Пространствен модел на Никълсън-Бейли

СУ-ФМИ, Въведение в изчислителната биология (2023)

През 30-те години на XX век Никълсън и Бейли разработват дискретен модел, който описва популационната динамика на насекомо (гостоприемник) и неговия паразитоид (друго насекомо, например паразитна оса). Паразитните оси снасят яйца в гостоприемника, който загива при завършването на жизнения цикъл (излюпване) на следващото поколение паразитоиди. Паразитоидите са интересни организми, защото от една страна приличат на паразитите, тъй като растат в гостоприемника, а от друга – на хищниците, тъй като при излюпването на поколението им унищожават гостоприемника.

Класически модел. Класическият модел на Никълсън-Бейли, който разгледахме в курса, е зададен със система от диференчни уравнения, описващи взаимодействието между двете популации.

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t \exp(-aP_t) \\ P_{t+1} = cN_t(1 - \exp(-aP_t)) \end{cases}$$

Променливите N_t и P_t представляват гъстотите на популациите от гостоприемници и паразитоиди в t-то поколение.

Ако приемем срещите между гостоприемник и паразитоид за случайни, вероятността гостоприемник да избяга от паразитоид може да бъде зададена с $\exp(-aP_t)$, където a е константа на пропорционалност. По подобен начин, вероятността за заразяване се дава от $(1 - \exp(-aP_t))$. Параметърът c описва броя на паразитоидите, които се излюпват от заразения гостоприемник, а λ е скоростта на възпроизводство на гостоприемника.

В лекцията доказахме, че равновесната точка на класическия модел на Никълсън-Бейли е неустойчива. Симулацията на модела показа, че динамиката се характеризира с неустойчиви колебания с нарастваща амплитуда, докато популацията не се срине. Започвайки от стойности близки до равновесната точка, траекторията на популациите достига стойности, близки до 0, т.е. популациите се сриват и изчезват.

Пространствен модел. Важен фактор, който класическият модел на Никълсън-Бейли пренебрегва, е *пространството*. Пространството може да бъде пренебрегнато, ако популациите се смятат за добре смесени в глобален смисъл. Това допускане обаче невинаги може да бъде оправдано в реални условия. Взаимодействието между популациите и разпространението на потомството им може да се влияе значително от *локалните условия*.

Моделът на Никълсън-Бейли може да бъде разширен, за да включва пространството, в което се разпространяват популациите. За тази цел разглеждаме пространствена мрежа (с размер $n \times n$), на която се осъществява динамиката на Никълсън-Бейли.

В полето с координати (i, j) от мрежата динамиката се задава с простия модел на Никълсън-Бейли от лекцията, но освен това позволяваме на гостоприемниците и паразитоидите да се разпространяват във всички непосредствено съседни полета (със скорости на разпространение d_n и d_p). Математически пространственият модел се задава от следните уравнения

$$\begin{aligned} N_{i,j}(t+1) &= \lambda N^*_{i,j}(t) \exp(-aP^*_{i,j}(t)) \\ P_{i,j}(t+1) &= cN^*_{i,j}(t)[1 - \exp(-aP^*_{i,j}(t))] \end{aligned}$$

където долният двоен индекс показва полето (i, j) от мрежата, а поколението е посочено в скоби. Тук

$$\begin{aligned} N^*_{i,j}(t) &= (1 - d_n)N_{i,j}(t) + \frac{d_n}{8} \sum_{k,l} N_{k,l}(t) \\ P^*_{i,j}(t) &= (1 - d_p)P_{i,j}(t) + \frac{d_p}{8} \sum_{k,l} P_{k,l}(t) \end{aligned}$$

където сборът е над всичките 8 непосредствено съседни на (i, j) полета (т.е. $(i - 1, j - 1), \ldots, (i + 1, j + 1)$). Този модел е изцяло детерминистичен.

Задачи

1. Напишете скрипт, който изпълнява пространствения модел на Никълсън-Бейли за двумерна решетка с размери $n \times n$.

   Необходимо е да наложите гранични условия за разпространението на индивидите в клетките по ръба на мрежата. Използвайте условия на фон Нойман (отражение, което означава, че е необходимо да промените формулите за $N_{i,j}, P_{i,j}$, ако поне един от индексите $i, j = 1$ или n).

2. В зависимост от избраните гранични условия трябва да изведете формула за движението на популациите в клетките по границата на решетката.

   Какви трябва да бъдат скоростите d_n, d_p, за да се гарантира, че гъстотите на популациите са винаги положителни?

3. Как пространствената скорост на разпространение на гостоприемниците и паразитоидите оказва влияние върху динамиката на популацията на пространствения модел? Дефинирайте бинарна променлива (1/0), която съответства на съвместно съществуване или изчезване за различни комбинации от двете скорости на разпространение. Изобразете резултатите в двумерна диаграма на параметричното пространство (d_n, d_p) (т.е. в координатна система с оси, съответстващи на двата параметъра d_n, d_p и оцветете съответното поле (d_n, d_p) в цвят отговарящ на стойността на бинарната променлива).

4. В режима на устойчиво съвместно съществуване, изобразете общата гъстота на двете популации като функция на двата параметъра.

5. Повторете същия числен експеримент, като променяте стойностите на λ, a или c. Наблюдавате ли някакви закономерности?