

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ВВОДНЫЕ СВЕДЕНИЯ	6
1.1 Основные определения и их следствия	6
1.2 NTRU Prime и связь с решётками	10
ГЛАВА 2. АТАКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДРЕШЁТОК МАЛОГО РАНГА	14
2.1 Атака методом редукции решётки. Её асимптотическая сложность	14
2.2 Алгоритм подбора параметров атаки методом редукции решётки	20
2.3 Обзор атаки с использованием подколец	27
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	30
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	31

ВВЕДЕНИЕ

Решёточные криптосистемы появились в 1990-е годы как ответ на потребность в алгоритмах шифрования на открытом ключе, устойчивых к атакам с использованием квантовых алгоритмов. Их отличие состоит в том, что проблема редукции базиса решёток, мешающая злоумышленнику вскрыть зашифрованное сообщение, является предположительно устойчивой к атакам, выполняемым на квантовых компьютерах при использовании соответствующих алгоритмов [5].

В частности, неподдельный интерес в среде криптографов вызвала криптосистема NTRU, представленная Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher, and Joseph H. Silverman в районе 1996-го года. Эта криптосистема среди прочих постквантовых обещала более короткие ключи и высокую производительность. Однако проблема однозначного расшифрования сообщения так и не была решена: сообщение с исчезающе малой, но всё же ненулевой, вероятностью могло не зашифроваться на данном ключе [5]. Также, несмотря на улучшенную производительность по сравнению с конкурирующими постквантовыми решениями, NTRU всё же страдала неоптимизованностью. Именно поэтому в Августе 2017 г. В своей статье [1] Daniel J. Bernstein, Chitchanok Chuengsatiansup, Tanja Lange, и Christine van Vredendaal привели “готовый к практическому применению” вариант NTRU под названием NTRU Prime. Главными достижениями их подхода являются сокращённая длина ключа, оптимизированная производительность и гарантия возможности расшифровки сообщения. Однако, ценой такого выигрыша в случае с системами гомоморфного шифрования является потенциально “растянутый” (англ. Overstretched) параметр q , что может привести к возможной уязвимости

к атакам с использованием подрешёток малого ранга, как это описано в [2].

Так как все криптосистемы из семейства NTRU подразумевают структуру так называемой NTRU решётки, то все они будут уязвимы к предлагаемой в данной статье атаке при соблюдении условий для её применимости. На данный момент NTRU-HRSS является кандидатом на сертификацию NIST и именно поэтому актуальной задачей является уточнение допустимых параметров при проектировании криптосистемы с конкретными параметрами.

Для взлома криптосистемы достаточно провести успешную редукцию решётки $\begin{pmatrix} qI_n & M_h \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$, где M_h - матрица размера $n \times n$, получаемая некоторым образом из открытого ключа.

С момента публикации криптосистемы NTRU был предложен целый перечень атак [2][7][8]. Среди них можно выделить три подхода к их построению: комбинаторный [7], решётчатый [1] и гибридный, объединяющий идеи двух предыдущих.

Целью данной научно-исследовательской работы является исследование асимптотической и конкретной сложностей проведения атак на решётчатые криптосистемы, использующих подрешётки малых рангов. В ходе работы выполнялись следующие задачи:

- анализ зависимости оптимальных параметров BKZ алгоритма от параметров n, q криптосистемы NTRU, где n является количеством коэффициентов открытого ключа, а параметр q представляет собой число по модулю которого производятся вычисления;
- составление программы, возвращающей асимптотическую сложность взлома NTRU Prime как яркого примера представителя се-

мейства криптосистем NTRU на заданных параметрах при подходе, использующем редукцию решётки;

- анализ атаки методом подколец.

ГЛАВА 1. ВВОДНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Основные определения и их следствия

Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ – множество линейно независимых векторов. Множество \mathcal{L} их комбинаций с целочисленными коэффициентами называется решёткой, порождённой этими векторами. Иными словами:

$$\mathcal{L} = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Если все коэффициенты a_i являются целочисленными, то и такая решётка \mathcal{L} тоже называется целочисленной.

Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ – базис решётки \mathcal{L} . Определим векторы $w_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n$, $1 \leq i \leq n$, принадлежащие \mathcal{L} . Коэффициенты $a_{i,j}$, где $1 \leq i, j \leq n$ целочисленны по определению решётки. Выразим v_i через w_i . В процессе нам понадобится матрица, обратная к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Однако, вспомним, что коэффициенты A^{-1} тоже должны быть целочисленными, поэтому можно сделать вывод о том, что все базисы решётки \mathcal{L} связаны между собой целочисленными матрицами с определителем, равным ± 1 [5].

Дискретной аддитивной подгруппой в \mathbb{R}^m называется такое множество \mathcal{L} , что:

1. \mathcal{L} является подгруппой в \mathbb{R}^m ;

2. Верно утверждение: $\forall v \in \mathcal{L}; \exists \epsilon > 0 : L \cap \{w \in R^m : |v - w| < \epsilon\} = v$.

Тогда решётка \mathcal{L} является аддитивной подгруппой в R^m .

Фундаментальным параллелепипедом решётки $L = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n | a_i \in \mathbb{R}\}$ называется множество:

$$\mathcal{F}(v_1, \dots, v_n) = \{t_1v_1 + \dots + t_nv_n | t_i \in (0; 1], \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Тогда для любого $w \in \mathbb{R}^n$ верно $w = t + v$, где $t \in (v_1, \dots, v_n)$, $v \in \mathcal{L}$.

Оказывается [5], что объём фундаментального параллелепипеда является инвариантом решётки, то есть не зависит от выбранного базиса. К тому же он равен определителю решётки:

$$Vol \mathcal{F} = det \mathcal{L} = \left| det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right| \leq \prod_{i=1}^n |v_i|.$$

Рассмотрим некоторые из основных задач из теории решёток, лежащих в основе решётчатых криптосистем:

- **SVP.** Проблема поиска кратчайшего вектора. Заключается в отыскании такого вектора $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \setminus \{0\}$, что его норма минимальна.
- **CVP.** Проблема поиска ближайшего вектора. По данному вектору $w \in \mathbb{R}^n$ найти такой вектор $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, что норма $|v - w|$ минимальна.

Эти задачи считаются NP-сложными при возрастающей размерности решётки [5]. Отметим, что решение вышеизложенных задач не всегда единственно.

В криптоанализе решёточных криптосистем нам важны оценки длины кратчайшего вектора а также “качества” базиса. Чем более ортогональный базис нам дан, тем легче удаётся решить вышеизложенные проблемы. Именно из этих соображений приведём следующие результаты:

Теорема (Эрмита/Минковского). Каждая решётка L размерности n содержит ненулевой вектор v , удовлетворяющий следующему неравенству:

$$|v| < \sqrt{n}(\det \mathcal{L})^{1/n}. \quad (1)$$

Также примечательным является утверждение, что для фиксированной размерности n существует такая постоянная γ_n , называемая Эрмитовой постоянной, что для любой решётки \mathcal{L} размерности n верно:

$$\exists v \in \mathcal{L} \setminus 0 : |v|^2 \leq \gamma_n(\det \mathcal{L})^{2/n}.$$

Ещё один вариант теоремы Эрмита нам понадобится для непосредственного криптоанализа атаки. Он утверждает, что для данной решётки L размерности n существует базис v_1, \dots, v_n , удовлетворяющий следующему неравенству:

$$\prod_{i=1}^n |v_i| = \det \mathcal{L}. \quad (2)$$

Тогда, исходя из данного утверждения, можно определить числовую характеристику $H(B)$ “качественности” базиса $B = (v_1, \dots, v_n)$,

называемую коэффициентом Адамара следующим образом:

$$H(B) = \left(\frac{\det \mathcal{L}}{\prod_{i=1}^n |v_i|} \right)^{1/n}.$$

Тогда она будет лежать в промежутке $(0; 1]$, причём будет равна единице тогда и только тогда, когда базис является ортогональным в \mathbb{R}^m .

Также, для криптоанализа нам потребуются следующие оценки, касающиеся кратчайших векторов и базисов решётки:

Гауссова эвристика. Для любой решётки L ранга k имеем:

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi e}} Vol(\mathcal{L})^{1/k}, \quad (3)$$

где $\lambda_1(\mathcal{L})$ - длина кратчайшего вектора решётки.

ВКЗ-эвристика. Пусть b_1, \dots, b_k – базис решётки \mathcal{L} ранга k . Тогда при вызове алгоритма ВКЗ применимо к данному базису мы получим:

$$|b_i^*| \leq \delta_\beta^2 |b_{i+1}^*|,$$

где $\delta_\beta = \left(\frac{\beta}{2\pi e} (\pi\beta)^{1/\beta}\right)^{\left(\frac{1}{2(\beta-1)}\right)}$ - эрмитов фактор, а $1 \leq i \leq k-1$.

Применим данную оценку к $\prod_{i=1}^k |b_{(k+i)}^*|$ и получим, что:

$$\delta_\beta^{-k(3k-1)} \cdot |b_1|^k = \prod_{i=1}^k |b_{k+i}^*|. \quad (4)$$

Лемма Патаки-Турала. Пусть \mathcal{L} решётка полного ранга, равного n и b_1, \dots, b_n – её базис. Тогда для любой подрешётки $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ ранга

$d \leq n$ имеем:

$$\min_{\substack{S \subset [n]; \\ |S|=d}} \prod_{|b_i^*|} \leq Vol \mathcal{L}' \quad (5)$$

Теперь рассмотрим $P_n(X) \subset \mathbb{Z}[X]$ – множество многочленов степени, не превышающей $n-1$. Пусть также задана решётка $\mathcal{L}(v_0, \dots, v_{(n-1)})$ размерности n . Тогда можно ввести гомоморфизм аддитивных групп:

$$\begin{aligned} \sigma : P_n(X) &\rightarrow \mathcal{L} : \sigma [a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0] = \\ &= a_1v_0 + \dots + a_nv_n - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как множество элементов решётки бесконечно, криптография на практике использует её факторгруппу по заданному отношению эквивалентности. Тогда будем обозначать кольца $\mathbb{Z}[x]/(x^p - x - 1)$ и $\mathbb{Z}/(q \cdot \mathbb{Z})[x]/(x^p - x - 1)$, использующиеся в NTRU Prime, как R и R/q соответственно.

1.2 NTRU Prime и связь с решётками

Конкретная реализация Streamlined NTRU Prime зависит от трёх параметров (p, q, t) , причём для того, чтобы не было проблем с нерасшифровываемыми сообщениями, необходимо выполнить следующие условия: $t \geq 1$; $p \geq 3t$; $q \geq 32t + 1$ а многочлен $x^p - x - 1$ неприводим в кольце $(\mathbb{Z}/q)[x]$. В статье [1] предложено выбрать $p = 761$; $q = 4591$; $t = 143$. Рассмотрим процесс генерирования пары открытого и секретного ключа:

- Генерируем случайный малый многочлен $g \in R$ пока не получим

обратимый в $R/3$ многочлен;

- Генерируем случайный t -малый элемент $f \in R \setminus \{0\}$. Заметим, что, так как он ненулевой, то он обратим в R/q ввиду того, что $t \geq 1$;
- Вычислим $h = g/(3f)$, выполняя операции в кольце R/q и получим открытый ключ;
- Сохраним секретные ключи: $f \in R, g = g \pmod{3} \in R/3$.

Streamlined NTRU Prime является по сути механизмом инкапсуляции ключа (key encapsulation mechanism), что означает, что шифрующая сторона (Алиса) получает на вход открытый ключ, а на выход подаёт шифротекст и сессионный ключ. Однако ассиметричная криптография редко используется для передачи непосредственно сообщений ввиду долгого процесса зашифровки и расшифровки, поэтому договоримся считать, что исходным сообщением является случайный элемент из множества исходных сообщений. Рассмотрим процесс зашифрования сообщения (инкапсуляция):

- Генерируем случайный t -малый элемент $t \in R$;
- Находим $hr \in R/q$;
- Округляем каждый коэффициент многочлена hr , рассматриваемый как число в промежутке $[-(q-1)/2, (q-1)/2]$ до ближайшего кратного числу 3, получая $c \in R$.
- Вычисляем хеш значение для r ;
- Результатом работы алгоритма является пара (C, c) .

Далее рассмотрим процесс расшифрования:

- Умножим c на $3f$ над R/q ;
- Рассмотрим каждый коэффициент многочлена $3fc$ как число в промежутке $[-(q-1)/2, (q-1)/2]$ и приведём по модулю 3, получив многочлен $e \in R/3$;
- Домножим e на $1/g$ над кольцом $R/3$;

- Переведём e/g в кольцо R так, чтобы он оказался малым (его коэффициенты по модулю не должны превышать 1) и получим многочлен r' ;
- Зная r' , вычислим C' и c' , домножив его на h ;
- Если r' t -мал и $(C, c) = (C', c')$ то подаём на выход r' , иначе возвращаем сообщение об ошибке декодирования.

Если (C, c) принадлежит множеству исходных сообщений, то он получен округлением коэффициентов многочлена hr до ближайшего числа, кратного 3. Например $c = m + hr \in R/q$, где m мал. Все коэффициенты многочлена $3fm + gr \in R$ в промежутке $[-16t, 16t]$ и попадают в промежуток $[-(q-1)/2, (q-1)/2]$, так как $q \geq 32t + 1$. Если рассмотреть каждый коэффициент $3f = 3fm + gr$ как число в промежутке $[-(q-1)/2, (q-1)/2]$, то мы перейдем в кольцо R и после приведения по модулю 3 получим $gr \in R$. Тогда $(gr)/g = r \in R/3$. Переход обратно к R не изменяет r , так как он мал. Тем самым доказываем корректность алгоритма шифрования.

Как это было упомянуто в 1.1, благодаря гомоморфизму (6) мы имеем вложение кольца многочленов R в решётку \mathcal{L} .

Когда мы работаем с криптосистемой NTRU, нами используется особый тип решётки - $(L)_h$ так называемой “NTRU решётка” [6] размерности $2n$, порождаемая векторами, компоненты которых являются строки следующего вида:

$$\mathcal{L}_h = \{(f, g) \in r^2 : q \equiv hf/p \pmod{q}\}.$$

Причём, дискриминант решётки: $Disc \mathcal{L}_h = q^n$.

Несмотря на то, что алгоритм шифрования NTRU Prime отли-

чается от классического NTRU, решётка, появляющаяся при анализе, имеет тот же вид.

ГЛАВА 2. АТАКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДРЕШЁТОК МАЛОГО РАНГА

2.1 Атака методом редукции решётки. Её асимптотическая сложность

Предположим, дана постановка задачи: пусть $h = f/g \pmod{q} \in \mathbb{Z}_q[x]/\Phi$, где Φ – неприводимый полином с целыми коэффициентами. Требуется найти f, g с малыми коэффициентами зная h, n, m, q .

Приведём алгоритм взлома из статьи [2] с оригинальными обозначениями:

1. Выбираем размер блока $\beta = \Theta\left(\frac{n \log q}{\log^2 q} \log\left(\frac{n \log q}{\log^2 q}\right)\right)$, подсчитываем согласно эвристике Гаусса $\delta_\beta \approx (\beta/(2\pi e) \cdot (\pi\beta)^{1/\beta})^{1/(2(\beta-1))}$ ищем наименьшее k не удовлетворяющее условию:

$$\left(\frac{k}{2\pi e}\right)^{k/2} \cdot q^k \geq \delta_\beta^{k(3k-1)} (n/2)^n.$$

2. Комбинируем алгоритм Коркина-Золотарёва и эффективный детерминированный SVP алгоритм [3] применяемый для получения первого вектора. Применяем этот алгоритм для редукции решётки, порождаемой базисом $\begin{pmatrix} q I_n & M_h^\mathcal{O} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ где $M_h^\mathcal{O}$ определяется как матрица линейного отображения:

$$M_a^\mathcal{L} : \mathcal{L} \rightarrow 0; x \rightarrow a \cdot x.$$

В итоге получаем редуцированный базис $b_i^* : 1 \leq i \leq n/2$.

3. При помощи редуцированного базиса, векторы которого лежат в

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O} \text{ находим } f, g.$$

Проанализируем сложность данного подхода, учитывая свойство NTRU решёток, заключающееся в том, что в ней есть n коротких векторов.

Приведём матрицу базиса к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} q \cdot I_{n-k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q \cdot I_k & 0 & 0 \\ C_{00} & C_{01} & I_k & 0 \\ C_{10} & C_{11} & 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Обозначим теперь:

$$B' = \begin{pmatrix} q \cdot I_k & 0_k \\ C_{01} & I_k \end{pmatrix}.$$

Применим к B' алгоритм BKZ с размером блока β . Согласно [2] сложность такого прохода оценивается как $2^{O(\beta)}$. Выбрав

$$\beta = \Theta \left(\frac{n \log(\sigma)}{\log^2 q} \log \left(\frac{n \log(\sigma)}{\log^2 q} \right) \right),$$

где σ – параметр распределения коэффициентов в многочлене f , заметим, что определение растянутого (overstretched) параметра q подразумевает следующее: $q = 2^{\alpha\sqrt{n}}$, $\alpha > 1$. Тогда:

$$\beta = \Theta \left(\frac{n \log(\sigma)}{\log^2 2^{\alpha\sqrt{n}}} \log \left(\frac{n \log(\sigma)}{\log^2 2^{\alpha\sqrt{n}}} \right) \right) = \Theta \left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2 2} \log \left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2 2} \right) \right).$$

Подставим этот результат в оценку сложности BKZ и заменим Θ на O :

$$\begin{aligned}
2^{O(\beta)} &= 2^{O\left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)} \log\left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)}\right)\right)} = O\left(\left(2^{\log\left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)}\right)}\right)^{\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)}}\right) = \\
&= O\left(\left(\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)}\right)^{\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2(2)}}\right) = \\
&= O\left(\left(\frac{1}{\alpha^2 \log^2 2}\right)^{\frac{\log(\sigma)}{\alpha^2 \log^2 2}} \cdot \left(\sigma^{\log \log(\sigma)}\right)^{\frac{1}{\alpha^2 \log^2 2}}\right) = \\
&= O\left(\sigma^{-\log(\alpha^2 \log^2 \sigma)/(\alpha^2 \log^2 \sigma) + \log \log(\sigma)/(\alpha^2 \log^2 \sigma)}\right) = \\
&= O\left(\sigma^{[\log \log(\sigma) - \log(\alpha^2 \log 2)]/(\alpha^2 \log 2)}\right)
\end{aligned}$$

где σ -параметр для распределения, согласно которому был сгенерирован достаточно малый многочлен f . Как мы можем видеть, сложность BKZ алгоритма теперь не зависит непосредственно от n , однако зависимость от σ и α остаётся. Согласно [2] σ это среднеквадратичное отклонение нормы вектора, выбранного NTRU распределением, от его математического ожидания. Математическое ожидание евклидовой нормы вектора v , выбранного равномерным на множестве $\{-1, 0, 1\}^n$ распределением D_n есть:

$$\mathbb{E}(|D_n|) = \sqrt{2n/3}$$

Для того, чтобы оценить параметр σ , являющийся корнем квадратным от дисперсии распределения D_n , нам необходимо для начала найти эту

дисперсию:

$$\mathbb{D}(D_n) = \mathbb{E} (\mathbb{E}(|D_n|) - |D_n|)^2 \quad (7)$$

Так как распределение D_n состоит из равновероятностного и независимого выбора одного из трёх элементов n раз, то оно само является равномерным на множестве наборов $i \in -1, 0, 1^n$. Распишем определение математического ожидания применительно к (7):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(D_n) &= 3^{-n} \sum_{i \in -1, 1, 0} \left(\sqrt{2n/3} - \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} i_j^2} \right)^2 = \\ &= 3^{-n} \sum_{i \in -1, 1, 0} \left(\sqrt{2n/3} - \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} |i_j|} \right)^2 = \\ &= 2n/3 + 3^{-n} \sum_{i \in \{-1, 1, 0\}^n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |i_j| - \sqrt{\frac{8n}{3} \sum_{j=0}^{n-1} |i_j|} \right)^2 = \\ &= 2n/3 + 3^{-n} \sum_{i \in \{-1, 1, 0\}^n} \left(\text{wt}(i) - \sqrt{\frac{8n}{3} \text{wt}(i)} \right)^2. \end{aligned}$$

Для набора $i \in -1, 0, 1^n$ веса $\text{wt}(i) = w$ существует $\binom{n}{w}$ вариантов выбора мест расположения ненулевых координат. Тогда:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \text{wt}(i) = \sum_{w=0}^n \binom{n}{w} w$$

И поэтому:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(D_n) &= 2n/3 + 3^{-n} \left[\sum_{i \in \{-1,1,0\}^n} \text{wt}(i) - \sum_{i \in \{-1,1,0\}^n} \sqrt{\frac{8n}{3}} \text{wt}(i) \right] \\ &= 2n/3 + 3^{-n} \left[\sum_{w=0}^n \binom{n}{w} w - \sum_{w=0}^n \binom{n}{w} \sqrt{\frac{8n}{3}} \cdot w \right] = 2n/3 + 3^{-n} (2^{n-1}n - 3 \cdot 2^{n-4}n^2).\end{aligned}$$

Тогда $\sigma = \sqrt{2n/3 + 3^{-n} (2^{n-1}n - 3 \cdot 2^{n-4}n^2)} = O(\sqrt{n})$, поэтому его сложность оценивается как:

$$2^{O(\beta)} = O\left((\alpha\sqrt{n})^{\log \log(\sqrt{n}) - \log(\alpha^2 \log 2)/(\alpha^2 \log 2)}\right), \quad (8)$$

где $\alpha > 1$.

Так как $\log \log \alpha\sqrt{n}$, расположенным в степени, можно пренебречь на относительно малых n , использующихся в криптографии, получаем примерно полиномиальную сложность алгоритма в случае с растянутым параметром q . В соответствии с опытом и традициями криптоанализа [9] на решётках предположим, что базис, возвращаемый алгоритмом BKZ удовлетворяет Гауссовой эвристике (GSA). В частности это означает, что k последних векторов, возвращаемых алгоритмом малы. По лемме Патаки-Турала их произведение ограничено объёмом любой подрешётки \mathcal{L}' ранга k решётки L . Применим также следствие из BKZ-эвристики и получим:

$$\delta_\beta^{-k(3k-1)} |b'_1|^k \leq \text{Vol } \mathcal{L}.$$

Далее можно ввести матрицу X' как это сделано в [9] такую, что

$\text{Vol}\mathcal{L}' \leq \text{Vol}\mathcal{L}$ и использовать это значение, как ограничивающее $|b'_1|$. Тогда $|b'_1| \leq \delta_\beta^{3k-1} \text{Vol}^{1/k} \mathcal{L}$. С другой стороны пусть \mathcal{L}^\perp - ортогональная проекция $\mathcal{L}(B')$ в векторное пространство, ортогональное к порождаемому X' . Тогда Гауссова эвристика даёт нам:

$$\lambda_1(\mathcal{L}^\perp)^k = \left(\frac{k}{2\pi e} \right)^{k/2} q^k / \text{Vol}(X')$$

Если $|b'_1| < \lambda_1(\mathcal{L}^\perp)$, то $b_1 \in \mathcal{L}(X')$. Чтобы понять, когда это происходит, предположим от противного, что $|b'_1| \geq \lambda_1(\mathcal{L}^\perp)$. Тогда:

$$\delta_\beta^{-k(3k-1)} |b'_1|^k \leq \text{Vol} \mathcal{L}(X');$$

$$\left(\frac{k}{2\pi e} \right)^{k/2} \frac{q^k}{\text{Vol} \mathcal{L}(X')} \leq |b'_1|^k$$

Тогда перемножим эти два неравенства:

$$\delta_\beta^{-k(3k-1)} \left(\frac{k}{2\pi e} \right)^{k/2} q^k \leq \text{Vol}^2 \mathcal{L}(X')$$

Для того, чтобы найти параметры k, β заменим $\text{Vol}\mathcal{L}(X')$ на оценку $(n/2)^{n/2}$ и перепишем это в виде:

$$\delta_\beta^{-k(3k-1)} \left(\frac{k}{2\pi e} \right)^{k/2} q^k \geq \delta_\beta^{k(3k-1)} (n/2)^{n/2}.$$

Что эквивалентно:

$$\sqrt[k(3k-1)]{\delta_\beta^{-k(3k-1)} \left(\frac{k}{2\pi e} \right)^{k/2} q^k (n/2)^{-n/2}} \geq \delta_\beta \quad (9)$$

Данного неравенства достаточно, чтобы относительно быстро подобрать подходящий параметр k , опираясь на значение β , однако точных указаний как выбирать последнее не было дано. Изучим этот вопрос.

В статье [1] приведён критерий выбора β :

$$\log q = \alpha\sqrt{n} \leq \sqrt{12n \log(n/2) \log(\delta_\beta)}.$$

Это означает, что для не выполнения неравенства достаточно:

$$\alpha^2 / (12 \log(n/2)) > \log \delta_\beta.$$

ВКЗ алгоритм является самым сложным этапом всего алгоритма взлома, поэтому, узнав его асимптотическую сложность, мы получим асимптотическую сложность всей атаки. Она равна $O(2^\beta)$.

2.2 Алгоритм подбора параметров атаки методом редукции решётки

Для нахождения оптимального решения неравенства (8) сначала необходимо изучить его свойства. Для начала отметим, что при росте β минимальный k такой, что неравенство (8) верно, уменьшается. Однако, нас интересует именно минимальный β , так как сложность выполнения атаки асимптотически зависит именно от него. Ссылаясь на [9] отметим, что существует такой β_0 , что все $\beta < \beta_0$ не удовлетворяют неравенству (8), а все $\beta \geq \beta_0$ удовлетворяют. Поэтому найдём β применив бинарный поиск. То же самое можно сказать и про k в том же неравенстве, но с зафиксированным β . Параметр k тоже найдём при

помощи бинарного поиска. Код алгоритма можно найти в Приложении.

На рисунках снизу приведены данные, полученные при помощи алгоритма, для случая $n = 128$.

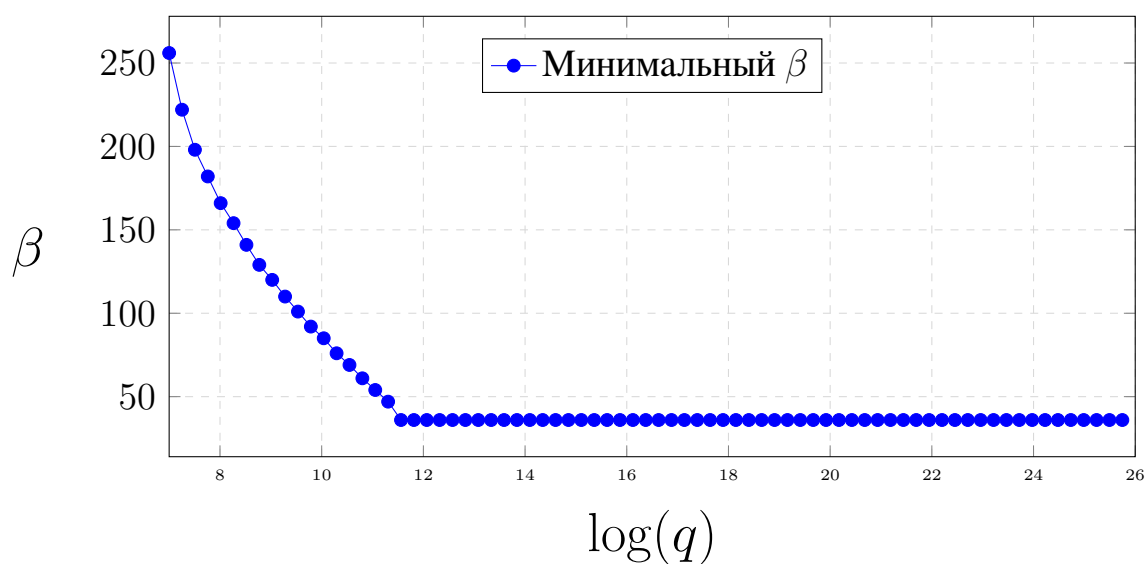


Рис. 1: График зависимости β от $\log(q)$ при $n = 128$

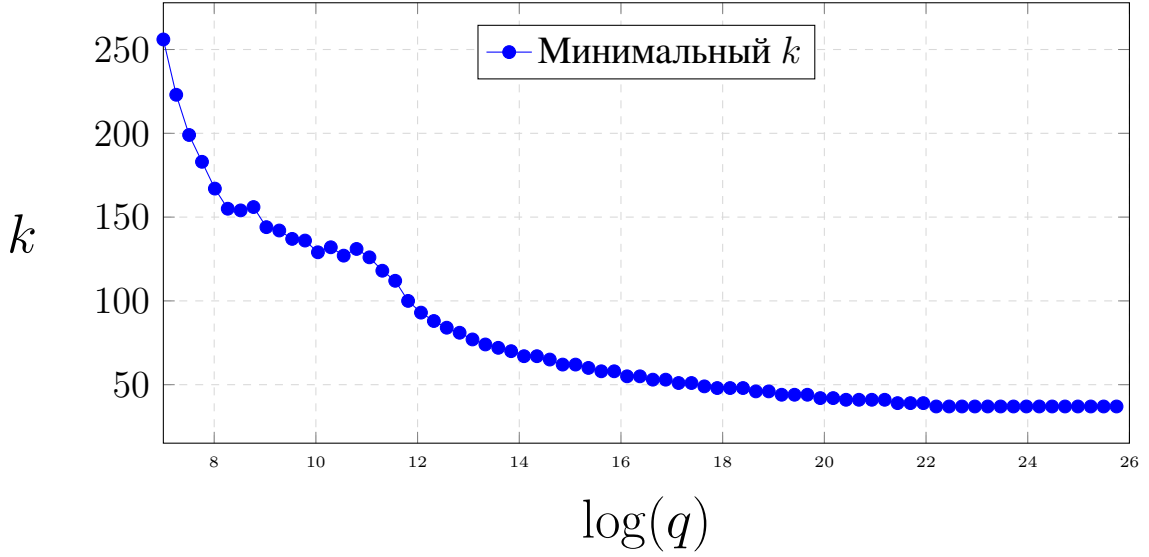


Рис. 2: График зависимости k от $\log(q)$ при $n = 128$

На графике видна монотонно убывающая зависимость параметра β от q , продолжающаяся до $q \approx \sqrt{n}$, после чего параметр β выходит на плато. Отметим, что аппроксимация эрмита фактора $\delta_\beta = \left(\frac{\beta}{2\pi e}(\pi\beta)^{1/\beta}\right)^{\left(\frac{1}{2(\beta-1)}\right)}$ подходит для относительно больших $\beta \geq 50$. Если мы хотим проверить меньшие β , то эрмитов фактор стоит находить при помощи таблиц [ССЫЛКА] или проводя численные эксперименты, то есть запуская на данных параметрах q, n, β ВКЗ алгоритм и находя δ_β согласно ВКЗ-эвристике.

Для данного случая $n = 128, 12 \leq \log q \leq 32$ мною была проведена серия атак, подтверждающая теорию. Её результаты приведены в таблице:

Таблица 1 - Зависимость минимального параметра β , приводящего на практике к успешной атаке, от $\log(q)$ при $n = 128$.

$\log q$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
β	39	32	31	31	31	31	31	31	31	31	31
k	128	125	127	127	127	127	127	127	127	127	125

Как можно видеть из содержимого таблицы, атака на практике работает несколько лучше, чем это предсказывает теория. По мере уменьшения $\log q$ и его приближения к $\sqrt{n} \approx 12$ мы видим резкий скачок в значении β , что приводит к более долгой атаке.

Отдельно отметим поведение минимального k такого, что при минимальном β , найденном при помощи алгоритма, неравенство (9) выполняется. Найденный параметр k тоже показывает тенденцию к уменьшению, однако не показывает монотонной зависимости. Это связано с тем, что, как только условия позволяют уменьшить значение β , параметр k возрастает.

Графики для случаев $n = 256, n = 512, n = 1024$ повторяют свойства:

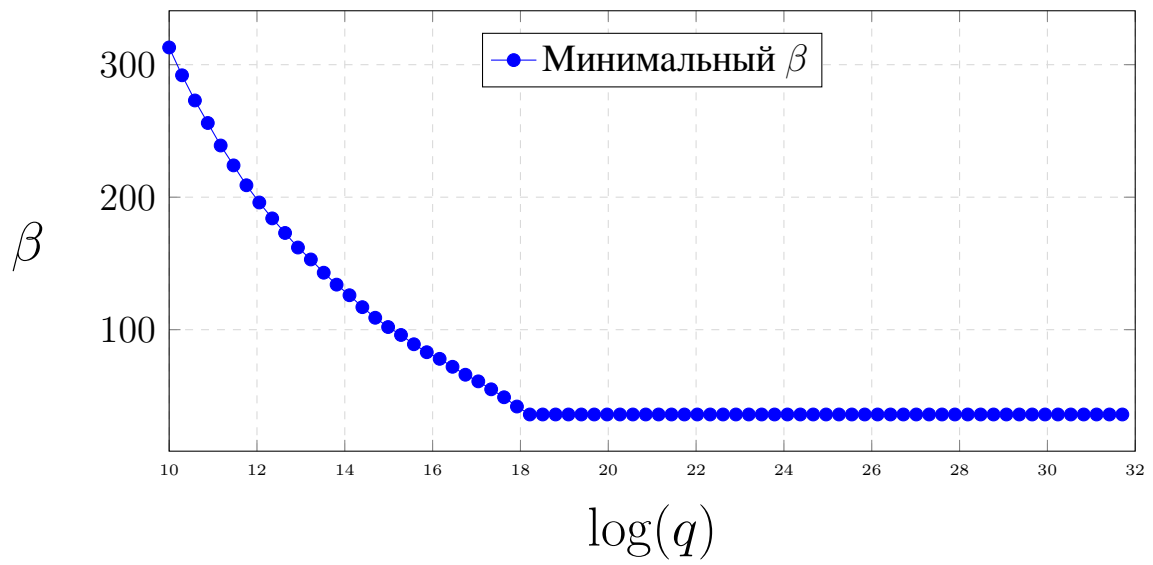


Рис. 3: График зависимости β от $\log(q)$ при $n = 256$

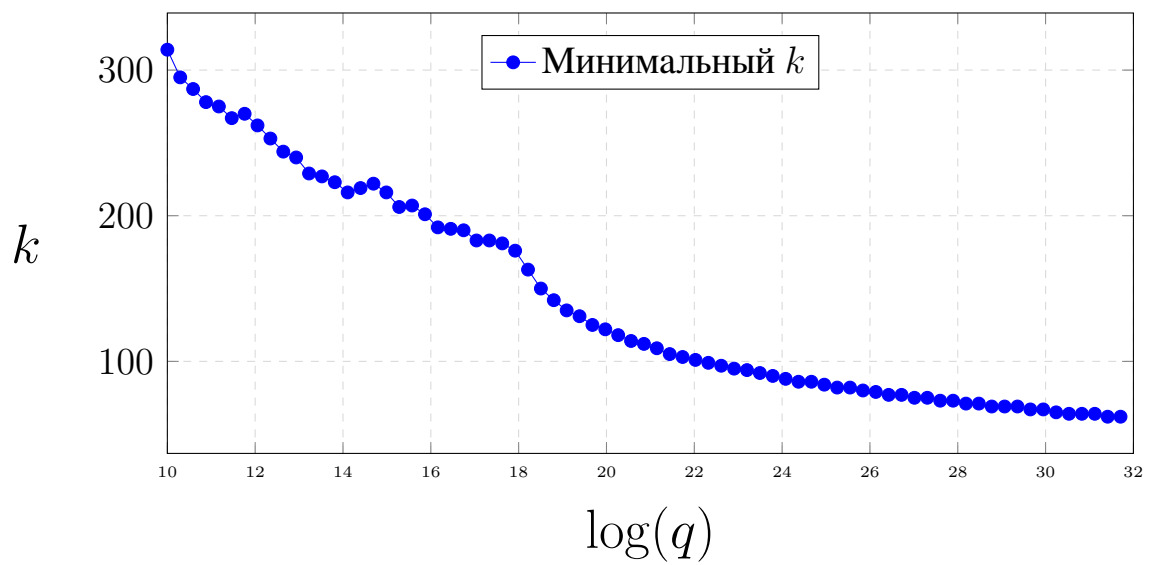


Рис. 4: График зависимости k от $\log(q)$ при $n = 256$

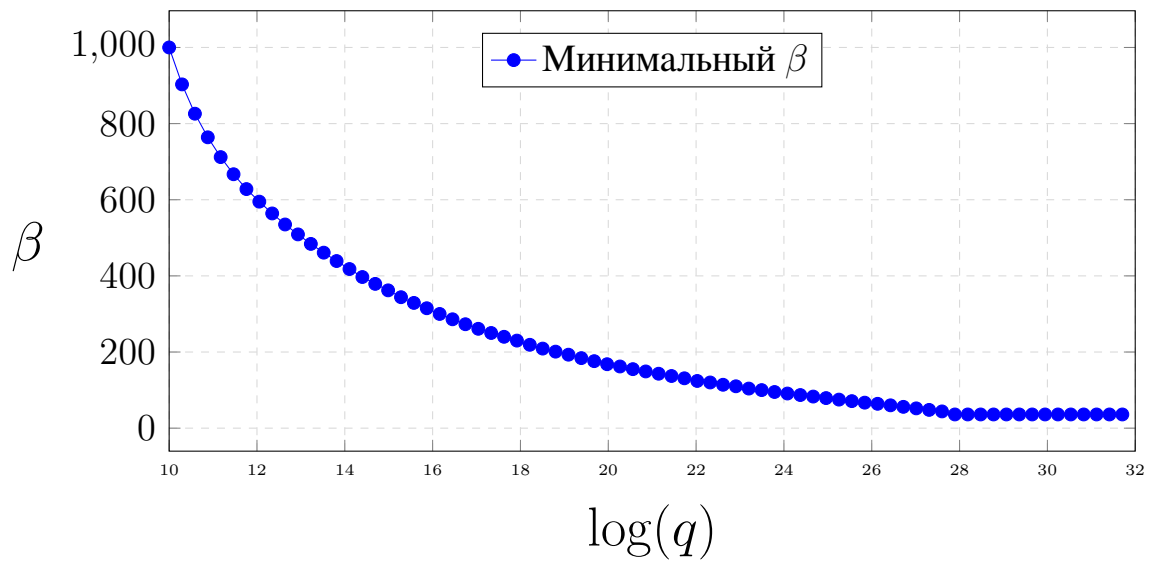


Рис. 5: График зависимости β от $\log(q)$ при $n = 512$

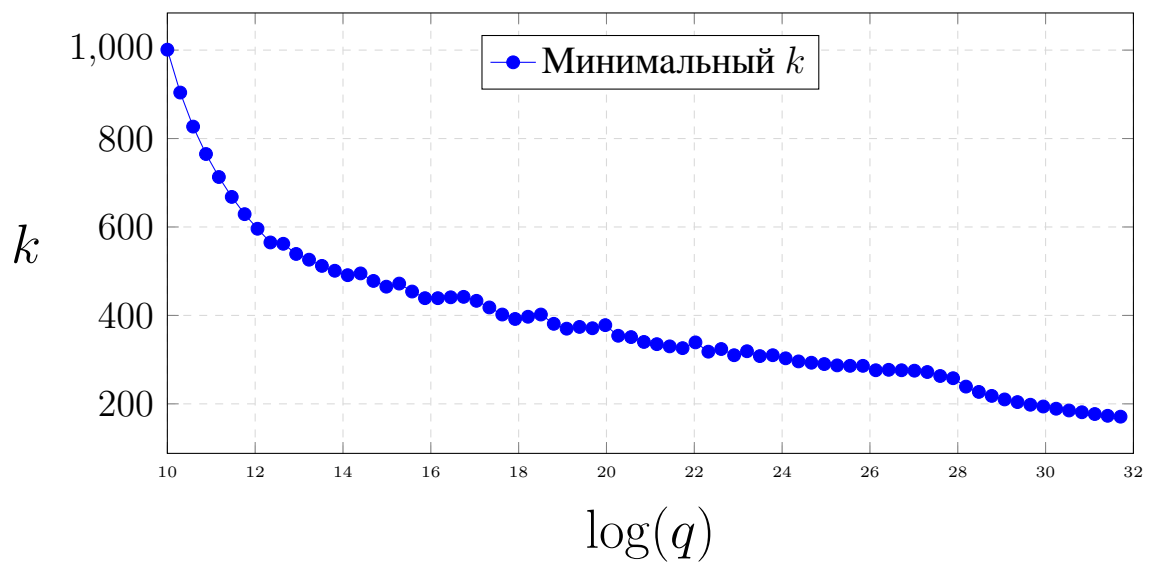


Рис. 6: График зависимости k от $\log(q)$ при $n = 512$

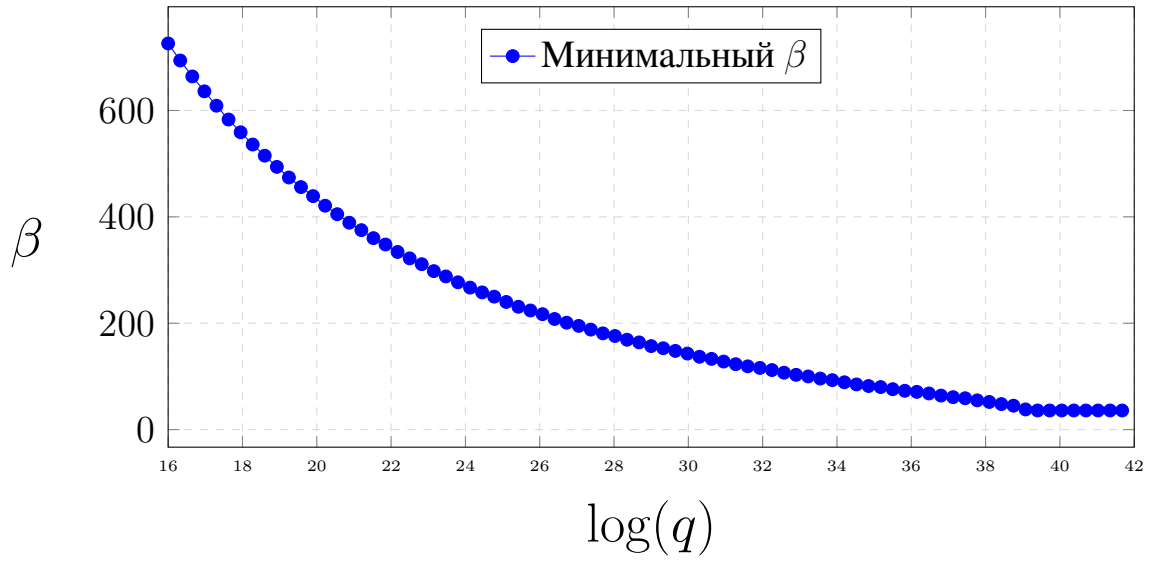


Рис. 7: График зависимости β от $\log(q)$ при $n = 1024$

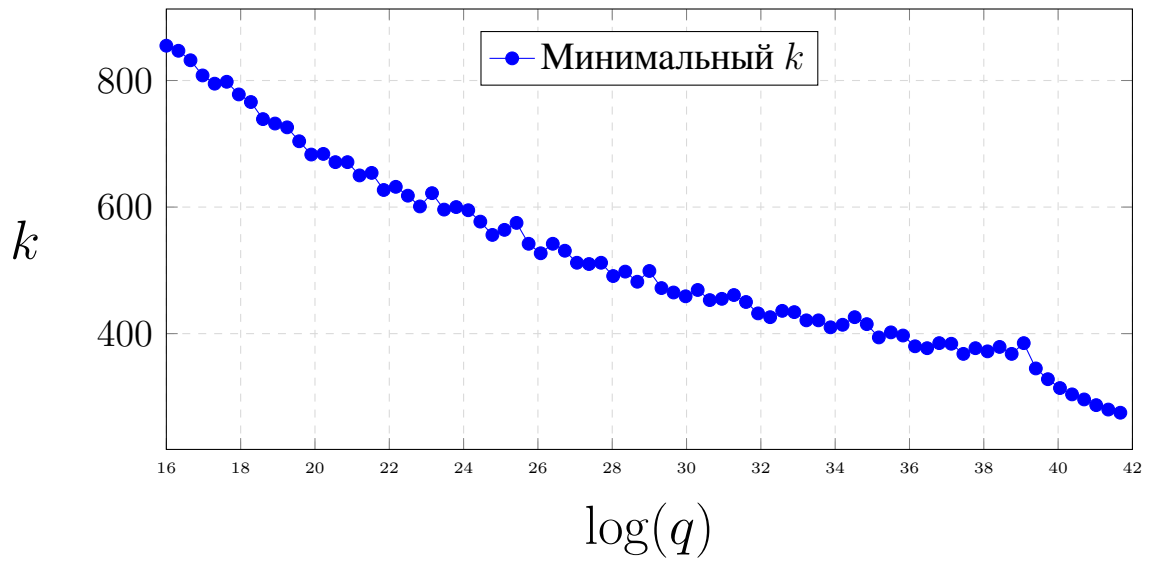


Рис. 8: График зависимости k от $\log(q)$ при $n = 1024$

Интересным вопросом является уточнение данных графиков для малых $\beta \leq 50$, найденных экспериментальным путём. В теории это поз-

волит избавиться от плато, возникающего из-за того, что оценка на δ_β , даваемая ВКЗ эвристикой, имеет локальный максимум при $\beta \approx 36$ в результате чего разработанный алгоритм не может подобрать $\beta < 36$, если практика его позволяет. Этим и может быть объяснена эффективность атаки, отличающаяся в лучшую сторону от предсказанной теорией.

2.3 Обзор атаки с использованием подколец.

В статье [ССЫЛКА] предлагается алгебраическая атака на криптосистемы, использующие подрешётки малого ранга. Алгебраической её назвали из-за того факта, что в ней используется умножение на открытый ключ h , который является элементом кольца усечённых многочленов $R_q = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})[x]/(x^n + 1)$. Для объяснения принципа работы атаки сначала необходимо показать связь между малыми векторами решётки и их нормами, а также отметить, что короткий вектор это вектор $(f\bar{g}, g\bar{g})$, где g является набором коэффициентов многочлена $g(x)$, а \bar{g} - набором коэффициентов многочлена $\overline{g(x)} = g(1/x)$.

Покажем, что векторы, которые мы ищем являются короткими. Для этого для начала мы покажем, что порядок \mathcal{O} стабильно относительно умножения на H . Это может быть проверено подсчётом эрмитовой нормальной формы конкатенации базиса $\sigma(\mathcal{O})$ для всех $\sigma \in H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{C}^{2s_2} : x_{s_1+s_2+j} = \overline{x_{s_1+j}}, \forall j \in [s_2]\}$, где s_1 и s_2 является числом вещественных и комплексных вложений числового поля K соответственно. После этого мы можем назвать \mathcal{O} порождённым этой матрицей.

Атака состоит в нахождении коротких векторов решётки, поро-

дённой:

$$A = \begin{pmatrix} q \cdot I_n & M_h^{\mathcal{O}_L} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

при помощи решётчатой редукции. Отметим, что h является публичным ключом, так что такой базис может быть найден. Мы хотим показать, что коротким вектором решётки является:

$$\begin{pmatrix} f \cdot N_{K/L}(g)/g \\ N_{K/L}(g) \end{pmatrix},$$

где L - подполе в K , $N_{K/L}$ - норма.

Пусть $\mathcal{O}_L = \mathcal{O} \cap L$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1. Существует такой элемент $v \in g\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_L$, что с вероятностью $1 - 2^{-\Omega(n)}$ верно:

$$0 < |v| < \sqrt{m}\Delta^{1/(2n)}\sigma^{n/m},$$

где n и m - размерности K и L соответственно над полем рациональных дробей.

Из данной теоремы следует, что для большинства параметров норма кратчайшего ненулевого вектора оценивается как $O(\sigma)^{n/m}$.

В криптографии в качестве поля K используется поле $\mathbb{Q}[X]/(X^n + 1) \cong \mathbb{Q}[\zeta_{2n}]$ и $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[X]/(X^n + 1) \cong \mathbb{Z}[\zeta_{2n}]$. Для любого r , делящего n , мы выбираем $L = \mathbb{Q}[X^r]$, поэтому $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[X^r]$ и $|H| = r$. Поэтому $m = n/r$ является размерностью решётки. Так как $\{X^i, 0 < i \leq m\}$ представляет собой ортогональный базис, координаты f и g являются независимыми случайными дискретными гауссовыми величинами, распределёнными с параметром s/\sqrt{n} . Также мы можем

непосредственно редуцировать решётку, порождённую A при помощи канонической квадратичной формы.

Тот факт, что \mathcal{O} является циклотомическим полем степени 2, даёт нам легко определяемый ортогональный базис, позволяющий нам в получить результат в аналитическом виде. В других случаях можно свести задачу к выше рассмотренной при помощи полиномиального алгоритма [8].

Теорема 2. Пусть f, g распределены согласно дискретному гауссову распределению $D_{\mathcal{O}, \sigma}$ и $h = f/g \bmod q$, являющийся корректно определённым с вероятностью $1 - \varepsilon$. Пусть также $\sigma = n^{\Omega(1)}$ и $\sigma < q^{1/4}$. Тогда мы можем восстановить ненулевой вектор, кратный (f, g) нормы не превышающей \sqrt{q} за время, оцениваемое как:

$$\exp \left(O \left(\max \left(\log n, \frac{n \log \sigma}{\log^2 q} \log \left(\frac{n \log \sigma}{\log^2 q} \right) \right) \right) \right)$$

с вероятностью неудачи не превышающей $\varepsilon + 2^{-n}$. Причём, в случае, когда:

$$\log q = O \left(\frac{\log^2 q \log n}{n \log \log n} \right),$$

мы получаем полиномиальную атаку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате написания данной работы был составлен алгоритм нахождения оптимизированных параметров атаки методом решётчатой редукции, а также был проведён ряд успешных атак на криптосистему NTRU Prime с параметрами $n = 128$. Полученные в результате исследования сведения могут быть использованы в вычислении и уточнении криптостойкости данной криптосистемы. Интересным вопросом для дальнейшего ищущения является нахождение эрмитова фактора для малых $\beta \leq 50$ и предсказание поведения BKZ алгоритма именно в этих случаях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Changmin Lee, Alexandre Wallet. Lattice analysis on MiNTRU problem - ASIACRYPT 2019 - 10 с. [электронный ресурс] – URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Lattice-analysis-on-MiNTRU-problem-Lee-Wallet/d922d602c196bebb2057b734fd8012b1bbb3cb9a> (дата обращения 02.12.2020);
2. Daniel J. Bernstein, Chitchanok Chuengsatiansup, Tanja Lange, Christine van Vredendaal. NTRU Prime: reducing attack surface at low cost - 55 с. [электронный ресурс]. – URL: <https://eprint.iacr.org/2016/461.pdf> (дата обращения 02.12.2020)
3. Daniele Micciancio and Panagiotis Voulgaris. Faster exponential time algorithms for the shortest vector problem - 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms - Austin, TX, USA: ACM-SIAM, 2010 - с. 1468–1480
4. fplll/g6k [электронный ресурс]. URL: <https://github.com/fplll/g6k>
5. Hoffstein J., Pipher J., Silverman J.H. An Introduction to Mathematical Cryptography. – Springer, 2014. - 543 с.;
6. Mariano Monteverde. NTRU software implementation for constrained devices - Leuven: KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN, 2007 - 70 с. [электронный ресурс]. URL: <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/8522/memoria.pdf> (дата обращения 02.12.2020);
7. Nick Howgrave-Graham, Joseph H. Silverman, William Whyte. A Meet-In-The-Middle Attack on an NTRU Private Key - Burlington: NTRU Cryptosystems;
7. Paul Kirchner, Pierre-Alain Fouque. Revisiting Lattice Attacks on overstretched module - Burlington: NTRU Cryptosystems, 2003 - 8 с. ;
8. Phong-Quang NGUYEN, Antoine JOUX, Nigel SMART и проч.

Reduction de reseau et securite concrete du chiffrement complètement homomorphe - Париж: UNIVESITE PARIS DIDEROT, 2013 - 144 с.;