**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**

**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**«ЛЭТИ» ИМ. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**

**Кафедра алгоритмической математики**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**по дисциплине «Дифференциальные уравнения»**

**Тема: Многоступенчатая ракета с сопротивлением воздуха и гравитацией**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студенты гр. 8382 |  | Гордиенко А.М.  Ершов М.И. |
| Преподаватель |  | Павлов Д.А. |

Санкт-Петербург

2021

**ЗАДАНИЕ** **НА КУРСОВУЮ РАБОТУ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент Гордиенко А.М.  Студент Ершов М.И. | | |
| Группа 8382 | | |
| Тема работы: Многоступенчатая ракета с сопротивлением воздуха и гравитацией | | |
| Исходные данные:  Многоступенчатая ракета | | |
| Содержание пояснительной записки:   «Содержание», «Введение», «Прямой метод Эйлера», «Обратный метод Эйлера», «Метод Хойна», «Метод Рунге-Кутты 4 порядка», «Графический интерфейс», «Заключение», «Список использованных источников». | | |
| Предполагаемый объем пояснительной записки:  Не менее 10 страниц. | | |
| Дата выдачи задания: 28.08.2021 | | |
| Дата сдачи курсовой работы: 21.10.2021 | | |
| Дата защиты курсовой работы: 21.10.2021 | | |
| Студенты |  | Гордиенко А.М.  Ершов М.И. |
| Преподаватель |  | Павлов Д.А. |

**АННОТАЦИЯ**

В курсовой работе рассмотрена задача полета многоступенчатой ракеты с учетом гравитации и сопротивления воздуха. Для этого использовалась формула Циолковского. Для решения поставленной задачи было использовано несколько методов: «Прямой метод Эйлера», «Обратный метод Эйлера», «Метод Хойна», «Метод Рунге-Кутты 4-го порядка». Результаты решения данного уравнения были представлены в виде графиков в графическом интерфейсе.

**SUMMARY**

In the course work, the problem of rocket flight. For this Tsiolkovsky rocket equation was used. To solve the problem, several methods were used: "Forward Newton's method", "Backward Newton's method", "Heun's method", "Runge-Kutta method of the 4th order". The results of solving this equation were presented in the form of graphs in the graphical interface.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[**ЗАДАНИЕ** **НА КУРСОВУЮ РАБОТУ** 2](#_Toc85675925)

[**АННОТАЦИЯ** 3](#_Toc85675926)

[**Выполнение работы** 5](#_Toc85675928)

[**Прямой метод Эйлера** 6](#_Toc85675947)

[**Обратный метод Эйлера** 7](#_Toc85675948)

[**Метод Хойна** 8](#_Toc85675949)

[**Метод Рунге-Кутты 4-го порядка** 8](#_Toc85675950)

[**Сводная таблица методов** 9](#_Toc85675952)

[**Продолжение сводной таблицы методов** 10](#_Toc85675953)

[**GUI** 10](#_Toc85675954)

[**Вывод** 13](#_Toc85675955)

[**Используемая литература** 14](#_Toc85675956)

**Введение**

Дифференциальное уравнение является одним из фундаментальных понятий математики, широко применяемое в различных областях современных наук. Оно также применимо в физических процессах, один из которых рассматривается в данной курсовой работе. Полет ракеты является этим процессом. Были использованы методы интегрирования дифференциальных уравнений динамических систем такие как: «Прямой метод Эйлера», «Обратный метод Эйлера», «Метод Хойна», «Метод Рунге-Кутты 4-го порядка».

**Выполнение работы**

Была реализована программа, создающая графический интерфейс для ввода пользователем исходных данных ракеты, выбора численного метода, отрисовки графика зависимости скорости от времени.

Опишем начальные условия задачи в виде системы уравнений.

,

где m – масса ракеты, изменяющаяся со временем, v – скорость ракеты, R – постоянная тяга, g – гравитационная постоянная, k – постоянное сопротивление воздуха (была получена экспериментально), t – время.

Зная постоянную скорость расхода топлива , заменим массу на функцию массы от времени.

Получаем

Оставляем в одной части уравнения :

Результат каждого численного метода сравнивался с эталонной функцией, которая имеет следующую формулу:

Где – импульс, – гравитационная постоянная, – начальная масса, – конечная масса (изменяемая во времени).

Каждый метод был наследован от абстрактного класса Processor, в котором инициализируются основные параметры ракеты, а также методы вычислений массы и скорости ракеты в данный момент времени.

Структура класса Processor представлена на рис. 1.

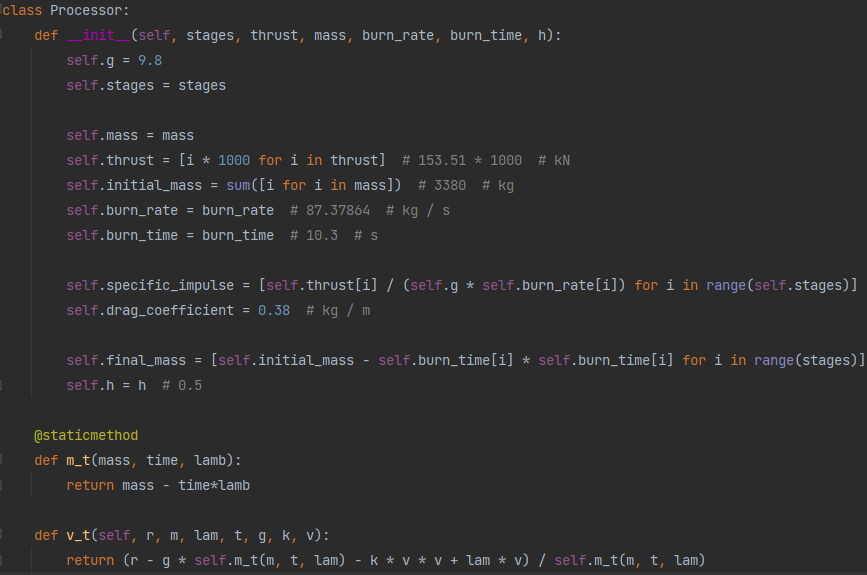


Рисунок 1 – Структура класса Processor.

**Прямой метод Эйлера**

Метод представляет собой дискретное получение следующего значения путем приращения предыдущего значения на величину изменения функции, умноженной на шаг.

Алгоритм можно описать следующим образом:

где – ускорение, h - шаг.

Реализация метода представлена на рис. 2.

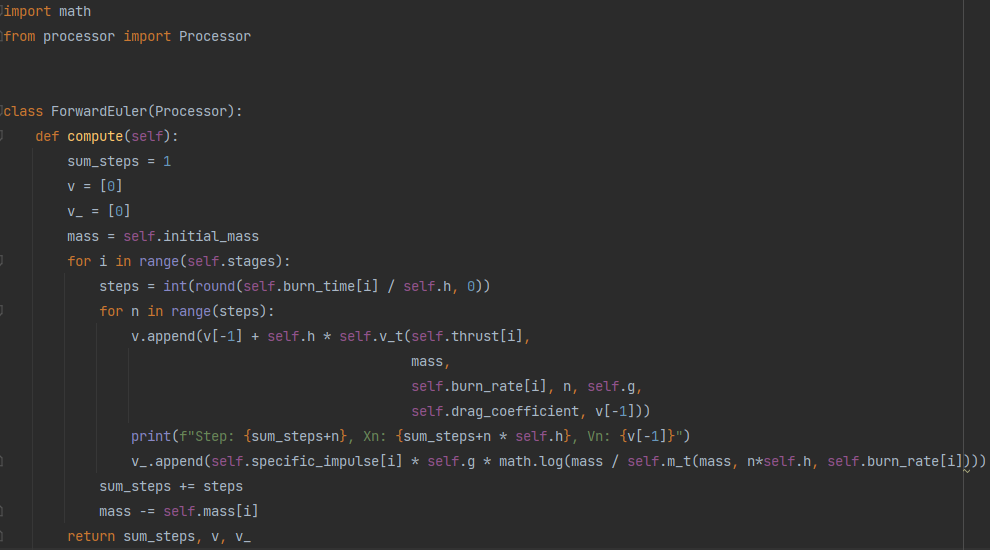


Рисунок 2 – Реализация прямого метода Эйлера.

**Обратный метод Эйлера**

Обратный метод Эйлера схож с прямым методов.

Реализация метода представлена на рис. 3:

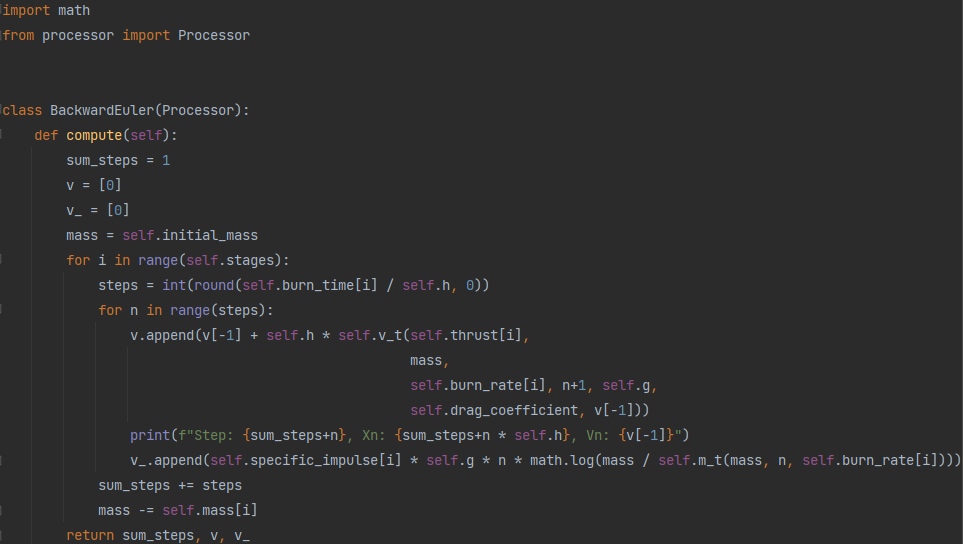


Рисунок 3 – Реализация обратного метода Эйлера.

**Метод Хойна**

Метод Хойна, или же трапецеидальный метод, можно интерпретировать как сочетание прямого и обратного методов Эйлера.

Реализация метода представлена на рис. 4:

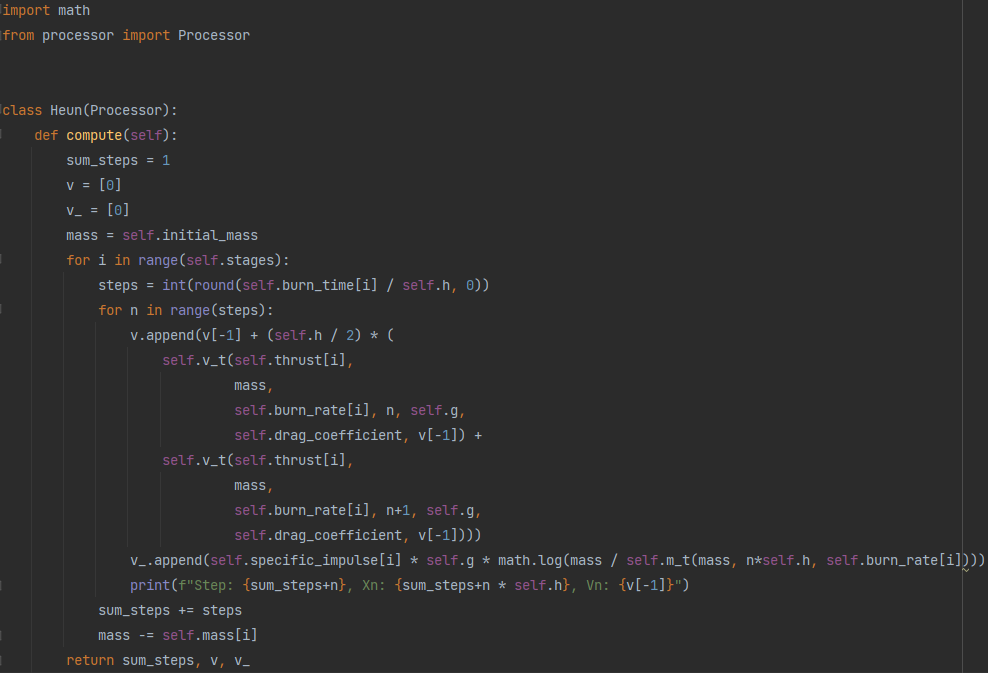


Рисунок 4 – Реализация метода Хойна.

**Метод Рунге-Кутты 4-го порядка**

Реализация метода представлена на рис. 5.

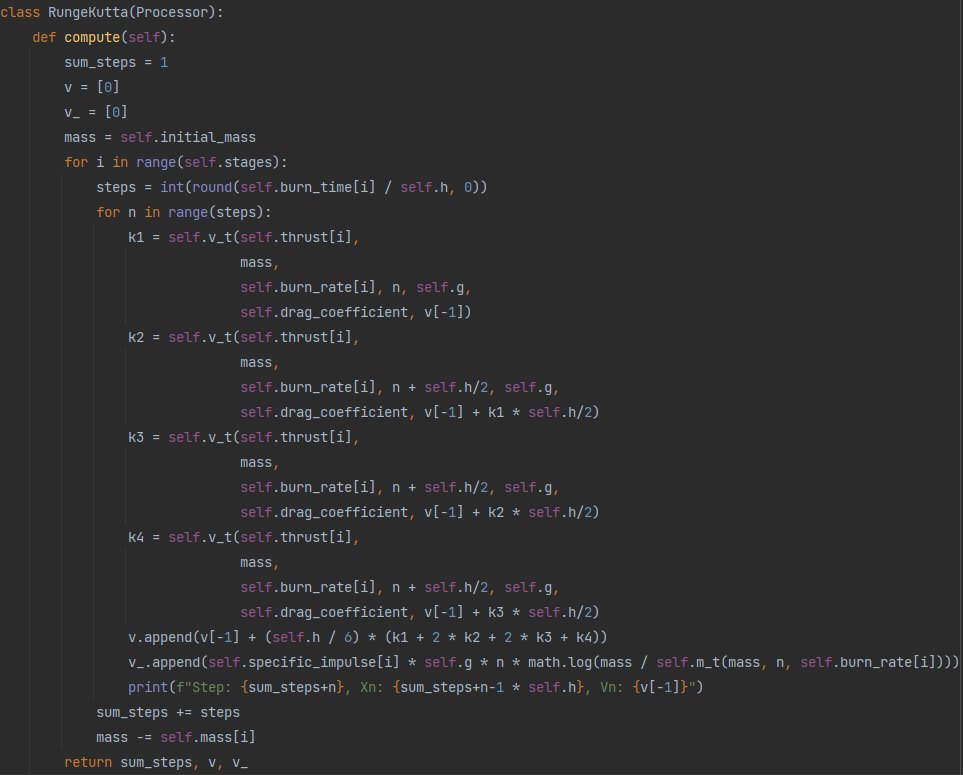


Рисунок 5 – Реализация метода Рунге-Кутты 4 порядка.

Все значения были получены при инициализации модели ракеты со следующими параметрами:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № Ступени | Тяга, кН | Масса, кг | Расход топлива, кг/с | Время работы, с |
| 1 | 153.51 | 3380 | 87.37864 | 30 |
| 2 | 153.51 | 3380 | 87.37864 | 20 |
| 3 | 153.51 | 3380 | 87.37864 | 20 |

**Сводная таблица методов**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Прямой метод Эйлера | | | Обратный метод Эйлера | | |
| h | 1 | 0.5 | 0.25 | 1 | 0.5 | 0.25 |
| max\_err | 1472.144 | 1543.245 | 1579.312 | 1468.985 | 1490.737 | 1507.820 |
| mean\_err | 409.388 | 432.669 | 444.503 | 404.810 | 372.727 | 301.740 |
| median\_err | 294.007 | 314.928 | 325.449 | 287.836 | 213.450 | 131.355 |

**Продолжение сводной таблицы методов**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Метод Хойна | | | Метод Рунге-Кутты 4-го порядка | | |
| h | 1 | 0.5 | 0.25 | 1 | 0.5 | 0.25 |
| max\_err | 1470.514 | 1522.506 | 2286.356 | 1473.217 | 1543.791 | 1579.588 |
| mean\_err | 407.080 | 375.269 | 563.230 | 408.935 | 432.440 | 444.388 |
| median\_err | 290.915 | 217.088 | 459.124 | 291.992 | 313.932 | 324.954 |

**GUI**

Графический интерфейс был написан на языке Python с использованием библиотеки tkinter.

Интерфейс включает в себя поля ввода параметров ракеты, список методов, список с выбором шага алгоритма и кнопку запуска алгоритма.

Окно приложения представлено на рис. 6.

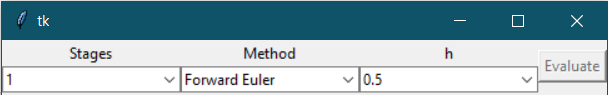


Рисунок 6 – Окно приложения в момент запуска.

После выбора пользователем количества ступеней появляются поля для ввода параметров ступеней.

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 7 – Окно приложения с полями для ввода параметров ракеты.

Результаты работы методов представлены на рис. 8–11.

Forward Euler:

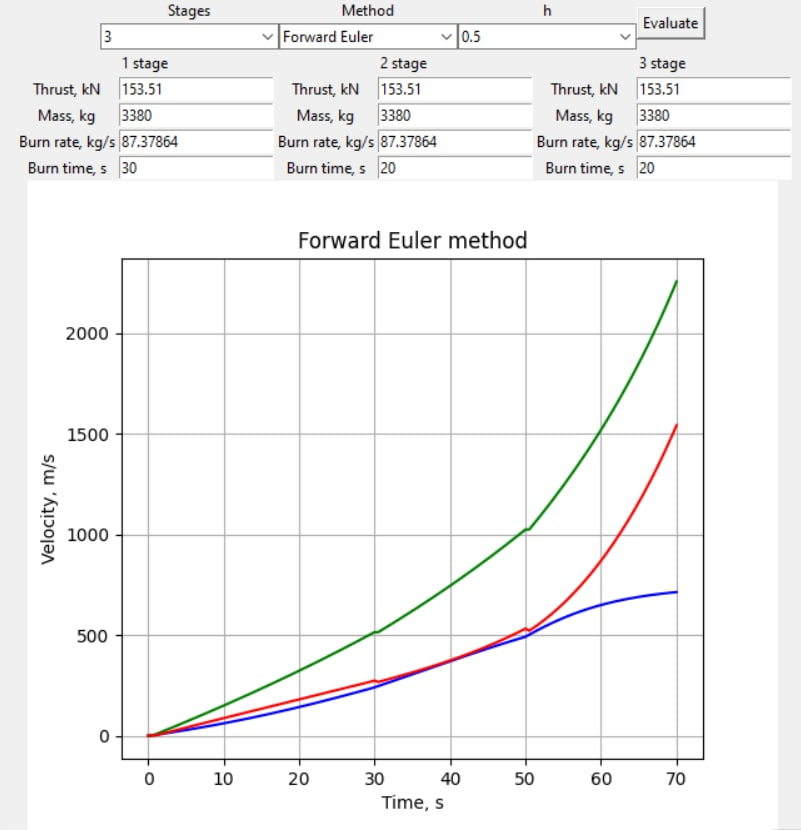


Рисунок 8 – Вывод программы прямого метода Эйлера.

Backward Euler:

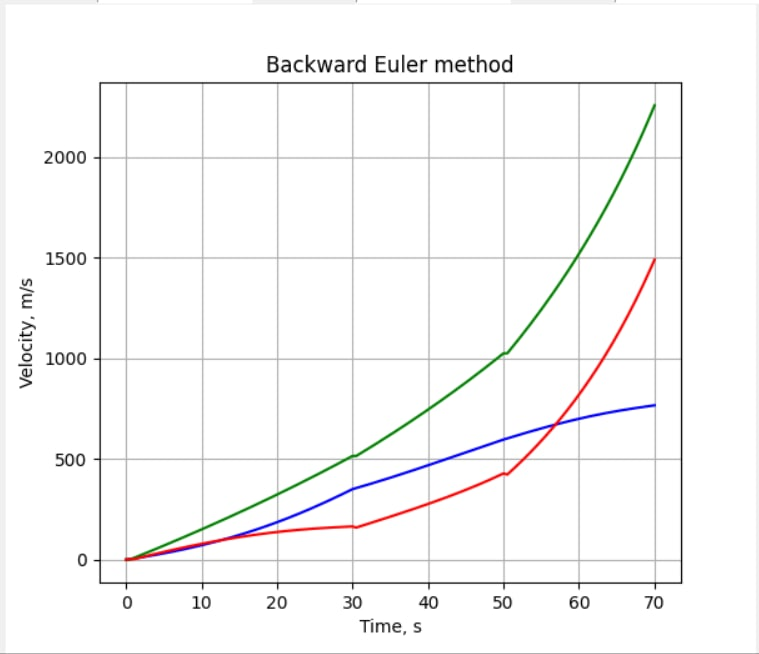


Рисунок 9 – Вывод программы обратного метода Эйлера.

Heun:

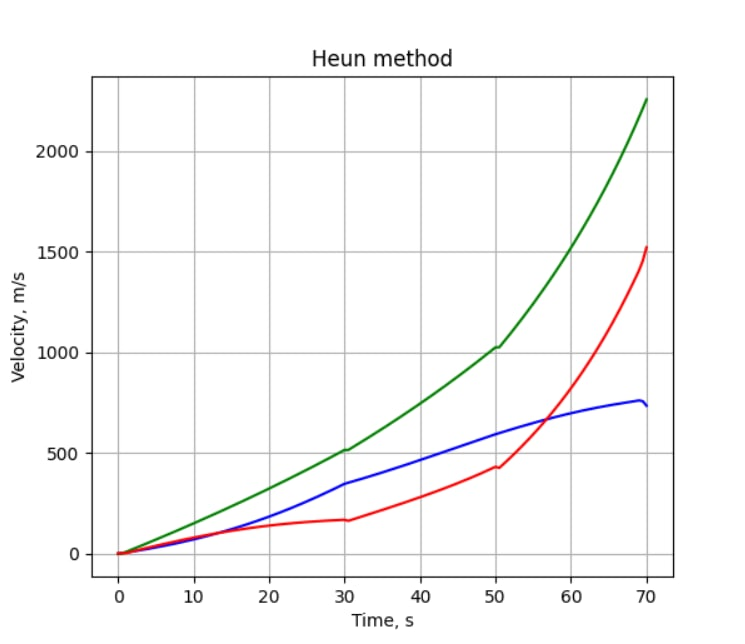


Рисунок 10 – Вывод программы метода Хойна.

Runge-Kutta:

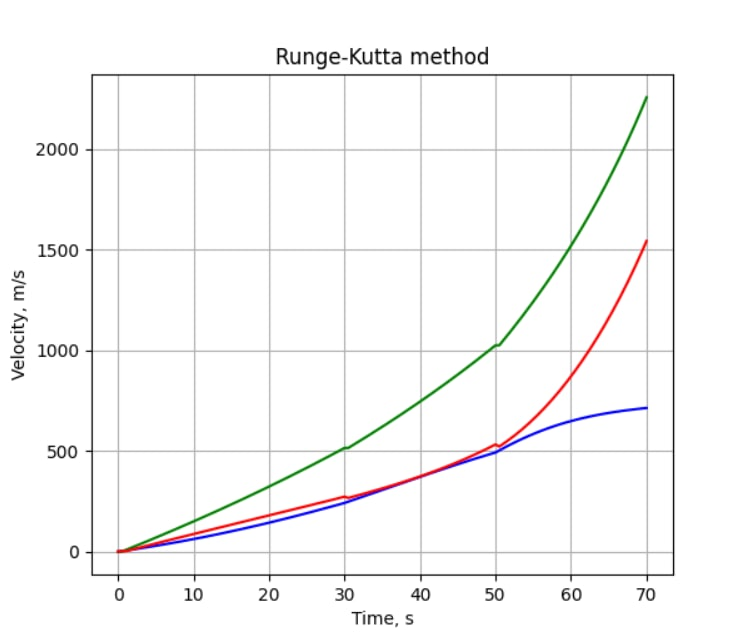


Рисунок 11 – Вывод программы метода Рунге-Кутта 4 порядка.

С помощью выкидного списка выбирается количество ступеней ракеты, численный метод, шаг алгоритма.

В поля ввода каждой ступени пользователь вводит параметры соответствующей ступени.

После ввода пользователем нажимается кнопка Evaluate, которая выбранным пользователем методом проводит вычисления.

Результат работы метода выводится в виде графика в окне приложения.

На графике синей линией рисуется физический метод, зеленой – математический метод (эталонный), красной – значение ошибки.

**Вывод**

  В ходе выполнения курсовой работы была написана программа, реализующая оконное приложение с численными методами, были изучены основные методы аппроксимации решения с непрерывным дискретным временем.

**Используемая литература**

<https://www.python.org/>

<http://chaos.sgu.ru/K52/MND/algoritms/algoritms.html>

<https://www.simiode.org/resources/8310/download/SIMIODE_EXPO_2021_B1-R2_Christopher_Scott_Vaughen.pdf>

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%A6%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE>

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9C%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE>