

Задание 1

Дано: $\text{pair} = (\lambda)xy.f \ x \ y$

Нужно определить: $\text{fst} (\text{pair} \ a \ b) = a$; $\text{snd} (\text{pair} \ a \ b) = b$

Вношу a и b в $\text{pair} \Rightarrow \text{pair} = (\lambda)f.fab$

Для получения 'a', нужно подставить вместо f комбинатор

$K = (\lambda)xy.x$, чтобы получить 'b' аналогично: $K^* = (\lambda)xy.y$.

Тогда: $\text{fst} = (\lambda)l.(lK)$; $\text{snd} = (\lambda)l.(lK^*)$

Подставляю комбинаторы и получу ответ:

$\text{fst} = (\lambda)l.(l((\lambda)xy.x))$

$\text{snd} = (\lambda)l.(l((\lambda)xy.y))$

Задание 2

Дано:

a) $(\lambda)yz.xyw(zx)[x := (\lambda)y.yw]$

b) $(\lambda)xy.xy((\lambda)x.xy)x[x := (\lambda)z.z]$

c) $xy((\lambda)xz.xyz)y[y := xz]$

Решение:

a) $(\lambda)tz.xtw(zx)[x := (\lambda)y.yw]$

$(\lambda)tz.((\lambda)y.yw)tw(z((\lambda)y.yw))(\lambda)tz.tww(z((\lambda)y.yw)) (\lambda)t.twwz[z := (\lambda)y.yw]$ (с использованием альфа-преобразования)

b) $(\lambda)xy.xy((\lambda)x.xy)x[x := (\lambda)z.z]$ $(\lambda)xy.xy((\lambda)x.xy)((\lambda)z.z) = I((\lambda)x.xy)((\lambda)z.z)$

c) $xy((\lambda)xz.xyz)y[y := xz] = xy((\lambda)xz.xyz)xz$

Задание 3

Дано:

$S = (\lambda)fgx.fx(gx)$

$K = (\lambda)xy.x$

$I = (\lambda)x.x$

$B = (\lambda)fgx.f(gx)$

Доказать:

a) $SKK = I$

b) $B = S(KS)K$

Решение:

a) $SKK = (((\lambda)fgx.fx(gx))(\lambda)xy.x)(\lambda)xy.x = ((\lambda)gx.((\lambda)xy.x)x(gx))(\lambda)xy.x = (\lambda)x.((\lambda)xy.x)x((\lambda)xy.x)x = (\lambda)x.(\lambda)y.x((\lambda)y.x) = (\lambda)x.x = I$

b) $B = ((\lambda)fgx.fx(gx))(((\lambda)xy.x)(\lambda)fgx.fx(gx))(\lambda)xy.x = ((\lambda)fgx.fx(gx))((\lambda)y.(\lambda)fgx.fx(gx))(\lambda)xy.x = ((\lambda)fgx.fx(gx))(\lambda)fgx.fx(gx) = (\lambda)gx.((\lambda)fgx.fx(gx))xgx = S(KS)K$