριθμό ως το άνω ακέραιο φράγμα του δεκαδικού. Όλα αυτά εφόσον οι μέρες είναι ρεαλιστικά διακριτές τιμές άρα δεν έχουν νόημα οι δεκαδικές υποδιαιρέσεις).

Για τον παίκτη Α, συνολικός χρόνος: 150 →$t_{1/4,A}$=37.5~38 & $t_{3/4,A}$=112.5~113

Για εμάς, συνολικός χρόνος: 122→$t_{1/4,B}$=30.5~31 & $t_{3/4,B}$=91.5~92

Άρα με αντικατάσταση των τιμών στους τύπους που προέκυψαν για κάθε μοντέλο στο προηγούμενο υποερώτημα:

Μέσοι χρόνοι επίλυσης	Πρώτο τέταρτο χρόνου	Τρίτο τέταρτο χρόνου
Παίκτης Α	121.682	75.032
Εμείς	121.093	72.293

Προτιμότερο όμως είναι εφόσον γνωρίζουμε και την τυπική τιμή απόκλισης σφάλματος να δώσουμε ένα πεδίο τιμών για κάθε υποπερίπτωση, το οποίο θα έχει ως κάτω άκρο τη τιμή που αναγράφεται στον πίνακα μειωμένη κατά το αντίστοιχο σφάλμα, και άνω άκρο την τιμή προστιθέμενη στο σφάλμα.

Οπότε θα προκύψει ο εξής πίνακας:

Διάστημα τιμών λαμβάνοντας υπ'όψιν την τυπική απόκλιση σφάλματος	Πρώτο τέταρτο χρόνου	Τρίτο τέταρτο χρόνου
Παίκτης Α	(101.34071,142.02329)	(54.69071,95.37329)
Εμείς	(108.50807,133.67793)	(59.70807,84.87793)

8)

Από το πρώτο μέρος (<75):

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	144,136	4,869		29,603	<,001
	daysA1	-,622	,105	-,784	-5,915	<,001

a. Dependent Variable: timeA1

Από το δεύτερο μέρος (≥75):

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	160,853	24,715		6,508	<,001
	daysA2	-,755	,223	-,569	-3,390	,002

a. Dependent Variable: timeA2

Κατ' αντιστοιχίαν με το 6^{o} ερώτημα:

Οι ευθείες ελαχίστων τετραγώνων είναι:

Για το πρώτο μέρος: $\psi_{A1}=144.136-0.622\chi_{A1}$

Για το δεύτερο μέρος: $\psi_{A2}=160.853-0.755\chi_{A2}$

Φαίνεται πως η ευθεία έχει διαφορετική κλίση από το πρώτο στο δεύτερο μέρος, οι τιμές του χρόνου επίλυσης μειώνονται αρκετά ταχύτερα όταν ο δείκτης εμπειρίας ξεπερνά την τιμή 75.

9)

Το μισό του χρόνου στο δικό μας δείγμα είναι 122/2=61 ημέρες, οπότε και αυτό θα θεωρήσουμε ως όριο διαχωρισμού για την μελέτη σε δύο δείγματα που προκύπτουν από το αρχικό.

Για το πρώτο μέρος (<61):

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	154,384	2,931		52,670	<,001
	daysB1	-1,060	,081	-,970	-13,156	<,001

a. Dependent Variable: timeB1

Για το δεύτερο μέρος ($\geq$61):

Coefficients-AEM10617AEM10629[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	120,519	17,943		6,717	<,001
	daysB2	-,517	,199	-,557	-2,597	,020

a. Dependent Variable: timeB2

Αντίστοιχα στο δικό μας δείγμα:

Οι ευθείες ελαχίστων τετραγώνων είναι:

Για το πρώτο μέρος (εμπεριέχονται 13 εκ των 30 αρχικών τιμών): $ψ_{B1}$=154.384-1.06$χ_{B1}$

Για το δεύτερο μέρος (αφορά τις υπόλοιπες 17): $ψ_{B2}$=120.519-0.517$χ_{B2}$

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε πάλι σημαντική αλλαγή όσον αφορά την κλίση των επιμέρους ευθειών. Όμως σε αντίθεση με τον παίκτη Α φαίνεται ότι εδώ ο χρόνος επίλυσης μειώνεται πιο γρήγορα στο πρώτο μέρος, δεδομένου ότι για το δείγμα που σχετίζεται με τις πρώτες 61 ημέρες έχουμε πιο μεγάλη κλίση εφόσον ο αντίστοιχος συντελεστής είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερος από τον ομόλογό του στο δεύτερο δείγμα (1.06>0.517).

10)

Έχουμε απαντήσει εν μέρει σε αυτό το ερώτημα βάσει των προαναφερόμενων. Ουσιαστικά αν θεωρήσουμε αρχικά και τα δύο δείγματα ως ενιαία μπορούμε να αποφανθούμε (δες ερώτημα 6) πως εμείς εξοικειωνόμαστε ταχύτερα με το παιχνίδι αφού τα σκορ μας γίνονται καλύτερα πιο γρήγορα σε σχέση με αυτά που επιτυγχάναμε τον πρώτο καιρό (λόγω της κλίσης των ευθειών ελαχίστων τετραγώνων).

Παρόλα αυτά με τη μελέτη που κάναμε στα δύο τελευταία υποερωτήματα, όπου διαχωρίσαμε το κάθε δείγμα σε δύο μικρότερα προέκυψαν ορισμένες νέες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Εφόσον μπορούμε να πούμε ότι ο ρυθμός εκμάθησης ουσιαστικά αντιπροσωπεύεται από την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, δεδομένου ότι αυτό δείχνει το πόσο γρήγορα μειώνονται (μεταβάλλονται, γενικώς) οι τιμές του μέσου χρόνου επίλυσης, συγκρίνοντας τις κλίσεις των αντίστοιχων ευθειών που αφορούν τα πρώτα ημίσεα των συνολικών χρόνων δείγματος καταλήγουμε στα εξής ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

Στο πρώτο μισό του αντίστοιχου τους χρόνου φαίνεται πως, ενώ φυσικά και οι δύο παίκτες παρουσιάζουν βελτίωση όσον αφορά τα σκορ τους, εμείς έχουμε εξαιρετικά ταχεία εκμάθηση συγκρινόμενοι με τον παίκτη Α (0.622<1.06). Αυτό δεν φαίνεται να συνεχίζεται όμως και στο άλλο μισό όπου ο παίκτης Α παρουσιάζει ταχύτερο ρυθμό εκμάθησης ,τόσο συγκρινόμενος με εμάς στο αντίστοιχα το δεύτερο ήμισυ (0.755>0.517), όσο και με τον εαυτό του στα πρώτο μισό (0.755>0.622). Εμείς δε, παρουσιάζουμε μια αρκετά μεγάλη μείωση στην κλίση των ευθειών, δηλαδή φαίνεται ότι προσαρμοστήκαμε αρκετά γρήγορα στο παιχνίδι ήδη από τον πρώτο καιρό και μετά «κατεβάσαμε ρυθμούς». Ο παίκτης Α φαίνεται πως παρουσιάζει μια πιο ήπια και ομαλή αλλαγή.

Επίσης μπορούμε να συγκρίνουμε και τους αντίστοιχους μέσους χρόνους στο πρώτο και τρίτο τέταρτο για κάθε παίκτη (δες ερώτημα 7). Γενικά αν λάβουμε υπόψιν μας και τα πεδία τιμών στον τελευταίο πίνακα του ερωτήματος 7 θα δούμε ότι οι τιμές για τον παίκτη Α «παίζουν» σε ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών, οπότε θα συγκρίνουμε τώρα μόνον τους μέσους χρόνους επίλυσης στο αντίστοιχο τέταρτο, όπως προέκυψαν από απευθείας αντικατάσταση του αριθμού της εκάστοτε ημέρας στον τύπο της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποια σπουδαία διαφορά για το πρώτο τέταρτο, με εμάς να έχουμε έναν ελαφρά χαμηλότερο χρόνο. Στο τρίτο τέταρτο παρατηρείται μια μεγαλύτερη διαφορά, πάλι υπέρ μας, της τάξεως των τριών λεπτών περίπου. Καλό θα ήταν όμως να σημειώσουμε ότι οι σταθεροί όροι στις ευθείες ελαχίστων τετραγώνων (για τα ενιαία δείγματα) έχουν και αυτοί μια μικρή διαφορά, με τον δικό μας να είναι κατάτι μεγαλύτερος, το οποίο σημαίνει ότι η ευθεία μας θα τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε ψηλότερο σημείο (δηλαδή ξεκινήσαμε με ελαφρώς χειρότερες «προδιαγραφές» συγκρινόμενοι με τον παίκτη Α). Η διαφορά αυτή αποτυπώνεται με ακόμα μεγαλύτερη πόλωση συγκρίνοντας τις ευθείες για τα εκάστοτε ημίσεα των δύο παικτών. Για τα πρώτα μισά εμείς «ξεκινάμε» από 154.384 ενώ ο άλλος από 144.136. Παρόλα αυτά για τα δεύτερα μισά εμείς έχουμε σταθερό όρο 120.519 ενώ ο παίκτης Α 160.853. Αντικαθιστώντας σε αυτές τις ευθείες την αρχική τους τιμή των 61 και 75 ημερών αντιστοίχως, εμείς «ξεκινάμε» από την τιμή 88.982 ενώ ο παίκτης Α από την τιμή 104.228, γεγονός που αντικατοπτρίζει την γρηγορότερη προσαρμογή μας στο παιχνίδι.

11)

Τα προβλήματα που εντοπίσαμε ως προς τις συνθήκες που προϋποθέτουν οι μέθοδοι στατιστικής ανάλυσης που χρησιμοποιήσαμε στα ερωτήματα 1-10 είναι 3. Συγκεκριμένα:

Α) Το πρώτο εντοπίζεται στην προσέγγιση των 2 κατανομών με την κανονική κατανομή, καθώς όπως αναφέρθηκε στο πρώτο ερώτημα αγνοούνται ορισμένες παρατυπίες και από τις 2, από την κατανομή του χρόνου επίλυσης του γρίφου από τον Α, η ακραία τιμή και από εμάς η διαφορά στο εύρος των 2 ακραίων τεταρτομορίων. Αυτό, σημαίνει ότι οι τιμές που προκύπτουν από την παρακάτω ανάλυση είναι προσεγγιστικές, το οποίο αποτελεί παρεπόμενο του γεγονότος ότι η συνθήκη των επόμενων ερωτημάτων να ακολουθούν οι μεταβλητές του χρόνου επίλυσης κανονική κατανομή δεν ισχύει στο 100%.

Β) Το δεύτερο εντοπίζεται στο ερώτημα 4 και συγκεκριμένα στη θεώρηση των 2 διασπορών ίσων μεταξύ τους. Αν και δεν αλλάζουν ραγδαία οι τιμές, πάλι υστερώ σε ακρίβεια όσον αφορά τα αποτελέσματα των διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Γ) Το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα εμφανίζεται στην προσέγγιση μέσω της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων του δείγματος του παίκτη Α, δηλαδή ότι έχω θεωρήσει γραμμική εξάρτηση του χρόνου επίλυσης από τη μέρα που παίχτηκε το παιχνίδι – γρίφος, ενώ έχω βρει ότι $\rho_A = -0.781$. Αυτό αυτόματα συνεπάγεται προσέγγιση των τιμών έχοντας μεγάλη απόκλιση (εδώ 20 λεπτά). Τούτο κυρίως θεωρείται ως πρόβλημα για το ερώτημα 7, όπου η εκφώνηση ζητάει την προσέγγιση τιμών μέσω αυτού του μοντέλου, το οποίο φαίνεται στα τελικά διαστήματα που προέκυψαν και περιέχουν το σφάλμα της προσέγγισης. Αντιστοίχως, θα μπορούσε να αναφερθεί το ίδιο και για το δείγμα του παίκτη Β, αλλά αφού $|\rho_B|>0,9$, το σφάλμα είναι μικρότερο και για αυτό δίνεται έμφαση στον παίκτη Α.