

# 2η Υποχρεωτική Εργασία Αριθμητική Ανάλυση Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

Αλεξία Νταντουρή - 3871

23 Ιανουαρίου 2022

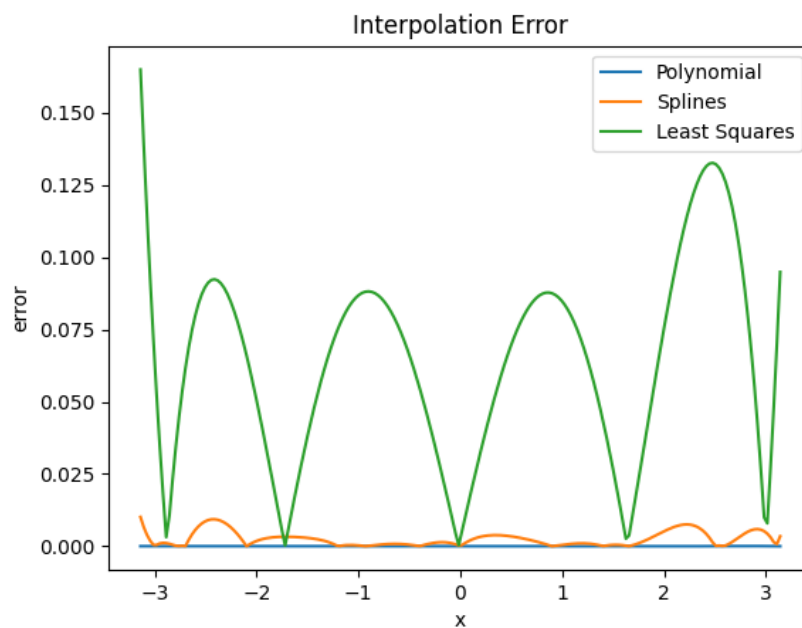
## 1 Άσκηση 5

Για να προσεγγίσω την συνάρτηση του ημιτόνου χρησιμοποιήσα τις παρακάτω τιμές του ημιτόνου με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

| x    | y       |
|------|---------|
| -3   | -0.1411 |
| -2.7 | -0.4274 |
| -2.1 | -0.8632 |
| -1.2 | -0.9320 |
| -0.4 | -0.3894 |
| 0    | 0       |
| 0.9  | 0.7833  |
| 1.4  | 0.9854  |
| 2.5  | 0.5985  |
| 3.1  | 0.0416  |

Παρακάτω, φαίνεται το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο  $[-\pi, \pi]$  χρησιμοποιώντας τις μεθόδους:

- Πολυωνυμική προσέγγιση (Lagrange)
- Splines
- Ελάχιστα τετράγωνα



[Αρχείο: `ask5errors.py`]

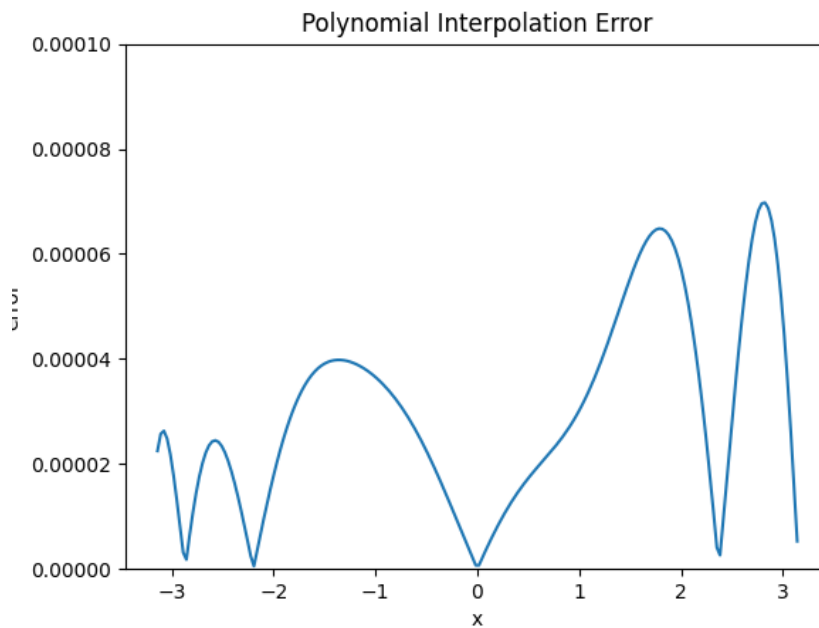
Φαίνεται πως η πολυωνυμική προσέγγιση έχει τα μικρότερα σφάλματα σε σχέση με τις άλλες 2 μεθόδους. Οι splines έχουν επίσης μικρά σφάλματα, αλλά μεγαλύτερα σε σχέση με την πολυωνυμική προσέγγιση. Τέλος, φαίνεται πως η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων έχει τα μεγαλύτερα σφάλματα σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους.

## 1.1 Πολυωνυμική προσέγγιση

[Αρχείο: `ask5polynomial.py`]

Προγραμματίσας σε python μία συνάρτηση `lagrange_interpolation(xp)`, η οποία επιστρέφει την προσέγγιση στο  $x_p$  με βάση το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange. Η συνάρτηση αυτή, καλεί την συνάρτηση `calc.L(i, xp)`, η οποία επιστρέφει το  $L_i(x_p)$ , το οποίο χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του πολυωνύμου Lagrange.

Παρακάτω, φαίνεται το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο  $[-\pi, \pi]$  χρησιμοποιώντας πολυωνυμική προσέγγιση.



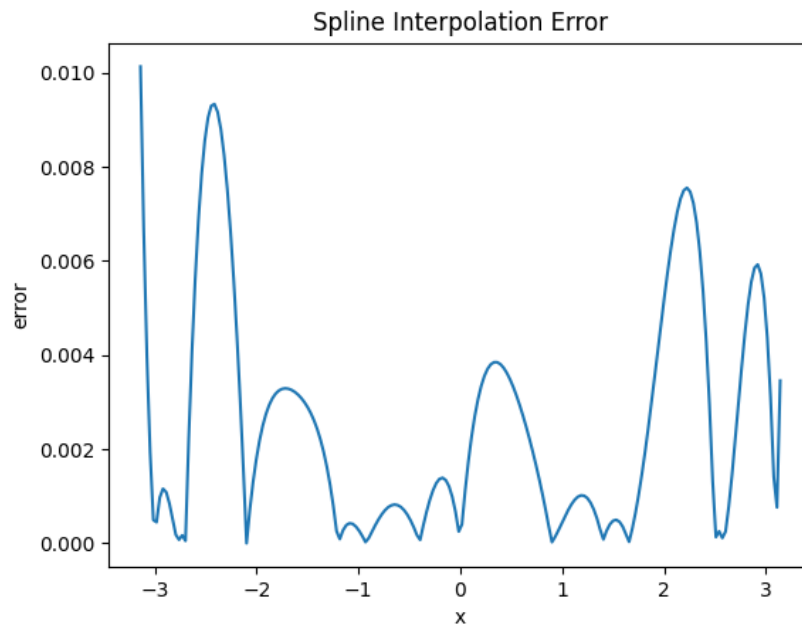
Φαίνεται, λοιπόν, πως με την πολυωνυμική προσέγγιση πετυχαίνουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

## 1.2 Splines

[Αρχείο: `ask5splines.py`]

Προγραμματίσας σε python μία συνάρτηση `splines_interpolation(x0, x, y)`, η οποία δέχεται έναν μονοδιάστατο πίνακα  $x_0$ , έναν μονοδιάστατο πίνακα  $x$  και έναν μονοδιάστατο πίνακα  $y$  και επιστρέφει την προσέγγιση  $f_0$  με βάση τα  $x, y$ , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των splines.

Παρακάτω, φαίνεται το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο  $[-\pi, \pi]$  χρησιμοποιώντας splines.



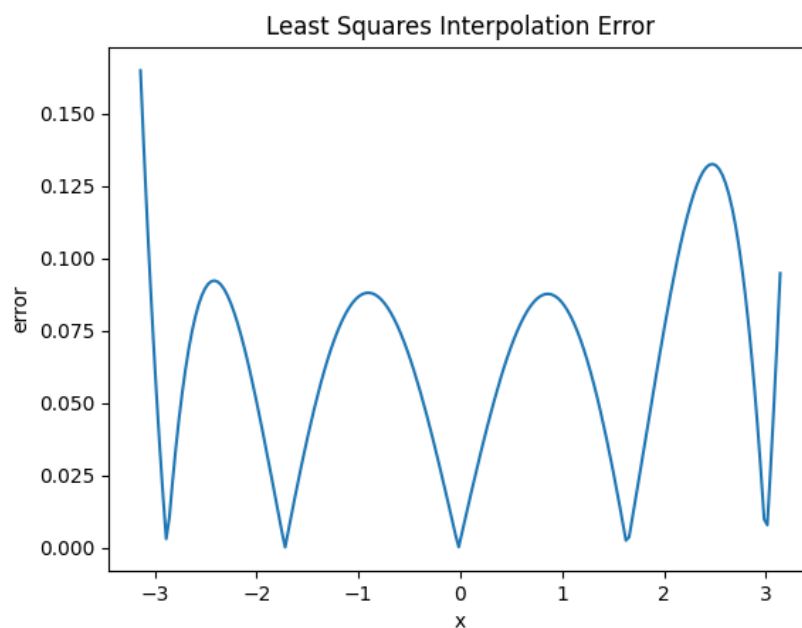
Φαίνεται, λοιπόν, πως με τις splines πετυχαίνουμε ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου.

### 1.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

[Αρχείο: `ask5leastsquares.py`]

Προγραμματίσα σε python μία συνάρτηση `least_squares(A, b, t)`, η οποία δέχεται έναν δισδιάστατο πίνακα  $A$ , έναν μονοδιάστατο πίνακα  $b$  και έναν float  $t$  και επιστρέφει την προσέγγιση στο  $t$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Η συνάρτηση αυτή καλεί την συνάρτηση `form(a, b, c, d, t)`, η οποία ορίζει το παραμετροποιημένο μοντέλο που χρησιμοποιείται για τα δεδομένα (στην προκειμένη περίπτωση πολυώνυμο 3ου βαθμού).

Παρακάτω, φαίνεται το σφάλμα προσέγγισης για 200 σημεία στο  $[-\pi, \pi]$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.



Φαίνεται, λοιπόν, πως με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων πετυχαίνουμε ακρίβεια μικρότερη του 1 δεκαδικού ψηφίου.

## 2 Άσκηση 6

### 2.1 Simpson's Rule

[Αρχείο: ask6SimpsonsRule.py]

Προγραμματίσα σε python μία συνάρτηση **simpsons\_rule(a, b, n)**, όπου  $n$  το πλήθος των υποδιαίρεσεων του διαστήματος  $[a, b]$ . Η συνάρτηση επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[a, b]$  με βάση τον κανόνα του Simpson. Στο πρόγραμμα δημιούργησα τη συνάρτηση **f(x)**, η οποία επιστρέφει την τιμή του ημιτόνου στο  $x$ . Επιπλέον, προγραμματίσα τη συνάρτηση **error\_bound(a, b, n, max)**, η οποία δέχεται τα  $a, b, n$ , και το  $\max$ , όπου  $\max = |f^{(4)}(x)| : x \in [a, b]$ . Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει το σφάλμα προσέγγισης του κανόνα Simpson.

Στο πρόγραμμα, καλώ την συνάρτηση **simpsons\_rule(a, b, n)**, με  $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$  και  $n = 10$  και βρίσκω την προσέγγιση 1.000003.

Τέλος, καλώ την συνάρτηση **error\_bound(a, b, n, max)**, με  $\max = 1$  και βρίσκω το σφάλμα:  $|e| \leq 0.000005$  και συγκεκριμένα  $e = 0.000003$ .

### 2.2 Μέθοδος τραπεζίου

[Αρχείο: ask6TrapezoidalRule.py]

Προγραμματίσα σε python μία συνάρτηση **trapezoidal\_rule(a, b, n)**, όπου  $n$  το πλήθος των υποδιαίρεσεων του διαστήματος  $[a, b]$ . Η συνάρτηση επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[a, b]$  με βάση τον κανόνα τραπεζίου. Στο πρόγραμμα δημιούργησα τη συνάρτηση **f(x)**, η οποία επιστρέφει την τιμή του ημιτόνου στο  $x$ . Επιπλέον, προγραμματίσα τη συνάρτηση **error\_bound(a, b, n, max)**, η οποία δέχεται τα  $a, b, n$ , και το  $\max$ , όπου  $\max = |f''(x)| : x \in [a, b]$ . Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει το σφάλμα προσέγγισης του κανόνα τραπεζίου.

Στο πρόγραμμα, καλώ την συνάρτηση **trapezoidal\_rule(a, b, n)**, με  $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$  και  $n = 10$  και βρίσκω την προσέγγιση 0.99794.

Τέλος, καλώ την συνάρτηση **error\_bound(a, b, n, max)**, με  $\max=1$  και βρίσκω το σφάλμα:  $|e| \leq 0.0032$  και συγκεκριμένα  $e = 0.00206$ .

## 3 Άσκηση 7

Επέλεξα να εκτιμήσω την τιμή κλεισίματος των κρυπτονομισμάτων Bitcoin και Ethereum. Για να προσεγγίσω την συνάρτηση τιμής κλεισίματος χρησιμοποίησα τις τιμές κλεισίματος για 10 συνεχόμενες ημέρες μέχρι και τις 04/04/2021, δηλαδή από τις 26/03/2021 μέχρι και τις 04/04/2021. Έπειτα, προέβλεψα την ισοτιμία των κρυπτονομισμάτων για τις επόμενες 5 ημέρες, δηλαδή από τις 05/04/2021 μέχρι και τις 09/04/2021.

| x  | Date       | BTC       | ETH      |
|----|------------|-----------|----------|
| 1  | 26/03/2021 | 55,137.31 | 1,702.84 |
| 2  | 27/03/2021 | 55,937.51 | 1,716.49 |
| 3  | 28/03/2021 | 55,950.75 | 1,691.36 |
| 4  | 29/03/2021 | 57,750.20 | 1,819.68 |
| 5  | 30/03/2021 | 58,917.69 | 1,846.03 |
| 6  | 31/03/2021 | 58,918.83 | 1,918.36 |
| 7  | 01/04/2021 | 59,095.81 | 1,977.28 |
| 8  | 02/04/2021 | 59,384.31 | 2,143.23 |
| 9  | 03/04/2021 | 57,603.89 | 2,028.42 |
| 10 | 04/04/2021 | 58,758.55 | 2,093.12 |
| 11 | 05/04/2021 | 59,057.88 | 2,107.89 |
| 12 | 06/04/2021 | 58,192.36 | 2,118.38 |
| 13 | 07/04/2021 | 56,048.94 | 1,971.08 |
| 14 | 08/04/2021 | 58,323.95 | 2,088.57 |
| 15 | 09/04/2021 | 58,245.00 | 2,072.11 |

Προσέγγισα την συνάρτηση τιμής κλεισίματος με πολυώνυμο 2ου, 3ου και 4ου βαθμού με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

### 3.1 Bitcoin

Αρχείο: ask7BTC2ndDegPolynomial.py

Αρχείο: ask7BTC3rdDegPolynomial.py

Αρχείο: ask7BTC4thDegPolynomial.py

Παρακάτω, φαίνονται οι προσεγγίσεις της ισοτιμίας του Bitcoin σε σχέση με τις διαθέσιμες τιμές, καθώς και οι προβλέψεις για τις επόμενες 5 τιμές χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 2ου, 3ου και 4ου βαθμού.

| x  | Date       | BTC       | 2nd deg   | 3rd deg   | 4th deg    |
|----|------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 1  | 26/03/2021 | 55,137.31 | 54,743.75 | 54,905.97 | 55,303.19  |
| 2  | 27/03/2021 | 55,937.51 | 55,951.43 | 55,897.35 | 55,411.86  |
| 3  | 28/03/2021 | 55,950.75 | 56,956.37 | 56,821.19 | 56,446.04  |
| 4  | 29/03/2021 | 57,750.20 | 57,758.58 | 57,638.85 | 57,705.05  |
| 5  | 30/03/2021 | 58,917.69 | 58,358.06 | 58,311.71 | 58,708.93  |
| 6  | 31/03/2021 | 58,918.83 | 58,754.79 | 58,801.14 | 59,198.36  |
| 7  | 01/04/2021 | 59,095.81 | 58,948.79 | 59,068.53 | 59,134.73  |
| 8  | 02/04/2021 | 59,384.31 | 58,940.06 | 59,075.24 | 58,700.09  |
| 9  | 03/04/2021 | 57,603.89 | 58,728.59 | 58,782.66 | 58,297.17  |
| 10 | 04/04/2021 | 58,758.55 | 58,314.38 | 58,152.16 | 58,549.38  |
| 11 | 05/04/2021 | 59,057.88 | 57,697.43 | 57,145.11 | 60,300.81  |
| 12 | 06/04/2021 | 58,192.36 | 56,877.75 | 55,722.89 | 64,616.23  |
| 13 | 07/04/2021 | 56,048.94 | 55,855.33 | 53,846.88 | 72,781.10  |
| 14 | 08/04/2021 | 58,323.95 | 54,630.18 | 51,478.46 | 86,301.52  |
| 15 | 09/04/2021 | 58,245.00 | 53,202.29 | 48,578.99 | 106,904.32 |

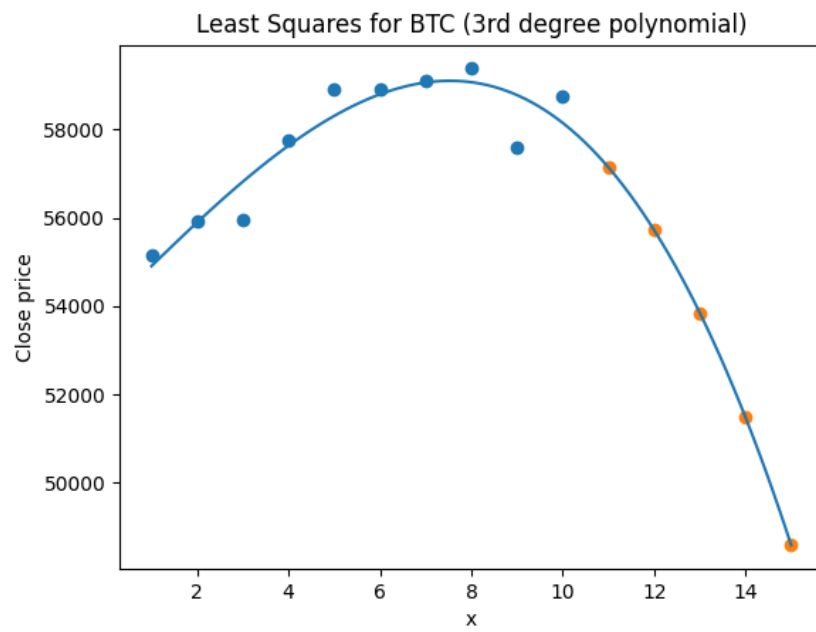
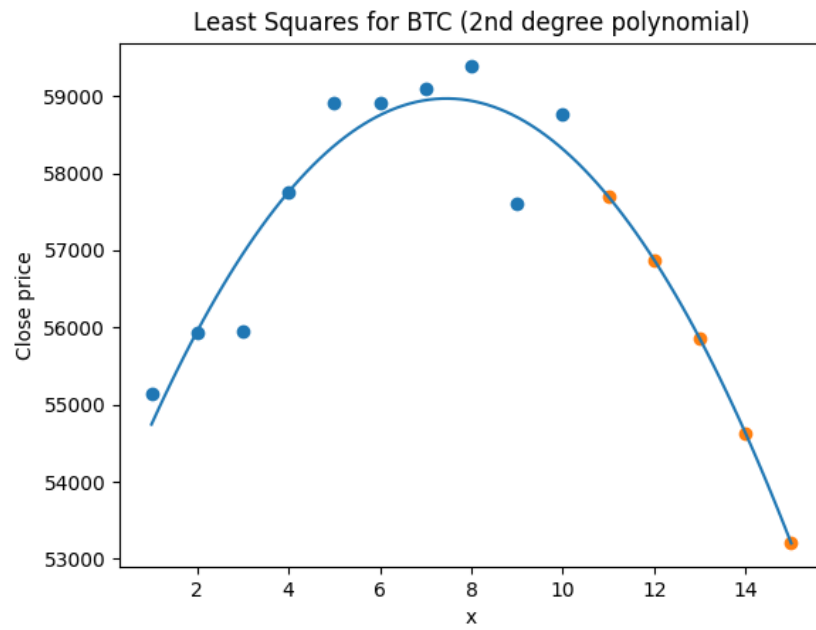
Παρακάτω, φαίνονται τα σφάλματα των προσεγγίσεων σε σχέση με τις διαθέσιμες τιμές.

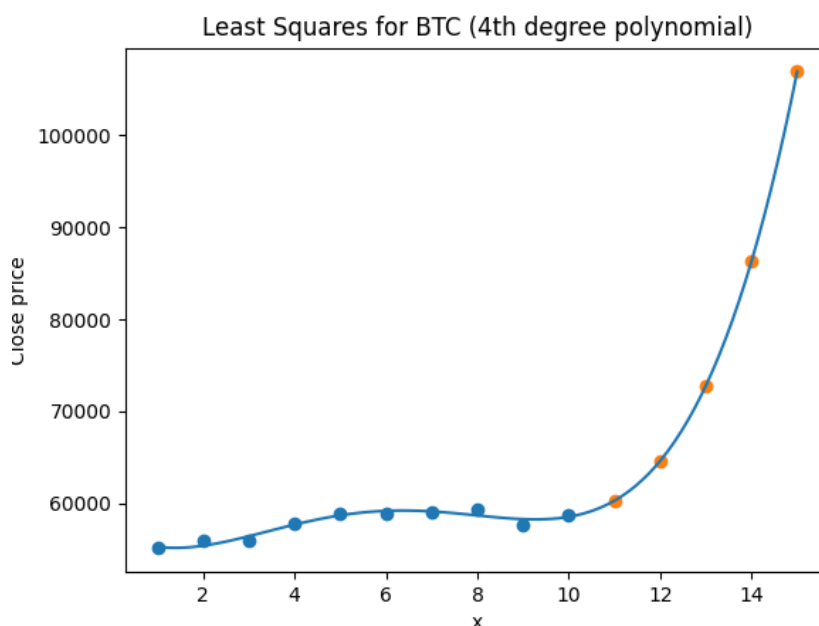
| x  | Date       | BTC       | 2nd deg  | 3rd deg  | 4th deg   |
|----|------------|-----------|----------|----------|-----------|
| 11 | 05/04/2021 | 59,057.88 | 1,360.45 | 1,912.77 | 1,242.93  |
| 12 | 06/04/2021 | 58,192.36 | 1,314.61 | 2,469.47 | 6,423.87  |
| 13 | 07/04/2021 | 56,048.94 | 193.61   | 2,202.06 | 16,732.16 |
| 14 | 08/04/2021 | 58,323.95 | 3,693.77 | 6,845.49 | 27,977.57 |
| 15 | 09/04/2021 | 58,245.00 | 5,042.71 | 9,666.01 | 48,659.32 |

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο 2ου βαθμού έχει τα μικρότερα σφάλματα, ενώ το πολυώνυμο 4ου βαθμού έχει τα μεγαλύτερα σφάλματα.

Παρατηρούμε, επίσης, πως η 1η πρόβλεψη για κάθε πολυώνυμο είναι κοντά στην πραγματική τιμή. Καθώς όμως απομακρυνόμαστε από τις τιμές που χρησιμοποιήσαμε ως δεδομένα, οι προβλέψεις αποκλίνουν όλο και περισσότερο από τις πραγματικές τιμές.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα για τα πολυώνυμα 2ου, 3ου και 4ου βαθμού. Τα μπλε σημεία είναι οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει η προσέγγιση και τα πορτοκαλί σημεία είναι οι 5 προβλέψεις με βάση τα αντίστοιχα πολυώνυμα.





### 3.2 Ethereum

Αρχείο: ask7ETH2ndDegPolynomial.py

Αρχείο: ask7ETH3rdDegPolynomial.py

Αρχείο: ask7ETH4thDegPolynomial.py

Παρακάτω, φαίνονται οι προσεγγίσεις της ισοτιμίας του Ethereum σε σχέση με τις διαθέσιμες τιμές, καθώς και οι προβλέψεις για τις επόμενες 5 τιμές χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 2ου, 3ου και 4ου βαθμού.

| x  | Date       | ETH      | 2nd deg  | 3rd deg  | 4th deg  |
|----|------------|----------|----------|----------|----------|
| 1  | 26/03/2021 | 1,716.49 | 1,661.05 | 1,707.77 | 1,707.15 |
| 2  | 27/03/2021 | 1,691.36 | 1,713.10 | 1,697.52 | 1,698.28 |
| 3  | 28/03/2021 | 1,819.68 | 1,765.01 | 1,726.08 | 1,726.67 |
| 4  | 29/03/2021 | 1,846.03 | 1,816.80 | 1,782.31 | 1,782.21 |
| 5  | 30/03/2021 | 1,918.36 | 1,868.45 | 1,855.10 | 1,854.47 |
| 6  | 31/03/2021 | 1,977.28 | 1,919.96 | 1,933.31 | 1,932.69 |
| 7  | 01/04/2021 | 2,143.28 | 1,971.35 | 2,005.83 | 2,005.73 |
| 8  | 02/04/2021 | 2,143.23 | 2,022.60 | 2,061.54 | 2,062.12 |
| 9  | 03/04/2021 | 2,028.42 | 2,073.73 | 2,089.30 | 2,090.06 |
| 10 | 04/04/2021 | 2,093.12 | 2,124.71 | 2,077.99 | 2,077.37 |
| 11 | 05/04/2021 | 2,107.89 | 2,175.57 | 2,016.50 | 2,011.56 |
| 12 | 06/04/2021 | 2,118.38 | 2,226.30 | 1,893.69 | 1,879.76 |
| 13 | 07/04/2021 | 1,971.08 | 2,276.89 | 1,698.45 | 1,668.79 |
| 14 | 08/04/2021 | 2,088.57 | 2,327.35 | 1,419.64 | 1,365.09 |
| 15 | 09/04/2021 | 2,072.11 | 2,377.68 | 1,046.15 | 954.79   |

Παρακάτω, φαίνονται τα σφάλματα των προσεγγίσεων σε σχέση με τις διαθέσιμες τιμές.

| x  | Date       | ETH      | 2nd deg | 3rd deg | 4th deg |
|----|------------|----------|---------|---------|---------|
| 11 | 05/04/2021 | 2,107.89 | 67.68   | 91.39   | 96.33   |
| 12 | 06/04/2021 | 2,118.38 | 107.92  | 224.69  | 238.62  |
| 13 | 07/04/2021 | 1,971.08 | 305.81  | 272.63  | 302.29  |
| 14 | 08/04/2021 | 2,088.57 | 238.78  | 668.93  | 723.48  |
| 15 | 09/04/2021 | 2,072.11 | 305.57  | 1025.96 | 1117.32 |

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο 2ου βαθμού έχει τα μικρότερα σφάλματα, ενώ το πολυώνυμο 4ου βαθμού έχει τα μεγαλύτερα σφάλματα.

Παρατηρούμε, επίσης, πως η 1η πρόβλεψη για κάθε πολυώνυμο είναι κοντά στην πραγματική τιμή. Καθώς όμως απομακρυνόμαστε από τις τιμές που χρησιμοποιήσαμε ως δεδομένα, οι προβλέψεις αποκλίνουν όλο και περισσότερο από τις πραγματικές τιμές.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα για τα πολυώνυμα 2ου, 3ου και 4ου βαθμού. Τα μπλε σημεία είναι οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει η προσέγγιση και τα πορτοκαλί σημεία είναι οι 5 προβλέψεις με βάση τα αντίστοιχα πολυώνυμα.

