

Mathematik für Wirtschaftsinformatiker II

Alexander Heckmann

19. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Univariate Funktionen	3
1.1	Grundlagen	3
1.1.1	Grundlegende Definitionen	3
1.1.2	Verknüpfungen von Funktionen	4
1.1.3	Bildung der Umkehrfunktion	4
1.2	Differentialrechnung	5
1.2.1	Differenzenquotient	5
1.2.2	Ableitung	5
1.2.3	Grundlegende Ableitungsregeln	6
1.3	Kurvendiskussion	8
1.3.1	Symmetrieverhalten	8
1.3.2	Veränderung von Funktionsgraphen	9
1.3.3	Monotonieverhalten	9
1.3.4	Krümmungsverhalten & Wendepunkt	10
1.3.5	Extremstellen	10
1.3.6	Grenzwert	12
1.3.7	Stetigkeit	12
1.3.8	Regel von l'Hospital	14
1.4	Integralrechnung	15
1.4.1	Unbestimmtes Integral	15
1.4.2	Aufleitungsregeln	15
1.4.3	Partielle Integration	16
1.4.4	Integration durch Substitution	17
1.4.5	Bestimmtes Integral	18
1.4.6	Uneigentliches Integral	19
1.5	Differentialgleichungen	20
1.5.1	Euler-Verfahren	20
1.6	Taylor-Approximation	21
2	Multivariate Funktionen	22
2.1	Grundlagen	22
2.1.1	Grundlegende Definitionen	22
2.1.2	Isoquanten	23
2.1.3	Partielle Ableitung	23
2.1.4	Gradient	24
2.1.5	Hesse-Matrix	24
2.1.6	Hauptminore	25
2.2	Optimierung ohne Nebenbedingungen	26

2.3	Optimierung unter Nebenbedingungen	27
2.3.1	Variablensubstitution	27
2.3.2	Lagrange-Verfahren	29
3	Ökonomische Anwendung	32
3.1	Univariate Funktionen	32
3.1.1	Grundlagen	32
3.1.2	Erlös	33
3.1.3	Kosten	34
3.1.4	Gewinn & Break-Even-Analyse	34
3.1.5	Elastizität	35
3.2	Multivariate Funktionen	36
3.2.1	Grundlagen	36
3.2.2	Regressionsanalyse	37

Kapitel 1

Univariate Funktionen

1.1 Grundlagen

1.1.1 Grundlegende Definitionen

Symbol	Beschreibung
$y = f(x)$	Benennung einer Funktion
$f(x)$	Wert der Funktion f an der Stelle x
x	unabhängige Variable
y	(von x) abhängige Variable, dem Funktionswert $f(x)$ zugeordnet
D_f	Definitionsbereich der Funktion f



ANWENDUNG IN MAPLE: Grundlagen

- `restart`: löscht alle verwendeten Pakete, Variablen, Funktionen aus dem Speicher; **vor jeder neuen Aufgabe eingeben!**
- `with(Package)`: lädt das Paket *Package*
- `%`: Verwendung des zuletzt berechneten Ergebnisses
- Mal-Zeichen `·` *immer* notwendig, ansonsten wird Multiplikation nicht erkannt
- `f := x → sin(x)`: Deklaration einer Funktion
- `a := 2·x`: Deklaration einer Variablen
- `g := unapply(a, x)`: Variable in Funktion umwandeln
- `plot(f(x), x)`: Zeichnen des Funktionsgraphen
- Zeichnen mehrerer Funktionsgraphen:
 1. `p1 := plot(f(x), x = a .. b, color = red)`
 2. `p2 := plot(g(x), x = a .. b, color = green)`
 3. `display({p1, p2})`

```
> restart:with(plots):  
> f := x → ex  
> a := ln(x)  
> f := unapply(a, x)  
> p1 := plot(f(x), x = 0 .. 3, color = red):  
> p2 := plot(g(x), x = 0 .. 3, color = green):  
> display({p1, p2})
```

1.1.2 Verknüpfungen von Funktionen

Allgemein unterscheidet man folgende Verknüpfungen:

Funktion	Verknüpfung
$h(x) = f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x)$	Summe bzw. Differenz von f und g
$k(x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$	Produkt von f und g
$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x)$	Quotient von f und g , wobei $g \neq 0$
$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$	Komposition

Komposition

Wenn y eine Funktion von u und u eine Funktion von x ist, dann ist auch y eine Funktion von x .

$$\begin{aligned}
 y &= f(u) \\
 u &= g(x) \\
 y &= f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \\
 f(x) &= \sin(x^2) \quad (\text{Bsp.})
 \end{aligned}$$

Die Funktionen f und g werden hintereinander geschaltet, dabei wird g zuerst ausgeführt und die Funktionswerte von g werden f übergeben.

1.1.3 Bildung der Umkehrfunktion

Falls eine Funktion $f(x)$ bijektiv, also umkehrbar, ist, kann die Umkehrfunktion wie folgt ermittelt werden.

VORGEHEN:

1. Aufstellen der Gleichung $y = f(x)$
2. tausche y & $x \Rightarrow x = f(y)$
3. Gleichung nach y auflösen

Beispiel:

$$y = e^x \quad (1.)$$

$$x = e^y \quad (2.)$$

$$\ln(x) = y \quad (3.)$$

$$\Rightarrow y = f(x) = \ln(x)$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Bildung der Umkehrfunktion

1. `restart;`
2. `g:= x = e^y` → Deklaration der Gleichung
3. `solve(g, y)` → Auflösen nach y
4. `h:= unapply(%, x)` → Umwandlung des Ergebnisses in Funktion

1.2 Differentialrechnung

1.2.1 Differenzenquotient

Symbol	Beschreibung
Δf	Veränderung der Funktionswerte zwischen zwei Punkten
Δx	Veränderung der x -Werte zweier Punkte

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta a} = \frac{(f(a + \Delta x) - f(a))}{\Delta x}$$

heißt der Differenzenquotient von f an der Stelle a .

Dieser beschreibt das durchschnittliche Wachstum einer Funktion in einem bestimmten Intervall I .

Zur Verdeutlichung: Es wird eine Gerade bzw. eine Sekante zwischen zwei Punkten a und b gezeichnet. Die Steigung der Geraden ergibt sich aus dem Differenzenquotienten. Der Differenzenquotient berechnet hierbei die durchschnittliche Änderungsrate.

1.2.2 Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f'(x) = \frac{d}{dx}f$ beschreibt die Steigung bzw. die Veränderung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x .

Die Ableitung ergibt sich aus $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(x)$

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^2 &\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \\
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x - x^2}{\Delta x} \quad (Bsp.) \\
 &= 2 \cdot x
 \end{aligned}$$

1.2.3 Grundlegende Ableitungsregeln

I. Konstantenregel

$$\begin{aligned}f(x) = c &\Rightarrow f'(x) = 0 \\f(x) = 5 &\Rightarrow f'(x) = 0\end{aligned}\quad (Bsp.)$$

II. Potenzregel:

$$\begin{aligned}f(x) = x^n &\Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\f(x) = x^3 &\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2\end{aligned}\quad (Bsp.)$$

III. Faktorregel

$$\begin{aligned}f(x) = a \cdot x^n &\Rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1} \\f(x) = 5x^3 &\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^2\end{aligned}\quad (Bsp.)$$

\Rightarrow Multiplikationsfaktoren bleiben erhalten

Ableitungsregeln verknüpfter Funktionen

I. Summenregel:

$$\begin{aligned}f(x) \pm g(x) &\Rightarrow f'(x) \pm g'(x) \\f(x) \pm g(x) = x^3 \pm x^4 &\Rightarrow f'(x) \pm g'(x) = 3x^2 \pm 4x^3\end{aligned}\quad (Bsp.)$$

\Rightarrow Die beiden Funktionen werden *unabhängig voneinander* abgeleitet und summiert bzw. subtrahiert.

II. Produktregel:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sin(x) \cdot x^3 &\Rightarrow (f \cdot g)'(x) = \cos(x) \cdot x^3 + \sin(x) \cdot 3x^2\end{aligned}\quad (Bsp.)$$

III. Quotientenregel:

Bei durch Division verknüpften Funktionen wendet man folgende Regel an:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sin(x)}{x^3} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - 3 \cdot \sin(x)}{x^4} \quad (\text{Bsp.}) \end{aligned}$$

⇒ Anwendung der Quotientenregel eigentlich zu umständlich, bei vorkommenden Brüchen kann man die Verknüpfung zu einem Produkt umformen und dann die leichtere Produktregel anwenden.

IV. Kettenregel

Bei (durch Komposition) verketteten Funktionen wendet man folgende Ableitungsregel an:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (f \circ g)(x) \Rightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ f(g(x)) &= \sin(x^2) \Rightarrow (f \circ g)'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \quad (\text{Bsp.}) \end{aligned}$$

⇒ Es wird erst die Ableitung der äußeren Funktion gebildet und die innere Funktion eingesetzt, dann die innere Ableitung gebildet und mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert (innere mal äußere Ableitung), die eingesetzte innere Funktion bleibt in ihrer Form erhalten.

Besondere Ableitungen

$f(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\sqrt{x}	a^x
$f'(x)$	e^x	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln(a) \cdot a^x$

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

**ANWENDUNG IN MAPLE: Ableitung**

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. Ableitung bilden
 - `f'(x)`
 - `diff(f(x), x)`

```
> restart:
> f:= x -> sin(x)
> f'(x)
> g:= x -> -cos(x)
> diff(g(x), x)
```

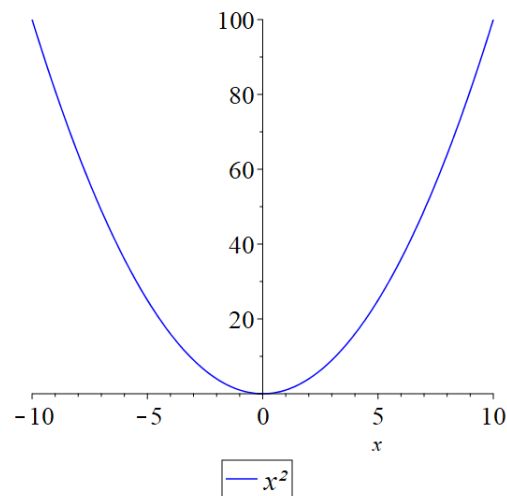

1.3 Kurvendiskussion

1.3.1 Symmetrieverhalten

Achsensymmetrie

Wenn $f(-x) = f(x)$, so heißt f eine gerade Funktion, f ist symmetrisch zur y -Achse bzw. achsensymmetrisch.

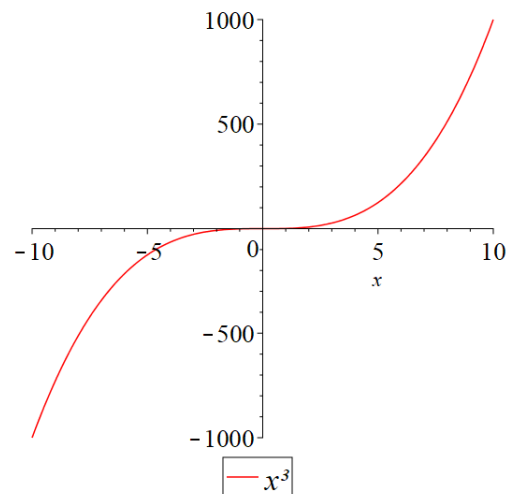
Beispiel:



Punktsymmetrie

Wenn $-f(x) = f(-x)$, so heißt f eine ungerade Funktion, f ist symmetrisch zum Ursprung bzw. punktsymmetrisch.

Beispiel:



1.3.2 Veränderung von Funktionsgraphen

c sei eine positive oder negative Konstante.

Funktion	Effekt
$f(x) + c$	Verschiebung entlang der y-Achse
$f(x + c)$	Verschiebung entlang der x-Achse
$c \cdot f(x)$	für $ c > 1$ gestreckt bzw. für $ c < 1$ gestaucht
$-f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse

1.3.3 Monotonieverhalten

Das Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ bestimmt, ob eine Funktion in einem Intervall I wächst oder fällt. Eine Funktion heißt für alle $x_1 \leq x_2$ eines Intervalls I

	Verhalten
$f(x_1) \leq f(x_2)$ $f'(x) > 0$	(streng) monoton wachsend
$f(x_1) \geq f(x_2)$ $f'(x) < 0$	(streng) monoton fallend

VORGEHEN:

- über die zweite Ableitung:
 1. $f'(x)$ bestimmen
 2. $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ Nullstellen berechnen
 3. $f''(x)$ bestimmen
 4. Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung einsetzen
 5. Intervalle benennen
 6. Ergebnis ermitteln
- über eine Monotonietabelle:
 1. $f'(x)$ bestimmen
 2. $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ Nullstellen x_1, \dots, x_n berechnen
 3. Intervalle benennen
 4. Monotonietabelle aufstellen

Funktion	Intervall 1	Intervall 2
$f'(x)$		

5. Vorzeichen der Funktion in den Intervallen berechnen
6. Ergebnis interpretieren



ANWENDUNG IN MAPLE: Monotonieverhalten

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. Intervalle bestimmen
 - `solve(f'(x) >= 0, x):` monoton wachsend
 - `solve(f'(x) <= 0, x):` monoton fallend

1.3.4 Krümmungsverhalten & Wendepunkt

Der Graph einer Funktion f beschreibt auf einem Intervall I eine

- Linkskurve bzw. verläuft konvex, wenn
 1. $f'(x)$ streng monoton wachsend ist
 2. $f''(x) > 0$
- Rechtskurve bzw. verläuft konkav, wenn
 1. $f'(x)$ streng monoton fallend ist
 2. $f''(x) < 0$

Der Punkt, an dem der Graph einer Funktion das Krümmungsverhalten ändert, nennt man Wendepunkt.

1. Bestimmen von $f''(x)$ & $f'''(x)$
2. $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ Wendepunkt x_W berechnen
3. $f'''(x_W) \rightarrow$ Wendepunkt x_W einsetzen
4. falls $f'''(x_W) \neq 0 \rightarrow$ Wendepunkt
5. $f(x_W) \rightarrow$ y-Koordinate des Punktes bestimmen



ANWENDUNG IN MAPLE: Krümmungsverhalten & Wendepunkt

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. `solve(f''(x)=0, x)`

1.3.5 Extremstellen

Lokale Extrema

Eine Funktion $f(x)$ hat an einer Stelle $x_E \in I$ ein

- lokales Maximum, wenn
 1. $f'(x_E) = 0$
 2. $f''(x_E) < 0$
 3. $f(x)$ konkav verläuft
- lokales Minimum, wenn
 1. $f'(x_E) = 0$
 2. $f''(x_E) > 0$
 3. $f(x)$ konvex verläuft

VORGEHEN:

1. $f'(x)$ & $f''(x)$ berechnen
2. $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow$ Extrempunkt x_E berechnen
3. $f''(x_E) \rightarrow$ Extrempunkt x_E einsetzen
 - $f''(x_E) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt
 - $f''(x_E) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt
 - $f''(x_E) = 0$ & $f'''(x) \neq 0 \rightarrow$ Sattelpunkt

4. $f(x_E) \rightarrow$ y-Koordinate des Punktes bestimmen
5. Extremstelle: (x_E, y_E)

Globale Extrema

Ein Funktionswert $f(a)$ heißt für alle $x \in D_f$

	Benennung
$f(x) \leq f(a)$	globales Maximum
$f(x) \geq f(a)$	globales Minimum



ANWENDUNG IN MAPLE: Extremstellen

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. Extremstelle berechnen
 - `minimize(f(x), x = a ..b, location)`
 - `maximize(f(x), x = a ..b, location)`
 - `extrema(f(x), {}, x, 's')`
 - `solve(f'(x)=0, x)`

```
> restart:
> f:= x -> x^2 + 2
• minimize
  > minimize(f(x), x = -3 ..3, location)
• extrema
  > extrema(f(x), {}, x, 's')
  > s
• solve(f'(x)=0, x)
  > solve(f'(x)=0, x)
  > f(%)
```

1.3.6 Grenzwert

Der Grenzwert A einer Funktion $f(x)$ ist der Wert der Funktion, den sie annimmt, wenn x gegen einen Wert a strebt, also $x \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

linksseitiger Grenzwert

Man nähert sich dem Punkt a von links an.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

rechtsseitiger Grenzwert

Man nähert sich dem Punkt a von rechts an.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Falls linksseitiger & rechtsseitiger Grenzwert in einem Punkt a existieren und beide übereinstimmen, dann existiert in a der Grenzwert A .

Daraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Falls linksseitiger & rechtsseitiger Grenzwert in a existieren und nicht übereinstimmen, so existiert bei $x = a$ eine Sprungstelle.

1.3.7 Stetigkeit

Allgemeines

Eine Funktion heißt, populärmathematisch ausgedrückt, stetig wenn:

- kleine Änderungen der unabhängigen Variable ($= x$) kleine Änderungen der abhängigen Variable ($= y = f(x)$) bewirken.
- der Graph zusammenhängend ist, d.h. keine Sprünge macht und keine Polstellen, Knicke oder Definitionslücken besitzt.
- man den Graphen durchgängig mit einem Stift zeichnen kann, ohne zwischendurch abzusetzen.

Eine Funktion ist stetig in einem Punkt a , wenn:

1. $f(a)$ definiert ist, also $a \in D_f$
2. der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ in a existiert
3. der Grenzwert in a dem Funktionswert $f(a)$ entspricht, d.h. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

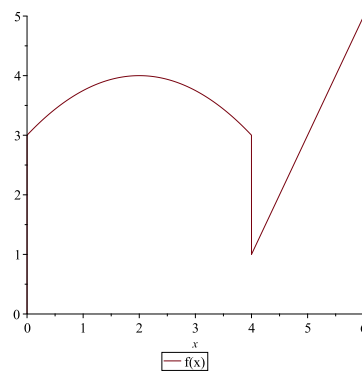
Falls die Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetig ist,

- besitzt sie mind. ein Minimum & ein Maximum.
- wird zwischen f_{\min} und f_{\max} jeder Wert angenommen.

Unstetigkeitsstellen

Um eine Funktion f in einem Intervall auf ihr Stetigkeitsverhalten hin zu untersuchen, genügt es, sämtliche Unstetigkeitsstellen zu ermitteln. Kritische Stellen sind:

1. Stellen, in denen f nicht definiert ist, weil
 - (a) der Nenner zu 0 wird, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$
 - (b) ein Logarithmus von 0 bzw. negativen Zahlen gebildet werden müsste, z.B. $f(x) = \ln(9 - x^2)$ an den Stellen $x_1 = 3, x_2 = -3$
 - (c) eine negative Wurzel gezogen wird, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ für $x < 0$
2. Stellen, die Nahtstellen im Definitionsbereich von abschnittsweise definierten Funktionen sind, z.B. $f(x) = \begin{cases} -0,25x^2 + x + 3 & 0 \leq x < 4 \\ 3 & x = 4 \\ 2x - 7 & x > 4 \end{cases}$ an der Stelle $x=4$



ANWENDUNG IN MAPLE: Unstetigkeitsstellen

1. Unstetigkeitsstellen ausfindig machen
 - (a) `restart:with(plots):`
 - (b) Funktion deklarieren
 - (c) `discont(f(x), x) → Definitionslücken`
2. Stelle auf Hebbbarkeit untersuchen
 - (a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
 - (b) `Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Limit Methods...`
 - (c) Funktion & anzustrebenden Wert eingeben
 - (d) `Direction → left / right` → Richtung des Grenzwertes angeben
 - (e) `Start`
 - (f) falls $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, dann durch Regel von l'Hospital hebbbar

1.3.8 Regel von l'Hospital

Falls die Funktion eine Unstetigkeitsstelle besitzt, dann kann mithilfe der Regel von l'Hospital in gewissen Fällen diese Stelle behoben werden.

Die Regel kann angewendet werden, wenn eine der folgenden Fälle für $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vorliegt:

$$\frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

VORGEHEN:

1. Die jeweiligen Fälle zu einem Quotienten umformen, der $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$ widerspiegelt
2. Beide Seiten des Bruchstrichs solange unabhängig voneinander ableiten, bis im Zähler oder Nenner ein Wert ungleich Null für $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ erscheint.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (Bsp.)$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Regel von l'Hospital

- *Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Limit Methods... → l'Hospital's Rule*
- **expand:** Ausmultiplizieren
- **factor:** Ausklammern
- **simplify:** Vereinfachen

1.4 Integralrechnung

Die Integralrechnung befasst sich mit zwei Teilaufgaben:

- Bestimmen der Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$
- Bestimmen des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$

1.4.1 Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral befasst sich mit dem Aufleiten, dem Finden einer Stammfunktion für eine Funktion $f(x)$.

Eine Funktion $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Dabei existiert für $f(x)$ nicht nur eine, sondern unendliche viele Stammfunktionen, da bei der Ableitung von Funktionen Konstanten wegfallen.

Die Stammfunktionen unterscheiden sich dabei nur durch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

D.h. $F(x) + c$ ist nicht eine bestimmte Funktion, sondern eine Funktionsschar, also eine unendlich große Menge an Funktionen mit $c \in \mathbb{R}$.

Nicht jede Funktion besitzt eine eindeutige Stammfunktion!

1.4.2 Aufleitungsregeln

Generell gilt, dass die Potenz-, die Faktor- und die Summenregel sowie Sonderfälle der Differentiation bei der Aufleitung rückwärts anzuwenden sind.

Potenzregel

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c \quad (\text{Bsp.})$$

Faktorregel

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

$$f(x) = 4 \cdot x^2 \Rightarrow F(x) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 = \frac{4}{3} \cdot x^3 + c \quad (\text{Bsp.})$$

Summenregel

$$f(x) \pm g(x) \Rightarrow F(x) \pm G(x) + c$$

$$f(x) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \Rightarrow F(x) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + c = \frac{5}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + x + c \quad (\text{Bsp.})$$

Besondere Aufleitungen

$f(x)$	e^x	e^{-x}	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$F(x)$	e^x	$-e^{-x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$
$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$F(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

1.4.3 Partielle Integration

Die partielle Integration kann unter Umständen bei Produkten als Integranden angewandt werden.

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x) \, dx$$

oder anders (wie in Maple) geschrieben:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

VORGEHEN:

1. Den leichter aufzuleitenden Teil der Funktion als $g'(x)$ wählen
2. Bilden der Aufleitung von $g'(x)$
3. Einsetzen in den rechten Teil der Gleichung ($= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$)

**ANWENDUNG IN MAPLE: Partielle Integration**

1. `restart:with(plots):`
2. den leichter aufzuleitenden Teil der Funktion als $g'(x)$ wählen & Aufleitung $g(x)$ bilden mit $\int g'(x) \, dx$
3. *Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Integration Methods... → Parts*
4. f & g (aus 1.) einsetzen

1.4.4 Integration durch Substitution

Bei der Integration von verketteten Funktionen wird die Integration durch Substitution angewandt, also quasi die Umkehrung der Kettenregel der Differentiation.

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du \quad (\text{Subst.: } u = u(x))$$

Bei der Substitution mit $u = u(x)$ muss auch das Differential dx zu du transformiert werden.

VORGEHEN:

1. Wählen eines Teils des Integrals $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$ und substituiere $u = u(x)$
2. Umstellen der Gleichung $dx = \frac{du}{u'(x)}$ nach du
3. Einsetzen der substituierten Teile u & du in die zu integrierende Funktion
4. Bestimmung der Stammfunktion $F(u)$
5. Resubstitution

$$\begin{aligned} \int \sin(x^2) \cdot 2 \cdot x dx & \quad (\text{Subst.: } u = x^2) \\ dx = \frac{du}{2 \cdot x} \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx & \quad (\text{Differential}) \\ \int \sin(u) du & \\ = -\cos(u) & \\ = -\cos(x^2) & \quad (\text{Resub.}) \end{aligned}$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Integration durch Substitution

1. *Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Integration Methods... → Change*
2. **Substitution** $u = u(x)$
3. Integration nach Aufleitungsregeln
- ⋮
4. Resubstitution

Integration durch lineare Substitution

Die lineare Substitution findet Anwendung bei Verkettung mit linearen Funktionen.

$$\begin{aligned} \int f(a \cdot x + b) dx &= \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + c \\ \int (2x + 1)^2 dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (2x + 1)^3 + c \quad (\text{Bsp.}) \end{aligned}$$

1.4.5 Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral befasst sich mit der Berechnung des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$ in einem gegebenen Intervall $I = [a, b]$. Kennt man die momentane Änderungsrate einer Größe, so kann man die Gesamtveränderung rekonstruieren. Diese entspricht der Fläche unter dem Graphen der Änderungsrate. Dabei ist das Ergebnis des bestimmten Integrals eine reelle Zahl.

VORGEHEN:

1. Bestimmen der Stammfunktion $F(x)$
2. Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion
3. $F(b) - F(a) \rightarrow$ Bilden der Differenz

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^2 3 \cdot x^2 \, dx = [x^3]_1^2 = F(2) - F(1) = 8 - 1 = 7 \quad (\text{Bsp.})$$

Trapez-Formel



ANWENDUNG IN MAPLE: Trapez-Formel

1. *Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Riemann Sums / Newton-Cotes Formulae* \rightarrow *Trapezoidal Rule*
2. Funktion eingeben
3. a = untere Grenze; b = obere Grenze; n = Anzahl Teilintervall
4. *Riemann Sums* \rightarrow angeben, welche approximierte Fläche berechnet werden soll
5. *Display*

Simpson'sche Regel



ANWENDUNG IN MAPLE: Simpson'sche Regel

1. *Tools / Tutors / Calculus - Single Variable / Riemann Sums / Newton-Cotes Formulae* \rightarrow *Simpson's Rule*
2. Funktion eingeben
3. a = untere Grenze; b = obere Grenze; n = Anzahl Teilintervall, wobei n gerade sein muss
4. *Riemann Sums* \rightarrow angeben, welche approximierte Fläche berechnet werden soll
5. *Display*

1.4.6 Uneigentliches Integral

Funktionen, die unbeschränkt, also gegen Unendlich laufen, können trotzdem einen endlichen Flächeninhalt besitzen. Zur Veranschaulichung der Sinnhaftigkeit dieser Aussage ein Beispiel:

Man nehme ein Quadrat mit Seitenlänge $1m$. Nun halbiert man das Quadrat, das entstandene Rechteck wieder. Tut man dies unendlich oft, so strebt der Flächeninhalt der Gesamtheit aller Rechtecke (& Quadrate) gegen einen periodischen Wert. Da das ursprüngliche Quadrat jedoch $1m$ Seitenlänge besitzt, beträgt der Flächeninhalt $A_{\square} = 1m^2$.

Das Beispiel in Form einer geometrischen Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \approx 0,999 \Rightarrow A_{\square} = 1m^2$$

Besitzt eine Funktion $f(x)$ eine Polstelle in einer der Grenzen, also $x = a$ (1.) bzw. $x = b$ (2.), dann lässt sich deren Flächeninhalt trotzdem berechnen.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{a+c}^b f(x) dx \quad (1.)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_a^{b-c} f(x) dx \quad (2.)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{0+c}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0} [2 \cdot \sqrt{x}]_{0+c}^1 = \lim_{c \rightarrow 0} 2 - 2 \cdot \sqrt{0+c} = 2 \quad (Bsp.)$$

Ebenfalls lässt sich der Flächeninhalt berechnen, falls die Funktion für $x \rightarrow -\infty$ (1.) bzw. $x \rightarrow \infty$ (2.) gegen einen endlichen Wert strebt, diesen aber nie erreicht.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1.)$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (2.)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1 \quad (Bsp.)$$

1.5 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen werden Gleichungen für eine gesuchte Funktion genannt, in der auch deren Ableitungen vorkommen. Dabei beschreibt eine Differentialgleichung das Änderungsverhalten dieser Größen zueinander. Im Allgemeinen gibt es unendlich viele Lösungen, ist aber ein Startwert a gegeben, existiert in der Regel eine spezielle Lösung.

VORGEHEN: Allgemeine Lösung

1. Aufstellen der Differentialgleichung $F(x, y, \dots, y^n) = 0$
2. Trennung der Variablen durch Auflösung nach x auf eine Seite
3. Integration beider Seiten

VORGEHEN: Anfangsproblem

1. Bestimmen der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $F(x, y, \dots, y^n) = 0$
2. Einsetzen des Anfangswerts in die freien Parameter der allgemeinen Lösung



ANWENDUNG IN MAPLE: Differentialgleichungen

bei allgemeiner Lösung der DGL:

1. `restart:with(plots):with(DETools):`
2. DGL als Variable deklarieren, `DGL := f'(x) + f(x) = c`
3. `dsolve(DLG)`

bei spezieller Lösung des DGL mit Anfangsproblem / Startwert:

1. `restart:with(plots):with(DETools):`
2. DGL als Variable deklarieren, `DGL := f'(x) + f(x) = c`
3. Startwert als Variable deklarieren, `st := y(a) = n`
4. `dsolve({DLG, st}, y(x))`

1.5.1 Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Bestimmung einer speziellen Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit Anfangswert $y(a) = y_0$. Hierbei wird schrittweise dem Richtungsfeld gefolgt, welches für jeden Punkt tangential die Steigung anzeigt.

VORGEHEN:

1. Diskretisierung des Intervalls $[a, b]$
 - (a) $a = t_0 < \dots < t_n$
 - (b) $t_i = a + k \cdot i$
 - (c) $i = \frac{b-a}{n}$
2. Richtungsfeld folgen $\Rightarrow y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \cdot f(t_i, y(t_i))$

1.6 Taylor-Approximation

Bei der Taylor-Approximation werden Funktionen an einer Stelle $x = a$ durch ein Polynom angenähert bzw. approximiert. Dies hat den Vorteil, dass Polynome als Linearkombination von Potenzfunktionen für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar & integrierbar sind.

Die Taylor-Formel lautet wie folgt:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n$$

$$T_f(x) = \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{-\sin(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + R_3$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + R_3 \quad (\text{Bsp.})$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Taylor-Approximation

für Approximation n -ten Grades an der Stelle $x = a$

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. `taylor(f(x), x = a, n + 1)`

für Approximation n -ten Grades an der Stelle $x = a$ mit Fehlerabweichung:

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion $f(x)$ deklarieren
3. `taylor(f(x), x = a, n + 1)`
4. Ergebnis ohne O -Restglied als Funktion $g(x)$ deklarieren
5. $\frac{g(a+c)}{f(a+c)} \cdot 100 - 100$
6. `evalf(%)` → prozentuale Fehlerabweichung

Kapitel 2

Multivariate Funktionen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Grundlegende Definitionen

Multivariate Funktionen behandeln, wie der Name schon sagt, Funktionen, die nicht von einer, sondern beliebig vielen Variablen abhängig sind. Während univariate Funktionen zwei-dimensional sind, kommen bei multivariaten Funktionen pro weiterer Variable eine Dimension hinzu, z.B. Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen sind drei-dimensional (\mathbb{R}^3). Funktionen mit mehr als 2 unabhängigen Variablen sind nicht mehr vorstellbar & zeichnenbar. Das der Funktion zugeordnete n -Tupel kann als Punkt mit den Koordinaten (x_1, \dots, x_n) im Bildraum des \mathbb{R}^n verstanden werden.

Symbol	Beschreibung
$f(x_1, \dots, x_n)$	Wert der Funktion f in Abhängigkeit von x_1, \dots, x_n
(x_1, \dots, x_n)	n -Tupel unabhängiger (exogener) Variablen
$f_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f$	partielle Ableitung der Funktion f nach x_1
$f_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f$	partielle Ableitung 2. Grades nach x_1 & x_2
$grad(f)$	Gradient der Funktion f , beinhaltet alle 1. partiellen Ableitungen
H_f	Hesse-Matrix der Funktion f , beinhaltet alle 2. partiellen Ableitungen



ANWENDUNG IN MAPLE: Grundlagen

- `f := (x, y) → sin(x) + cos(y)`: Deklaration einer Funktion
- `plot3d(f(x, y), x = -a .. a, y = -b .. b)`: Zeichnen des Funktionsgraphen
- `g := unapply(a, [x, y])`: Deklaration einer Funktion abhängig von (x, y)

```
> restart:with(plots):  
> f := (x, y) → x2 + y2  
> plot3d(f(x, y), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5)  
> a := x·y  
> g := unapply(a, [x, y])
```

2.1.2 Isoquanten

Eine Isoquante (auch Höhenlinie genannt, analog zu Höhenlinien bspw. in der Geographie) bezeichnet eine Menge M , die alle Punkte (x_1, \dots, x_n) enthält, die den selben Funktionswert c besitzen.



ANWENDUNG IN MAPLE: Isoquanten

1. `restart:with(plots):`
2. Deklarieren der Funktion f
3. Isoquanten einzeichnen
 - `contourplot(f(x, y), x = -a .. a, y = -b .. b, contours = [-c, c])` → Isoquanten, in 2D eingezeichnet
 - `contourplot3d(f(x, y), x = -a .. a, y = -b .. b, contours = [-c, c], filledregions = true)` → Isoquanten, in 3D dargestellt

2.1.3 Partielle Ableitung

Bei der partiellen Ableitung wird eine multivariate Funktion f nur nach einer Variablen abgeleitet. Die Ableitungsregeln sind dieselben wie bei univariaten Funktionen, des Weiteren werden die anderen Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als Konstanten behandelt.

Der Wert $f_{x_a}(x_1, \dots, x_n)$ der partiellen Ableitung von f nach x_a gibt die Veränderung des Funktionswertes an, wenn sich x_a um eine Einheit ändert und alle weiteren Variablen als Konstanten betrachtet werden. Schreibweise: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x^2 + y^3 \cdot \sin(x) \\
 \frac{\partial}{\partial x} f &= 2 \cdot x + y^3 \cdot \cos(x) \\
 \frac{\partial}{\partial y} f &= x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot \sin(x)
 \end{aligned}
 \tag{Bsp.}$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Partielle Ableitung

1. `restart:with(plots):`
2. Funktion deklarieren
3. Ableitung bilden
 - $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$
 - `diff(f(x, y), x)`

2.1.4 Gradient

Der Gradient einer Funktion ist ein Vektor in einem Punkt $P_1 \in D_f$, dessen Einträge die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ sind und der in die Richtung des steilsten Anstiegs von f an dieser Stelle zeigt. Ist der Gradient an einer Stelle ein Nullvektor, wird dies stationärer Punkt genannt. Schreibweise:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^3 \cdot \sin(x)$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + y^3 \cdot \cos(x) \\ x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot \sin(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.})$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Gradient

1. `restart: with(Student[MultivariateCalculus]):`
2. Funktion deklarieren
3. Gradienten bestimmen
 - `Gradient(f(x, y), [x, y])` → unbestimmter Gradient
 - `Gradient(f(x, y), [x, y] = [a, b])` → Gradient im Punkt (a, b)

2.1.5 Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix einer Funktion ist eine Matrize, die alle partiellen Ableitungen 2. Grades einer Funktion beinhaltet. Da die partielle Ableitung einer multivariaten Funktion mit n unabhängigen Variablen ebenfalls wieder von n Variablen abhängig ist, kann die partielle Ableitung 2. Grades genau so oft abgeleitet werden. Bei n unabhängigen Variablen besitzt eine Funktion n^2 partielle Ableitungen 2. Grades. Diese werden in einer $n \times n$ -Matrix gesammelt.

Bei stetigen Funktionen sind die gemischten partiellen Ableitungen entlang der Hauptdiagonalen symmetrisch zueinander, auch Satz von Schwarz oder Young's Theorem genannt.

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^3 \cdot \sin(x)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + y^3 \cdot (-\sin(x)) & 2 \cdot x + 3 \cdot y^2 \cdot \cos(x) \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y^2 \cdot \cos(x) & 6 \cdot y \cdot \sin(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.})$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Hesse-Matrix

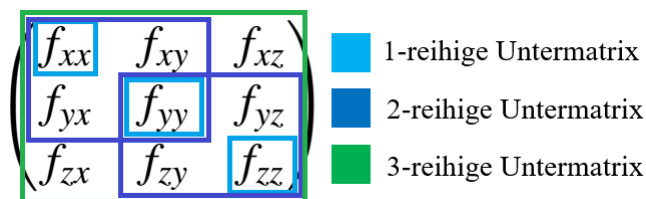
1. `restart:with(Student[VectorCalculus]):`
2. Funktion deklarieren
3. `Hessian(f(x, y), [x, y])` → Bilden der Hesse-Matrix
4. `simplify(%)` → Vereinfachen der Ausdrücke zur besseren Lesbarkeit

2.1.6 Hauptminore

Eine Minore bezeichnet in der linearen Algebra die Determinante einer quadratischen Matrix. Die Hauptminoren sind hierbei die Determinanten der Untermatrizen der Hesse-Matrix. Die Determinanten werden entlang der Hauptdiagonalen nach der sogenannten Nordwesteckenregel gebildet.

VORGEHEN:

1. 1-reihige Determinante bilden
2. 2-reihige Determinante bilden
3. \vdots
4. n -reihige Determinante bilden



$$\begin{aligned}
 D_{11} &= |f_{xx}| & D_{22} &= |f_{yy}| & D_{33} &= |f_{zz}| \\
 D_{12} &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} & D_{23} &= \begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \\
 D_{13} &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Definitheit

Die Definitheit der Hesse-Matrix einer Funktion ist eine hinreichende Bedingung zur Bestimmung von Extrema.

Definitheit	Bedingung
positiv (semi-)definit	alle Hauptminoren ≥ 0
negativ (semi-)definit	alle ungeraden Hauptminoren ≤ 0 , alle geraden Hauptminoren > 0
indefinit	weder positiv- noch negativ (semi-)definit mind. eine gerade Hauptminore < 0 mind. ein Vorzeichenwechsel der Hauptminoren in der Hauptdiagonale

2.2 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Bei der Optimierung von Funktionen ohne Nebenbedingungen werden die Extrempunkte anhand des Gradienten und der Definitheit der Hesse-Matrix untersucht.

Zunächst werden stationäre Punkte des Gradienten gesucht, das ist eine notwendige Bedingung zur Bestimmung von Extremstellen. Die Art des Extremums wird durch die Hesse-Matrix an der Stelle (a, b) bestimmt.

Definitheit	Art des Extremums
positiv (semi-)definit	Minimum
negativ (semi-)definit	Maximum
indefinit	Sattelpunkt



ANWENDUNG IN MAPLE: Extremwerte ohne Nebenbedingungen

1. `restart;with(LinearAlgebra):with(Student[VectorCalculus]):`
2. Funktion f deklarieren
3. `extrema(f(x,y), {}, {x,y}, 's')`
→ kritische Stellen finden
4. `s`
→ Koordinaten des Extremums ausgeben
5. Hesse-Matrix bilden
6. Hesse-Matrix als Variable H deklarieren
7. `h:= unapply(H, [x,y])` → Hesse-Matrix als Funktion deklarieren
8. Definitheit im Punkt (a,b) bestimmen
 - `IsDefinite(h(a,b), 'query'='positive_semidefinite')`
→ true: **Minimum**
 - `IsDefinite(h(a,b), 'query'='negative_semidefinite')`
→ true: **Maximum**
 - falls beide false, dann indefinit → **Sattelpunkt**

2.3 Optimierung unter Nebenbedingungen

Nun kann es sein, dass bei der Optimierung einer Funktion f , die auch Zielfunktion genannt wird, eine oder mehrere Nebenbedingungen g_1, \dots, g_m gegeben sind, die eingehalten werden müssen. Diese Nebenbedingungen sind als Gleichungen $g(x_1, \dots, x_n) = c$ gegeben, die meist normalisiert werden, d.h. $g(x_1, \dots, x_n) - c = 0$. Bei der Optimierung dieser Sachverhalte werden nur die Schnittpunkte der Hauptfunktion mit den Nebenbedingungen betrachtet.

Die Bestimmung der Extrempunkte der Zielfunktion unter Einhaltung der Nebenbedingungen kann mithilfe zweier unterschiedlicher Verfahren, der Variablensubstitution oder dem Lagrange-Verfahren erfolgen.

2.3.1 Variablensubstitution

Ein mögliches Verfahren zur Optimierung unter Nebenbedingungen ist die Substitution von Variablen. Hierbei werden bei einer Zielfunktion $f(x, \dots, x_n, y)$ die Nebenbedingungen nach einer beliebigen Variablen y umgestellt und diese Variable in allen Vorkommnissen mit der umgestellten Gleichung substituiert, anschließend wird eine neue Funktion $\tilde{f}(x, \dots, x_n)$ ohne y gebildet. Die Extremstellen werden dann wie bei der Optimierung ohne Nebenbedingungen über den Gradienten & die Hesse-Matrix ermittelt, die Optima des Funktionswertes von f stimmen hierbei mit denen von \tilde{f} überein.

x^* sei nun ein Extrempunkt der optimierten Funktion $\tilde{f}^*(x^*, \dots, x_n^*, y^*)$, die ermittelten Optimalwerte werden in die Gleichungen der substituierten Variable eingesetzt, so dass das Optimum der Variable y , also y^* gefunden werden kann. Hat man die Optimalwerte $f^*(x^*, \dots, x_n^*, y^*)$ bestimmt, ist das Optimierungsproblem abgeschlossen.

Vorteil dieses Verfahrens ist es, dass durch die Substitution die Nebenbedingungen in die Zielfunktion eingearbeitet werden und man die gewohnten Verfahren zur Optimierung anwenden kann. Im Optimalfall, falls die Anzahl der Nebenbedingungen m der Anzahl der Variablen $n - 1$ entspricht, kann man durch die Substitution von m Variablen eine multivariate Funktion zu einer univariaten Funktion umwandeln, wobei sich der Rechenaufwand massiv verringert.

VORGEHEN:

1. Nebenbedingung nach einer Variable y umstellen
2. Substitution von y in der Zielfunktion
3. Bestimmung der Extrema
4. Resubstitution in Optimalwertfunktion
5. Bestimmung des Wertes der substituierten Variable \rightarrow Einsetzen des Optimalpunkts in Substitutionsgleichung

Beispiel:

$$\min M(d, h) = \frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot h \quad (\text{ZF})$$

$$\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} = 1000 \quad (\text{NB})$$

$$h = \frac{4000}{\pi \cdot d^2} \quad (1.)$$

$$\tilde{M}(d) = \frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot \left(\frac{4000}{\pi \cdot d^2}\right) \quad (2.)$$

$$\tilde{M}'(d) = 0 \Rightarrow d^* \approx 10,84 \quad (3.)$$

$$\tilde{M}''(10,84) \approx 9,42 > 0 \Rightarrow TP(10,84|553,58)$$

$$h^* = \frac{4000}{\pi \cdot 10,84^2} \Rightarrow h^* \approx 10,84 \quad (5.)$$

$$\Rightarrow M^* \approx 553,58 \quad d^* \approx 10,84 \quad h^* \approx 10,84 \quad (\text{Optimalwerte})$$



ANWENDUNG IN MAPLE: Optimierung durch Variablensubstitution

1. `restart` :
2. Deklaration der Zielfunktion f
3. `h := g = c` \rightarrow Deklaration der Nebenbedingung $g(x,y) = c$ als Gleichung
4. `u := solve(h, y)` \rightarrow Auflösen der Gleichung nach y
5. Substitution von y mit u in der Zielfunktion f
6. Aufstellen einer neuen Funktion \tilde{f} ohne y
7. Optimierung
 - univariate Funktion $\tilde{f} \rightarrow$ Optimierung wie bei univariaten Funktionen
 - multivariate Funktion $\tilde{f} \rightarrow$ Optimierung wie bei multivariaten Funktionen ohne Nebenbedingungen
8. Einsetzen des Optimalwerts x^* in Substitutionsgleichung

2.3.2 Lagrange-Verfahren

Eine weitere Möglichkeit, unter Nebenbedingungen zu optimieren, ist das Lagrange-Verfahren. Dabei wird aus der Zielfunktion $f(x, \dots, x_n)$ und den Nebenbedingungen g_1, \dots, g_m eine neue Funktion gebildet. Die Nebenbedingungen g_1, \dots, g_m werden jeweils mit einem eigenen so genannten Lagrange-Multiplikator λ , einer Konstanten, multipliziert und als Linearkombination auf die Zielfunktion addiert. Daraus wird eine neue Funktion $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ gebildet.

$$f(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{ZF})$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$(\text{NB})$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n)$$

Zur Optimierung wird die Lagrange-Funktion nach allen Variablen abgeleitet, d.h. es wird der Gradient gebildet. Damit die Extrema gefunden werden können, muss der Gradient = 0 sein.

$$\text{grad } L = \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ \vdots \\ L_{x_n} \\ L_{\lambda_1} \\ \vdots \\ L_{\lambda_m} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

VORGEHEN:

1. Aufstellen der Lagrange-Funktion L
2. Ableitungen von $L \stackrel{!}{=} 0$ setzen
3. Gleichsetzen der ersten n Ableitungen mit λ
4. Ermitteln der Optimalwerte x_1^*, \dots, x_n^*
5. Ermitteln von $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

Beispiel:

$$\min M(d, h) = \frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot h \quad (\text{ZF})$$

$$\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} = 1000 \quad (\text{NB})$$

$$L(d, h, \lambda) = \frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot h + \lambda \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} - 1000 \right) \quad (1.)$$

$$\text{grad } L = \begin{pmatrix} L_d \\ L_h \\ L_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \cdot d + \pi \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \pi \cdot d \cdot h \\ \pi \cdot d + \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \pi \cdot d^2 \\ \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} - 1000 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.)$$

$$-\frac{2 \cdot (d + h)}{d \cdot h} = \lambda = -\frac{4}{d} \Rightarrow d = h \quad (3.)$$

$$\frac{\pi \cdot h^2 \cdot h}{4} = 1000 \Rightarrow h^* \approx 10,84 \Rightarrow d^* \approx 10,84 \quad (\text{Subst. } d = h)$$

$$\Rightarrow L^* \approx 553,58 \quad d^* \approx 10,84 \quad h^* \approx 10,84 \quad \lambda = 1$$

Lagrange-Multiplikator

Vorteil des Lagrange-Verfahrens gegenüber der Variablensubstitution ist, dass zusätzliche Informationen über die Funktion in Form von λ gegeben sind. Der Lagrange-Multiplikator λ beschreibt die Rate, mit der sich der optimale Wert der Zielfunktion ändert, wenn sich die Konstante c in der Nebenbedingung ändert. Erhöht sich c marginal um weitere a Einheiten, ändert sich λ um $\sim \lambda \cdot a$ Einheiten.



ANWENDUNG IN MAPLE: Optimierung durch Lagrange-Verfahren

1. restart:
2. Deklaration der Zielfunktion f
3. Deklaration der Nebenbedingung g
4. Optimierung
 - Maximize
 - (a) with(Optimization):
 - (b) Maximize($f(x,y)$, { $g(x,y)=c$ })
→ gibt Funktionswert & (x,y) -Koordinaten des Maximums an
 - Minimize
 - (a) with(Optimization):
 - (b) Minimize($f(x,y)$, { $g(x,y)=c$ })
→ gibt Funktionswert & (x,y) -Koordinaten des Minimums an
 - extrema
 - (a) extrema($f(x,y)$, { $g(x,y) = c$ }, { x, y }, 's')
 - (b) s
 - LagrangeMultipliers
 - (a) with(Student[MultivariateCalculus]):
 - (b) Aufstellen der Lagrange-Funktion L
 - (c) LagrangeMultipliers($L(x,y,\lambda)$, [$g(x,y) - c$], [x, y], output = detailed)
→ gibt Funktionswert, (x,y) -Koordinaten des Extremums & λ an

Beispiel aus Kap. 2.3.2:

```
> restart:
> M:= (d,h) →  $\frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot h$ 
> V:= (d,h) →  $\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}$ 
• Minimize
  > with(Optimization):
  > Minimize(M(d, h), {V(d, h) = 1000})
• extrema
  > extrema(M(d, h), {V(d, h) = 1000}, {d, h}, 's')
  > evalf(%)
  > s
  > evalf(%)
• LagrangeMultipliers
  > with(Student[MultivariateCalculus]):
  > LagrangeMultipliers( $\frac{\pi \cdot d^2}{2} + \pi \cdot d \cdot h + \lambda \cdot (\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} - 1000)$ ,
    [ $\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} - 1000$ ], [d, h], output = detailed)
  > evalf(%)
```


Kapitel 3

Ökonomische Anwendung

3.1 Univariate Funktionen

3.1.1 Grundlagen

Ökonomische Bedeutung der Differentialrechnung

Durch die Differentialrechnung lassen sich die Ableitungen der ökonomischen Funktionen bilden. Wie auch in der allgemeinen Differentialrechnung stellt die Ableitung die absolute Veränderung des Funktionswertes pro Veränderung der Variable x dar, in den Wirtschaftswissenschaften werden diese Ableitungen ökonomischer Funktionen **Grenzfunktionen** genannt.

Ökonomische Bedeutung der Integralrechnung

Das Finden der Stammfunktion ist in der Ökonomie von Nutzen, wenn nur eine Grenzfunktion gegeben ist und auf die jeweilige Funktion geschlossen werden soll. Die Verschiebung c des unbestimmten Integrals ergibt sich für $x = 0$ aus der jeweiligen Funktion oder aus dem Sachverhalt bzw. der Aufgabenstellung.

Desweiteren wird die Integralrechnung zur Berechnung der Gesamtveränderung verwendet, bspw. Bestimmung der Konsumentenrente.

Definitionsbereich in der Ökonomie

In der Ökonomie macht es (meist) keinen Sinn, negative Variablen zu betrachten, z.B. x = Anzahl verkaufter Produkte oder t = vergangene Zeit in Monaten.

Ökonomische Größen werden nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ betrachtet, es werden z.B. keine 0,735 Stück eines Gutes produziert. Folglich ist der Definitionsbereich zumeist diskret, d.h. es werden oft nur ganzzahlige Eingangsvariablen betrachtet. Desweiteren wird nicht bis ins Unendliche modelliert, sondern nur bis zu einem bestimmten Punkt a . Deshalb werden ökonomische Funktionen (meist) nur auf das Intervall $I = [0, a]$ beschränkt.

3.1.2 Erlös

Der Erlös lässt sich durch die Funktion $E(x)$ berechnen. Dabei ist abhängig, ob der Anbieter auf einem polypolistischen bzw. vollkommenen Markt agiert oder eine Monopolstellung innehat.

Polypolistischer Anbieter

$$E(x) = p \cdot x$$

Auf dem vollkommenen Markt ist der Preis nicht durch den Anbieter, sondern durch den Markt gegeben, p ist konstant. Die Erlösfunktion verläuft linear.

Monopolistischer Anbieter

$$E(x) = p(x) \cdot x$$

Der Erlös aus dem Verkauf eines Gutes ergibt sich aus der Preis-Absatz-Funktion. Dabei ist der Preis p abhängig von der Ausbringungsmenge x . Die Nachfragefunktion $x(p)$ bezogen auf das verkaufte Produkt ist die Umkehrfunktion der Preisfunktion, sie sind invers zueinander.

$E'(x)$: Grenzerlös \Rightarrow Steigerung des Erlöses pro weiterer verkaufter Einheit

$\int E'(x) dx = E(x) + c$, dabei ist $c = 0$, da bei $E(0)$ kein Erlös erbracht wird, wenn nichts verkauft wird.

Erlös wird maximal, wenn $\varepsilon_E = -1$

3.1.3 Kosten

$$K(x) = K_{var}(x) + K_{fix}$$

Die Gesamtkosten für die Produktion eines Produkts ergeben sich aus der Summe der variablen Kosten und dem Fixkostenanteil.

Funktion	Beschreibung
$K(x)$	Gesamtkosten
K_{var}	variable Kosten (abhängig von Ausbringungsmenge x)
K_{fix}	Fixkosten (bspw. Miete des Lagers)

Grenzkosten

$$K'(x) = K'_{var}(x)$$

Der Anstieg der Gesamtkosten pro weiterer produzierter Einheit stimmt mit dem Anstieg der variablen Kosten überein.

$\int K'_{var}(x) dx = K_{var}(x) + K_{fix}$, bei der Kostenfunktion gilt: $c = K_{fix}$, die Verschiebung des Graphen ergibt sich aus dem Fixkostenanteil der Kostenfunktion.

3.1.4 Gewinn & Break-Even-Analyse

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Der Gewinn lässt sich durch diese Funktion beschreiben. Dabei werden die Kosten vom Erlös abgezogen, der überbleibende Rest wird als Gewinn bezeichnet.

- ist $G(x)$ negativ, so wird Verlust gemacht.
- ist $G(x)$ positiv, so wird Gewinn verbucht
- ist $G(x) = 0$, wird dies Break-Even-Point genannt \Rightarrow Intervall $[x_1, x_2]$ zwischen den Nullstellen stellt das Nutzenintervall dar

Break-Even-Rechnung

VORGEHEN:

1. Aufstellen der Gewinnfunktion
2. Nullstellen von $G(x)$, zwischen denen $G(x)$ positiv verläuft, ermitteln
3. Positiv verlaufendes Intervall zwischen den Nullstellen beschreibt Zeitraum, in dem Gewinn erbracht wird (Nutzenintervall)
4. Berechnen des erzielten Gewinns mit $\int_{x_1}^{x_2} G(x) dx$



ANWENDUNG IN MAPLE: Break-Even-Analyse

- Nutzenintervall bestimmen
 1. $E(x)$ & $K(x)$ deklarieren
 2. $G(x)$ aufstellen
 3. $\text{fsolve}(G(x) = 0, x) \rightarrow$ Nutzenintervall $I[x_1, x_2]$
 4. $\int_{x_1}^{x_2} G(x) dx \rightarrow$ erzielter Gewinn im Nutzenintervall
- Gewinnmaximum bestimmen
 1. $E(x)$ & $K(x)$ deklarieren
 2. $G(x)$ aufstellen
 3. $\text{fsolve}(G'(x) = 0, x)$

Grenzwert

$$G'(x) = E'(x) - K'(x)$$

Grenzwert \Rightarrow Veränderung des Gewinns pro weiterer produzierter Einheit ergibt sich aus der Differenz aus Grenzerlös & Grenzkosten

3.1.5 Elastizität

Die Elastizität einer ökonomischen Funktion beschreibt die relative bzw. prozentuale Veränderung bei Veränderung der Variable um 1%. Man spricht häufig von der Input-Elastizität des Output (bspw. die Einkommens-Elastizität der Marktnachfrage, sprich die Elastizität der Marktnachfrage abhängig vom Einkommen). Die Elastizitätsfunktion bzgl. einer Funktion f lautet:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1} und $\varepsilon_f(x) \neq 0$, so lautet deren Elastizitätsfunktion:

$$\varepsilon_{f^{-1}}(x) = \frac{1}{\varepsilon_f(x)}$$

Das Ergebnis für die Berechnung der Elastizität an der Stelle $x = a$ kann man so interpretieren:

Wert ε	allgemeiner Begriff	Bedeutung
$ \varepsilon_f > 1$	f ist elastisch	starke Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Variable um 1%
$ \varepsilon_f = 1$	f ist proportional elastisch	fließende Änderung des Funktionswertes um 1% bei Veränderung der Variable um 1%
$ \varepsilon_f < 1$	f ist unelastisch	geringe Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Variable um 1%
$ \varepsilon_f = 0$	f ist vollkommen unelastisch	keine Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Variable um 1%

3.2 Multivariate Funktionen

3.2.1 Grundlagen

Ökonomische Bedeutung partieller Ableitungen

Bei der partiellen Ableitung wird nur die Veränderung einer Variablen betrachtet, während alle anderen als konstant angesehen werden. Dadurch kann bspw. bei einer Produktionsfunktion $Y(K, L)$ die Veränderung der Ausbringungsmenge betrachtet werden, wenn nur die Anzahl an eingesetzten Arbeitsstunden L erhöht wird.

Ökonomische Interpretation des Gradienten

Für einen Ausgangspunkt P_a ergibt sich der größte Outputzuwachs, wenn die Inputfaktoren in Richtung des durch den Gradienten $\text{grad } f$ gegebenen Vektors geändert werden.

Ökonomische Bedeutung von Nebenbedingungen

In der Ökonomie hat man es vor allem im Bereich der Produktion oder in der Volkswirtschaftslehre bei der Nutzenmaximierung mit begrenzten Mitteln zu tun (bspw. Budgetbegrenzungen). $g(x_1, \dots, x_n) = c$ stellt die Begrenzung dar, c ist der verfügbare Vorrat einer Ressource, der Funktionswert der Zielfunktion beschreibt den Output (bspw. den Nutzen oder den Gewinn).

Ökonomische Interpretation des Lagrange-Multiplikators λ

Der Lagrange-Multiplikator λ einer Lagrange-Funktion $L(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ wird in der Ökonomie auch Schattenpreis genannt. Im Beispiel der Produktionsfunktion zeigt λ auf, wie viele Güter mehr produziert werden können, wenn man das Budget marginal erhöht.

3.2.2 Regressionsanalyse

Die Regressionsanalyse ist ein Anwendungsgebiet der klassischen Wirtschaftsinformatik. Sie umfasst die mathematische Modellierung, die statistische Prognose sowie die informationstechnische Bearbeitung. Das Ziel der Regressionsanalyse besteht hierbei in der mathematischen Annäherung bereits vorhandener Daten in Form einer Funktion zur Erstellung einer Prognose. Die Hauptproblemstellung der Regressionsanalyse ist der mathematische Ansatz sowie die Wahl eines geeigneten Funktionstypen.

Bestimmtheitsmaße

Die Abweichungen vom Datenbestand werden durch Bestimmtheitsmaße, z.B. R^2 , aufgezeigt. Diese zeigen jedoch nicht unbedingt, wie qualitativ richtig die approximierende Funktion ist, sondern sind nur ein Hinweis für die Güte. Bei Polynomen hohen Grades ist $R^2 = 1$, d.h. es gibt keine Abweichung der Funktion zu den Datenbeständen, an den Rändern aber fängt die Funktion an auszuschlagen, zu oszillieren. Dadurch ist die Abweichung zu den Daten zwar minimal, die Abweichung zu den prognostizierten Daten ist jedoch relativ hoch.

ANWENDUNG IN EXCEL: Regressionsanalyse

1. Eintragen der Zeit-Werte in 1. Zeile
2. Eintragen der Ist-Werte in 2. Zeile
3. Markieren der beiden Zeilen
4. *Einfügen / Empfohlene Diagramme / Linie* → OK
5. Linie anklicken → Rechtsklick → *Trendlinie hinzufügen...*
6. *Trendlinienoptionen*
 - *Linear*
 - *Exponentiell*
 - *Polynomisch / Grad 3*
7. *Formel im Diagramm anzeigen*
8. *Bestimmtheitsmaß im Diagramm anzeigen*
→ zeigt Genauigkeit der Funktion an
9. zu prognostizierenden Zeit-Wert in Funktion einsetzen (bspw. in Maple)



ANWENDUNG IN MAPLE: Regressionsanalyse

1. `restart:with(Statistics):`
2. `X := Vector([x1,...,xn])` → Zeit-Werte als Vektor deklarieren
3. `Y := Vector([y1,...,yn])` → Ist-Werte als Vektor deklarieren
4. Funktion aufstellen
 - `f := unapply(Fit(a + b · x, X, Y, x)), x)`
→ Lineare Funktion
 - `f := unapply(Fit(a + b · x + c · x2, X, Y, x)), x)`
→ Polynom 2. Grades
 - `f := unapply(Fit(a + b · x + c · x2 + d · x3, X, Y, x)), x)`
→ Polynom 3. Grades
5. zu prognostizierenden Zeit-Wert in Funktion einsetzen